

管理学博士学位论文

基于 RMT 去噪法股票投资组合
风险优化研究

**RESEARCH ON STOCK PORTFOLIO
RISK OPTIMIZATION BASED ON THE
RMT DENOISING METHODS**

李冰娜

哈尔滨工业大学

2013 年 3 月

国内图书分类号：F831.2

学校代码：10213

国际图书分类号：336.7

密级：公开

管理学博士学位论文

基于 RMT 去噪法股票投资组合 风险优化研究

博士研究生：李冰娜

导师：惠晓峰 教授

申请学位：管理学博士

学科：技术经济及管理

所在单位：经济与管理学院

答辩日期：2013 年 3 月

授予学位单位：哈尔滨工业大学

Classified Index: F831.2

U.D.C.: 336.7

Dissertation for the Doctoral Degree in Management

RESEARCH ON STOCK PORTFOLIO RISK OPTIMIZATION BASED ON THE RMT DENOISING METHODS

Candidate:	Li Bingna
Supervisor:	Prof. Hui Xiaofeng
Academic Degree Applied for:	Doctor of Management
Speciality:	Technical Economics and Management
Affiliation:	School of Management
Date of Defence:	March, 2013
Degree-Confering-Institution:	Harbin Institute of Technology

摘 要

Markowitz 证券投资组合理论是当代金融理论的重要支柱之一，它也是对实际证券投资具有最大指导价值的投资理论。作为 Markowitz 模型的关键输入参数，证券收益率历史相关矩阵和历史协方差矩阵的噪声会通过组合风险的增大和组合风险预测准确率的下降而导致组合风险的恶化。由于噪声对证券组合风险的影响随证券数的增加而增加，因此，在目前组合中证券数呈增大趋势的背景下，Markowitz 模型在实践中应用的可行性正逐渐下降甚至接近于完全失效，噪声的影响已成为当今证券投资风险空前增大的重要原因之一。如何减小噪声对组合风险的影响是当前迫切需要关注的研究问题。越来越多的学者将对证券收益历史相关矩阵和历史协方差矩阵的去噪作为解决方法，并进行详细研究。

和针对金融相关矩阵和协方差矩阵的其他去噪方法相比，基于随机矩阵理论的去噪法（RMT 去噪法）具有决定模型最佳维度、操作技术难度低和适用范围广泛等优点。然而，基于 RMT 相关或多元波动率的去噪及其在股票投资组合风险优化中的应用的研究目前尚处于较为初级的阶段，有很多研究工作有待于进一步开展。以随机矩阵理论和现代投资组合理论为理论基础，采用蒙特卡洛模拟法、toy 模型法、模拟退火算法、主成分分析法、一般数理分析法、理论研究和实证研究相结合等多种研究方法深入研究应用 RMT 去噪法实现股票投资组合风险优化的问题不仅有助于完善 RMT 去噪理论，而且对扫除 Markowitz 模型的应用障碍，从而促进 Markowitz 证券投资组合理论的进一步发展有重要的理论意义。在证券投资已经成为全球社会经济生活的一个重要构成部分的今天，该研究明显也具有很强的现实意义。

本文从阐释 Markowitz 股票投资组合风险的含义入手，说明了以投资组合风险的大小和投资组合风险预测的准确率衡量投资组合风险的优劣，分析了股票收益历史相关矩阵和协方差矩阵的噪声对 Markowitz 投资组合风险优化水平的影响，并选取 RMT 去噪法作为解决噪声影响的方法，进而构建了应用 RMT 去噪法实现 Markowitz 股票投资组合风险优化的整体思路框架，其包括四个角度：第一，通过对面向股票收益相关矩阵的 RMT 去噪法原理和算法的改进实现股票投资组合风险优化；第二，通过建立对已有去噪研究未曾涉及的股票收益率多元波动率模型去噪的一般方法实现股票投资组合风险优化；第三，通过弥补面向收益样本协方差矩阵的现有 RMT 去噪法在小组合条件下的缺陷实现

股票投资组合风险优化；第四，根据对总体协方差矩阵特征值进行估计的新去噪思路建立面向收益样本协方差矩阵的 RMT 去噪法来实现股票投资组合风险的优化。从这四个角度出发，论文的主要研究内容和成果包括如下方面。

首先，在介绍面向股票收益相关矩阵的现有 RMT 去噪法的基础上，在理论层面分析指出了 KR 方法是去噪原理最为合理和最有利于组合风险优化的 RMT 去噪法。对股票收益相关矩阵的特征向量最小扰动稳定性进行了数理推导，进而提出了 KRMIN 去噪法。KRMIN 法吸纳了 KR 法的以相关矩阵特征向量稳定性的提高为核心的思想，弥补了 KR 法的原理和算法存在的缺陷，是一种更有利于改进股票投资组合风险的 RMT 去噪法。实证结果表明基于金融相关矩阵特征向量的 Krzanowski 稳定性的 KR 法和 KRMIN 法的组合风险优化效果好于其他 RMT 去噪法，且投资组合风险存在一种随收益相关矩阵特征向量的最小扰动稳定性提高而减小的趋势。

其次，基于 RMT 提出了对多元波动率模型去噪的一般方法，并通过定性分析和定量推导说明该方法对股票投资组合风险优化可能带来的好处。为了进一步验证该方法改进组合风险优化水平的有效性，建立了将基于 RMT 的相关矩阵估计和波动率结合在一起的两种多元波动率模型即 SC-GARCH 模型和 IO-GARCH 模型，并以这两种模型为去噪对象进行了股票投资组合风险优化的实证研究。结果表明 RMT 去噪法能对多元波动率模型的最佳维度进行正确的确定，从而实现股票组合风险的最优化。

再次，为了解决小组合风险优化条件下面向协方差矩阵的现有 RMT 去噪法因噪声特征值边界界定误差而产生的效力下降的问题，采用蒙特卡洛模拟法确定噪声特征值的边界，从而设计了蒙特卡洛 RMT 去噪法。通过实证分析方法，当股票收益序列长度和衰减因子不变时，在不同股票数量下对 LCPB 法、PG+法和 KR 法等已有 RMT 去噪法和蒙特卡洛 RMT 法的组合风险优化效果进行了对比研究。实证结果表明，在小组合条件下，蒙特卡洛 RMT 法能够弥补已有 RMT 方法的噪声特征值边界界定误差增大的缺陷，从而对已有 RMT 方法的组合风险优化作用的下降起到改进作用。

最后，以股票收益总体协方差矩阵和样本协方差矩阵特征谱矩的关系为理论基础，采用模拟退火算法估计总体协方差矩阵的特征值，进而提出了对样本协方差矩阵去噪的矩法。不同于已有的 RMT 去噪法，矩法并没有采取对噪声特征值替换的做法，而是通过估计总体协方差矩阵的特征值来实现协方差矩阵的降噪，从而引入了一种 RMT 去噪的新思路。通过构建 toy 模型，对矩法去噪效果进行了模拟研究。结果表明矩法对股票收益总体协方差矩阵特征值的估

计误差一般都能被控制在小于 10% 的范围内，且矩法的去噪效果受到样本序列长度和样本协方差矩阵数量的影响。采用模拟方法，通过设定符合现实经济情况的总体协方差矩阵模型，在理论层面分析了矩法对股票投资组合风险优化水平的作用。结果表明矩法对股票投资组合风险的优化作用随噪声对组合风险影响的增大而提高，并且受到对总体协方差矩阵的部门数或特征值数的猜测的制约而存在饱和现象。使用 bootstrap 方法，在理想化和现实化条件下对矩法的组合风险优化效果进行了实证分析。结果表明，矩法的组合风险优化效果好于常用的 RMT 去噪法。

关键词：Markowitz 股票投资组合；组合风险优化；RMT 去噪法；收益相关矩阵；收益协方差矩阵

Abstract

Markowitz Portfolio Theory is one of important pillars of modern finance theory, which is the investment theory giving maximum guidance for actual investments in securities. As the key input parameters of the Markowitz model, correlation and covariance matrices of historical security return rates contain a lot of noise, which will lead to the deterioration of portfolio risks by the increase of portfolio risks and the decline of portfolio risk forecast accuracy. Because the impact of noise on the securities portfolio risk increases with the increase in the number of securities, in the context of the present increasing trend of the number of securities in the portfolio, the feasibility of the practical application of the Markowitz model is gradually declining and even close to complete failure. Nowadays the effect of noise has become one of important reasons for an unprecedented increase of securities investment risks. How to reduce the impact of noise on portfolio risks is a research problem which urgently needs to be focused on. More and more scholars regard denoising correlation matrices and covariance matrices of securities returns as a solution and carry out a detailed study.

Compared with other denoising methods of correlation matrices and covariance matrices, random matrix theory (RMT) filters have the advantages of deciding the optimal model dimension, the low operation difficulty and a wide application range. However, the research on denoising correlation matrices and covariance matrices based on RMT and applying RMT denoising in portfolio risk optimization is still at a relatively early stage, and there is a lot of work to be further carried out. This paper takes random matrix theory and modern portfolio theory as theoretical basis, uses many research techniques, such as Monte Carlo simulation method, toy model, simulated annealing algorithm, principal component analysis, general mathematical analysis, qualitative and quantitative analysis, etc., and deeply studies the key questions of adopting RMT denoising to achieve equity portfolio risk optimization, which not only helps to improve the denoising theory based on RMT, but also has important theoretical significance for sweeping away the obstacles of applying the Markowitz model to promote the further development of Markowitz portfolio theory. Nowadays, as investment in the securities has become an important part of global social and economic life, the study obviously has great practical significance too.

Start from interpreting the meaning of Markowitz portfolio risks, the paper explains that the quality of portfolio risks should be measured by the size and

forecast accuracy of portfolio risk, analyzes the impact of noise in historical security return correlation matrices and covariance matrices on the optimization level of Markowitz stock portfolio risks, and selects RMT denoising as a solution for the noise effect. Then the paper constructs a theoretical framework of optimization of Markowitz stock portfolio risks based on RMT denoising which consists of four angles: First, equity portfolio risk optimization by improving principles and algorithms of RMT denoising methods toward stock return correlation matrices. Second, equity portfolio risk optimization by establishing a general denoising method for multivariate volatility model which has not been involved in recent research. Third, equity portfolio risk optimization by making up for the disadvantage of the existing RMT denoising methods for sample covariance matrices of small portfolios. Fourth, equity portfolio risk optimization by establishing a RMT denoising method toward sample covariance matrices based on a new denoising idea of estimating eigenvalues of population covariance matrices. From the above four angles, the paper includes the following research content and results.

Firstly, on the basis of describing the existing RMT denoising methods toward security return correlation matrices, the paper theoretically points out that among them the KR method is most reasonable and most beneficial to portfolio risk optimization. After mathematically deducting the minimum perturbation of a certain eigenvector in a correlation matrix when the corresponding eigenvalue changes, the paper proposes KRMIN denoising method. The KRMIN method absorbs the idea of the KR method focusing on improvement of eigenvector stability of a correlation matrix and compensates the defects of the KR method in the principles and algorithms. Therefore The KRMIN method is more conducive to equity portfolio risk optimization in contrast with other methods. The empirical results show that: the portfolio risk optimization effect of KR and KRMIN considering Krzanowski stability of eigenvectors of earnings correlation matrices is superior to other RMT methods. Portfolio risks have a decreasing tend with the improvement of stability measured by minimum perturbation of correlation matrix eigenvectors.

Secondly, the paper presents a RMT denoising method for multivariate volatility model and demonstrates its benefits to stock portfolio risk optimization through qualitative analysis and quantitative derivation. In order to demonstrate the effectiveness of the method for portfolio risk optimization , this paper constructs two classes of multivariate volatility models combining the volatility process with the correlation estimate, SC-GARCH model and IO-GARCH model. Taking the two kinds of models as denoising objects, an empirical study of stock portfolio risk

optimization is carried out. It is shown in the experiment that the RMT denoising method can precisely determine the optimal dimension of multivariate volatility models and thus produce the best stock portfolio risk.

Thirdly, in order to solve the decline of effectiveness of existing RMT denoising methods toward covariance matrices of small portfolios due to the error in determining the noise eigenvalue boundary, the Monte Carlo method is used to determine the noise eigenvalue boundary and then the RMT denoising method based on Monte Carlo simulation is designed. Through empirical approach, when stock return sequence length and attenuation factor are unchanged, the paper compares portfolio risk optimization effect of existing RMT denoising methods such as LCPB, PG + and KR etc and the RMT denoising method based on Monte Carlo simulation in a varying number of shares. Experimental results show that under the conditions of small portfolios the RMT method based on Monte Carlo simulation can cover the existing RMT denoising methods' inferiority in determining the noise eigenvalue boundary and thus hinder the decline of their role in risk improvement.

Finally, the paper takes the exact relation between the eigenvalue spectrum moments of a population covariance matrix and those of its estimator as theoretical basis, uses the simulated annealing algorithm to estimate eigenvalues of the population covariance matrix and thereby presents the moment method used for denoising sample covariance matrices. Unlike existing RMT denoising methods, the moment method does not replace noisy eigenvalues, but estimates eigenvalues of the population covariance matrix to denoise sample covariance matrices, thereby introducing a new way of RMT denoising. Through a toy model, a simulation study on denoising effect of the moment method is conducted. The results prove that by use of the moment method, the error in the estimation of eigenvalues of stock returns population covariance matrices can generally be controlled in the range of less than 10% and the denoising effect of the moment method is influenced by the sample sequence length and the number of sample covariance matrices. By setting the population covariance matrix model in line with economic reality, the paper adopts the simulation method to theoretically analyze the effect of the moment method on the optimization level of stock portfolio risks. The results show that the optimizing effect of the moment method on stock portfolio risks improves when the impact of noise increases and the saturated phenomenon of the moment method occurs because of constraints of guess on the department number or the eigenvalue number of the population covariance matrix. Under idealized and realistic conditions, by using the bootstrap method the paper conducts empirical analysis of optimizing effect of the moment method on portfolio risks. It turns out that the

optimizing effect of the moment method on portfolio risks is better than the frequently used RMT denoising method.

Keywords: Markowitz stock portfolio, portfolio risk optimization, RMT denoising method, rerurn correlation matrix, return covariance matrix

目 录

摘 要	I
Abstract	IV
目 录	VIII
第 1 章 绪论	XI
1.1 研究的背景及意义	1
1.1.1 研究的背景	1
1.1.2 研究目的和意义	3
1.2 国内外研究综述	5
1.2.1 随机矩阵理论的研究现状	5
1.2.2 基于RMT金融相关矩阵和多元波动率噪声界定的研究现状	9
1.2.3 基于RMT去噪法对金融相关矩阵的去噪投资组合优化研究现状	11
1.2.4 基于RMT去噪法对金融协方差矩阵的去噪投资组合优化研究现状	14
1.3 当前研究存在的主要问题	16
1.4 研究内容和研究方法	19
1.4.1 研究内容	19
1.4.2 研究方法和技术路线	20
第 2 章 Markowitz投资组合风险噪声分析及解决方法	24
2.1 Markowitz投资组合风险基本概念和理论	24
2.1.1 Markowitz投资组合风险的含义	24
2.1.2 Markowitz投资组合风险的计算方法	26
2.1.3 Markowitz投资组合风险优化的含义	27
2.1.4 Markowitz投资组合风险噪声简介	27
2.2 噪声对Markowitz投资组合风险优化水平的影响分析	28
2.2.1 股票收益相关矩阵噪声的影响分析	28
2.2.2 股票收益率多元波动率噪声的影响分析	32
2.3 Markowitz投资组合风险的去噪方法	36
2.3.1 常用去噪算法简介	36
2.3.2 RMT去噪法及优点	39
2.4 本章小结	41
第 3 章 基于收益相关矩阵的RMT去噪法股票投资组合风险优化	43

3.1 股票收益相关矩阵及噪声识别原理	43
3.1.1 相等加权相关矩阵及噪声识别原理	43
3.1.2 指数加权相关矩阵及噪声识别原理	44
3.2 面向股票收益相关矩阵的RMT去噪法	45
3.2.1 LCPB去噪法	46
3.2.2 PG+去噪法	46
3.2.3 KR去噪法	46
3.3 基于特征向量最小扰动稳定性的RMT去噪法	48
3.3.1 相关矩阵特征向量最小扰动稳定性的数理推导	49
3.3.2 基于特征向量最小扰动稳定性的RMT去噪法设计和实现	53
3.3.3 特征值求解方法	55
3.4 实证研究	56
3.4.1 研究方案设计	58
3.4.2 实验结果及分析	59
3.5 本章小结	72
第4章 基于多元波动率模型的RMT去噪法股票投资组合风险优化	74
4.1 基于RMT多元波动率模型去噪机理及对组合风险优化机制	74
4.1.1 基于RMT多元波动率模型去噪机理	74
4.1.2 多元波动率模型去噪对组合风险的优化机制	76
4.2 股票收益率多元波动率模型的构建	77
4.2.1 滑动相关多元GARCH模型	78
4.2.2 改进的O-GARCH模型	79
4.3 多元波动率模型去噪改进投资组合风险实证研究	81
4.3.1 投资组合风险优化水平的衡量方法	81
4.3.2 实验结果和分析	83
4.4 本章小结	89
第5章 基于收益样本协方差矩阵的蒙特卡洛RMT去噪法小组组合风险优化	91
5.1 面向股票收益样本协方差矩阵的现有RMT去噪法	91
5.1.1 股票收益样本协方差矩阵的计算方法	92
5.1.2 现有RMT去噪法	92
5.2 小组合条件下现有RMT去噪法的缺陷	94
5.2.1 噪声特征值识别原理	94
5.2.2 最大噪声特征值精度分析	95

5.3 蒙特卡洛RMT去噪法的设计和实现	96
5.3.1 设计思想	96
5.3.2 蒙特卡洛模型构建	97
5.4 基于蒙特卡洛RMT去噪法小组组合风险优化实证研究	100
5.4.1 研究方案设计	100
5.4.2 实验结果及分析	102
5.5 本章小结	104
第 6 章 基于收益样本协方差矩阵的矩法股票投资组合风险优化	106
6.1 矩法的设计及实现	106
6.1.1 理论基础	106
6.1.2 去噪机理及算法设计	108
6.1.3 矩法特征分析	111
6.2 基于矩法收益样本协方差矩阵去噪模拟研究	111
6.3 基于矩法组合风险优化模拟研究	116
6.3.1 总体协方差矩阵模型的设定	116
6.3.2 样本协方差矩阵的获取及其噪声影响分析	118
6.3.3 模拟研究的步骤、结果和分析	121
6.4 基于矩法股票投资组合风险优化实证研究	125
6.4.1 构建的投资组合及其风险优化水平表示方法	125
6.4.2 理想化条件下的实证分析	127
6.4.3 现实化条件下的实证分析	130
6.5 本章小结	133
结 论	135
参考文献	138
附录	146
攻读博士学位期间发表的学术论文	150
哈尔滨工业大学博士学位论文原创性声明及使用授权说明	151
致 谢	152
个人简历	153

Contents

Abstract (In Chinese)	I
Abstract (In English)	IV
 Chapter 1 Introduction	1
1.1 Research background and significance.....	1
1.1.1 Research background.....	1
1.1.2 Research purpose and significance.....	3
1.2 Current research situation at home and abroad.....	5
1.2.1 Current research situation of RMT.....	5
1.2.2 Current research situation of noise definition of financial correlation matrix and multivariate volatility based on RMT.....	9
1.2.3 Current research situation of portfolio optimization based on RMT denoising methods toward financial correlation matrix.....	11
1.2.4 Current research situation of portfolio optimization based on RMT denoising methods toward financial covariance matrix.....	14
1.3 Major problems existing in current research.....	16
1.4 Research contents and methods.....	19
1.4.1 Research contents.....	19
1.4.2 Research methods and technical route.....	20
Chapter 2 Analysis and solution of noise of Markowitz portfolio risk	24
2.1 Basic concepts and theory.....	24
2.1.1 The meaning of Markowitz portfolio risk.....	24
2.1.2 The calculation method of Markowitz portfolio risk.....	26
2.1.3 The meaning of Markowitz portfolio risk optimization.....	27
2.1.4 Brief introduction to noise of Markowitz portfolio risk.....	27
2.2 Analysis of the effect of noise on Markowitz portfolio risk optimization level.....	28
2.2.1 Analysis of the effect of noise in stock return correlation matrix.....	28
2.2.2 Analysis of the effect of noise in multivariate volatility of stock return rates.....	32

2.3 Denoising approaches of Markowitz portfolio risk.....	36
2.3.1 Brief introduction to frequently used denoising methods.....	36
2.3.2 RMT denoising methods and their advantages.....	40
2.4 Chapter conclusion.....	41
Chapter 3 Stock portfolio risk optimization based on RMT denoising methods toward return correlation matrices.....	43
3.1 Stock return correlation matrix and noise recognition principle.....	43
3.1.1 Equally weighted correlation matrix and noise recognition principle.....	43
3.1.2 Exponentially weighted correlation matrix and noise recognition principle.....	44
3.2 RMT denoising methods toward stock return correlation matrix.....	45
3.2.1 The LCPB denoising method.....	46
3.2.2 The PG+ denoising method.....	46
3.2.3 The KR denoising method.....	46
3.3 The RMT denoising method based on stability of minimum perturbations of eigenvectors.....	48
3.3.1 Mathematical deduction of stability of minimum perturbations of correlation matrix eigenvectors.....	49
3.3.2 Design and realization of the RMT denoising method based on stability of minimum perturbations of eigenvectors.....	53
3.3.3 Eigenvalue solution approach.....	55
3.4 Eirical study.....	56
3.4.1 Design of research program.....	58
3.4.2 Experimental results and analysis.....	59
3.5 Chapter conclusion.....	72
Chapter 4 Stock portfolio risk optimization based on RMT denoising method toward multivariate volatility models.....	74
4.1 Principle of denoising multivariate volatility models based on RMT and mechanism of portfolio risk optimization.....	74
4.1.1 Principle of denoising multivariate volatility models based on RMT.....	74
4.1.2 Mechanism of portfolio risk optimization by denoising multivariate volatility models.....	76
4.2 Contruction of multiple volatility models of stock return rates.....	77

4.2.1 Sliding correlation GARCH model.....	78
4.2.2 Improved orthogonal GARCH model.....	79
4.3 Empirical research on improving portfolio risks by denoising multivariate volatility models.....	81
4.3.1 Representation of portfolio risk optimization level.....	81
4.3.2 Experimental results and analysis.....	83
4.4 Chapter conclusion.....	89
Chapter 5 Risk optimization of small portfolios based on Monte Carlo RMT denoising method toward sample return covariance matrices.....	91
5.1 The existing RMT denoising methods toward sample covariance matrix of stock returns.....	91
5.1.1 Calculation of sample covariance matrix of stock returns.....	92
5.1.2 The existing RMT denoising methods.....	92
5.2 The defect of the existing RMT denoising methods under the conditions of small portfolios.....	94
5.2.1 Principle of recognition of noisy eigenvalues.....	94
5.2.2 Accuracy analysis of the maximum of noisy eigenvalues.....	95
5.3 Design and realization of the RMT denoising method based on Monte Carlo simulation.....	96
5.3.1 The idea of design.....	96
5.3.2 Contruction of Monte Carlo model.....	97
5.4 Empirical research on risk optimization of small portfolios by the RMT denoising method based on Monte Carlo simulation.....	100
5.4.1 Design of research program.....	100
5.4.2 Experimental results and analysis.....	102
5.5 Chapter conclusion.....	104
Chapter 6 Stock portfolio risk optimization by applying the moment method toward sample return covariance matrices.....	106
6.1 Design and realization of the moment method.....	106
6.1.1 Theoretical basis.....	106
6.1.2 The denoising mechanism and algorithm design.....	108
6.1.3 Features of the moment method.....	111
6.2 Simulation study on denoising sample return covariance matrix based on the	

moment method.....	111
6.3 Simulation study on portfolio risk optimization based on the moment method.....	116
6.3.1 Setting of population covariance matrix models.....	116
6.3.2 Acquisition of sample covariance matrices and analysis of impact of their noise.....	118
6.3.3 Steps of the simulation study and analysis of results.....	121
6.4 Empirical study on stock portfolio risk optimization based on the moment method.....	125
6.4.1 Constructed portfolios and representation for their risk optimization level.....	125
6.4.2 Empirical analysis under idealized conditions.....	127
6.4.3 Empirical analysis under realistic conditions.....	130
6.5 Chapter conclusion.....	133
Conclusions.....	135
References.....	138
Appendix.....	146
Papers published in the period of PH.D. education.....	150
Statement of copyright and letter of authorization.....	151
Acknowledgement.....	152
Resume.....	153

第1章 绪论

1.1 研究的背景及意义

1.1.1 研究的背景

经过四百多年的发展，如今股票市场已成为各国经济体系中不可或缺的组成部分。它在聚敛资金、优化资源配置和调节经济等方面扮演着极关键的角色，发挥着不可替代的作用。目前，美国的证券化率将近 150%，其他发达国家的证券化率也都大于 100%^[1]，表明发达经济的股票市值均已超过GDP，这说明股票市场在国民经济中占据着举足轻重的地位，对经济发展的影响力十分巨大。作为国民经济的公认的“晴雨表”，股票市场的发展程度在一定程度上就代表了一国经济的繁荣程度。自从 1990 年成立上海证券交易所和深圳证券交易所以来，中国股票市场经历了由小到大、由幼稚到逐渐成熟的发展历程，其在国民经济中的地位越来越重要，对经济的影响力不断增强，成为经济系统核心的趋势越来越明朗。至 2007 年，中国证券化率已突破 100%。目前，中国股票市场已具相当的市场规模，短短二十几年间推出了 1600 多家上市公司，交易非常活跃，累计筹资数万亿元。我国股市已成为我国经济必不可少的融资渠道，为促进我国市场经济发展提供了持续的源动力。

股票市场在各国经济和社会发展中的巨大作用是毋庸置疑的。然而，对于经济发展而言，股票市场是把双刃剑，一方面，它是经济发展的助推器；另一方面，股票市场中的某些因素比如股票投资风险又能起到阻碍经济发展的作用。近年来，全球金融一体化进程加速，科技迅猛发展，股市投资风险在不同市场间的溢出和传导效应进一步增强，使得全球股市的波动性和风险性急剧上升，这导致了一系列负面的经济事件。美国 1929 年的股灾造成上千家银行倒闭、数以万计的企业关门；在 1987 年 10 月 19 日至 26 日的 8 天内，因世界股市暴跌损失的财富将近 2 万亿美元，是第二次世界大战中总损失 3380 亿美元的 5.93 倍；1995 年 2 月 26 日，拥有 233 年历史的巴林银行倒闭，造成它倒闭的直接原因是日经指数狂跌导致的市场风险。股票投资风险不仅使参与其中的投资者蒙受巨额损失，影响企业和机构正常的生存和运营，而且可能诱发金融危机，比如分别于 1992 年、1994 年、1997 年、1998 年、1999 年、2008 年爆发的欧洲货币体系危机、墨西哥金融危机、亚洲金融危机、俄罗斯金融危机、

巴西金融动荡和美国金融危机等。金融危机的影响几乎涉及各行各业，对一国乃至全球经济的稳定发展构成严重威胁。比如，由于 2008 年美国金融危机的爆发，2009 年美国联邦存款保险公司关闭了 140 家银行。该次金融危机不但使美国经济严重受挫，而且也波及世界经济，希腊债券危机和冰岛的破产都受到了该次金融危机的影响。

当前，中国的股市正在面临一个全开放的国际经济环境。而且由于我国股票市场基础制度不完善、政策干预较多和投资者操作水平的不足等，中国股票市场的投资风险非常大，这可以从近几年中国股市价格的巨大波动中反映出来。在美国金融危机等因素的影响下，中国股市前几年的巨幅波动是有目共睹的。在 2005 年 7 月至 2007 年 10 月仅两年多时间内，上证指数从 1000 点升到 6000 多点，增幅达 5 倍多。之后，我国股市快速反转而出现剧烈下降的趋势，至 2008 年 10 月跌破 2000 点。随后，股价再次出现上升趋势，到 2009 年 7 月上证指数已升至 3000 多点。我国股市巨大的投资风险造成了一些机构投资者倒闭的命运。在 2002 年 8 月至 2005 年 12 月共三年多的时间里，我国有 19 家证券公司因经营出现问题而倒闭或被接管。其中，倒闭的证券公司为鞍山证券、珠海证券和大连证券等 6 家证券公司。被当地政府或其他证券公司接管的证券公司包括南方证券、海南证券、恒信证券和广东证券等 13 家证券公司^[2]。我国机构投资者持有 40% 的股市总市值，而其余 60% 为非机构投资者主要是个人投资者所持有，这说明我国股市投资者结构仍以个人投资者为主。至 2008 年 9 月，我国股市个人投资者开户数突破上亿户，占人口总数的比例已超过 7%。在我国股市自 2007 年 10 月至 2008 年 9 月的狂跌过程中，约有 95% 的个人投资者亏损，约 4% 的个人投资者持平，只有约 1% 的个人投资者盈利^[3]。可见，中国股市的个人投资者面临着非常大的投资风险。

股票投资风险的增大造成了投资者的亏损，企业的倒闭，经济与社会发展的不稳定等负面影响，所以，有效的防范与管理股票投资风险显得尤为重要。从操作技术的微观层面看，以降低股票投资风险为目的建立一种有效的股票投资决策方法是股票投资风险管理中最重要的方面。作为当代金融理论的重要支柱之一，Markowitz 证券投资组合理论是对实际证券投资具有最大指导价值的投资理论。以在保证预定收益的前提下使投资风险最小或在控制风险的前提下使投资收益最大化为目标，Markowitz 证券投资组合理论是关于资金在各证券间如何分配的理论。目前大部分股票投资决策都是依据 Markowitz 证券组合理论的基本思想做出的。Markowitz 投资组合理论表明对证券投资组合进行决策往往需要利用证券收益相关矩阵或多元波动率（协方差矩阵）。这些矩阵一般

只能由证券收益率的市场观测值来估计。市场观察值数量的有限使得估计出的证券收益相关矩阵或多元波动率会存在噪声，尤其是当资产数量较大时，估计噪声甚至会起主导作用。不难想象，在此基础上测算的证券投资组合难免会偏离于真正最优的证券投资组合，从而对人们的金融投资决策造成误导。因此，为了提高证券投资组合的优化水平，需要对证券收益相关矩阵或多元波动率去噪，这已经得到了国外很多研究的证实。

和针对金融相关矩阵和协方差矩阵的其他去噪方法相比，RMT 去噪法具有决定模型最佳维度、操作技术难度低和适用范围广泛等优点。然而，对基于 RMT 相关或多元波动率的去噪及其在股票投资组合风险优化中的应用的研究目前尚处于较为初级的阶段。RMT 去噪法种类少、算法粗糙，且一般都是采用对噪声特征值替代的单一思路。已有研究不曾有过对现有 RMT 去噪法进行完善或从全新的视角建立一些更好的 RMT 去噪法的任何尝试。而且，已有研究中 RMT 去噪法的应用多局限于对证券收益样本相关矩阵和样本协方差矩阵的去噪方面，将 RMT 去噪法用于对多元波动率模型去噪的研究还未见报道。为了促进 Markowitz 投资组合的优化，金融监管部门、金融企业界和理论界都迫切需要建立一些能更好地解决 Markowitz 投资组合的噪声问题和能解决一些空白研究领域的去噪问题的 RMT 去噪模型。构建定量的 RMT 模型，研究面向 Markowitz 投资组合优化的股票收益相关矩阵和多元波动率去噪问题，具有十分重要的理论与实践意义。

1.1.2 研究目的和意义

1.1.2.1 理论意义

(1) 有助于进一步完善和丰富基于 RMT 相关去噪的理论 目前可用于金融相关矩阵去噪的 RMT 方法种类很少，原理较为粗糙，且算法也存在一定缺陷。不难看出，基于 RMT 相关去噪的理论有待于进一步发展和完善。受基于相关矩阵特征向量 Krzanowski 稳定性的 KR 去噪法的启发，本文提出了对金融相关矩阵去噪的 KRMIN 去噪法。KRMIN 法吸纳了 KR 法的以相关矩阵特征向量稳定性的提高为核心的思想，但是对 KR 法的原理和算法进行了完善。可见，本文的研究丰富了基于 RMT 相关矩阵去噪的理论。

(2) 有助于发展基于 RMT 多元波动率去噪的理论 本文阐释了基于 RMT 多元波动率模型去噪的机理，并通过实证研究证明对多元波动率模型去噪的有效性，从而为解决多元波动率模型的维数灾祸问题提供了新的有效方法，填补了基于 RMT 多元波动率模型去噪领域的研究空白。除此之外，还提

出了对收益样本协方差矩阵去噪的矩法。不同于已有的 RMT 去噪法，矩法并没有采取对噪声特征值替换的做法，而是通过估计总体协方差矩阵的特征值来实现协方差矩阵的降噪，从而引入了一种 RMT 去噪的新思路。可见，本文从多元波动率模型和样本协方差矩阵两个角度发展了基于 RMT 多元波动率去噪的理论。

(3) 有助于推动投资组合优化理论研究 投资组合优化一般都需要用到收益相关矩阵或波动率。当收益相关矩阵或波动率存在误差时，由此构建的最优组合会存在偏差，即此时的投资组合优化意义不大。可见，收益相关矩阵或波动率中的噪声会使投资组合优化理论应用的可行性下降。如果不能有效地减小收益相关矩阵或波动率的噪声，投资组合优化理论进一步发展的阻碍就无法扫除。所以，基于 RMT 去噪研究对消除投资组合优化理论的研究瓶颈，促进投资组合优化理论的发展有重要的理论意义。

(4) 有助于促进 RMT 及其研究方法的发展 理论因应用而发展。RMT 在给金融相关和波动率问题的研究提供有效方法的同时，也因此得到了很大的发展。第一方面体现为随机矩阵主体分布理论的发展。在应用于金融领域后，人们将随机矩阵特征谱由真正相关矩阵为单位矩阵时的 M-P 谱推广到真正相关矩阵不是单位矩阵的一般情形，并得到了相应的谱分布结果。有一些学者还对时变波动率下学生随机矩阵系综的研究进行了扩展，得到了总体波动率为随机时的结果。除了得到随机矩阵谱的普适结果外，还对随机变量重尾分布下的 levy 随机矩阵谱进行了研究。对相关矩阵的两种不同计算方法即相等加权法和指数加权法下随机矩阵的特征谱分别进行了推导。第二方面体现为随机矩阵边缘分布理论的发展。这是通过分析随机矩阵最大特征值和特征向量的分布而实现的。

1.1.2.2 现实意义

(1) 有利于投资者做出更正确的金融投资决策 人们往往通过权衡金融投资的风险和收益来做出金融投资的决策。马科维茨经典组合理论假定潜在随机过程是具有既定收益和波动率的多元正态分布。实践中，一般都利用市场观测值对收益和波动率参数进行估计，并在此基础上进行投资决策。然而观测值数量的有限使得估计出的参数具有一定的测量误差，这必然使投资风险的测量和在此基础上的金融投资决策出现偏差。因此，以投资组合优化为目的，对金融相关矩阵和多元波动率去噪的研究有利于投资者做出更正确的金融投资决策。

(2) 有利于股票市场的健康、稳定发展 我国股票市场发展过程中一

直存在内幕信息交易多、投机氛围浓重和股价波动大等特征。如何消除这些因素对股市发展的不利影响已经成为我国金融理论界和实务界密切关注的焦点问题。基于 RMT 去噪法的股票投资组合优化模型能够使投资者准确地把握股票的总体特征，减少统计不确定性，确定更优的投资组合，因此，在中国股票市场走向成熟的过程中，运用该种理性的投资分析方法能够规范投资行为、降低投资风险和使投资者确立一种长期投资理念，这显然对我国股票市场的健康、稳定发展大有裨益。

1.2 国内外研究综述

RMT 去噪法对股票投资组合风险的优化作用得以发挥的必经途径是对股票收益相关矩阵或协方差矩阵的去噪，而通过分析股票收益相关矩阵或协方差矩阵的特征值谱来对它们的噪声特征值进行界定是去噪的必要前提，噪声特征值识别的准确性在相当程度上决定了去噪的效果。因此，对综述中所围绕的主题及其顺序的安排如下：首先介绍最重要的贯穿全文的基础理论即随机矩阵理论的研究现状。在此基础上，介绍对基于 RMT 金融相关矩阵或协方差矩阵噪声界定的研究现状。最后，分别对基于 RMT 去噪法金融相关矩阵和协方差矩阵的去噪改进组合风险的研究进行综述。

1.2.1 随机矩阵理论的研究现状

自从 1928 年由 Wishart 引入到数理统计起，随机矩阵理论就吸引了数学家和物理学家大量的研究兴趣。然而，直到 1955 年 Wigner 才提出了随机矩阵系综的概念。1956 年，Wigner 得到了 2×2 矩阵的系综水平间距分布的维格纳推测。数学中出现不变随机矩阵后，Porter 和 Rosenzweig 将其思想引入到物理学中。Dyson 奠定了 RMT 的数学基础。他根据时间反转下的不变性将随机矩阵系综进行了分类；研究了随机矩阵理论和可积系统理论的关系；将 Shannon 的信息熵用于随机矩阵谱的研究。Mehta 的第一版专著总结了 RMT 的早期发展。在 RMT 应用于核物理的发展初期，从 Anderson 对一维混乱系统中波函数的局域化研究中产生了混乱系统场的概念。RMT 的另一个早期应用是 Gorkov 和 Eliasberg 的小金属粒子理论，现在属于介观物理学。

RMT 最先出现于数理统计学后继续在数学中以独立于物理学的方向发展。Hua 得到了关于不变随机矩阵系综集成测度的重要结果。他的 1959 年专著中总结了他十多年的研究成果，不过人们对此专著知之甚少。为数很少的数学家研究了 RMT 中的积分问题。Harish 估计了酉矩阵积分，即 Harish-Chandra—

Itzykson-Zuber积分。James值得关注的贡献是引入了Zonal多项式。Muirhead的1982年专著将矩阵积分和Zonal多项式联系起来^[4]。Girko写了很多关于大维随机矩阵特征值分布特性的数学专著。然而直到现在，上述数学文献并没有引起物理学家的注意。

在Efetov对超对称方法及该方法在小金属粒子理论和局域理论中应用的重要研究之前，RMT在核物理中的应用和无序系统理论各自独立地发展^[5-7]。在Mehta的第一版专著出版后的十年中RMT的发展主要体现为它在核物理中的应用。特别是S-矩阵波动的统计理论吸引了大量的研究兴趣。这方面最早的研究是Wigner同时研究了核共振宽度和间距的分布以及Porter和Thomas引入了核衰变宽度的Porter-Thomas分布。Ericson研究了现在被称为“Ericson波动”的不同能量的截面相关。S-矩阵波动的理论最终在Agassi等的研究工作中形成。在他们的研究中采用了重求和技术，该技术后来在杂质散射领域受到更大关注。S-矩阵极点分布问题研究也促使了具有在复平面圆域内均匀分布特征值的Ginibre系综的产生，该研究发起来了对子领域非埃尔米特随机矩阵理论的研究。1973年Montgomery对临界线上Riemann ζ 函数零点两点相关函数的渐进极限进行了猜想。他意识到猜想的结果是GUE的两点函数。尽管相关函数和RMT的完全对应关系还没有得到证实，Hejhal等已将这种连结关系扩展到了Riemann零点的更高阶相关函数^[8]。1995年Bogomolny和Keating利用Hardy-Littlewood猜想得到了关于素数间相关的启发性结果^[9]。Katz和Sarnak的专著中对有限域Zeta函数零点两点函数和随机矩阵的特征值间关系进行了严格的数学推导^[10]。所猜测的Riemann ζ 函数零点的统计和随机矩阵特征值的n点相关函数的对应意味着RMT对其他方法无法实现的数论中的猜想很有帮助。这些猜想包括黎曼zeta函数和其他L-函数的均值以及黎曼zeta函数的导数的矩和导数零点的水平分布^[11-14]。

在1975-1985年间，随机矩阵理论发展迅速，并和无序系统理论融为一体。最开始的研究有Edwards和Anderson在自旋玻璃的研究中引入了复本方法。这为Anderson模型的场论表述提供了自然的框架。在这种表述里，对称性和对称性的自发破缺导致了Anderson局域化理论的新范式。人们很快就意识到，复本表述只适用于微扰计算。超对称方法的引入解决了这个问题。在这个方法中，通过考虑两个行列式之比而不是行列式的n次幂在 $n \rightarrow \infty$ 时的极限，预解产生函数中的行列式发生淬灭。在Wegner使用复本方法所做的早期研究的基础上，Efetov说明了混乱系统的配分函数是一个超对称的非线性的 σ 模型。他确定了可以将非线性 σ 模型的动力学项忽略的能量差别的范围。在这个范围

里，两点相关函数和Dyson的结果一致。在某一能量级别以下，配分功能由零动量模式主导，该能量级别被称为Thouless energy。超对称方法的应用取得了大量的成果。Efetov对一维无序线获得了新的成果。获得了S-矩阵波动理论的精确结果。利用超对称配分函数得到了正交类和辛群对称类间的关系^[15]。还有对参数相关即外部参数不同取值下特征值相关的研究成果。Efetov的著作^[16]中详细探讨了超对称方法在无序系统中的应用情况。

一些墨西哥学者完全独立地得到了S-矩阵波动的准确结果。S-矩阵的分布函数建立在解析性、遍历性和最大化信息熵三个假设基础上。随机矩阵理论在核物理中的主要发展还有反映干扰的少体性的随机矩阵系综的引入。French和合作者们开展了这个方向的研究^[17]。1986年Webb和Washburn在实验中发现了普遍的电导波动^[18]，这个发现开辟了混沌量子点的新研究领域。用于复合核S-矩阵波动理论的超对称非线性 σ 模型可以描述这些量子点的输送性质。事实上，一个复合核就是一个混沌量子点。在发现普遍电导波动之前的几年，随机矩阵理论被应用于量子场论。’t Hooft的研究表明，在色彩数的极限下，QCD的分区功能由平面图所控制。随机矩阵理论也存在类似的情况。Brezin等利用这个特点计算了组合因子，它们经由RMT进入QCD对于Nc的极限里。该研究的第二个创新性想法是将RMT中预解的计算看成是Riemann–Hilbert问题。RMT对量子场理论的如下几个领域有影响：格点QCD、二维引力、Euclidean Dirac谱和二维超对称规范理论的Seiberg–Witten解。重要的结果之一是Eguchi–Kawai简化^[19]。该研究说明了在色彩数量的极限里，纯Yang–Mills理论的胶子相关函数可以简化为对四个酉矩阵的积分。酉矩阵积分也出现在QCD的低能量极限里。手征对称性的自发破缺使得它的低能自由度是以酉矩阵值的场作为参数的Goldstone模式。在该系统的Thouless能量以下，有效拉格朗日的动力学项可以忽略，QCD配分函数的低能量极限由酉矩阵积分给出。根据RMT，Dirac算子的特征值和QCD Dirac算子的手征对称性有关。仅在子格间才发生跳跃的两子格的无序系统中也存在同样的对称性。Forrester最先计算了在这些手征系综的零值附近的特征谱^[20]。两子格系统和QCD的重要不同是随机矩阵的拓扑结构和fermion行列式。在两子格体系中，人们仅对零拓扑量上的淬火结果感兴趣，而在QCD中重要的是fermion行列式和其零模式。在手征系综情况下，也有三类不同的对称矩阵。手征随机矩阵理论和其在QCD的Dirac谱中应用的大部分研究是在九十年代后期完成的。

