Problema de Árvore Geradora Mínima
com Restrição de Grau Mínimo e Centrais Fixos[1]

Manoel Campêlo, Rafael Castro de Andrade
Departamento de Estatística e Matemática Aplicada, Universidade Federal do Ceará
Campus do Pici, Bloco 910, Pici, Fortaleza, Ceará, CEP 60440-900
{mcampelo, rca}@lia.ufc.br

Fábio Carlos Sousa Dias, Críston Pereira de Sousa
Universidade Federal do Ceará
Campus de Quixadá, Quixadá, Ceará, CEP 63900-000
fabiocsd@lia.ufc.br, criston@ufc.br

RESUMO

Apresentamos uma variação do Problema de Árvore Geradora Mínima com Restrição de Grau Mínimo, na qual os vértices folhas são definidos a priori. Derivamos algumas propriedades e condições de viabilidade para o problema. Provamos que é NP-Difícil no caso geral e também sob várias restrições de parâmetros de entrada, como o grafo e o grau mínimo dos vértices. Apresentamos uma formulação de programação inteira baseada em restrições de eliminação de cortes. Reportamos experiências computacionais para várias instâncias de teste, mostrando que a formulação é bastante eficaz. Praticamente todas as instâncias foram resolvidas à otimalidade, muitas delas pela relaxação linear.

PALAVARAS CHAVE. Árvore geradora mínima com restrição de grau, NP-difícil, Formulação matemática.

ABSTRACT

We present a variation of the Min-Degree Constrained Minimum Spanning Tree Problem, where the leaves are fixed a priori. We derive some properties and feasibility conditions for the problem. We prove that it is NP-hard in the general case and under several restrictions on some parameters such as the input graph and the minimum degree of the vertices. We present an ILP formulation based on cut elimination constraints. We report computational experiments for benchmark instances showing that the fomulation is very effective. Almost all instances were solved to optimality, many of them by the linear relaxation.

KEYWORDS. Degree-constrained minimum spanning tree, NP-hard, ILP formulation.

1 Introdução

O problema de Árvore Geradora Mínima (*Minimum Spanning Tree*, MST) consiste em encontrar, em um grafo ponderado em arestas, uma árvore geradora de custo mínimo. Na literatura, tem-se estudado diversas variações do MST, onde se impõem restrições adicionais ao problema. Podemos citar o *Capacitated Minimum Spanning Tree* (Esau; Williams, 1966), *Maximum Leaf Spanning Tree* (Garey; Johnson, 1979), *Degree Constrained Minimum Spanning Tree* (Narula; Ho, 1980), *Bounded Diameter Minimum Spanning Tree* (Achuthan

[1]Financiado parcialmente por CNPq (Proc. 307627/2010-1, 480608/2011-3, 132998/2011-4), e Projetos FUNCAP/PRONEM and CAPES/STIC-AmSud.

et al., 1994), *Generalized Minimum Spanning Tree* (Myung et al., 1995), *Hop-Constrained Minimum Spanning Tree* (Gouveia, 1996), *Delay-Constrained Minimum Spanning Tree* (Salama et al., 1997), como exemplos de problemas conhecidos relacionados ao MST.

Entre essas variações do MST, enfatizamos aquelas com restrições sobre os graus dos vértices na árvore geradora. Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo e não direcionado com $|V| = n$ e $|E| = m$. Associe a cada aresta $e \in E$ um custo $c_e \geq 0$ e a cada vértice $v \in V$ um inteiro positivo $d(v)$, relacionado ao grau de v na árvore.

O problema de Árvore Geradora Mínima com Restrição de Grau (*Degree-Constrained Minimum Spanning Tree Problem*, dc-MST) consiste em encontrar uma árvore geradora mínima de G onde o grau de cada vértice v, na árvore, é no máximo $d(v)$. Este é um problema NP-difícil (Narula; Ho, 1980). Já no problema de Árvore Geradora Mínima com Restrição de Grau Mínimo (*Min-Degree Constrained Minimum Spanning Tree*, md-MST) deseja-se encontrar uma árvore geradora mínima de G, tal que cada vértice v tem grau pelo menos $d(v)$ ou é uma folha (grau 1) na árvore. Este problema foi introduzido por Almeida, Martins e Souza (2006), que apresentaram sua complexidade, propriedades, formulações e um algoritmo branch-and-bound. Outras formulações e resultados computacionais para md-MST podem ser vistos em (Martinez; Cunha, 2012; Martinez; Cunha, 2013).

