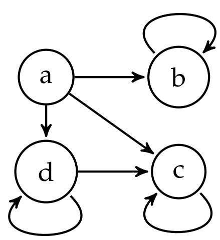
Segunda Prova de Lógica Matemática — 2024/1
Prof. José de Oliveira Guimarães — DComp — Campus de Sorocaba da UFSCar

Ao final da prova, entregue APENAS a folha de respostas. A folha de questões não será considerada. Utilize quantas folhas de resposta forem necessárias. Não é necessário entregar as questões em ordem. Utilize lápis ou caneta, mas faça letra legível. Na correção, símbolos ou palavras ilegíveis não serão considerados.

Provas de alunos que fizeram a prova próximos uns dos outros com respostas semelhantes caracterizam cópia de questões. Lembro-os de que todos os envolvidos na utilização de métodos ilegais na realização desta prova receberão zero de nota final da disciplina (e não apenas nesta prova).

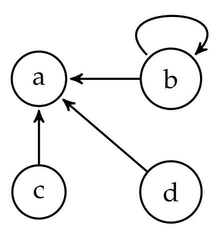
Coloque o seu nome na folha de resposta, o mais acima possível na folha, seguido do número da sua coluna de carteiras. A primeira carteira é a mais perto da porta e a última a mais perto das janelas. Não precisa colocar o RA.

1. (4,0, sendo 1,0 cada item) Esta questão utiliza as estruturas dadas a seguir. O grafo representa a relação E binária. Adicionalmente, as estruturas podem ter predicados unários, dados dentro dos retângulos. O nome de cada estrutura está embaixo do retângulo (G_{11}, por exemplo).



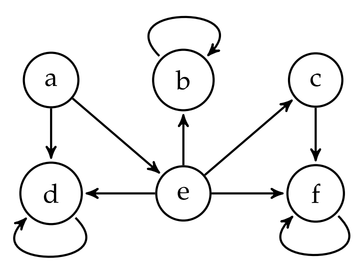
$P = \{ b \}$ $\quad Q = \{ c, d \}$

G_{11}



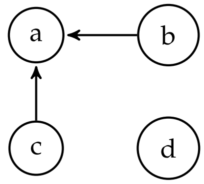
$P = \{ a \}$ $\quad Q = \{ a, b \}$

G_{22}



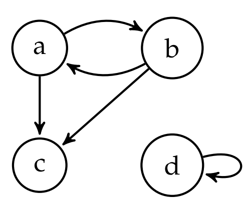
$P = \{ e \}$ $\quad Q = \{ a, e, c \}$

G_{33}



$P = \{ a, c \}$ $\quad Q = \{ b, c \}$

G_{44}



$P = \{ a,c,d \}$ $\quad Q = \{ a, b \}$

G_{55}

O predicado binário $E(x, y)$ significa, na figura, que há uma aresta de x para

y (seta de x para y). Os elementos da estrutura são chamados de "vértices" nos grafos. Baseado nos grafos, dê na folha de respostas o índice de uma única estrutura em que a fórmula de cada item é verdadeira (podem existir várias, mas a questão exige uma única e você só pode colocar uma). Então, escreva algo como 33 e não G_{33}. Escreva "nenhuma" se nenhuma estrutura é modelo para a fórmula.

(a) $\exists x\, \forall y\, P(x) \land (y \neq x \longrightarrow E(y,x))$	(b) $\forall x\, (Q(x) \longrightarrow \exists y\, P(y) \land E(x,y))$
(c) $\forall x\, (P(x) \land Q(x) \longrightarrow \forall y\, \neg E(y,x))$	(d) $Q(x) \longrightarrow \exists y\, E(x,y) \land E(y,y)$

2. (4,0, sendo 1,0 cada) Esta questão utiliza a estrutura $\mathbb{N}$ e os seguintes predicados:
$P = \{\, 2n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ (pares),
$n < k$ (n é menor do que k),
$I = \{\, 2n+1 \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ (ímpares),
$T = \{\, 2^n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ (potências de 2),
$R = \{\, n \mid n \text{ é primo} \,\}$ (primos),
$D = \{\, (n,m) \mid \text{existe } k \text{ tal que } m = kn \,\}$ (Isto é, n divide m).

Abaixo se seguem uma lista de frases e uma lista de fórmulas.

(a) Toda potência de 2 é par.

(b) Se um número n é par, então há um número ímpar que é maior do que o dobro que n.

