ESMA 3016: CONCEPTOS BASICOS DE PROBABILIDADES

Dr. Edgar Acuña

http://academic.uprm.edu/eacuna

UNIVERSIDAD DE PUERTO RICO

RECINTO UNIVERSITARIO DE MAYAGUEZ

4.1 Espacio Muestral y Eventos

4.1.1 Experimentos Aleatorios y Espacios Muestrales

Un experimento es una observación de un fenómeno que ocurre en la naturaleza. Tipos de experimentos:

Experimentos Determinísticos: Son aquellos en donde no hay incertidumbre acerca del resultado que ocurrirá cuando éstos son repetidos varias veces.

Experimentos Aleatorios: Son aquellos en donde no se puede anticipar el resultado que ocurrirá, pero si se tiene una completa idea acerca de todos los resultados posibles del experimento cuando éste es ejecutado.

4.1 Espacio Muestral y Eventos

Espacio Muestral: Es el conjunto de posibles resultados de un experimento aleatorio. Representaremos el espacio muestral S y cada elemento de él es llamado un punto muestral. Ejemplo:

Exp2: Lanzar un par de monedas y anotar el resultado que sale

Exp 5: Se anota el tiempo que hay que esperar para ser atendidos en un Banco

$S_2 = \{CC, CX, XC, XX\}$ $\qquad$ $s_5 = \{t : t \geq 0\} \equiv [0, \infty)$

Tipos de espacios muestrales:

Espacios muestrales discretos: Son espacios muestrales cuyos elementos resultan de hacer conteos, y por lo general son subconjuntos de los números enteros.

Espacios muestrales continuos: Son espacios muestrales cuyos elementos resultan de hacer mediciones, y por lo general son intervalos en la recta Real.

4.1.2. Eventos

Un **Evento** es un resultado particular de un experimento aleatorio. En términos de conjuntos, un evento es un subconjunto del espacio muestral. Por lo general se le representa por las primeras letras del alfabeto. Ejemplo:

A: Que salga un número par al lanzar un dado.

E: Que haya que esperar más de 10 minutos para ser atendidos.

Evento Nulo: Es aquél que no tiene elementos. Se representa por ϕ.

Evento Seguro: Es el espacio muestral que puede ser considerado como un evento.

4.1.3. Relaciones entre eventos

Unión de eventos: Dados dos eventos A y B de un mismo espacio muestral su unión se representa por $A \cup B$ y es el evento que contiene los elementos que están en A o en B, o en ambos. El evento ocurre si al menos uno de los dos eventos ocurre. Dada una colección $A_1, \ldots, A_n$ de eventos, su unión denotada por $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ ocurre si al menos uno de los $A_i, (1 \leq i \leq n)$ ocurre.

Intersección de eventos: Dados dos eventos A y B de un mismo espacio muestral su intersección se representa por $A \cap B$ y es el evento que contiene los elementos que están en A y B al mismo tiempo. El evento ocurre cuando los eventos ocurren simultáneamente. Dada una colección $A_1, \ldots, A_n$ de eventos, su intersección denotada por $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ ocurre si todos los eventos $A_i, (1 \leq i \leq n)$ ocurren a la vez.

4.1.3. Relaciones entre eventos

Evento Complemento: El complemento de un evento A se representa por $\overline{A}$ y es el evento que contiene todos los elementos que no están en A. El evento $\overline{A}$ ocurre si A no ocurre.

Propiedades de relaciones entre eventos: Sean A, B y C elementos de un mismo espacio muestral S entonces:

1) **Propiedad Conmutativa:** $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
2) **Propiedad Asociativa:** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3) **Propiedad Distributiva:** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
4) **Leyes de De Morgan:** $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Todas estas propiedades se pueden aplicar a más de dos eventos.

