



CONTROLE DE SISTEMAS DINÂMICOS - GAT123

CONTROLE DE SISTEMA DE SUSPENSÃO MODELO ¼ DE VEÍCULO

GABRIEL HENRIQUE RIBEIRO DOS SANTOS - 201710882

LUIS GUSTAVO DE SOUZA OLIVEIRA - 201710318

ÍNDICE

1. Introdução
2. Modelagem Matemática
3. Controladores
4. Discussão dos resultados
5. Conclusão
6. Referências

1. INTRODUÇÃO

A suspensão dos automóveis tem três funções principais que são suportar o peso próprio do veículo, isolar passageiros e carga das vibrações e garantir a dirigibilidade, ou seja, o contato pneu-solo. Para cumprir suas funções a suspensão conta com um elemento de armazenamento de energia (a mola) e um elemento dissipativo (o amortecedor). Além disso, uma tecnologia presente no mercado há mais de 30 anos é a utilização de controladores dentro deste tipo de sistema, como por exemplo, as suspensões ativas. A tecnologia busca controlar os movimentos verticais das rodas através de um sistema de controle eletrônico para compensar irregularidades presentes em estradas e pistas. É caracterizado por um atuador embutido que pode fornecer força ativa através de um algoritmo de controle usando dados de sensores ligados ao veículo, assim garante-se melhor dirigibilidade, conforto, segurança e estabilidade tanto para o carro quanto para o motorista (DUTRA, 2016). A ideia deste trabalho é modelar um sistema dinâmico de uma suspensão de um automóvel, no qual pela teoria pode ser simplificado de tal forma:

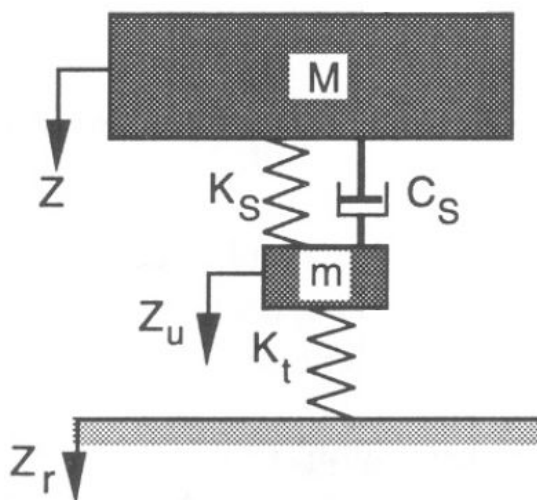


Figura 1 - Modelo clássico de 1/4 de veículo.

Segundo L. FREITAS, para a análise do sistema em questão, será considerado apenas o modelo de $\frac{1}{4}$ de veículo, no qual é uma representação mais simplificada e intuitiva em termos de cálculos, por se tratar também de um sistema com dois graus de liberdade e pelos principais componentes encontrados em uma suspensão veicular passiva (mola e amortecedor). Conforme cita L. FREITAS, para obter-se resultados mais representativos da realidade, são demandados modelos mais elaborados que consideram limitações de geometria e não linearidades.

O modelo clássico de $\frac{1}{4}$ de veículo é constituído de uma massa suspensa **M** (carroceria) que está sendo suportada pelo conjunto da suspensão, **Ks** e **Cs** (mola e amortecedor), conectada a uma massa não suspensa **m** (roda, eixo e periféricos). Além disso, é considerada também a força elástica gerada pelo pneu, representada por **Kt**.

Temos como entrada do sistema o deslocamento **Zr**, que representa as irregularidades do terreno no qual o veículo está a transitar. E podemos ter como saída o deslocamento vertical da carroceria, representado por **Z**, ou também o deslocamento da massa não suspensa **Zu**.

Esse modelo possui algumas limitações que podem distanciar seus resultados da realidade, como por exemplo:

- Não contempla geometria;
- Desconsidera alguns componentes mecânicos;
- Considera as características dos componentes como lineares.

1.1. Diagrama de blocos funcional

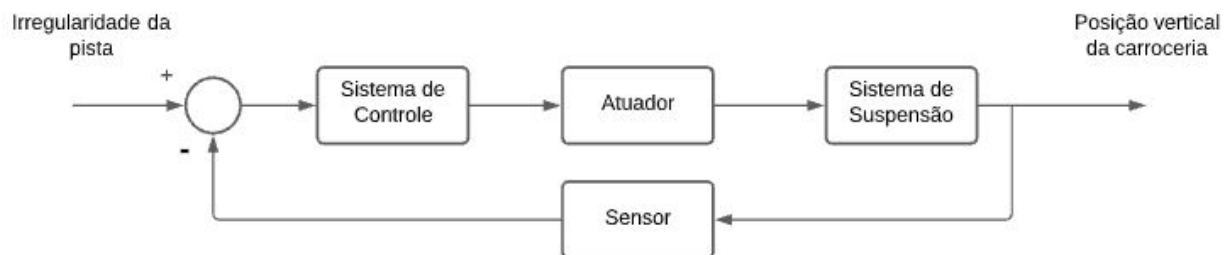


Figura 2. Diagrama de blocos do sistema de suspensão com realimentação

Para a projeção do controlador, serão consideradas como variável manipulada a irregularidade da pista e variável controlada a posição vertical da carroceria. Além disso, a função de transferência que representa o sistema de suspensão já associa a dinâmica do pneu com a excitação da pista, e para os atuadores DUTRA cita alguns modelos de servo sistemas de posicionamento, em relação ao tipo de componente de atuação: eletro-hidráulicos, pneumáticos ou eletromagnéticos. O sensor será responsável por indicar o deslocamento vertical da carroceria em relação ao repouso do sistema suspensório passivo, como por exemplo um sensor de deslocamento linear.

2. MODELAGEM MATEMÁTICA

2.1. Equação diferencial

Para a massa M (massa suspensa):

$$M \cdot \ddot{Z} = -K_S \cdot (Z - Z_U) - C_S \cdot (\dot{Z} - \dot{Z}_U) \quad (1)$$

Para a massa m (massa não suspensa):

$$m \cdot \ddot{Z}_U = -K_T \cdot (Z_U - Z_R) - K_S \cdot (Z_U - Z) - C_S \cdot (\dot{Z}_U - \dot{Z}) \quad (2)$$

2.2. Função de transferência

Quando passamos as duas equações (1) e (2) para o domínio da frequência têm-se:

$$(M \cdot s^2 + C_S \cdot s + K_S) \cdot Z(s) = (C_S \cdot s + K_S) \cdot Z_U(s)$$

$$(m \cdot s^2 + C_S \cdot s + K_T + K_S) \cdot Z_U = K_T \cdot Z_R(s) + (C_S \cdot s + K_S) \cdot Z(s)$$

Isolando Z_U na primeira equação e substituindo na segunda, é possível chegar à seguinte função de transferência, também referenciada por L. FREITAS:

$$\frac{Z(s)}{Z_R(s)} = \frac{K_T \cdot (C_S \cdot s + K_S)}{m \cdot M \cdot s^4 + (m + M) \cdot C_S \cdot s^3 + [K_T \cdot M + (m + M) \cdot K_S] \cdot s^2 + K_T \cdot C_S \cdot s + K_T \cdot K_S} \quad (3)$$

2.3. Espaço de estados

Além da função de transferência, outra forma de obtermos as saídas desejadas é pelo espaço de estados. Considerando que os estados são:

$$\begin{aligned} Z_1 &= Z & Z_2 &= \dot{Z} \\ Z_3 &= Z_U & Z_4 &= \dot{Z}_U \end{aligned}$$

Por meio das equações no domínio do tempo chega-se na matriz de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{Z}_1 \\ \dot{Z}_2 \\ \dot{Z}_3 \\ \dot{Z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \left(\frac{-K_S}{M}\right) & \left(\frac{-C_S}{M}\right) & \left(\frac{K_S}{M}\right) & \left(\frac{C_S}{M}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \left(\frac{K_S}{m}\right) & \left(\frac{C_S}{m}\right) & \left(\frac{-K_S - K_T}{m}\right) & \left(\frac{-C_S}{m}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \left(\frac{K_T}{m}\right) \end{bmatrix} \cdot Z_R \quad (4)$$

Com o espaço de estados é possível chegar às saídas desejadas mais facilmente. Como é do interesse analisar a massa suspensa, deseja-se ter como saídas do sistema somente o seu deslocamento:

$$[Z_1] = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{bmatrix} + [0] \cdot Z_R \quad (5)$$

Onde:

- Z_1 é o deslocamento da massa suspensa;

2.4. Diagrama de blocos

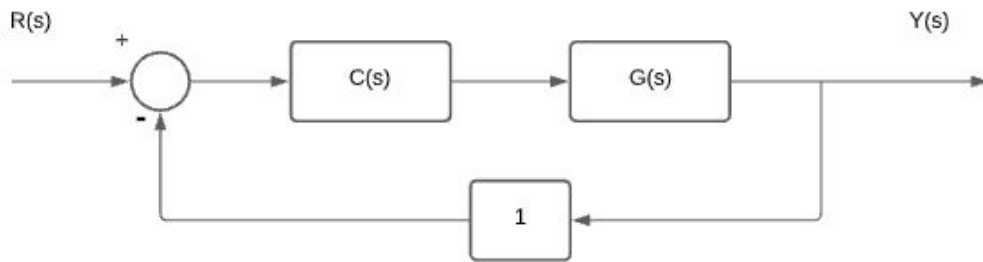


Figura 3. Diagrama de blocos

Onde:

$C(s)$ é o controlador que será projetado

$$G(s) = \frac{Z(s)}{Z_R(s)} = \frac{K_T \cdot (C_S \cdot s + K_S)}{m \cdot M \cdot s^4 + (m + M) \cdot C_S \cdot s^3 + [K_T \cdot M + (m + M) \cdot K_S] \cdot s^2 + K_T \cdot C_S \cdot s + K_T \cdot K_S}$$

$R(s)$ é a entrada do sistema (irregularidade da pista)

$Y(s)$ é a saída do sistema (posição/ oscilação vertical da carroceria)

2.5. Resposta temporal do sistema.

Para análise da resposta temporal, usou-se coeficientes e informações de massa do modelo Gol (dianteira) presente entre os 3 modelos de automóveis da tabela abaixo, que foram encontrados na literatura (LUZ, 2017). As seguintes informações são:

Modelo do veículo	Massa Suspensa [kg]	Massa Não Suspensa [kg]	Ks [N/m]	Cs(compressão) [N/(m/s)]	Cs(tração) [N/(m/s)]	Kt [N/m]
Gol (dianteira)	225,4	34,2	15817	650	2200	178140
Fiesta (dianteira)	287,7	27,8	21670	1550	2300	213900
Santana (dianteira)	298,3	28,7	18261	1325	2225	319010

Figura 4. Tabela com dados do modelo GOL

Obs.: A massa suspensa refere-se a carga que está distribuída em uma roda.