可以将四个随机矩阵系综引入到无序超导体理论中，这将十个随机矩阵系综区别开来。Dyson注意到每个Wigner–Dyson随机矩阵理论都对应着一个对称

空间。Zirnbauer证明这可以推广到所有十个对称性随机矩阵系综，它们和Cartan型对称空间是一一对应的^[21]。

也有一些其他研究试图从一个矩阵模型中得到QCD，其中最广为人知的研究是格子规范场和伴随标量场相耦合的诱导QCD分区函数^[22]。二维引力的分区函数是可以用三角剖分描述的随机表面的和，它可以写成随机矩阵理论配分函数的形式。有人猜测，该理论的双尺度极限描述了二维重力分区函数的连续极限^[23]。这带给RMT两个新思想：普遍性和与可积系统的联系。在量子引力的背景下，很自然地会考虑一个任意多项式的概率位势。从微分方程中可以获得可积方程族，更早的研究中以完全不同的方式引入了可积方程族。京都学派发现无限GUE中无间隙时间间隔的概率是完全可积系统的 τ -函数，它指定了一个线性微分方程耦合系统的isomonodromy变形^[24]。这导致间距分布可以用Painlevé V超越表示。后来有人发现GUE中最大特征值的分布是一个Painlevé II方程的解^[25]，这可以用来解决一个长期没有解决的数学问题：指定一个随机置换的不断增大的子序列长度的极限分布。事实上，该分布与GUE的最大特征值分布相同。不断增大的子序列问题可以等价地表述为 $1 + 1$ 维多核增长模型，并且对一些拼接问题来说，类似于随机矩阵波动的关系是已知的。

人们早就意识到特征值相关的属性不依赖于具体的概率分布，并从不同角度解释了RMT有效的原因。Dyson认为RMT有效的原因是如果一个系统足够复杂，该系统的状态就不再重要了。然而，直到 80 年代初期，人们才意识到主要原因是对应于RMT的经典体系是混沌的。尽管有一些早期研究将随机矩阵理论的相关和经典混沌联系起来，不过对这种联系的明确表述是在Bohigas等的论文中。他们在对西奈台球数值研究基础上，猜测出如果相应的经典体系是混沌的，那么在平均水平间距规模上的水平相关符合RMT。大量系统已经证实了该猜测。可以从数值上说明反过来也是成立的，即如果系统不是完全混沌的，谱相关就不符合Wigner-Dyson系综。虽然还没有完全证明该猜想，不过在半经典分析基础上人们对它已经有了一定认识^[26]。该猜想意味着RMT在量子混沌研究中起重要作用。

从 RMT 的上述历史发展过程中可以看出，通过在物理学和数学各分支学科中的广泛应用，RMT 已发展成为一个很成熟的理论。RMT 的应用领域还在延伸，近年来，它又被应用于金融和无线通信等研究领域，并取得了一定研究成果。

1.2.2 基于 RMT 金融相关矩阵和多元波动率噪声界定的研究现状

Laloux、Plerou、Pafka和Kondor对RMT在金融相关中的应用进行了最早的研究。Laloux^[27-29]使用S&P 500 的 406 只股票 1991 年至 1996 年的日收益数据对收益相关矩阵和相应随机矩阵的特征谱进行了比较，观察到如下的现象。94%的实际相关特征值处于RMT预测的噪声带内，它们的分布同RMT预测一致。而其余 6%的特征值大于随机最大特征值，它们包含了 26%的市场波动信息，其中最大特征值比RMT预测的最大特征值大 25 倍。对特征向量的研究表明，噪声带内特征值对应的特征向量具有随机性质。非噪声的特征向量在时间上更稳定，其中，最大特征向量具有明显的非随机性。由于每只股票在最大特征向量中的权重大致相等，因此可以认为最大特征向量代表“市场”。Plerou等^[30-35]分析了 1000 只美国证券在 1994 年至 1995 年的 30 分钟收益数据，发现 20 个最大特征值（2%）偏离了RMT预测。通过计算其余特征值的差和相关，证明了它们具有GOE随机矩阵的普适性特征，这表明这些特征值是纯随机性的。他们还研究了特征向量的统计特点，发现随机特征值对应特征向量的成分服从均值是 0、方差为 1 的高斯分布，这与GOE矩阵标准化特征向量的成分分布相同，而噪声带外特征向量的成分却偏离于高斯分布。受局域化理论的启发，他们定义了反比参与率（inverse participation ratio）来表示显著参与某一个特征向量的公司数量，得出了特征值谱边缘的反比参与率较大。他们的研究也说明了偏离于RMT预测的特征向量在时间上更稳定，并且随着特征值接近RMT预测的上限，其对应的特征向量的稳定性下降。这些噪声带外特征向量包含有意义的市场信息。具体地，由于最大特征向量所有成分的符号几乎相同，因此可以认为它代表一种涵盖全市场的影响。而第二大特征向量主要包含资本份额大的证券，第三大特征向量中的证券则主要来自于电子和计算机行业，等等。Plerou^[36]指出RMT在金融相关中的应用是经济物理学的重要研究内容，并综述了该研究的最新成果。Lee^[37]分析了S&P 500 的 233 个代表性证券在 1997 年 1 月 2 日至 2001 年 5 月 11 日的日收益相关矩阵特征值和特征向量的统计特性。根据随机矩阵特征值的中心极限定理（CLT），识别出了实际相关矩阵特征值的噪声带，指出偏离于CLT的特征值包含有价值的信息。对特征向量的分析表明，“市场”特征向量具有近似相等、取值约为 $1/M$ 的成分（ M 是证券的数量），而噪声特征向量的成分服从高斯分布。为检验相关信息的时变性，他们将研究时期分成相等的两段，并计算了两段时期中特征向量的内积。结果是信息区特征向量的内积显著大于噪声区内积，这说明信息具有持久性特点。

在Laloux和Plerou等利用RMT研究美国证券市场后，一些学者也将RMT用于其他证券市场谱的类似研究，并得到了类似的结论^[38-42]。例如从东京证券交易所 493 只股票 1993 年 1 月至 2001 年 6 月 1848 天的日收益数据中，Utsugi等^[39]发现大部分特征值和RMT一致，并识别出了偏离于RMT的较大特征值。也有一些基于RMT对发展中经济证券相关的研究。Nilantha等^[40]通过对斯里兰卡市场 150 只证券在 2004 年 8 月至 2005 年 3 月的日收益相关研究，发现除少量特征值外，大部分特征值符合RMT预测。在对约翰内斯堡市场证券相关的研究中，Wilcox和Gebbie^[41]发现，在存在数据缺失和非流动证券情况下，由三种数据清理方法得到的相关矩阵的大部分特征值都符合RMT预测。我国学者李良新^[42]计算了上证 A 股 467 只股票在 2000 年 1 月至 2004 年 5 月的收益相关矩阵，并将特征值和特征向量的分布同RMT进行了对比，研究表明中国证券市场的价格波动并不是理想的随机状态，而是存在 11%左右的非有效成分。

如上所述，RMT多是由于资产数量较大的情况，但是也有学者将其用于小证券组合的研究。Conlon等分析了 49 个对冲基金 105 个月的收益相关矩阵，结果发现 6.1%的特征值处于RMT预测范围外，它们对应的特征向量包含基金分组信息，这同Plerou等的分析结果是类似的^[43]。

RMT在金融领域的应用是不断发展的过程。在金融相关特征谱与RMT对比研究的基础上，人们扩展了RMT在金融相关谱分析中的应用。Malevergne和Sornette通过模拟和计算说明了RMT预测的特征值谱和大维实证相关矩阵中少数较大特征值的共存并不是由因子变化导致的，而是时间序列一致变化的结果。他们的研究也显示在主体特征谱中也存在相关信息^[44]。Pafka等将RMT引入到基于Riskmetrics的金融预测中^[45]。在资产数量趋于无穷和衰退因子趋于 1 的极限下，他们估计了指数加权随机矩阵的特征谱，并发现了该特征谱和实证矩阵谱的一致性。也有学者在将金融相关矩阵特征值谱与RMT进行比较后，对金融相关特征谱的特性做了进一步的分析。比如，Wilcox和Gebbie在测试了股票收益相关矩阵的随机特性后，对特征谱的市场资本化、交易量、股息率和每股盈利等四个方面的特性进行了分析。他们使用加权方法计算了信息区特征向量在这些特性上的取值范围，这是一种将各个特征向量区分开来的方法。他们的结论是可以用独立的交易策略解释信息区特征向量^[46]。Coronnello等比较了RMT方法、层次聚类法和平面极大过滤图法分析证券收益相关矩阵特征谱进而对各证券所属经济部门进行识别的能力。他们的结论是这几种方法都具有识别不同经济部门的能力，不过它们对不同经济部门的敏感度不同^[47]。Garas

和Argyrakis使用RMT方法研究了希腊证券市场 1987 年 - 2004 年的相关结构特点^[48]。他们根据公司的经济活动，将所研究证券分成若干部门。建立了各证券在部门的投影矩阵，并以投影矩阵的成分为权重，算出特征向量成分的加权平方和，以此来衡量各部门对特征向量的贡献。他们的结论是，初期时个别部门在市场相关中起很大的作用，之后，这种作用变得越来越弱，直至后期时所有部门对市场相关的贡献几乎相等，这是市场成熟的一种表现。另外，他们还通过最大特征值的变化研究了市场力量在相关作用中所占的比重及演化的特点。Conlon等运用RMT方法对 49 个对冲基金 105 个月的收益相关矩阵进行了特征谱分析^[43]。具体地，他们使用Coronnello 等^[47]的方法从特征向量中提取出了基金管理策略信息。郑波将中国金融市场关联矩阵的特征值分布与随机矩阵进行比较后发现除若干较大特征值外，该分布主体上与随机矩阵相同。对较大特征值对应的特征向量的分析表明，同美国金融市场不同，中国金融市场不存在较大特征值与传统市场“板块”的对应，而相关作用较强的“板块”是“ST板块”和“蓝筹板块”等特殊“板块”^[49]。

1.2.3 基于 RMT 去噪法对金融相关矩阵的去噪投资组合优化研究现状

由于时间序列长度为 L 的 N 个不同资产的相关矩阵包含 $N(N-1)/2$ 个不同的成分（entry），所以当 L 不够大时，计算出的相关矩阵很可能会被测量噪声所主导^[50-55]。事实上，早在几十年前，经济学者们就意识到了相关矩阵估计中的噪声问题，并开始研究相关矩阵噪声对风险管理的不利影响^[56-57]。近年来，随着经济物理学在金融时间序列分析中的应用，RMT为分析相关噪声提供了新的有效方法。从基于RMT金融相关谱的上述分析中能够看出，金融相关中包含的大部分信息是纯噪声，这会给资产配置决策、风险管理造成一定的负面影响^[58-61]。

为了分离出金融相关矩阵中的非噪声信息，LCPB去噪法、PG+去噪法和KR去噪法等RMT去噪法已经被提出。Laloux 等认为小于随机最大特征值的市场特征值是噪声，因此用常数取代这些噪声特征值以过滤掉它们的影响，并保持相关矩阵的迹不变^[28]，如图 1-1 所示。在实证分析中，Laloux 等将数据分成过去期和未来期。他们使用过去期数据计算相关矩阵，并根据Markowitz证券组合理论，针对未滤噪相关矩阵和已滤噪相关矩阵构建两个投资组合有效前沿。在计算个别资产的方差时，未来收益被假定为已知。一旦计算出了有效前沿，就能得到组合在未来时期中的已实现风险。他们的主要结论如下：对未滤

噪组合已实现风险低估的比例是 $2/3$ ，而滤噪后的这一比例是 $1/2$ ，说明预测误差大大降低。有效前沿曲线上的任一点都表示在资产收益率一定时，已滤噪组合的已实现风险小于未滤噪组合。事实上，在整个有效前沿上，两者的差距是一致的。Lee^[37]利用随机相关矩阵谱的中心极限定理（CLT）识别出S&P 500 的 233 只代表性股票在 1997 年 1 月 2 日至 2001 年 5 月 11 日的日收益相关矩阵的噪声带后，对该相关矩阵进行了去噪，具体方法和LCPB去噪法类似。Pafka和Kondor^[50]使用模拟方法对比了样本相关矩阵、基于单一指数法的相关矩阵和基于RMT的相关矩阵用于证券组合选择的表现。结果显示，金融时间序列的相关噪声的确非常大，不过，各种降维技巧可以有效减弱噪声的作用。他们还证实RMT去噪法确实是一种十分有效的降维方法。Vincenzo和Fabrizio等将聚类算法引入到证券组合优化中，并从可靠性、风险和有效资产数量三个方面对聚类法和RMT去噪法的效果进行了比较^[62]。他们的结论是在理想化的条件下，即对未来收益和波动率有完全的预测能力和允许卖空时，聚类法的可靠性优于RMT方法。单一连接聚类法的风险水平高于平均连接聚类法和RMT滤噪法，而它的有效资产数量明显低于后两种方法。在更接近现实的条件下，即对未来收益和波动率没有完全的预测能力和不允许卖空时，聚类法在可靠性方面的优势仍然存在。此时，几种滤噪方法在已实现风险方面的表现没有明显的不同。单一连接聚类法的有效资产数量低于平均连接聚类法和RMT滤噪法。

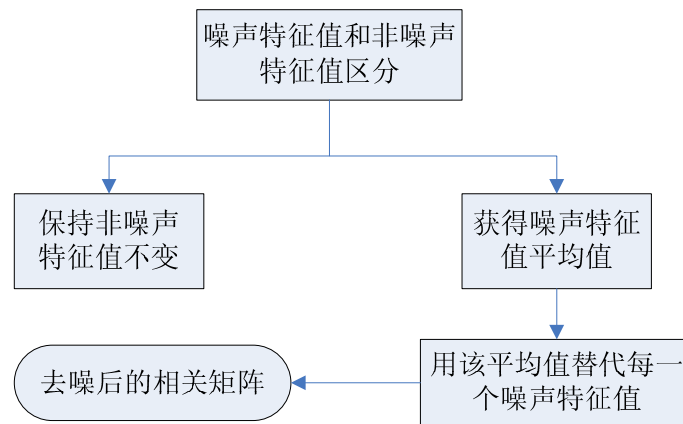


图 1-1 LCPB 去噪法流程

Fig.1-1 Process of the LCPB denoising approach

除LCPB去噪法外，Plerou等^[63]也提出了一种基于RMT的相关去噪法，即PG+去噪法。和LCPB去噪法的原理略有不同的是，PG+去噪法是用 0 来代替噪声特征值。Plerou等对PG+去噪法的应用进行了实证研究，得出的结论与

Laloux等的研究非常相似。Sharifi^[64]认为, 投资期中的金融相关矩阵的特征值往往是不稳定的, 而特征向量的波动并不大, 因此, 根据特征值波动时的特征向量稳定性的最大化而建立的金融相关矩阵就会接近于投资期中的金融相关水平, 从而使构建的投资组合在投资期表现出较低的风险。以上述研究为理论基础, Sharifi提出了基于RMT和特征向量Krzanowski稳定性的KR去噪法, 并分析了将该方法用于组合风险优化的效果。Krzanowski使用特征值 λ_i 的变化不超过 ε 时其对应的特征向量 v_i 的最大偏离来衡量 v_i 的稳定性^[65]。根据特征向量的最大偏离角公式, 特征向量的稳定性是由相邻特征值的差决定的。KR去噪法的原理是用具有相等和最大间距的正数特征值取代噪声特征值, 并使新特征值和噪声特征值的和相等, 这样做的目的是保证矩阵特征向量的稳定性达到最大。从去噪对相关矩阵稳定性的影响来看, KR去噪法优于LCPB和PG+去噪法。Daly^[66]使用LCPB法、PG+法和KR法对收益相关矩阵和协方差矩阵进行去噪。相关矩阵和协方差矩阵的计算方法包括相等加权法和指数加权法两种, Daly对由这两种方法得到的相关矩阵和协方差矩阵都进行了去噪。当使用KR法时, Daly考察了最小特征值取值不同时的去噪效果。组合优化的样本内测试结果表明过滤协方差比过滤相关矩阵更容易产生低风险的组合。从样本外测试结果看, 几种RMT去噪法都能降低平均已实现风险。其中, 表现最好的方法是KR去噪法。在以年、月和日为单位的不同情况下, KR去噪法表现出了很好的一致性。Daly的研究结论是, LCPB法、PG+法和KR法都能改进组合的风险, KR方法在风险和稳定性方面优于LCPB法和PG+法。史宇峰^[67]发现使用资产数量一定、样本容量不同的收益时间序列可以得出收益相关矩阵的不同计算结果, 即估计收益相关矩阵具有很大的随机性。他设计了选取最优收益相关矩阵的方法, 该方法的原理是将样本容量不同的收益相关矩阵的特征值分布与其对应的随机相关矩阵特征值分布进行对比。偏差越大, 说明收益相关矩阵的噪声越小, 那么偏差最大的收益相关矩阵即为最佳收益相关矩阵。他将不同收益相关矩阵用于构建投资组合, 结果是由最佳矩阵得到的投资组合有效前沿是最优的。江健^[68 69]计算了 74 种外汇在 2002 年 3 月至 2006 年 2 月的收益相关矩阵, 发现其特征值分布与RMT预测基本一致, 只有少数特征值超出了RMT预测的范围, 这反映了收益序列的非噪声信息, 表征了外汇资产间的相关特性。都国雄^[70]指出经济物理学的发展趋势是基于RMT对证券收益相关矩阵特征值谱进行分析, 从而为证券选择提供理论依据。

1.2.4 基于 RMT 去噪法对金融协方差矩阵的去噪投资组合优化研究现状

导致多元波动率产生噪声的因素有很多，其中比较重要的一个因素是“维数灾祸”。Reese等^[71]对多元波动率“维数灾祸”的定义是：在现代金融工程里，资产组合的维度往往接近于观察值的数量，因此协方差矩阵或相关矩阵估计中参数的数量和数据的数量就会是同阶的，这时就会产生“维数灾祸”问题。“维数灾祸”问题是很多经济学家一直致力于解决的一个疑难问题^[56]。数据数量不足而引起“维数灾祸”的原因是产生一致的协方差矩阵估计量或相关矩阵估计量的条件是时间序列的长度和资产数量之比趋于无穷大，而在现实情况下，时间序列的长度和资产数量之比往往处于 1~10 的范围内，因此观察值数量的缺乏会给协方差矩阵的估计带来非常大的统计不确定性^[72-76]。关于协方差矩阵维度和噪声的关系，学者们进行了下述的深入研究。Pafka和Kondor^[77]研究了噪声对经典证券组合优化的影响。他们的结论是噪声对证券组合优化的影响取决于证券组合中资产数量和时间序列的长度之比。如果这个比例较大 (≥ 0.6)，噪声的作用会非常显著。而如果这个比例较小 (≤ 0.2)，噪声引起的误差就会降到可以接受的水平。由于时间序列长度的受限，降低噪声影响的可行方法是对组合中资产的数量施加限制。另外，模拟实验的结果还表明，噪声的影响也取决于协方差矩阵的具体用途。如果协方差矩阵只是用来测量成分既定的组合风险，而不是用于组合优化的用途，那么噪声对组合风险的影响就会小得多。Burda等^[78]使用 q_0 来度量基于噪声数据得到的协方差矩阵中的误差。具体地，

$$q_0 = \sqrt{\frac{\hat{w}^T C \hat{w}}{w^T C w}} \quad (1-1)$$

其中， C 是真正的协方差矩阵， \hat{w} 是由有噪声的协方差矩阵计算的组合权重。在 $N, T \rightarrow \infty$ ，且 $r=N/T$ 固定不变时 (N 是资产数量， T 是时间序列长度)， q_0 的均值为

$$E(q_0) \approx \frac{1}{\sqrt{1-r}} \quad (1-2)$$

(1-2)式说明当 T 远大于 N 时，最佳组合风险估计值和真实值很接近。随着 T 的减小，最佳组合风险估计值和真实值的差距拉大。当 T 小于 N 时，估计出的协方差矩阵退化为奇异矩阵，此时它已不能用于解决组合优化。Kondor等^[79]对比研究了在方差、绝对偏差、预期短缺和最大损失等几种风险度量下最佳投

投资组合对估计误差的敏感度。他们模拟了资产数量和时间序列长度各不相同的很多组合来测量组合风险和它对噪声的敏感度，结果是在各种风险测量下，噪声的作用都很明显，并且这种作用主要取决于组合资产数量和时间序列长度之比。在各种风险度量方法中，方差的噪声敏感度最低，因此它是最好的风险测量方法。Varga-Haszonits等^[80]使用文献[77]中的模拟方法研究了含有噪声的协方差矩阵用于组合优化的表现。他们使用具有不同条件相关矩阵的CCC-GARCH模型来模拟证券收益时间序列，然后用两种方法即无条件样本协方差矩阵和CCC-GARCH模型来估计协方差矩阵，并据此分别计算最佳组合中证券的权重。他们分别用 q_0^u 和 q_0^c 表示无条件样本协方差矩阵和CCC-GARCH模型的估计误差，研究结果表明 q_0^u 和 q_0^c 的均值都与 N/T 成正比。Vincenzo等^[62]指出由于时间序列长度 T 的有限，协方差矩阵的估计存在“维数灾祸”问题。因为 N 个资产的协方差矩阵有 $N(N-1)/2 \sim N^2/2$ 个不同成分，而数据数量是 NT ，所以协方差矩阵误差较小的条件是 T 远大于 N 。但是随着 T 的增大，非稳定性会对协方差矩阵估计产生越来越大的影响。因此，需要使用一些方法将协方差矩阵中不受上述统计不确定性影响的部分过滤出来，用这些过滤出的信息构建组合。Jens^[81]在作出更少模型假定的情况下，应用Marcenko-Pastur定理计算了随机EWMA协方差矩阵的特征值分布概率密度。他还推导了对实际应用十分重要的随机特征值分布的边界值，具体地，该边界值是下面方程的解，

$$(1 + \gamma e^{-c/Q} u(x)) e^{(xu(x)+1)/Q} = 1 + \gamma u(x) \quad (1-3)$$

其中，

$$u(x) = -\frac{1}{2\gamma} \left((1 + e^{c/Q}) \pm \sqrt{(1 - e^{c/Q})^2 - \frac{4\gamma Q(1 - e^{c/Q})}{x}} \right)$$

$$c = N/n$$

$$Q = (1/n(1-\alpha))$$

N 是时间序列长度， n 是资产数量， α 是衰减因子。不难看出，随机特征值边界取决于 c 和 Q 。 n 一定时，随着 α 或 N 的下降，EWMA协方差估计的准确性会下降，这主要是因为有效数据数量的减少。另外，文献[82]和[83]也研究了组合方差对估计噪声的敏感度。

从上述研究中不难看出，相对于金融时间序列长度而言，资产数量即维度过大是造成协方差矩阵估计噪声的主要来源。在时间序列长度的增大受到数据可得性限制的情况下，减少协方差矩阵估计噪声的可行方法是对协方差矩阵的结构施加某种限制，来降低协方差矩阵的有效维度^{[50][79][81][84]}。常用的降维方法有因子模型、贝叶斯收缩法、RMT法和CCC-GARCH模型等^{[28-29][85-89]}。

Pafka等^[45]计算了 $N \rightarrow \infty$, $\alpha \rightarrow 1$, 且 $N(1-\alpha)$ (N 是资产数量, α 为衰减因子) 不变时指数加权随机协方差矩阵特征值分布的概率密度。指数加权随机协方差矩阵特征值谱的特点和相等加权随机矩阵很类似, 因此Pafka等认为用于相等加权协方差矩阵的降维方法也同样适用于指数加权协方差矩阵。他们用RMT法对协方差矩阵进行去噪, 结果表明当组合中资产数量较大时, 由RMT法去噪的指数加权协方差矩阵的组合优化表现好于未去噪的指数加权协方差矩阵和由RMT法去噪的相等加权协方差矩阵; 当组合中资产数量较小时, 样本协方差矩阵的组合风险稍低于由RMT法去噪的协方差矩阵。他们也发现如果衰减因子的值太小, 则会使很多数据无法在协方差矩阵估计中发挥作用, 而如果衰减因子的值太大, 又无法反映时间序列的时变性。在这两个极端情况之间达到平衡的最佳衰减因子比RiskMetrics建议的值大。

Burda等^[90]放松了Pafka等^[45]做出的 $T/N \rightarrow \infty$ 的假定, 使用自由随机变量研究了 T/N 和 $T(1-\alpha)$ 都不变时随机EWMA协方差矩阵的特征值分布概率密度。Jens^[81]根据随机EWMA协方差矩阵的特征值谱分析了S&P 500 证券收益协方差矩阵, 他发现实证协方差矩阵的大部分特征值与随机特征谱拟合得很好, 表明这部分特征值代表噪声。为检验随机特征谱外的特征值是否代表相关信息, 他将数据进行了随机重排。重新计算的特征谱与随机特征谱十分类似, 这说明上述谱外特征值确实是由变量间相关产生的, 因此, 可以将EWMA协方差矩阵大部分特征值的噪声过滤掉。

Daly等^[66]使用LCPB去噪法、PG+去噪法和KR去噪法对资产数量为 100、250 和 432 的组合协方差进行去噪。为考察RMT去噪法对小资产组合的去噪能力, Daly^[91]还将三种RMT去噪法用于 39 个外汇资产协方差矩阵的去噪, 并采用bootstrap方法和样本外测试法对RMT去噪法在组合优化中的去噪效果进行了测试。得出的结论是去噪效果随资产数量减少而下降; KR去噪法的去噪能力大于其他两种RMT去噪法。Conlon等^[43]采用LCPB去噪法对 49 个对冲基金 105 个月的月收益协方差矩阵进行了去噪, 并将去噪后协方差矩阵用于构建组合基金, 结果表明RMT去噪法对组合基金风险的改进作用较小。

1.3 当前研究存在的主要问题

近年来, 将 RMT 用于金融领域的开创性研究为分析金融资产整体行为的特征和进行更好的金融风险管理提供了理论依据, 取得了大量的研究成果。不过, 现在这项研究还处于较为初级的阶段。到目前为止, 和金融研究结合起来的 RMT 还主要局限在谱理论这部分内容, 能否将 RMT 中其余大量的内容用

于金融问题的研究是一个值得探讨的课题。RMT 具有很强的普适性,适用于多种分布的金融数据分析。不过,RMT 的应用仍然需要具备一定的假定条件,比如它往往要求金融数据是独立同分布(IID)的,并且具有有限的二阶矩。显然,现实的金融数据有时难以满足这些假定,然而,在偏离于上述假定的更现实条件下开展的 RMT 应用研究却很少。另外,基于 RMT 金融相关研究一般都建立在标准相关矩阵基础上,而很少涉及非等时相关矩阵和非对称相关矩阵等其他形式相关矩阵。总之,RMT 在金融领域的应用还有很大的待挖掘潜力。根据前节文献综述所分析和探讨的内容,本文认为当前应用面向股票收益相关矩阵和协方差矩阵的 RMT 去噪法实现组合风险优化的有关研究存在如下几方面的问题:

(1) 面向证券收益相关矩阵的 RMT 去噪法的原理和算法存在一定的缺陷 可用于对证券收益相关矩阵去噪的 RMT 去噪法种类很少,主要包含 LCPB 法、PG+法和 KR 法。PG+法和 LCPB 法在特征值的确定上缺乏足够的依据,而简单地分别用 0 和噪声特征值均值来代替噪声特征值,从而原理有些粗糙。KR 法由于考虑了特征向量的稳定性而使得模型更为合理。KR 法利用的特征向量的 Krzanowski 稳定性是以相关矩阵特征值减小时的特征向量最大扰动衡量的。该最大扰动稳定性与相邻特征值的差成正比,因此,为了实现最大扰动稳定性的最大化,必须尽可能地使各特征值分散化。于是,去噪后的金融相关矩阵的最小特征值必须总是十分接近于 0。可以想象,这不可能总是和真实的金融相关矩阵相符。并且,KR 法的算法也存在一定的缺陷。KR 法将收益相关矩阵的特征值限制在以等差关系作为约束的很小范围内,因此,特征向量稳定性的提高十分有限,难以符合特征向量稳定性最大化的要求。另外,KR 法的特征值确定缺乏严密的数学推导过程。显然,RMT 去噪法原理和算法的上述缺陷可能会影响去噪结果的精确性,进而不利于投资组合风险的优化。因此,以往研究只应用现有 RMT 去噪法对用于构建投资组合的证券收益相关矩阵进行去噪,由于缺乏对 RMT 去噪法缺陷的关注,必然难以满足证券投资组合优化的需要。

(2) 基于 RMT 对证券收益率多元波动率模型去噪的研究有待开展 证券收益率多元波动率主要有两种计算方法,一种方法是计算证券收益率样本协方差矩阵,另一种方法是通过构建多元波动率模型得到多元波动率。和前者相比,后者是一种更准确地计算证券收益率多元波动率的方法。由于金融资产多元波动率对于资产配置、资产定价和风险管理等金融决策的重要性,对多元波动率模型的研究已成为近二十多年来金融计量学领域研究和探索的热点问

题。和证券收益率样本协方差矩阵类似，由多元波动率模型计算的多元波动率也含有噪声，该噪声来源于多元波动率模型的“维数灾祸”。一般的多元波动率模型都具有相当复杂的矩阵、向量形式，并且参数数量随维数的增加呈指数增长，致使当组合包含的资产数量较大时，协方差矩阵的估计难度非常大，甚至难以进行估计。为了减小“维数灾祸”引发的噪声，一些学者基于数据降维技术对多元波动率建模开展了大量研究，但如何利用 RMT 对多元波动率模型进行去噪，现有的多元波动率模型研究却未涉及。作为证券收益率多元波动率的一种主要计算方法，由多元波动率模型得到的多元波动率是投资组合的构建基础，因此，有必要对基于 RMT 多元波动率模型去噪的可行性、原理和用于证券投资组合优化的效果进行深入剖析。

（3）基于 RMT 去噪法小证券组合优化研究有待加强 一些文献表明，相对于几百只乃至上千只资产的组合而言，RMT 去噪法对较小数量资产的组合，特别是百只以下资产的组合的协方差去噪的作用很小。学者们认为，当组合中资产数量较小时，收益协方差矩阵的噪声也会相应减小，这是造成 RMT 方法去噪作用下降的原因。通过对 RMT 去噪法中噪声特征值识别原理的分析可以发现，当组合中资产数量减小到一定水平时，RMT 去噪法中最大噪声特征值的较大计算误差也会造成 RMT 去噪法有效性的下降。而该问题并没有得到学者们的关注。以往利用 RMT 方法对小股票组合的样本收益协方差矩阵进行去噪，由于最大噪声特征值的较大计算误差，必然造成小股票组合风险优化水平的下降。有鉴于此，提出一种适用于小股票组合的 RMT 去噪法，能够解决小组合情况下由噪声特征值识别引起的 RMT 去噪法效力下降的问题，是本文的主要研究内容之一。

（4）基于 RMT 对证券收益样本协方差矩阵去噪的研究有待加强 被用于对证券收益样本协方差矩阵去噪的 RMT 方法沿用了样本相关矩阵去噪的做法，即通过对样本协方差矩阵的特征值谱与随机矩阵的特征值谱的比较，对样本协方差矩阵的噪声特征值进行识别和替代。实际上，除了噪声特征值外，被识别出的信息特征值也未必与真实协方差矩阵的对应特征值完全一致。所以，由于只对样本协方差矩阵的部分特征值进行替换，已有 RMT 方法的去噪和组合优化效果难免受到不利的影响。因此提出一种科学合理的 RMT 去噪法，将基于 RMT 对证券收益样本协方差矩阵去噪的研究由对噪声特征值替换的研究发展为对全部特征值估计的研究，是本文的一项重要研究内容。

1.4 研究内容和研究方法

1.4.1 研究内容

本文从对股票收益相关矩阵和协方差矩阵去噪的视角出发，研究了如何利用 RMT 去噪法改进 Markowitz 股票投资组合风险优化水平的问题。本文在理论分析股票收益相关矩阵和协方差矩阵的噪声对 Markowitz 投资组合风险的影响，并选取 RMT 去噪法作为对 Markowitz 投资组合风险噪声问题的解决方法的基础上，开展了利用 RMT 去噪法对股票收益相关矩阵、股票多元波动率模型、股票收益样本协方差矩阵和小股票组合样本协方差矩阵的去噪改进股票组合风险优化水平的研究。

(1) **Markowitz 股票投资组合风险噪声分析及解决方法** 从介绍 Markowitz 均值-方差模型入手，明确 Markowitz 投资组合风险的含义、计算方法和它的优化的含义，进而指出影响 Markowitz 投资组合风险的噪声问题和噪声的两个来源，即用于构建 Markowitz 投资组合的股票收益相关矩阵和协方差矩阵，分别通过数理推导和建立 toy 模型在理论上分析股票收益相关矩阵和协方差矩阵的噪声对 Markowitz 投资组合风险的影响。通过对用于股票投资组合风险优化的去噪算法的介绍，探讨 RMT 去噪法的优势，进而选取 RMT 去噪法为 Markowitz 投资组合风险噪声问题的解决方法。

(2) **基于 RMT 去噪法对股票收益相关矩阵去噪投资组合风险优化研究** 首先进行 RMT 去噪法的理论基础研究，分别阐述股票收益相等加权相关矩阵和指数加权相关矩阵的计算方法和噪声特征值识别原理。进而对 LCPB 法、PG+法和 KR 法等三种现有 RMT 去噪法进行介绍。针对现有 RMT 去噪法不利于投资组合风险优化的原理和算法缺陷，对收益相关矩阵的特征向量最小扰动稳定性进行数理推导，并将其引入 RMT 去噪法中，进而建立对股票收益相关矩阵去噪的 KRMIN 方法，对 KRMIN 方法的原理和算法流程进行详细的阐述。最后，通过 bootstrap 方法，开展将 LCPB 法、PG+法、KR 法和 KRMIN 法用于不同数量股票的投资组合优化的实证研究。

(3) **基于 RMT 多元波动率模型去噪改进组合风险优化水平研究** 以基于 RMT 股票收益相关矩阵去噪为理论基础，研究基于 RMT 对股票收益多元波动率模型去噪原理，提出基于 RMT 对股票收益多元波动率模型去噪的方法。然后对面向多元波动率模型的 RMT 去噪法的组合风险优化作用进行理论分析。将基于 RMT 多元波动率模型去噪思想融入多元波动率模型的建模中，建立两类多元波动率模型，即 SC-GARCH 模型和 IO-GARCH 模型。最后，对

两个模型各个维度的组合风险优化水平展开实证比较研究，以实验验证提出的 RMT 方法对多元波动率模型去噪进而改进组合风险优化水平的有效性。

(4) 基于蒙特卡洛 RMT 去噪法小股票组合风险优化研究 界定小股票组合的内涵，明确股票收益相等加权样本协方差矩阵和指数加权样本协方差矩阵的计算方法。在介绍对股票收益样本协方差矩阵去噪的现有三种 RMT 去噪法的基础上，从剖析这三种 RMT 去噪法对噪声特征值识别原理入手，找出小组组合风险优化条件下这三种 RMT 方法因噪声特征值边界界定的误差而产生的效力下降的问题。为解决该问题，采用蒙特卡洛模拟法计算最大噪声特征值，从而建立蒙特卡洛 RMT 去噪法。通过实证分析方法，在股票收益序列长度和衰减因子不变时，在不同股票数量下对现有三种 RMT 去噪法和蒙特卡洛 RMT 去噪法的组合风险优化效果进行对比研究。

(5) 基于矩法对股票收益样本协方差矩阵的去噪组合风险优化研究 以股票收益总体协方差矩阵和样本协方差矩阵特征谱矩的关系为理论基础，基于 RMT 提出对股票收益样本协方差矩阵去噪的矩法。详细阐述矩法的原理，并从和现有其他 RMT 去噪法不同之处入手，揭示矩法的特征。通过考察对股票收益总体协方差矩阵特征值估计的准确性，对矩法的去噪效果进行模拟研究，探讨收益序列长度和样本协方差矩阵个数对去噪效果的影响。通过构建 toy 模型，主要针对矩法对组合风险优化水平的改进作用开展模拟研究。在该研究中，先设定两类符合现实经济情况的总体协方差矩阵模型，并据此建立股票收益总体协方差矩阵，然后通过数理推导研究股票收益样本协方差矩阵噪声对组合风险优化水平的影响取决于哪些因素，最后通过模拟试验研究股票收益样本协方差矩阵噪声对组合风险优化水平的作用，并且在对总体协方差矩阵特征值数的猜测改变的情况下，研究矩法对组合风险优化水平的改进作用。在完成上述模拟研究后，使用 bootstrap 方法，在理想化和现实化条件下对矩法的组合风险优化效果进行实证研究。

1.4.2 研究方法和技术路线

1.4.2.1 研究方法

本文立意在于综合利用金融学、数学、证券投资学和计量经济学等多学科领域的理论、模型和技术手段，构建用于 Markowitz 股票投资组合风险优化的 RMT 去噪模型和进行实证检验，为进行科学的金融投资决策并减小股市投资风险，实现股票市场和宏观经济的稳定发展提供理论参考和实证度量。整体内容的研究方法如下：

(1) 采用基于 toy 模型的模拟方法分析多元波动率噪声对 Markowitz 投资组合风险优化水平的影响, 在股票收益相关矩阵噪声对投资组合风险优化水平的影响分析中采用一般数理分析方法推导存在噪声时投资组合风险优化水平的表达式。借鉴金融市场波动率理论, 探讨 RMT 方法在金融相关和波动率去噪方面的优势。

(2) 根据随机矩阵理论, 探讨 RMT 去噪法对股票收益相关矩阵噪声特征值识别的原理。通过主成分分析技术和一般数理分析方法构建股票收益相关矩阵特征向量的最小扰动稳定性和特征值间关系的表达式, 在此基础上, 运用 RMT 去噪理论和模拟退火算法建立对股票收益相关矩阵去噪的 KRMIN 去噪法。采用 bootstrap 方法和比较分析方法从实证角度测度 KRMIN 法与 LCPB 法、PG+法和 KR 法等现有 RMT 去噪法对股票组合风险优化水平的作用。

(3) 借鉴 RMT 去噪理论, 探究基于 RMT 多元波动率模型去噪机理。根据 Markowitz 证券投资理论, 采用理论研究方法分析基于 RMT 多元波动率模型去噪对组合风险优化水平的改进作用。在金融市场波动率理论和 RMT 去噪理论的指导下, 运用多元 GARCH 计量经济分析方法和建模技术构建 SC-GARCH 模型和 IO-GARCH 模型, 并依据矩阵的正定理论, 以一般数理分析方法对由这两类模型得到的协方差矩阵的正定性进行数理推导和证明。通过实证研究方法检验 RMT 对多元波动率模型的去噪改进组合风险优化水平的有效性。

(4) 根据 RMT 去噪理论, 通过定量和定性相结合的方法揭示出小组条件下现有 RMT 去噪法在噪声特征值识别方面存在的问题, 并采用蒙特卡洛模拟法建立蒙特卡洛 RMT 去噪法。运用比较分析法和 bootstrap 方法, 通过对现有 RMT 去噪法和蒙特卡洛 RMT 去噪法的比较对小组条件下已有 RMT 去噪法效力下降的现象和蒙特卡洛 RMT 去噪法对解决该问题的有效性进行实证验证。

(5) 根据随机矩阵理论中样本协方差矩阵各阶矩和总体协方差矩阵各阶矩的理论关系, 运用一般数理分析方法由样本协方差矩阵各阶矩计算总体协方差矩阵各阶矩, 在此基础上, 采用模拟退火算法估计总体协方差矩阵的特征值, 从而建立对股票收益样本协方差矩阵去噪的矩法。采用 toy 模型模拟法研究矩法的去噪效果。采用 toy 模型模拟法, 通过比较未去噪时的组合风险和以考虑不同特征值数的矩法去噪后的组合风险研究矩法对组合风险优化水平的改进作用及其特点。采用和常用 RMT 去噪法比较的方法对矩法改进组合风险优化水平的作用进行实证测度。

1.4.2.2 技术路线

本文研究的技术路线如图 1-2 所示。在明确基于 RMT 去噪法股票投资组合风险优化问题和查阅文献资料的基础上，对 Markowitz 投资组合风险的含义、噪声对 Markowitz 投资组合风险的影响和 RMT 去噪法的优点等理论基础进行研究，根据噪声的来源确定基于 RMT 去噪法股票投资组合风险优化研究的思路框架。由于对 Markowitz 投资组合风险产生影响的噪声主要来源于股票收益相关矩阵和协方差矩阵，而协方差矩阵的计算方法包括样本协方差矩阵和多元波动率模型两种，所以本文研究的思路框架包括四个角度。角度一是通过建立 RMT 去噪法对现有的面向股票收益相关矩阵的 RMT 去噪法的原理和算法进行改进。角度二是建立针对股票收益率多元波动率模型的 RMT 去噪法。角度三是通过建立适合于小组合的 RMT 去噪法对现有的面向股票收益协方差矩阵的 RMT 去噪法在小组合条件下的缺陷进行弥补。角度四是采用不同于已有 RMT 去噪法的全新思路建立面向股票收益协方差矩阵的 RMT 去噪法。上述每个角度的研究都遵循提出问题、分析问题、构建理论模型解决问题和通过实证研究对理论模型加以验证和反馈的思路。