4.2 Métodos de asignar Probabilidades

4.2.1 Método Axiomático: La Probabilidad es considerada como una función de valor real definida sobre una colección de eventos de un espacio muestral S que satisface los siguientes axiomas:

1. $P(S) = 1$
2. Si A es un evento de S entonces $P(A) \geq 0$.
3. Si, A_i es una colección de eventos disjuntos (por pares) entonces $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$. Esta es llamada el axioma de aditividad contable. Asumiendo que $A_{n+1} = A_{n+2} = \ldots = \phi$ se sigue del axioma 3 que $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$, ésta es llamada la propiedad de aditividad finita.

Propiedades de la probabilidad

$$P(\phi) = 0$$

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(AUB) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ejemplo 4.1.

Juan y Luis están solicitando ser admitidos en una universidad. La probabilidad de que Juan sea admitido es 0.7 y la probabilidad de que Luis sea admitido es 0.6. La probabilidad de que ambos sean admitidos es .45.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que solamente uno de ellos sea admitido?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de ellos sea admitido?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los dos sea admitido?

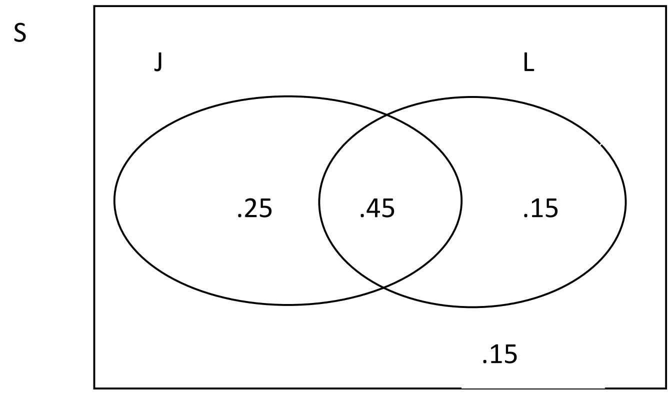


Diagrama de Venn para el ejemplo 4.1

	J	No J	
L	.45	.15	.6
No L	.25	.15	.4
	.7	.3	1.00

Tabla de clasificacion cruzada para el ejemplo 4.1

Ejemplo 4.2.

Una empresa tiene dos maneras *A* **y** *B* de presentar un nuevo producto al mercado. Si presenta el producto de la manera *A* la probabilidad de que el producto sea exitoso es 0.44 y si lo presenta de la manera *B* la probabilidad de éxito se reduce a 0.29. La probabilidad de que el producto fracase con ambas maneras de presentación es 0.37. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto sea exitoso con ambas formas de presentación?

Solución:

Los eventos son: ***A***: Que el producto sea exitoso con la manera *A* y ***B***: que el producto sea exitoso con la manera *B*. Tenemos que hallar $P(A \cap B)$

El problema puede ser resuelto aplicando la Ley de Morgan y la regla aditiva pero usaremos en su lugar diagramas de Venn y tabla de clasificacion cruzada.

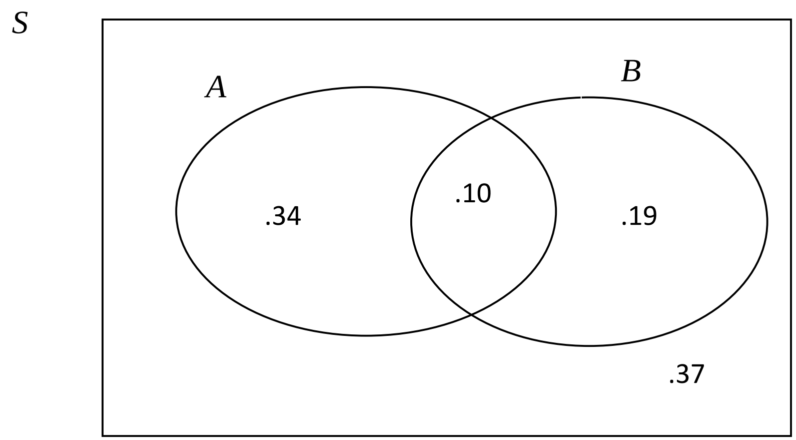


Diagrama de Venn para el ejemplo 4.2

	A	$\bar{A}$	
B	0.10	0.19	0.29
$\bar{B}$	0.34	0.37	0.71
	0.44	0.56	1.00

Tabla de clasificacion cruzada para ejemplo 4.2

4.2.2. Método Clásico

Un espacio muestral finito $S = \{w_1, ..., w_n\}$ se dice que es **Equiprobable** si cada uno de sus elementos tiene la misma probabilidad de ocurrencia, es decir para todo $P(w_i) = \frac{1}{n}$ $, i = 1, \ldots, n$