Como é apresentado na tabela, existem dois coeficientes de amortecimento, um que atua em esforços de compressão e outro de tração. Sabendo disso, usou-se o valor médio dos dois coeficientes, já que na resposta ao degrau haverá atuação do sistema tanto em compressão como em tração. A função de transferência equivalente será:

$$C_S = \frac{650 + 2200}{2} = 1425 \text{ N.s/m}$$

$$k_s = 15817 \text{ N/m}$$

$$k_t = 178140 \text{ N/m}$$

$$m = 34,2 \text{ kg}$$

$$M = 225,4 \text{ kg}$$

$$\frac{Z(s)}{Z_R(s)} = \frac{K_T \cdot (C_S \cdot s + K_S)}{m \cdot M \cdot s^4 + (m + M) \cdot C_S \cdot s^3 + [K_T \cdot M + (m + M) \cdot K_S] \cdot s^2 + K_T \cdot C_S \cdot s + K_T \cdot K_S}$$

Sendo assim, a resposta temporal do sistema em malha aberta foi obtida em software computacional para uma entrada degrau unitário (desnível contínuo na pista) e para uma entrada impulso (desnível singular na pista), conforme as imagens:

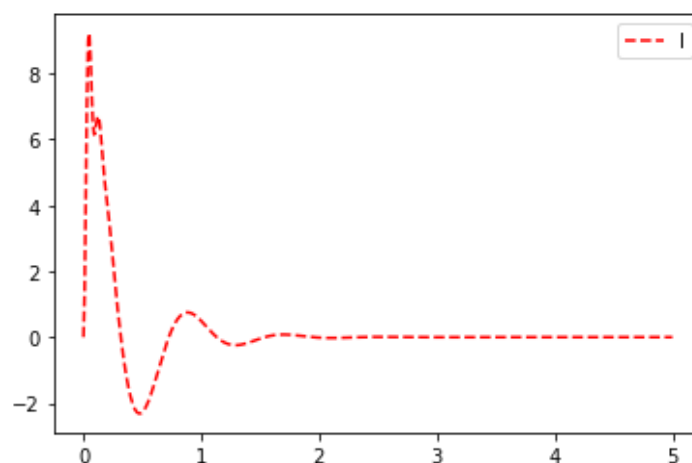


Figura 5. Resposta do sistema em MA a uma entrada impulso

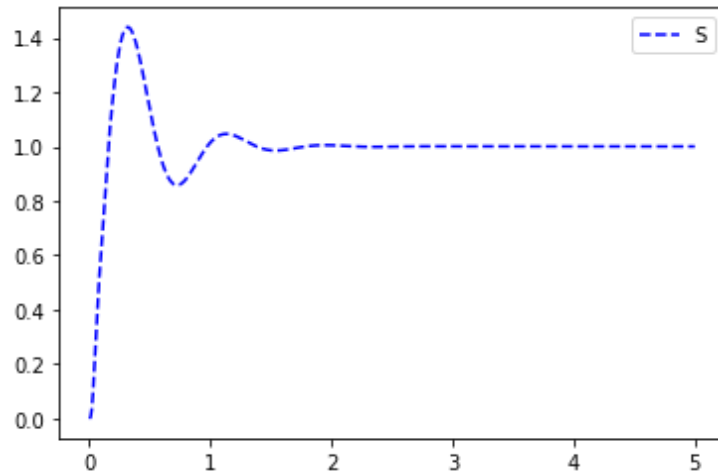


Figura 6. Resposta do sistema em MA a uma entrada degrau

Executando o *stepinfo()*:

- Tempo de subida: 0.10898055633702441 segundos
- Tempo de assentamento: 1.2950945183306852 segundos
- Overshoot: 43.937766839047484
- Pico: 1.4386309786928744
- Tempo de pico: 0.3168039428401872 segundos
- Valor em regime permanente: 0.9994812412933741

Observa-se que para o sistema em malha aberta (suspensão passiva), o regime transitório apresenta alto overshoot e algumas oscilações até se estabilizar em relação à entrada degrau, de tal forma que as características de rigidez e amortecimento afetam o conforto e a segurança do passageiro. Desta forma, vê-se necessário otimizar o sistema com suspensões ativas para resultar em melhor desempenho dinâmico.

Para esta análise, sabe-se que o sistema será excitado com uma entrada degrau unitário. O objetivo é que o erro seja o mais próximo de zero possível, como será discutido no tópico dos requisitos do sistema, porém inicialmente para o sistema em malha fechada (7) o erro em regime permanente teórico pode ser determinado como:

$Z(s)/Z_r(s)$ função de transferência do TIPO 0 (sem integrador)

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + kp}$$

$$kp = \lim_{s \rightarrow 0} Z(s)/Z_r(s) = \frac{2,818 \cdot 10^9}{2,818 \cdot 10^9} = 1$$

$$e(\infty) = \frac{1}{1 + 1} = 0,5$$

Para verificar o resultado encontrado, realizou-se uma simulação do sistema a uma entrada ao degrau unitário, onde foi obtido a seguinte figura.

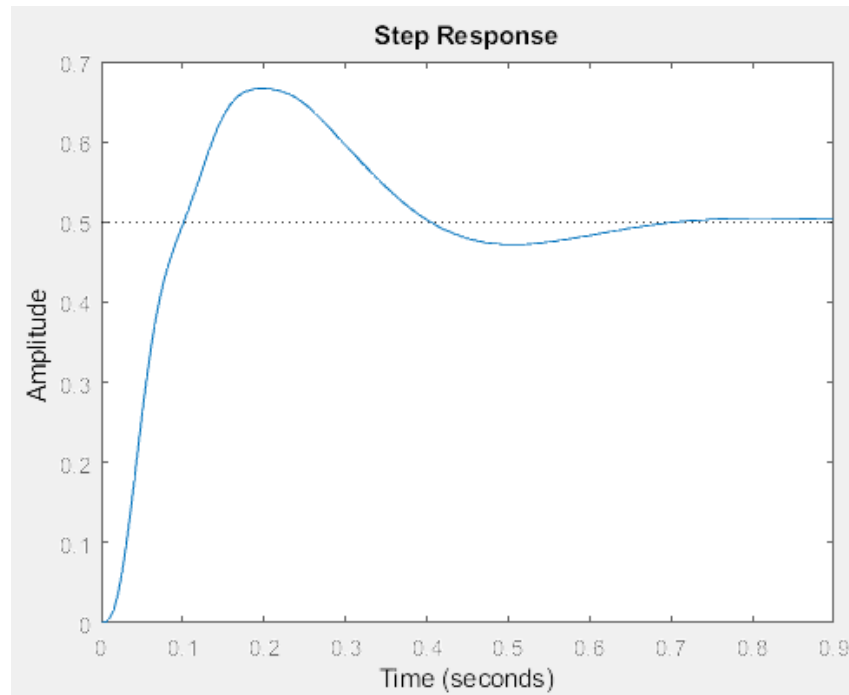


Figura 7. Resposta ao degrau para o sistema em malha fechada

Por meio do gráfico, verifica-se que o sinal converge para o valor de 0,5, ou seja, há um erro em regime permanente associado de $1 - 0,5 = 0,5$, ou 50%. Realizando uma comparação entre a resposta ao degrau em malha aberta com a malha fechada, observa-se que o tempo de assentamento diminui de 1,29 segundos para 0,63 segundos, porém o erro em regime permanente vai de 0% para 50%, sendo que é necessário reduzir o erro para o mais próximo de 0% possível.

Em relação a resposta transitória, o mesmo gráfico da figura 6 foi analisado, no qual por meio da função *stepinfo(<FT>)* foi possível ter acesso as principais informações da resposta transitória, conforme a seguir:

- Tempo de subida = 0.05969562297684502 segundos
- Tempo de assentamento = 0.635161428473631 segundos
- Assentamento mínimo = 0.4502920425494761 segundos
- Assentamento máximo = 0.6663084611240363 segundos
- Overshoot = 33.4%
- Undershoot = 0%
- Pico = 0.6663084611240363
- Tempo de pico = 0.19818946828312548 segundos

Conclui-se que o sistema responde de forma rápida, com um tempo de assentamento menor que 1 segundo, porém o overshoot é significativo, no qual pode ser tratado de forma a garantir mais conforto, em termos práticos diminuindo o ponto de pico que a carroceria alcança no momento que a suspensão é excitada.

2.6. Estabilidade

A análise da estabilidade para o sistema foi realizada a partir do critério de Routh, onde estabeleceu-se uma matriz com o objetivo de determinar o intervalo de ganho para a função de

transferência em malha fechada que mantenha a estabilidade do mesmo. Sabe-se que a função de transferência para o Gol substituindo os termos em (3) tem a seguinte estrutura em malha aberta:

$$\frac{Z(s)}{Z_R(s)} = \frac{2,538 \cdot 10^8 s + 2,818 \cdot 10^9}{7709s^4 + 3,699 \cdot 10^5 s^3 + 4,426 \cdot 10^7 s^2 + 2,538 \cdot 10^8 s + 2,818 \cdot 10^9} \quad (6)$$

Utilizando o simulador MATLAB e admitindo um ganho k para a função de transferência em malha fechada, obteve-se a seguinte matriz de Routh:

$$\frac{Z(s)}{Z_R(s)} = \frac{k(2,538 \cdot 10^8 s + 2,818 \cdot 10^9)}{7709s^4 + 3,699 \cdot 10^5 s^3 + 4,426 \cdot 10^7 s^2 + (1+k)2,538 \cdot 10^8 s + (1+k)2,818 \cdot 10^9} \quad (7)$$

s^4	7709	$4,426 \cdot 10^7$	$2,818 \cdot 10^9 + 2,818 \cdot 10^9 \cdot k$
s^3	$3,699 \cdot 10^5$	$2,538 \cdot 10^8 + 2,538 \cdot 10^8 \cdot k$	0
s^2	$\frac{-(-1,441 \cdot 10^{13} + 1,956 \cdot 10^{12} \cdot k)}{3,699 \cdot 10^5}$	0	0
s^1	$\frac{3,699 \cdot 10^5 \cdot (1+k) \cdot (1,042 \cdot 10^{15} - (9,887 \cdot 10^{15} - 1,342 \cdot 10^{15} \cdot k))}{-1,441 \cdot 10^{13} + 1,956 \cdot 10^{12} \cdot k}$	0	0
s^0	$2,538 \cdot 10^8 + 2,538 \cdot 10^8 \cdot k$	0	0

Figura 8. Solução encontrada utilizando o critério de Routh para a equação (7)

Analisando a estabilidade do sistema, deve-se encontrar os intervalos para k de modo que a primeira coluna presente na figura 4 não altere seu sinal na expressão de uma linha para a próxima. Sendo assim:

- Para s^4
k pode assumir qualquer valor
- Para s^3
k pode assumir qualquer valor
- Para s^2

$$\frac{-(-1,441 \cdot 10^{13} + 1,956 \cdot 10^{12} \cdot k)}{3,699 \cdot 10^5} > 0$$

Solução: $k < 7,367$

- Para s^1

$$\frac{3,699 \cdot 10^5 \cdot (1+k) \cdot (1,042 \cdot 10^{15} - (9,887 \cdot 10^{15} - 1,342 \cdot 10^{15} \cdot k))}{-1,441 \cdot 10^{13} + 1,956 \cdot 10^{12} \cdot k} > 0$$

Simplificando a inequação, obteve-se a seguinte expressão:

$$4,964 \cdot 10^{20} \cdot k^2 - 2,776 \cdot 10^{21} \cdot k - 3,272 \cdot 10^{21} < 0$$

Solução: $k > -1$ e $k < 6,592$

- Para s^0

$$2,538 \cdot 10^8 + 2,538 \cdot 10^8 \cdot k > 0$$

Solução: $k > -1$

Portanto, para garantir a estabilidade o intervalo de valores para k deve se encontrar em: **$]-1, 6.592[$** .

