Probability and Statistical Inference Notes

Your Name

July 18, 2025

Contents

1 Rappels sur la théorie des ensembles

La théorie des probabilités est le fondement sur lequel repose la statistique, fournissant des outils pour modéliser ce qui peut être considéré comme un phénomène aléatoire. Grâce à ces modèles, les statisticiens sont en mesure de tirer des conclusions concernant une population partant des données d'un échantillon. Tout comme la statistique s'appuie sur la théorie des probabilités, la théorie des probabilités repose à son tour sur la théorie des ensembles, dont nous revoyons quelques principes dans ce premier chapitre.

2 La notion d'ensemble

Un ensemble est une collection d'objets appelés "éléments". L'énoncé $x \in E$ signifie "x appartient à E" et $x \notin E$ veut dire que E ne contient pas x. On peut définir l'ensemble de deux manières:

- en extension (Set-roster notation): en énumérant entre accolades ses éléments (exemple: $E = \{a, b, c\}$, ou bien $A = \{1, 2, 3, \dots, 100\}$, ou $B = \{1, 2, 3, \dots\}$). A noter que seule l'appartenance à l'ensemble importe: il n' y a aucun ordre et les répétitions sont possibles (exemple: $\{a, b\} = \{b, a\} = \{a, b, a\}$). La définition en extension est préférée lorsque l'ensemble est petit ou lorsque les éléments peuvent être facilement énumérés.

- en compréhension (Set-builder notation): E est défini comme le sous-ensemble formé des éléments x d'un ensemble connu X vérifiant une certaine propriété $p(x)$. On note $E = \{x \in X : p(x)\}$ ou $E = \{x \in X | p(x)\}$.[1] Exemple: $E = \{x \in \mathbb{N} | \exists n \in \mathbb{N}, x = n^2 + 1\}$.Cette approche est pratique pour définir des ensembles infinis ou lorsqu'il est plus simple de décrire une propriété commune que de lister les éléments.

Quelques ensembles connus:

- $\emptyset$: l'ensemble vide. Il s'agit de l'ensemble qui ne contient aucun élément $\emptyset = \{\}$
- $\mathbb{N}$: ensemble des nombres naturels. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Z}$: ensemble des nombres entiers relatifs. $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$
- $\mathbb{Q}$: ensemble des nombres rationnels. $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$. Les nombres rationnels sont ceux qui peuvent être exprimés comme le quotient de deux entiers, où le dénominateur n'est pas nul.
- $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels. Cet ensemble représente tous les points sur la ligne numérique continue. Il inclut tous les nombres rationnels et irrationnels.[2]

[1] E est l'ensemble des x dans X tels que $p(x)$ (ou vérifiant $p(x)$)

[2] Les nombres irrationnels sont ceux qui ne peuvent pas être exprimés comme une fraction de deux entiers. Par exemple, $\sqrt{2}, \pi, e$ sont des nombres irrationnels.

- $\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes. $\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1}\}$. Les nombres complexes sont ceux qui comprennent une partie réelle a et une partie imaginaire bi. L'unité imaginaire i est définie comme $\sqrt{-1}$.

Ces ensembles sont caractérisés par la relation suivante[3]

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

3 Inclusion, égalité et diagramme de Venn

[colback=blue!5!white, colframe=blue!75!black, title=Définition 1] On considère les ensembles A et B. A est un sous-ensemble de B (on note $A \subseteq B$), si et seulement si, chaque élément de A est aussi un élément de B. Formellement:

$$A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Le symbole $\nsubseteq$ veut dire "pas un sous-ensemble de". Par exemple, si $A \nsubseteq B$, cela signifie que: $\exists\ x$ tel que $x \in A$ et $x \notin B$. Un autre concept est celui de sous-ensemble **strict**: A est un sous-ensemble propre ou strict de B (on note $A \subset$ B), si $A \subseteq B$ mais $A \neq B$ ($\exists\ x$ tel que $x \in B$ et $x \notin A$). Le symbole $\not\subset$ veut dire "pas un sous-ensemble propre de".
[colback=blue!5!white, colframe=blue!75!black, title=Définition 2] Soient les ensembles A et B. $A = B$ si et seulement si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$. On note