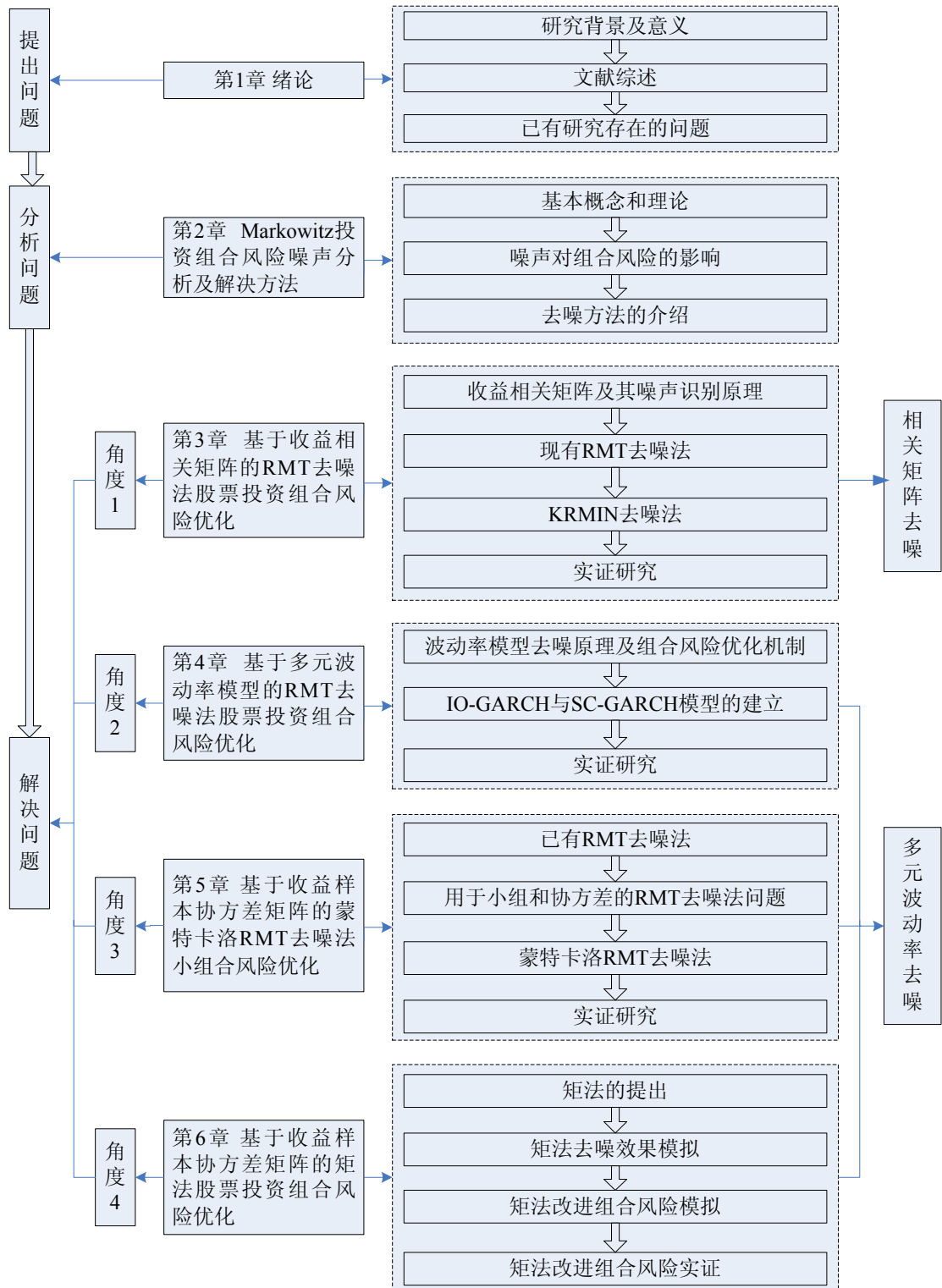


图 1-2 本文的技术路线

Fig.1-2 Research route of the paper

第2章 Markowitz 投资组合风险噪声分析及解决方法

2.1 基本概念和理论

本节的主要工作是对 Markowitz 投资组合风险和它的优化进行定义，介绍 Markowitz 投资组合风险的计算方法，并指出对 Markowitz 投资组合风险产生影响的噪声问题。

2.1.1 Markowitz 投资组合风险的含义

马科维茨于 1952 年提出了关于资产组合选择的均值-方差模型。均值-方差模型中的均值指的是收益率的均值，它用来衡量未来实际收益率的大小；方差指的是未来收益率的方差，它用来衡量未来实际收益率的风险大小。该模型通过均值-方差分析给出了投资决策中资金在各证券中最优分配比例的计算方法^[92]。经典的 Markowitz 均值-方差模型的假设是：

- (1) 证券收益率服从联合正态分布。
- (2) 信息成本为 0，每个投资者都事先掌握投资收益率分布的充分信息。
- (3) 投资者都是理性的，他们追求一定收益率水平下风险的最小化或一定风险水平下收益率的最大化。
- (4) 市场无摩擦，无税收和交易成本。
- (5) 证券可以任意分割。
- (6) 允许投资者卖空。

在上述假设成立的前提下，马科维茨对有效投资组合进行了计算，得出了投资者选择投资组合的有效边界。接下来，对有效投资组合进行推导。

假定市场上有 n 种风险资产，它们在未来给定时期的期望收益率向量是 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ ，同期收益率的协方差矩阵为 $\Sigma = (\sigma_{ij})_{n \times n}$ 。假定 n 种资产的投资组合向量为 $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$ ，其中， $w_i (i=1, 2, \dots, n)$ 为第 i 个资产上的投资比例， $\sum_{i=1}^n w_i = 1$ 。通过计算，可以得出该投资组合在未来给定时期的期望收益率 r 和在该时期的收益率方差 σ 为

$$\begin{aligned} r &= w^T X \\ \sigma &= w^T \Sigma w \end{aligned}$$

根据前面的假设，在 r 一定的条件下，使 σ 最小的组合即为有效投资组合。当 r 等于 r_p 时，由下面模型可求出使 σ 最小的组合。

$$\begin{aligned} \min \quad & \frac{1}{2} w^T \Sigma w \\ \text{s.t.} \quad & w^T X = r_p \\ & w^T d = 1 \end{aligned}$$

其中，

$$d = (1, 1, \dots, 1)^T$$

利用拉格朗日乘数法求解上述优化问题，可以得到

$$L = \frac{1}{2} w^T \Sigma w + \lambda_1 (1 - w^T d) + \lambda_2 (r_p - w^T X) \quad (2-1)$$

其中， λ_1 和 λ_2 是拉格朗日乘子。由(2-1)式得到最优解的一阶条件为

$$\begin{cases} L_w = \Sigma w - \lambda_1 d - \lambda_2 X = 0 \\ L_{\lambda_1} = 1 - d^T w = 0 \\ L_{\lambda_2} = r_p - w^T X = 0 \end{cases} \quad (2-2)$$

由(2-2)式中第1式，得到最优解为

$$w^* = \Sigma^{-1} (\lambda_1 d + \lambda_2 X) \quad (2-3)$$

将(2-3)式代入(2-2)式的第2式和第3式中，可以得到

$$1 = \lambda_1 d^T \Sigma^{-1} d + \lambda_2 d^T \Sigma^{-1} X = \lambda_1 a + \lambda_2 b \quad (2-4)$$

$$r_p = \lambda_1 X^T \Sigma^{-1} d + \lambda_2 X^T \Sigma^{-1} X = \lambda_1 b + \lambda_2 c \quad (2-5)$$

其中， $a = d^T \Sigma^{-1} d$ ， $b = d^T \Sigma^{-1} X$ ， $c = X^T \Sigma^{-1} X$ 。联立方程(2-4)和(2-5)，解得

$$\lambda_1 = (c - r_p b) / (ac - b^2), \lambda_2 = (r_p a - b) / (ac - b^2) \quad (2-6)$$

将(2-6)式代入(2-3)式，得到投资组合的最优解为

$$w^* = \frac{r_p a - b}{ac - b^2} \Sigma^{-1} X + \frac{c - r_p b}{ac - b^2} \Sigma^{-1} d$$

通过上述推导，得到了Markowitz均值-方差模型的有效投资组合结果。通过对Markowitz均值-方差模型的上述介绍，可以看出该模型的主要目的是通过对未来期的期望收益率和收益率协方差矩阵的预测来对未来期的有效投资组合进行预测。在实际应用中，人们通常利用基于资产收益率历史数据的协方差矩阵对未来期的收益率协方差矩阵进行预测。由股票收益率历史数据计算的协方差矩阵一般被称为历史协方差矩阵^[93]。本文所研究的投资组合都是在历史协方差矩阵基础上根据Markowitz均值-方差模型构建的，称之为Markowitz投资

组合。为了表述方便，本文将被用于预测的历史数据所在的时期称为预测期，将进行投资的未来期称为投资期。Markowitz投资组合是预测出的最小风险组合，因此，该组合投资的经济成果主要取决于它在投资期实现的实际风险。本文将Markowitz投资组合在投资期实现的风险称为Markowitz投资组合风险。设Markowitz投资组合为 w^* ，投资期中收益率的真正协方差矩阵为 Σ_{ture} ，则Markowitz投资组合风险为

$$\sigma_{ture} = (w^*)^T \Sigma_{ture} w^*$$

2.1.2 Markowitz 投资组合风险的计算方法

设Markowitz投资组合为 w^* ，投资期中收益率为 r_i ($i=1, 2, \dots, n$)，收益率的均值为 \bar{r}_i ，收益率的协方差矩阵是 $\{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^n$ ，则 σ_{ij} 的计算方法是

$$\sigma_{ij} = E(r_i - \bar{r}_i)(r_j - \bar{r}_j)$$

根据 Markowitz 投资组合风险的定义，Markowitz 投资组合风险为

$$\sigma_M = \sum_{i,j} w_i^* \sigma_{ij} w_j^*$$

上述根据定义计算Markowitz投资组合风险的方法是最直接和准确的计算方法，但该方法在实际应用中的可行性非常低，原因是收益率的总体协方差矩阵 $\{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^n$ 并不可知。由于Markowitz投资组合风险无法直接计算，因此，人们通常用由样本协方差矩阵计算的风险来估计Markowitz投资组合风险。设来自于 $r_i - \bar{r}_i$ ($i=1, 2, \dots, n$) 的样本数据为 $r_i^{(m)} - \bar{r}_i$ ($i=1, 2, \dots, n \quad m=1, 2, \dots, T$)，样本协方差矩阵为 $\{E_{ij}\}_{i,j=1}^n$ ，则 E_{ij} 的计算方法为

$$E_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{m=1}^T (r_i^{(m)} - \bar{r}_i)(r_j^{(m)} - \bar{r}_j)$$

根据该样本协方差矩阵计算的 Markowitz 投资组合的风险为

$$\sigma'_M = \sum_{i,j} w_i^* E_{ij} w_j^*$$

由于 Markowitz 投资组合并不是根据投资期样本协方差矩阵构建的，因此，可以得出

$$\langle \sigma'_M \rangle = \sum_{i,j} w_i^* \langle E_{ij} \rangle w_j^* = \sum_{i,j} w_i^* \sigma_{ij} w_j^* \quad (2-7)$$

其中 $\langle \dots \rangle$ 表示均值。由(2-7)式可以看出，根据样本协方差矩阵计算的风险是 Markowitz 投资组合风险的无偏估计量。而且已有研究表明该估计的平均平方误差非常低 ($\sim 1/T$)。上述说明，根据样本协方差矩阵估算 Markowitz 投

投资组合风险是一种非常可行的计算方法。本文对 Markowitz 投资组合风险的计算采用的就是该种方法。

2.1.3 Markowitz 投资组合风险优化的含义

人们对投资期的有效投资组合进行预测的目的是为了在收益率一定的条件下，获得风险最低的投资组合，并对投资组合的风险进行正确的预测。投资组合在投资期实现的风险越低，说明组合收益率就越稳定。对投资组合在投资期中的风险预测的准确性越高，则基于该预测做出的投资决策就越正确，投资组合给决策者带来的利益也就越大。因此，本文用 Markowitz 投资组合风险的大小和对 Markowitz 投资组合风险预测的准确性来表示 Markowitz 投资组合风险的优化水平。当 Markowitz 投资组合风险减小和对它的预测准确率提高时，则意味着 Markowitz 投资组合风险优化水平的提高，即 Markowitz 投资组合风险实现了优化。Markowitz 投资组合风险减小得越多和对它的预测准确率提高得越大，Markowitz 投资组合风险优化水平的改进就会越大，Markowitz 投资组合风险优化的程度也就会越高。

2.1.4 Markowitz 投资组合风险噪声简介

Markowitz投资组合及其风险是根据预测期的历史协方差矩阵计算的，因此，组合风险的优化水平主要取决于预测期的历史协方差矩阵。预测期的历史协方差矩阵变化，组合风险优化水平就会随之变化。预测期收益率的历史协方差矩阵越接近于投资期的收益率协方差矩阵，组合风险优化水平就会越高。预测期历史协方差矩阵是对预测期总体协方差矩阵的估计量。由于预测期和投资期是相邻的，因此，这两期的总体协方差矩阵十分接近^[94]。于是，如果用预测期的总体协方差矩阵对投资期的总体协方差矩阵进行预测，则预测出的最小风险组合就会十分接近于投资期的真正最小风险组合，从而会在投资期表现出很低的风险。而且，由于预测期和投资期的总体协方差矩阵十分接近，根据预测期总体协方差矩阵估算的组合风险和由投资期总体协方差矩阵决定的真正风险也会十分接近，因此，对投资期组合风险预测的准确性就会很高。可见，当用预测期的总体协方差矩阵对投资期的总体协方差矩阵进行预测时，Markowitz投资组合风险的优化水平会很高。但预测期的总体协方差矩阵并不可知，因此，一般用预测期的历史协方差矩阵来估计它，并根据预测期的历史协方差矩阵构建Markowitz投资组合。但是，受“维数灾祸”的影响，历史协方差矩阵是有噪声的。“维数灾祸”的产生原因是：为使历史协方差矩阵成为

对总体协方差矩阵的一致的估计量，时间序列的长度和资产数量之比必须趋于无穷大。而实际应用中，金融时间序列的长度和资产数量之比往往处在 1~10 的范围内，因此，历史协方差矩阵就会存在较大的统计误差。既然“维数灾祸”造成的噪声会使预测期历史协方差矩阵偏离于预测期总体协方差矩阵，那么在预测期总体协方差矩阵和投资期总体协方差矩阵比较接近的前提下，噪声就会使预测期的历史协方差矩阵和投资期的总体协方差矩阵产生较大偏离，因此带来Markowitz投资组合风险优化水平的下降。预测期的历史协方差矩阵噪声越大，Markowitz投资组合风险优化水平就越低。根据上述分析，股票收益率总体协方差矩阵是构建Markowitz投资组合时真正需要的协方差矩阵，历史协方差矩阵对它的偏离即噪声会造成Markowitz投资组合风险优化水平的下降，因此，总体协方差矩阵又被称为真正协方差矩阵^[95-97]。

股票收益率历史协方差矩阵有样本协方差矩阵和多元波动率模型两种计算方法，由这两种方法计算的历史协方差矩阵都可以分解为历史相关矩阵和历史标准差矩阵两部分，它们构成了历史协方差矩阵噪声的来源。根据Bandi等^[98]和Ghysels等^[99]的研究，单个金融资产波动率的噪声并不大，因此，对历史标准差矩阵的去噪并不能起到对历史协方差矩阵去噪的作用。到目前为止，通过对单个资产波动率的去噪来实现对协方差矩阵去噪的文献非常少。上述说明单个资产波动率的噪声很小，历史协方差矩阵噪声的主要来源是历史相关矩阵。和历史协方差矩阵类似，历史相关矩阵主要有样本相关矩阵和相关模型两种计算方法。不管采用哪一种计算方法，历史相关矩阵与总体相关矩阵的偏离都是历史协方差矩阵产生噪声的最主要原因。因此，为了促进Markowitz投资组合风险的优化，既可以采用直接对历史协方差矩阵去噪的方法，也可以采用对历史相关矩阵去噪的方法。本文将协方差矩阵和相关矩阵作为两个切入点，分析了它们的噪声对Markowitz组合风险优化水平的影响。并在此基础上，研究了协方差矩阵和相关矩阵的去噪对Markowitz投资组合风险优化水平的改进作用，这是本文研究的两条主线。

2.2 噪声对 Markowitz 投资组合风险优化水平的影响分析

2.2.1 股票收益相关矩阵噪声的影响分析

为分析预测期收益率样本相关矩阵的噪声对投资期中Markowitz投资组合风险优化水平的影响，需要作出如下的假设：预测期和投资期收益率的均值、方差和相关矩阵都相等。假定投资组合中股票数量为N，预测期股票收益率为

r_i ($i=1, 2, \dots, N$), 投资期股票收益率为 r_i' ($i=1, 2, \dots, N$)。预测期和投资期股票收益率的均值为 a_i ($i=1, 2, \dots, N$), 股票收益率的波动率是 σ_i^2 ($i=1, 2, \dots, N$), 股票收益率的相关矩阵为 C 。为便于对由有噪声的相关矩阵和无噪声的相关矩阵产生的投资组合进行比较, 假定对投资期收益率均值的预测是正确的。否则, 在组合收益率一定的条件下, 由预测出的收益率和投资期真实收益率确定的投资组合的范围就会不同, 那么, 投资期的有效投资组合对判断预测出的投资组合的优劣将不再具有参照意义。除了对股票收益率均值的预测进行上述设定外, 本文还对股票收益率方差的预测进行了设定, 让预测出的收益率方差始终等于投资期收益率的真实方差。预测期收益率方差的噪声也会对投资组合的构建产生影响, 但是由于本文主要分析收益率相关矩阵的噪声对投资组合优化水平的影响, 因此, 让预测期收益率的方差是不含噪声的。在第 i ($i=1, 2, \dots, N$) 个资产上的投资权重为 w_i 的资产组合在投资期的期望收益率是 $G=\sum w_i a_i$, 该组合收益率的方差为

$$R^2 = \sum_{i,j=1}^N w_i \sigma_i C_{ij} \sigma_j w_j$$

根据马科维茨投资组合理论, 当组合期望收益率为 G 时, 方差最小的组合权重 w_i 满足如下关系

$$w_i \sigma_i = G \frac{\sum_{j=1}^N C_{ij}^{-1} a_j / \sigma_j}{\sum_{i,j=1}^N a_i / \sigma_i C_{ij}^{-1} a_j / \sigma_j} \quad (2-8)$$

从式(2-8)中可以看出, 为了方便地描述有效资产组合的权重, 也可以将 σ_i 包含在 w_i 和 a_i 中。基于上述考虑, 现对资产权重和收益率均值进行重新的定义, 将其记为 w_i^* 和 a_i^* , 且 $w_i^* = w_i \sigma_i$, $a_i^* = a_i / \sigma_i$ 。

接下来, 在预测期收益率相关矩阵不含噪声和含有噪声两种情况下, 考察投资期中 Markowitz 投资组合风险的优化水平。

1) 预测期收益率相关矩阵无噪声的情况

如果预测期的收益相关矩阵没有噪声, 则对投资期收益相关矩阵的预测为 C 。由前面对收益率和波动率的设定知, 对投资期中第 i 只股票收益率均值的预测是 a_i ($i=1, 2, \dots, N$), 对第 i 只股票收益率的方差预测是 σ_i^2 ($i=1, 2, \dots, N$)。根据马科维茨均值-方差模型, 可以得出当投资期中组合的期望收益率为 G 时, 有效投资组合权重的矩阵表示形式为

$$w_{(C)}^* = G \frac{C^{-1} a^*}{(a^*)^T C^{-1} a^*}$$

其中, $a^* = \{a_1/\sigma_1, a_2/\sigma_2, \dots, a_N/\sigma_N\}^T$, $w_{(c)}^* = \{w_{(c)1}\sigma_1, w_{(c)2}\sigma_2, \dots, w_{(c)N}\sigma_N\}^T$ 。由于投资期中第 i 只股票收益率的真正均值是 a_i ($i=1, 2, \dots, N$),

N), 第*i*只股票收益率的真正波动率是 σ_i^2 ($i=1,2, \dots, N$), 股票收益率的真正相关矩阵是C, 因此, 给定组合收益率G时, 投资期中有效投资组合的真实权重也为 $w_{(c)}^*$ 。对该组合在投资期中风险的预测值是

$$R_{pr}^2 = (w_{(c)}^*)^T C w_{(c)}^* = \frac{G^2}{(a^*)^T C^{-1} a^*}$$

设权重为 $w_{(c)}^*$ 的组合在投资期的真正风险为 R_{tr}^2 。容易证明,

$$R_{pr}^2 = R_{tr}^2$$

通过上面分析, 可以看出当预测期收益率相关矩阵没有噪声时, 构建的 Markowitz 投资组合和投资期中真正有效投资组合是相同的。因此, Markowitz 投资组合在投资期中的风险最低。而且, 由于预测期收益率相关矩阵没有噪声, 对 Markowitz 投资组合在投资期中的风险的预测是完全准确的。可见, 当预测期收益率相关矩阵没有噪声时, Markowitz 投资组合风险的优化水平是最高的。

2) 预测期收益率相关矩阵有噪声的情况

根据相关矩阵的定义, 预测期中第*i*只股票的收益率 r_i 和第*j*只股票的收益率 r_j 的相关系数可以表示为

$$C_{ij} = E\left[\left(\frac{r_i - a_i}{\sigma_i}\right)\left(\frac{r_j - a_j}{\sigma_j}\right)\right]$$

设由 $(r_i - a_i)/\sigma_i$ ($i=1,2, \dots, N$) 形成的收益率的样本数为T个, 将这些样本记为 $(r_i^{(t)} - a_i)/\sigma_i$ ($i=1,2, \dots, N$ $t=1,2, \dots, T$)。设预测期收益率的样本相关矩阵为 $E = \{E_{ij}\}_{i,j=1}^N$, 则 E_{ij} 的计算方法为

$$E_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \frac{r_i^{(t)} - a_i}{\sigma_i} \frac{r_j^{(t)} - a_j}{\sigma_j} \quad (2-9)$$

由式(2-9)知, 由于样本数的有限, E 含有噪声。当用 E 对投资期收益率的相关矩阵进行预测时, 可以得出当投资期中组合的期望收益率为 G 时, Markowitz 投资组合权重的矩阵表示形式为

$$w_{(E)}^* = G \frac{E^{-1} a^*}{(a^*)^T E^{-1} a^*}$$

其中, $a^* = \{a_1/\sigma_1, a_2/\sigma_2, \dots, a_N/\sigma_N\}^T$, $w_{(E)}^* = \{w_{(E)1}\sigma_1, w_{(E)2}\sigma_2, \dots, w_{(E)N}\sigma_N\}^T$ 。对 Markowitz 投资组合风险的预测值为

$$R_{pr}^2 = (w_{(E)}^*)^T E w_{(E)}^* = \frac{G}{(a^*)^T E^{-1} a^*} (E^{-1} a^*)^T E \frac{G}{(a^*)^T E^{-1} a^*} E^{-1} a^* = \frac{G^2}{(a^*)^T E^{-1} a^*} \quad (2-10)$$

该 Markowitz 投资组合在投资期中的真正风险为

$$R_{tr}^2 = (w_{(E)}^*)^T C w_{(E)}^* = G^2 \frac{(a^*)^T E^{-1} C E^{-1} a^*}{[(a^*)^T E^{-1} a^*]^2} \quad (2-11)$$

设投资期中的有效投资组合的风险为 R_{re}^2 。前面内容中计算了预测期收益率相关矩阵无噪声时的投资期中的有效投资组合的风险。无论预测期收益率相关矩阵有无噪声，投资期中的有效投资组合及其风险都不改变，因此，当预测期收益率相关矩阵有噪声时，投资期中的有效投资组合权重仍然是 $w_{(c)}^*$ ，该组合的风险为

$$R_{re}^2 = (w_{(c)}^*)^T C w_{(c)}^* = \frac{G^2}{(a^*)^T C^{-1} a^*} \quad (2-12)$$

当预测期收益率相关矩阵含有噪声时，Markowitz 投资组合权重为 $w_{(E)}^*$ ，投资期中的有效投资组合权重却为 $w_{(c)}^*$ 。Markowitz 投资组合与投资期中的有效投资组合的偏离使得 Markowitz 投资组合的风险必然高于投资期中的最低风险 R_{re}^2 ，即

$$R_{tr}^2 > R_{re}^2 \quad (2-13)$$

根据前面的分析，当预测期收益率相关矩阵没有噪声时，Markowitz 投资组合在投资期中的风险等于 R_{re}^2 ，这说明收益率相关矩阵的噪声使 Markowitz 投资组合与投资期中的有效投资组合产生偏离，进而使 Markowitz 投资组合的风险增大。接下来分析预测期收益率相关矩阵的噪声对 Markowitz 投资组合风险预测准确性的影响。可以证明， E 的均值是 C 。那么，根据正定矩阵逆矩阵的凹凸法则，可以得出

$$\langle (a^*)^T E^{-1} a^* \rangle \geq (a^*)^T C^{-1} a^* \quad (2-14)$$

其中 $\langle \dots \rangle$ 表示均值。然后，根据式(2-10)、式(2-12)和式(2-14)，能够得出

$$R_{pr}^2 \leq R_{re}^2 \quad (2-15)$$

最后，由式(2-13)和式(2-15)得出

$$R_{pr}^2 < R_{tr}^2 \quad (2-16)$$

式(2-16)表明预测期收益率相关矩阵的噪声造成对 Markowitz 投资组合风险的低估，使 Markowitz 投资组合风险预测的准确性下降。通过上面分析，可以看出预测期收益率相关矩阵的噪声不仅使 Markowitz 投资组合风险增大，而且对 Markowitz 投资组合风险预测的准确性产生负向作用，这些说明预测期收益率相关矩阵的噪声降低了 Markowitz 投资组合风险的优化水平。

上面分析了预测期收益率相关矩阵的噪声对 Markowitz 投资组合风险优化水平的影响。接下来，对决定噪声影响大小的因素进行研究。根据 Potters 等^[29]的研究，当 C 为单位矩阵时， R_{pr}^2 、 R_{re}^2 和 R_{tr}^2 满足如下关系

$$\frac{R_{tr}^2}{R_{re}^2} = \frac{1}{\sqrt{1-q}} \quad (2-17)$$

$$\frac{R_{pr}^2}{R_{tr}^2} = 1 - q \quad (2-18)$$

式(2-17)和式(2-18)中, $q=N/T$ 。式(2-17)中的 R_{tr}^2/R_{re}^2 表示收益率相关矩阵的噪声对 Markowitz 投资组合风险大小的影响。 R_{tr}^2/R_{re}^2 越大, 表示噪声对 Markowitz 投资组合风险大小的影响越大, 噪声引起的 Markowitz 投资组合风险的增加就越多。由式(2-17)知, q 越小, 收益率相关矩阵的噪声对 Markowitz 投资组合风险的影响就越小。当 q 减小至零时, 收益率相关矩阵的噪声对 Markowitz 投资组合风险的影响也下降至零。由式(2-18)知, q 越小, 则 R_{pr}^2/R_{tr}^2 越大, 收益率相关矩阵的噪声对 Markowitz 投资组合风险预测准确性的影响就越小。当 q 减小至零时, 收益率相关矩阵的噪声对 Markowitz 投资组合风险预测准确性的影响也下降至零。相反, 当 q 增加至 1 时, R_{pr}^2 为 0, 此时 Markowitz 投资组合风险预测的准确性为 0, Markowitz 投资组合的构建将失去意义。根据上面的分析, 收益率相关矩阵的噪声对 Markowitz 投资组合风险优化水平的影响取决于 q 。 q 的减小减弱了“维数灾祸”的影响, 这使得收益率相关矩阵的噪声减小, 因此, 噪声对 Markowitz 投资组合风险优化水平的影响也随之下降。当 q 减小至零时, 收益率相关矩阵的噪声消失, 收益率相关矩阵的噪声对 Markowitz 投资组合风险优化水平的影响也下降至零。

2.2.2 股票收益率多元波动率噪声的影响分析

2.2.2.1 toy 模型的构建

通过影响波动率预测的准确性, 收益波动率噪声能对未来组合选择和组合风险预测的准确性造成不利影响。本文通过建立 toy 模型来分析收益波动率噪声对组合风险优化的影响。toy 模型法是物理学中常用的研究方法, 它是通过建立对研究对象进行简化的模型来对真实世界中的复杂现象进行研究的一种方法^[100-102]。接下来, 对 toy 模型的建立和应用进行具体介绍。首先, 我们做出以下三个假定。

1) 有相邻的两个时期, 第一期和第二期。在第一期末, 利用第一期有关信息对第二期的最优投资组合进行预测。这样, 第一期和第二期又可分别被称为预测期和投资期。

2) 预测期和投资期的真正收益协方差矩阵相同。由于预测期和投资期在时间上邻近, 因此该假设十分合理。假设两期的真正收益协方差矩阵都为 $\mathbf{v}^{(0)}$ 。

3) 不考虑投资组合收益而构建最小方差组合。由于本文仅考察投资组合风险的优化, 因此为避免该分析受到预期收益不确定性的干扰, 对最优投资组合的求解不施加额外的收益约束。最小方差组合是在组合资产权重和为 1 即

$\sum_{i=1}^N w_i = 1$ 的约束下，使下面组合风险最小的组合权重

$$\sum_{i,j=1}^N w_i w_j v_{ij}$$

其中， N 是资产数， $\{v_{ij}\}_{i,j=1}^N$ 是收益协方差矩阵。最小方差组合 $\{\hat{w}_i\}_{i=1}^N$ 为

$$\hat{w}_i = \frac{\sum_{j=1}^N v_{ij}^{-1}}{\sum_{j,k=1}^N v_{jk}^{-1}} \quad \forall i$$

toy模型的原理如下。由所设定的真正收益协方差矩阵 $v^{(0)}$ 产生人工时间序列，并从这些时间序列中截取相等的两个子序列。设任一个子序列所在的时期为预测期，由预测期时间序列计算的收益协方差矩阵为 $v^{(1)}$ 。另一子序列所在的时期为投资期，由投资期时间序列计算的收益协方差矩阵为 $v^{(2)}$ 。可看出， $v^{(1)}$ 和 $v^{(2)}$ 都是有噪声的，它们对应的真正收益协方差矩阵都是 $v^{(0)}$ 。 $v^{(1)}$ 用于对投资期的最小方差组合和该组合的风险进行预测， $v^{(2)}$ 则主要用于计算该组合的已实现风险。在toy模型中，由于真正收益协方差矩阵已知，因此，预测出的最小方差组合和真正最小方差组合的真正风险都是确切可知的。而且，对于所建立的toy模型而言，协方差矩阵噪声的唯一来源是时间序列数据的有限性。所以，和实证分析相比，toy模型法对实现本节的研究目的，即精确分析时间序列数据有限导致的协方差噪声对投资组合风险优化水平的影响非常具有优势。

该toy模型中，根据 $v^{(0)}$ 产生人工时间序列的方法如下^[50]。

$$r_{it} = \sum_{j=1}^N L_{ij} x_{jt}$$

其中， N 是资产数， x_{jt} ($j=1, 2, \dots, N$ $t=1, 2, \dots, \infty$) 是均值为0、方差为1的独立、正态分布的随机变量， L_{ij} 来自于对 $v^{(0)}$ 进行楚列斯基分解所得的下三角矩阵 L ，它满足 $LL^T = v^{(0)}$ 。 r_{it} ($i=1, 2, \dots, N$ $t=1, 2, \dots, \infty$) 即为所得人工时间序列，可以证明，它们的均值是0，协方差矩阵为 $v^{(0)}$ 。设预测期时间序列长度是 T ，则 $v^{(1)} = \{v_{ij}^{(1)}\}_{i,j=1}^N$ 的计算方法为

$$v_{ij}^{(1)} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{it} r_{jt}$$

$T \rightarrow \infty$ 时， $v^{(1)}$ 趋近于 $v^{(0)}$ ， $v^{(1)}$ 的噪声趋于0。 $v^{(2)}$ 的计算方法和 $v^{(1)}$ 类似。对 $v^{(0)}$ 进行设定时，我们让 $v^{(0)}$ 有两个不同的取值，这样，所建立的toy模型也有两个，称为模型I和模型II。模型I中的 $v^{(0)}$ 采用形式简单的单位矩阵。根据实际观测数据计算的金融协方差矩阵的最大特征值一般明显大于其他特征值，它对应的特征向量的各成分的符号往往相同，绝对值也很接近，该特征向量代表一种涵盖全市场的影响。为符合实证协方差矩阵的上述特点，让模型II中的最

大特征值是次大特征值的 25 倍，且最大特征值对应的特征向量的各成分相等。分析收益协方差矩阵噪声对组合优化的影响时，需要计算如下各量：

1) 真正最小方差组合的风险，即 $\sum_{i,j=1}^N w_i^{(0)} v_{ij}^{(0)} w_j^{(0)}$ ，其中 $w_i^{(0)}$ 代表真正最小方差组合的权重。

2) 预测出的组合的真正风险，即 $\sum_{i,j=1}^N w_i^{(1)} v_{ij}^{(0)} w_j^{(1)}$ ，其中 $w_i^{(1)}$ 代表根据 $v^{(1)}$ 预测出的最小方差组合的权重。

3) 组合风险预测值，即 $\sum_{i,j=1}^N w_i^{(1)} v_{ij}^{(1)} w_j^{(1)}$ 。

4) 预测出的组合的已实现风险，即 $\sum_{i,j=1}^N w_i^{(1)} v_{ij}^{(2)} w_j^{(1)}$ 。

为便于上述各风险值间的比较，我们计算了后三种风险与第一种风险之比的平方根，并分别用 z_0 、 z_1 和 z_2 表示它们。

2.2.2.2 结果和分析

N、T 的不同取值下的组合风险结果如表 2-1 所示。对 N、T 的每一对既定取值，都进行 10 次试验，每次试验中截取的预测期时间序列和投资期时间序列是不同的。这样，每次试验都会产生一组新的 z_0 、 z_1 、 z_2 和 z_1/z_0 。因此表 2-1 中，N、T 的某一取值下 z_0 、 z_1 、 z_2 和 z_1/z_0 的结果是 10 次试验中的均值。

表 2-1 z_0 、 z_1 、 z_2 和 z_1/z_0 的实验结果

Table 2-1 Experimental results of z_0, z_1, z_2 and z_1/z_0

模型	N	T	N/T	z_0	z_1	z_2	z_1/z_0
I	100	800	1/8	1.07(0.02)	0.93(0.05)	1.07(0.03)	0.87(0.02)
I	150	1200	1/8	1.07(0.01)	0.92(0.01)	1.08(0.01)	0.86(0.01)
I	100	400	1/4	1.15(0.03)	0.86(0.04)	1.16(0.03)	0.75(0.02)
I	200	800	1/4	1.14(0.02)	0.87(0.02)	1.14(0.02)	0.76(0.01)
I	150	300	1/2	1.41(0.04)	0.71(0.03)	1.42(0.05)	0.50(0.03)
I	200	400	1/2	1.41(0.03)	0.71(0.03)	1.42(0.04)	0.50(0.02)
II	100	800	1/8	1.07(0.02)	0.93(0.01)	1.08(0.01)	0.87(0.01)
II	200	800	1/4	1.15(0.03)	0.86(0.02)	1.16(0.02)	0.75(0.01)
II	150	300	1/2	1.42(0.05)	0.70(0.03)	1.42(0.06)	0.49(0.02)

注：括号内数字为标准差

从表 2-1 的组合风险结果可以看出, z_0 大于 1, z_1 小于 1, 即它们都不等于 1, 这是由预测期收益协方差矩阵的噪声导致的。 z_0 大于 1 说明构建的组合与投资期真正最小方差组合出现偏差。由于真正最小方差组合的风险最低, 所以上述偏差的存在使构建的组合在投资期的真正风险必然比真正最小方差组合的风险更大。 z_0 大于 1, z_1 小于 1 则使得 z_0 不等于 z_1 , 说明对构建的组合的风险预测并不准确。为了进一步衡量组合风险预测的准确性, 我们还计算了 z_1/z_0 。上述表明, 收益协方差矩阵噪声使最优组合的选择出现偏差, 并使组合风险预测的准确性下降, 即噪声使组合风险优化水平下降。 z_0 越大、 z_1/z_0 越小说明组合风险优化水平越低, 噪声对组合风险优化水平的影响越大。

从模型 I 和模型 II 的组合风险结果可看出, N/T 增大时, z_0 增大, z_1/z_0 减小, 说明收益波动率噪声对组合风险的影响取决于 N/T , 而和 N 、 T 的大小无关。 N/T 越大, 噪声对组合风险的影响就越高。还可观察到, 对于某个既定的 N/T , 模型 I 和模型 II 的组合风险优化水平相同, 说明组合风险受到的噪声影响对 N/T 的依赖关系不受真正收益协方差矩阵的影响。当真正协方差矩阵变化时, 对于既定的 N/T , 噪声对组合风险优化水平的影响相同。

Pafka 等^[77]对真正收益协方差矩阵是单位矩阵时噪声影响下的组合优化水平进行了数学推导, 从而精确地描述了收益波动率噪声对组合风险优化水平的影响与 N/T 的关系。由于组合方差的旋转不变性, 因此可以利用收益协方差矩阵的主轴系统对其进行计算。据此, Pafka 等得出

$$z_0 = \frac{\sqrt{\int \rho(\lambda) / \lambda^2 d\lambda}}{\int \rho(\lambda) / \lambda d\lambda} \quad (2-19)$$

其中, $\rho(\lambda)$ 是由长度 T 的时间序列计算的含噪协方差矩阵的特征值概率密度函数。在 $N, T \rightarrow \infty$ 且 $q = N/T$ 不变情况下, $\rho(\lambda)$ 为

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{2\pi q} \frac{\sqrt{(\lambda_+ - \lambda)(\lambda - \lambda_-)}}{\lambda}$$

其中,

$$\lambda_{\pm} = (1 \pm \sqrt{q})^2$$

式(2-19)的积分结果为

$$z_0 = 1/\sqrt{1-q} \quad (2-20)$$

用类似的方法, 可以得到

$$z_1 = \sqrt{1-q} \quad (2-21)$$

于是,

$$z_1/z_0=1-q \quad (2-22)$$

从式(2-20)、(2-21)和(2-22)可以看出, 收益协方差矩阵噪声对组合风险的影响与 q 成正比变化, 这与本文的实验结果是一致的。

表 2-1 中 z_2 总是大于 z_0 , 但和 z_0 相当接近。这说明当真正收益协方差矩阵未知时, 可以用组合已实现风险近似地代替真正风险。该结论对 Laloux 等学者^[28-31]在实证研究中因投资期真正收益协方差矩阵未知而采用组合已实现风险的做法提供了支持。在本文后面章节的实证研究中也采取了用组合已实现风险代替真正风险的做法。

在上面建立的 toy 模型中, 收益协方差矩阵的计算采用人工时间序列, 使得收益协方差矩阵噪声的唯一来源是数据数量的有限。和人工时间序列不同的是, 除数据量有限引致的噪声外, 由真实收益数据计算的协方差矩阵还包含非静止性、市场条件改变等带来的噪声, 因此实证研究中的组合风险结果一般会比本节的结果更差。

2.3 Markowitz 投资组合风险的去噪方法

根据金融相关矩阵和协方差矩阵噪声对 Markowitz 投资组合风险优化水平的影响分析, 金融相关矩阵和协方差矩阵噪声会造成 Markowitz 投资组合风险优化水平的下降, 且该影响的大小是由金融资产数量与金融时间序列长度之比决定的。金融资产数量与金融时间序列长度之比越大, 金融相关矩阵和协方差矩阵噪声对 Markowitz 投资组合风险优化水平的影响就越大。可以通过 Dimov 等^[103-106]的研究对该现象的产生原因进行解释。Dimov 等的研究表明, 金融相关矩阵和协方差矩阵的噪声与金融资产数量和金融时间序列长度之比呈正比变化。可见, 噪声的影响对金融资产数量与金融时间序列长度之比的依赖实质上说明了噪声影响的大小是由噪声的大小决定的。噪声越大, 则噪声对 Markowitz 投资组合风险优化水平的影响就越大。因此, 为减小噪声对 Markowitz 投资组合风险优化水平的影响, 可以采用对金融相关矩阵和协方差矩阵去噪的方法。

2.3.1 常用去噪算法简介

在对金融相关矩阵和协方差矩阵进行估计时, 产生较早、应用最多的去噪方法主要是因子模型法和收缩估计法^[107-108]。由于这两种方法对金融相关矩阵和协方差矩阵去噪的原理基本相同, 因此, 下面以对金融协方差矩阵的估计为例, 对这两种去噪法分别进行介绍。

2.3.1.1 因子模型法

设市场有 N 种证券，则因子模型的形式如下，

$$R_i = \alpha_i + \beta_{i1}F_1 + \cdots + \beta_{ik}F_k + \varepsilon_i \quad i=1,2,\cdots,N \quad (2-23)$$

其中， R_i 表示第 i 种证券的超额收益率， α_i 是常数， β_{ij} 表示第 i 种证券对第 j 个公共因子的暴露度， F_k 表示第 k 个公共因子的收益率， ε_i 表示第 i 种证券的特殊收益率。上述各量中， R_i 、 ε_i 、 F_1 、 F_2 、 \cdots 、 F_k 是随机变量。

该模型的假设条件如下：1、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N$ 是相互独立的。这说明不同证券收益率间的协方差仅由公共因子决定。2、 $E(\varepsilon_i) = 0$ 。3、 ε_i 与公共因子是相互独立的。

设 $\tilde{F} = (1, F_1, \cdots, F_k)^T$ ， $R = (R_1, \cdots, R_N)^T$ ， $\varepsilon = (\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_N)^T$ 和

$$\tilde{X} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_{11} & \cdots & \beta_{1k} \\ \alpha_2 & \beta_{21} & \cdots & \beta_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_N & \beta_{N1} & \cdots & \beta_{Nk} \end{pmatrix}$$

则方程(2-23)的矩阵表示形式为

$$R = \tilde{X} \cdot \tilde{F} + \varepsilon \quad (2-24)$$

根据式(2-24)，证券收益率间的协方差矩阵为

$$V = \text{Cov}(R) = \text{Cov}(\tilde{X} \cdot \tilde{F} + \varepsilon) = X \cdot \text{Cov}(F) \cdot X^T + \text{Cov}(\varepsilon) = X \cdot \Phi \cdot X^T + \Delta \quad (2-25)$$

其中， X 是去掉 \tilde{X} 的第一列后得到的矩阵， $F = (F_1, F_2, \dots, F_k)^T$ ， Φ 是公共因子的协方差矩阵， Δ 是 ε 的协方差矩阵，它是一对角矩阵，等于 $\text{diag}(\sigma_{\varepsilon_1}^2, \cdots, \sigma_{\varepsilon_N}^2)$ 。

方程(2-25)中， X 是 $N \times k$ 因子暴露矩阵， Φ 是 $k \times k$ 因子收益率的协方差矩阵， Δ 是 $N \times N$ 对角矩阵，因此，利用因子模型法估计协方差矩阵时需要估计的参数数量为 $Nk + k(k+1)/2 + N = (N+k/2)(k+1)$ 。而利用样本协方差矩阵法估计证券收益率间协方差矩阵时需要估计的参数数量为 $N(N+1)/2$ 。可以看出，因子模型法需要估计的参数数量一般都少于样本协方差矩阵法。因此，和样本协方差矩阵法相比，因子模型法能弱化“维数灾祸”对证券收益率协方差矩阵估计的影响，从而减小协方差矩阵的估计噪声。

2.3.1.2 收缩估计法

金融协方差矩阵估计法一般都同时包含两种不同形式的误差，即设定误差和估计误差。当对几个不同的协方差矩阵估计量进行加权求和时，所得的协方差矩阵估计法的设定误差和估计误差是对几个协方差矩阵估计量的设定误差和估计误差进行平衡的结果。当各协方差矩阵估计量的权重变化时，加权所得的