2.7. Lugar Geométrico das Raízes

Analisou-se também o lugar geométrico das raízes para o sistema em malha fechada, obtendo o intervalo de estabilidade em: **$[0, 6.6[$** . Observa-se também que há dois pares de pólos conjugados, sendo um de alta frequência

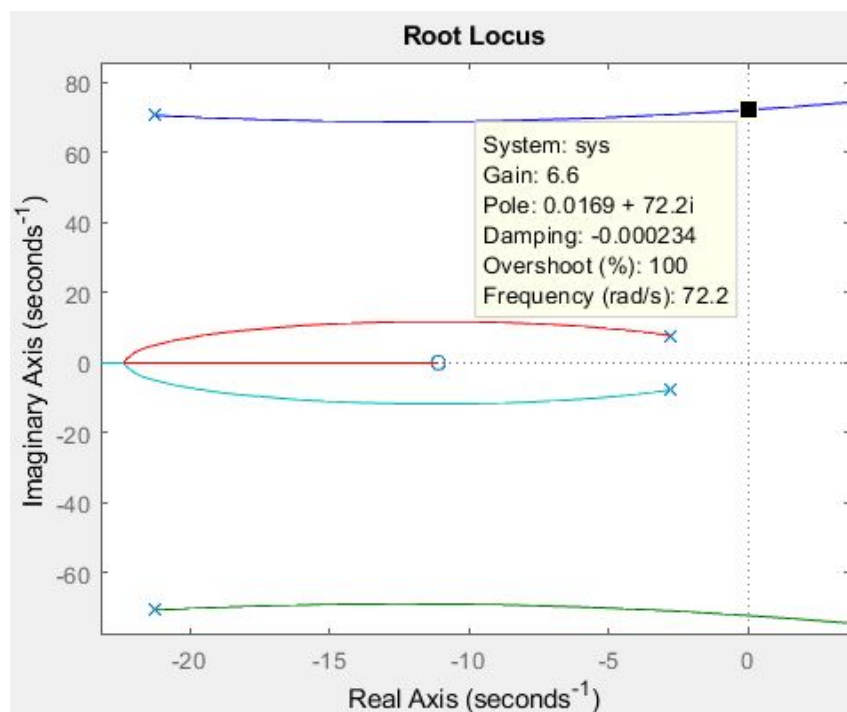


Figura 9. Gráfico com o lugar geométrico das raízes

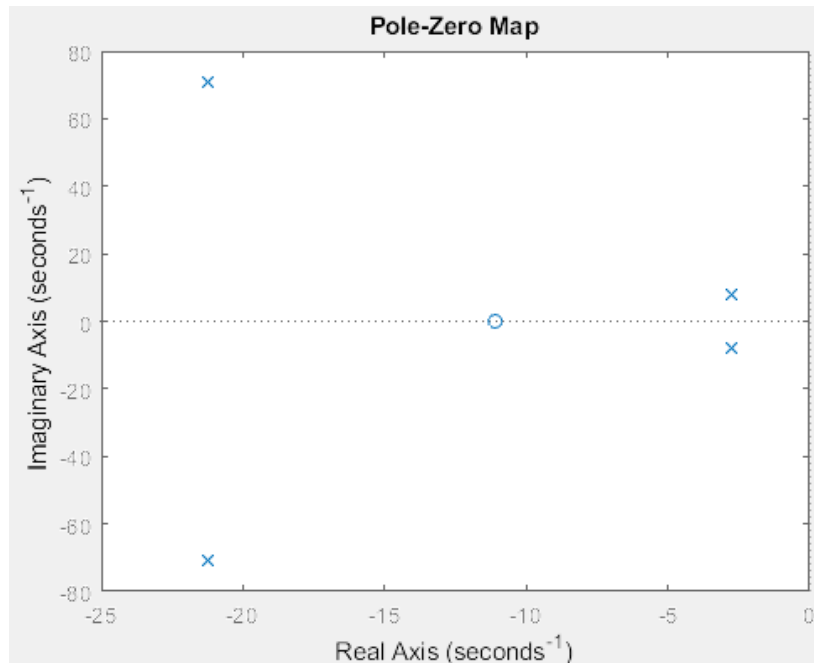


Figura 10. Posição dos polos e zeros do sistema em malha aberta

Utilizando a função `zmap(<FT>)`, foi possível encontrar os pólos e zeros da função de transferência, sendo eles:

- Polos: $-21,22 + j 70,63$; $-21,22 - j 70,63$; $-2,76 + j 7,72$; $-2,76 - j 7,72$
- Zeros: $-11,10$

2.8. Diagramas de Nyquist e Bode

Uma outra forma de analisar a faixa de ganho que garanta a estabilidade do sistema é por meio do diagrama de Nyquist, que utiliza informações da resposta em frequência. O efeito do ganho no diagrama é caracterizado por um deslocamento de todos os pontos do traçado ao longo do eixo real. Para que o sistema seja estável, o ganho não pode fazer o diagrama envolver o ponto -1 do eixo real.

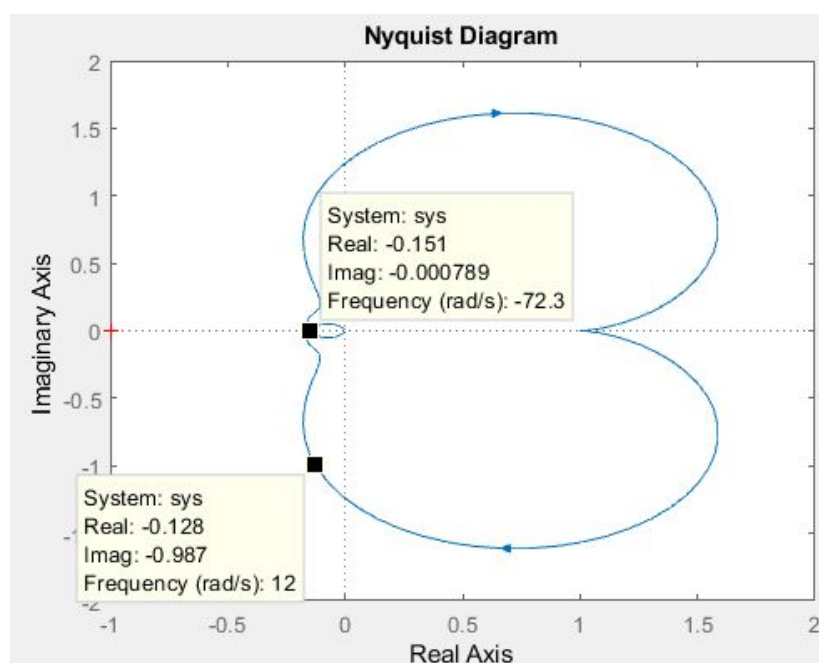


Figura 11. Diagrama de Nyquist para o sistema na equação (6)

Como mostrado na figura acima, o traçado intercepta o eixo real em $-0,151$. Isso significa que para que o traçado envolva o ponto -1 do eixo real, que é o limite para estabilidade, o sistema pode ser multiplicado por um ganho de no máximo 6.62 . Em outras palavras, a margem de ganho é de 16.4 dB.

Outra forma de provocar a instabilidade do sistema é provocar uma mudança de fase de forma que todos os pontos do traçado rotacionam em relação ao ponto de origem do diagrama. Esta faixa de fase que garante a estabilidade do sistema é chamada de margem de fase. Um avanço de fase de $82,6^\circ$ causaria a envolvimento do ponto -1 do eixo real pelo ponto $-0,128-j0,987$ do traçado, já que neste ponto o módulo do ganho é unitário.

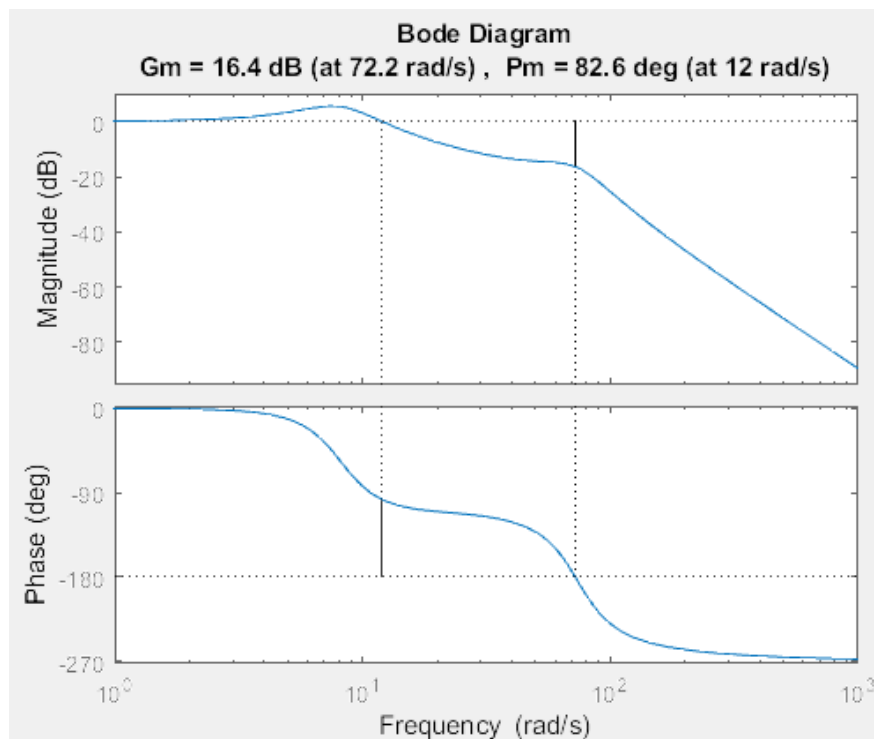


Figura 12. Diagrama de Bode para o sistema na equação (6)

Fornecendo o mesmo tipo de informação do diagrama de Nyquist, porém de forma mais intuitiva, o diagrama de Bode mostra as margens de ganho e fase para o sistema. A margem de ganho é definida como o quanto o sistema pode ser amplificado de forma que a magnitude na frequência de 180° seja igual 0 dB, enquanto a margem de fase é o quanto a fase pode ser atrasada ou avançada de forma que na frequência de 0 dB a fase seja de 180° .