$$A = B \Leftrightarrow (A \subseteq B \text{ et } B \subseteq A)$$

Quelques propriétés
$A \subseteq A$: puisque chaque élément de A est un élément de A (voir définition 1)
$\emptyset \subseteq A$: $\emptyset$ ne contient aucun élément donc il s'agit d'une *vérité creuse.*
Soient les 3 ensembles A, B et C:

$$(A \subseteq B \text{ et } B \subseteq C) \Rightarrow A \subseteq C$$

Diagramme de Venn
Pour illustrer les relations logiques et quelques opérations entre ensembles, un outil pratique est le diagramme de Venn. Les diagrammes de Venn ont été conçus autour de 1880 par John Venn. Considérons les sous-ensembles A, B et C, ci-dessous quelques exemples de représentations graphiques:
Figure 1: $A \subset B$, A et C n'ont pas d'éléments en commun, B et C ont quelques éléments en commun mais $B \not\subset C$ et $C \not\subset B$.
Figure 2: $A \subseteq B$ et $B \subseteq C$ (voir propriétés) 2

4 Union, intersection, différence et complément

4.1 Union

[colback=blue!5!white, colframe=blue!75!black, title=Définition 3] Soient A et B deux ensembles. Il existe un unique ensemble dont les éléments sont ceux

[3] L'ensemble vide est un sous-ensemble de tout ensemble.

de A et B. On l'appelle union de A et B et on le note $A \cup B$. Si A et B correspondent à deux sous-ensembles de Ω (qui est l'ensemble universel u), on définit leur union comme suit: $A \cup B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ ou } \omega \in B\}$

4.2 Intersection

[colback=blue!5!white, colframe=blue!75!black, title=Définition 4] Soient A et B deux ensembles. Il existe un unique ensemble formé par les éléments qui sont communs à A et à B. On l'appelle intersection de A et B et on le note $A \cap B$. Si A et B correspondent à deux sous-ensembles de Ω, on définit leur intersection comme suit: $A \cap B = \{\omega \in \Omega \mid \omega \in A \text{ et } \omega \in B\}$

4.3 Différence de deux ensembles

[colback=blue!5!white, colframe=blue!75!black, title=Définition 5] Soient A et B deux ensembles. On appelle **différence** de A et B l'ensemble des éléments de A qui n'appartiennent pas à B. On le note $A \backslash B$ (A privé de B). Si A et B sont deux sous-ensembles de Ω, on aura $A \backslash B = A \cap B^c = \{\omega \in \Omega | \omega \in A \text{ et } \omega \notin B\}$

4.4 Complémentaire d'un ensemble

[colback=blue!5!white, colframe=blue!75!black, title=Définition 6] Soit $A \subset E$, le **complémentaire** de A dans E correspond à l'ensemble $E \backslash A$. On le note A^c (on utilise parfois aussi la notation $\bar{A}$).
Si $A \subset \Omega$, le complémentaire de A est défini comme suit: $A^c = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$.
2

5 Quelques propriétés

5.1 Propriétés liées aux opérations d'union et intersection

- Les opérations d'union et d'intersection sont **commutatives** et **associatives**:
  $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$
  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- **Distributivité** 2
- **Idempotence**
  $A \cup A = A$, $A \cap A = A$
- **Autres propriétés**
  $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$; $A \cup \Omega = \Omega$, $A \cap \Omega = A$

5.2 Propriétés liées à l'ensemble complémentaire

Dans Ω, soit $A \subseteq \Omega$, on a les égalités suivantes: $(A^c)^c = A$, $\emptyset^c = \Omega$, $\Omega^c = \emptyset$, $A \cup A^c = \Omega, A \cap A^c = \emptyset$

