Математический анализ 2

Гришин Лаврентий Викторовч

18 января 2022 г.

Содержание

1 Лекция

Собственные интегралы, зависящие от параметра (СИЗП)
пусть дан интеграл вида

$$\int_0^1 e^{xy}\,dx = \frac{e^{xy}}{y}\bigg|_0^1 = \frac{e^y - 1}{y} \ \text{ – функция от } y,\ y > 0$$

Определение. Пусть дан прямоугольник

$$\Pi = [a,\ b] \times [c,\ d] \subset \mathbb{R}^2$$

и функция f такие что $f : \Pi \to \mathbb{R}$.

$$\forall y \in [c,\ d] \ \ \exists \int_a^b f(x,\ y)\,dx = F(y) \ \text{ – называется СИЗП}$$

где интеграл сходится в собственном смысле.
Или, для $\alpha, \beta : [c,\ d] \to \mathbb{R}$ и таких a и b, что $a \leqslant \alpha(y) \leqslant \beta(y) \leqslant b \quad (\forall y \in [c,\ d])$

$$\exists \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,\ y)\,dx = \mathbf{G}(y) \ \text{ – называется СИЗП}$$

Теорема 1 (О непрерывности СИЗП (для F))**.**

$$f \in C(\Pi) \Rightarrow F \in C[c,\ d],$$

где C – множество функций, непрерывных по двум переменным, причем F – равномерно непрерывна на $[c,\ d]$.

Доказательство. Сразу докажем, что F равномерно непрерывна:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 \ \ \forall y_1, y_2 \in [c,\ d] : \ \ |y_1 - y_2| < \delta \Rightarrow |F(y_1) - F(y_2)| < \varepsilon$$

$$|F(y_1) - F(y_2)| = \left| \int_a^b f(x, y_1)\,dx - \int_a^b f(x, y_2)\,dx \right| = \left| \int_a^b \left(f(x,y) - f(x,y) \right)\,dx \right| \leqslant \int_a^b \left| f(x, y_1) - f(x, y_2) \right| dx \quad (1)$$

f непрерывна на Π - компакте $\Rightarrow f$ равномерно непрерывна на Π:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in [a,b] \ \forall y_1, y_2 \in [c,d] : \ |y_1 - y_2| < \delta \Rightarrow \ |f(y_1) - f(y_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon \quad (2)$$

$\square$

Теорема 2 (О непрерывности)**.** *Если*

$$f \in C(\Pi), \quad \alpha, \beta \in C[c,\ d], \quad \mathbf{G} \in C[c,\ d]$$

то **G** *- равномерно непрерывна.*

Доказательство. Докажем по определению:

$$\forall y_0 \in [c,\ d] \ \lim_{y \to y_0} G(y) = G(y_0)$$

$$|G(y) - G(y_0)| = \left| \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,\ y)\,dx - \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x, y_0)\,dx \right| =$$

$$\left| \int\limits_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} f(x,\ y)\,dx + \int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x, y)\,dx + \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} (f(x, y) - f(x, y_0))\,dx \right| \leqslant$$

$$\left| \int\limits_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} f(x,\ y)\,dx \right| + \left| \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,\ y_0)\,dx \right| + \left| \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} (f(x, y) - f(x, y_0))\,dx \right| \leqslant$$

$$\left| \int\limits_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} f(x,\ y)\,dx \right| \leqslant \int\limits_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} |f(x,\ y)|\,dx \ \leqslant \ M|\alpha(y_0) - \alpha(y)|$$

f непрерывна на компакте $\Pi \Rightarrow |f| \leqslant M$ – ограниченна

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0 \quad & \exists \delta_1 > 0 : \ |y - y_0| < \delta_1 \Rightarrow |\alpha(y) - \alpha(y_0)| < \frac{\varepsilon}{3M} \\ & \exists \delta_2 > 0 : \ |y - y_0| < \delta_2 \Rightarrow |\beta(y) - \beta(y_0)| < \frac{\varepsilon}{3M} \\ & \exists \delta_3 > 0 : \ |y - y_0| < \delta_3, \ \forall x \in [a,\ b] : \ |f(x,\ y) - f(x,\ y_0)| \ \leqslant \ \frac{\varepsilon}{3M} \end{aligned}$$