(c) Existe pelo menos um primo entre duas potências de dois.

(d) Se um número é primo, ele só tem dois divisores: 1 e o próprio primo.

Fórmulas

Moscou	$\exists x\, \exists y\, \forall z\, (R(z) \land I(z) \longrightarrow z = x \lor z = y) \longrightarrow \exists x\, \exists y\, (P(y) \longrightarrow y = x)$
Paris	$\forall x\, \forall y\, (T(x) \land T(y) \land \exists z\, R(z) \land x < z \land z < y)$
Ciano	$\exists x\, \exists y\, (D(x,y) \longrightarrow y = x \lor y = 1)$
Azul	$\forall x\, (T(x) \land P(x))$
Manaus	$\forall x\, \forall y\, (D(x,y) \longrightarrow P(x) \land I(y))$
Damasco	$\exists x\, \exists y\, (x \neq y \land I(x) \land I(y) \land R(x) \land R(y) \longrightarrow \exists z\, P(z))$
Brasília	$\forall x\, x = 1 \lor (R(x) \land P(x)) \lor (I(x) \land R(x)) \lor \neg R(x)$
Vermelho	$\exists x\, (P(x) \longrightarrow \exists y\, I(y) \land 2x < y)$
Turqueza	$\exists x\, \exists y\, \exists z\, (T(x) \land T(y) \land R(z))$
Amarelo	$R(x) \longrightarrow (\forall y\, (D(y,x) \longrightarrow y = 1 \lor y = x))$
Rosa	$\neg R(x) \lor (\exists y\, D(y,x) \longrightarrow y = 1 \lor y = x)$

A resposta a esta pergunta é mapear as frases às fórmulas. Mas com um detalhe: pode ser necessário mudar um ou no máximo dois símbolos de uma fórmula para adaptá-la à frase (ou não mudar nada). A resposta a cada um dos itens DEVE ser como mostrado abaixo para um suposto item (g) cuja frase é "Existe um primo que é par". A etiqueta da fórmula modificada seria Uberaba. Se por acaso não há modificação alguma a ser feita na fórmula, a resposta deve ser apenas a etiqueta.

(g) Uberaba $\overset{\exists}{\forall}\, x\, R(x) \wedge P(x)$

Importante: lembre-se que $M \vDash \varphi$ sse $M \vDash \forall x\, \varphi$. Exemplo: $M \vDash P(x) \longrightarrow R(y, x)$ sse $M \vDash \forall x\, \forall y\, (P(x) \longrightarrow R(y, x))$.

Resp.:

Ao invés de colocar o símbolo modificado acima do símbolo da fórmula, colocamos a fórmula já correta com o símbolo corrigido dentro de um círculo.

Azul $\forall x\, (T(x) \longrightarrow P(x))$

Vermelho $\forall x\, (P(x) \longrightarrow \exists y\, I(y) \wedge 2x < y)$

Paris $\forall x\, \forall y\, (T(x) \wedge T(y) \longrightarrow \exists z\, R(z) \wedge x < z \wedge z < y)$

Amarelo

3. (3,0) Prove a seguinte afirmação. Cite todos os teoremas e proposições que você usar.

$\forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \nvdash \forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)$

Se você usar estruturas em algum momento, há restrições a serem obedecidas: o universo da estrutura deve ser formado pelas QUATRO primeiras letras do seu nome, maiúsculas ($|M| = \{A, N, M, R\}$ se o seu nome é Ana Maria) e nenhum predicado pode ser vazio. Obviamente, justifique.

Resp.:

$\forall x (P(x) \vee Q(x)) \nvdash \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$ sse, pelo teorema da completude e correção, $\forall x\, (P(x) \vee Q(x)) \nvDash \forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)$.

Considere a estrutura M tal que $|M| = \{\,0,\ 1\,\}$ e $P = \{\,0\,\}$, $Q = \{\,1\,\}$. Então

$$M \vDash \forall x\, (P(x) \vee Q(x))$$

Pois, para todo $x \in |M|$, $x \in P$ ou $x \in Q$. Mas

$$M \nvDash \forall x\, P(x) \vee \forall x\, Q(x)$$

Pois,

$$M \nvDash \forall x\, P(x)$$

já que $1 \notin P$ e também

$$M \nvDash \forall x\, Q(x)$$

já que $0 \notin Q$.