误差也会改变。在对几个协方差矩阵估计量的设定误差和估计误差进行平衡的过程中，存在使加权所得的误差达到最低的权重。协方差矩阵估计的收缩法是根据上述误差平衡的思想提出的。该方法往往是通过设定误差较大，估计误差较小的协方差矩阵估计法和设定误差较小，估计误差较大的协方差矩阵估计法进行加权求和得到的。由于被加权求和的协方差矩阵估计量的误差存在互补特点，因此，通过对它们的误差的平衡引起的误差降低效果会非常明显。Olivier^[109]在 2003 年提出的协方差矩阵收缩估计法是一种代表性较强的收缩估计法。下面，以它为例，对协方差矩阵收缩估计法进行介绍。

Olivier 提出的协方差矩阵收缩估计法是通过样本协方差矩阵和单一指数协方差进行加权求和得到的，因此，在介绍收缩估计法前，有必要先对样本协方差矩阵和单一指数协方差进行介绍。设由 N 个随机变量的 T 个观测值组成的 $N \times T$ 矩阵为 X ，则这些随机变量间的样本协方差矩阵为

$$S = \frac{1}{T} X(I - \frac{1}{T} AA')X'$$

其中， A 是成分为 1 的向量， I 是单位矩阵。和样本协方差矩阵相比，单一指数协方差矩阵估计法的原理更加复杂。单一指数模型假定证券的收益是由下列过程产生的

$$x_{it} = \alpha_i + \beta_i x_{ot} + \varepsilon_{it} \quad (2-26)$$

其中， x_{ot} 是市场收益， ε_{it} 是收益残差， ε_{it} 与 x_{ot} 不相关，且残差间也是不相关的。模型还假定 ε_{it} 的方差是常数，即 $Var(\varepsilon_{it}) = \delta_{ii}$ 。根据式(2-26)所示的证券收益的产生过程，证券收益间的协方差矩阵为

$$\Phi = \sigma_{00}^2 \beta \beta' + \Delta \quad (2-27)$$

其中， σ_{00}^2 是市场收益的方差， Δ 是以 δ_{ii} 为成分的对角矩阵。通过第 i ($i=1, 2, \dots, N$) 个证券的收益对市场收益的回归，可以对式(2-27)进行估计。由此估计出的协方差矩阵为

$$F = s_{00}^2 b b' + D$$

其中， s_{00}^2 是市场收益的样本方差， b 是对 β 进行估计所得向量， D 是对残差方差进行估计得到的对角矩阵。在得到样本协方差矩阵和单一指数协方差矩阵后，需要对最佳收缩强度进行估计，这是利用收缩估计法估计收益协方差矩阵的最后步骤。设收缩强度是 α 。当考虑收缩估计法所得矩阵和真正协方差矩阵差的 Frobenius 范数时，可以得到如下的二次损失函数

$$L(\alpha) = \|\alpha F + (1 - \alpha) S - V\|^2$$

其中， V 是真正的协方差矩阵， $\alpha F + (1 - \alpha) S$ 是对 V 的收缩估计量。以

上述的损失函数为基础，得到的风险函数为

$$R(\alpha) = E(L(\alpha)) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N E(\alpha f_{ij} + (1-\alpha)s_{ij} - \sigma_{ij})^2 =$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \alpha^2 Var(f_{ij}) + (1-\alpha)^2 Var(s_{ij}) + 2\alpha(1-\alpha)Cov(f_{ij}, s_{ij}) + \alpha^2 (\phi_{ij} - \sigma_{ij})^2$$

设使 $R(\alpha)$ 取得最小值的 α 为 α^* ，则 α^* 即为最佳收缩强度。通过 $R'(\alpha) = 0$ ，可以求得

$$\alpha^* = \frac{1}{T} \frac{\pi - \rho}{\gamma} + \alpha \left(\frac{1}{T^2} \right)$$

其中， π 、 ρ 和 γ 分别为

$$\pi = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \pi_{ij} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N AsyVar[\sqrt{T}s_{ij}]$$

$$\rho = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \rho_{ij} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N AsyCov[\sqrt{T}f_{ij}, \sqrt{T}s_{ij}]$$

$$\gamma = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \gamma_{ij} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N (\phi_{ij} - \sigma_{ij})^2$$

对 π_{ij} 的一致估计量是

$$p_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T [(x_{it} - m_i)(x_{jt} - m_j) - s_{ij}]^2$$

其中， m_i 是第 i 个证券收益的均值。

当 $i=j$ 时，对 p_{ij} 的一致估计量为 $r_{ij} = p_{ij}$ 。当 $i \neq j$ 时，对 p_{ij} 的一致估计量为

$$r_{ij} = 1/T \sum_{t=1}^T r_{ijt}$$

其中，

$$r_{ijt} = \frac{s_{j0}s_{00}(x_{it} - m_i) + s_{i0}s_{00}(x_{jt} - m_j) - s_{i0}s_{j0}(x_{0t} - m_0)}{s_{00}^2} (x_{0t} - m_0)(x_{it} - m_i) \times$$

$$(x_{jt} - m_j) - f_{ij}s_{ij}$$

对 γ_{ij} 的一致估计量为

$$c_{ij} = (f_{ij} - s_{ij})^2$$

找到对 π 、 ρ 和 γ 的一致估计量后，就找到了对 α^* 的一致估计量。对 α^* 的一致估计量为

$$k = \frac{p-r}{cT}$$

于是，由收缩估计法得到的证券收益协方差矩阵的估计量为

$$\hat{V} = kF + (1-k)S$$

2.3.2 RMT 去噪法及优点

2.3.2.1 RMT 去噪法

RMT去噪法主要有三种，即LCPB法、PG+法和KR法。这三种方法对金融协方差矩阵和相关矩阵的去噪原理相同，都是依据矩阵的特征分解来进行的。假定 S 是一个含有噪声的金融相关矩阵或协方差矩阵，以 S 的特征值作为主对角线元素的对角矩阵记为 D ，以特征值对应的特征向量作为相应的列形成的矩阵是 E ，则 $S=EDE^{-1}$ 。 S 的噪声能够在它的特征值中反映出来。 S 的一部分特征值能够反映真实的相关信息，但是，由于用于计算 S 的时间序列长度往往是有限（非无穷）的，因此， S 会受到随机因素的干扰而产生一些无法反映真实相关信息的噪声特征值。由于 S 的噪声特征值具有随机性特征，因此，可以依据相应随机矩阵的特征值分布来确定金融相关矩阵或协方差矩阵噪声特征值的范围。

假定 S 对应的随机矩阵的特征值分布于 $[\lambda_-, \lambda_+]$ 内，则 S 的全部特征值中属于 $[\lambda_-, \lambda_+]$ 的部分代表噪声。然而，由于小于 λ_- 的特征值对应的特征向量并不稳定，因此，在应用RMT去噪法时，通常将小于 λ_+ 的特征值都当做噪声特征值，而对它们进行替换。由于大于 λ_+ 的特征值并不是由噪声产生的，因此让它们保持不变。设对 D 中的元素进行部分保持和部分替换后形成的矩阵为 D_{filtered} ，则去噪后的相关矩阵或协方差矩阵为

$$S_{\text{filtered}}=ED_{\text{filtered}}E^{-1}$$

2.3.2.2 RMT 去噪法的优点

和前述的常用去噪法相比，RMT 去噪法有如下三个优点。

(1)能决定模型的最佳维度 RMT 去噪法和因子模型法的原理相似，它们都是利用少于证券数的特征值和公共因子来反映证券收益率间的相关或协方差。二者的不同之处在于，RMT 去噪法能通过随机矩阵的特征值分布区间对保留的特征值数进行确定，而因子模型法没有什么准则能在使用何种因子、因子的数量进行事先的确定，因此，因子模型法在降维时无法对模型的最佳维度进行确定。由于收缩估计法的收缩目标常常是因子模型，所以，当因子模型的因子及其数量选择不当时，收缩估计法的表现也会因此受到不利的影响。

(2)操作的技术难度低 因子模型法需要首先选择因子和获得因子收益率的样本，这需要较强的理论基础和较大的计算量。在此基础上，因子模型法需要对因子收益率的方差、特殊收益率的方差和因子暴露系数进行估计。和因子模型法相比，收缩估计法的模型结构更加复杂，需要估计的参数数量更多，因此更需要有较强的数理统计理论的支撑。虽然 RMT 去噪法的建立中也应用了数学方法，但 RMT 去噪法并不属于数理统计方法，也不涉及经济计量模型的建立，因此不需要进行参数的估计。

(3)更广泛的适用性 因子模型法和收缩估计法的假设条件很多，现实经济情况一般难以完全符合这些假设条件。当现实情况和这些假设条件相差较大时，如果还使用这两种方法构建金融协方差矩阵，则会造成较大的误差。因子模型法假定证券收益率主要由几个公共因子的收益率决定。以此为基础，因子模型法的应用还需要有一些其他的假定条件。收缩估计法的模型结构更复杂，参数更多，因此假设条件也更多。比如，2.3.1.2 节介绍的收缩估计法的假设条件包括：证券收益率独立且是同分布的；证券数量是不变和有限的，而每个证券的收益率观察值的数量趋于无穷；证券收益率有有限的四阶矩；市场收益率的方差为正值等。除了太多的假设条件外，过小的样本容量和收缩估计法自身的缺陷都会限制收缩估计法的应用。绝大部分的收缩估计法的损失函数都包含协方差矩阵的逆矩阵，因此，在 N 大于 T 时，收缩估计法一般都会失效。收缩估计法自身的缺陷有时也会造成该方法无法应用。比如，收缩估计法并没有将证券收益正相关作为假设条件之一，因此，当样本数据的正相关不明显时，容易得出负的相关。显然，这种结果是没有意义的。另外，除上述各种原因外，还有一些原因会制约收缩估计法的应用。比如，如果样本协方差矩阵的估计误差和收缩目标的估计误差有较大的正相关，则就不适于使用收缩估计法。RMT去噪法的应用也需要具备一定的假定条件，即金融数据是独立同分布(IID)的。Ledoit和Wolf^[21]的研究表明，可以近似地认为现实金融数据是满足该假定的。可见，RMT去噪法应用时的局限性非常小。

由于 RMT 去噪法具有如上优点，本文从前述三个对组合风险噪声的解决方法中选取 RMT 去噪法作为最佳的方案。不难想象，RMT 去噪法在金融收益相关和协方差矩阵去噪及组合风险优化领域的应用潜力非常巨大。然而，作为一种较新的方法，对 RMT 去噪法及其在组合风险优化中的应用的研究目前还处于较为初级的阶段。该研究不仅存在一些亟待解决的问题，而且研究领域也有待于进一步拓宽。基于上述考虑，将利用 RMT 去噪法实现股票投资组合风险的优化作为本文的研究对象。

2.4 本章小结

在介绍 Markowitz 均值-方差模型的基础上，对论文的研究对象即 Markowitz 投资组合风险进行了定义。用投资组合风险大小和对投资组合风险预测的准确率衡量投资组合风险的优劣，从而提出了投资组合风险优化水平的概念，并给出了投资组合风险优化的含义。论文指出了对 Markowitz 投资组合风险优化水平产生影响的噪声问题，说明了噪声的来源，即股票收益历史协方

差矩阵和历史相关矩阵。

论文运用一般数理分析方法推导出了股票收益相关矩阵噪声对 Markowitz 投资组合风险优化水平的作用公式，采用 toy 模型模拟法对股票收益协方差矩阵噪声影响 Markowitz 投资组合风险优化水平的作用进行了理论分析，得出收益相关矩阵和协方差矩阵噪声对组合风险优化水平的影响取决于股票数量与股票收益序列长度之比。再结合前人的研究成果，进一步得出噪声影响的大小从根本上说取决于噪声的大小，因此，为减小上述两种噪声的影响和提高 Markowitz 投资组合风险优化水平，可以采取对历史相关矩阵和协方差矩阵去噪的方法。

通过和其他去噪法的比较，论文得出 RMT 去噪法是一种颇具优势、具有较大应用潜力和有待于更多研究的去噪方法。鉴于此原因，将如何通过 RMT 在股票收益相关矩阵和协方差矩阵去噪中的应用来提高 Markowitz 投资组合风险优化水平确定为论文的主要研究内容。

第3章 基于收益相关矩阵的 RMT 去噪法股票投资组合风险优化

相关矩阵的计算方法包括相等加权法和指数加权法两种，由这两种方法计算的相关矩阵都应用得比较多。为了利用 RMT 对这两种相关矩阵进行去噪，首先必须识别出相关矩阵中的噪声。这是所有 RMT 去噪法的共同步骤，先对其进行介绍。

3.1 股票收益相关矩阵及噪声识别原理

3.1.1 相等加权相关矩阵及噪声识别原理

假定有 N 只股票，第 i 只股票在第 t 期末的价格是 P_{it} ($i=1, 2, \dots, N, t=1, 2, \dots, T$)，则第 i 只股票在第 t 期的收益为

$$G_{it} = \ln p_{it} - \ln p_{i,t-1} \quad (3-1)$$

在相等加权法下，第 i 只股票收益的方差为

$$\sigma_{ii}^2 = \langle G_{it}^2 \rangle - \langle G_{it} \rangle^2 \quad (3-2)$$

其中 $\langle \dots \rangle$ 表示 T 期的均值。在相等加权法下，第 i 只和第 j 只股票收益的相关系数是

$$\rho_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left(\frac{G_{it} - \langle G_{it} \rangle}{\sigma_{ii}} \right) \left(\frac{G_{jt} - \langle G_{jt} \rangle}{\sigma_{jj}} \right) \quad (3-3)$$

设通过上述方法得到的 N 只股票收益的相关矩阵是 C 。 C 的噪声能够在它的特征值中反映出来。 C 的一部分特征值能够反映真实的相关信息，但是，由于时间序列长度 T 是有限（非无穷）的，因此， C 会受到随机因素的干扰而产生一些无法反映真实相关信息的噪声特征值。由于金融收益相关矩阵的噪声特征值具有随机性特征，因此，可以依据相应随机矩阵的特征值分布来确定金融相关矩阵噪声特征值的范围。接下来，对金融相关矩阵噪声特征值的识别原理进行说明。

假定有 N 个随机变量，它们的相关矩阵是单位矩阵，即这 N 个随机变量是完全不相关的。并且，它们的均值和方差与用于计算 C 的 N 个收益序列的均值和方差是一一对应的，即在 N 个收益序列中，与 N 个随机变量中的任一个随机变量的均值和方差相等的收益序列有且仅有一个。当从这 N 个随机变量产生的序列中截取长度为 T 的子序列并计算这些子序列的相关矩阵时，由于所

得相关矩阵会因被截取的子序列的不同而变化，因此它是一个随机相关矩阵。为了计算该随机相关矩阵，只需将被截取的子序列标准化，即变成均值是 0、方差是 1 的序列，然后求它们的协方差矩阵。于是得到该随机相关矩阵为

$$R = \frac{1}{T} AA^T \quad (3-4)$$

式(3-4)中 R 是随机相关矩阵， A 是一个 $N \times T$ 矩阵， A 中的元素是均值为 0、方差为 1 的独立、相同分布的随机变量。由上述内容知， N 个随机变量间真正相关系数为 0，而 R 中相关系数一般不为 0，这说明 R 错误地反映了相关信息。由于用来计算 R 的时间序列的长度是有限的，因此， R 的计算会受到随机因素的影响，使得 R 偏离于真正的相关矩阵。这样， R 的特征值也就无法反映变量间真实的相关信息。由前面内容可以看出，金融收益相关矩阵 C 和随机相关矩阵 R 是完全对应的，即 C 和 R 是由数量、长度、均值和方差都相等的两组序列计算的。由于随机因素对相关矩阵产生影响的原因是序列长度的有限性，因此，当金融收益相关矩阵和随机相关矩阵存在对应关系时，它们受到的随机因素的影响就会是相同的。又由于金融收益相关矩阵的噪声特征值和随机相关矩阵的特征值都是由随机因素的影响形成的，因此，当金融相关矩阵和随机相关矩阵存在对应关系时，金融相关矩阵的噪声特征值和随机相关矩阵的特征值就会是相同的。于是，可以依据相应随机矩阵的特征值分布来确定金融相关矩阵噪声特征值的范围。在 $N, T \rightarrow \infty$ 且 $Q=T/N$ 不变情况下， R 的特征值的概率密度函数为^[110]

$$p(\lambda) = \begin{cases} \frac{Q}{2\pi} \frac{\sqrt{(\lambda_+ - \lambda)(\lambda - \lambda_-)}}{\lambda} & \lambda_- \leq \lambda \leq \lambda_+ \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (3-5)$$

式(3-5)中， λ_{\pm} 是 R 特征值分布区间的上下限，

$$\lambda_{\pm} = 1 + 1/Q \pm 2\sqrt{1/Q} \quad (3-6)$$

上述分析表明， C 的全部特征值中属于 $[\lambda_-, \lambda_+]$ 的部分代表噪声。然而，由于小于 λ_- 的特征值对应的特征向量并不稳定，因此，在应用RMT去噪法时，通常将小于 λ_+ 的特征值都当做噪声特征值。

3.1.2 指数加权相关矩阵及噪声识别原理

现在利用指数加权法计算 3.1.1 节中所述的 N 只股票收益的相关矩阵。在指数加权法下，第 i 只股票收益的方差为

$$\sigma_{ii}^2 = \frac{1-\alpha}{1-\alpha^T} \sum_{t=0}^{T-1} \alpha^t (G_{i,T-t} - \langle G_{ii} \rangle)^2$$

其中， α 为衰减因子， $\langle G_{ii} \rangle$ 表示第 i 只股票 T 期收益的均值。

第 i 只和第 j 只股票收益的相关系数为

$$\rho_{ij} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha^T} \sum_{t=0}^{T-1} \alpha^t \frac{(G_{i,T-t} - \langle G_{it} \rangle)}{\sigma_{ii}} \frac{(G_{j,T-t} - \langle G_{jt} \rangle)}{\sigma_{jj}} \quad (3-7)$$

和相等加权相关矩阵类似，可以依据相应随机矩阵的特征值分布来确定指数加权相关矩阵噪声特征值的范围。指数加权收益相关矩阵对应的随机相关矩阵 $R = \{R_{ij}\}_{i,j=1}^N$ 的元素为

$$R_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} (1-\alpha)\alpha^k x_{ik} x_{jk} \quad (3-8)$$

其中， x_{ik} ($i=1, 2, \dots, N, k=0, \dots, \infty$) 是均值为 0、方差为 1 的正态分布的随机变量。从(3-7)式中不难看出，在 $T \rightarrow \infty$ 时指数加权相关矩阵的计算方法同(3-8)式的形式相同。另外，(3-8)式中 x_{ik} 的均值为 0，方差为 1，这与(3-7)式中 $(G_{i,T-t} - \langle G_{it} \rangle) / \sigma_{ii}$ 的均值和方差相同。因此，(3-8)式的随机相关矩阵与指数加权收益相关矩阵相对应，通过该随机相关矩阵的特征值分布可以确定出指数加权收益相关矩阵的噪声特征值范围。

在 $N \rightarrow \infty, \alpha \rightarrow 1$ ，且 $Q=1/[N(1-\alpha)]$ 不变时， R 的特征值概率密度函数为

$$\rho(\lambda) = \frac{Qv}{\pi}$$

其中， v 是函数 $F(v)$ 取值为 0 时的解

$$F(v) = \lambda - \frac{v\lambda}{\tan(v\lambda)} + \ln(v) - \ln(\sin(v\lambda)) - \frac{1}{Q}$$

$F(v)$ 定义在 $(0, \pi/\lambda)$ 内。如果对于 λ 的一个既定取值， $F(v)=0$ 在 $(0, \pi/\lambda)$ 中无解，那么该 λ 值对应的 $\rho(\lambda)$ 为 0。因此，使 $F(v)=0$ 在 $(0, \pi/\lambda)$ 中有解的 λ 值就是 R 的特征值取值范围。Daly 证明了使 $F(v)=0$ 在 $(0, \pi/\lambda)$ 中有解的 λ 值必须满足以下条件，

$$\lambda - \ln \lambda < 1 + \frac{1}{Q} \quad (3-9)$$

式(3-9)决定了 R 的特征值的取值范围 $[\lambda_-, \lambda_+]$ 。上面分析表明，指数加权收益相关矩阵全部特征值中属于 $[\lambda_-, \lambda_+]$ 的部分代表噪声。但是，由于小于 λ_- 的特征值对应的特征向量并不稳定，因此，在对指数加权相关矩阵去噪时，往往将小于 λ_+ 的特征值都视为噪声。Daly 的研究表明 λ_+ 是下述方程的解

$$\lambda - \ln(\lambda) = 1 + \frac{1}{Q} \quad \lambda > 1$$

3.2 面向股票收益相关矩阵的 RMT 去噪法

现有的对金融相关矩阵去噪的 RMT 方法有三个，PG+法、LCPB法和KR法。这三种去噪法的原理都是在保证金融相关矩阵迹不变的前提下，对噪声特征值进行替代。如前所述，相应随机相关矩阵的特征值区间 $[\lambda_-, \lambda_+]$ 是确定金融

相关矩阵噪声特征值的依据。不过小于 λ_- 的特征值由于缺乏稳定性，而往往也被视为噪声特征值。

3.2.1 LCPB 去噪法

LCPB去噪法由Laloux提出。该方法中，噪声特征值由它们的均值替代。假定一个 $N \times N$ 金融相关矩阵 C 的特征值序列是 $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^N$ ， $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N$ ，以它们对应的特征向量作为相应的列形成的矩阵是 E 。 C 的特征值中小于RMT预测的最大特征值 λ_+ 的部分代表噪声，我们将噪声特征值的子序列表示为

$$\Lambda_{\text{noisy}} = \{\lambda_i\}_{i=1}^n$$

然后，滤噪后的特征值序列可以表示为

$$\Lambda_{\text{filtered}} = \{x_1, \dots, x_n, \lambda_{n+1}, \dots, \lambda_N\}$$

其中， $\{\lambda_i\}_{i=n+1}^N$ 被视为包含信息的特征值， $\Lambda_{\text{new}} = \{x_i\}_{i=1}^n$ 是用于替代噪声特征值的新特征值，对于 $i=1, \dots, n$,

$$x_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \lambda_j$$

接下来，将 $\Lambda_{\text{filtered}}$ 作为主对角线元素的对角矩阵记为 D_{filtered} 。在给出相关矩阵去噪结果 C_{filtered} 前，有必要先简单介绍一下关于矩阵对角化条件的谱分解定理。给定矩阵 A ，以 A 的特征值作为对角线元素的对角矩阵是 T ，以特征值对应特征向量作为相应列的矩阵是 U ，那么 A 正规当且仅当 $A = UTU^{-1}$ 。这就是谱分解定理。由于 C_{filtered} 是对称的实系数矩阵，因此它是正规矩阵。那么由谱分解定理，去噪后相关矩阵为

$$C_{\text{filtered}} = ED_{\text{filtered}}E^{-1}$$

3.2.2 PG+去噪法

PG+去噪法是由Plerou提出的。除了用 0 替代噪声特征值外，该方法与LCPB去噪法没有其他不同。在去噪后矩阵 C_{filtered} 建立以后，PG+去噪法会使其主对角线元素恢复至原始矩阵 C 的水平，这样做的目的是保持 C 的迹即特征值的和不变，以防止发生系统畸变。

3.2.3 KR 去噪法

KR 去噪法的理论基础是股票收益相关矩阵特征向量的 Krzanowski 稳定性，所以先对特征向量的 Krzanowski 稳定性进行介绍。

3.2.3.1 特征向量 Krzanowski 稳定性

Krzanowski推导了相关矩阵特征值发生一定波动时的特征向量扰动，并以

该扰动衡量特征向量的稳定性，后人将用此方法衡量的特征向量的稳定性称为特征向量的Krzanowski稳定性^[64 65]。具体地，Krzanowski计算了特征值 λ_i 经过不超过 $\varepsilon(\varepsilon>0)$ 的变化达到 λ_i^p 时其对应特征向量 c_i 和发生最大扰动所得向量 c_i^p 间的夹角 θ_i ，结果为

$$\cos\theta_i = \begin{cases} \left(1 + \frac{\varepsilon}{\lambda_i - \lambda_{i-1}}\right)^{-\frac{1}{2}} & \lambda_i^p < \lambda_i \\ \left(1 + \frac{\varepsilon}{\lambda_{i+1} - \lambda_i}\right)^{-\frac{1}{2}} & \lambda_i < \lambda_i^p \end{cases}$$

其中， $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N$ 。Krzanowski对 ε 的建议是 $\varepsilon = k\lambda_i, k=0.1, 0.05$ 或 0.01 。Krzanowski用 $\cos\theta_i$ 衡量 c_i 的稳定性， $\cos\theta_i$ 越大，表明 θ_i 越小，则 c_i 的稳定性就越大。

3.2.3.2 KR 去噪法原理

Sharifi^[64]认为，投资期中的金融相关矩阵的特征值往往是不稳定的，而特征向量的波动并不大，因此，根据特征值波动时的特征向量稳定性的最大化而建立的金融相关矩阵就会接近于投资期中的金融相关水平，从而使构建的投资组合在投资期表现出较低的风险。以上述研究为理论基础，Sharifi力求通过收益相关矩阵特征向量Krzanowski稳定性的最大化达到去噪目的，提出了基于特征向量Krzanowski稳定性的RMT去噪法，即KR去噪法。由上面 $\cos\theta_i$ 的表达式可观察到一个特征向量的稳定性随其对应特征值与临近特征值差距的增大而提高。因此为最大化去噪后矩阵的Krzanowski稳定性并保持矩阵的迹不变，Sharifi用具有相等和最大间距的正数特征值取代噪声特征值，并使新特征值的和与噪声特征值的和相等。除了用于取代噪声特征值的新特征值外，KR去噪法的原理和LCPB去噪法相同。假定噪声特征值是

$$\Lambda_{noisy} = \{\lambda_i\}_{i=1}^n$$

那么对噪声特征值进行替代的新特征值

$$\Lambda_{new} = \{x_i\}_{i=1}^n$$

由下式给出

$$x_i = x_1 + (i-1)k$$

其中 k 是一常数， $k \geq 0$ 。 x_1 是最小新特征值。新特征值的和与噪声特征值的和相等，因此

$$k = \frac{2(a - x_1)}{n-1}$$

其中， a 是噪声特征值均值。由于新特征值为正，且 $k \geq 0$ ，因此 $0 < x_1 \leq a$ 。为了尽可能地增大相邻特征值的差，Sharifi让最小新特征值 x_1 非常接近于 0 ，取值

为 10^{-8} 。

综上所述，RMT 去噪法种类很少，主要包含 LCPB 法、PG+法和 KR 法。PG+法和 LCPB 法在特征值的确定上缺乏足够的依据，而简单地分别用 0 和噪声特征值均值来代替噪声特征值，从而原理有些粗糙。KR 法由于考虑了特征向量的稳定性而使得模型更为合理，不过其原理和算法也存在一定缺陷。原理上的缺陷的产生原因是 KR 法利用的特征向量的 Krzanowski 稳定性是以相关矩阵特征值减小时的特征向量最大扰动衡量的。该最大扰动稳定性与相邻特征值的差成正比，因此，为了实现最大扰动稳定性的最大化，必须尽可能地使各特征值分散化。于是，去噪后的金融相关矩阵的最小特征值必须总是十分接近于 0。可以想象，这不可能总是和真实的金融相关矩阵相符。所以，基于特征向量最大扰动稳定性的去噪可能会影响去噪结果的精确性，进而不利于投资组合风险的优化。再看看 KR 法的算法缺陷。从前面 KR 法的介绍中不难看出，KR 法将收益相关矩阵的特征值限制在以等差关系作为约束的很小范围内，因此，特征向量稳定性的提高十分有限，难以符合特征向量稳定性最大化的要求。另外，KR 法的特征值的确定缺乏严密的数学推导过程。下一节建立的 KRMIN 法就是为了弥补 KR 法原理和算法的缺陷而提出的。

3.3 基于特征向量最小扰动稳定性的 RMT 去噪法

为了弥补 KR 法原理和算法的缺陷以及促进金融投资组合风险的优化，本文也根据特征向量的 Krzanowski 稳定性来建立相关去噪模型。不过，为了避免使用特征向量最大扰动稳定性时出现的前述问题，本节以特征向量最大扰动稳定性为基础，扩展了金融相关矩阵特征向量稳定性的衡量方法。本节对特征向量最小扰动稳定性进行了数学推导，并将其用于 RMT 去噪法中，从而建立了基于最小扰动 Krzanowski 稳定性的 RMT 去噪法，简称为 KRMIN 去噪法。KRMIN 方法不仅利用最小扰动稳定性弥补了 KR 法原理的缺陷，而且还从以下两方面对 KR 法的算法进行了优化，从而弥补了 KR 法算法的缺陷。

第一，在 KR 法基础上，KRMIN 法扩展了特征值的设定方法。KR 法将特征值序列设定为等差数列，而 KRMIN 法同时考虑等差数列和非等差数列的设定方法。对特征值的设定方法进行扩展的一个原因是它有利于收益相关矩阵特征向量稳定性的提高；另一个原因是等差特征值数列过于特殊，真正收益相关矩阵的特征值往往以非等差形式排列。

KRMIN 方法对特征值设定方法的扩展相当于扩大了特征值的选取范围，因此有利于收益相关矩阵特征向量的稳定性的提高。而且，即使 KRMIN 方法

和 KR 方法的特征值设定方法相同，由于 KR 方法并没有用特征向量的最小扰动衡量特征向量的稳定性，因此，KR 方法无法取得使特征向量的最小扰动稳定性达到最大的特征值，使得由 KR 法得到的矩阵的特征向量的最小扰动稳定性无法高于由 KRMIN 法得到的矩阵的最小扰动稳定性。通过上述分析可以看出，由 KRMIN 方法得到的相关矩阵特征向量的最小扰动稳定性一定大于或等于由 KR 方法得到的最小扰动稳定性。

第二，采用模拟退火算法计算收益相关矩阵的特征值。根据对特征向量稳定性和特征值间关系的观察，KR 法对特征值进行了主观、大致的确定。可见，KR 方法的特征值确定过程缺乏可靠的依据，这必然会影响去噪结果的严密性和准确性。而 KRMIN 方法利用模拟退火算法计算特征值，使得特征值的确定具有了更为严格的依据。

通过上面分析可以看出，当用特征值增加时的特征向量最小扰动衡量特征向量的稳定性时，由 KRMIN 方法得到的相关矩阵特征向量的稳定性一定大于或等于由 KR 方法得到的稳定性。而且，在特征值计算的准确性方面，KRMIN 方法也比 KR 方法更有优势。所以，我们得出，KRMIN 方法将获得比 KR 方法更好的组合风险优化效果。

3.3.1 相关矩阵特征向量最小扰动稳定性的数理推导

根据KRMIN法的原理，在建立KRMIN法前，必须对相关矩阵特征向量的最小扰动稳定性进行推导。KR方法利用的特征向量Krzanowski稳定性是用特征值变化时的特征向量最大扰动衡量的^[65]，所以被称为最大扰动稳定性。分析表明，特征向量的Krzanowski稳定性还包括特征值变化时的特征向量最小扰动这一研究分支，但该分支研究未见报道。下面对最小扰动稳定性的推导可以弥补特征向量的Krzanowski稳定性研究领域的上述空白。

3.3.1.1 最小扰动稳定性的定义和推导的思路

最小扰动稳定性是用相关矩阵特征值增加时的特征向量最小扰动衡量的。特征向量的最小扰动越大，则它的最小扰动稳定性就越小。因此，要对最小扰动稳定性做出定义，必须将最小扰动的度量作为切入点。假定 \bar{c} 是相关矩阵的一个特征向量。 \bar{c} 对应的特征值发生一定变化时， \bar{c} 产生最小的扰动后形成的向量是 c 。设 $r = c - \bar{c}$ 。我们用 $r^T r$ 度量 \bar{c} 的最小扰动的大小，这是度量向量扰动大小的常用方法。本文仅研究标准化的向量，所以， $\bar{c}^T \bar{c} = c^T c = 1$ 。于是得到

$$r^T r = (c - \bar{c})^T (c - \bar{c}) = c^T c + \bar{c}^T \bar{c} - 2\bar{c}^T c = 2(1 - \cos\theta) \quad (3-10)$$

其中， θ 是 c 和 \bar{c} 的夹角。由于 θ 是向量间夹角，所以它的取值范围是

$[0, \pi]$ 。从(3-10)式中能够看出, θ 越大, $r^T r$ 就越大。 $r^T r$ 越大, 表明 \bar{c} 的最小扰动就越大。可见, 除 $r^T r$ 外, θ 也能表示特征向量最小扰动的大小。 θ 越大, 表明特征向量的最小扰动越大, 特征向量的最小扰动稳定性就越低。当 θ 在 $[0, \pi]$ 内取值时, θ 增大时, $\cos\theta$ 会减小。可见, $\cos\theta$ 和特征向量的最小扰动稳定性是同增同减的。因此, 本文就用 $\cos\theta$ 表征特征向量的最小扰动稳定性。设特征向量的最小扰动稳定性为 ST, 那么

$$ST = \cos\theta \quad (3-11)$$

(3-11)式给出了对最小扰动稳定性定义的方法。接下来, 介绍对 ST 推导的思路。根据(3-10)式和(3-11)式, 为了求出 ST, 先要求得 r 。 r 是特征向量通过发生最小的扰动而产生的变化。由于收益序列主成分的方差是收益相关矩阵的特征值, 收益序列主成分的系数向量是收益相关矩阵的特征向量, 因此, 主成分的方差发生变化时, 主成分系数向量通过最小的扰动而产生的变化也等于 r 。这样, 可以利用 Sarbo 等在典型相关分析中所用的反应面思想来求得 r 。

假定 $V(c)$ 是待求极值的函数, c 是维度为 N 的向量。设在 $c = \bar{c}$ 时, $V(c)$ 取得极大值, 则该极大值是 $\bar{V} = V(\bar{c})$ 。使 \bar{V} 至多减小 ε 的 c 的集合可以表示为 $\{c | \bar{V} - V \leq \varepsilon\}$, 该集合的边界是 $\{c | \bar{V} - V = \varepsilon\}$ ^[65]。在 \bar{c} 处, 将 $V(c)$ 展开成泰勒级数, 得到

$$V \approx \bar{V} + \bar{g}^T r + \frac{1}{2} r^T \bar{H} r$$

其中, $r = c - \bar{c}$, \bar{g} 是 $c = \bar{c}$ 时 $V(c)$ 的梯度向量, \bar{g}^T 代表 \bar{g} 的转置, \bar{H} 是 $c = \bar{c}$ 时 $V(c)$ 的 Hessian 矩阵。由于 $V(\bar{c})$ 是极大值, 因此, $\bar{g} = 0$, 于是得到

$$V(c) \approx \bar{V} + \frac{1}{2} r^T \bar{H} r$$

又因为 \bar{H} (半) 负定, 因此, 使 \bar{V} 至多减小 ε 的 c 的上述集合可以近似表示为 $|r^T \bar{H} r| \leq 2\varepsilon$ 。设 $A = -\bar{H}$, 则 A 是 (半) 正定的, 那么 $r^T A r = 2\varepsilon$ 是一个 N 维的椭球方程。由该椭球界定的 c 对应的 $V(c)$ 小于 $V(\bar{c})$, 且 $V(\bar{c})$ 和 $V(c)$ 的差小于或等于 ε 。由该椭球界定的 c 可视为由 \bar{c} 发生各种扰动得到的, 这里要计算的是由 \bar{c} 的最小扰动得到的 c 。也就是说, 需要在 $r^T A r = 2\varepsilon$ 的条件下求 $r^T r$ 的最小值。使用拉格朗日乘数法, 可以得到

$$\min L = r^T r - \eta(r^T A r - 2\varepsilon) \quad (3-12)$$

计算(3-12)式对 r 的微分, 并让其等于 0, 得出 $(\eta^{-1} I - A)r = 0$ 。因此, 由 \bar{c} 的最小扰动得到的 r 是 A^{-1} 的最小特征值对应的特征向量或 A 的最大非零特征值对应的特征向量 (如果 A 是奇异的), 且 r 满足 $r^T A r = 2\varepsilon$ 。通过上述推导, r 的值就被求出了。然后, 根据(3-10)式和(3-11)式, 可以求出 ST。

接下来, 根据上面描述的方法, 对相关矩阵特征向量的最小扰动稳定性进行推导。假定 $x_i(i=1, 2, \dots, N)$ 为时间序列, 它们的相关矩阵是 S 。 S 的特征值是 $\lambda_i(i=1, 2, \dots, N)$, $\lambda_N > \lambda_{N-1} > \dots > \lambda_1$ 。 λ_i 对应的特征向量是 $c_i(i=1, 2, \dots, N)$ 。下面, 先对 c_1 的最小扰动稳定性进行详细的推导, 然后, 以说明和 c_1 的不同为主, 简略地介绍对其他特征向量的最小扰动稳定性的推导过程。

3.3.1.2 c_1 的最小扰动稳定性

首先需要说明的是本文对特征向量和由特征向量发生扰动得到的向量都做出了“标准化”约束, 即让这些向量的模为1。对 x_1, x_2, \dots, x_N 都进行“标准化”处理, 设得到的序列是 x'_1, x'_2, \dots, x'_N 。假定 c 是一个 N 维向量。设在 $c^T c = 1$ 的约束下, $c^T(x'_1, x'_2, \dots, x'_N)^T$ 的样本方差取得最小值时的 c 为 \bar{c}_1 , 则 x_1, x_2, \dots, x_N 的第一个主成分为 $\bar{c}_1^T(x'_1, x'_2, \dots, x'_N)^T$ 。可以证明, $c^T(x'_1, x'_2, \dots, x'_N)^T$ 的方差为 $c^T S c$ 。采用拉格朗日乘数法计算 \bar{c}_1 , 得到待求最小值的函数为

$$V = c^T S c - \eta(c^T c - 1)$$

其中, η 为拉格朗日乘子。研究表明^[65], $\bar{c}_1 = c_1$, $c_1^T S c_1 = \lambda_1$ 。假定 d 是一个 N 维向量。在 $d^T d = 1$ 的约束下, 计算 $d^T(-S)d$ 的最大值也可以采用拉格朗日乘数法。这时, 待求最大值的函数是

$$V' = d^T(-S)d - \eta'(d^T d - 1) \quad (3-13)$$

其中, η' 为拉格朗日乘子。可以得出, 在 $d^T d = 1$ 的约束下, 使 $d^T(-S)d$ 取得最大值的 d 为 c_1 , $d^T(-S)d$ 的最大值为 $c_1^T(-S)c_1 = -\lambda_1$ 。可见, $c = d = c_1$ 时, $c^T S c$ 和 $d^T(-S)d$ 互为相反数。并且, 无论 c 和 d 的取值如何变化, 只要 $c = d$, $c^T S c$ 和 $d^T(-S)d$ 都互为相反数。因此, λ_1 的增加最多为 ε 时的 c_1 的最小扰动和 $c_1^T(-S)c_1$ 的减小最多为 ε 时的 c_1 的最小扰动是相同的, 为求前者, 只需求出后者即可。 $d^T = (d^1, d^2, \dots, d^N)$, $-S = (-s_{ij})$, 因此(3-13)式可以写为

$$V' = \sum_i \sum_j d^i d^j (-s_{ij}) - \eta'(\sum_i (d^i)^2 - 1)$$

计算 V' 的二阶偏导数, 得到

$$\frac{\partial^2 V'}{\partial d^i \partial d^j} = -2s_{ij} - 2\eta' \delta_{ij}$$

其中,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

当 $d = c_1$ 时, $d^T(-S)d$ 取得最大值 $-\lambda_1$ 。因此, $d = c_1$ 时, V' 的Hessian矩阵是 $\bar{H} = -2S + 2\lambda_1 I$ 。 $-S$ 和 S 的特征向量相等, 特征值互为相反数。因此, $-S$ 的特

征值是 $-\lambda_i (i=1, 2, \dots, N)$, $-\lambda_i$ 对应的特征向量是 $c_i (i=1, 2, \dots, N)$ 。于是, \bar{H} 的特征值是 $-2\lambda_i + 2\lambda_1 (i=1, 2, \dots, N)$, $-2\lambda_i + 2\lambda_1$ 对应的特征向量是 $c_i (i=1, 2, \dots, N)$ 。 $A = -\bar{H}$, 那么 A 的特征值为 $2(\lambda_i - \lambda_1)$, $2(\lambda_i - \lambda_1)$ 对应的特征向量也是 c_i 。 A 的最大的非零特征值是 $2(\lambda_N - \lambda_1)$, 该特征值对应的特征向量是 c_N 。因此, 当 $c_1^T (-S)c_1$ 的减小最多为 ε 时, c_1 通过发生最小的扰动而产生的变化为 $r = kc_N$ 。根据 $r^T Ar = 2\varepsilon$, 可确定常数 k 。将 $r = kc_N$ 代入 $r^T Ar = 2\varepsilon$, 得出

$$k^2 c_N^T (2S - 2\lambda_1 I) c_N = 2\varepsilon$$

$c_N^T c_N = 1$, $c_N^T S c_N = \lambda_N$, 因此得出 $k = \pm [\varepsilon / (\lambda_N - \lambda_1)]^{1/2}$ 。由于 $r = c - c_1$, 因此, 当 $c_1^T (-S)c_1$ 的减小最多为 ε 时, c_1 通过发生最小扰动而形成的向量 c 为

$$c = c_1 + r = c_1 \pm c_N [\varepsilon / (\lambda_N - \lambda_1)]^{1/2}$$

接下来, 对 c 进行“标准化”处理, 这需要先计算 c 的模 $|c|$ 。由于 c_1 和 c_N 正交且它们都是单位向量, 所以

$$|c| = (c^T c)^{1/2} = [1 + \varepsilon / (\lambda_N - \lambda_1)]^{1/2}$$

于是, 对 c 进行“标准化”处理得到的向量 $c_{(1)}$ 为

$$c_{(1)} = \frac{1}{|c|} c = \{c_1 \pm c_N [\varepsilon / (\lambda_N - \lambda_1)]^{1/2}\} / [1 + \varepsilon / (\lambda_N - \lambda_1)]^{1/2}$$

可以证明, c_1 和 $c_{(1)}$ 的夹角 θ_1 满足

$$\cos \theta_1 = [1 + \varepsilon / (\lambda_N - \lambda_1)]^{-1/2} \quad (3-14)$$

因此, c_1 的最小扰动稳定性为

$$ST_1 = \cos \theta_1 = [1 + \varepsilon / (\lambda_N - \lambda_1)]^{-1/2} \quad (3-15)$$