Na literatura, normalmente considera-se $d(v) = d, \forall v \in V$, e chama-se os vértices com grau mínimo d de centrais e as folhas, de terminais. Observe que no md-MST os vértices centrais e terminais, ou mesmo suas quantidades, são arbitrários. Neste trabalho, descrevemos uma variação do problema, onde os vértices centrais e terminais são fixados a priori. Vamos chamá-lo de Problema de Árvore Geradora Mínima com Restrição de Grau Mínimo e Centrais Fixos (mdf-MST). A Figura 1 ilustra uma instância do problema para $d = 2$. Note que, em toda árvore viável T, o subgrafo de T induzido pelos centrais é uma subárvore. Em uma solução ótima, porém, essa subárvore pode não ser geradora mínima para o subgrafo induzido pelos centrais.

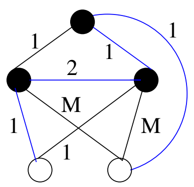

Figura 1: Instância de mdf-MST com $d = 2$. Vértices centrais em preto. Solução ótima em azul para $M > 2$.

Aplicações práticas para o mdf-MST aparecem em projetos de redes para sistemas VLSI, estradas, redes de energia e computadores, quando se deseja uma rede mínima de conexão com nós especiais onde a informação ou instalações são centralizadas. Esses nós, ditos centrais (que podem ser centros de distribuição ou dispositivos de comunicação centralizados) e os nós terminais (que podem ser clientes ou dispositivos periféricos) devem se conectar, de forma que cada nó central deve se ligar a um número mínimo de outros nós centrais ou terminais, e estes últimos devem se conectar a um único nó central.

A versão não-ponderada dos problemas dc-MST, md-MST e mdf-MST será denotada por dc-ST, md-ST e mdf-ST, respectivamente (retira-se o "M" da sigla). Esses são problemas de decisão, onde se deseja verificar se existe ou não uma árvore com as correspondentes restrições de grau. Note, porém, que eles são equivalentes às versões de otimização onde os custos são unitários, pois neste caso o custo de qualquer solução ótima é $n - 1$.

Aqui, estudamos os problemas mdf-ST e mdf-MST. Provamos sua complexidade computacional, apresentar propriedades e formulações e reportar experiências computacionias com algoritmos de solução. Também consideramos uma versão particular do problema onde, no grafo original, cada terminal se liga a todos os centrais. Obtemos assim os problemas mdf-ST-TC e mdf-MST-TC, correspondendo ao caso não ponderado e ponderado respectivamente. Mostraremos que mesmo essas versões são NP-Difíceis.

2 Notações

Ao longo do texto, iremos introduzindo notações no momento em que se fizerem necessárias. Aqui, apresentaremos apenas notações gerais, comuns a textos que lidam com grafos.

Iremos considerar um grafo $G = (V, E)$, onde V é o conjunto de vértices, com $|V| = n$, e E o conjunto de arestas, com $|E| = m$. Para representar uma aresta conectando dois vértices i e j, iremos usar $\{i, j\}$.

Seja $V_1 \subseteq V$. O conjunto $E(V_1)$ irá expressar o conjunto de arestas com ambas as extremidades em V_1, ou seja, o conjunto das arestas de G induzidas por V_1. O subgrafo induzido por V_1 será denotado $G(V_1) = (V_1, E(V_1))$.

Quando considerarmos um grafo direcionado, iremos usar $D = (V, A)$, sendo A o conjunto das arestas direcionadas ou arcos. Um arco ligando os vértices i e j será denotado por (i, j). Os conjuntos $\delta^+(i)$ e $\delta^-(i)$ representam todos os arcos que saem e que chegam do vértice i, respectivamente.

3 Formulação Matemática

Adotamos a seguinte notação associada ao grafo $G = (V, E)$. Particionamos $V = C \cup T$, com $|C| = c$, $|T| = t$, $c + t = n$, onde C e T descrevem os conjuntos de centrais e terminais, respectivamente. Denotamos por $E(C)$ o conjunto de arestas entre os vértices centrais, e por $E(C, T)$ as arestas entre centrais e terminais. Por simplicidade, consideramos que não há arestas em G ligando dois terminais, já que elas nunca farão parte de uma solução. O subgrafo induzido pelos vértices centrais será denotado por $G(C)$. Consideramos que $d(v) = d, \forall v \in C$, e denotar por d_v o grau do vértice v numa solução viável qualquer.