5.3 Loi de De Morgan

2

6 Extension à une collection d'ensembles

Toute famille non vide d'ensembles $\{A_i, i \in I = \{0, 1, 2, \ldots, n\}\}$ faisant partie de l'ensemble universel Ω possède des unions et des intersections:

- $\bigcup_{i=0}^{n} A_i = \{x \in \Omega | x \in A_i$ pour au moins un $i = 0, 1, 2, \ldots, n\}$
- $\bigcap_{i=0}^{n} A_i = \{x \in \Omega | x \in A_i$ pour chaque $i = 0, 1, 2, \ldots, n\}$

On peut également avoir une extension à l'infini.
Exemple avec I de cardinalité 3 2 $\bigcup_{i=1}^{3} A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3$ $\bigcap_{i=1}^{3} A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3$

7 Partitions

[colback=blue!5!white, colframe=blue!75!black, title=Définition 7] Deux ensembles A, B sont dits **disjoints** lorsqu'ils n'ont aucun élément en commun, c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$ Généralisation à plus de 2 ensembles [colback=blue!5!white, colframe=blue!75!black, title=Définition 8] Les ensembles $A_1, A_2, A_3, \ldots$ sont dits **mutuellement disjoints** (ou exclusifs) si et seulement si et seulement si pour tout couple d'ensembles distincts A_i et A_j avec $i \neq j$, l'intersection $A_i \cap A_j$

Figure 1:

Figure 2:

Figure 3: *
$A \backslash B$

Figure 4: *
Ensemble A

Figure 5: *
Ensemble A^c

Figure 6: *
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Figure 7: *
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Figure 8: *
$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Figure 9: *
$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

est vide, c'est-à-dire $A_i \cap A_j = \emptyset$. Cela signifie qu'aucun élément ne peut appartenir à plus d'un ensemble parmi $A_1, A_2, A_3, \ldots$. [colback=blue!5!white, colframe=blue!75!black, title=Définition 9: Partition d'ensemble] Une partition d'un ensemble E est une collection d'ensembles non vides $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ tels que:

- Les ensembles A_i sont **mutuellement disjoints**, c'est-à-dire $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$
- L'union de tous les ensembles A_i couvre l'ensemble E, c'est-à-dire $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = E$

En d'autres termes, une partition divise l'ensemble E en sous-ensembles qui ne se chevauchent pas et dont l'union reconstitue l'ensemble entier. [colback=blue!5!white, colframe=blue!75!black, title=Définition 10: l'ensemble puissance (ensemble des parties d'un ensemble)] L'**ensemble puissance** (ou **ensemble des parties**) d'un ensemble E, noté $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble de tous les sous-ensembles possibles de E, y compris l'ensemble vide et l'ensemble E lui-même.
Formellement, si E est un ensemble, l'ensemble puissance $\mathcal{P}(E)$ est défini comme:

$$\mathcal{P}(E) = \{A | A \subseteq E\}$$

Cela signifie que chaque élément de $\mathcal{P}(E)$ est un sous-ensemble de E et le nombre total de sous-enembles est 2^n où n est le nombre d'éléments de E

8 Opérations sur les cardinaux

Le cardinal d'un ensemble fini correspond au nombre total de tous ses éléments. Différentes notations sont utilisées pour désigner le cardinal; par exemple, pour un ensemble E:

$$Card(E) = \#E = |E|$$

Propriétés
Soient A et B deux ensembles inclus dans l'ensemble universel Ω, on a

$$Card(A \cup B) = Card(A) + Card(B) - Card(A \cap B)$$

$$Card(A^c) = Card(\Omega) - Card(A)$$

$$Card(A) = Card(A \backslash B) + Card(A \cap B)$$

[11pt,a4paper]article amsmath times [margin=1in]geometry setspace [english]babel graphicx setspace textcomp multirow [normalem]ulem [table,xcdraw]xcolor lscape tabularx longtable caption multicol wrapfig [capposition=top]floatrow sectsty textcase [tablename=TABLE,figurename=FIGURE]caption comment threeparttable subcaption epstopdf amsfonts comment awesomebox tcolorbox tikz pgfkeys amsmath,amssymb