3.3.1.3 其余特征向量的最小扰动稳定性

这里对 $c_j (j=2, 3, \dots, N)$ 的最小扰动稳定性进行推导。假定 c 是一个 N 维向量。设在 $c^T \bar{c}_L = 0 (L=1, 2, \dots, j-1)$ 和 $c^T c = 1$ 的约束下, $c^T (x'_1, x'_2, \dots, x'_N)^T$ 的样本方差 $c^T S c$ 取得最小值时的 c 为 \bar{c}_j , 则 x_1, x_2, \dots, x_N 的第 j 个主成分为 $\bar{c}_j^T (x'_1, x'_2, \dots, x'_N)^T$ 。研究表明^[65], $\bar{c}_j = c_j$, $c_j^T S c_j = \lambda_j$ 。假定 d 是一个 N 维向量。容易证明, 在 $d^T \bar{c}_L = 0 (L=1, 2, \dots, j-1)$ 和 $d^T d = 1$ 的约束下, 使 $d^T (-S)d$ 取得最大值的 d 为 c_j , $d^T (-S)d$ 的最大值为 $c_j^T (-S)c_j = -\lambda_j$ 。可见, $c = d = c_j$ 时, $c^T S c$ 和 $d^T (-S)d$ 互为相反数。并且, 无论 c 和 d 的取值如何变化, 只要 $c = d$, $c^T S c$ 和 $d^T (-S)d$ 都互为相反数。因此, λ_j 的增加最多为 ε 时的 c_j 的最小扰动和 $c_j^T (-S)c_j$ 的减小最多为 ε 时的 c_j 的最小扰动是相同的, 为求前者, 只需求出后者即可。在 $d^T \bar{c}_L = 0 (L=1, 2, \dots, j-1)$ 和 $d^T d = 1$ 的约束下, 计算 $d^T (-S)d$ 的最大值相当于在 $d^T d = 1$ 的约束下的 $d^T (-S_{(j)})d$ 的最大值的计算。

$$-S_{(j)} = -S - (-\lambda_1)c_1c_1^T - \cdots - (-\lambda_{j-1})c_{j-1}c_{j-1}^T = -S + \lambda_1c_1c_1^T + \cdots + \lambda_{j-1}c_{j-1}c_{j-1}^T$$

引入拉格朗日乘子 η 后, 待求最大值的函数为

$$V = d^T[-S_{(j)}]d - \eta(d^T d - 1) = d^T(-S + \lambda_1c_1c_1^T + \cdots + \lambda_{j-1}c_{j-1}c_{j-1}^T)d - \eta(d^T d - 1)$$

可以证明, 在 $d=c_j$ 时, 上述函数的最大值是 $c_j^T[-S_{(j)}]c_j = c_j^T(-S)c_j = -\lambda_j$ 。设 $-\lambda_j$ 的减少最多为 ε 时, 由 c_j 的最小扰动得到的向量是 $c_{(j)}$ 。接下来的 $c_{(j)}$ 的具体运算过程与 $c_{(1)}$ 非常类似, 所以, 不再赘述, 而仅列出如下的重要的运算结果。按由小到大的顺序, A的全部特征值是 $-2\lambda_j$ 、0、 $2(-\lambda_j + \lambda_{j+1})$, \cdots , $2(-\lambda_j + \lambda_N)$ 。其中, $-2\lambda_j$ 重复的次数是 $j-1$ 次。A的最大的非零特征值是 $2(-\lambda_j + \lambda_N)$, 它对应的特征向量是 c_N 。当 $-\lambda_j$ 的减少最多为 ε 时, 由 c_j 的最小扰动得到的向量 $c_{(j)}$ 为

$$c_{(j)} = \{c_j \pm c_N[\varepsilon/(\lambda_N - \lambda_j)]^{1/2}\} / [1 + \varepsilon/(\lambda_N - \lambda_j)]^{1/2}$$

如上所述, 当 λ_j 的增加最多为 ε 时, 由 c_j 的最小扰动得到的向量也是 $c_{(j)}$ 。设 c_j 和 $c_{(j)}$ 的夹角为 θ_j , 可以得出

$$\cos \theta_j = [1 + \varepsilon/(\lambda_N - \lambda_j)]^{-1/2} \quad (3-16)$$

因此, c_j 的最小扰动稳定性为

$$ST_j = \cos \theta_j = [1 + \varepsilon/(\lambda_N - \lambda_j)]^{-1/2} \quad j = 2, 3, \cdots, N \quad (3-17)$$

通过上述推导, 得到了相关矩阵特征向量的最小扰动稳定性的计算公式。

下面提出的 KRMIN 去噪法就建立在最小扰动稳定性的基础上。

3.3.2 基于特征向量最小扰动稳定性的 RMT 去噪法设计和实现

假定一个 $N \times N$ 金融相关矩阵C的特征值序列 $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^N$ 是单调递增序列, 将各特征值对应的特征向量作为相应的列而形成的矩阵是E。由第 3.1 节知, 小于 λ_+ 的特征值为噪声特征值。设噪声特征值的子序列为 $\Lambda_{\text{noisy}} = \{\lambda_i\}_{i=1}^n$, 则去噪后的特征值序列为

$$A_{\text{filtered}} = \{y_1, \cdots, y_n, \lambda_{n+1}, \cdots, \lambda_N\}$$

其中, $\{y_i\}_{i=1}^n$ 是用于代替噪声特征值的特征值序列, 它为单调递增序列, $\{\lambda_i\}_{i=n+1}^N$ 为包含真实相关信息的特征值序列。接下来, 在 $\{y_i\}_{i=1}^n$ 为等差数列和非等差数列两种情况下, 分别计算特征向量的最小扰动稳定性的最大值和达到最大值时的 $\{y_i\}_{i=1}^n$ 。

1. $\{y_i\}_{i=1}^n$ 是等差数列

如果 $\{y_i\}_{i=1}^n$ 是公差为 b_1 ($b_1 < 0$) 的等差数列, 则特征值间关系为

$$y_{n+1-i} = y_n + (i-1)b_1 \quad i = 1, 2, \cdots, n \quad (3-18)$$

为使去噪后的收益相关矩阵的迹不变, $y_1, y_2 \dots, y_n$ 的和与噪声特征值的和必须相等, 由此得出

$$b_1 = \frac{2(a - y_n)}{n - 1}$$

其中, a 是噪声特征值的均值。因为 $b_1 < 0$, 所以 $y_n > a$ 。又因为相关矩阵的特征值为正, 因此 $a, y_1 > 0$, 于是得到 $0 < a < y_n < 2a$ 。由于 $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$, y_n 是对 λ_n 进行代替的特征值, 所以我们也让 y_n 不大于 λ_{n+1} , 于是有 $y_n \leq \lambda_{n+1}$ 。通过上述分析得出, 如果 $\lambda_{n+1} \leq 2a$, y_n 的取值范围是 $0 < a < y_n \leq \lambda_{n+1}$ 。如果 $\lambda_{n+1} > 2a$, 则 y_n 的取值范围是 $0 < a < y_n < 2a$ 。接下来, 在 y_n 的上述取值范围中, 求出使收益相关矩阵特征向量的稳定性达到最大的 y_n 值。由于 $\{\lambda_i\}_{i=n+1}^N$ 对应的特征向量的稳定性是常数, 因此, 为求使特征向量的稳定性达到最大的 y_n 值, 只需求出使 $y_1, y_2 \dots, y_n$ 对应的特征向量的稳定性达到最大的 y_n 值即可。接下来, 通过计算 $y_1, y_2 \dots, y_n$ 对应的特征向量的稳定性, 得出 $y_1, y_2 \dots, y_n$ 对应的特征向量的稳定性与 y_n 的关系。设 $y_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的最大增量为 $\varepsilon=0.1y_i$ 。根据(3-15)和(3-17)式, 当 y_i 的增加最多为 ε 时, y_i 对应的特征向量的最小扰动稳定性为

$$ST^{(i)} = [1 + \varepsilon / (\lambda_N - y_i)]^{-1/2} = [1 + 0.1y_i / (\lambda_N - y_i)]^{-1/2} \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3-19)$$

根据(3-19)式, $y_1, y_2 \dots, y_n$ 对应的特征向量的平均最小扰动稳定性为

$$ST_{(1)} = \frac{(1 + \frac{0.1y_1}{\lambda_N - y_1})^{-\frac{1}{2}} + (1 + \frac{0.1y_2}{\lambda_N - y_2})^{-\frac{1}{2}} + \dots + (1 + \frac{0.1y_n}{\lambda_N - y_n})^{-\frac{1}{2}}}{n} \quad (3-20)$$

将(3-18)式代入(3-20)式, 可以得出, $y_1, y_2 \dots, y_n$ 对应的特征向量的平均稳定性为

$$ST_{(1)} = \frac{\{1 + \frac{0.1[y_n + (n-1)b_1]}{\lambda_N - [y_n + (n-1)b_1]}\}^{-\frac{1}{2}} + \{1 + \frac{0.1[y_n + (n-2)b_1]}{\lambda_N - [y_n + (n-2)b_1]}\}^{-\frac{1}{2}} + \dots + \{1 + \frac{0.1y_n}{\lambda_N - y_n}\}^{-\frac{1}{2}}}{n} \quad (3-21)$$

假定 $ST_{(1)}$ 的最大值是 $ST_{(1)\max}$ 。接下来, 利用模拟退火算法计算 $ST_{(1)\max}$ 和 $ST_{(1)}$ 等于 $ST_{(1)\max}$ 时的 y_n 。在 y_n 确定后, 根据(3-18)式, y_1, y_2, \dots, y_{n-1} 也能被确定。

2. $\{y_i\}_{i=1}^n$ 是非等差数列

当 $\{y_i\}_{i=1}^n$ 是非等差数列时, 将各特征值间关系设定为

$$y_{n+1-i} = y_n + \frac{(i-1)}{2} b_2 \quad i=1, 2, \dots, n \quad (3-22)$$

其中, $b_2 < 0$ 。从(3-22)式可看出, 相邻特征值的差是公差为 b_2 的等差数列, 因此, $\{y_i\}_{i=1}^n$ 是二阶等差数列。为使去噪后的收益相关矩阵的迹不变, $y_1, y_2 \dots, y_n$ 的和与噪声特征值的和必须相等, 由此得出

$$b_2 = \frac{6(a - y_n)}{(n+1)(n-1)}$$

和特征值序列为等差数列时的分析方法类似, 可以得出, y_n 的取值范围是 $0 < a < y_n < 3na/(2n-1)$ 或 $0 < a < y_n \leq \lambda_{n+1}$ 。接下来, 在 y_n 的上述取值范围中, 求出使收益相关矩阵特征向量的稳定性达到最大的 y_n 值。设 $y_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的最大增量为 $\varepsilon=0.1y_i$ 。由(3-15)式、(3-17)式和(3-22)式得出, y_1, y_2, \dots, y_n 对应的特征向量的平均稳定性为

$$ST_{(2)} = \frac{\{1 + \frac{0.1[y_n + \frac{(n-1)n}{2}b_2]}{\lambda_N - [y_n + \frac{(n-1)n}{2}b_2]}\}^{-\frac{1}{2}} + \{1 + \frac{0.1[y_n + \frac{(n-1)(n-2)}{2}b_2]}{\lambda_N - [y_n + \frac{(n-1)(n-2)}{2}b_2]}\}^{-\frac{1}{2}} + \dots + \{1 + \frac{0.1y_n}{\lambda_N - y_n}\}^{-\frac{1}{2}}}{n} \quad (3-23)$$

假定 $ST_{(2)}$ 的最大值是 $ST_{(2)\max}$ 。然后, 利用模拟退火算法计算 $ST_{(2)\max}$ 和 $ST_{(2)}$ 等于 $ST_{(2)\max}$ 时的 y_n 。在 y_n 确定后, 根据(3-22)式, y_1, y_2, \dots, y_{n-1} 也能被确定。

接下来, 为了尽量地提高收益相关矩阵特征向量的最小扰动稳定性, 将 $ST_{(1)\max}$ 和 $ST_{(2)\max}$ 中的较大者对应的特征值设定方法作为KRMIN法的特征值设定方法。采用该设定方法时, 使特征向量的最小扰动稳定性达到最大的 $\{y_i\}_{i=1}^n$ 即是被KRMIN法采用的 $\{y_i\}_{i=1}^n$ 。于是, 通过上述计算, $A_{filtered}$ 就被确定了。将以 $A_{filtered}$ 为主对角线元素的对角矩阵记为 $D_{filtered}$ 。最后, 根据谱分解定理, 去噪后的相关矩阵为^[28 63 64]

$$C_{filtered} = E \cdot D_{filtered} \cdot E^{-1}$$

3.3.3 特征值求解方法

本文利用模拟退火算法(Simulated Annealing)求取特征向量最小扰动稳定性的最大值和取得最大值时的 y_n 。模拟退火算法是从固体退火原理和组合优化问题的相似性出发, 利用蒙特卡洛迭代求解策略随机寻找的一种优化算法^[111 112]。本文应用模拟退火算法主要是为了计算收益相关矩阵特征向量的最小扰动稳定性。基本计算步骤如下: 1、给定初值, 包括噪声特征值的均值 a 、噪声特征值数量 n 、最大信息特征值 λ_N 和自变量 y_n 的初值, 并给出最小扰动稳定性求解公式即(3-21)和(3-23)式, 根据给定初值计算评价函数 ST 。2、根据自变量的取值范围, 自变量开始循环, 每次循环都能计算出一个收益相关矩阵特征向量的最小扰动稳定性 ST' 。3、计算增量 $\Delta t' = ST - ST'$ 。若 $\Delta t' < 0$, 则接受 ST' 作为新的当前解, 并存储对应的最大特征值 (y_n) 作为最大特征值, 否则, 以概率 $e^{-T_i \times \Delta t' / (|ST'| + \text{eps}) / \text{Error}}$ 接受 ST' 作为新的当前解, $T_i = (k/k_{\max})^q$ 。其中, k 为循环因子, k_{\max} 为迭代次数, q 为退火因子, eps 代表精度, Error 为函数容许误差。4、循环结束时输出的当前解即为最小扰动稳定性的最大值, 它对应的 y_n 即为

最小扰动稳定性达到最大时的 y_n 。

3.4 实证研究

本节的 Markowitz 投资组合是针对上海证券市场上交易的股票构建的，所需的股票历史交易数据来自于国泰安 CSMAR 数据库。根据 2.2.1 节中 Markowitz 均值-方差模型的介绍，该模型的建立需要满足一些基本的假设条件。如果某个应用对象不符合这些假设条件，那么 Markowitz 模型的应用将不具有可行性。本节中的最优投资组合是基于 Markowitz 均值-方差模型构建的，那么根据上面的分析，在以中国证券市场的历史数据为样本开展本节实证研究前，有必要先对中国证券市场的特征是否符合 Markowitz 均值-方差模型的假设条件进行判断。下面对 Markowitz 模型的主要假设条件在中国证券市场的成立性进行逐一验证。

假设 I 是证券收益率服从联合正态分布。本节的 Markowitz 投资组合是基于中国证券市场股票的日收益率构建的。由(3-1)式所示的股票收益率的计算方法知，某只股票在某一日的收益率等于该日所包含的所有长度为 1 小时、半小时、15 分钟或 1 分钟的更小时间段内该只股票收益率的和。对我国股票收益率影响因素的已有研究表明，某只股票在某一时期的收益率主要受到宏观和微观两个层面因素的影响，而该股票在其他时期的收益率对它的影响十分微弱^[113-115]。既然这些研究能够说明我国股票在某一日期包含的各时段内的收益率是相互独立的，那么根据中心极限定理，这些时段收益率的和即我国股票的日收益率是近似地服从正态分布的。由上面的分析知，可以大致地认为我国股票收益率分布符合假设 I 的要求。

假设 II 是每个投资者都掌握了充分的信息，了解每种证券的期望收益率及标准差。当前我国已建立了较完整的、具有国际水平的信息披露制度体系。根据法律、法规、证券主管机关的管理规则和证券交易所的有关规定，所有上市公司都必须在中国证监会指定的报刊和网站对公司的业绩、经营状况和可能给公司股票价格带来较大影响的事件等与证券有关的信息进行披露，这些能为投资者的决策提供最多、最有价值的信息。除此之外，投资者还可以依据证券价格和收益率的历史数据对证券收益率的未来分布情况进行预测，进而为投资决策提供参考。借助于一些股票行情软件和财经网站能够十分方便且免费地查找和下载个股交易历史数据，所以这些历史数据获取的信息成本很低。通过上述途径，投资者能掌握未来股票收益率分布的充分信息，从而对各种股票的期望收益率、方差和协方差进行初步的预测。可见，对中国证券市场而言，假定 II

是成立的。

假设Ⅲ是投资者都是理性的，他们追求一定收益率水平下风险的最小化或一定风险水平下收益率的最大化。该假设表明风险和收益是决定投资净效用的两个基本因素。风险越小和收益越大，投资净效用就越高。为了实现投资净效用的最大化，投资者都应设法以尽可能低的风险赚取尽可能高的收益。这显然和包括中国证券市场在内的世界证券市场上绝大多数投资者的赢利心理是吻合的，所以，可以认为假设Ⅲ在中国证券市场是成立的。

假设Ⅳ是市场无摩擦，无税收和交易成本。近年来我国采取了一系列降低股票交易成本的措施，比如：2002 年开始实行最高限额内向下浮动的佣金制度，2008 年大幅调低了股票交易印花税率且印花税征收方式改为单边征收，2012 年 6 月将证券交易费用下调了 25%，2012 年 8 月将股票交易经手费下调 20%，等等。这些举措使我国股票交易成本发生了大比例的下降，已基本达到国外主要证券市场的平均水平^[116]。由于我国股票交易成本下降后，对应于一定资金额度的不同投资组合间交易成本的差别很小，所以我国证券市场交易成本的存在对 Markowitz 投资组合构建的影响是可以忽略的。可见，我国证券市场的特征符合假定Ⅳ的要求。

假设Ⅴ是证券可以任意分割，假设Ⅵ是允许投资者卖空。根据我国证券市场的有关制度和规定，中国股票市场的运作规则并不符合假定Ⅴ和Ⅵ。对假定Ⅴ和Ⅵ的违背使得依据 Markowitz 模型得到的最优投资组合权重和中国证券市场的要求有所不符，然而，这两个假定的成立并不是 Markowitz 模型有效建立的必要前提条件，即当这两个假定不成立时，Markowitz 模型仍将有效地成立。于是，在 Markowitz 模型构建基础上开展的理论研究也不会因违背这两个假定而受到任何影响。本节的主要研究内容是在构建 Markowitz 模型和获得最优投资组合结果后，理论地分析证券收益历史相关矩阵的噪声对 Markowitz 投资组合风险优化水平的影响，并对 LCPB 法、PG+法、KR 法和 KRMIN 法的去噪效果进行分析和对比研究。由前面的分析知，所使用的样本数据是否符合假定Ⅴ和Ⅵ对上述研究工作的开展和研究目的的实现并无影响。

从上述分析中可以看出，中国证券市场的特征满足 Markowitz 模型的大部分假设条件，而仅违背了少数假设条件。不过，这对 Markowitz 模型的构建和 Markowitz 组合风险优化的理论分析并无影响。因此，能够得出结论：对本节的研究工作而言，将中国证券市场的历史数据作为分析的样本是非常适合的。

除了本章外，第 4 章、第 5 章和第 6 章的实证研究也利用我国股票收益率历史数据建立了 Markowitz 模型，所以在后面几章中，对 Markowitz 模型的假

设条件是否成立进行验证时的具体分析和本章完全相同。这样，在开展后几章的研究时不再重复介绍该内容。

3.4.1 研究方案设计

在本章实证研究中，根据预测期股票收益数据计算的相关矩阵包括相等加权相关矩阵和指数加权相关矩阵两种。实证分析的主要目的是在股票数量 N 在 100, 213 和 396 间变化，且用来计算相等加权相关矩阵的预测期长度 T 和指数加权相关矩阵的衰减因子 α 也变化的情况下，比较和分析LCPB法、PG+法、KR法和KRMIN法对股票组合风险优化水平的影响。本节用组合风险大小衡量组合风险优化水平，去噪前后的组合风险的获得采用的是bootstrap方法^[117 118]。 N 等于 100, 213 和 396 时的bootstrap算法的步骤是相同的，具体如下。

步骤 1 从 2008-01-03 至 2010-12-31 的所有日期中随机选择一个日期，将其作为测试期。测试期后的 30 天为投资期，测试期前的一段时期为预测期。用来计算指数加权相关矩阵的预测期为测试期前（包括测试期）的 2 年时期。用来计算相等加权相关矩阵的预测期为测试期前（包括测试期）的 T 天， T 为变量。

步骤 2 从备选股票中随机选择 N 只股票。备选股票是在上海证券交易所上市且在投资期和最长的预测期内一直进行交易的全部股票。 $N=100, 213$ 和 396 时，所选取的最长的预测期分别是 1100 天，1200 天和 2300 天。

步骤 3 对投资期的股票收益协方差矩阵进行预测。收益协方差矩阵可分解为收益相关矩阵和收益标准差矩阵两部分。为便于更好地分析收益相关矩阵去噪对组合风险的影响，让收益标准差的预测是正确的。但是，投资期中真正的收益标准差并不可知，因此，用投资期的已实现标准差近似地代替真正的收益标准差。设预测出的协方差矩阵为 $\hat{V} = \{\hat{\sigma}_{ij}^2\}_{i,j=1}^N$ ，它的计算需要经过如下步骤。

(1)利用 T 天的预测期的日收益数据计算 N 只股票收益的相等加权相关矩阵。

(2)利用 2 年预测期的日收益数据计算衰减因子为 α 时的 N 只股票收益指数加权相关矩阵。

注：在本节实证研究中，由于在每个股票数量下都进行了 100 次组合抽样，且预测期天数是变量，所以，全部组合包含的股票名称、股票收益率和测试期信息过多，而不便在正文和附录给出这些数据和信息。如果读者需要上述数据和信息，请向 libingna519@163.com 发邮件获取。

(3)分别用 LCPB 法、PG+法、KR 法和 KRMIN 法对由(1)、(2)步得到的相等加权相关矩阵和指数加权相关矩阵去噪。

(4)按(3-24)式计算 $\hat{\sigma}_{ij}^2$ 。

$$\hat{\sigma}_{ij}^2 = \hat{\rho}_{ij} \sigma_{ii} \sigma_{jj} \quad (3-24)$$

其中, $\{\hat{\rho}_{ij}\}_{i,j=1}^N$ 代表未去噪和用四种方法去噪后的各相等加权相关矩阵和指数加权相关矩阵, 共 10 种矩阵。 σ_{ii} 和 σ_{jj} 是股票收益率已实现标准差^[119]。

步骤 4 根据 \hat{r} 构建最小方差组合, 并计算组合在投资期的已实现风险。在 $\sum_{i=1}^N w_i = 1$ 的约束下, 使组合风险预测值 $\sum_{i,j=1}^N w_i w_j \hat{\sigma}_{ij}^2$ 最小的组合为最小方差组合。其中, $\{w_i\}_{i=1}^N$ 表示组合权重。研究表明, 最小方差组合的权重 $\{\hat{w}_i\}_{i=1}^N$ 为^[50]

$$\hat{w}_i = \frac{\sum_{j=1}^N (\hat{\sigma}_{ij}^2)^{-1}}{\sum_{j,k=1}^N (\hat{\sigma}_{jk}^2)^{-1}} \quad \forall i$$

预测出的组合在投资期的真正风险并不可知, 因此, 本文用和它十分接近的已实现风险来近似代替真正的风险。已实现风险的计算中用到的协方差矩阵是由高频数据得到的已实现协方差矩阵, 本文对已实现协方差矩阵的计算采用的是徐正国等的方法^[119]。所采用的高频数据的抽样间隔为 30 分钟, 因此, 每个交易日能取得的数据量为 8 个。另外, 步骤 3 中已实现标准差的计算采用的是与上述相同的高频数据。

步骤 5 重复 1-4 步 100 次, 然后分别计算由步骤 3 所述 10 种矩阵得到的 10 种组合在 100 次实验中的平均已实现风险。

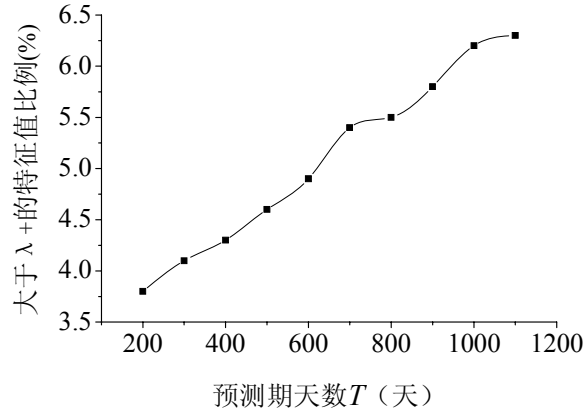
步骤 6 当 T 和 α 变化时, 计算步骤 5 中所述的 10 种组合的平均已实现风险。

通过上述 bootstrap 方法, 本文获得了 N 、 T 和 α 变化时的所有组合风险结果。接下来, 对这些结果进行介绍和分析。

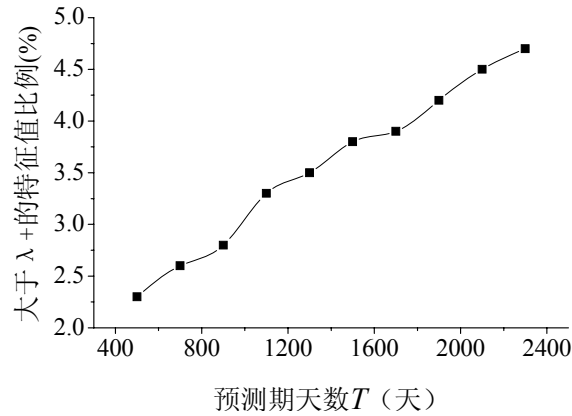
3.4.2 实验结果及分析

3.4.2.1 收益相关矩阵噪声趋势的分析

为分析收益相关矩阵的去噪对组合风险的影响, 有必要先对收益相关矩阵的噪声大小进行测量。图 3-1 和图 3-2 分别描述了在相等加权法和指数加权法



a) 100 只股票收益相关矩阵



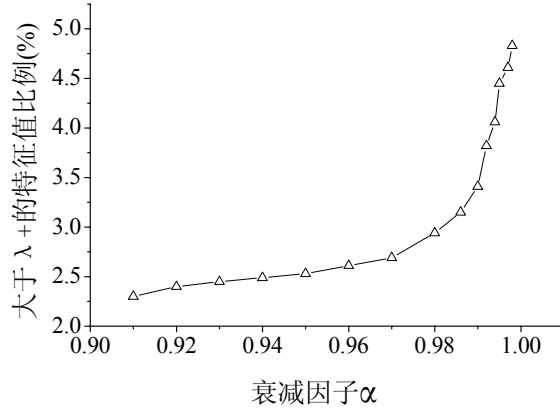
b) 396 只股票收益相关矩阵

图 3-1 相等加权收益相关矩阵的大于 λ_+ 的特征值在全部特征值中所占的比例

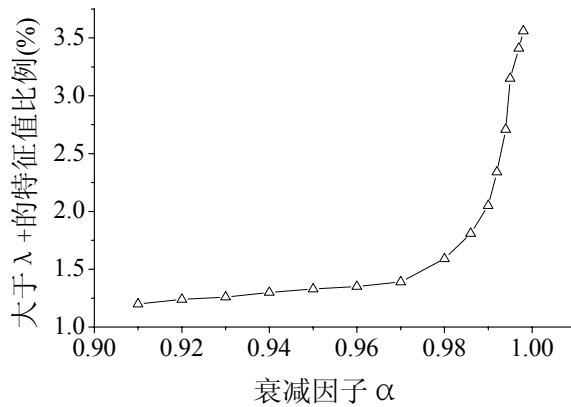
Fig.3-1 Percentage of those more than λ_+ in all the eigenvalues of equally weighted return correlation matrices

两种相关矩阵计算方法下，100 只和 396 只股票收益相关矩阵的全部特征值中，大于随机矩阵最大特征值 λ_+ 的特征值所占的比例。根据第 3-1 节的分析，大于 λ_+ 的特征值是包含真实相关信息的特征值。从图 3-1 和图 3-2 可以看出，相等加权收益相关矩阵信息特征值比例随预测期天数 T 的增加而增加，而指数加权收益相关矩阵信息特征值比例则随衰减因子 α 增加而增加。当计算指数加权相关矩阵时， α 的增加相当于更多数据的使用。所以，图 3-1 和图 3-2 中信息特征值比例的趋势说明，无论采用相等加权收益相关矩阵和指数加权收益相关矩阵中的哪一种，当 N 一定时，收益相关矩阵的噪声都随数据量的增加而减小，这同Pafka等得出的噪声因时间序列长度和资产数之比提高而下降的结论一致。根据随机相关矩阵的特征值区间，可以对 N 一定时信息特征值增加的原

因进行分析。由(3-6)式知, N 不变时 T 的增加会使 Q 增大, 则随机相关矩阵的特征值区间 $[\lambda_-, \lambda_+]$ 的长度就会减小, 因此, 大于 λ_+ 的特征值的数量就会增加。



a) 100 只股票收益相关矩阵



b) 396 只股票收益相关矩阵

图 3-2 指数加权收益相关矩阵中大于 λ_+ 的特征值比例

Fig.3-2 Percentage of those more than λ_+ in all the eigenvalues of exponentially weighted return correlation matrices

从图 3-1 中还可看出, 在 T 相等时, 396 只股票相等加权收益相关矩阵的信息特征值比例比 100 只股票更小。比如 $T=500$ 、700、900、1100 时, 100 只股票收益相关矩阵的信息特征值比例分别是 4.6%、5.4%、5.8%和 6.3%, 而 396 只股票相关矩阵的信息特征值比例为 2.3%、2.6%、2.8%和 3.3%。这反映出 T 既定时, 随资产数量的增长, 收益相关矩阵的噪声会增加。指数加权收益相关矩阵的噪声变化也存在类似特点, 表现为 α 不变时, 随资产数量增长, 指数加权收益相关矩阵的信息特征值比例减小, 噪声增加。

如图 3-2 所示, 和相等加权收益相关矩阵相比, 指数加权收益相关矩阵的

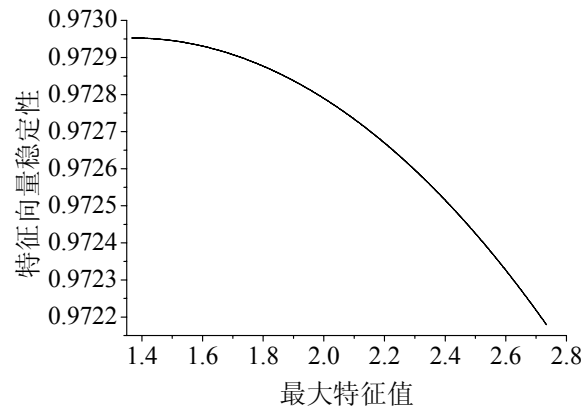
信息特征值比例更小。不过，由于两者的差距不大，因此并不能得出指数加权相关矩阵的风险优化水平低于相等加权相关矩阵的结论。事实上，正如后面的研究表明的，当相等加权收益相关矩阵和指数加权收益相关矩阵的噪声在理论上相等时，相等加权相关矩阵的组合风险优化水平低于指数加权相关矩阵。

3.4.2.2 收益相关矩阵特征向量稳定性的分析

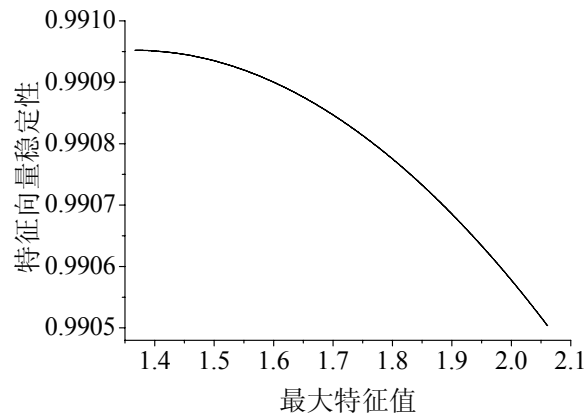
KRMIN法是基于收益相关矩阵特征向量稳定性的提高而建立的，因此有必要对由KRMIN法的去噪得到的收益相关矩阵的特征向量稳定性进行实证测量。以 100 只股票在 2009-12-31 至 2010-12-30 的时期内的样本相关矩阵的去噪为例，图 3-3a)和图 3-3b)分别描述了当特征值序列是等差数列和非等差数列时，最大特征值 (y_n) 的全部取值对应的各特征向量平均的最小扰动稳定性。该样本相关矩阵的最大的信息特征值为 $\lambda_N=6.154$ ，最小的信息特征值为 $\lambda_{n+1}=2.954$ ，噪声特征值的均值为 $a=1.367$ 。当特征值序列为等差数列时，由于 $2a < \lambda_{n+1}$ ，所以 y_n 的取值范围是 $(a, 2a)$ ，即 $(1.367, 2.734)$ 。从图 3-3a)可以看出，当 $y_n=1.367$ 时，特征向量的最小扰动稳定性取得最大值，该最大值为 $ST_{(1)\max}=0.973$ 。当特征值序列为非等差数列时，由于 $3na/(2n-1) < \lambda_{n+1}$ ，所以 y_n 的取值范围是 $(a, 3na/(2n-1))$ ，即 $(1.367, 2.061)$ 。从图 3-3b)可以看出，当 $y_n=1.367$ 时，特征向量的最小扰动稳定性取得最大值，该最大值为 $ST_{(2)\max}=0.991$ 。可见， $ST_{(2)\max}$ 大于 $ST_{(1)\max}$ ，这决定了由KRMIN法的去噪得到的收益相关矩阵需采用非等差数列的特征值设定方法，且 y_n 的最优取值为 $ST_{(2)\max}$ 对应的 1.367。这样，去噪后该收益相关矩阵特征向量的平均稳定性是 $ST_{(2)\max}$ ，即 0.991。0.991 十分接近于 1，这说明KRMIN法的特征值设定方法能够很好地满足提高特征向量稳定性的要求。

当用KR法对上述样本相关矩阵进行去噪时，得到的收益相关矩阵特征向量的平均稳定性也能从图 3-3 观察出来。根据KR法的原理，由KR法得到的相关矩阵采用的是等差数列的特征值设定方法，且 y_n 的值十分接近于 $2a$ 。这样，由图 3-3a)知，该矩阵特征向量的平均稳定性逼近于 0.972。本文还对由KR法和KRMIN法的去噪得到的矩阵的特征向量稳定性进行了更多的比较，如图 3-4 所示。图 3-4 描述了当用KR法和KRMIN方法对 100 只股票样本相关矩阵去噪时，得到的收益矩阵的特征向量的最小扰动稳定性的平均值随预测期天数 T 的变化。由于 T 取每个值时，都有由bootstrap方法产生的 100 个样本相关矩阵，因此，图 3-4 曲线上的每一点表示的稳定性都是 100 个样本相关矩阵的去噪结果的均值。从图 3-4 可以观察到，由KRMIN法得到的特征向量稳定性高于由KR法得到的稳定性，一方面是因为KRMIN法和KR法对稳定性的衡量方法不

同，另一方面是因为KRMIN法对特征值的设定方法进行了扩展。



a) 等差特征值



b) 非等差特征值

图 3-3 最大特征值的变化对 100 只股票收益相关矩阵特征向量的平均稳定性的影响

Fig.3-3 Mean eigenvector stability as a function of the maximum replacing eigenvalue in a correlation matrix of returns for 100 stocks

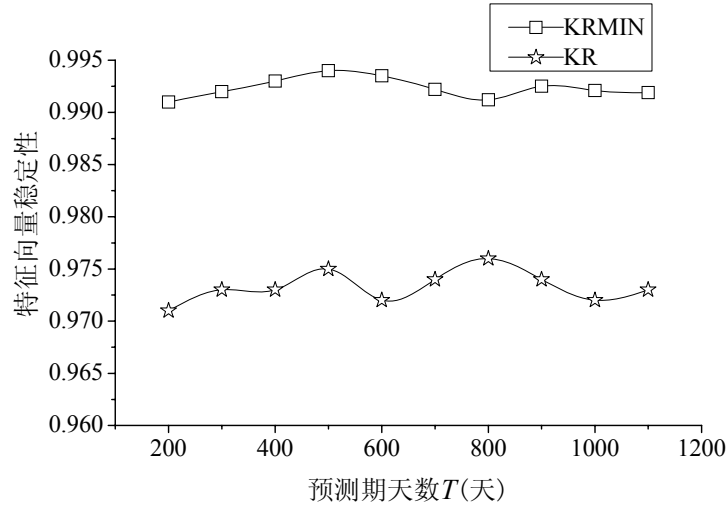


图 3-4 用 KR 和 KRMIN 方法对 100 只股票样本相关矩阵去噪得到的特征向量稳定性
Fig.3-4 Eigenvector stability by filtering sample correlation matrices of 100 stocks with the KR and KRMIN methods

3.4.2.3 组合风险分析

(1) 相等加权收益相关矩阵的组合风险分析

本文计算了当 N 在 100, 213 和 396 间变化且 T 也变化时, 用 LCPB 法、PG+法、KR 法和 KRMIN 法对相等加权收益相关矩阵去噪前后的组合风险, 如图 3-5、图 3-6 和图 3-7 所示。

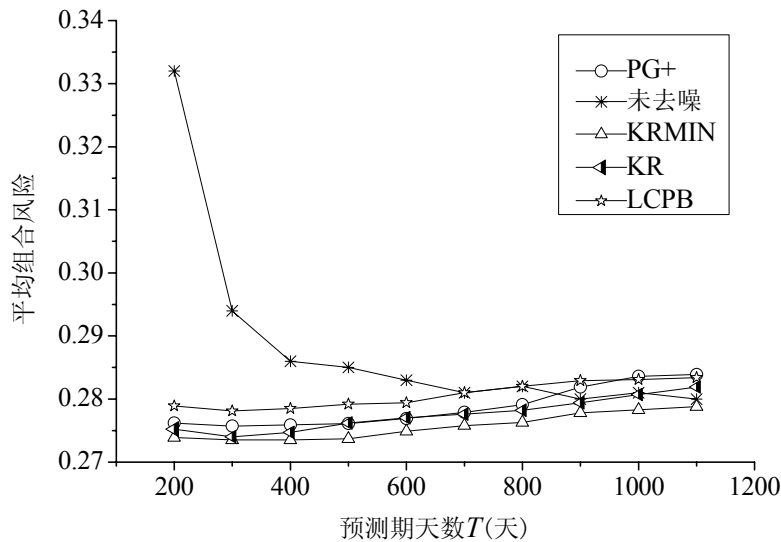


图 3-5 用 LCPB 法、PG+法、KR 法和 KRMIN 法对 100 只股票收益相关矩阵去噪前后的组合风险

Fig.3-5 Portfolio risks when return correlation matrices of 100 stocks are unfiltered or filtered by one of the four methods

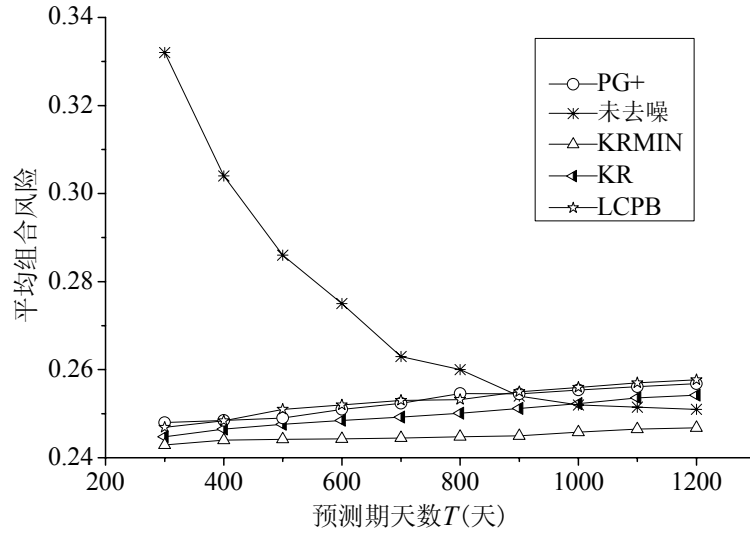


图 3-6 用 LCPB 法、PG+法、KR 法和 KRMIN 法对 213 只股票收益相关矩阵去噪前后的组合风险

Fig.3-6 Portfolio risks when return correlation matrices of 213 stocks are unfiltered or filtered by one of the four methods

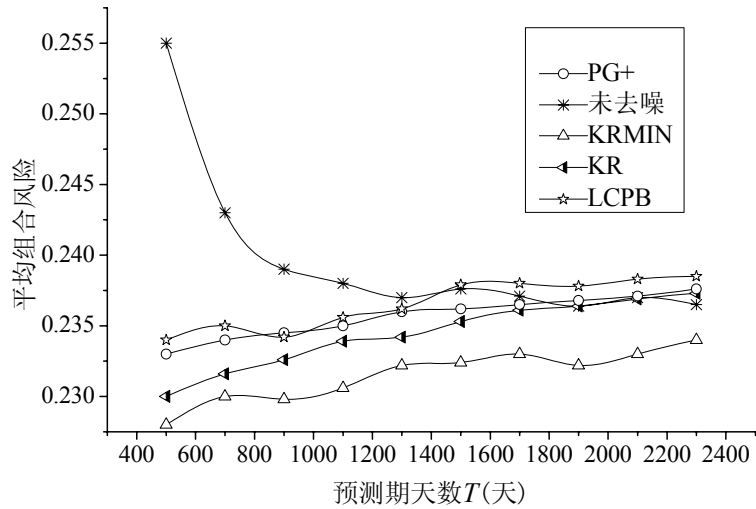


图 3-7 用 LCPB 法、PG+法、KR 法和 KRMIN 法对 396 只股票收益相关矩阵去噪前后的组合风险

Fig.3-7 Portfolio risks when return correlation matrices of 396 stocks are unfiltered or filtered by one of the four methods

图 3-5、图 3-6 和图 3-7 的曲线上的每一点对应的组合风险都是由bootstrap方法产生的 100 个样本的均值。从图 3-5、图 3-6 和图 3-7 可以看出，在 N 等于

100, 213 和 396 时, 四种RMT去噪法都能通过对股票收益相关矩阵的去噪而降低组合的风险和促进组合风险的优化。其中, 由KR法和KRMIN法得到的组合风险更小, 主要是因为这两种方法的提高特征向量稳定性的思想与投资期中收益相关矩阵特征向量的稳定性较高的特点相吻合^[64]。从图 3-5、图 3-6 和图 3-7 还可看出, KRMIN法的组合风险优化表现好于KR法。