Ejemplo 4.3. Se lanza un par de dados legales y distinguibles, entonces su espacio muestral dado por:

$$S = \{(i, j) : i, j = 1,2,3,4,5,6\}$$

tiene 36 resultados, cada uno de ellos con probabilidad de ocurrencia 1/36.

4.2.2. Probabilidades- Método Clásico

Definición. Si un experimento aleatorio tiene un espacio muestral equiprobable S que contiene $\#(S)$ elementos y A es un evento de S que ocurre de $\#(A)$ maneras distintas entonces la probabilidad de ocurrencia de A es:

$$P(A) = \frac{\#(A)}{\#(S)}$$

Ejemplo 4.4. ¿Cuál es la probabilidad de que salga suma mayor que 7 al lanzar un par de dados?

Solución:

El evento ***A***: Suma mayor que 7, incluye los resultados que dan suma 8, 9, 10, 11 ó 12 y éstos ocurren de 5, 4, 3, 2 y 1 maneras repectivamente. Luego $\#(A) = 15$, por lo tanto $P(A) = 15/36$.

Ejemplo 4.5

Un oficial de una universidad matrícula al azar a 2 estudiantes: *A* y *B* en 4 secciones de un curso S1, S2 S3 y S4 son asignados al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que:

A)Los dos estudiantes sean asignados a la misma sección?
B) Ningún estudiante sea asignado a la sección *S*3?
C) Al menos un estudiante sea asignado a la sección *S*1?

	A				
B		S1	S2	S3	S4
	S1	(1,1)	(1,2)	(1,2)	(1,4)
	S2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)
	S3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)
	S4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)

A) 4/16
B) 9/16
C) 7/16

4.2.3 Probabilidades-Método Frecuencial

Si un experimento se repite *n* veces y *n(A)* de esas veces ocurre el evento *A*, entonces la frecuencia relativa de *A* se define por $f_A = \frac{n(A)}{n}$.

Se puede notar que:

a) $f_S = 1$

b) $f_A \geq 0$

c) Si A y B son eventos disjuntos entonces $f_{A \cup B} = f_A + f_B$

Es decir satisface los axiomas de probabilidad.

Definición. La probabilidad del evento *A* es el valor al cual se aproxima f_A cuando el experimento se ha repetido un gran número de veces. O sea:

$$\frac{n(A)}{n} \to P(A)$$

4.2.5 Probabilidades-Método Subjetivo

Algunas personas de acuerdo a su propio criterio generalmente basado en su experiencia, asignan probabilidades a eventos, éstas son llamadas **probabilidades subjetivas**. Por ejemplo:

- La Probabilidad de que *llueva mañana* es 40%.
- La Probabilidad de que *haya un terremoto en Puerto Rico antes del 2000* es casi cero.
- La Probabilidad de que *el caballo Camionero gane el clásico del domingo* es 75%.

Calculo de Probabilidades usando simulacion: Lab 9 y Lab 10

4.3 Probabilidad Condicional

Sean A y B dos eventos de un mismo espacio muestral S. La probabilidad condicional de A dado que B ha ocurrido esta dado por:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\#(A \cap B)}{\#(B)}$$

Ejemplo 4.6. Se lanza un par de dados legales y distinguibles. ¿Cuál es la probabilidad de que solamente uno de los dos dados sea par si se sabe que la suma de los dos es mayor que 8?