[authoryear]natbib

bX s¿X

Dénombrement Probabilités et statistique (L.B.); Chapitre 2 (analyse combinatoire)

9 Expériences en plusieurs étapes

9.1 Définition

Considérons l'exemple de lancer de deux pièces de monnaie. Les résultats de l'expérience correspondent à Pile ou Face pour chacune des pièces.

$$S = \{(F, F), (P, F), (F, P), (P, P)\}$$

Quatre résultats sont possibles qu'on peut énumérer. La règle de comptage des expériences à plusieurs étapes consiste à dénombrer les résultats possibles sans les énumérer. Cette règle correspond au principe fondamental du dénombrement et est comme suit: [colback=blue!5!white, colframe=blue!75!black, title=Principe fondamental du dénombrement] Si une expérience peut être décrite par une séquence de k étapes, avec n_1 résultats possibles à la première étape, n_2 résultats possibles à la seconde étape et ainsi de suite, alors le nombre total de résultats possibles de l'expérience est égal à $(n_1)(n_2)\dots(n_k)$. Dans l'exemple précédent, on peut considérer les deux lancers comme une expérience à deux étapes: un premier lancer avec deux résultats possibles ($n_1 = 2$), un deuxième lancer ($n_2 = 2$). D'après la règle de comptage, l'expérience a quatre résultats possibles différents ($n_1 \times n_2 = 2 \times 2 = 4$). De la même manière, le nombre de résultats possibles pour 6 lancers de pièces serait de $2^6 = 64$.[4]

9.2 Diagramme arborescent

On peut visualiser graphiquement une expérience à plusieurs étapes à l'aide d'un diagramme arborescent.

lien=[-¿,¿=stealth,rounded corners=5pt,thick] individu/.style=draw,thick,fill=1!25, individu/.default=red [individu] (B) at (0,0) Expérience aléatoire: Lancer de 2 pièces; [individu=cyan] (P) at (-3,-2) Pile; [individu=gray] (M) at (3,-2) Face; [individu=cyan] (GPP) at (-4.5,-4) Pile (P,P); [individu=gray] (GMP) at (-1.5,-4) Face (P,F); [individu=cyan] (GPM) at (1.5,-4) Pile (F,P); [individu=gray] (GMM) at (4.5,-4) Face (F,F); [lien] (B) —- (-1,-1) -— (P); [lien] (B) —- (1,-1) -— (M); [lien] (P) —- (-4,-3) -— (GPP); [lien] (P) —- (-2,-3) -— (GMP); [lien] (M) —- (2,-3) -— (GPM); [lien] (M) —- (4,-3) -— (GMM);

9.3 Exemples

Exemple 1
Si l'on doit choisir un mot de passe contenant 5 lettres à partir d'un alphabet de 26 lettres. On aura $26 \times 26 \times 26 \times 26 \times 26 = 26^5 = 11\ 881\ 376$ si on peut répéter la même lettre plusieurs fois. Si les lettres doivent être différentes, alors il y a $26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 7\ 893\ 600$ possibilités.
Exemple 2
Le nombre de codes à 4 chiffres possibles pour une carte bancaire est de $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\ 000$. Mais si on ne peut pas avoir de chiffres qui se répétent, ce nombre sera de $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\ 040$.