3. CONTROLADORES

3.1. Definição dos requisitos de sistema

Segundo GILLEPSIE (1992), a suspensão automotiva se caracteriza por meio de duas principais funcionalidades. A **primeira** delas é isolar o corpo do veículo das irregularidades da estrada a fim de maximizar o conforto dos passageiros.

Sabendo disso, a avaliação do sistema trabalhado para $\frac{1}{4}$ de veículo considera que o movimento da carroceria deve garantir uma maior estabilidade e conforto ao motorista e passageiros, fazendo com que a oscilação da carroceria seja a menor possível (ZAGO et al., 2010). Já conhecidas as características da resposta do mesmo a uma entrada degrau e baseando-se nas referências bibliográficas, os seguintes critérios foram estabelecidos para projetar um compensador que seja inserido em cascata com o sistema em malha fechada:

- Sem compensador

Tempo de assentamento = 0.635 segundos

Overshoot = 33,4%

Fator de amortecimento = 0,329

Erro em regime permanente = 50%

- Com compensador

Tempo de assentamento = 0.7 segundos

Overshoot = máximo de 2%

Erro em regime permanente = 0%

A **segunda** funcionalidade é produzir o contato contínuo entre o pneu e a pista para garantir boa aderência à estrada. Portanto, as suspensões ativas, quando privilegiando a segurança veicular, fazem com que a roda fique o máximo possível em contato com o solo, permitindo a oscilação da carroceria (ZAGO et al., 2010).

Assim sendo, o requisito de controle para o sistema de suspensão ativa é fazer com que a diferença entre o deslocamento da carroceria Z e a irregularidade da pista Z_r , que é exatamente a deflexão do pneu, seja insensível a variações de Z_r , minimizando dessa forma a variação da força normal no pneu. (DUTRA et al., 2016)

Concluindo, o requisito de controle para o sistema de suspensão ativa do modelo clássico de $\frac{1}{4}$ de veículo é definido a ponto de fazer com que as irregularidades da pista Z_r sejam minimamente transmitidas para a carroceria do veículo, minimizando dessa forma o deslocamento vertical Z . Assim, o controlador deve minimizar a oscilação da carroceria e manter a força da roda no chão constante.

3.2. Projeto de compensador baseado no LGR

De forma a atender aos requisitos propostos, foram calculados o novo fator de amortecimento e a nova frequência natural do sistema.

$$\begin{aligned}\%UP &= e^{\frac{-\zeta \cdot \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \cdot 100\% \rightarrow 2\% = e^{\frac{-\zeta \cdot \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \cdot 100\% \\ \rightarrow \ln 0,02 &= \frac{-\zeta \cdot \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \\ \zeta &= 0,78\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_n &= \frac{4}{\zeta \cdot T_s} \rightarrow \omega_n = \frac{4}{0,78 \cdot 0,7} \\ \omega_n &= 7,33 \text{ [rad/s]}\end{aligned}$$

Através desses resultados é possível obter a posição do par de pólos dominante, desejado ao sistema com compensação, no plano S.

$$\begin{aligned}p &= -\zeta \cdot \omega_n \pm \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \\ \rightarrow p &= -0,78 \cdot 7,33 \pm 7,33 \sqrt{1-0,78^2} \\ p &= -5,717 \pm 4,587\end{aligned}$$

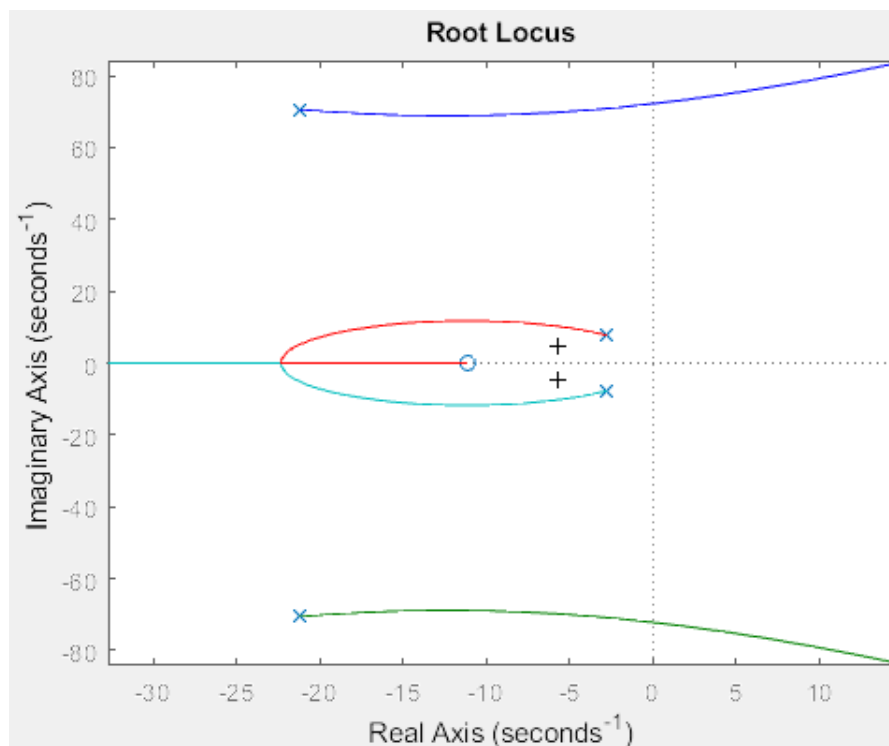


Figura 13. Lugar geométrico das raízes do sistema sem compensação.

Gerando o gráfico do local geométrico das raízes do sistema original, foi observado que nenhum ramo passa pelo par de pólos calculado anteriormente (cruz preta), deixando claro a necessidade de um compensador.

Durante tentativas fracassadas de implementação de um compensador PID, verificou-se a presença de oscilações de alta frequência na resposta transitória. Esses modos de vibração de alta frequência podem ser modelados como parte da função de transferência da planta através de pares de pólos complexos próximos ao eixo imaginário (NISE, 2017). Para contornar o problema foi feito o uso de um filtro Notch. O filtro Notch possui zeros próximos dos polos de alta frequência $(-2.76 \pm 7.72j)$ de forma a anular o efeito destes no sistema. Além dos dois zeros, o filtro possui dois pólos sobre o eixo real de forma a alterar o lugar geométrico das raízes, assim satisfazendo os requisitos propostos. Como um dos objetivos era a eliminação total do erro em regime permanente, também foi introduzido um integrador ideal ao compensador.

$$PI = \frac{1}{s}$$

$$Notch = \frac{(s + 2.76 + 7.72j)(s + 2.76 - 7.72j)}{(s + p_1)(s + p_2)}$$

$$Compensador = Notch \cdot PI$$

Desta forma, o problema se resumiu a obter os dois polos do filtro Notch de maneira que a fase total do sistema com compensador fosse -180° .

$$-180^\circ = Sistema^\circ + Compensador^\circ + p_1^\circ + p_2^\circ$$

$$-180^\circ = 68,71^\circ - 171,07^\circ + p_1^\circ + p_2^\circ$$

$$-77,64^\circ = p_1^\circ + p_2^\circ$$

Para facilitar nas contas, os dois polos do Notch foram projetados para estarem no mesmo ponto do eixo real, com isso cada polo contribuirá com $-38,82^\circ$.

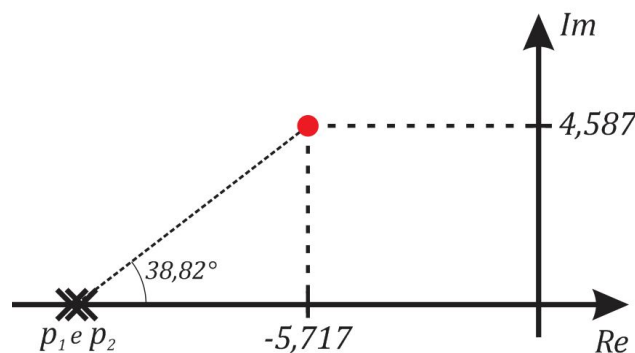


Figura 10. Trigonometria usada para achar os polos do filtro Notch.

$$\tan(38,82^\circ) = \frac{-4,587}{p_{1,2} + 5,717}$$

$$p_{1,2} = -11,417$$

Com os pólos do filtro Notch calculados, a função de transferência total do compensador é:

$$\text{Compensador} = \frac{(s + 2.76 + 7.72j)(s + 2.76 - 7.72j)}{s \cdot (s + 11,417)^2}$$

A ação do compensador no sistema é visível no novo local geométrico das raízes. O sistema com compensação envolve o par de polos dominante que satisfaz os requisitos propostos.

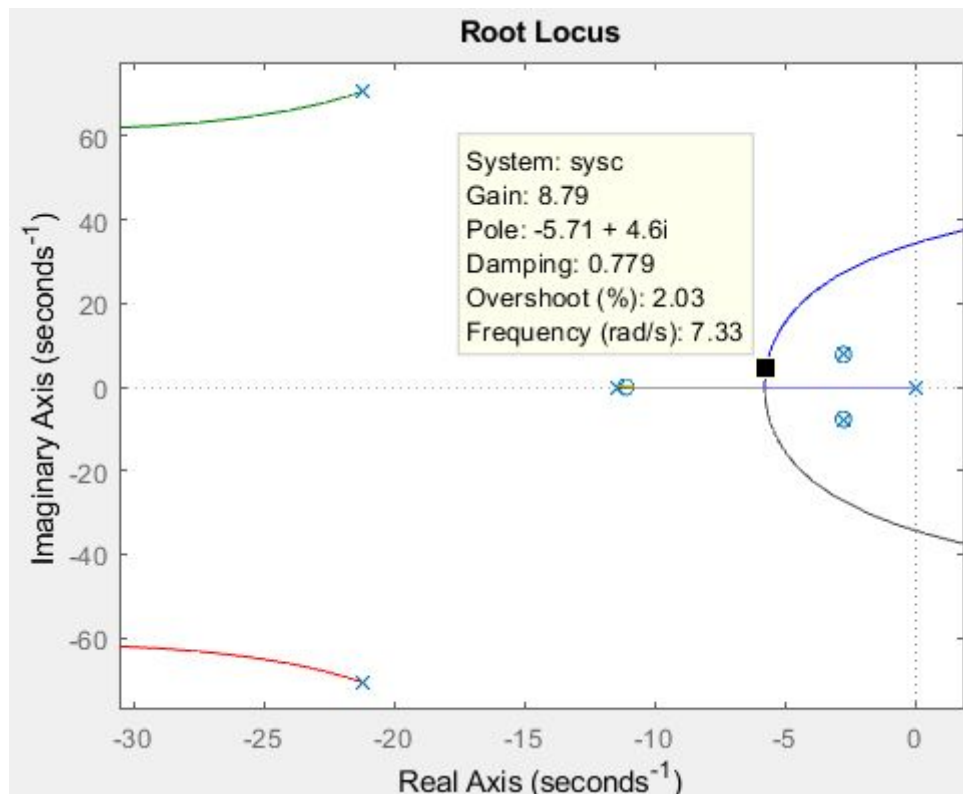


Figura 14. Lugar geométrico das raízes do sistema com compensação.