Solución:

Sean los eventos $\boldsymbol{A}$: Que solamente uno de los dos dados sea par y el evento condicionante $\boldsymbol{B}$: Que la suma sea mayor que 8. Claramente $\#(B) = 10$ y $\#(A \cap B) = 6$. Luego $P(A/B) = 6/10$.

Ejemplo 4.7

El 60% porciento de los pacientes que acuden a una consulta medica tiene dolor de cabeza y el 40% porciento tiene catarro. El 25% de ellos tienen ambos síntomas. Se elige al azar un paciente y resulta que tiene catarro cual es la probabilidad de que tenga dolor de cabeza?

Sol:

P(Dolor Cabeza/Catarro)=P(Dolor de Cabeza y Catarro)/P(Catarro)

=.25/.40=.625 o 62.5%

Es decir, que conocer que la persona tiene catarro solo ha incrementado en 2.5% la probabilidad de tener dolor de cabeza.

Si el porcentaje de personas que tengan ambos sintomas subiera digamos a 35%. Entonces P(DC/Catarro)=.35/.40=87.5 y en ese caso si la probabilidad de dolor de cabeza tendria un incremento de un 27.5%

Ejemplo 4.13

En una ciudad se hizo una encuesta acerca de la opinión de las personas adultas con respecto a una ley del gobierno. La siguiente tabla muestra los resultados de la encuesta clasificados según el sexo del entrevistado.

	A favor	En contra	Abstenidos	Total
Hombre	12	28	8	48
Mujer	10	15	12	37
Total	22	43	20	85

Se elige al azar una persona

a)¿Cuál es la probabilidad de que favorezca la ley si resulta ser mujer?

b)¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer si resulta estar en contra de la ley?

c)¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre si la persona elegida no se abstuvo de opinar?

4.3.1 Regla del Producto.

Dados los eventos A y B de un mismo espacio muestral, la probabilidad de que ambos ocurran esta dado por:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B / A)$$

Ejemplo 4.15. Según la Comisión Electoral de un país, el 90 por ciento de las esposas votan si sus esposos lo hacen, y el 20 por ciento vota si su esposo no lo hace. Además el 70 por ciento de los hombres casados votan. Se elige al azar un matrimonio. ¿Cuál es la probabilidad de que:

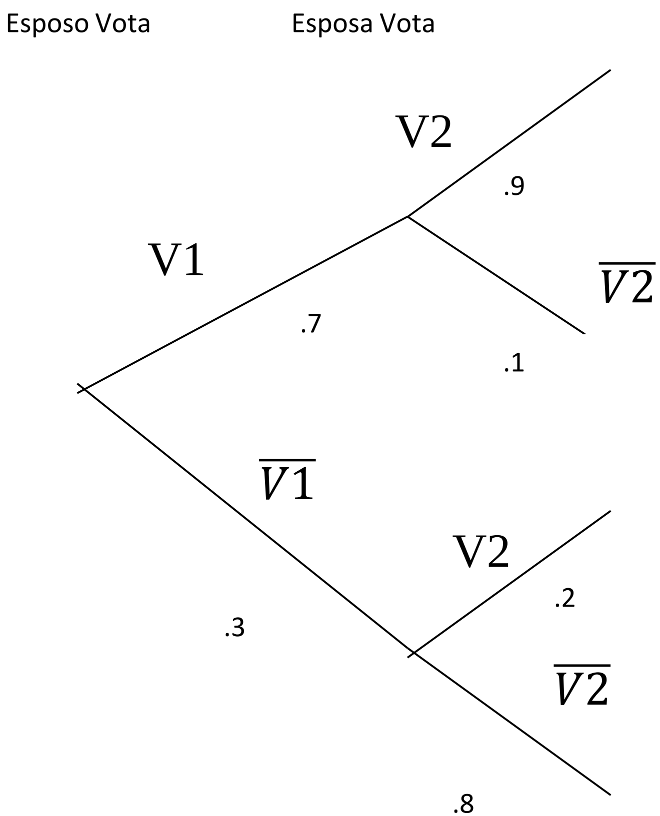
a) ambos esposos voten?

b) sólo uno de los esposos vote?

c) vote la esposa?

d) al menos uno de los esposos vote?