Para que os problemas em estudo possam ser viáveis, supomos que o grau, em G, de cada vértice de C é maior ou igual a d e que $G(C)$ é conexo. Também supomos que $d \geq 2$, pois o problema se resume ao MST se $d = 1$.

Como para muitos problemas relacionados ao MST, uma formulação matemática para o mdf-MST pode ser obtida por qualquer conjunto de restrições que definam uma árvore geradora e pelas restrições particulares do problema. Em (Magnanti; Wolsey, 1994) encontramos boa parte das formulações para árvore geradora. Podemos obter uma formulação para o mdf-MST utilizando, por exemplo, as restrições de cortes, restrições de eliminação de ciclos (Dantzig et al., 1954), restrições de Miller et al. (1960), dentre outras. Um detalhe importante é que, para o mdf-MST, podemos aplicar as restrições de árvore geradora apenas no subgrafo induzido $G(C)$.

Eliminação de ciclos Uma primeira formulação para o MDF-MST origina-se com o uso das restrições de eliminação de ciclos (*Subtour Elimination Constrainsts*, SECs). Considere abaixo a formulação de programação inteira, onde temos a variável binária x_e sendo igual a 1 se a aresta $e \in E$ for escolhida para pertencer a árvore geradora e 0 caso contrário:

$$
\begin{aligned}
(\text{MDF}_{\text{subtour}}) \quad \min & \sum_{e \in E} c_e x_e \\
\text{sujeito a: } & \sum_{e \in E(C)} x_e = c - 1 && (1) \\
& \sum_{e \in E(S)} x_e \leq |S| - 1, \forall S \subsetneq C \text{ com } |S| \geq 2 && (2) \\
& \sum_{e \in \delta(i)} x_e \geq d_i, \forall i \in C && (3) \\
& \sum_{e \in \delta(C) \cap \delta(t)} x_e = 1, \forall t \in T && (4) \\
& x_e \in \{0, 1\}, \forall e \in E && (5)
\end{aligned}
$$

A função objetivo minimiza o custo da árvore geradora. As restrições (1)–(2) definem uma árvore geradora em $G(C)$. As restrições (3) garantem que cada vértice $v \in C$ tenha grau no mínimo d_v. A restrição (4) garante que cada vértice em T seja folha. Como visto anteriormente, podemos eliminar as arestas entre terminais, ou seja, desconsiderar as váriaveis x_e, $\forall e \in E(T)$. Note também que nas restrições de grau o corte $\delta(v)$ considerado refere-se ao grafo G e não ao subgrafo $G(C)$.

Rótulos nos vértices Aqui, consideramos a versão orientada da formulação definida com restrições de cortes. Para isso, se faz necessário transformar o grafo não-direcionado $G = (V, E)$ em um grafo direcionado $D = (V, A)$. Substituímos cada aresta $e = \{i, j\} \in E$ por arcos (i, j) e (j, i) em A com custo igual c_e em ambas as direções. Como trabalhamos com o grafo direcionado, a árvore geradora resultante será direcionada e, com isso, devemos definir um vértice raiz $r \in C$. Podemos então desconsiderar os arcos de T para C. Seja y_{ij} a variável binária que será igual a 1 se o arco (i, j) estiver na solução e 0 caso contrário. Por simplicidade de notação, na formulação abaixo A, δ^+ e δ^- denotam conjuntos que não incluem os arcos de T para C, os arcos de C para r, além dos arcos entre os vértices de T.

A próxima formulação baseia-se nas restrições Miller-Tucker-Zemlin (MTZ), que atribuem rótulos aos vértices, de modo a evitar a formação de ciclos entre os arcos escolhidos.

$$
\begin{aligned}
(\text{MDF}^r_{\text{MTZ}}) \quad \min & \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} y_{ij} \\
\text{sujeito a: } & \sum_{(i,j) \in \delta^-(j)} y_{ij} = 1, \forall j \in V \backslash \{r\} && (6) \\
& \sum_{(i,j) \in \delta^+(i)} y_{ij} \geq d_i - 1, \forall i \in C \backslash \{r\} && (7) \\
& \sum_{(i,j) \in \delta^+(r)} y_{ij} \geq d_r && (8) \\
& u_i - u_j + c y_{ij} \leq c - 1, \forall (i, j) \in A(C), j \neq r && (9) \\
& u_i \leq c - 1, \forall i \in C \backslash \{r\} && (10) \\
& u_i \geq 1, \forall i \in C \backslash \{r\} && (11) \\
& u_r = 0 && (12) \\
& y_{ij} \in \{0, 1\}, \forall (i, j) \in A && (13)
\end{aligned}
$$