Com um ganho $K = 8,79$ o sistema com compensação possui uma resposta ao degrau com ultrapassagem percentual de 2,03% e com tempo de assentamento de 0,72 segundos, conforme era o objetivo.

	COM COMPENSADOR	SIMULADO
Tempo de assentamento	0,7 segundos	0,72 segundos
Overshoot	2%	2,03%
Erro regime permanente	0%	0%

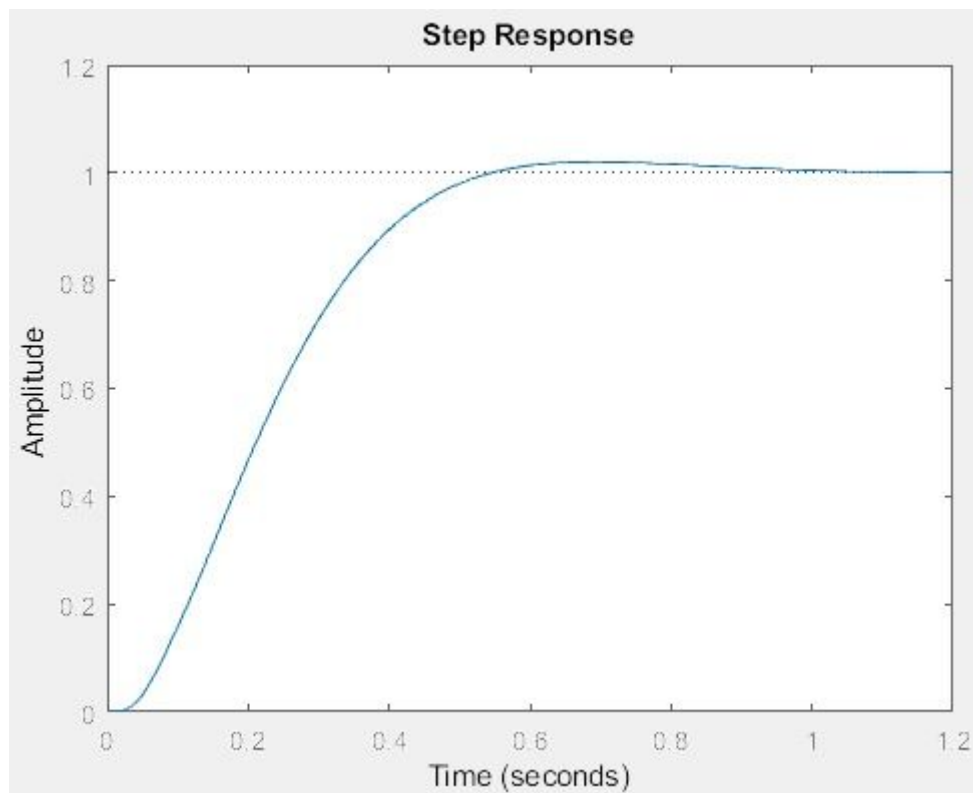


Figura 15. Resposta ao degrau do sistema com compensação.

Além disso, foi possível obter o sinal de saída do controlador, avaliando o sistema quanto à saturação do atuador.

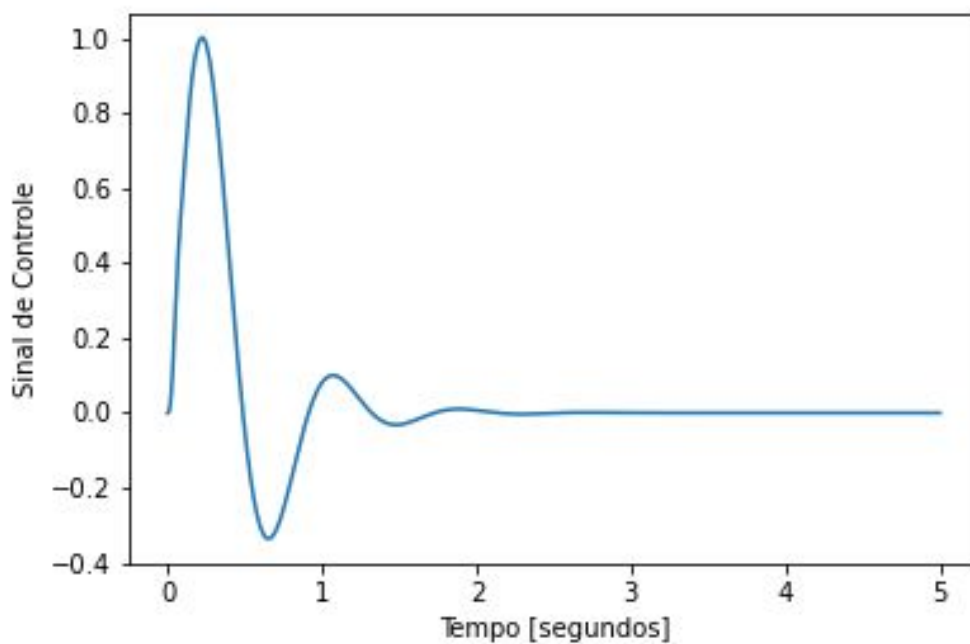


Figura 16. Sinal de saída do Compensador.

3.3. Projeto de compensador baseado na resposta em frequência

Para um projeto de compensador pela resposta em frequência, deve-se ter em mente que, segundo NISE, um sistema estável em malha aberta é estável em malha fechada se a magnitude da resposta em frequência em malha aberta tiver um ganho menor que 0 dB na frequência em que a fase da resposta em frequência é -180° , além de que a ultrapassagem percentual pode ser reduzida aumentando-se a margem de fase, a velocidade da resposta pode ser aumentada aumentando-se a faixa de passagem e o erro em regime permanente é melhorado aumentando-se a magnitude das respostas em baixas frequências. Portanto, analisando a resposta ao degrau do sistema juntamente aos requisitos:

	SEM COMPENSADOR	COM COMPENSADOR
Tempo de assentamento	0,635 segundos	0,7 segundos
Overshoot	33,4%	2%
Erro regime permanente	50%	0%

A margem de fase deve ser aumentada para um overshoot de 2% e a frequência de passagem levemente diminuída para um tempo de assentamento de 0,7 segundos.

Na etapa anterior, o sistema de controle foi desenvolvido para atingir a resposta transitória ajustando-se o ganho ao longo do lugar geométrico das raízes. Para a resposta em frequência, algumas ideias além do proposto pelo NISE serão trabalhadas, de tal forma que os critérios de desempenho sejam alcançados. Sendo assim, analisando o diagrama de Bode da função de transferência [6]:

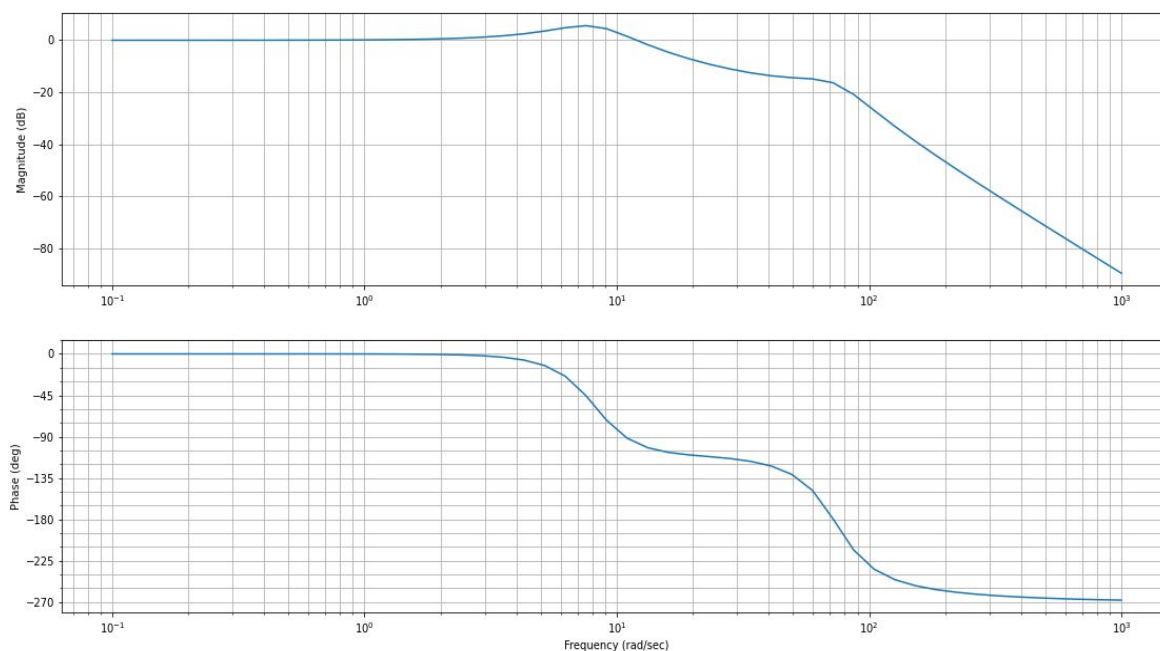


Figura 17. Diagrama de Bode em MA para o sistema de suspensão

Inicialmente, um integrador será colocado em cascata no sistema para atribuir um erro em regime permanente nulo. Desta forma, o diagrama de Bode resultante terá o seguinte perfil:

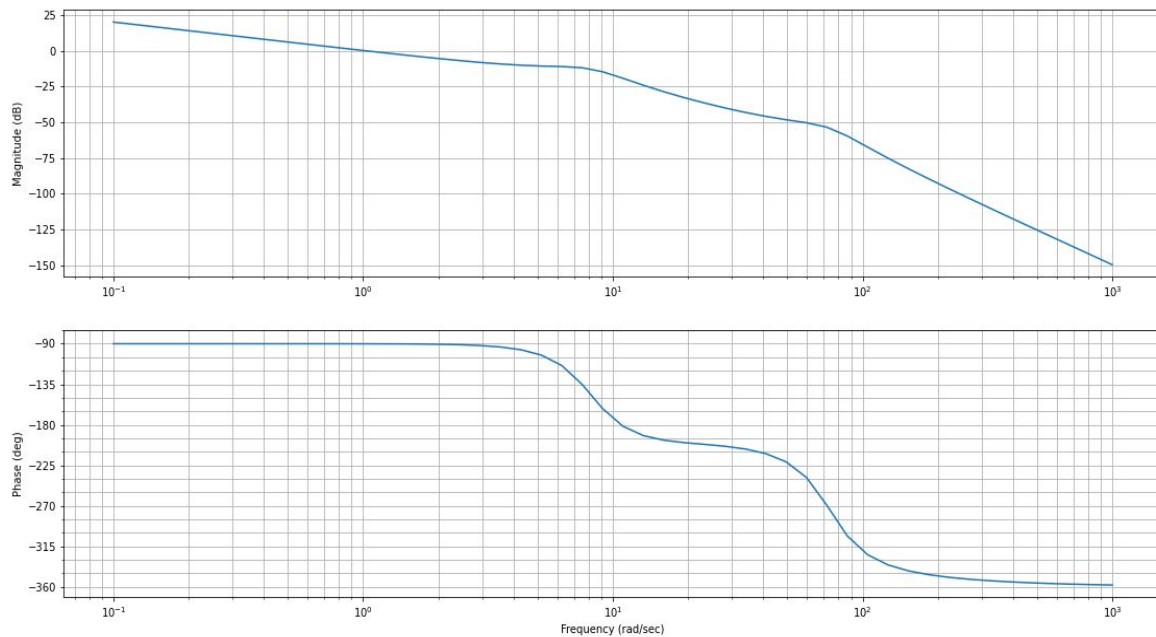


Figura 18. Diagrama de Bode em MA para o sistema de suspensão com integrador

Onde:

- Margem de ganho = 18,7 dB
- Margem de fase = 89,9°
- Frequência na margem de ganho = 10,8 rad/s
- Frequência na margem de fase = 1,02 rad/s

Observa-se pelo diagrama de Bode que o sistema já é estável (margem de ganho maior que 0 dB), com erro em regime permanente nulo. Assim, um dimensionamento da margem de fase será necessário para a resposta transitória, o que é possível a partir do projeto de um compensador em atraso, pois deve-se aumentar a margem de fase do sistema para resultar no transitório desejado.

Calculando a margem de fase desejada para overshoot de 2%:

$$\zeta = \frac{-\ln (\%UP/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 (\%UP/100)}}$$

$$\zeta = \frac{3,912}{5,017} = 0,779$$

$$\phi_m = \arctan \left(\frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1 + 4\zeta^4}}} \right)$$

$$\phi_m = \arctan \left(\frac{1,559}{0,599} \right) = 69^\circ$$

Para um valor de margem de segurança de 12° , a fase da nova frequência de margem de fase será:

$$\phi = 180 - (69 + 12) = 99^\circ$$

Visualizando o diagrama de Bode da figura 14, e com auxílio de software de simulação, conclui-se que a nova frequência de margem de fase se encontra em **2,7 rad/s**.

Após a realização das simulações a partir do método teórico apresentado por NISE, foi observado que os requisitos de resposta transitória não se aproximavam dos valores esperados. O sistema de suspensão apresenta um polinômio característico de quarta ordem, no qual é necessário ter conhecimento de mais parâmetros do mesmo sistema, e melhores resultados poderiam ser obtidos se fosse possível aproximar o polinômio para segunda ordem, o que não vem ao caso.

Sendo assim, foi pensado na possibilidade de desenvolver um método empírico, onde a partir de simulações consecutivas os parâmetros do compensador de atraso de fase seriam ajustados para entregar a resposta transitória desejada, ou o mais próximo possível dos critérios.

Primeiramente, criou-se um laço de repetição para testar sequencialmente valores para zeros, polos e ganhos ao compensador. O laço é composto por 3 for's concorrentes, testando todas as possibilidades, onde os intervalos de teste foram:

- zeros: de 0 a 100
- polos: de 0 a 100
- distância entre zero e polo (delta): de 0 a 30
- zero = polo + delta
- ganho (K): de 0,1 a 10

Algumas considerações sobre estas suposições são que para valores de ganho K acima de 10, o sistema se comporta com instabilidade, e para valores de delta acima de 30 o compensador acaba gerando um atraso muito grande.

Aplicando este método no simulador, obteve-se um conjunto de valores de zero, polo e ganho para a construção do compensador, e para cada um deste realizou-se a resposta ao degrau em malha fechada com o sistema de suspensão para obter os valores de tempo de assentamento e overshoot.

Dentre os testes, a melhor resposta obtida foi a seguinte:

- zero = 4
- polo = 3
- delta = 1
- ganho (K) = 2
- compensador = $2 \cdot (s + 4) / s(s + 3)$

$$\frac{Z(s)}{Z_R(s)} = \frac{2(s + 4)}{s(s + 3)} \frac{2,538 \cdot 10^8 s + 2,818 \cdot 10^9}{7709s^4 + 3,699 \cdot 10^5 s^3 + 4,426 \cdot 10^7 s^2 + 2,538 \cdot 10^8 s + 2,818 \cdot 10^9}$$

A partir do diagrama de Bode do compensador (figura 15), as características de atraso de fase são fortemente observadas no mesmo, onde há um decaimento na frequência de 3 rad/s, e

na frequência de 4 rad/s há o efeito do zero na curva. No gráfico das fases há um pico na frequência de 3,6 rad/s de -8° .

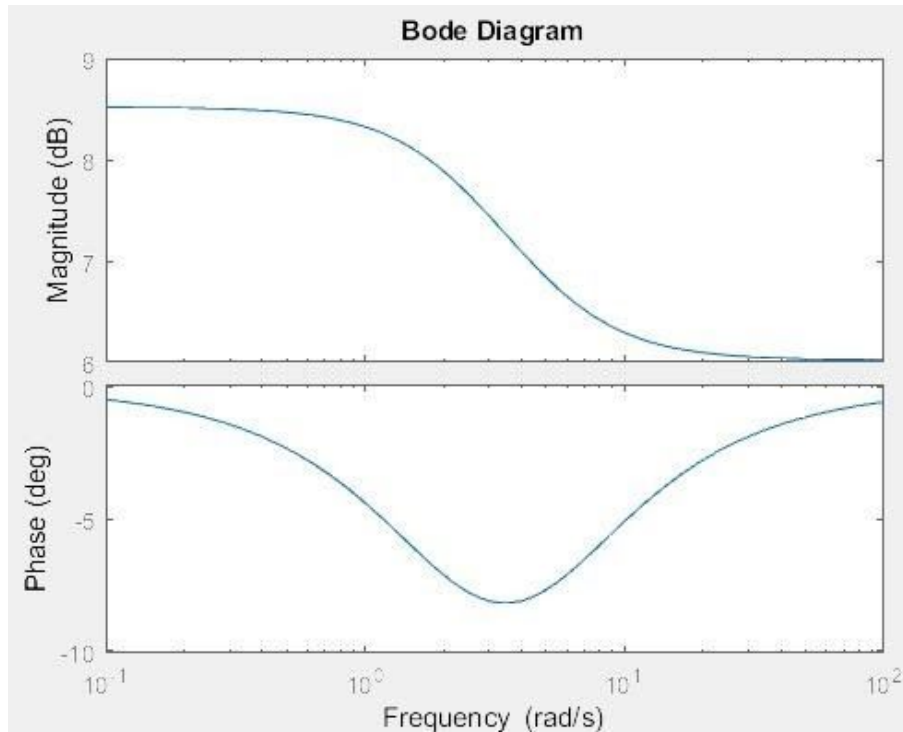


Figura 19. Diagrama de Bode do compensador

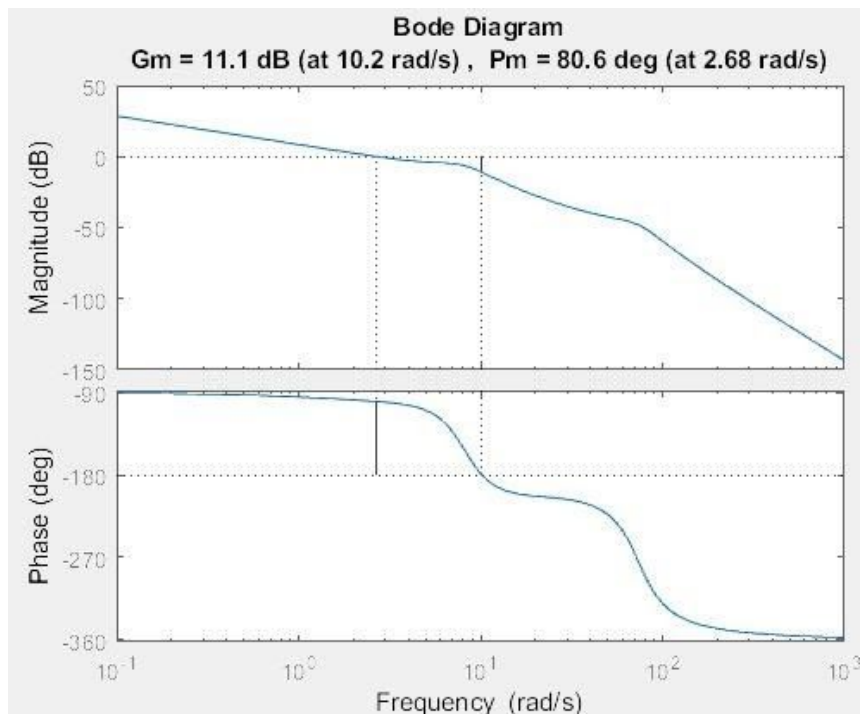


Figura 20. Diagrama de Bode do sistema de suspensão e compensador em malha aberta

Executando o comando `stepinfo[MF]` ($MF = \text{feedback}(\text{planta} * \text{compensador}, 1)$), as seguintes informações foram apresentadas:

- Tempo de subida: 0.8615 segundos
- Tempo de assentamento: 1.1376 segundos

- Overshoot: 1.7218 %
- Pico: 1.0172 segundos
- Tempo de pico: 1.2965 segundos

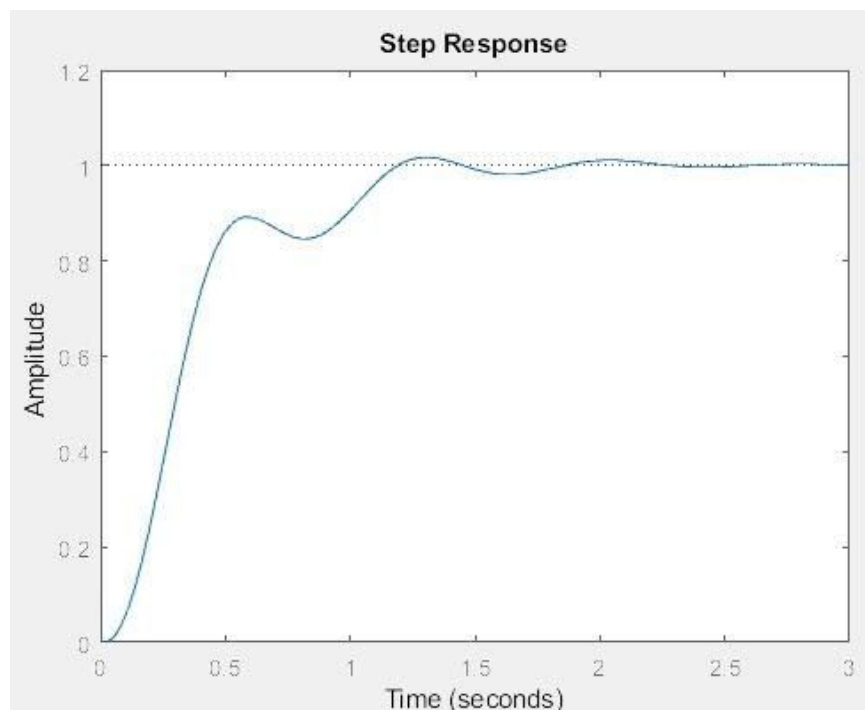


Figura 21. Resposta ao degrau

Por fim, comparando os resultados obtidos por simulação aos requisitos:

	COM COMPENSADOR	SIMULADO
Tempo de assentamento	0,7 segundos	1,1376 segundos
Overshoot	2%	1,7218%
Erro regime permanente	0%	0%

Não foi possível obter melhores resultados para os critérios estabelecidos, entretanto são dados com uma diferença de 0,44 segundos de assentamento e 0,3% de overshoot, no qual foi concluído que está de acordo para uma resposta transitória desejada e além disso o projeto de controlador por meio da resposta em frequência garantiu um desempenho adequado, porém não esperado.