.



P(V1yV2)=.7*.9=.63

$P(V1 \text{ y } \overline{V2}) = .7 * .1 = .07$

$P(\overline{V1}\ y\ V2) = .3 * .2 = .06$

$P(\overline{V1}\ y\overline{V2}) = .3 * .8 = .24$

a) .63
b) .13
c) .69
d) .76

4.3.2 Probabilidad Total y Regla de Bayes

Regla de la Probabilidad Total: Sean *B*1,…,*Bn* una *colección de eventos* que forman una *partición* del espacio muestral S esto es $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = S$ y $B_i \cap B_j = \phi$ *para* $i \neq j$. Sea A otro evento definido sobre S entonces:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) P(A / B_i)$$

Notar que: $A = A \cap S = A \cap (\bigcup_{i=1}^{n} B_i)$. Aplicando la propiedad Distributiva: $A = \bigcup_{i=1}^{n} A \cap B_i$, la unión es disjunta, y y aplicando el tercer axioma: $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i)$. Finalmente se aplica la regla del producto a cada término de la suma. Para una partición de S en dos eventos B y $\overline{B}$ se obtiene:

$$P(A) = P(B) P(A / B) + P(\overline{B}) P(A / \overline{B})$$

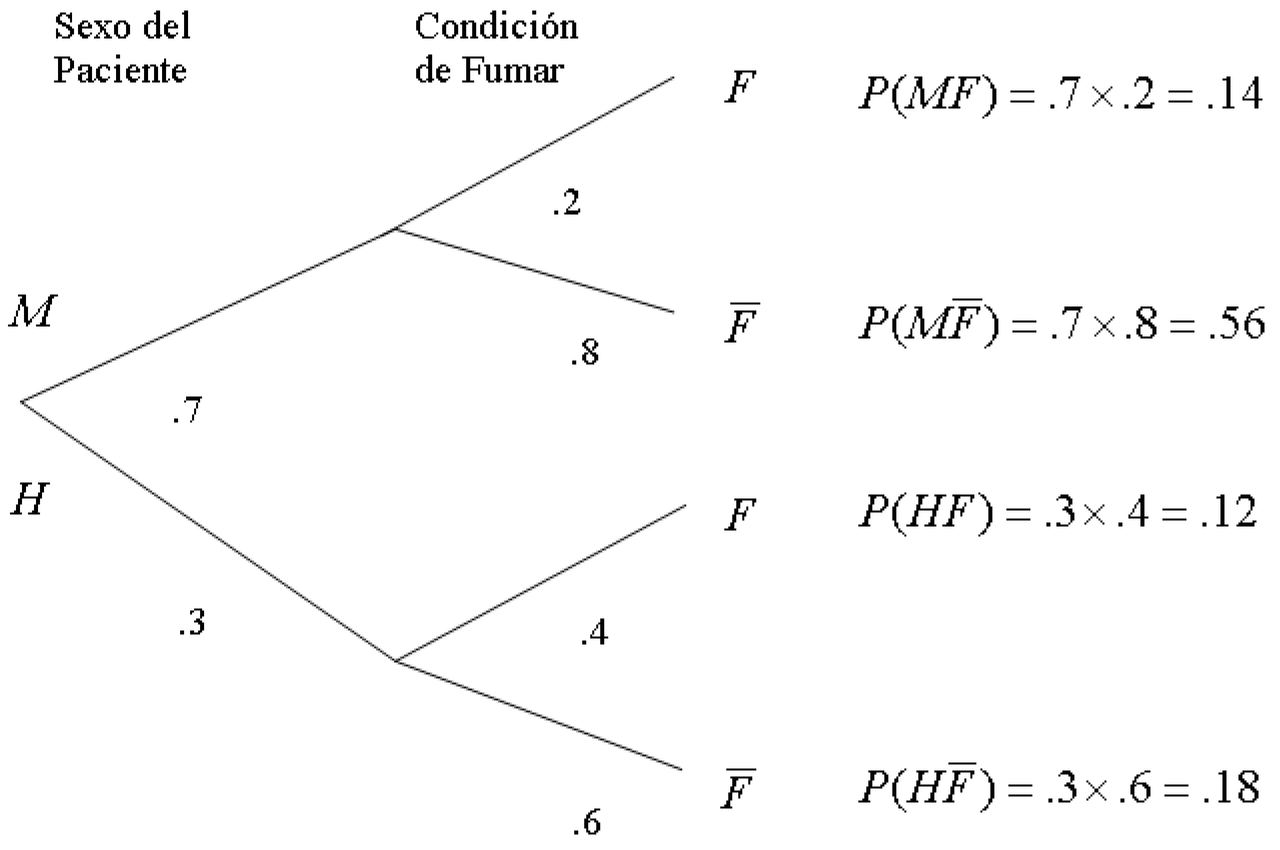
Ejemplo 4.17

El 70 % de los pacientes de un hospital son mujeres y el 20% de ellas son fumadoras. Por otro lado el 40 % de los pacientes hombres son fumadores. Se elige al azar un paciente del hospital. ¿Cuál es la probabilidad de que sea fumador?

Solución:

Sean los eventos *F*: Que el paciente sea fumador, *H*: Que el paciente sea hombre y *M*: Que el paciente sea mujer. Claramente, $P(F)=P(M)P(F/M)+P(H)P(F/H)$, luego se tiene: $P(M)=.7$, $P(H)=.3$ $P(F/M)=.2$ y $P(F/H)=.4$, sustituyendo estos valores en la fórmula anterior: $P(F)=.7\times.2+.3\times.4=.26$,

Diagrama de árbol para el ejemplo 4.17



Ejemplo 4.18