[4] Autre exemple: dans le problème des partis vu en introduction du cours, on avait calculé le nombre de résultats possibles pour les manches restantes comme étant 2^{i+j-1}

10 Arrangements

10.1 Arrangements sans répétition

Soit k et n deux entiers naturels. On appelle arrangement de k éléments parmi n toute application injective[5] de $\mathbb{N}_k$ dans $\mathbb{N}_n$. Puisque la donnée d'une application injective de $\mathbb{N}_k$ dans l'ensemble E revient à choisir k éléments de E avec ordre, un arrangement de k éléments parmi n peut être défini comme un $k-$uplet[6] d'éléments de E, mais sans répétition. On a la proposition suivante: [colback=blue!5!white, colframe=blue!75!black, title=Arrangements sans répétition] Le nombre d'arrangements possibles de k éléments parmi n vaut

$$A_n^k = 0 \text{ si } k > n, \qquad A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1) \times (n-k+1) \text{ si } k \leq n$$

Où $n! = n(n-1)(n-2)\dots(2)(1)$, $k! = k(k-1)(k-2)\dots(2)(1)$ et $0! = 1$, Notez que $A_n^n = n!$. On a également $A_n^0 = 1$ **Exemple 1**: Les arrangements de 2 éléments pris dans l'ensemble $\{1,2,3,4\}$ sont: $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$,$\{2,1\}$, $\{2,3\}$,$\{2,4\}$, $\{3,1\}$, $\{3,2\}$, $\{3,4\}$,$\{4,1\}$, $\{4,2\}$, $\{4,3\}$. On note qu'il y a au total 12 possibilités. En utilisant la formule, on a:

$$A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12$$

Exemple 2: 5 individus se présentent à un concours. L'individu classé premier remportera un prix de 500 dollars et le deuxième un prix de 250 dollars. Combien y a-t-il de remises de prix possibles?

$$A_5^2 = 2!\binom{5}{2} = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(3 \times 2 \times 1)} = 20$$

On peut aussi reprendre les exemples précédents:
Pour choisir un mot de passe contenant 5 lettres **distinctes** de l'alphabet de 26 lettres, on aura $26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = 7\ 893\ 600$ ou bien $A_{26}^5 = \frac{26!}{(26-5)!} = \frac{26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21!}{21!} = 7\ 893\ 600$ possibilités.
Le nombre de codes à 4 chiffres **distincts** possibles pour une carte bancaire est de $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5\ 040$. En utilisant la formule ci-dessus, on aura $A_{10}^4 = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6!} = 5\ 040$

10.2 Arrangements avec répétition

Un arrangement avec répétition de k éléments choisis parmi n est une liste ordonnée avec répétition éventuelle des éléments. [colback=blue!5!white, colframe=blue!75!black, title=Arrangements avec répétition]Le nombre de ces arrangements est comme suit

$$n \times n \times n \times \cdots = n^k$$

Exemple: Un numéro de téléphone comporte 8 chiffres. Combien y a-t-il de numéros de téléphone possibles? Puisque le nombre de chiffres est de 10 (0,1,2...,9), alors on aura $10^8 = 100\,000\,000$.
On peut aussi reprendre les exemples précédents
Si l'on doit choisir un mot de passe contenant 5 lettres à partir d'un alphabet de 26 lettres. On aura $26 \times 26 \times 26 \times 26 \times 26 = 26^5 = 11\ 881\ 376$ si on peut

[5] Voir rappel en annexe 1

[6] En mathématiques, un uplet est une collection ordonnée finie d'objets.

répéter la même lettre plusieurs fois. Ou alors, en utilisant la formule: 26^5
Le nombre de codes à 4 chiffres possibles pour une carte bancaire est de $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10\ 000$. Ou alors, en utilisant la formule 10^4. Dans ce cas, k n'est pas forcément plus petit que n. De manière générale, le nombre de n-uplets (n^k) correspond au nombre de séries de longueur k composées de n éléments.

