效用最大化投资模型的进一步分析

钱艳英，李建新
（广东工业大学 应用数学学院，广东 广州 510090）

摘　要：在考虑限制卖空风险证券的基础上，借助用函数，对无风险资产存在时证券投资组合优化模型进行研究，给出了期望效用最大化时无风险资产和风险证券投资权重的解析表达式.

关键词：效用函数；相关风险证券；风险溢价
中图分类号：F830　**文献标识码**：A　**文章编号**：1671－119X(2006)02－0059－02

1　效用函数

一个理性的投资者在投资时，都有自己对收益和风险的不同偏好，即投资活动要遵循一个关于收益和风险的效用函数. 这个效用函数是用均值—方差来表现风险—收益率相互替换的大小的，在风险—收益率平面中表现为无差异曲线（IDC）. 它用来表示投资者偏好相同时收益和风险的不同数量的各种组合，或者说是表示能给投资者带来同等效用水平和满足程度的收益和风险的各种组合. 本文我们选择效用函数为：

$$U(\cdot)=U(R_p,\delta_p)=R_p-\frac{1}{2}\alpha\delta_p^2 \qquad (1)$$

其中 α 是投资者风险容忍度（α>0），引入系数 $\frac{1}{2}$ 是为了数学处理的方便，Levy 和 Markowitz(1979) 以及 Sharpe(1991) 的研究表明式(1)是 von Newmann—Morgenstorn 效用函数的一个比较好的近似[1].

2　最优投资组合模型

为讨论方便，我们不妨假设：

1）投资者是风险规避的

2）限制卖空证券和卖出债券

3）不考虑交易成本和税费

现投资者选定无风险债券和 n 种风险证券，无风险债券的收益率和投资比例分别为 R_f 和 X_f. 下面，我们将根据风险证券的不同情况探讨投资者的最优策略.

定理1　设 n 种风险证券的组合为证券市场组合 m，用 R_m,δ_m,X_m 表示证券市场组合的期望收益率，标准离差. 投资权重，则投资者效用最大化的投资权重为

$$X_m=\frac{R_m-R_f}{\delta_m^2\alpha} \qquad X_f=\frac{\delta_m^2\alpha-(R_m-R_f)}{\delta_m^2\alpha}$$

证明：当风险证券组合为证券市场组合 m 时，投资组合的收益和风险分别为：

$$R_p=X_fR_f+X_mR_m$$
$$\delta_p^2=\delta_m^2X_m^2$$

其中，$X_f+X_m=1,X_f\geqslant0,X_m\geqslant0$

X_f 为无风险债券的投资权重，X_m 为证券市场组合的投资权重[2]

此时，投资者的效用函数为

$$U(\cdot)=U(R_p,\delta_p)=R_p-\frac{1}{2}\alpha\delta_p^2$$
$$=X_fR_f+X_mR_m-\frac{1}{2}\alpha\delta_m^2X_m^2$$

投资者效用最大化问题就是求

$$\mathrm{Max}U(\cdot)=U(R_p,\delta_p)=X_fR_f+X_mR_m-\frac{1}{2}\alpha\delta_m^2X_m^2$$
$$s\cdot t\quad X_f+X_m=1,X_f\geqslant0,X_m\geqslant0$$

利用 Lagrange 乘数法，作函数

$$F=U(R_p,\delta_p)+\lambda(X_f+X_m-1)$$
$$=X_f+R_f+X_mR_m-\frac{1}{2}\alpha\delta_m^2X_m^2+\lambda(X_f+X_m-1)$$

其中 λ 为 Lagrange 乘子，

收稿日期：2005－07－07
作者简介：钱艳英（1965－），女，讲师，研究方向：金融数学.

$$由\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial X_f}=R_f+\lambda=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial X_m}=R_m-\alpha\delta_m^2X_m+\lambda=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial\lambda}=X_f+X_m-1=0\end{cases}$$

解方程组，得

$$X_m=\frac{R_m-R_f}{\delta_m^2\alpha}\quad X_f=\frac{\delta_m^2\alpha-(R_m-R_f)}{\delta_m^2\alpha}$$

定理 1 得证.

定理 2　若投资者选择的 n 种风险证券不相关，则投资者效用最大化的投资权重为

$$X_f=1-\sum_{i=1}^{n}X_i\quad X_i=\frac{R_i-R_f}{\delta_m^i\alpha}\quad(i=1,2,\cdots n)$$

证明：设第 i 种风险证券的期望收益率和方差及投资权重分别为 $R_i,\delta_i^2,X_i(i=1,2,\cdots n)$，于是，组合投资的收益和风险的表达式如下：

$$R_p=R_fX_f+\sum_{i=1}^{n}X_iR_i$$

$$\delta_p^2=\sum_{i=1}^{n}X_i^2\delta_i^2$$

$$X_f+\sum_{i=1}^{n}X_i=1\qquad X_f\geqslant0,X_i\geqslant0$$

则效用函数为：

$$U=U(R_p,\delta_p)=R_p-\frac{1}{2}\alpha\delta_p^2$$

$$R_fX_f+\sum_{i=1}^{n}X_iR_i-\frac{1}{2}\alpha\sum_{i=1}^{n}X_i^2\delta_i^2$$

$$作\quad F=U(R_p,\delta_p)+\lambda(X_f+\sum_{i=1}^{n}X_i-1)$$

$$=R_fX_f+\sum_{i=1}^{n}X_iR_i-\frac{1}{2}\alpha\sum_{i=1}^{n}X_i^2\delta_i^2+\lambda(X_f+\sum_{i=1}^{n}X_i-1)$$

使用 Lagrange 乘数法，可得

$$X_i=\frac{R_i-R_f}{\delta_i^2\alpha}\quad X_f=1-\sum_{i=1}^{n}X_i\quad(i=1,2,\cdots n)$$

定理 1 得证.

