Математический анализ 2

Гришин Лаврентий Викторовч

12 января 2022 г.

Содержание

1 Лекция

Собственные интегралы, зависящие от параметра (СИЗП)
пусть дан интеграл вида

$$\int\limits_0^1 e^{xy}\,dx = \frac{e^{xy}}{y}\bigg|_0^1 = \frac{e^y-1}{y} \ - \ \text{функция от } y,\ y>0$$

Определение. Пусть дан прямоугольник

$$\Pi = [a,\ b]\times[c,\ d]\subset\mathbb{R}^2$$

и функция f такие что $f:\Pi\to\mathbb{R}$.

$$\forall y\in[c,\ d]\ \ \exists\int\limits_a^b f(x,\ y)\,dx = F(y)\ -\ \text{называется СИЗП}$$

где интеграл сходится в собственном смысле.
Или, для $\alpha,\beta:[c,\ d]\to\mathbb{R}$ и таких a и b, что $a\leqslant\alpha(y)\leqslant\beta(y)\leqslant b\quad(\forall y\in[c,\ d])$

$$\exists\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,\ y)\,dx = G(y)\ -\ \text{называется СИЗП}$$

Теорема 1 (о непрерывности СИЗП (для F))**.**

$$f\in C(\Pi)\Rightarrow F\in C[c,\ d],$$

где C – множество функций, непрерывных по двум переменным, причем F – равномерно непрерывна на $[c,\ d]$.

Доказательство. Сразу докажем, что F равномерно непрерывна:

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0\ \ \forall y_1,y_2\in[c,\ d]:\ \ |y_1-y_2|<\delta\Rightarrow|F(y_1)-F(y_2)|<\varepsilon$$

$$|F(y_1)-F(y_2)| = \left|\int\limits_a^b f(x,y_1)\,dx-\int\limits_a^b f(x,y_2)\,dx\right| = \left|\int\limits_a^b \left(f(x,y)-f(x,y)\right)\,dx\right|\leqslant \int\limits_a^b \left|f(x,y_1)-f(x,y_2)\right|dx \quad (1)$$

f непрерывна на Π - компакте $\Rightarrow f$ равномерно непрерывна на Π:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in[a,b]\ \forall y_1,y_2\in[c,d]:\ |y_1-y_2|<\delta\Rightarrow\ |f(y_1)-f(y_2)|<\frac{\varepsilon}{b-a}\leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon \quad (2)$$

$\square$

Теорема 2 (О непрерывности)**.** *Если*

$$f \in C(\Pi), \quad \alpha, \beta \in C[c,\ d], \quad G \in C[c,\ d]$$

то G - равномерно непрерывна.

Доказательство. Докажем по определению:

$$\forall y_0 \in [c,\ d]\ \lim_{y \to y_0} G(y) = G(y_0)$$

$$|G(y) - G(y_0)| = \left| \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,\ y)\, dx - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0)\, dx \right| =$$

$$\left| \int\limits_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} f(x,\ y)\, dx + \int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y)\, dx + \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} (f(x, y) - f(x, y_0))\, dx \right| \leqslant$$

$$\left| \int\limits_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} f(x,\ y)\, dx \right| + \left| \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,\ y_0)\, dx \right| + \left| \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} (f(x, y) - f(x, y_0))\, dx \right| \leqslant$$

$$\left| \int\limits_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} f(x,\ y)\, dx \right| \ \leqslant \ \int\limits_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} |f(x,\ y)|\, dx \ \leqslant \ M|\alpha(y_0) - \alpha(y)|$$

f непрерывна на компакте $\Pi \Rightarrow |f| \leqslant M$ – ограниченна

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad & \exists \delta_1 > 0 : \ |y - y_0| < \delta_1 \Rightarrow |\alpha(y) - \alpha(y_0)| < \frac{\varepsilon}{3M} \\ & \exists \delta_2 > 0 : \ |y - y_0| < \delta_2 \Rightarrow |\beta(y) - \beta(y_0)| < \frac{\varepsilon}{3M} \\ & \exists \delta_3 > 0 : \ |y - y_0| < \delta_3, \ \forall x \in [a,\ b] : \ |f(x,\ y) - f(x,\ y_0)| \ \leqslant \ \frac{\varepsilon}{3M} \end{aligned}$$

теперь выберем $\delta = min\{\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3\}$ и получим:

$$\leqslant M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} \ + \ M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} \ + \ \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \ |\beta(y_0) - \alpha(y_0)| \ \leqslant \ \varepsilon$$

$\square$