A restrição (6) garante que, para todo vértice diferente da raiz, apenas um arco de entrada será selecionado na solução. As restrições (7) e (8) garantem o grau mínimo para os vértices de C. A restrição (9) garante que cada arco incluído na árvore é direcionado de um vértice com menor rótulo para um de maior. A restrição (12) atribui o rótulo 0 à raiz da árvore. As restrições (10) e (11) definem os limites dos rótulos. Assim, a atribuição de rótulos aos vértices deve verificar as seguintes condições. Para cada aresta $\{i, j\}$, se:

- $y_{ij} = 1$ (e $y_{ji} = 0$), então $1 \leq u_j - u_i \leq c - 1$.
- $y_{ji} = 1$ (e $y_{ij} = 0$), então $1 \leq u_i - u_j \leq c - 1$.
- $y_{ij} = 0$ e $y_{ji} = 0$, então $-(c - 1) \leq u_i - u_j \leq c - 1$.

Qualquer atribuição de rótulos que satisfaçam as condições acima retorna uma solução viável.

Referências

[1] **Achuthan, N.; Caccetta, L.; Caccetta, P.; Geelen, J**. *Computational methods for the diameter restricted minimum weight spanning tree problem.* Australasian Journal of Combinatorics, 10:51-71, 1994.

[2] **Almeida, A. M.; Martins, M.; Souza, M.C**. *Min-Degree Constrained Minimum Spanning Tree Problem: Complexity, proprieties and formulations.* Technical Report 6/2006, Centro de Investigação Operacional, Universidade de Lisboa, 2006.

[3] **Dantzig, G. B.; Fulkerson, D. R. e Johnson, S. M**. *Solution of a large scale traveling salesman problem.* Operations Research, 2:393–410, 1954.

[4] **Esau, L.R.; Williams, K.C**. *On teleprocessing network design: Part II. A method for approximating the optimal network.* IBM Systems Journal 5 (3): 142–147, 1966.

[5] **Fürer, M.; Raghavachari, B.** *Approximating the minimum-degree Steiner tree to within one of optimal*, Journal of Algorithms 17 (3): 409–423, 1994.

[6] **Garey, M.R.; Johnson, D.S**. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, A2.1: ND1, p. 206, 1979.

[7] **Gouveia, L**. *Multicommodity Flow Models for Spanning Trees with Hop Constraints.* European Journal of Operational Research, 95:178–190, 1996.

[8] **Martins, P.; Souza, M. C.** *VNS and second order heuristics for the min-degree constrained minimum spanning tree problem.* Computers and Operations Research, 36:2669–2982, 2009.

[9] **Martinez, L.C.; Cunha, A.** *The Min-Degree Constrained Minimum Spanning Tree Problem: Formulations and Branch-and-cut algorithm.* Discrete Applied Mathematics, 2013. doi: 10.1016/j.dam.2011.08.008. In Press.

[10] **Martinez, L.C. ; Cunha, A.** *A Parallel Lagrangian Relaxation Algorithm for the Min-Degree Minimum Spanning Tree Problem.* Lecture Notes in Computer Science - Combinatorial Optimization. v. 7422, p. 237–248, 2012.

[11] **Miller, C; Tucker, A; Zemlin, R.** *Integer programming formulation of traveling salesman problems.* Journal of ACM, 7:326-9, 1960.

[12] **Myung, Y., Lee, C., Tcha, D**. *On the generalized minimum spanning tree problem.* Networks, 26(4), 231–241, 1995.

[13] **Narula, S. C.; Ho, C. A.**; *Degree-constrained minimum spanning tree.* Computers and Operations Research, 7:239–249, 1980.

[14] **Salama, H.F., Reeves, D.S., Viniotis, Y**. The Delay-Constrained Minimum Spanning Tree Problem. In Proceedings of the 2nd IEEE Symposium on Computers and Communications (ISCC '97). IEEE Computer Society, Washington, DC, USA, 1997.

[15] **Magnanti, T.L. and Wolsey, L.A**. *Optimal Trees* OR 290–94 April 1994.