теперь выберем $\delta = min\{\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3\}$ и получим:

$$\leqslant M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} \ + \ M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} \ + \ \frac{\varepsilon}{3(b-a)} \ |\beta(y_0) - \alpha(y_0)| \ \leqslant \ \varepsilon$$

□

Эта теорема говорит нам, что если нам дан интеграл

$$\lim_{y \to y_0} \int\limits_a^b f(x,\ y)\,dx$$

и при этом функция f непрерывна, то весь интеграл нерперывный, то предел непрерывной функции это значение в самой точке, то есть мы можем сказать что

$$\lim_{y \to y_0} \int\limits_a^b f(x,\ y)\,dx \ = \ \int\limits_a^b f(x,\ y_0)\,dx \ = \ \int\limits_a^b \lim_{y \to y_0} f(x,\ y)\,dx$$

Пример (Пример). Когда это не работает:

$$\lim_{y\to 0+}\int\limits_0^1 \frac{x}{y}e^{-\frac{x^2}{y}}\,dx \neq \int\limits_0^1 \lim_{y\to 0+}\frac{x}{y}e^{-\frac{x^2}{y}}\,dx$$

$$\lim_{y\to 0+}\frac{x}{y}e^{-\frac{x^2}{y}}\,dx = \left[\frac{1}{y} = t\right] = \lim_{t\to\infty} x^t e^{-x^2 t} = 0 \quad \text{и} \quad \int\limits_0^1 0\,dx = 0$$

$$\int\limits_0^1 \frac{x}{y}e^{-\frac{x}{y}}\,dx = \begin{bmatrix} \frac{x^2}{y} = t \\ 2\frac{x\,dx}{y} = dt \end{bmatrix} = \int\limits_0^{\frac{1}{y}} \frac{1}{2}e^{-t}\,dt = -\frac{1}{2}e^{-t}\Big|_0^{\frac{1}{y}} = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\frac{1}{y}}\right)$$

$$\lim_{y\to 0+}\frac{1}{2}\left(1-e^{-\frac{1}{y}}\right) = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2} \neq 0$$

Что мы знаем про $f(x, y) = \frac{x}{y}e^{-\frac{x^2}{y}}$:

1. непрерывна по x
2. непрерывна по y, кроме $y = 0$, но можно доопределить по непрерывности
3. НО НЕ непрерывна по совокупности

Теорема 3 (О дифференцируемости СИЗП для F)**.** *Если f и ее частная производная по параметру непрерывны на Π, тогда наш интеграл из класса C^1 и производная – это интеграл от производной (то есть производную можно внести внутрь интеграла)*

$$f, \frac{\partial f}{\partial y} \in C(\Pi) \Rightarrow F = C^1[c, d] \text{ и } F'(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx$$

Доказательство. По определению $\forall y_0$:

$$F'(y_0) = \lim_{y\to y_0}\frac{F(y) - F(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y\to y_0}\frac{\int_a^b f(x, y)\,dx - \int_a^b f(x, y_0)\,dx}{y - y_0} =$$

$$= \lim_{y\to y_0}\int\limits_a^b \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0}\,dx = \begin{bmatrix} \text{по теореме Лагранжа для } f \\ \text{как функции } y \ \exists C \in (y_1, y_0) \end{bmatrix} = \lim_{y\to y_0}\int\limits_a^b f'(x, c)\,dx =$$

$$\underset{\text{по Th1}}{=} \int\limits_a^b \lim_{y\to y_0}\frac{\partial f}{\partial y}(x, c)\,dx \underset{c\to y_0}{=} \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)\,dx \quad (3)$$

Нужно доказать что (x, y_0) существует, а существует она так как $\frac{\partial f}{\partial y}$ – непрерывна $\Rightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial y}$ – интегрируема.