El 80 % de los estudiantes aprueban la clase y el 40% de ellos on de escuela publica. Por otro lado el 60 % de los estudiantes que fracasan son de escuela publica Se elige al azar un estudiamnte. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de escuela publica?

Solución:

Sean los eventos *P*: Que el estudiante pase, y F Que el el estudiante no pase la clase y *Pu*: Que el estudiante sea de escuela publica

La Regla de Bayes

Bajo las mismas condiciones de la regla de probabilidad total, se cumple que:

$$P(B_j / A) = \frac{P(B_j)P(A/B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A/B_i)}$$

Por definición de probabilidad condicional $P(B_j / A) = \frac{P(B_j \cap A)}{P(B)}$ y aplicando la regla del producto en el numerador y probabilidad total en el denominador se obtiene la regla de Bayes. La fórmula permite calcular facilmente probabilidades condicionales, llamadas probabilidades aposteriori siempre y cuando se conozca las probabilidades a priori $P(B_j)$, y las probabilidades condicionales $P(A/B_j)$

Regla de Bayes (cont)

Para dos eventos A y B, la regla de Bayes puede ser re-escrita como

$$\mathrm{P}(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B/A)}{P(B)}$$

El objetivo es determinar como se afecta la probabilidad de ocurrencia de A una vez que se conoce la informacion dada en B.
En el ejemplo de los eventos Dolor de Cabeza (DC) y Catarro se podria aplicar si se dan como datos que; el 40% de los pacientes que le duele la cabeza tienen catarro y si el 25% de los que No les duele la cabeza tien catarro.
Entonces,

P(DC/Catarro)=.6*.4/(.6*.4+.4*.25)=.24/.34=.7058

Es decir, conocer que la persona tiene catarro incrementa la probabilidad de tener dolor de cabeza de 60% a 70.6%.