O sinal de saída do compensador também foi observado e, comparado à figura 16, este apresenta valores maiores de pico, oscilação e tempo de assentamento.

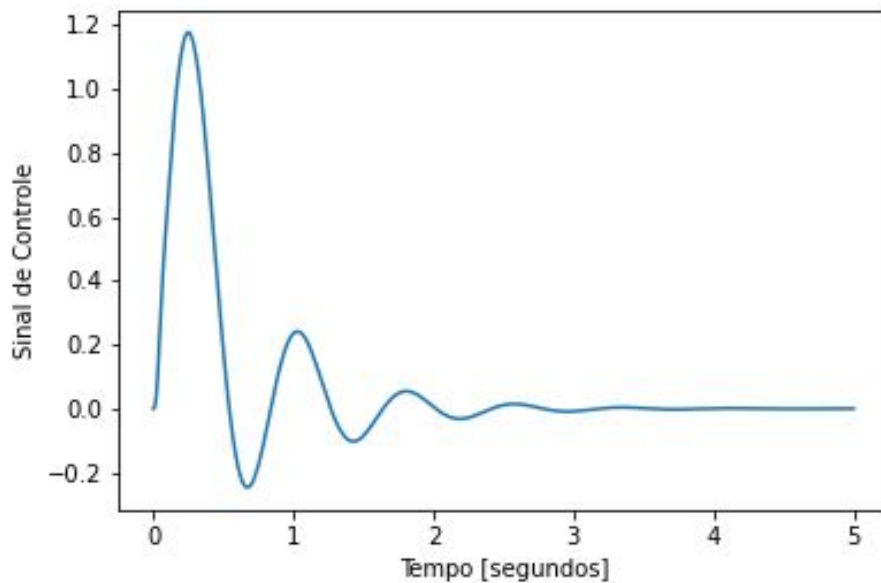


Figura 22. Sinal de saída do compensador.

3.4. Projeto de compensador baseado no espaço de estados

Durante esta etapa, será desenvolvido um sistema de controle em espaço de estados para alcançar os requisitos determinados. Avaliando novamente os critérios:

- Overshoot = 2%
- Tempo de assentamento = 0,7 segundos
- Erro em regime permanente = 0%

$$\zeta = \frac{-\ln (\%UP/100)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 (\%UP/100)}}$$

$$\zeta = 0,78$$

$$\omega_n = \frac{4}{T_s * \zeta}$$

$$\omega_n = 6.256 \text{ rad/s}$$

Sendo assim, deve-se projetar os ganhos para cada variável de estado do sistema, onde o polinômio característico desejado assume pólos dominantes com valores de:

$$p_i = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

$$p_1 = -4.878 + j3.917$$

$$p_2 = -4.878 - j3.917$$

Além disso, serão adicionados 3 polos para gerar os ganhos das demais variáveis de estado da planta e o ganho para correção do erro em regime permanente, sendo eles:

$$p_3 = -11.1$$

$$p_4 = -5 * \zeta * \omega_n = -28.57$$

$$p_5 = -6 * \zeta * \omega_n = -34.28$$

Portanto, os pólos desejados serão estruturados em um vetor com o seguinte polinômio característico:

$$V = (-4,878 + j3,917; -4,878 - j3,917; -11,1; -28,57; -34,28)$$

$$s^5 + 85,39s^4 + 2576s^3 + 3,401 * 10^4 s^2 + 2,144 * 10^5 s + 5,84 * 10^5$$

As matrizes de estado e entrada que representam a planta modificada por influência do integrador serão:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -4.799e+01 & 5.741e+01 & 3.293e+01 & -3.655e+01 & 0.000e+00 \\ -1.000e+02 & 9.347e-15 & -2.232e-14 & 1.392e-14 & 0.000e+00 \\ 0.000e+00 & 1.000e+01 & 7.536e-15 & -1.657e-14 & 0.000e+00 \\ 0.000e+00 & 0.000e+00 & -1.000e+01 & -2.837e-15 & 0.000e+00 \\ 0.000e+00 & -5.122e-15 & -3.293e+01 & 3.655e+01 & 0.000e+00 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Executando o comando `place(Ab, Bb, V)`, foi possível determinar os ganhos para o sistema:

$$K(\text{sistema}) = -37.397, -31.652, 1.084, 20.378$$

$$K_i(\text{integrador}) = 1.598$$

Em malha fechada as matrizes de estado, entrada e saída terão a seguinte estrutura após o ajuste com os ganhos:

$$A_m = \begin{bmatrix} A - B * K & B * Ki \\ -C & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_m = [C \quad 0]$$

$$D_m = [0]$$

$$A_m = \begin{bmatrix} -8.538e+01 & 2.576e+01 & 3.401e+01 & -1.617e+01 & -1.598e+00 \\ -1.000e+02 & 9.347e-15 & -2.232e-14 & 1.392e-14 & 0.000e+00 \\ 0.000e+00 & 1.000e+01 & 7.536e-15 & -1.657e-14 & 0.000e+00 \\ 0.000e+00 & 0.000e+00 & -1.000e+01 & -2.837e-15 & 0.000e+00 \\ 0.000e+00 & -5.122e-15 & -3.293e+01 & 3.655e+01 & 0.000e+00 \end{bmatrix}$$

$$B_m = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_m = [0 \quad 5.122e-15 \quad 3.293e+01 \quad -3.655e+01 \quad 0]$$

$$D_m = [0]$$

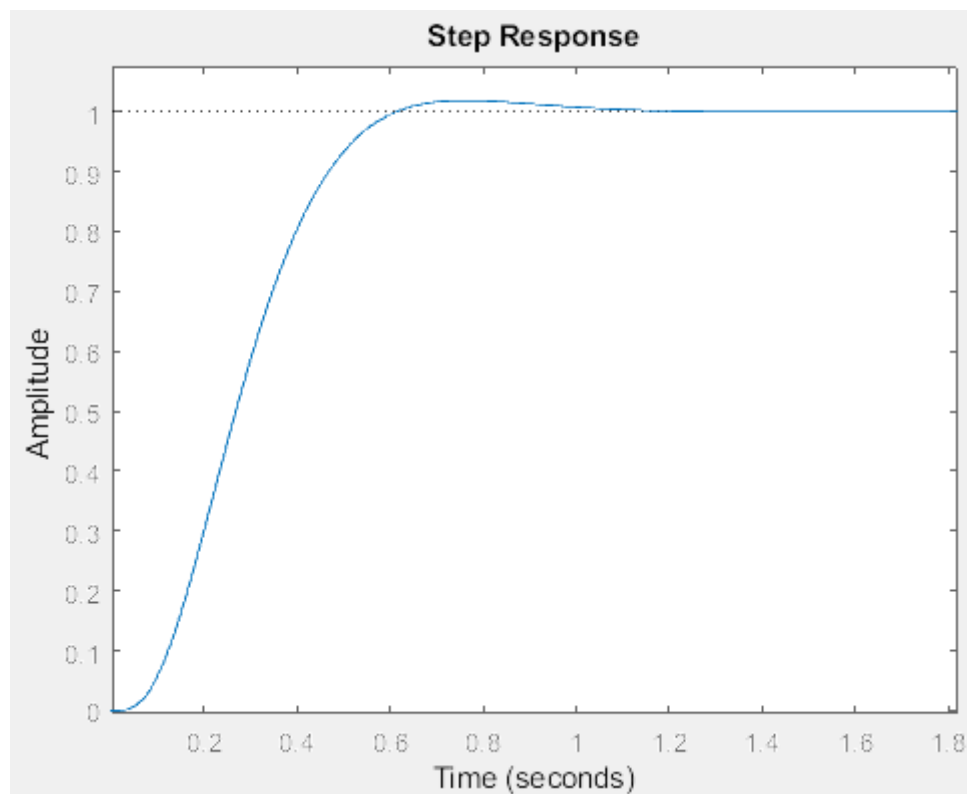


Figura 23. Resposta ao degrau

Analisando o gráfico da resposta ao degrau, pode-se afirmar que resultou em um overshoot pequeno com tempo de assentamento menor que 1 segundo. Avaliando para o *stepinfo()*, obtém-se as seguintes informações:

	COM COMPENSADOR	SIMULADO
Tempo de assentamento	0,7 segundos	0,60 segundos
Overshoot	2%	1,86%
Erro regime permanente	0%	0%

Ou seja, por meio do projeto de controlador por espaço de estados foi possível chegar a um resultado satisfatório de desempenho. Após várias simulações com o sistema, observou-se que o desempenho da resposta poderia ser melhorado, distanciando os pólos não dominantes desejados mais que 5 vezes (sugerido por NISE para uma aproximação de segunda ordem adequada).

Em relação ao sinal de saída do compensador, observa-se que este apresenta comportamento inesperado em relação aos outros controladores, onde o sinal converge para o valor unitário como um perfil criticamente amortecido.