11 Permutations

La règle de comptage par permutations permet de calculer le nombre de possibilités d'ordonner n éléments parmi n. La méthode de calculer est comme suit [colback=blue!5!white, colframe=blue!75!black, title=Permutations] On définit une bijection de l'ensemble fini E vers l'ensemble $\{1, 2, 3 \ldots, n\}$. Le nombre de permutations pour E est

$$P = n \times (n-1) \times (n-2) \cdots \times 1 = n!$$

Notez que la permutation est un cas particulier d'arrangement sans répétition A_n^n **Exemple 1**: On a un jeu de 4 cartes $E = \{C, D, H, S\}$. Quel est le nombre de permutations possibles?
Suivant la formule, on a $P = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$. Si on veut les lister, on aura **Exemple 2**:
On a invité 8 familles amies à une fête. Chaque famille va être installée dans une table à part. Combien y a-t-il de manières de les organiser?
On aura $P = 8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40\ 320$ dispositions possibles.

12 Combinaisons

Soient n et k deux entiers naturels. On appelle combinaison de k objets parmi n toute partie à k éléments d'un ensemble de n objets. [colback=blue!5!white, colframe=blue!75!black, title=Combinaisons] Le nombre de combinaisons de k objets parmi n vaut

$$C_n^k = \binom{n}{k} = 0 \text{ si } k > n, \qquad C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{1}\frac{n-1}{2}\frac{n-2}{3}\cdots\frac{n-k+1}{k} \text{ si } k \leq n$$

On a : $C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$. On a également[7] $C_n^{n-k} = C_n^k$
Notez qu'on peut aussi utiliser la formule suivante

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$$

Exemple 1: Dans le cadre d'un contrôle qualité, un inspecteur sélectionne aléatoirement deux pièces sur cinq pour tester leur qualité. Combien y a-t-il de combinaisons possibles?
Sur la base de la règle ci-dessus, nous avons

$$C_5^2 = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times (3 \times 2 \times 1)} = 10$$

Une expérience aura toujours plus d'arrangements sans répétition que de combinaisons pour un même nombre d'objets sélectionnés, car pour chaque tirage de k objets, il y a $k!$ façons différentes de les ordonner (comme expliqué dans la partie permutations), et donc $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$. **Exemple 2**
Un joueur au loto doit sélectionner les 6 bons numéros parmi 47. Quel est le

[7] Pour rappel: on a vu que les valeurs sur le triangle de Pascal sont symétriques

nombre de combinaisons possibles de 6 chiffres parmi 47?
Ce nombre sera de

$$C_{47}^{6} = \frac{47!}{6!(47-6)!} = \frac{47 \times 46 \times 45 \times 44 \times 43 \times 42 \times 41}{6! \times 41} = 10\ 737\ 573$$

13 Le binôme de Newton

Le terme C_n^k correspond aux coefficients binomiaux dans la formule du binôme de Newton. La formule du binôme de Newton permet de trouver le développement d'une puissance entière quelconque d'un binôme. [colback=blue!5!white, colframe=blue!75!black, title=Formule du binôme] $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k$$

Les coefficients binomiaux peuvent aussi être obtenus à l'aide du triangle de Pascal, en utilisant la formule.

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Corollaire: Comment calculer la somme des coefficients binomiaux $\sum_{k=0}^{n} C_n^k$, $\forall n \in \mathbb{N}$?
En prenant $x = y = 1$:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \times 1^{n-k} \times 1^k = (1+1)^n = 2^n$$

Cela correspond au nombre de résultats possibles pour une expérience répétée n fois, avec 2 issues possibles à chaque répétition (exemple: lancer de pièce). Ce résultat est aussi visible au niveau du triangle de Pascal (somme de chaque ligne = 2^n)

14 Résumé

Le tableau ci-dessous résume les différentes formules de dénombrement

	Avec répétition	**Sans répétition**
Avec ordre	n^p	$A_n^p = p! \binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!}$
Sans ordre	$\bar{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k}$	$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

purpleQuelques remarques:

- Le cas "sans ordre et avec répétition" n'a pas été expliqué dans les sections précédentes, mais il correspond au cas des combinaisons avec répétition (un exemple est donné en annexe).
- La permutation est un cas particulier de la case "avec ordre et sans répétition" ($A_n^n = n!$)

Annexe 1: applications injectives, surjectives, bijectives

Soit l'application $f : E \to F$ [colback=pink!5!white, colframe=pink!75!black, title=Définition d'une application injective] f est **injective** si $\forall x, x' \in E$ on a $(f(x) = f(x') \Rightarrow x = x')$ Cette application est **injective**: notez que chaque élément de F a **au plus** un antécédent [colback=pink!5!white, colframe=pink!75!black, title=Définition d'une application surjective] f est **surjective** si $\forall\ y \in F$, $\exists\ x \in E$ tel que $(y = f(x))$ Cette application est **surjective**: notez que chaque élément de F a **au moins** un antécédent. [colback=pink!5!white, colframe=pink!75!black, title=Définition d'une application bijective] f est **bijective** si $\forall\ y \in F$, $\exists\ !x \in E$ tel que $(y = f(x))$ Cette application est **bijective** parce que tout élément de F a **un unique** antécédent par f. Elle est à la fois injective et surjective.

[fill=gray!10, draw=magenta!70] (-1.5,0) circle (1cm); [fill=pink!20, draw=cyan!60] (1.5,0) circle (1cm);
at (-1.5,1.5) E; at (1.5,1.5) F;
(x1) at (-1.5,0.7) a; (x2) at (-1.5,0.3) b; (x3) at (-1.5,-0.2) c;
(y1) at (1.5,0.7) 1; (y2) at (1.5,0.3) 2; (y3) at (1.5,-0.2) 3; (y4) at (1.5,-0.7) 4;
[-¿] (x1) – (y4); [-¿] (x2) – (y2); [-¿] (x3) – (y1);

[fill=gray!10, draw=magenta!70] (-1.5,0) circle (1cm); [fill=pink!20, draw=cyan!60] (1.5,0) circle (1cm);
at (-1.5,1.5) E; at (1.5,1.5) F;
(x1) at (-1.5,0.7) a; (x2) at (-1.5,0.3) b; (x3) at (-1.5,-0.2) c; (x4) at (-1.5,-0.7) d; (y1) at (1.5,0.7) 1; (y2) at (1.5,0.3) 2;
(y4) at (1.5,-0.7) 3;
[-¿] (x1) – (y4); [-¿] (x2) – (y2); [-¿] (x3) – (y1); [-¿] (x4) – (y4);

[fill=gray!10, draw=magenta!70] (-1.5,0) circle (1cm); [fill=pink!20, draw=cyan!60] (1.5,0) circle (1cm);
at (-1.5,1.5) E; at (1.5,1.5) F;
(x1) at (-1.5,0.7) a; (x2) at (-1.5,0.3) b; (x3) at (-1.5,-0.2) c; (x4) at (-1.5,-0.7) d; (y1) at (1.5,0.7) 1; (y2) at (1.5,0.3) 2; (y3) at (1.5,-0.2) 3; (y4) at (1.5,-0.7) 4;
[-¿] (x1) – (y4); [-¿] (x2) – (y2); [-¿] (x3) – (y1); [-¿] (x4) – (y3);

Annexe 2: un exemple de combinaisons avec répétitions

On veut choisir 2 fruits parmi une variété de 4. Quel est le nombre de combinaisons possibles?

Pomme, Pomme	Pomme, Ananas	Pomme, raisins	Pomme, Poire
Ananas, Ananas	Ananas, raisins	Ananas, Poire	
Raisins, raisins	Raisins, Poire		
Poire, poire			

La solution est $C^2_{4+2-1} = \binom{4+2-1}{2} = \binom{5}{2} = 10$.

Si les répétitions n'avaient pas été possibles, on aurait eu $C_4^2 = 6$ (on exclut la première colonne du tableau ci-dessus).