接下来分析对股票收益相关矩阵的去噪给组合风险带来的影响。首先, 结合未去噪风险的变化趋势, 对未去噪风险受到的噪声影响进行分析。从图 3-5、图 3-6 和图 3-7 中可以看出, 随预测期天数 T 的增大, 未去噪的组合风险越来越小。由 3.4.2.1 节的噪声测量结果知, N 一定时, T 的增加引起相关噪声的减小。相关噪声减小后, 噪声引起的组合风险的增加就会减小, 因此导致组合风险的下降。然后, 对去噪后的组合风险进行分析。当 T 变化时, 收益相关矩阵含有的信息也在变化。如果 T 太小, 收益相关矩阵的信息就会太少。如果 T 太大, 收益相关矩阵又不能快速、敏感地反映市场事件的变化。可见, 当 T 太小或太大时, 收益相关矩阵含有的信息都和真实的相关信息相差较大。然而, 只有收益相关矩阵含有的信息最接近于真实的相关信息时, 去噪后的风险才能达到最低。因此, 使去噪后的组合风险达到最低的 T 既不能太小也不能太大。对于本分析中的 100、213 和 396 只股票来说, 去噪后的风险达到最低时的 T 分别为 300 天、300 天和 500 天。最后, 对去噪引起的组合风险的下降进行分析。从图 3-5、图 3-6 和图 3-7 可以看出, 每一种去噪法去噪前后的组合风险之差都随 T 增加而呈下降的趋势, 主要是因为相关噪声随 T 的增加而不断减小的缘故。另外, 为了更好地分析去噪效果的变化特点, 本文计算了在 N 和 T 的不同取值下, 由 LCPB 法、PG+法、KR 法和 KRMIN 法得到的组合风险比未去噪组合风险下降的比例, 如表 3-1 所示。从表 3-1 可以看出, 无论 T 的取值如何, 当 T 既定时, 由每一种去噪法得到的组合风险比未去噪组合风险下降的比例都随资产数量的增加而呈增大的趋势。由 3.4.2.1 节的噪声测量结果知, T 一定时, 资产数量的增多会引起更大的噪声, 因此, 各种去噪法的去噪效果变得越来越好。

表 3-1 对相等加权收益相关矩阵去噪后的组合风险比未去噪组合风险下降的比例

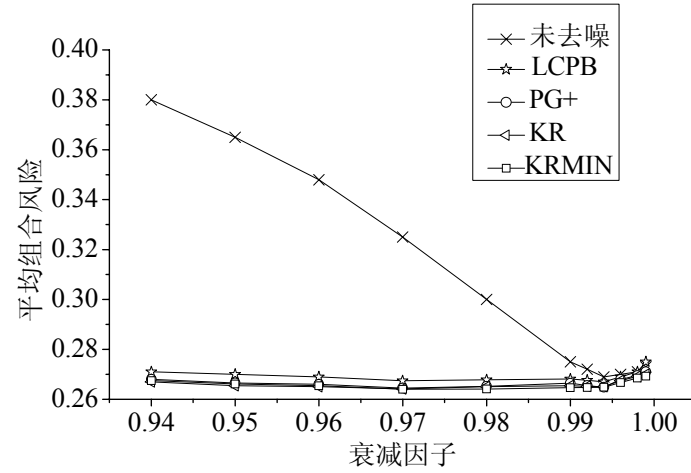
Table 3-1 Percentage reduction of portfolio risks after filtering equally weighted return correlation matrices

去噪法 N 天 数	LCPB			KR			PG+			KRMIN		
	100	213	396	100	213	396	100	213	396	100	213	396
500	0.020	0.122	0.201	0.031	0.134	0.238	0.031	0.129	0.209	0.039	0.146	0.257
600	0.012	0.083	0.175	0.021	0.096	0.193	0.021	0.087	0.122	0.028	0.111	0.187
700	0	0.038	0.086	0.012	0.052	0.122	0.011	0.040	0.096	0.018	0.071	0.139
800	0	0.026	0.073	0.013	0.038	0.096	0.010	0.021	0.075	0.020	0.058	0.125
900	-0.010	-0.003	0.053	0.002	0.011	0.072	-0.006	-0.002	0.051	0.007	0.035	0.103
1000	-0.007	-0.015	0.042	0.001	0.002	0.051	-0.009	-0.013	0.046	0.009	0.024	0.091
1100	-0.012	-0.011	0.027	-0.006	-0.004	0.046	-0.013	-0.012	0.034	0.004	0.019	0.084
1200	-0.014	-0.011	0.013	-0.008	-0.006	0.038	-0.018	-0.015	0.029	0.003	0.011	0.068
1300	-0.023	-0.018	0.009	-0.009	-0.007	0.032	-0.019	-0.019	0.011	0.002	0.009	0.055

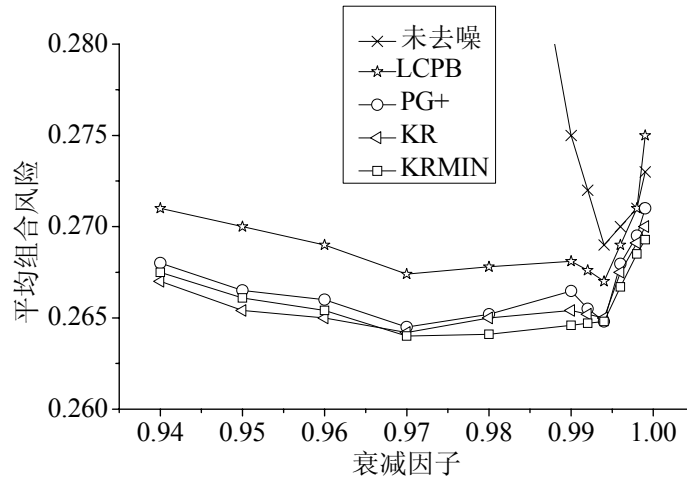
注：黑体数据代表了去噪后风险下降比例随 N 增大而减小的异常情况

（2）指数加权收益相关矩阵的组合风险分析

本文以 30 天作为投资期，考察了 $N=100$ 、213 和 396 的情况下，衰减因子 α 变化时 LCPB、PG+、KR 和 KRMIN 方法对指数加权收益相关矩阵去噪前后的平均 bootstrap 组合风险，结果如图 3-8 至图 3-10 和表 3-2 所示。当股票数量为 100、213 和 396 时，都同时给出整体图和局部放大图。整体图完整地描述了 α 各不同取值下的组合风险，反映了风险的整体变化趋势。而局部放大图能十分清楚地反映风险的局部变化特点，比如能突显出去噪后风险拐点所在的位置。可以观察到，100、213 和 396 只股票的组合结果十分类似。在股票数量不同的三种情况下，LCPB、PG+、KR 和 KRMIN 等四种 RMT 去噪法都具有通过股票收益相关矩阵去噪而降低组合已实现风险和促进组合风险优化的能力。其中，专门为提高股票收益相关矩阵稳定性而设计的 KR 和 KRMIN 方法的组合风险低于其他两种方法，主要是因为 KR 和 KRMIN 方法考虑稳定性的思想同投资期股票收益相关矩阵特征向量一般较为稳定的特点相吻合。组合优化表现最好的方法是 KRMIN 法。



a) 整体图



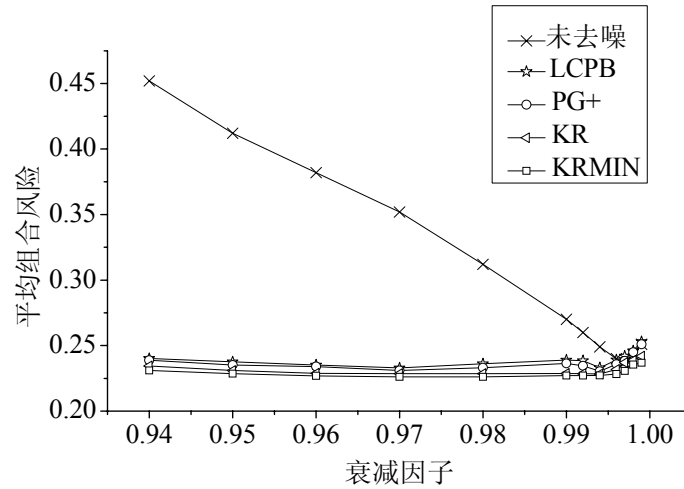
b) 局部放大图

图 3-8 不同衰减因子下 100 只股票收益相关矩阵去噪前后的平均组合风险

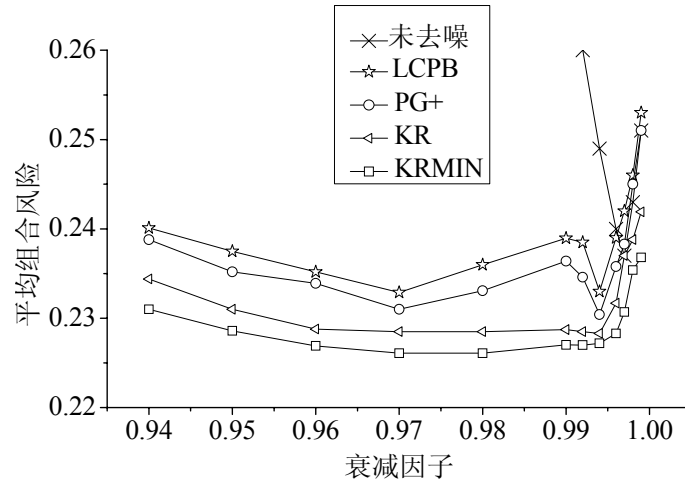
Fig.3-8 Average portfolio risks under different attenuation factors when return correlation matrices of 100 stocks are unfiltered or filtered

在分析相关去噪对组合风险的具体影响前，有必要先结合未去噪风险的变化趋势对未去噪风险受到的噪声影响进行分析。和衰减因子 α 相当的时间序列有效长度为 $-1/\ln\alpha$ 。因此，随 α 的增加，被有效利用的数据数量也在增加，这导致了两种效应的产生。第一种效应是相关噪声的减小效应。如前所述， α 的增加使相关噪声减小，因此噪声引起的组合风险的增加减小，导致组合风险的下降。第二种效应是样本相关矩阵对投资期相关动态变化反映的滞后效应，即随相关估计中有效利用的数据数量的增加，样本相关矩阵对投资期相关动态变化的反映能力在逐渐减弱，造成组合风险的提高。图 3-8 至图 3-10 说明在两种效应的共同作用下，未去噪组合风险呈现出先降后升的变化趋势。图 3-8、图

3-9 和图 3-10 中, 未去噪组合风险达到最低时的 α 值很高, 十分接近于 1, 主要是因为文中资产数量较大的缘故。随 α 的增加和噪声对风险影响的减弱, 第一种效应引起风险下降的作用越来越小。当噪声对风险影响减小到较低水平时, 第二种效应引起风险提高的作用开始成为主导作用, 从而风险曲线开始变为上升趋势。也就是说, 未去噪风险最低点一般在噪声影响较小时达到。而和小组合比, 大组合往往使“维数灾祸”问题加剧, 因此将噪声影响减小到较低水平的时间序列数据长度或 α 值就会很高。



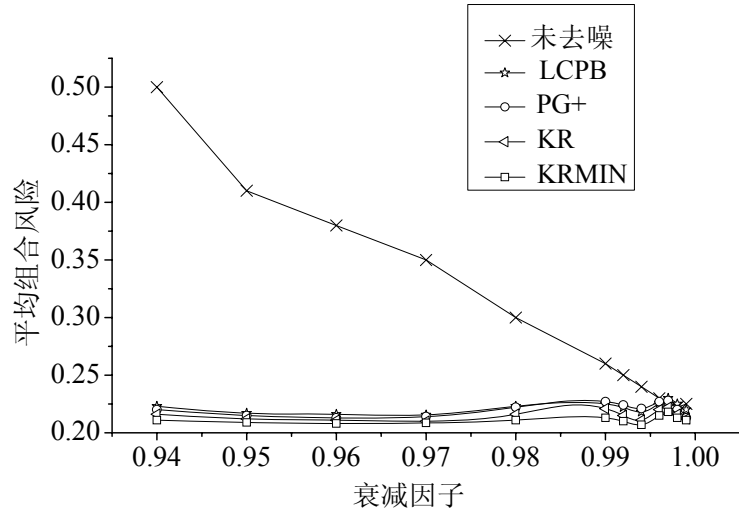
a) 整体图



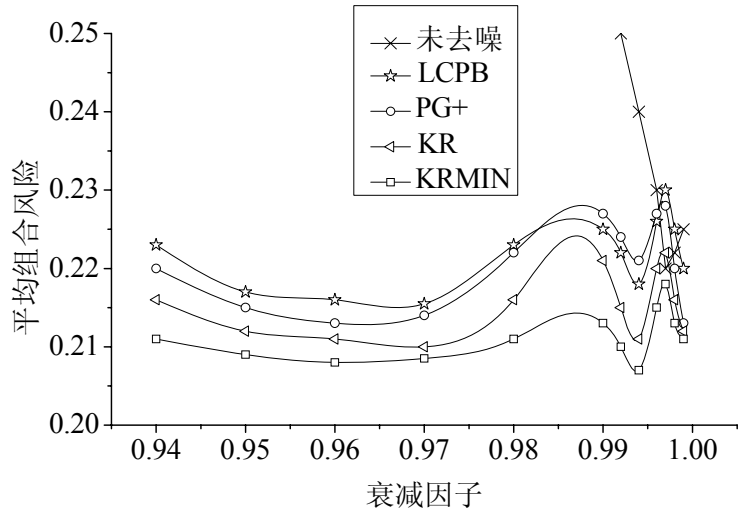
b) 局部放大图

图 3-9 不同衰减因子下 213 只股票收益相关矩阵去噪前后的平均组合风险

Fig.3-9 Average portfolio risks under different attenuation factors when return correlation matrices of 213 stocks are unfiltered or filtered



a) 整体图



b) 局部放大图

图 3-10 不同衰减因子下 396 只股票收益相关矩阵去噪前后的平均组合风险

Fig.3-10 Average portfolio risks under different attenuation factors when return correlation matrices of 396 stocks are unfiltered or filtered

接下来分析股票收益相关矩阵去噪对投资组合已实现风险的影响。先分析各种去噪法去噪后风险趋势的特点。可以看出，对于 $N=100$ ，213 和 396 中的每种情况，各去噪法去噪后的组合风险都有两个极小值（分别称之为极小值 I 和极小值 II）。极小值 I 对应的衰减因子非常接近于 1，极小值 II 对应的衰减因子更小些，为 0.96 或 0.97。在 100 和 213 只股票的情况下，极小值 II 对应的衰减因子是 0.97。在 396 只股票情况下，当用 LCPB 法和 KR 法去噪时，极小值 II 对应的衰减因子是 0.97。而如果使用 PG+法和 KRMIN 法去噪，极小值 II 对

应的衰减因子则是 0.96，但 0.97 对应的组合风险也非常低。这说明对本分析的月预测而言，Morgan 和 Reuters（1996 年）推荐的衰减因子值 0.97 是非常合理的。然后，对去噪引起的组合风险的变化进行分析。去噪后组合风险比未去噪组合风险下降的差额是由收益相关矩阵的噪声带来的。 $N=100, 213$ 和 396 时，每一种去噪法去噪后组合风险比未去噪组合风险下降的差额都呈现一种随 α 增加而下降的趋势，反映了收益相关矩阵越来越小的噪声。另外，由 3.4.2.1 节知， α 一定时，资产数量的增多会引起更大的噪声，因此可以预期各种去噪法的去噪效果会更好。如表 3-2 所示，在使用各种去噪法时，对于既定的 α ，随资产数量的增大，去噪后组合风险下降的比例变得越来越大。

表 3-2 对指数加权收益相关矩阵去噪后的组合风险比未去噪组合风险下降的比例
Table 3-2 Percentage reduction of portfolio risks after filtering exponentially weighted return correlation matrices

去噪法 N α	LCPB			KR			PG+			KRMIN		
	100	213	396	100	213	396	100	213	396	100	213	396
0.94	0.287	0.469	0.554	0.297	0.481	0.568	0.295	0.472	0.560	0.296	0.489	0.578
0.95	0.260	0.424	0.470	0.273	0.439	0.482	0.269	0.429	0.475	0.271	0.445	0.490
0.96	0.227	0.384	0.431	0.238	0.401	0.444	0.236	0.388	0.439	0.237	0.406	0.452
0.97	0.177	0.338	0.384	0.187	0.351	0.400	0.186	0.343	0.388	0.188	0.358	0.404
0.98	0.107	0.244	0.256	0.117	0.267	0.280	0.116	0.253	0.260	0.120	0.275	0.296
0.99	0.025	0.115	0.134	0.035	0.153	0.150	0.031	0.124	0.126	0.038	0.159	0.180
0.999	-0.007	-0.008	0.022	0.011	0.036	0.057	0.007	0	0.053	0.013	0.056	0.062

注释：黑体数据代表去噪后风险下降比例随 N 增大而减小的异常情况

（3）相等加权相关矩阵和指数加权相关矩阵的对比分析

下面对相等加权法和指数加权法的组合结果进行比较。衰减因子为 α 的指数加权收益相关矩阵对应的有效时间长度是 $-1/\ln\alpha$ 。据此，表 3-3 中每一行列出了 $N=100$ 时 α 的某一取值下指数加权收益相关矩阵和 $T=-1/\ln\alpha$ 的相等加权收益相关矩阵未去噪和经各种方法去噪后的组合结果。比如，第一行的指数加权结果是由 $N=100$ 和 $\alpha=0.994$ 时的指数加权收益相关矩阵得出的，相等加权结果是由 $N=100$ 和 $T=-1/\ln 0.994=166$ 天的相等加权收益相关矩阵计算的。可以看出，无论去噪前后，不同 α 下指数加权收益相关矩阵的组合风险都小于

$T = -1/\ln\alpha$ 的相等加权收益相关矩阵的组合风险。这表明考虑时间序列相关动态变化的指数加权收益相关矩阵比简单的相等加权收益相关矩阵能更有效地估计股票收益相关矩阵，更好地实现股票投资组合风险的优化。

表 3-3 衰减因子为 α 的指数加权收益相关矩阵和 $T = -1/\ln\alpha$ 的相等加权收益相关矩阵去噪前后组合平均风险

Table 3-3 Average portfolio risks pre-and post- denoising exponentially weighted correlation matrix with attenuation factor equal to α and equally weighted correlation matrix with T equal to $-1/\ln\alpha$

衰 减 因 子 α	未去噪		KR		LCPB		PG+		KRMIN	
	相 等 加 权	指 数 加 权	相 等 加 权	指 数 加 权	相 等 加 权	指 数 加 权	相 等 加 权	指 数 加 权	相 等 加 权	指 数 加 权
0.994	0.351	0.269	0.284	0.265	0.294	0.267	0.291	0.264	0.281	0.264
0.995	0.332	0.269	0.276	0.265	0.280	0.269	0.276	0.266	0.275	0.265
0.996	0.315	0.270	0.275	0.267	0.281	0.269	0.277	0.267	0.273	0.266
0.997	0.297	0.270	0.274	0.266	0.278	0.270	0.275	0.268	0.274	0.267
0.998	0.285	0.271	0.275	0.269	0.279	0.271	0.276	0.269	0.275	0.268
0.999	0.281	0.273	0.281	0.270	0.283	0.275	0.283	0.271	0.278	0.269

3.5 本章小结

论文先基于 RMT 说明了股票收益相等加权相关矩阵和指数加权相关矩阵噪声识别的原理，并以此为基础，对面向股票收益相关矩阵的现有三种 RMT 去噪法进行了介绍。从中总结出考虑特征向量 Krzanowski 稳定性的 KR 方法是去噪原理最为合理的 RMT 去噪法，不过该方法的原理和算法都存在一定的缺陷。为此，论文对股票收益相关矩阵的特征向量最小扰动稳定性进行了数理推导，从而弥补了特征向量 Krzanowski 稳定性研究领域的空白。并将该最小扰动稳定性引入 RMT 去噪法中，建立了 KRMIN 去噪法。KRMIN 法吸纳了 KR 法的以相关矩阵特征向量稳定性的提高为核心的思想，弥补了 KR 法的原理和算法存在的缺陷，是一种更有利于改进股票投资组合风险的 RMT 去噪法。

将 LCPB 法、PG+法、KR 法和 KRMIN 法用于三种不同股票数的投资组合

风险优化的实证研究结果表明当噪声相等时，指数加权相关矩阵的组合风险优化水平高于相等加权矩阵，说明噪声对指数加权矩阵的影响更小。此时，对指数加权矩阵去噪后的组合风险也低于对相等加权矩阵去噪后的组合风险。LCPB 法、PG+法、KR 法和 KRMIN 法对指数加权矩阵的组合风险优化水平的作用和它们对相等加权矩阵的组合风险优化水平的作用非常类似。各种 RMT 去噪法对相等加权矩阵和指数加权矩阵的去噪都能起到改进组合风险优化水平的作用。相等加权矩阵和指数加权矩阵的噪声越大，各种 RMT 去噪法的组合风险优化效果就越好。对于相等加权矩阵和指数加权矩阵来说，基于金融相关矩阵特征向量的 Krzanowski 稳定性的 RMT 去噪法都比其他 RMT 去噪法的实证表现更好，说明将相关矩阵特征向量的 Krzanowski 稳定性引入 RMT 去噪法能够使去噪模型更加精确。和 KR 方法相比，KRMIN 方法的实证表现更好，这说明投资组合风险存在一种随收益相关矩阵特征向量的最小扰动稳定性提高而减小的趋势。

第4章 基于多元波动率模型的 RMT 去噪法股票投资组合风险优化

4.1 基于 RMT 多元波动率模型去噪机理及对组合风险优化机制

4.1.1 基于 RMT 多元波动率模型去噪机理

用于估计多个资产间的条件协方差矩阵的多元波动率模型早就被提出，但估计方法一直没有多大进展，即所谓的“维数灾祸”阻碍了它们的应用。在估计观察值数量为 L 的 N 维向量的协方差矩阵时，传统的极大似然估计的适用条件是 L/N 趋于无穷大。实际应用中 L 是一定的，这使得协方差矩阵的估计存在误差。特别是 N 较大时，估计噪声的影响会非常大，甚至对协方差矩阵的估计起主导作用。收益协方差矩阵的噪声会造成资产组合风险优化水平的下降，很明显，为减小噪声对组合风险的影响，需要对协方差矩阵去噪。由于组合向量高维时的估计噪声至少部分性地将协方差矩阵转变成了随机矩阵，因此 RMT 非常适合于对协方差矩阵的去噪操作。RMT 的直接作用对象是收益相关矩阵的估计。借助于 RMT，可以去除高维相关矩阵中“维数灾祸”带来的随机噪声，而只保留描述变量间相关的真正有意义的信息。这样，RMT 就可以确定出高维相关矩阵的最佳维度。近年来出现了很多基于 RMT 对相关矩阵的研究工作。然而，相对于相关矩阵去噪而言，实际应用中更需要多元波动率即协方差矩阵的去噪。但是，将 RMT 应用于多元波动率模型去噪的研究未见报道。由于协方差矩阵可以被分解成相关矩阵和标准差矩阵两部分，因此通过相关矩阵去噪来实现对协方差矩阵的去噪是完全可能的。下面对基于 RMT 多元波动率模型去噪的机理进行说明。

设利用多元波动率模型对 N 只股票收益率 $r_i (i=1, 2, \dots, N)$ 的协方差矩阵进行估计。假定收益样本序列的长度为 T ，则 N 个股票收益序列可以表示为 $r_{i,t} (i=1, 2, \dots, N \quad t=1, 2, \dots, T)$ 。设在多元波动率模型中所建立的收益协方差矩阵为 S ，相关矩阵为 C ，由股票收益率的标准差组成的对角矩阵为 D ，则

$$S=DCD \quad (4-1)$$

由式(4-1)可看出，通过对 C 的去噪，可实现对 S 的去噪。基于 RMT 对金融相关矩阵去噪的方法已在第 3 章中进行了具体的介绍，不过，出于内容完整的需要，这里仍有必要再简要介绍一下 RMT 对金融相关矩阵去噪的原理。为

找出相关矩阵中的随机噪声，可以把随机矩阵特征值分布作为相关矩阵特征值分布的参照分布。随机相关矩阵特征值分布区间的上下限为

$$\lambda_{\pm} = 1 + \frac{1}{Q} \pm 2\sqrt{\frac{1}{Q}} \quad (4-2)$$

其中， $Q=T/N$ 。设 $r_{i,t} (i=1,2,\dots,N \quad t=1,2,\dots,T)$ 的相关矩阵是 C ， C 的全部特征值按由小到大的顺序依次是 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ 。确定 P ，使 λ_{N-P+1} 是明显大于 λ_+ 的最小特征值。相关矩阵 C 的 P 个最大特征值 $\lambda_N, \dots, \lambda_{N-P+1}$ 对应的特征向量是 $u^{(N)}, \dots, u^{(N-P+1)}$ ，对应的主成分是 $w^{(N)}, \dots, w^{(N-P+1)}$ 。设 $r_{i,t}$ 的标准化形式是 $\tilde{r}_{i,t}$ ，则

$$\tilde{r}_{i,t} = \sum_{l=0}^{P-1} u_i^{(N-l)} w_t^{(N-l)} + \varepsilon_{i,t} \quad (4-3)$$

$\varepsilon_{i,t}$ 是残差。利用(4-3)式计算 $\tilde{r}_{i,t}$ 的协方差矩阵，从而得到 $r_{i,t}$ 的去噪后相关矩阵为

$$C^p = U \Lambda^p U^T + \text{diag}(\{\sigma_{\varepsilon_i}^2\}) \quad (4-4)$$

其中， $\text{diag}(\{\sigma_{\varepsilon_i}^2\})$ 是残差方差的对角矩阵。 U 的第 k 列是对应于特征值 λ_k 的特征向量 $u^{(k)}$ 。 Λ^p 是对角矩阵，其对角线元素由 0 和 P 个最大特征值组成。具体地，

$$\Lambda_{ii}^p = \begin{cases} \lambda_i & i \geq N - P + 1 \\ 0 & i < N - P + 1 \end{cases}$$

根据相关矩阵和协方差矩阵的关系，去噪后的协方差矩阵为

$$S_{\text{filtered}} = D C^p D$$

根据上面的说明，RMT 去噪法通过对多元波动率模型的相关结构中反映相关信息的维度进行识别和保留，并去除或减弱其他噪声维度的影响来实现对多元波动率模型的去噪，这就是 RMT 对多元波动率模型的去噪原理。除了 RMT 去噪法外，单一指数法也是利用降维思想的去噪法。不同的是，该方法仅保留一个最大的特征值。另外，为了减小多元波动率的估计噪声，O-GARCH 模型、因子 GARCH 模型和 IC-GARCH 模型也使用了降维法。和上述降维法相比，RMT 去噪法的降维有以下两个优点：第一，保留了残差的方差，残差的协方差被去掉了。而在 O-GARCH 的去噪过程中，残差的方差和协方差都被去除了。这样，对于相关性弱的时间序列，RMT 去噪法会仍然有效，而 O-GARCH 可能会面临识别问题。第二，降维后需要保留的最佳维度由 RMT 确定。而 O-GARCH、因子 GARCH 和 IC-GARCH 模型各自需要保留的主成分数、因子数和独立成分数的确定缺乏理论支持。在使用这些模型时，人

们往往依据经验准则等对保留的维度数进行比较主观的确定。考虑到最大特征值的最重要地位，单一指数法不管样本的差异，始终仅保留最大的特征值。显然，这只是一个确定维度数的简易规则，它缺乏足够的理论依据。

RMT 去噪法的上述优势决定了它必定具有较好的去噪效果，并进而起到改进组合风险优化水平的作用。依据前述的 RMT 对多元波动率模型的去噪原理，RMT 既可以实现对已有一些多元波动率模型比如 O-GARCH、因子 GARCH 等的去噪，也可以新建立一些具有可由 RMT 降维的相关结构的多元波动率模型，并使用 RMT 对它们进行去噪。所以，RMT 对多元波动率模型的去噪原理的提出相当于建立了一个 RMT 对多元波动率模型去噪的一般方法。不过，由于各模型的原理、结构的不同，RMT 对它们去噪的方法细节会有所不同。

4.1.2 多元波动率模型去噪对组合风险的优化机制

为了对未来的股票组合投资进行决策，人们往往需要根据股票收益的历史信息对未来期股票的均值收益率和股票收益率的多元波动率进行预测，再据此得出组合收益率一定条件下方差最小的组合。本文将提供预测所需信息的时期称为预测期，将发生投资的时期称为投资期。由于预测期股票收益率数据的有限，利用多元波动率模型得到的多元波动率一般是含有噪声的。如果用该多元波动率直接预测未来期的多元波动率，则据此建立的投资组合在未来期的风险优化水平就会受到不利的影响。为了改进投资组合风险的优化水平，可以采用对多元波动率模型去噪的方法。接下来分析基于 RMT 多元波动率模型去噪对组合风险优化水平的具体作用机制。该分析包括如下两个假设条件。

1)预测期和投资期的总体收益协方差矩阵相同。由于预测期和投资期在时间上邻近，因此该假设十分合理。假设两期的总体收益协方差矩阵都为 S 。

2)对投资期各股票均值收益率的预测是正确的。对各股票均值收益率的预测会对投资组合的选择造成影响。由于这里重在分析股票收益率多元波动率预测对投资组合风险的作用，因此为避免该分析受到均值收益率预测的干扰，我们假定对均值收益率的预测是正确的。

假定股票数量为 N 。在股票组合收益率为 G 时，投资期中的最小方差组合为 $w_i (i=1,2,\dots,N)$ ，该组合的风险为 $R_{re}^2 = \sum_{i,j=1}^N w_i S_{ij} w_j$ 。

设以预测期股票收益率为样本，根据多元波动率模型得出的多元波动率为 S' 。它一般是含有噪声的。设在组合收益率为 G 的条件下，根据 S' 构建的投资组合的权重为 $w'_i (i=1,2,\dots,N)$ ，则对该组合在投资期中风险的预测值为

$$R_{pr}^2 = \sum_{i,j=1}^N w'_i S'_{ij} w'_j$$

它在投资期的真正风险为

$$R_{tr}^2 = \sum_{i,j=1}^N w'_i S_{ij} w'_j$$

由于 $S' \neq S$ ，所以根据 S' 构建的投资组合和投资期中真正最小方差组合一般并不一致。因此，

$$R_{tr}^2 \geq R_{re}^2$$

也因为 $S' \neq S$ ，所以

$$R_{pr}^2 \neq R_{tr}^2$$

可见，当股票收益率多元波动率含有噪声时，所构建的最小方差组合不是投资期真正最小方差组合，对该组合风险的预测不是正确的。RMT对多元波动率模型去噪的目的是为了减小 S' 的噪声。当 S' 的噪声被完全去除时， $S'=S$ 。于是，对投资期多元波动率的预测为 S 。那么，当股票组合收益率为 G 时，构建的最小方差组合为 $w_i (i=1,2,\dots,N)$ ，该组合的被预测风险为 R_{re}^2 。可见，当股票收益率多元波动率没有噪声时，所构建的最小方差组合就是投资期真正最小方差组合，对该组合风险的预测是完全正确的，说明此时达到了最高的组合风险优化水平。虽然这是一种很难达到的理想状态，不过RMT对多元波动率模型的去噪至少可以减少多元波动率的一部分噪声，使 S' 和 S 的差距减小，从而使组合风险下降和组合风险预测的准确率提高，并最终导致 S' 对应的组合风险优化水平的提高。依据前述的RMT对多元波动率模型的去噪原理，RMT既可以实现对已有一些多元波动率模型比如O-GARCH、因子GARCH等的去噪，也可以新建立一些具有可由RMT降维的相关结构的多元波动率模型，并使用RMT对它们去噪。这些对改进投资组合风险优化水平无疑具有重要的意义。为了演示RMT对多元波动率模型去噪的具体方法，也为了举例说明如何建立可由RMT降维的多元波动率模型，更是为了在后面实际地验证RMT对多元波动率模型的去噪用于改进组合风险优化水平的有效性，接下来的工作是建立两个可由RMT降维的多元波动率模型。

4.2 股票收益率多元波动率模型的构建

为了验证前一节提出的 RMT 对多元波动率模型的去噪原理用于改进组合风险优化水平的有效性，有必要先建立能够应用 RMT 去噪技术的多元波动率模型。为此，本节的主要工作是建立两个具有可由 RMT 去噪的相关结构的多元 GARCH 模型。这样，通过 RMT 对相关矩阵的去噪操作，这两个模型需要

保留的最佳维度（最低噪声维度）就能被确定，从而实现对它们的去噪。本文将基于 RMT 的降维思想融入多元 GARCH 模型的建模中，建立的两类多元 GARCH 模型被称为滑动相关多元 GARCH 模型（简记为 SC-GARCH）和改进的 O-GARCH 模型（简记为 IO-GARCH）。下面分别对这两个多元 GARCH 模型进行介绍。假定 N 个金融资产收益率的向量随机过程是 r_t ，第 $t-1$ 天的信息集合是 Ω_{t-1} ，收益率向量的条件协方差矩阵是 S_t 。

4.2.1 滑动相关多元 GARCH 模型

SC-GARCH 模型建立在将协方差矩阵分解成相关矩阵和标准差矩阵的基础上。在该模型中，第 i 个金融资产收益率 ($i=1,2,\dots,N$) 的波动性由下面的一元 GARCH(1,1)模型表示。

$$\sigma_{i,t}^2 = \alpha_{i,0} + \alpha_{i,1}\sigma_{i,t-1}^2 + \alpha_{i,2}\varepsilon_{i,t-1}^2 \quad (4-5)$$

式(4-5)中， $\sigma_{i,t}^2$ 、 $\varepsilon_{i,t}$ 分别是第 i 个金融资产收益率在第 t 天的方差和残差。参数通过极大似然估计法获得。由于本文旨在对不同的多元波动率模型进行比较，所以对残差做了简化的正态分布假定。将以 $\sigma_{i,t}$ ($i=1,2,\dots,N$) 为元素的对角矩阵记为 σ_t 。为反映相关随时间变化的动态性，在以第 t 天作为结束日期的固定长度的滑动时间窗中计算相关矩阵，并采用 RMT 去噪法对该相关矩阵进行去噪。去噪的结果是仅保留超过随机矩阵最大特征值 λ_+ 的 P 个最大的特征值，而用 0 代替其他特征值。设去噪前的相关矩阵为 c_t ，去噪后相关矩阵为 c_t^p ，那么保留 p 个最大特征值的 SC-GARCH 模型可由下式表示。

$$S_t = \sigma_t c_t^p \sigma_t^T \quad (4-6)$$

其中， σ_t^T 是 σ_t 的转置矩阵。下面分两种情况对 S_t 的半正定性或正定性进行证明。

第一种情况， $P=N$ 。由于保留了全部特征值的 c_t^p 是正定的，因此保证了 S_t 的正定性。此时可以推知

$$\sum_{i=1}^N \lambda_{i,t} U_{j,t}^{(i)2} = 1 \quad (j=1,2,\dots,N) \quad (4-7)$$

其中， $\lambda_{i,t}$ ($i=1,2,\dots,N$) 是 c_t 的特征值， $U_{j,t}^{(i)}$ ($i=1,2,\dots,N$ $j=1,2,\dots,N$) 是 $\lambda_{i,t}$ 对应的特征向量的第 j 个成分。

第二种情况， $P < N$ 。由式(4-4)知，

$$c_t^p = U_t \Lambda_t^p U_t^T + \text{diag}\left(\left\{\sigma_{\varepsilon_{i,t}}^2\right\}\right)$$

其中, Λ_t^p 是由 0 和 c_t 的 P 个最大特征值 $\lambda_{i,t} (i \geq N - p + 1)$ 组成的对角矩阵, U_t 是以 $\lambda_{1,t}, \lambda_{2,t}, \dots, \lambda_{N,t}$ 对应的特征向量为相应列向量的矩阵。设 Λ_t^p 的第 i 行元素为 $\Lambda_{ii,t}^p$, 则

$$\Lambda_{ii,t}^p = \begin{cases} \lambda_{i,t} & i \geq N - P + 1 \\ 0 & i < N - P + 1 \end{cases}$$

接下来, 分别证明 $U_t \Lambda_t^p U_t^T$ 和 $\text{diag}(\{\sigma_{\varepsilon_{i,t}}^2\})$ 的半正定性。为表述方便, 设 $U_t \Lambda_t^p U_t^T = A_t$, $\text{diag}(\{\sigma_{\varepsilon_{i,t}}^2\}) = B_t$ 。由前面研究知, Λ_t^p 的对角元素由 0, $\lambda_{N-P+1,t}$, $\lambda_{N-P+2,t}$, \dots , $\lambda_{N,t}$ 组成。因为特征值为正, 所以 A_t 就为半正定矩阵。不难得出 A_t 的第 j 行第 j 列元素为 $A_{jj,t} = \sum_{i=N-P+1}^N \lambda_{i,t} U_{j,t}^{(i)2}$ ($j=1,2,\dots,N$)。再根据(4-7)式, 可以得出 B_t 的第 j 行元素为

$$B_{jj,t} = 1 - A_{jj,t} = \sum_{i=1}^N \lambda_{i,t} U_{j,t}^{(i)2} - \sum_{i=N-P+1}^N \lambda_{i,t} U_{j,t}^{(i)2} = \sum_{i=1}^{N-P} \lambda_{i,t} U_{j,t}^{(i)2}$$

可看出 $B_{jj,t} \geq 0$, 那么 B_t 半正定, 所以 c_t^p 也是半正定矩阵。则由式(4-6)知, S_t 是半正定的。

4.2.2 改进的 O-GARCH 模型

受 O-GARCH 模型^[120]的启发, 本文建立了改进的 O-GARCH 模型, 简称为 IO-GARCH 模型。IO-GARCH 模型采用了类似于 O-GARCH 的将收益率向量进行主成分分解的思想, 从而也将多元 GARCH 模型转化为多个一元 GARCH 模型, 但具体的建模思路和方法与 O-GARCH 模型有些不同。根据协方差矩阵等价于相关矩阵和标准差矩阵的乘积, IO-GARCH 模型分别对相关矩阵和标准差建模。具体的估计步骤如下。

首先, 获得 r_t 的误差项 ε_t 。按照 GARCH5.1 软件的做法, 通过拟极大似然法估计 r_t 的条件均值方程:

$$r_t = \mu_t(\theta) + \varepsilon_t$$

ε_t 是误差项, 假定其服从正态分布, 且 $E(\varepsilon_t) = 0$ 。因为 $S_t = \text{var}(r_t | \Omega_{t-1}) = \text{var}_{t-1}(\varepsilon_t)$, 所以要估计 S_t , 则只需估计 ε_t 的条件协方差矩阵。

然后, 估计 ε_t 的条件相关矩阵。将 ε_{it} 标准化, 得到 x_{it} 。以 x_{it} 作为分量的向量记为 x_t 。设 x_t 的无条件协方差矩阵为 S , 那么存在着特征分解 $S = x_t x_t^T = w \Lambda w^T$, 其中 $\Lambda = \text{diag} \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ 是由 S 的 N 个特征值组成的对角矩

阵，且假定特征值按由大到小顺序排列，即 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ 。 $w = \{w_1, w_2, \dots, w_N\}$ 是由特征值对应的特征向量组成的正交矩阵。记 $l_t = (l_{1t}, l_{2t}, \dots, l_{Nt})^T = \text{diag}(\lambda_1^{-1/2}, \lambda_2^{-1/2}, \dots, \lambda_N^{-1/2}) w^T x_t$ 是主成分向量，可以证明不同主成分之间是无条件不相关或者相互正交的。设随机相关矩阵的特征值上限是 λ_+ ，S 的全部特征值中明显大于 λ_+ 的 P 个特征值是 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ 。则

$$\begin{aligned} x_t &= w \cdot \text{diag}(\lambda_1^{1/2}, \lambda_2^{1/2}, \dots, \lambda_N^{1/2}) \cdot l_t = \\ &w_{(1)} \cdot \text{diag}(\lambda_1^{1/2}, \lambda_2^{1/2}, \dots, \lambda_p^{1/2}) \cdot a_t + w_{(2)} \cdot \text{diag}(\lambda_{p+1}^{1/2}, \lambda_{p+2}^{1/2}, \dots, \lambda_N^{1/2}) \cdot b_t \end{aligned} \quad (4-8)$$

式(4-8)中， $w_{(1)}$ 是 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ 对应的特征向量为列形成的矩阵， a_t 是 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ 对应的主成分向量， $w_{(2)}$ 是 $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_N$ 对应的特征向量为列形成的矩阵， b_t 是 $\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \dots, \lambda_N$ 对应的主成分向量。

前面说明了主成分向量是无条件不相关的，设不同的主成分之间也是条件不相关的，即

$$\text{cov}(l_t | \Omega_{t-1}) = \text{diag}\{\sigma_{1t}^2, \sigma_{2t}^2, \dots, \sigma_{Nt}^2\} \quad (4-9)$$

另外不妨设每一个主成分的动态变化都可以用一个一元 GARCH(1,1)模型来表示，于是，结合式(4-8)和(4-9)，可以得到 x_t 的条件协方差矩阵为

$$\text{var}_{t-1}(x_t) = w_{(1)} \text{diag}(\lambda_1^{1/2}, \lambda_2^{1/2}, \dots, \lambda_p^{1/2}) \text{diag}(\sigma_{1t}^2, \sigma_{2t}^2, \dots, \sigma_{pt}^2) \text{diag}(\lambda_1^{1/2}, \lambda_2^{1/2}, \dots, \lambda_p^{1/2})^T w_{(1)}^T + \text{var}_\varepsilon$$

由RMT知， var_ε 代表随机噪声，所以将 var_ε 从 $\text{var}_{t-1}(x_t)$ 中去掉。为表述方便，将 $\text{diag}(\sigma_{1t}^2, \sigma_{2t}^2, \dots, \sigma_{pt}^2)$ 记为 Λ_t ，将 $w_{(1)} \text{diag}(\lambda_1^{1/2}, \lambda_2^{1/2}, \dots, \lambda_p^{1/2})$ 记为 A 。这样， x_t 的条件协方差矩阵就为 $A \Lambda_t A^T$ 。由于标准化向量的协方差矩阵等于原始向量的相关矩阵，所以 ε_t 的条件相关矩阵为

$$C_t = A \Lambda_t A^T$$

最后，估计 ε_t 的标准差。设 ε_{it} 的动态变化都可以用一个一元 GARCH(1,1)模型来表示，即对于 $i=1, 2, \dots, N$ 成立

$$\varepsilon_{it} | \Omega_{t-1} \sim N(0, \sigma_{\varepsilon_{it}}^2)$$

$$\sigma_{\varepsilon_{it}}^2 = \beta_{i,0} + \beta_{i,1} \varepsilon_{i,t-1}^2 + \beta_{i,2} \sigma_{\varepsilon_{i,t-1}}^2$$

将 $\text{diag}(\sigma_{\varepsilon_{1t}}, \sigma_{\varepsilon_{2t}}, \dots, \sigma_{\varepsilon_{Nt}})$ 记为 σ_t 。经过上面三步的分析和计算，可以得到 r_t 的条件协方差矩阵的如下表示

$$S_t = \sigma_t C_t \sigma_t^T = \sigma_t A \Lambda_t A^T \sigma_t^T$$

这样得到的 S_t 的模型就是IO-GARCH模型。可通过计算 x_t 的样本协方差矩阵 \hat{S} 的特征值和特征向量来对模型中的 A 进行估计。设 \hat{S} 的大于 λ_+ 的特征值按