4. (1,0) Dê um exemplo do axioma da substituição. Use necessariamente fórmulas do seguinte vocabulário: $\mathcal{V} = (\ \{Q^2, R^2, S^3\},\ \{f^1, g^2, +\}, \{0, 1, 2\}\ )$. Não use meta-fórmulas. A fórmula A do axioma (veja resumo) da sua resposta deve usar pelo menos um predicado e uma função.

Resp.:

$$R(0, y) \wedge (g(y, 1) = y) \longrightarrow \exists x\, R(x, y) \wedge (g(y, 1) = y)$$

Resumo

Ordem de precedência entre os conectivos, do maior para o menor: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\forall$, $\exists$, $\longrightarrow$, $\longleftrightarrow$.

Uma **estrutura** $\mathfrak{A}$ para $\mathcal{L}$ é formado por: (a) um conjunto de elementos não vazio chamado de *universo* da estrutura, denotado por $|\mathfrak{A}|$; (b) um conjunto de predicados e funções da estrutura. Um predicado P de aridade n é uma *relação* em $|\mathfrak{A}|^n$, o que implica que $P \subset |\mathfrak{A}|^n$. Uma função de aridade n é uma função de $|\mathfrak{A}|^n$ em $|\mathfrak{A}|$ (sempre !); (c) uma associação de predicados da estrutura a símbolos de predicado de $\mathcal{L}$, funções da estrutura a símbolos de função de $\mathcal{L}$ e elementos do conjunto universo da estrutura a símbolos de constante de $\mathcal{L}$.

Uma estrutura $\mathfrak{A}$ de uma linguagem $\mathcal{L}$ é um **modelo** para uma fórmula A em $\mathcal{L}$ se A é **verdadeira** em $\mathfrak{A}$. Escrevemos $\mathfrak{A} \vDash A$. Uma estrutura $\mathfrak{A}$ de uma linguagem $\mathcal{L}$ é um **modelo** para um **conjunto** de fórmulas Γ em $\mathcal{L}$ se $\mathfrak{A}$ é modelo para cada uma das fórmulas de Γ. Escrevemos $\mathfrak{A} \vDash \Gamma$. Escrevemos $\Gamma \vDash A$ para indicar que A é verdadeira em todos os modelos do conjunto Γ. Uma fórmula A de uma linguagem $\mathcal{L}$ é **logicamente válida** se e somente se ela é **verdadeira** em todas as estruturas de $\mathcal{L}$. Considere as fórmulas A e B de uma mesma linguagem $\mathcal{L}$. Dizemos que uma fórmula A **logicamente implica** uma fórmula B se, para toda estrutura de $\mathcal{L}$, toda seqüência que satisfaz A também satisfaz B. Considere as fórmulas A e B de uma mesma linguagem $\mathcal{L}$. Dizemos que uma fórmula A **é logicamente equivalente** a uma fórmula B se A **implica logicamente** B e vice-versa.

Considere a fórmula A e um conjunto Γ de fórmulas de uma linguagem $\mathcal{L}$. Uma fórmula A é uma **conseqüência lógica** de um conjunto de fórmulas Γ se A

é **verdadeira** em todos os modelos de Γ. Isto é, se $\mathfrak{A} \vDash \Gamma$ para certo modelo $\mathfrak{A}$, então $\mathfrak{A} \vDash A$. Escrevemos $\Gamma \vDash A$.

Esquemas de axiomas da LPO: (A1) $\neg A \vee A$ (ax. proposicional) (A2) $A_x(t) \longrightarrow \exists x A$ (ax.da substituição) (A3) $x = x$ (ax. da identidade) (A4) $(x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n) \longrightarrow f(x_1, \ldots x_n) = f(y_1, \ldots y_n)$ ou
$(x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_n = y_n) \longrightarrow (P(x_1, \ldots x_n) \longleftrightarrow P(y_1, \ldots y_n))$ (ax. da igualdade)

Regras de dedução da LPO: [expansão:] se A é um teorema, então $A \vee B$ é um teorema, onde B é uma fórmula qualquer; [eliminação:] se $A \vee A$ é um teorema, então A é um teorema; [associatividade:] se $A \vee (B \vee C)$ é um teorema, $(A \vee B) \vee C$ é um teorema; [corte:] se $A \vee B$ e $\neg A \vee C$ são teoremas, $B \vee C$ são teoremas. [introdução do $\exists$:] se x não é livre em B (não existe ou é ligado) e $A \longrightarrow B$ é teorema, então $(\exists x A) \longrightarrow B$ é teorema.