И нам осталось доказать что $F' = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\,dx$ непрерывна, но так подинтегральное выражение непрерывно, то по Th1 вся F' непрерывна. □

Теорема 4 (Теорема о дифференцируемости СИЗП для $\mathbf{G}$)**.** *Если f и ее частная производная по параметру непрерывны на Π и α, β дифференцируемы тогда $\mathbf{G}$ дифференцируема и формула Лейбница (ниже):*

$$\left.\begin{array}{l} f,\ \frac{\partial f}{\partial y} \in C(\Pi) \\ \alpha,\ \beta \in \mathcal{D}[c,\ d] \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{G} \in \mathcal{D}[c,\ d]$$

Формула Лейбница:

$$\mathbf{G}' = f(\beta(y),\ y)\cdot\beta'(y) - f(\alpha(y),\ y)\cdot\alpha'(y) + \int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,\ y)\,dx$$

Доказательство. Берем произвольную точку y_0: $\forall y_0 \in [c,\ d]$

$$\mathbf{G}(y) = \underbrace{\int\limits_{\alpha(y)}^{\alpha(y_0)} f(x,\ y)\,dx}_{G_1} + \underbrace{\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} f(x,\ y)\,dx}_{G_2} + \underbrace{\int\limits_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,\ y)\,dx}_{G_3}$$

Для G_2: по Th3:

$$G_2'(y_0) = \int\limits_{\alpha(y_0)}^{\beta(y_0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,\ y_0)\,dx$$

Для G_3: по определению:

$$G_3'(y_0) = \lim_{y\to y_0} \frac{G_3(y) - G_3(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y\to y_0} \frac{\int_{\beta(y_0)}^{\beta(y)} f(x,\ y)\,dx - 0}{y - y_0} = \begin{bmatrix}\text{По теореме о среднем} \\ \text{для } f \text{ как функции } x \\ \exists c \in (\beta(y_0),\ \beta(y))\end{bmatrix} =$$

$$= \lim_{y\to y_0} \frac{f(c,\ y)\cdot(\beta(y) - \beta(y_0))}{y - y_0} = \beta'(y_0)\cdot f(\beta(y_0),\ y_0) \quad (4)$$

Для G_1:

$$G_1 = -\int\limits_{\alpha(y_0)}^{\alpha(y)} f(x,\ y)\,dx \quad \text{аналогично для } G_3$$

$\square$

Следствие. *Если дополнительно потребовать чтобы α и β были класса C^1, тогда $\mathbf{G}$ тоже будет класса C^1:*

$$\alpha,\ \beta \in C^1[c,\ d] \Rightarrow \mathbf{G} \in C^1[c,\ d]$$

Доказательство. Было в предидущей теореме:

$$\mathbf{G}' = \overbrace{f(\beta(y),\ y)}^{\text{непр.}}\cdot\beta'(y) - \overbrace{f(\alpha(y),\ y)}^{\text{непр.}}\cdot\alpha'(y) + \overbrace{\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,\ y)\,dx}^{\text{непр. по теор. Th2}}$$

Теперь:

$$\mathbf{G}' = \overbrace{f(\beta(y),\ y)}^{\text{непр.}} \cdot \overbrace{\beta'(y)}^{\text{непр.}} - \overbrace{f(\alpha(y),\ y)}^{\text{непр.}} \cdot \overbrace{\alpha'(y)}^{\text{непр.}} + \overbrace{\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(y)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,\ y)\,dx}^{\text{непр. по теор. Th2}}$$

А так как произведение непрерывных - непрерывно, сумма непрерывных - непрерывна, следовательно, $\mathbf{G}$ - тоже непрерывна. □

Теорема 5 (Об интегрируемости СИЗП (Для F))**.** *Если f непрерывна как функция двух переменных, тогда F интегрируема по Риману*

$$f \in C(\Pi) \Rightarrow F \in \mathcal{R}[c,\ d]$$

и

$$\int\limits_c^d F(y)\,dy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,\ y)\,dy \right) dx.$$

Доказательство. По теореме Th1 F – непрерывна, следовательно, $F \in \mathcal{R}[c,\ d]$.
f – непрерывна на Π-компакте $\Rightarrow$ по теореме Вейерштрасса она ограниченна и множество точек разрыва f имеет меру нуль, значит, по критерию Лебега $f \in \mathcal{R}(\Pi)$ и по теореме Фубини

$$\iint\limits_{\Pi} f(x,\ y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b \underbrace{\left(\int\limits_c^d f\,dy \right)}_{\text{сущ. тк. } f \text{ непр. } \Rightarrow \text{интегр.}} dx = \int\limits_c^d \underbrace{\left(\int\limits_a^b f\,dx \right)}_{\text{сущ. тк. } f \text{ непр. } \Rightarrow \text{интегр.}} dy.$$

□