定理 3　设投资者选择了无风险债券和 n 种相关风险证券，第 i,j 种风险证券的协方差为 $\delta_{[ij]}(i,j=1,2,\cdots n)$. 则投资者效用最大化的投资权重为

$$X=\frac{1}{\alpha}C^{-1}A^T$$

$$X_f=1-EX=1-\frac{1}{\alpha}C^{-1}A^T$$

证明：为了计算的简便，引入矩阵表示.

记　$A=(R_1-R_f,R_2-R_f,\cdots,R_n-R_f)$，

$X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^T,E=(1,1,\cdots,1)$

$$C=\begin{bmatrix}\delta_{11}&\delta_{12}&\cdots&\delta_{1n}\\ \delta_{21}&\delta_{22}&\cdots&\delta_{2n}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ \delta_{n1}&\delta_{n2}&\cdots&\delta_{nn}\end{bmatrix}$$

这里，C 为协方差矩阵，它是对称的正定矩阵[3].

则组合投资收益，风险的表达式如下：

$$R_p=R_fX_f+\sum_{i=1}^{n}X_iR_j=R_f+AX$$

$$\delta_p^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}X_iX_j\delta_{ij}=X^TCX$$

$$其中，\sum_{i=1}^{n}X+X_f=1\qquad X_f\geqslant0,X_i\geqslant0$$

此时效用函数为

$$U=U(R_p,\delta_p)=R_p-\frac{1}{2}\alpha\delta_p^2$$

$$=R_f+AX-\frac{1}{2}\alpha X^TCX$$

当效用最大化时有 $\frac{dU}{dX}=0$，即可求解 X，

$$X=\frac{1}{\alpha}C^{-1}A^T$$

$$X_f=1-\sum_{i=1}^{n}X=1-\frac{1}{\alpha}C^{-1}A^T$$

定理 3 得证.

3　结束语

本文以我国证券市场限制卖空为背景，构建了无风险资产存在时的投资组合最优选择模型. 从理论上推导了投资者效用最大的投资权重解析式.

Tobin 在 1958 年证明了投资组合的效用函数与回报率之间的关系是一个二次式[4]：

$$U=a_0+a_1R_p+a_2R_p^2+a_3\delta_p^2\qquad(a_1>0,a_3<0)$$

本文使用的效用函数是上述二次效用函数的特例($a_0=a_2=0$)，这样应用期望效大最大化来求解投资组合最优投资权重的方法具有理论和实务上的可借鉴性.

参　考　文　献

[1] James Tobin. Liquidity Preferen as Bechavior towards Risk[J]. Review of Economic Studies,February 1985:65－85.

(下转第 79 页)

(5)地下导线测量要消除照准目标相位差的影响.

参　考　文　献

[1] 李青岳,陈永奇. 工程测量学[M]. 北京:测绘出版社,1995.
[2] 张国良. 矿山测量学[M]. 徐州:中国矿业大学出版社,2001.
[3] 陈宗佩,杨　笑,许小平,等. 工程建筑物的测量放样[M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2003.
[4] 中国有色金属工业总公司. GB50026 - 1993 工程测量规范[S]. 北京:中国计划出版社,2001.
[5] 首都规划建设委员会. GB50308 - 1999 地下铁道、轻轨交通工程测量规范[S]. 北京:中国计划出版社,2000.
[6] 北京市城乡建设委员会. GB50299 - 1999 地下铁道工程施工及验收规范[S]. 北京:中国计划出版社,1999.

The Breakthrough Error Analysis in Tunnel Boring

OUYANG Ping, WU Bei - ping
(Institute of Enginerring, China University of Geosciences , Wuhan 430074, China)

Abstract: By analyzing the limits of the breakthrough error in tunnel boring survey, the requirement data of the measurement error in different construction stages are obtained. and the precision, methods and schemes of the surveying are determined to ensure the tunnel breakthrough successfully.

Key words: tunnel boring machine; tunnel; control Survey; contact survey; breakthrough error

(上接第60页)

[2] 张　璞,白晓红,马　勇. 一种确定最优证券组合的新方法[J]. 系统工程,2000,18(2):36 - 39.
[3] 张卫国,谢建勇,聂赞坎. 不相关证券组合有效集的解析表示及动态分析[J]. 系统工程,2002,20(1):24 - 27.
[4] 马永开,唐小我. 资产净持有可控的证券组合投资决策方法研究[J]. 数量经济技术经济研究, 2000,(11):35 - 38.

Recent Study on Optimization Model of Investment Utility

QIAN Yan - ying, LI Jian - xin
(College of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guanzhou 510090, China)

Abstract: Considering that short sales are not allowed on risky securties, the author studies optimization model of riskless asset combination investment and presents their caculation formula of investment proportions by means of the utility function.

Key words: portfolio investment; riskless asset; utility function