由大到小的顺序是 $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_p$ ，相应地，以它们对应的正交化的特征向量为列形成的矩阵为 $\hat{w}_{(1)}$ ，则 $A = \hat{w}_{(1)} \cdot \text{diag}(\hat{\lambda}_1^{1/2}, \hat{\lambda}_2^{1/2}, \dots, \hat{\lambda}_p^{1/2})$ 。模型中其他系数则可以通过估计一元GARCH模型而得到。根据上述的推导过程，容易证明 S_t 是半正定的。

由上面的建模过程可看出 IO-GARCH 对 O-GARCH 模型的两个改进：第一，和 O-GARCH 模型的建模思路不同，IO-GARCH 模型对收益率的条件方差和收益率向量的条件相关矩阵分别建模，这样很合理地对各收益率拟合了时变的条件方差。但 O-GARCH 模型却采用了静态的收益率标准差，这不适合于估计收益率间时变的条件协方差矩阵。第二，IO-GARCH 中主成分的最佳使用数量或最佳维度由 RMT 确定，而 O-GARCH 的使用者们多是参照一些缺乏理论支持的经验准则来对主成分的数量进行比较主观的确定。

4.3 多元波动率模型去噪改进投资组合风险实证研究

实证研究的主要目的是检验基于 RMT 多元波动率模型的去噪用于改进组合风险优化水平的有效性。首先，对本节中投资组合风险优化水平的衡量方法进行说明。然后，给出由 RMT 确定的维度在内的各维度的 SC-GARCH 和 IO-GARCH 模型的组合风险优化水平的结果，并对结果进行分析。

4.3.1 投资组合风险优化水平的衡量方法

本节构建的投资组合包括相等权重组合和最小方差组合两种。这两种组合都是为了实现未来投资期组合风险的最小化而在对投资期组合风险的预测中构建的。假定投资期为第 t 日，那么对投资期某个资产组合方差的预测值是 $R_{i,pr}^2 = \sum_{j=1}^N w_{i,t} w_{j,t} S_{ij,t}$ ，其中 $w_{i,t}$ 是该资产组合中资产 i 的投资比例， $S_{ij,t}$ 是第 t 日资产 i 和资产 j 收益率协方差的预测值。如果是对第 t 日相等权重组合的方差进行预测，则 $w_{i,t} \equiv 1/N (i=1, 2, \dots, N)$ ，此时相当于对第 t 日资产间的平均协方差进行预测。如果是对第 t 日最小方差组合的方差进行预测，则需要先根据预测出的协方差矩阵计算出最小方差组合中各资产的投资比例 $w_{i,t} (i=1, 2, \dots, N)$ 。在 $\sum_{i=1}^N w_{i,t} = 1$ 的约束条件下，最小方差组合中资产 i 的投资比例是 $w_{i,t} = \sum_{j=1}^N S_{ij,t}^{-1} / \sum_{k,l=1}^N S_{kl,t}^{-1}$ 。可看出体现在最小方差组合上的预测能力不完全取决于一个模型对平均协方差的预测准确性，还和对协方差结构的预测有关。因此，相对于相等权重组合风险的优化水平而言，最小方差组合风险的优化水平更能真实地反映历史协方差矩阵的噪声大小。

本节利用基于“已实现”思想计算的协方差矩阵度量组合资产的真实波

动，将组合在投资期的已实现方差作为组合在投资期的真实风险。计算组合的已实现方差需要首先依据已实现协方差矩阵的定义计算组合资产的已实现协方差矩阵。本节中的投资期都是一天，设投资期中高频数据的采样频率是 $1/\Delta$ ，两次采样的时间间隔是 Δ ，这意味着投资期被分成 $1/\Delta$ 个小时时间段。下面计算某组合在以 t_0 作为开始时刻的第 t 天的已实现方差。将资产 i 在第 t 天中第 n 个时间段的收益率记为 $r_{it}(n)$ ，则

$$r_{it}(n) = p_{it}(t_0 + n\Delta) - p_{it}(t_0 + (n-1)\Delta) \quad n=1, 2, \dots, 1/\Delta$$

其中， $p_{it}(t_0 + n\Delta)$ 表示资产 i 在第 t 天的 $t_0 + n\Delta$ 时刻，即第 n 个时间段末的价格， $p_{it}(t_0 + (n-1)\Delta)$ 表示资产 i 在第 t 天的 $t_0 + (n-1)\Delta$ 时刻，即第 $n-1$ 个时间段末的价格。类似地，可以计算资产 j 在第 t 天中第 n 个时间段的收益率 $r_{jt}(n)(n=1, 2, \dots, 1/\Delta)$ 。根据已实现协方差矩阵的定义，第 t 天中资产 i 和 j 间的协方差为 $\sum_{n=1}^{1/\Delta} r_{it}(n)r_{jt}(n)$ 。于是，以 $w_{i,t}(i=1, 2, \dots, N)$ 为权重的投资组合在第 t 天的已实现方差为，

$$R_{t,re}^2 = \sum_{i,j=1}^N w_{i,t} w_{j,t} \sum_{n=1}^{1/\Delta} r_{it}(n)r_{jt}(n)$$

由于本文使用 5 分钟高频交易数据，所以 $\Delta=5$ 分钟， $1/\Delta=48$ 。本节实证分析使用 32 个投资期，它们是连续的 32 天。我们需要根据预测为每个投资期的组合投资事先构建一个相等权重组合和一个最小方差组合。设为某个投资期选定的相等权重组合或最小方差组合在该投资期的已实现方差为 $R_{t,re}^2(t=1, 2, \dots, 32)$ ，对该相等权重组合或最小方差组合已实现方差的预测值为 $R_{t,pr}^2(t=1, 2, \dots, 32)$ 。本节用对 $R_{t,re}^2$ 和 $R_{t,pr}^2$ 进行比较的两个指标即平均平方误差(MSE)和平均绝对百分误差(MAPE)表征相等权重组合和最小方差组合风险预测的准确率，并用其衡量组合风险的优化水平。MSE 和 MAPE 计算方法为

$$MSE = \frac{1}{32} \sum_{t=1}^{32} (R_{t,pr}^2 - R_{t,re}^2)^2$$

$$MAPE = \frac{1}{32} \sum_{t=1}^{32} \left| \frac{R_{t,pr}^2 - R_{t,re}^2}{R_{t,re}^2} \right|$$

MSE 和 MAPE 越低，表示组合风险预测的准确率越高，组合风险优化水平就越高。和相等权重组合不同，最小方差组合的权重并不固定，而是可控和可变的。随最小方差组合权重的变化，最小方差组合在投资期实现的风险就会变化。人们总希望能获得尽可能低的已实现风险，所以，除了 MSE 和 MAPE 外，本节也用平均已实现组合方差 (R_{re}^2) 衡量最小方差组合风险的优化水平。平均已实现组合方差 (R_{re}^2) 的计算方法为

$$R_{re}^2 = \sum_{t=1}^{32} R_{t,re}^2$$

R_{re}^2 越低，表示最小方差组合风险的优化水平越高。本节用MSE、MAPE和 R_{re}^2 共同衡量最小方差组合风险的优化水平，而仅用MSE和MAPE衡量相等权重组合风险的优化水平。另外，为了直观地体现预测风险值和已实现风险值的差别，本节还计算了平均预测组合方差 R_{pr}^2 ， R_{pr}^2 的计算方法与 R_{re}^2 相同。

4.3.2 实验结果和分析

实证分析使用的数据包括二组。第一组数据包括上海证券交易所上市的交易活跃的100只A股股票2002年1月4日至2009年7月24日日收盘价数据。这100只股票是从2002年至2008年年均换手率达到414%（同期上海证券市场年均换手率）以上的股票中随机选出的。第二组数据由该100只股票在2009年6月11日至2009年7月24日的5分钟间隔的收盘价数据组成，时间跨度为32个交易日，对每只股票每天采集48个交易数据。采用的原始数据来自于国泰安CSMAR数据库。利用第一组数据构建的模型有SC-GARCH(P)-1、SC-GARCH(P)-7、IO-GARCH(P)-1、IO-GARCH(P)-7和O-GARCH-1模型，其中 P 表示保留的特征值数，1或7代表预测期的年数。各模型的维度数由保留的特征值数决定，确切地说，二者是相等的。 P 是一个变量，每个模型随 P 的变化而变化。对上述每个模型，本节需要计算 P 的不同取值下的组合风险优化水平。对这些模型进行估计后，用这些模型对上述32个交易日中每天的最小方差组合、最小方差组合风险和相等权重组合风险进行预测，并使用由第二组数据计算得到的每日已实现组合风险来衡量预测的效果。可见，这32个交易日即是32个投资期。由于预测期和投资期是相邻的时期，而投资期并不固定，因此预测期也随之变化。具体地，当投资期是2009年6月11日时，用于估计IO-GARCH(P)-1、SC-GARCH(P)-1和O-GARCH-1的预测期是2008年6月11日至2009年6月10日的1年时期，用于估计IO-GARCH(P)-7和SC-GARCH(P)-7的预测期是2002年1月4日至2009年6月10日约7年的时期。当投资期是2009年6月12日时，用于估计IO-GARCH(P)-1、SC-GARCH(P)-1和O-GARCH-1的预测期是2008年6月12日至2009年6月11日的1年时期，用于估计IO-GARCH(P)-7和SC-GARCH(P)-7的预测期是2002年1月5日至2009年6月11日约7年的时期。以此类推，不难获得其他投资

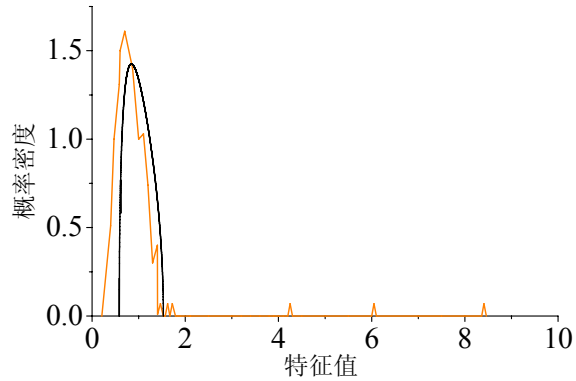
注：该章实证研究中所用的100只股票收益率数据过多，不便将其列出，所以，仅在附录的附表1中给出了这100只股票的名称。如果读者需要上述收益率数据，请向libingna519@163.com发邮件获取。

期对应的预测期。在估计各模型时都需要将原始股价转换为收益率。设 $P_{i,t}$ ($i=1,2,\dots,N$) 是第 i 只股票在第 t 天的收盘价, 则第 i 只股票在第 t 天的收益率为 $r_{i,t} = \ln p_{i,t} - \ln p_{i,t-1}$ 。在计算已实现协方差矩阵时, 将股价转换为收益率的方法和上述类似。

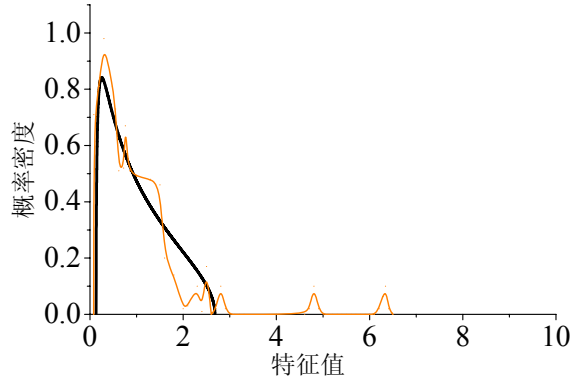
为了用RMT确定SC-GARCH(P)-1、SC-GARCH(P)-7、IO-GARCH(P)-1 和 IO-GARCH(P)-7 模型的最佳维度, 本文计算了 2002 年 1 月 4 日至 2009 年 6 月 10 日即 $T=1785$ 天的日收益率相关矩阵 c_1 和 2008 年 6 月 11 日至 2009 年 6 月 10 日即 $T=246$ 天的日收益率相关矩阵 c_2 的特征值概率密度函数 (pdf), 并将它们的特征值概率密度函数与各自对应的随机相关矩阵特征值的pdf进行了比较, 如图 4-1 所示。

从图 4-1 中能够看出, c_1 和 c_2 的大部分特征值由噪声产生, 处于RMT预测范围内。 c_1 的 5 个特征值超过了 λ_+ , 其中的 4.25、6.05 和最大特征值 $\lambda_{\max,1}=8.42$ 明显超过了 λ_+ 。在 c_2 的大于 λ_+ 的 3 个特征值中, 4.805 和最大特征值 $\lambda_{\max,2}=6.341$ 明显超过了 λ_+ 。从图 4-1a) 和图 4-1b) 中可看出, 和 1 年估计期的模型相比, 7 年估计期的模型大于 λ_+ 的特征值更多, 说明 7 年估计期的模型的噪声更小。估计期长的模型噪声较小的特点可通过(3-6)式证明。由(3-6)式易知, N 一定时, T 越大, Q 就会越大, 则 $[\lambda_-, \lambda_+]$ 的长度就会越小。然而, 并非估计期越长越好。短期估计期的模型能更好地描述由相关矩阵的最大特征值所代表的市场相关强度随时间变化的特点。可见, 由于估计期长度的不同, 各模型各有利弊。基于RMT的降维技术能使一个模型兼备长估计期的统计准确性和短估计期的很好反映相关动态变化的优点。

根据RMT, 可以通过剔除小于 λ_+ 的特征值来实现多元波动率模型的降维。然而, 一些学者的实证研究^[31]表明 λ_+ 附近的特征值对应的特征向量并不稳定, 这意味着多元波动率模型的质量并不会因为稍大于 λ_+ 的特征值的保留而发生较大变化。因此, 从理论上可以认为, 通过仅保留明显大于 λ_+ 的特征值, 多元波动率模型可达到最佳的维度^[44]。这意味着 $P=3$ 时的SC-GARCH(P)-7 模型和IO-GARCH(P)-7 模型理论上应该产生最佳的组合风险优化水平, $P=4$ 或 5 和 $P=3$ 接近, $P > 5$ 则会造成组合风险优化水平的下降。而对于SC-GARCH(P)-1 和IO-GARCH(P)-1 来说, $P=2$ 所决定的模型维度应该是最佳的, $P=3$ 时的组合风险优化水平和 $P=2$ 接近, $P > 3$ 则会造成组合风险优化水平的下降。由于篇幅限制, 本文仅具体列出了上述各模型达到各自的理论最佳维度和没降维时即 $P=100$ 时的组合风险优化水平结果。



a) c_1 特征值的pdf（灰线）和随机相关矩阵特征值的pdf（黑线）



b) c_2 特征值的pdf（灰线）和随机相关矩阵特征值的pdf（黑线）

图 4-1 收益相关矩阵和随机矩阵的特征值概率密度函数

Fig.4-1 Pdf of eigenvalues of stock return correlation matrix and random matrix

4.3.2.1 相等权重组合结果及分析

如表 4-1 所示，所有模型都高估了相等权重组合的已实现方差。其中 SC-GARCH(P)-7 模型具有最大的预测误差，这主要是由于它过高地预测了已实现相关水平。相关矩阵最大特征值的大小是总体相关程度的反映。2009 年 6 月 11 日已实现相关矩阵的最大特征值是 5.304，它明显小于 2002 年 1 月 4 日至 2009 年 6 月 10 日的股票收益相关矩阵的最大特征值 $\lambda_{\max,1}=8.42$ ，这表明 SC-GARCH(P)-7 过高地预测了投资期的平均相关水平，而相等权重组合方差对平均相关强度十分敏感，因此平均相关水平的高估就造成了 SC-GARCH(P)-7 对相等权重组合已实现方差的高估。

由表 4-1 还可以看出，SC-GARCH(P)-1 模型对相等权重组合方差的预测准确性最高。由前面内容知，当以 2008 年 6 月 11 日至 2009 年 6 月 10 日的 1 年期为估计期时，股票收益相关矩阵的最大特征值为 $\lambda_{\max,2}=6.341$ 。不难看出，

它和 2009 年 6 月 11 日已实现相关矩阵的最大特征值 5.304 很接近, 说明 SC-GARCH(P)-1 比 SC-GARCH(P)-7 能更好地描述已实现相关的动态变化, 这使得 SC-GARCH(P)-1 模型对相等权重组合方差的预测准确性高于 SC-GARCH(P)-7 模型。和 SC-GARCH 模型类似, 由于 IO-GARCH(P)-1 比 IO-GARCH(P)-7 能更准确地预测平均相关程度, 所以 IO-GARCH(P)-1 对相等权重组合方差的预测误差比 IO-GARCH(P)-7 小, 不过它们的差距很小。由表 4-1 还可以观察到, O-GARCH 对相等权重组合方差的预测误差比 SC-GARCH(P)-1、IO-GARCH(P)-1 和 IO-GARCH(P)-7 都大。

从相等权重组合方差的预测结果可以看出, 去噪对 IO-GARCH 模型和 SC-GARCH 模型的相等权重组合风险优化水平的改进作用很小。这主要是因为, 预测相等权重组合方差相当于预测平均协方差, 而降维对平均相关程度的预测影响很小。而且对平均协方差的计算已经是降维的极端形式。

表 4-1 相等权重组合风险优化水平结果

Table 4-1 Results of optimization level of equal weighted portfolio risks

模型	$R_{pr}^2 \times 10^4$	$R_{re}^2 \times 10^4$	MAPE	$MSE \times 10^8$
SC-GARCH(2)-1	0.689	0.625	0.339	0.019
SC-GARCH(100)-1	0.697	0.625	0.312	0.021
SC-GARCH(3)-7	0.976	0.625	0.761	0.171
SC-GARCH(100)-7	0.955	0.625	0.794	0.167
IO-GARCH(2)-1	0.795	0.625	0.509	0.042
IO-GARCH(100)-1	0.789	0.625	0.487	0.040
IO-GARCH(3)-7	0.804	0.625	0.498	0.049
IO-GARCH(100)-7	0.816	0.625	0.539	0.054
O-GARCH-1	0.894	0.625	0.657	0.098

4.3.2.2 最小方差组合结果及分析

本节用最小方差组合已实现方差的大小和对最小方差组合已实现方差的预测准确性衡量最小方差组合已实现方差的优化水平, 即 R_{re}^2 、MSE 和 MAPE 越小, 说明组合方差优化水平就越高。根据图 4-2、图 4-3 和表 4-2 给出的最小

方差组合风险优化水平的结果，可以得出如下的分析结论：

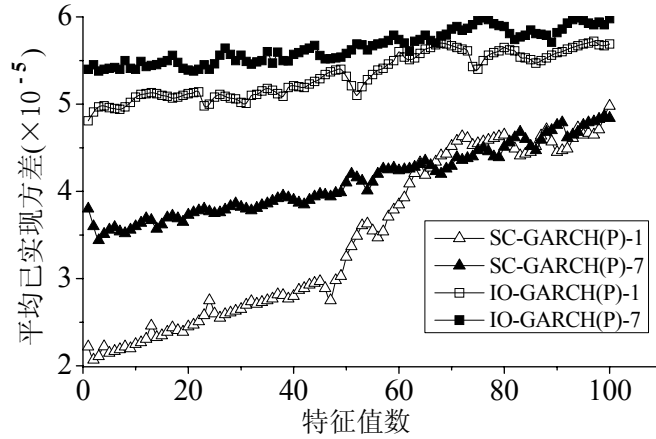


图 4-2 各维度模型预测的最小方差组合的平均已实现方差 R_{re}^2
Fig.4-2 Average realized variances of minimum variance portfolios
as a function of model dimensions

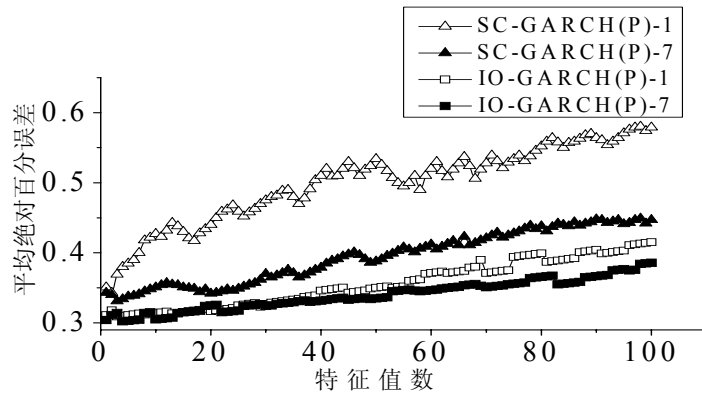


图 4-3 用各维度模型预测最小方差组合方差的 MAPE
Fig.4-3 Mean absolute percentage error in predicting variances of minimum variance
portfolios as a function of model dimensions

第一，随着特征值数 P 的下降，各模型预测的最小方差组合的已实现方差 R_{re}^2 和 MAPE 都具有减小趋势。由 RMT 知，这主要是由于随着维数的降低，噪声减小的缘故。当 SC-GARCH(P)-1 和 SC-GARCH(P)-7 达到 RMT 确定的最佳维度即分别在 $P=2$ 和 $P=3$ 时， R_{re}^2 和 MAPE 都会达到最小。虽然 IO-GARCH(P)-1 的 R_{re}^2 和 MAPE 达到最低时各自对应的维度数即 $P=1$ 和 3 并不是由 RMT 确定的最佳维度 $p=2$ ，但在 $p=2$ 时 R_{re}^2 和 MAPE 都十分接近于最低的

水平。IO-GARCH(P)-7 达到 RMT 确定的最佳维度 $P=3$ 时, R_{re}^2 达到最小, 此时 MAPE 也和最小值十分接近。上述说明了 RMT 可以为多元波动率模型的降维提供理论支持, 并且对多元波动率模型的最佳维度进行准确的确定。

第二, 降维对各模型的组合风险优化水平都有改进作用, 尤其是对短估计期模型的 R_{re}^2 和 MAPE 的影响更加显著, 该特点在 SC-GARCH 模型和 IO-GARCH 模型上都有所体现。根据 RMT, 这主要是因为模型估计期越短, 受到的噪声影响就越大的缘故。

表 4-2 最小方差组合风险优化水平结果
Table 4-2 Results of optimization level of minimum variance portfolio risks

模型	$R_{pr}^2 \times 10^4$	$R_{re}^2 \times 10^4$	MAPE	$MSE \times 10^8$
SC-GARCH(2)-1	0.148	0.207	0.343	0.014
SC-GARCH(100)-1	0.297	0.498	0.579	0.043
SC-GARCH(3)-7	0.218	0.344	0.331	0.022
SC-GARCH(100)-7	0.305	0.484	0.447	0.041
IO-GARCH(2)-1	0.331	0.491	0.318	0.041
IO-GARCH(100)-1	0.337	0.569	0.415	0.057
IO-GARCH(3)-7	0.359	0.538	0.314	0.036
IO-GARCH(100)-7	0.379	0.598	0.385	0.067
O-GARCH-1	0.235	0.607	0.669	0.197

第三, 在最小方差组合风险的优化水平上, 长短估计期模型各具有不同的优势。当用 R_{re}^2 衡量组合风险优化水平时, 短估计期的模型更具有优势。由于短估计期的模型能对收益率向量的总体相关水平进行更准确的预测, 所以模型的估计期越短, R_{re}^2 就越小。尤其是由于短估计期模型的噪声大, 所以在降维后短估计期的模型在 R_{re}^2 上的优势表现得更加明显, 如图 4-2 所示。而当用组合风险预测准确性衡量组合风险优化水平时, 长估计期的模型比短估计期的模型更具有优势。由于长估计期模型预测的协方差矩阵具有更大的信息含量, 所以模型的估计期越长, MAPE 就越小。但是, 短估计期的模型在去除较大的噪

声影响后，和长估计期模型的差距大大减小，如图 4-3 所示。通过对长短估计期模型优化水平的分析和比较，能够看出如果考虑降维的作用，则对 SC-GARCH 模型和 IO-GARCH 模型来说，短期模型都更为可取。

第四，在最小方差组合风险的优化水平上，SC-GARCH 模型和 IO-GARCH 模型的优势是不同的。SC-GARCH 模型的 R_{re}^2 小于 IO-GARCH 模型，而 IO-GARCH 模型在 MAPE 上的表现优于 SC-GARCH 模型。但相比较而言，SC-GARCH 模型在 R_{re}^2 上的优势更大。尤其在降维后，SC-GARCH 模型的这一优势更加明显，而在 MAPE 上的劣势大大减小。

第五，SC-GARCH 模型和 IO-GARCH 模型的最小方差组合风险优化水平高于 O-GARCH 模型。如前所述，SC-GARCH 模型和 IO-GARCH 模型的相等权重组合风险优化水平也好于 O-GARCH 模型。SC-GARCH 模型和 IO-GARCH 模型与 O-GARCH 模型都是基于主成分分析方法建立起来的，而且 O-GARCH 模型是公认的适合高维波动率预测的模型，所以本文就选用 O-GARCH 模型作为基准模型。通过与 O-GARCH 模型的比较，可以对 SC-GARCH 模型和 IO-GARCH 模型的质量做出评价。SC-GARCH 模型和 IO-GARCH 模型的组合风险优化水平高于 O-GARCH 模型，从中能够推断出由 SC-GARCH 模型和 IO-GARCH 模型得到的波动率的噪声较小，这说明 SC-GARCH 模型和 IO-GARCH 模型的质量较好，建模合理，非常适合于多元波动率的建模和预测。

通过上面对各模型的相等权重组合风险优化水平和最小方差组合风险优化水平的分析和比较，可以得出降维后的短估计期 SC-GARCH 模型即 SC-GARCH(2)-1 是最好的模型。这给多元波动率模型的选择和应用带来的启示是：第一，为获得对协方差矩阵的准确预测，并进而提高投资组合风险优化水平，多元波动率模型必须能够正确地描述相关的动态变化，这可以通过选择相对短的估计期来实现。较短的估计期不仅能够保证相等权重组合方差预测的较高准确性，而且还可以提高最小方差组合方差的预测能力。第二，较短的估计期会造成较大的估计噪声，因此需要对所获得的多元波动率进行去噪，这是提高最小方差组合风险优化水平的关键因素。

4.4 本章小结

本章依据 RMT 探究了对股票收益率多元波动率模型去噪的原理，提出了对多元波动率模型去噪的一般方法。对该方法的组合风险优化作用的理论研究表明，该方法能通过对股票收益率相关矩阵的去噪而实现对股票收益率多元波

动率模型的去噪，进而起到改进组合风险优化水平的作用。为了验证所提出的 RMT 去噪法对改进组合风险优化水平的有效性，本章建立了将基于 RMT 的相关矩阵估计和波动率结合在一起的 SC-GARCH 模型和 IO-GARCH 模型，并针对我国股市进行了实证研究。

实证研究结果表明由 SC-GARCH 模型和 IO-GARCH 模型得到的组合风险优化水平较高，说明这两个模型的质量较好。相等权重组合风险的优化水平主要取决于股票收益率协方差矩阵水平噪声的大小，而 RMT 去噪技术对水平噪声的作用很小，因此对相等权重组合风险优化水平的改进作用十分有限。在最小方差组合风险的优化水平上，SC-GARCH 模型和 IO-GARCH 模型的主要区别在于 SC-GARCH 模型在平均已实现组合方差 (R_e^2) 上的表现更好，而 IO-GARCH 模型在平均绝对百分误差 (MAPE) 上有更大的优势。除此之外，长、短估计期模型的 R_e^2 和 MAPE 随维度的变化趋势和变化特点对 SC-GARCH 模型和 IO-GARCH 模型是完全相同的。RMT 去噪法对各种估计期的 SC-GARCH 和 IO-GARCH 模型的最小方差组合的 R_e^2 和 MAPE 都有改进作用，尤其是对短估计期模型的改进作用更大，这主要是由于短估计期模型噪声较大的缘故。RMT 去噪法能对各种估计期的 SC-GARCH 和 IO-GARCH 模型的最低噪声维度进行正确的确定，从而实现最小方差组合风险的最优化。这证实了本章提出的用于股票收益率多元波动率模型的 RMT 去噪模型的正确性，RMT 能够为多元波动率模型的去噪，并进而为股票投资组合风险的优化提供有效的理论支持。

第5章 基于收益样本协方差矩阵的蒙特卡洛 RMT 去噪法小组合风险优化

一些研究表明，相对于几百只乃至上千只资产的组合而言，RMT去噪法对较小数量资产的组合，特别是百只以下资产的组合的协方差去噪的作用很小^[43 45 91]。组合中资产数量较小时，收益协方差矩阵的噪声也会很小，这是造成RMT方法去噪作用变得不明显的原因之一。我们认为，除此之外，当组合中资产数量减小到一定水平时，RMT去噪法中最大噪声特征值的较大计算误差也会造成RMT去噪法有效性下降。当组合中资产数量减至较低水平时，因最大噪声特征值准确性的下降而使RMT去噪法效力受到较大影响的组合在本章被称为小组合。

在本章对小组合风险优化的研究中，先是对已有 RMT 去噪法进行介绍。然后指出小组合风险优化时已有 RMT 去噪法的缺陷，即最大噪声特征值准确性下降的问题，并分析该问题产出的原因。最后，为解决上述问题对小组合风险优化的不利影响，提出蒙特卡洛 RMT 去噪法，并进行以验证蒙特卡洛 RMT 去噪法效力为目的的实证研究工作。

由于 RMT 去噪法效力下降的问题是组合资产数量减小至一定水平时发生的，因此该问题的研究对改进 RMT 方法对组合，特别是较小数量资产组合的去噪作用，从而提高组合的优化水平具有重要的意义。在美国，大多数基金的投资组合囊括了超过 100 种证券，但个人投资者的投资组合规模一般都不大。和美国相比，我国证券投资组合的规模更小，主要因为我国资本市场以中小投资者为主，机构投资者所占比例过低，且投资规模较小。可见，现实经济中，小规模投资组合的使用是非常多的。本章关于小组合风险优化的研究对促进这些小规模投资组合风险的优化和满足日益增长的理财需求有很大的现实意义。

5.1 面向股票收益样本协方差矩阵的现有 RMT 去噪法

面向股票收益协方差矩阵的现有 RMT 去噪法包括 LCPB 法、PG+法和 KR 法。在具体介绍这三种方法前，有必要先对它们的适用对象即股票收益协方差矩阵的计算方法进行介绍。

5.1.1 股票收益样本协方差矩阵的计算方法

股票收益样本协方差矩阵的计算方法主要包括相等加权法和指数加权法两种方法。由相等加权法和指数加权法得到的样本协方差矩阵分别被称为相等加权样本协方差矩阵和指数加权样本协方差矩阵。假定有 N 只股票，第 i 只股票在第 t 期末的价格是 P_{it} ($i=1, 2, \dots, N, t=1, 2, \dots, T$)，则第 i 只股票在第 t 期的收益为

$$G_{it} = \ln p_{it} - \ln p_{i,t-1}$$

当采用相等加权法时，第 i 只和第 j 只股票收益的协方差是

$$s_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (G_{it} - \langle G_{it} \rangle)(G_{jt} - \langle G_{jt} \rangle) \quad (5-1)$$

其中 $\langle \dots \rangle$ 表示 T 期的均值。当采用指数加权法时，第 i 只和第 j 只股票收益的协方差是

$$s_{ij}^* = \frac{1-\alpha}{1-\alpha^T} \sum_{t=0}^{T-1} \alpha^t (G_{i,T-t} - \langle G_{it} \rangle)(G_{j,T-t} - \langle G_{jt} \rangle) \quad (5-2)$$

通过(5-1)和(5-2)式，即可得到股票收益相等加权样本协方差矩阵和指数加权样本协方差矩阵。

5.1.2 现有 RMT 去噪法

到目前为止，能被用于对股票收益协方差矩阵去噪的RMT方法包括LCPB法、PG+法和KR法。设股票收益相等加权协方差矩阵和指数加权协方差矩阵对应的随机协方差矩阵的最大特征值是 λ_+ ，则股票收益协方差矩阵所有特征值中小于 λ_+ 的部分可以被视为噪声特征值。上述三种RMT去噪法是通过对这些识别出的噪声特征值的替换来去噪的。

5.1.2.1 LCPB 去噪法

假定一个 $N \times N$ 股票收益协方差矩阵 S 的特征值序列是 $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=1}^N$ ， $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N$ ，以它们对应的特征向量作为相应的列形成的矩阵是 E 。 S 的特征值中小于RMT预测的最大特征值 λ_+ 的部分代表噪声，我们将噪声特征值的子序列表示为

$$\Lambda_{\text{noisy}} = \{ \lambda \in \Lambda : \lambda \leq \lambda_+ \}$$

那么，滤噪后的特征值序列为

$$\Lambda_{\text{filtered}} = \Lambda_{\text{new}} \cup (\Lambda - \Lambda_{\text{noisy}})$$

其中，

$$\Lambda - \Lambda_{\text{noisy}} = \{ \lambda \in \Lambda : \lambda \notin \Lambda_{\text{noisy}} \}$$

被视为包含信息的特征值， $\Lambda_{\text{new}} = \{\hat{\lambda}_i\}_{i=1}^n$ 是用于替代噪声特征值的新特征值序

列, $\hat{\lambda}_1 < \hat{\lambda}_2 < \dots < \hat{\lambda}_n$ 。对于 $i=1, 2, \dots, n$,

$$\hat{\lambda}_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_i$$

接下来, 将 $\Lambda_{\text{filtered}}$ 作为主对角线元素的对角矩阵记为 D_{filtered} 。那么由谱分解定理, 去噪后的协方差矩阵为

$$S_{\text{filtered}} = E D_{\text{filtered}} E^{-1} \quad (5-3)$$

5.1.2.2 PG+去噪法

除了用 0 替代噪声特征值外, 该方法与 LCPB 去噪法的原理基本相同。由于取代噪声特征值的新特征值的和与噪声特征值的和并不相等, 因此, S_{filtered} 的迹与 S 的迹是不同的。所以, 当使用 PG+ 去噪法时, 在去噪后矩阵 S_{filtered} 建立以后, 需使其主对角线元素恢复至原始矩阵 S 的水平, 这样做的目的是保持 S 的迹即特征值的和不变, 以防止发生系统畸变。

5.1.2.3 KR 去噪法

与 LCPB 和 PG+ 去噪法对噪声特征值的简单替换不同, KR 去噪法根据股票收益协方差矩阵特征向量稳定性最大化的原则来对噪声特征值进行替换。KR 法利用的特征向量稳定性是以特征值减小时特征向量发生的最大扰动衡量的。设特征值 λ_i 的减小最多为 ε 时, λ_i 对应的特征向量通过发生最大的扰动而产生的夹角为 θ_i , 则

$$\cos \theta_i = \left(1 + \frac{\varepsilon}{\lambda_i - \lambda_{i-1}}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad i = 2, 3, \dots, N \quad (5-4)$$

其中, λ_i 是特征值, 它们满足 $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_N$ 。 $\cos \theta_i$ 可用来衡量 λ_i 对应的特征向量的稳定性。 $\cos \theta_i$ 越大, 表明 θ_i 越小, 则 λ_i 对应的特征向量的稳定性就越大。KR 法将用来替代噪声特征值的新特征值序列 Λ_{new} 设定为等差数列, 这样, 新特征值间的关系为

$$\hat{\lambda}_i = \hat{\lambda}_1 + (i-1)c \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5-5)$$

其中, 公差 c 是常数, $c \geq 0$ 。 $\hat{\lambda}_1$ 是最小新特征值。为使去噪后收益相关矩阵的迹不变, 新特征值的和与被替代的噪声特征值的和必须相等, 由此得出

$$c = \frac{2(a - \hat{\lambda}_1)}{n-1}$$

其中, a 是噪声特征值的均值。由于新特征值为正, 且 $c \geq 0$, 因此 $0 < \hat{\lambda}_1 \leq a$ 。由 (5-4) 式知, 为了使协方差矩阵特征向量的平均稳定性达到最大, 必须尽可能地提高相邻特征值的差。为此, KR 法让 $\hat{\lambda}_1$ 非常接近于 0。在 $\hat{\lambda}_1$ 确定后, 根据 (5-5) 式, $\hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3, \dots, \hat{\lambda}_n$ 也能被确定。最后, 根据 (5-3) 式, 可以求出

S_{filtered} 。

5.2 小组合条件下现有 RMT 去噪法的缺陷

到目前为止，还没有针对小组合去噪而专门设计的 RMT 方法。和大组合相同，能够用于小组合协方差的 RMT 去噪法主要有三种，即 LCPB 法、PG+法和 KR 法。利用这三种 RMT 去噪法对股票收益协方差矩阵去噪的首要环节是对股票收益协方差矩阵噪声特征值的识别。如 5.1 节所述，RMT 去噪法主要通过对噪声特征值的替换来实现对股票收益协方差矩阵的去噪。而为了替换噪声特征值，首先必须识别出噪声特征值。当对小组合股票收益协方差矩阵去噪时，引起 RMT 去噪法效力下降的问题主要发生在噪声特征值识别环节，因此，在指出该问题之前，有必要先对股票收益协方差矩阵噪声特征值的识别原理进行介绍。

5.2.1 噪声特征值识别原理

由相等加权法和指数加权法计算的样本协方差矩阵噪声特征值的识别原理是不同的。假定 N 个长度为 T 、样本方差为 σ^2 的股票收益序列 $r_{1t}, r_{2t}, \dots, r_{Nt}$ 的相等加权样本协方差矩阵为 S_{eq} ，指数加权样本协方差矩阵为 S_{ex} 。下面先介绍 S_{eq} 的噪声特征值的识别原理。 $r_{1t}, r_{2t}, \dots, r_{Nt}$ 在形成过程中会受到一些彼此独立的随机因素的作用。由于股票收益序列长度的有限，这些原本独立的随机因素也会表现出一定的相关度，从而对股票收益样本协方差矩阵造成影响。各随机因素间的协方差能够在股票收益样本协方差矩阵中反映出来，但是由于这些协方差是由相互独立的随机因素形成的，并不代表股票收益序列间真正的相关情况，因此，可以将各随机因素间的协方差及由此产出的特征值视为股票收益样本协方差矩阵中的噪声。根据上述分析，要识别出股票收益样本协方差矩阵的噪声特征值，必须先建立前述随机因素间的随机样本协方差矩阵，并计算该随机协方差矩阵的特征值。 S_{eq} 对应的随机协方差矩阵为

$$R = \frac{1}{T} A A^T \quad (5-6)$$

其中， A 是一个 $N \times T$ 矩阵，其中元素是均值为 0，方差为 σ^2 的独立、相同分布的随机变量。由于用于计算 R 的随机序列的个数、长度和方差与用于计算 S_{eq} 的时间序列相等，因此，可以依据 R 的特征值分布区间确定 S_{eq} 的噪声特征值的范围。

接下来介绍指数加权样本协方差矩阵 S_{ex} 的噪声特征值的识别原理。 $r_{1t}, r_{2t}, \dots, r_{Nt}$ 在形成过程中会受到一些彼此独立的随机因素的作用。当采用指数

加权法计算样本协方差矩阵时，这些原本独立的随机因素也会表现出一定的相关度，并在股票收益样本协方差矩阵中反映出来。但是由于这些协方差是由相互独立的随机因素形成的，并不代表股票收益序列间真正的相关情况，因此，可以将各随机因素间的协方差及由此产出的特征值视为股票收益样本协方差矩阵中的噪声。根据上述分析，要识别出 S_{ex} 的噪声特征值，必须先建立前述随机因素间的指数加权随机协方差矩阵，并计算该随机协方差矩阵的特征值。 S_{ex} 对应的指数加权随机协方差矩阵 $M = \{m_{ij}\}_{i,j=1}^N$ 的元素为

$$m_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} (1-\alpha)\alpha^k x_{ik}x_{jk} \quad (5-7)$$

其中， x_{ik} ($i=1, 2, \dots, N, k=0, \dots, \infty$) 是均值为 0、方差为 σ^2 的正态分布的随机变量。由于用于计算 M 的随机序列的个数和方差与用于计算 S_{ex} 的股票收益序列相等，因此，可以依据 M 的特征值分布区间确定 S_{ex} 的噪声特征值的范围。

接下来，我们用 $[\lambda_-, \lambda_+]$ 表示相等加权随机协方差矩阵 R 和指数加权随机协方差矩阵 M 的特征值区间，则由前面的分析知， S_{eq} 和 S_{ex} 的特征值中属于 $[\lambda_-, \lambda_+]$ 的部分应被识别为噪声特征值。然而，由于小于 λ_- 的特征值对应的特征向量并不稳定，因此，在应用RMT去噪法时，通常将不大于 λ_+ 的特征值都当做噪声特征值而对其进行替换。由于 λ_+ 界定了噪声特征值的上限，因此，这里将 λ_+ 称为最大噪声特征值。

根据股票收益相等加权协方差矩阵和指数加权协方差矩阵噪声特征值识别的上述原理，RMT去噪法对这两种股票收益协方差矩阵的噪声识别就是要找到它们对应的随机协方差矩阵的最大噪声特征值 λ_+ 。然而， λ_+ 并非能轻易地算出。在依据(5-6)和(5-7)式计算 λ_+ 时，RMT去噪法的计算结果存在误差，特别是当组合中资产数量较小时， λ_+ 的计算误差会更大，下面具体分析 λ_+ 的计算误差问题。

5.2.2 最大噪声特征值精度分析

接下来，从 λ_+ 的具体计算方法和计算结果入手对RMT去噪法计算 λ_+ 的准确性进行分析。

先看看 RMT 去噪法对相等加权协方差矩阵最大噪声特征值的计算方法和结果。研究表明，在 $N, T \rightarrow \infty$ 且 $Q=T/N$ 不变情况下，由(5-6)式得到的 R 的特征值的概率密度函数为

$$p(\lambda) = \begin{cases} \frac{Q}{2\pi\sigma^2} \frac{\sqrt{(\lambda_+ - \lambda)(\lambda - \lambda_-)}}{\lambda} & \lambda_- \leq \lambda \leq \lambda_+ \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

其中，最大噪声特征值 λ_+ 为，

$$\lambda_+ = \sigma^2(1 + 1/Q + 2\sqrt{1/Q})$$

再看看 RMT 去噪法对指数加权协方差矩阵最大噪声特征值的计算方法和结果。研究表明，在 $N \rightarrow \infty$ ， $\alpha \rightarrow 1$ ，且 $Q = 1/[N(1 - \alpha)]$ 不变时，由(5-7)式得到的 M 的特征值概率密度函数为

$$\rho(\lambda) = \frac{Qv}{\pi}$$

其中 v 是函数 $F(v)$ 取值为 0 时的解。

$$F(v) = \frac{\lambda}{\sigma^2} - \frac{v\lambda}{\tan(v\lambda)} + \ln(v\sigma^2) - \ln(\sin(v\lambda)) - \frac{1}{Q}$$

在 $N \rightarrow \infty$ ， $\alpha \rightarrow 1$ ，且 $Q = 1/[N(1 - \alpha)]$ 不变时，M 的最大特征值 λ_+ 是下述方程的解

$$\frac{\lambda}{\sigma^2} - \ln\left(\frac{\lambda}{\sigma^2}\right) = 1 + \frac{1}{Q}, \lambda > \sigma^2$$