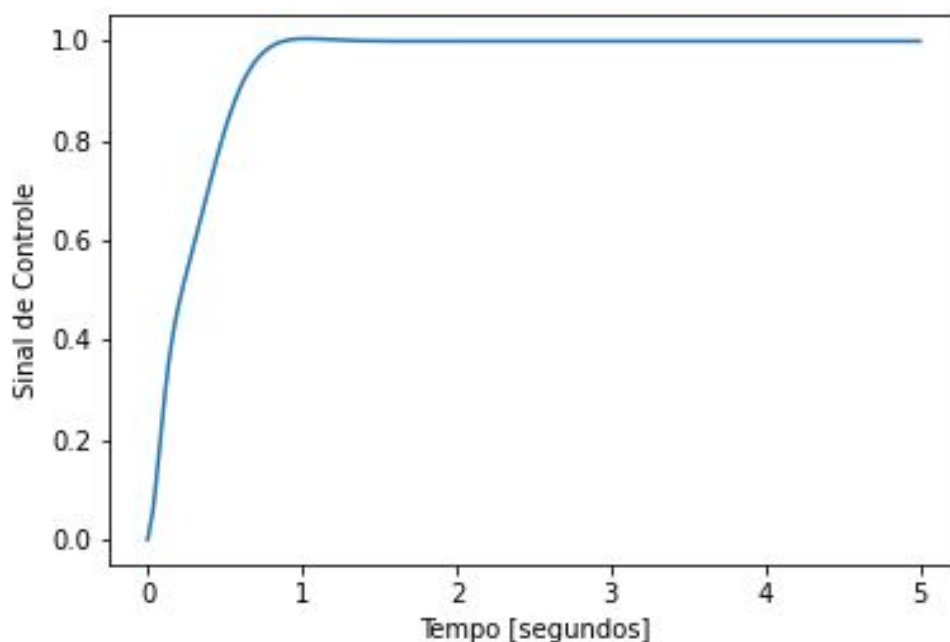


Figura 24. Sinal de saída do compensador

4. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Avaliando os projetos de compensador para o sistema de suspensão, alguns pontos foram visíveis em questão de precisão e dimensionamento. Um problema enfrentado durante as projeções foi determinar o tempo de assentamento, onde por meio do lugar geométrico das raízes estimar seu valor foi mais eficaz pois há um valor de ω associado, enquanto que a partir do diagrama de Bode, não era garantido nas simulações que o tempo de assentamento seria alcançado certamente ou aproximadamente. No dimensionamento, projetar pela resposta em frequência garantiu maior simplicidade, pois pelo lugar geométrico das raízes foi necessário desenvolver um filtro Notch para anular o efeito do par de pólos de alta frequência, o que não foi um processo muito trivial. Em relação à técnica trabalhada por espaço de estados, tanto o dimensionamento quanto a precisão podem ser alcançados facilmente dependendo da posição dos pólos não dominantes, observou-se que quanto mais distantes estavam dos pólos dominantes, o overshoot aumentava e o tempo de assentamento diminuía, ou seja, era garantido maior flexibilidade modificando poucos parâmetros.

Em relação aos compensadores:

- Lugar Geométrico das Raízes

$$G_c = 8,79 \frac{(s + 2,76 + 7,72j)(s + 2,76 - 7,72j)}{s(s + 11,417)^2}$$

- Resposta em frequência

$$G_c = \frac{2(s + 4)}{s(s + 3)}$$

A função de transferência pela resposta em frequência apresenta um perfil de aplicação mais intuitivo, porém os requisitos de tempo de assentamento e overshoot não foram alcançados com precisão, diferentemente pelo lugar geométrico das raízes e espaço de estados, onde para o LGR a função de transferência apresentou um perfil inesperado, porém os critérios de resposta temporal foram melhor atendidos. Para a técnica em espaço de estados, não foi possível obter a função de transferência, pois as matrizes de entrada, estado e saída já se encontram em malha fechada, entretanto a resposta ao degrau alcançou bons resultados, embora seja possível melhorar ajustando os parâmetros (pólos não dominantes).

	LUGAR GEOMÉTRICO	RESPOSTA EM FREQUÊNCIA	ESPAÇO ESTADOS
Tempo de assentamento	0,72 segundos	1,14 segundos	0,60 segundos
Overshoot	2,03%	1,72%	1,86%
Erro regime permanente	0%	0%	0%

Avaliando os sinais da resposta ao degrau unitário, as técnicas apresentadas por espaço de estados e lugar geométrico das raízes resultaram em curvas quase idênticas, com diferença no tempo de subida, enquanto que pela resposta em frequência o sinal apresenta um regime transitório que pode ser decisivo para não usá-lo no sistema de suspensão, devido ao comportamento senoidal.

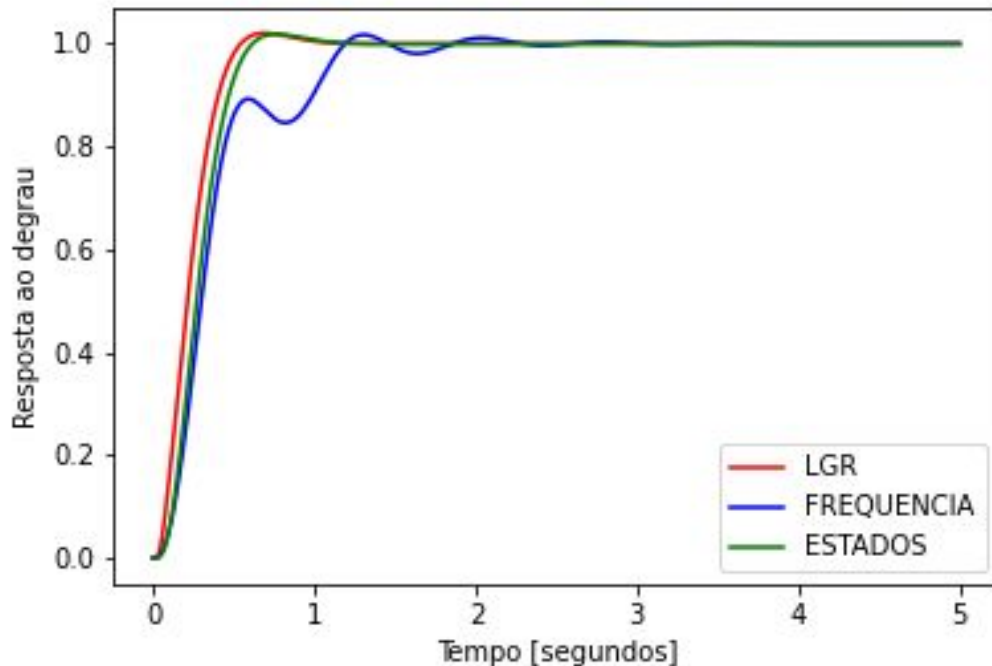


Figura 25. Resposta ao degrau dos 3 compensadores

Além disso, o sinal de controle se encontra dentro dos limites de saturação do servo sistema de posicionamento que será colocado em série com o controlador, visto que para entradas ao degrau não unitário deve-se ter um pouco mais de atenção quanto aos picos gerados pelos compensadores dimensionados pelo LGR e resposta em frequência.

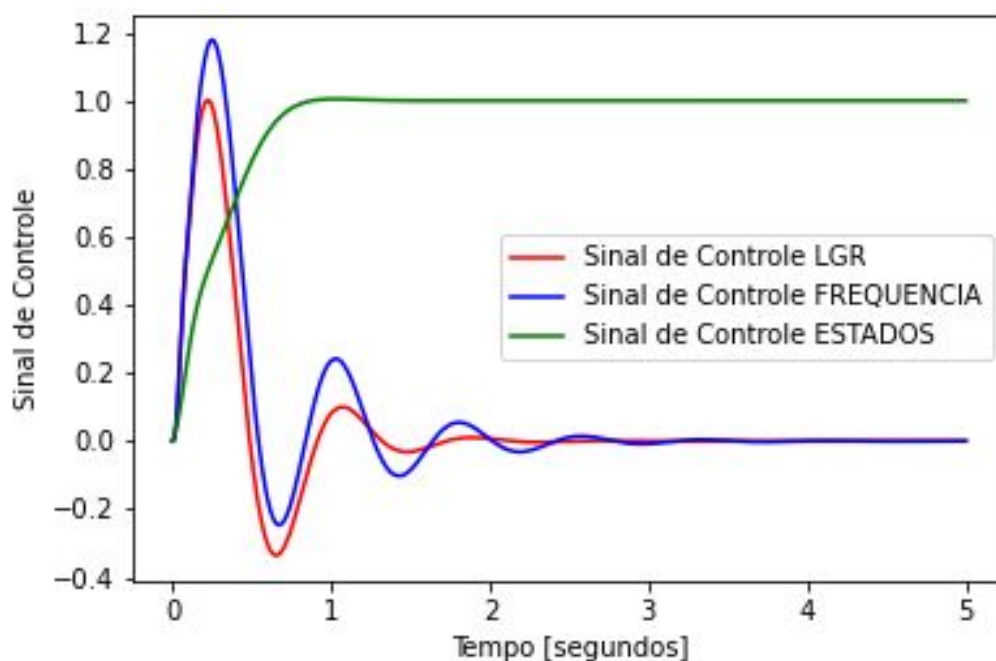


Figura 26. Sinal de saída dos 3 controladores

5. CONCLUSÃO

Em suma às análises realizadas neste trabalho, foi observado que as respostas do sistema em malha fechada com controlador obtiveram resultados satisfatórios, pensando em questão do conforto e estabilidade para o motorista. Considerando o mercado que investe em tecnologias de suspensão ativas, esta pesquisa aborda de forma muito sucinta todo o conhecimento envolvido, de forma a simplificar a situação real para o desenvolvimento dos controladores. Porém, as pesquisas realizadas agregaram muito para a dupla do projeto, onde o tema pode ser mais explorado para projetos futuros.

Em relação a teoria aplicada para o desenvolvimento de cada controlador, foi desafiador desenvolver o controlador a partir da resposta em frequência. O compensador em atraso de fase seria o ideal para trabalhar em cascata com a planta, porém o tempo de assentamento não atendia os requisitos do sistema, diferentemente do overshoot. Sendo assim uma solução à parte foi trabalhada para dimensionar o compensador e a resposta ao degrau da malha fechada foi usada para comparação às outras técnicas.

Pode-se afirmar que foi possível aplicar e desenvolver o conteúdo estudado durante a disciplina. Trabalhou-se com conceitos de modelagem de sistemas físicos, dimensionamento de controladores e avaliação das respostas temporais comparadas a critérios de desempenho reais, sendo essenciais para a finalização e discussão dos resultados.

6. REFERÊNCIAS

DUTRA, S. P. Controle H_∞ de sistemas de suspensão ativa veicular. Trabalho de conclusão de curso (graduação), UFSC, Joinville, 2016.

FREITAS, L. M. Estudo da dinâmica vertical de uma suspensão veicular do tipo MacPherson. São Carlos, 2006. 122 p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, USP.

GILLESPIE, T. D. Fundamentals of vehicle dynamics. Warrendale: Society of Automotive Engineers, 1992.

LUZ, C. F. Análise de resposta à frequência em suspensões de carros populares do mercado automotivo brasileiro. Trabalho de conclusão de curso (graduação), UFSC, Florianópolis, 2017.

S., N. N. Engenharia de Sistemas de Controle, 7ª edição. Grupo GEN, 2017. Disponível em: <https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788521634379/>. Acesso em: 04 Feb 2021

ZAGO, F. et al. Modelagem matemática e simulações computacionais do controle ótimo de um quarto do sistema de suspensão automotiva. In: 9th Brazilian Conference on Dynamics, Control and their Applications, p. 1172-1178, jun. 2010