Ejemplo 4.18

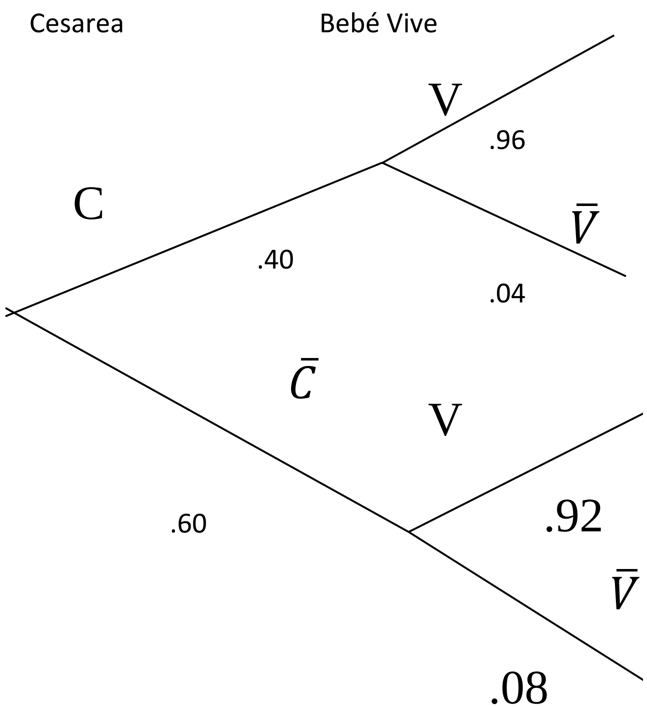
En un hospital el 40% de todos los partos son por césarea y de ellos el 96% de los bebes sobreviven al parto. Por otro lado el 92% de los bebes que no nacen por cesarea sobreviven al parto. Se elige al azar una mujer que va a tener un parto en el hospital. ¿Cuál es la probabilidad de que su bebé viva?.

Si el bebe sobrevivio cual es la probabilidad de que el parto haya sido por cesarea?

Solucion. (Ver el árbol en el próximo slide)

a)P(V)=.384+.552=.936

b)P(C/V)=.384/.936=.410



$P(CyV)=.4*.96=.384$

$P(Cy\bar{V}) = .4 * .04 = .016$

$P(\bar{C}\ y\ V)=.6*.92=.552$

$P(\bar{C}\ \ y\bar{V}) = .6 * .08 = .048$

Ejemplo 4.19

Un banco solo da prestamos hipotecarios al 75 por ciento de los clientes que lo solicitan. De estos el 80 porciento gana mas de 35 mil dolares anuales. De los que el Banco denega el prestamo solo 10 porciento gana mas de 35 mil. Se elige al azar un cliente y resulta que gana mas de 35 mil cual es la probabilidad de el banco le otorge el prestamo?

Solucion:

.75*.80/(.75*.80+.25*.10)=.96

Es decir, saber que la persona gana mas de 35 mil al ano incrementa la probabilidad de que se le preste para comprar su casa de 75% a 96%.

4.4 Eventos Independientes

Dos eventos A y B son independientes si la ocurrencia de uno de ellos no afecta la probabilidad de ocurrencia del otro. O sea:

$$P(A/B) = P(A) \text{ o } P(B/A) = P(B)$$

De la definición de probabilidad condicional se obtiene la siguiente definición equivalente:

Dos eventos A y B son independientes si:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

Ejemplo 4.24

Un tirador hace dos disparos a un blanco. La probabilidad de que acierte en el blanco es .8, independientemente del disparo que haga. ¿Cuál es la probabilidad de que el tirador:

a) Acierte ambos disparos?

b) Acierte sólo uno de los dos disparos?

c) Acierte por lo menos un disparo?

d) No acierte ninguno de los dos disparos?

Solución:

Sean los eventos *Ai*: Que el tirador da en el blanco en el disparo *i* (*i* =1, 2). Por aplicación directa de la propiedad 5 se obtiene:

a) $P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = (.8)(.8) = .64$

b) $P(A_1\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1A_2) = P(A_1)P(\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1)P(A_2) = (.8)(.2) + (.2)(.8) = .32$

c) $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1)P(A_2) = (.8) + (.8) - (.64) = .96$

d) $P(\overline{A}_1\overline{A}_2) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2) = (.2)(.2) = .04$