根据 λ_+ 的上述计算方法，三种RMT去噪法并没有直接计算随机协方差矩阵的最大特征值 λ_+ ，而是用随机协方差矩阵在极限条件下的最大特征值近似地表示 λ_+ 。由于实际应用中N都是有限的，因此，RMT去噪法在 $N \rightarrow \infty$ 时计算的 λ_+ 会偏离于真正的 λ_+ 。不难想象，两者的偏差会随N的减小而增大。当N较小时，对 λ_+ 计算的准确性也会因此降至较低水平。小组合条件下对 λ_+ 的较大计算偏差会对接下来的噪声特征值的替换造成不利的影响，造成过度替换或替换不足。无论是过度替换还是替换不足，都会给 D_{filtered} 的确定带来较大的误差，造成RMT法去噪效力的下降，并进一步地对股票投资组合风险的优化带来不利的影响。

5.3 蒙特卡洛 RMT 去噪法的设计和实现

5.3.1 设计思想

为了消除小组合条件下RMT去噪法中最大噪声特征值准确性下降的问题对投资组合风险优化的不利影响，并由此促进股票投资组合风险的优化，本文设计了蒙特卡洛RMT去噪法，简称为MKR去噪法。除了最大噪声特征值 λ_+ 的确定方法外，蒙特卡洛RMT去噪法与已有RMT去噪法的原理相同。因此，在介绍蒙特卡洛RMT去噪法时，仅对 λ_+ 的确定方法进行介绍。另外，相等加权协方差矩阵和指数加权协方差矩阵计算方法的差异使得蒙特卡洛模拟法对这两种

矩阵 λ_+ 的具体计算细节有所不同，但所依据的基本原理完全相同，因此，本节仅以相等加权协方差矩阵为例介绍蒙特卡洛模拟法对 λ_+ 的确定原理。

由 λ_+ 的原始计算模型知， λ_+ 的计算问题具有明显的概率特征，因此，蒙特卡洛模拟法非常适合于计算 λ_+ 。蒙特卡洛模拟方法的原理是：根据随机过程，用计算机模拟的方法生成时间序列，并将其作为抽样结果，以此计算参数估计值。蒙特卡洛模拟方法对参数的估计精度随模拟次数增多而逐渐提高，这保证了蒙特卡洛模拟法一般都能取得较高的估计精度^[121-123]。

5.3.2 蒙特卡洛模型构建

设方差分别是 $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_N^2$ ，长度都为 T 的 N 个股票收益样本序列的协方差矩阵是 S ，则由5.2节的分析知， S 对应的随机协方差矩阵 R 为

$$R = \frac{1}{T} AA^T$$

其中，

$$A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1T} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2T} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{N1} & x_{N2} & \cdots & x_{NT} \end{pmatrix}$$

A 中元素 x_{ij} ($i=1, 2, \dots, N$ $j=1, 2, \dots, T$) 是均值为0、方差为 σ_i^2 的独立、正态分布的随机变量。下面将应用蒙特卡洛模拟法建立矩阵 R 的统计模拟模型并计算其最大特征值 λ_+ 。由于矩阵 R 可以用矩阵 A 表示，因此主要针对矩阵 A 构造概率模型或随机模型。蒙特卡洛模拟所依据的矩阵 A 可以表示为：

$$A = \begin{cases} x_{1j} (j=1, 2, \dots, T) \sim N(0, \sigma_1^2) \\ \dots\dots\dots \\ x_{Nj} (j=1, 2, \dots, T) \sim N(0, \sigma_N^2) \end{cases}$$

其中， $N(0, \sigma_i^2)$ ($i=1, 2, \dots, N$)表示均值为0，方差为 σ_i^2 的正态分布。本节将蒙特卡洛误差的阈值设定为 ε_0 。设蒙特卡洛估计值为 λ_{\max} ，其误差为 ε ，本节目标是获得 $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ 的 λ_{\max} 。研究表明，蒙特卡洛模拟误差随模拟次数增加而下降。根据该特点，本节设计了如下的思路：先得到模拟次数为100时的 λ_{\max} 和其误差 ε 。如果 $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ ，则该 λ_{\max} 就是对 λ_+ 的最终估计值。否则，进行新的模拟，并计算模拟次数增加后的 λ_{\max} 和其误差 ε 。若 ε 仍大于 ε_0 ，则继续增加模拟次数，……直至获得 $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ 的 λ_{\max} 。蒙特卡洛模拟的流程如图5-1所示，具体步骤如下。

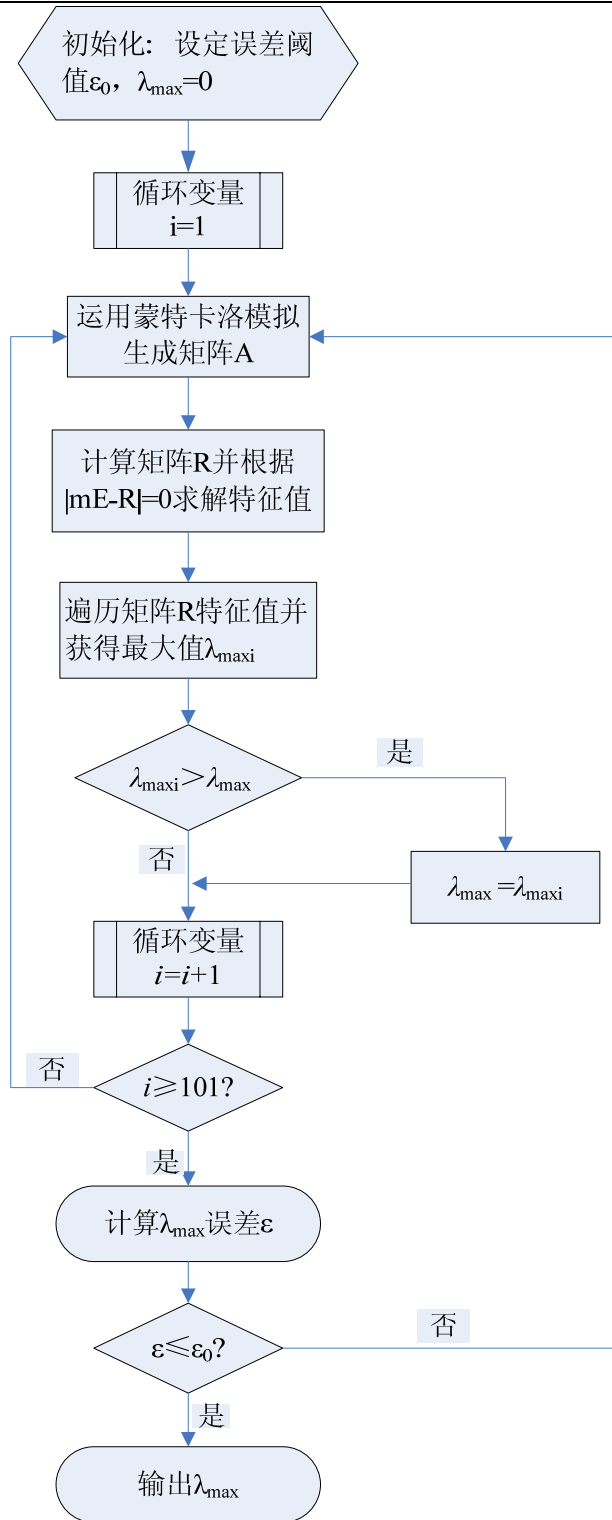


图 5-1 蒙特卡洛模拟流程

Fig.5-1 Monte Carlo simulation process

第 1 步 根据矩阵 A 概率模型中各行随机变量的分布，在计算机上产生随机数。每行产生符合概率模型的 T 个随机数，共产生 N 行，构成矩阵 A 的

一次样本抽样。

由于矩阵 A 概率模型中各行随机变量都服从正态分布，因此，这里需要产生的是正态分布随机数。本节将基于计算机实现这一过程，而计算机只能提供均匀分布的伪随机序列，因此应从均匀分布的伪随机序列出发，建立正态分布的随机序列。由文献[124]可知，累积分布函数能完整描述一个实随机变量的概率分布，它是概率密度函数的积分，一般以大写“CDF”（Cumulative Distribution Function）标记。CDF 函数有如下特性：累积分布函数的反函数可以用来生成服从该随机分布的随机变量。设 F_X 是概率分布 X 的累积分布函数，并存在反函数 F_X^{-1} 。若 a 是 $[0,1)$ 区间上均匀分布的随机变量，则 $F_X^{-1}(a)$ 服从 X 分布。根据这一特性，本文将采用 CDF 函数法在计算机上构造正态分布随机序列。由正态分布概率密度函数可以推导出正态分布 CDF 函数，其曲线如图 5-2 所示。在图 5-2 中，当 a 取 $[0,1)$ 上均匀分布的随机数时，它对应的 x 即为所需要的正态分布随机数。

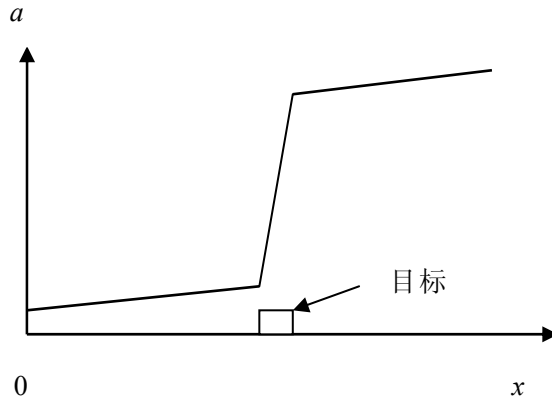


图 5-2 正态分布的累积分布函数

Fig.5-2 Cumulative distribution function of normal distribution

第 2 步 应用 A 的一次样本抽样计算出矩阵 R 及 R 的全部特征值。设 E 表示单位矩阵，那么 $|mE-R|=0$ 的全部根就是 N 阶方阵 R 的全部特征值。设矩阵 R 的特征值为 $R_\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ ，遍历所有特征值找到最大值 $\lambda_{\max 1}$ 。

第 3 步 计算模拟 100 次时的蒙特卡洛估计值 λ_{\max} 。重复进行蒙特卡洛模拟 100 次，可以获得如下集合 $\lambda'_{\max} = \{\lambda_{\max 1}, \lambda_{\max 2}, \dots, \lambda_{\max 100}\}$ ，显见，该集合构成了矩阵 R 特征值的边界。遍历集合 λ'_{\max} 从中找到最大值，该最大值就是模拟次数为 100 时的蒙特卡洛估计值 λ_{\max} 。

第 4 步 按下列公式计算蒙特卡洛估计值 λ_{\max} 的误差。

$$\varepsilon = \lambda_{\alpha} \sigma$$

其中， σ 是蒙特卡洛估计值的标准差。它是未知的，这里用序列 $\{\lambda_{\max i}\}_{i=1}^{100}$ 的标准差近似代替 σ 。 α 为显著水平，本节令其为 0.05。 λ_{α} 是置信水平为 $1-\alpha$ 的正态分布的临界值，可通过查正态分布表获得它。

第 5 步 取得 λ_+ 的最终估计值。如果 $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ ，则第三步得到的 λ_{\max} 就是对 λ_+ 的最终估计值。否则，进行第 101 模拟，并计算 λ_{\max} 和其误差 ε 。若 ε 仍大于 ε_0 ，则继续进行第 102 次模拟，……，直至获得 $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ 时的 λ_{\max} ，该 λ_{\max} 就是对 λ_+ 的最终估计值。

从上面计算过程能够看出，蒙特卡洛RMT去噪法是在股票数量 N 取实际值的条件下计算 λ_+ 的，因此能够有效解决对小组组合去噪时已有RMT去噪法因限定 $N \rightarrow \infty$ 的条件而引起对 λ_+ 计算准确性较低的问题，从而在组合资产数量较少时取得比已有RMT去噪法更好的去噪和组合风险优化效果。

5.4 基于蒙特卡洛 RMT 去噪法小组组合风险优化实证研究

5.4.1 研究方案设计

本节根据对组合风险预测的准确性衡量组合风险优化水平。对组合风险预测的准确率越高，组合风险就越优。为验证蒙特卡洛RMT法对现有RMT法的改进作用仅适用于小组组合的特点，本实证分析考察了预测期时间序列长度 T 、衰减因子 α 一定时，包括大小组合在内的各不同股票数量下对组合风险进行预测的准确率。这样，资产数量不断减小时原RMT去噪法和蒙特卡洛RMT去噪法的组合优化表现的对比分析和趋势分析成为可能。具体地，组合的资产数量 N 在 $[10, 310]$ 内变化。协方差矩阵的计算采用日收益数据，所利用的原始股价数据来自国泰安CSMAR数据库。将股价转换为收益率的方法为 $r_{i,t} = \ln p_{i,t} - \ln p_{i,t-1}$ ，其中， $p_{i,t}$ ($i=1, 2, \dots, N$) 是第 i 只股票在第 t ($t=1, 2, \dots, T$) 天的收盘价， $r_{i,t}$ 是第 i 只股票在第 t 天的收益率。相等（指数）加权协方差矩阵的基本构建要素 N 和 T (α) 对RMT去噪法中噪声特征值计算的精确度都有影响，而本文仅研究 N 的变化对噪声特征值的计算精度进而对RMT去噪法组合优化表现的影响，因此，我们让对应于不同 N 的 T (α) 是恒定不变的。如果用来计算收益协方差矩阵的时间序列长度太大，对RMT去噪法的精确度要求会因低噪声而提高，则RMT去噪法可能会失去去噪作用。如果用来计算收益协方差矩阵的时间序列长度太小，收益协方差矩阵的噪声就会很大，各种RMT去噪法的去噪作用都会十分明显，此时可能难以充分体现原RMT去噪法和蒙特卡洛

RMT去噪法的去噪表现差别。因此，相等加权样本协方差矩阵的时间序列长度 T 和指数加权样本协方差矩阵的有效时间序列长度 $-1/\ln\alpha$ 都既不能太大，也不能太小，我们将它们确定为 600 天。这样， α 值为 0.998。我们采用bootstrap方法获得未去噪和用各种方法去噪后的组合风险预测准确率。对于股票数量不同的所有情况，bootstrap算法的步骤是相同的，具体如下。

步骤 1 从 2008-01-03 至 2010-12-31 的所有日期中随机选择一个测试期。测试期后的 1 天为投资期，测试期前（包括测试期）的 600 天为预测期。

步骤 2 从备选股票中随机选择 N 只股票。备选股票是在上海证券交易所上市交易且在该预测期和投资期内存在交易数据的全部股票。

步骤 3 对投资期股票收益协方差矩阵进行预测。将 $T=600$ 天的相等加权样本协方差矩阵和 $\alpha=0.998$ 的指数加权样本协方差矩阵及分别用 LCPB 法、PG+法、KR 法和蒙特卡洛 RMT 法对它们去噪后的矩阵作为投资期股票收益协方差矩阵的预测矩阵。可见，预测协方差矩阵的方法共有 10 种。将预测出的矩阵记为 $S = \{\sigma_{ij}^2\}_{i,j=1}^N$ ，则 S 的取值有 10 个。

步骤 4 对于 S 的不同取值，计算对最小方差组合风险的预测准确率。对资产权重为 w_i ($i=1,2,\dots,N$) 的最小方差组合风险的预测值为

$$R_{pr}^2 = \sum_{i,j=1}^N w_i \sigma_{ij}^2 w_j$$

该组合在投资期中的真正风险并不可知，因此这里用已实现风险来近似代替。设投资期已实现协方差矩阵为 $\hat{S} = \{\hat{\sigma}_{ij}^2\}_{i,j=1}^N$ ，则该组合的已实现风险为

$$R_{re}^2 = \sum_{i,j=1}^N w_i \hat{\sigma}_{ij}^2 w_j$$

R_{pr}^2 和 R_{re}^2 越接近，表明对最小方差组合风险预测的准确率越高，因此，我们用表征 R_{pr}^2 和 R_{re}^2 偏离程度的如下指标衡量对组合风险预测的准确率大小。

$$PR = R_{pr}^2 / R_{re}^2$$

步骤 5 重复 1-4 步 20 次，然后分别计算 10 种协方差矩阵预测方法在 20 次试验中的平均 PR。

步骤 6 反复重复 1-5 步，考察 N 不同时 10 种协方差矩阵预测方法的平均 PR。

通过上述 bootstrap 方法，本文在 T 和 α 一定的情况下获得了对相等加权协方差矩阵和指数加权协方差矩阵去噪前后的组合风险预测准确率随 N 的变

注：本节中，由于在每个股票数量下都进行了 20 次组合抽样，且考察了许多不同的股票数量，所以，全部组合包含的股票名称、股票收益率和测试期信息过多，而不便在正文和附录中给出这些数据和信息。如果读者需要上述数据和信息，请向 libingna519@163.com 发邮件获取。

化曲线。接下来，对组合风险预测准确率结果进行介绍和分析。

5.4.2 实验结果及分析

如图 5-3 和图 5-4 所示，股票收益相等加权协方差矩阵和指数加权协方差矩阵的实证结果十分类似。在分析协方差去噪对 PR 的具体影响前，有必要先结合未去噪时 PR 的变化趋势对其受到的噪声影响进行分析。可以看出收益协方差矩阵未去噪时，随股票数量减小，组合风险预测的准确率越来越高，主要是因为 PR 受到的噪声影响减小的缘故。在相等加权收益相关矩阵情况下，T 一定时，股票数量的减小弱化了“维数灾祸”的影响，从而使收益协方差矩阵的噪声减小。衰减因子为 α 的指数加权收益协方差矩阵利用的时间序列数据有效长度为 $-1/\ln\alpha$ ，因此， α 一定时，股票数量减小引起协方差噪声减小的原理同相等加权收益协方差矩阵是类似的。

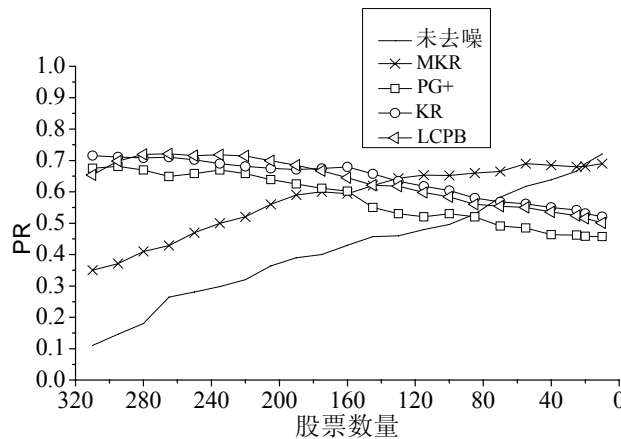


图 5-3 相等加权协方差矩阵去噪前后的 PR

Fig.5-3 PR pre-and post- denoising equally weighted covariance matrices

然后，对各种去噪法的组合风险优化表现进行分析。在相等加权和指数加权收益协方差矩阵情况下，随股票数量减小，各种去噪法引起的 PR 的增加都呈现减小的趋势，这主要是因为 PR 受到的噪声影响减小的缘故。由图 5-3 和图 5-4 能够看出，尽管各种去噪法都具有去噪进而提高组合风险预测准确率的一定能力，但它们的组合风险优化表现并不相同。在股票数量足够大时，由于原有 RMT 去噪法对噪声特征值边界界定的精确度高于蒙特卡洛 RMT 去噪法，因此，原有 RMT 去噪法引起的 PR 的增加更大。随股票数量的减少，原有 RMT 去噪法对噪声特征值边界界定的精确度下降，而蒙特卡洛 RMT 去噪法对噪声特征值边界界定的精确度并不改变，这使得原有 RMT 去噪法和蒙特卡洛 RMT 去噪法的去噪表现越来越接近。当资产数量减小到一定水平时，它

们的去噪表现变得相同。对于相等加权收益协方差矩阵和指数加权收益协方差矩阵而言,原有 RMT 去噪法和蒙特卡洛 RMT 去噪法的去噪表现达到一致时的股票数量分别处于 145~165 和 150~190 的区间内。之后,当股票数量进一步减小时,原 RMT 去噪法的噪声特征值的计算精度开始小于蒙特卡洛 RMT 去噪法。相应地,原 RMT 去噪法的组合风险优化表现也变得低于蒙特卡洛 RMT 去噪法。并且随着股票数量的减小,原 RMT 去噪法的噪声特征值的计算精度和组合风险优化表现都越来越低于蒙特卡洛 RMT 法。如前所述,在股票数量减小的过程中,各种去噪法引起的 PR 的增加都在不断减小,越来越趋近于 0。这样,由于原 RMT 去噪法比蒙特卡洛 RMT 法具有更差的去噪表现,原 RMT 去噪法的去噪效果比蒙特卡洛 RMT 法先达到 0。如图 5-3 所示,当收益协方差矩阵的计算采用相等加权法时,PG+法、LCPB 法和 KR 法的去噪能力达到 0 时的股票数量分别是 88、78 和 73。而对于指数加权收益协方差矩阵而言,PG+法、LCPB 法和 KR 法的去噪效果达到 0 时的股票数量分别为 85、75 和 80。之后,当股票数量进一步减小时,原 RMT 去噪法无法起到去噪作用,反而造成 PR 的下降。而此时蒙特卡洛 RMT 法的去噪作用仍然存在。不过,类似于已有 RMT 去噪法,当股票数量减小至很低水平时,蒙特卡洛 RMT 法也会由于无法满足低噪声时的高精度要求而失去去噪能力。在相等加权法和指数加权法条件下,蒙特卡洛 RMT 法的去噪能力达到 0 时的股票数量分别为 23 和 13。由于蒙特卡洛 RMT 法和原 RMT 去噪法的差异主要体现在噪声特征值边界界定的方法上,因此,股票数量较小时蒙特卡洛 RMT 法的更好的去噪表现主要是由于噪声特征值边界界定的更高的精确度。

接下来,对相等加权协方差矩阵和指数加权协方差矩阵的 PR 进行比较分析。从图 5-3 和图 5-4 可观察出,在各不同股票数量下,相等加权协方差矩阵未去噪时的 PR 都高于指数加权协方差矩阵未去噪时的 PR。然而,对相等加权协方差矩阵和指数加权协方差矩阵去噪后的结果和去噪前的结果却完全不同。总体来讲,和相等加权协方差矩阵相比,每一种去噪法引起的指数加权协方差矩阵的 PR 的增加都更大。因此,如果将所有股票数量综合起来考虑,每一种去噪法对指数加权协方差矩阵去噪后的 PR 都高于对相等加权协方差矩阵去噪后的 PR。

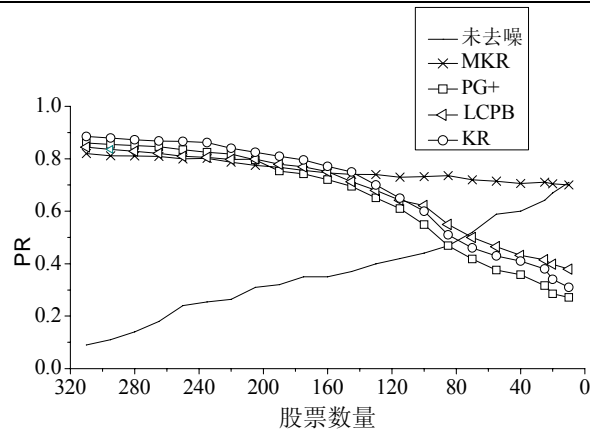


图 5-4 指数加权协方差矩阵去噪前后的 PR

Fig.5-4 PR pre-and post- denoising exponentially weighted covariance matrices

最后，以上面分析为基础，对相等加权法和指数加权法下 PR 的最佳结果进行分析。从图 5-3 和图 5-4 可看出，如果将两种协方差矩阵综合起来考虑，会发现 PR 的最高值因资产数量不同而变化。当股票数量较大时，KR 去噪法对指数加权协方差矩阵去噪后的 PR 最高。当股票数量较小时，蒙特卡洛 RMT 去噪法对指数加权协方差矩阵去噪后的 PR 最高。而当蒙特卡洛 RMT 去噪法对指数加权协方差矩阵没有去噪能力时，相等加权协方差矩阵未去噪时的 PR 结果是最好的。

5.5 本章小结

本章提出了小股票组合的概念，分析了小股票组合风险优化的研究意义，指出了小组风险优化条件下对协方差矩阵去噪的已有 RMT 方法因噪声特征值边界界定的误差而产生的效力下降的问题，并为解决该问题，采用蒙特卡洛模拟法确定样本协方差矩阵的最大噪声特征值，从而建立了蒙特卡洛 RMT 去噪法。

通过实证分析方法，在股票收益序列长度和衰减因子不变时，在不同股票数量下对 LCPB 法、PG+法和 KR 法等 RMT 方法和蒙特卡洛 RMT 法的组合风险优化效果进行了对比研究。结果表明，各种 RMT 方法对相等加权协方差矩阵去噪前后的组合风险结果与指数加权协方差矩阵的组合风险结果非常类似。随股票数量的减小，相对于蒙特卡洛 RMT 法来说，LCPB 法、PG+法和 KR 法的去噪优势因对噪声特征值边界界定误差的增大而呈减小趋势。直至当 LCPB 法、PG+法和 KR 法对噪声特征值边界界定误差开始超过蒙特卡洛 RMT 法的误差时，LCPB 法、PG+法和 KR 法的组合风险优化作用也变得低于蒙特卡洛

RMT 法。这说明蒙特卡洛 RMT 去噪法对解决小股票组合条件下已有 RMT 去噪法效力下降的问题是一种有效的方法。

第6章 基于收益样本协方差矩阵的矩法股票投资组合风险优化

6.1 矩法的设计及实现

6.1.1 理论基础

在资产数趋于无穷和资产收益率服从多元高斯分布的条件下，Burda 等人对总体协方差矩阵的各阶矩和样本协方差矩阵的各阶矩间的关系进行了推导，这是本文提出矩法的理论基础。下面对总体协方差矩阵的各阶矩和样本协方差矩阵的各阶矩间的关系进行介绍。

假定N个资产收益率 $R_L(L=1, 2, \dots, N)$ 的总体协方差矩阵为S，S的特征值是 $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_N$ 。 $R_L(L=1, 2, \dots, N)$ 的观察值的数量为T，将这些观察值记为 $R_{Lt}(L=1, 2, \dots, N \quad t=1, 2, \dots, T)$ ，则 $R_L(L=1, 2, \dots, N)$ 的样本协方差矩阵 \hat{S} 为

$$\hat{S}_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (R_{it} - \bar{R}_i)(R_{jt} - \bar{R}_j)$$

其中， \bar{R}_i 是 R_i 的均值， \bar{R}_j 是 R_j 的均值。样本协方差矩阵 \hat{S} 是对总体协方差矩阵S进行估计的最常用方法。在给出 \hat{S} 的矩和S的矩的关系前，有必要对协方差矩阵矩的定义和计算方法进行说明。

S 的 k 阶矩为

$$M_k = \frac{1}{N} \text{Tr} S^k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Lambda_i^k = \int d\Lambda \rho_0(\Lambda) \Lambda^k \quad (6-1)$$

其中，S的特征值概率密度函数 $\rho_0(\Lambda)$ 为

$$\rho_0(\Lambda) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\Lambda - \Lambda_i)$$

\hat{S} 的 k 阶矩为

$$m_k = \frac{1}{N} \langle \text{Tr} \hat{S}^k \rangle = \int d\lambda \rho(\lambda) \lambda^k \quad (6-2)$$

其中， \hat{S} 的特征值概率密度函数 $\rho(\lambda)$ 为

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{N} \langle \sum_{i=1}^N \delta(\lambda - \lambda_i) \rangle$$

为了得到S的矩和 \hat{S} 的矩的关系，需要定义如下的分解式。

$$G(Z) = (ZI_N - S)^{-1}$$

$$g(z) = \langle (zI_N - \hat{S})^{-1} \rangle$$

其中， Z 和 z 是复变量， I_N 是 $N \times N$ 单位矩阵。对上述分解式进行适当处理，就能得到产生各阶矩的如下函数

$$M(Z) = \frac{1}{N} \text{Tr}[ZG(Z)] - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{Z^k} M_k$$

$$m(z) = \frac{1}{N} \text{Tr}[zg(z)] - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{z^k} m_k$$

在 $z = \lambda + i0^+$ (或 $Z = \Lambda + i0^+$) 时， $\text{Tr}g(z)/N$ (或 $\text{Tr}G(Z)/N$) 的虚部为 $\rho(\lambda)$ (或 $\rho_0(\Lambda)$)，即

$$\rho(\lambda) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \frac{1}{N} \text{Tr}g(\lambda + i0^+)$$

因此，通过 $M(Z)$ 和 $m(z)$ 的关系，可以得到 $\rho(\lambda)$ 和 $\rho_0(\Lambda)$ 间的关系。利用图示法，可以得出 $M(Z)$ 和 $m(z)$ 的关系为

$$m(z) = M(Z) \quad (6-3)$$

其中， Z 和 z 的联系体现为共性映照

$$Z = \frac{z}{1 + qm(z)} \quad (6-4)$$

其中， $q = N/T$ 。将(6-4)式代入(6-3)式，能够得到如下方程

$$m(z) = M\left(\frac{z}{1 + qm(z)}\right) \quad (6-5)$$

根据(6-5)式， m_k 和 M_k 的关系为

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_k}{z^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k}{z^k} (1 + q \sum_{l=1}^{\infty} \frac{m_l}{z^l})^k \quad (6-6)$$

依据(6-6)式，可以将 M_k 写成 m_l ($l=1, 2, \dots, k$) 的表达式

$$\begin{aligned} M_1 &= m_1, \\ M_2 &= m_2 - qm_1^2, \\ M_3 &= m_3 - 3qm_1m_2 + 2q^2m_1^3, \\ &\dots \end{aligned} \quad (6-7)$$

由(6-1)式知，总体协方差矩阵的各阶矩是其特征值的函数，因此，如果已知总体协方差矩阵的各阶矩，就可以对它的特征值进行正确的计算。但是，总体协方差矩阵的各阶矩并不可知，我们只能对其进行估计。由(6-7)式知，能够根据样本协方差矩阵的各阶矩来计算总体协方差矩阵的各阶矩。前面关于总体协方差矩阵的矩和样本协方差矩阵的矩关系的分析中使用的样本协方差矩阵是一个随机矩阵，它的各成分都是随机变量。我们将该随机样本协方差矩阵的概

率密度函数称为样本协方差矩阵的总概率密度函数。虽然由随机样本协方差矩阵能够对总体协方差矩阵的各阶矩进行正确的计算，进而对总体协方差矩阵的特征值进行正确的计算，但是在实际应用中却无法获得随机样本协方差矩阵，而只能取得随机样本协方差矩阵的一个或几个样本值。根据 Burda 等人的研究，作为随机样本协方差矩阵的某一既定值，一个具体的样本协方差矩阵的特征值概率密度和总概率密度很接近，因此，该样本协方差矩阵的矩和随机样本协方差矩阵的矩也很接近。可见，用一个具体的样本协方差矩阵的矩或几个具体的样本协方差矩阵的矩的均值来代替随机样本协方差矩阵的矩是很合理的。本文在下面提出的矩法就是用一个或几个具体的样本协方差矩阵对总体协方差矩阵的矩和特征值进行估计的方法，它是对样本协方差矩阵进行去噪的一种方法。

6.1.2 去噪机理及算法设计

矩法是一种通过估计股票收益总体协方差矩阵各阶矩来实现对其特征值的估计，进而根据特征分解定理构建总体协方差矩阵的样本协方差矩阵去噪法。设 $N \times N$ 阶股票收益总体协方差矩阵 S 的特征值为 $\Lambda_i (i=1, 2, \dots, N)$ ， $\Lambda_1 > \Lambda_2 > \dots > \Lambda_N$ 。 u_i 是对 $\Lambda_i (i=1, 2, \dots, N)$ 的估计值， $u_1 > u_2 > \dots > u_N$ 。应用矩法时需要利用 $u_i (i=1, 2, \dots, N)$ 对总体协方差矩阵的矩进行估计。很明显，估计出的总体协方差矩阵各阶矩可以表示成 $u_i (i=1, 2, \dots, N)$ 的函数。设对总体协方差矩阵第 k 阶矩的估计值是 M_k^u ，则由(6-1)式可得

$$M_k^u = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N u_i^k \quad (k=1, 2, \dots) \quad (6-8)$$

由于协方差矩阵的特征值为正，因此 $u_i (i=1, 2, \dots, N)$ 必须大于 0。矩法的目的是在 u_1, u_2, \dots, u_N 都大于 0 且 $u_1 > u_2 > \dots > u_N$ 的约束条件下，通过样本协方差矩阵的矩计算 u_1, u_2, \dots, u_N 的最佳值。设样本协方差矩阵是 \hat{S} ，它的特征值是 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ ， $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_N$ ，以 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ 对应的特征向量为相应列形成的矩阵为 E 。根据(6-2)式，可以在 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ 的基础上按照如下方法计算 \hat{S} 的第 k 阶矩 m_k 。

$$m_k = \frac{1}{N} \text{Tr} \hat{S}^k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_i^k \quad (k=1, 2, \dots)$$

再根据(6-7)式，由 $m_k (k=1, 2, \dots)$ 计算的总体协方差矩阵的第 k 阶矩为 $M_k^{\text{exp}} (k=1, 2, \dots)$ 。由(6-7)式知，由样本协方差矩阵矩的期望能够精确地计算总体协方差矩阵的矩。然而，在实际应用中样本协方差矩阵矩的期望一般是无法获得的，因此，多用一个样本协方差矩阵的矩或一些样本协方差矩阵矩的

均值近似地表示它。研究表明，样本协方差矩阵的波动并不大，这意味着用由 m_k 计算的总体协方差矩阵的矩 M_k^{exp} 表示S的矩具有较高的精确度。因此，本文通过让总体协方差矩阵的估计值 M_k^{th} 与 M_k^{exp} 尽可能地接近，即让(6-9)式的值达到最小，来对总体协方差矩阵的特征值做出估计。

$$MIN = \sum_{k=1}^P [M_k^{\text{th}}(u_1, u_2, \dots, u_N) - M_k^{\text{exp}}]^2 \quad (6-9)$$

显然，若要确定使(6-9)式达到最小的 u_1, u_2, \dots, u_N ，须满足 $P \geq N$ 的条件。这里令 $P=N$ ，于是(6-9)式变为

$$MIN = \sum_{k=1}^N [M_k^{\text{th}}(u_1, u_2, \dots, u_N) - M_k^{\text{exp}}]^2 \quad (6-10)$$

根据上述分析，在 u_1, u_2, \dots, u_N 大于0且 $u_1 > u_2 > \dots > u_N$ 的约束条件下，使(6-10)式的MIN最小的 u_1, u_2, \dots, u_N 就是对总体协方差矩阵特征值的最佳估计值。由于该最佳估计值的计算可以概括为在一个大的搜寻空间内寻找最优解的问题，因此，本文选取模拟退火算法完成特征值的最佳估计值求解工作。模拟退火算法(Simulated Annealing, SA)是一种从固体退火原理和组合优化问题的相似性出发，利用蒙特卡洛迭代求解策略随机寻找目标函数最优解的优化算法。模拟退火算法包含解空间、初始解和目标函数三个组成部分，其基本思想为：先对控制参数初值和初始解进行设定，然后进行对当前解的迭代过程，并逐步衰减控制参数值。对当前解的迭代是从新解的产生开始的，通常采用由变换当前解得到新解的方法。在获得新解后，计算新解对应的目标函数差，并在此基础上，根据Metropolis准则等接受准则判断新解是否被接受。当新解被判断为接受时，新解即成为当前解，目标函数值也得到相应的修正，此时就完成了对当前解的一次迭代，下一轮的迭代在该新解的基础上进行。而当新解被判断为舍弃时，就仍在原当前解的基础上进行下一轮迭代。一直重复上述迭代过程，直至当满足所设定的终止条件时，算法终止，此时的当前解即为最优解。在介绍利用模拟退火算法求解特征值的最佳估计值的具体模型前，先对该模型中用到的基本概念和变量进行说明。

该模型的解空间V是在 $u_1 > u_2 > \dots > u_N$ 的约束条件下(u_1, u_2, \dots, u_N)的所有正数解的集合。由于该模型的目标是使(6-10)式取得最小值，因此，(6-10)式表示的函数是模拟退火算法的目标函数。设目标函数值为MIN，原目标函数值为OLDMIN。另外，为清楚地表述解的迭代过程，用 $u=(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 表示初始解， $u'=(y_1, y_2, \dots, y_N)$ 表示新解，m表示当前迭代次数，L表示总迭代次数。在迭代过程中，u和u'始终是正数，且满足 $x_1 > x_2 > \dots > x_N$ 和 $y_1 > y_2 > \dots > y_N$ 。

根据模拟退火算法的原理，可以设计用其求解矩法中特征值的最优估计值的模型，如图 6-1 所示。从图 6-1 能够看出计算总体协方差矩阵特征值的最佳估计值的如下流程。

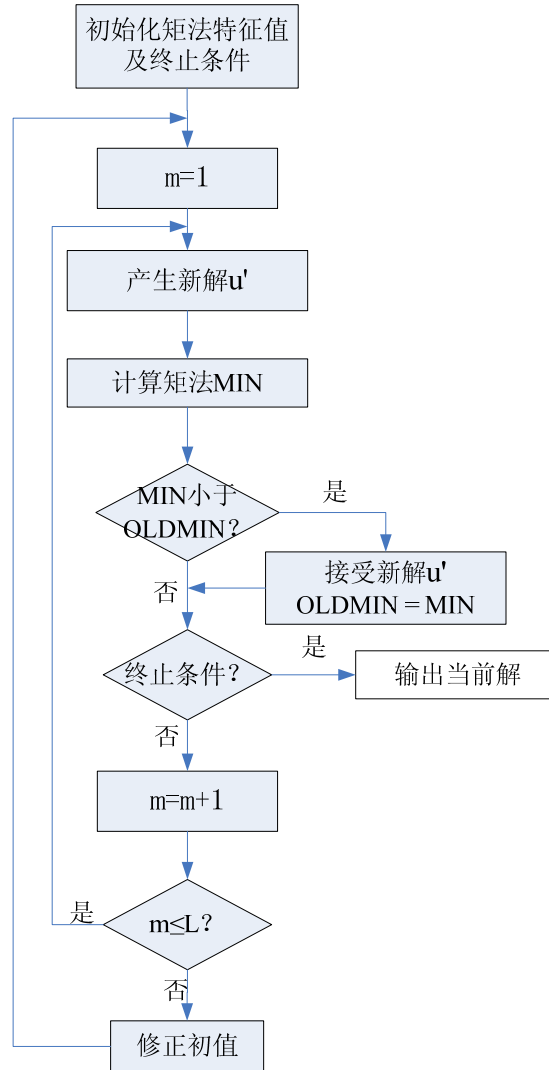


图 6-1 特征值的最优估计值的矩法计算流程

Fig.6-1 Calculation process of the best estimate of eigenvalues by the moment method

(1)初始化。首先对初始解 $u=(x_1, x_2, \dots, x_N)$ 进行设定。然后按照公式 $MIN = \sum_{k=1}^N [M_k^{th}(x_1, x_2, \dots, x_N) - M_k^{exp}]^2$ 计算 MIN 的初始值，并对 OLD MIN 设定和 MIN 相等的初始值。出于后续计算考虑，应尽量让 OLD MIN 的初始值取一较大数值。最后，设定终止条件和迭代次数 L。

(2)通过运行如下(3)至(6)步进行第 $m(m=1, 2, \dots, L)$ 次迭代。

(3)产生新解 $u'=(y_1, y_2, \dots, y_N)$ 。

(4) 计算目标函数值 $MIN = \sum_{k=1}^N [M_k^{th}(y_1, y_2, \dots, y_N) - M_k^{exp}]^2$ 。

(5) 若 $MIN > OLDMIN$ ，则保持当前解不变。若 $MIN < OLDMIN$ ，则接受 u' 作为新的当前解，并令 $OLDMIN = MIN$ 。

(6) 当满足终止条件时，输出当前解作为最优解，结束算法。

(7) 修正初值，然后转第(2)步。

设上述迭代计算过程结束时输出的当前解为 (c_1, c_2, \dots, c_N) ，则对 S 特征值的最佳估计值为 c_1, c_2, \dots, c_N 。将以 c_1, c_2, \dots, c_N 为主对角线元素的对角矩阵记为 C ，则根据协方差矩阵的特征分解定理，去噪后的协方差矩阵为

$$S_{\text{filtered}} = E C E^{-1}$$

6.1.3 矩法特征分析

从上述矩法的原理可以看出，根据协方差矩阵的特征分解定理，通过特征值的去噪来实现对协方差矩阵的去噪是矩法和已有的 RMT 去噪法的共同之处。它们原理的不同之处主要体现为以下两点：

1、已有 RMT 去噪法都是在识别噪声特征值的基础上，通过对噪声特征值的替代和非噪声特征值的保留来进行去噪的。而矩法是通过真正协方差矩阵特征值的估计去噪的。可见，已有 RMT 去噪法的去噪是对样本协方差矩阵的特征值部分改造的过程，而矩法是对样本协方差矩阵的特征值完全重建的过程。

2、已有 RMT 去噪法的去噪效果是由噪声特征值的识别和替代决定的，而矩法的去噪效果则取决于对真正协方差矩阵特征值估计的准确性，估计的准确性越高，矩法的去噪效果就越好。

6.2 基于矩法收益样本协方差矩阵去噪模拟研究

矩法对金融协方差矩阵的去噪是通过对其特征值的去噪实现的，因此，我们通过特征值的估计误差对矩法的去噪效果进行分析。对总体协方差矩阵特征值估计的准确性越高，则去噪所得矩阵的噪声就越小，说明矩法的去噪效果就越好。因此，用对总体协方差矩阵特征值估计的准确性或误差衡量矩法的去噪效果。本节采用基于 toy 模型的模拟法研究矩法的去噪效果。toy 模型法的步骤为：先对真正的股票收益协方差矩阵 S 进行设定，然后根据该协方差矩阵产生人工股票收益时间序列，再利用这些人工时间序列计算股票收益样本协方差矩阵，最后用矩法对样本协方差矩阵进行去噪。在上述过程中，由于真正收益协方差矩阵是已知的，因此，可以很方便地直接对矩法的去噪准确性进行分

析，这是 toy 模型法的一个主要优势。

设股票数为 $N=100$ 。S 仅有 2 个不同的特征值 $\Lambda_1=1$ 和 $\Lambda_2=2$ ，它们重复的次数分别是 $n_1=50$ 和 $n_2=50$ ，即 Λ_1 和 Λ_2 在全部特征值中的比例分别是 $p_1=0.5$ 和 $p_2=0.5$ 。该 toy 模型中，根据设定的协方差矩阵产生人工时间序列的方法如下。

$$R_{it} = \sum_{j=1}^N L_{ij} x_{jt} \quad (6-11)$$

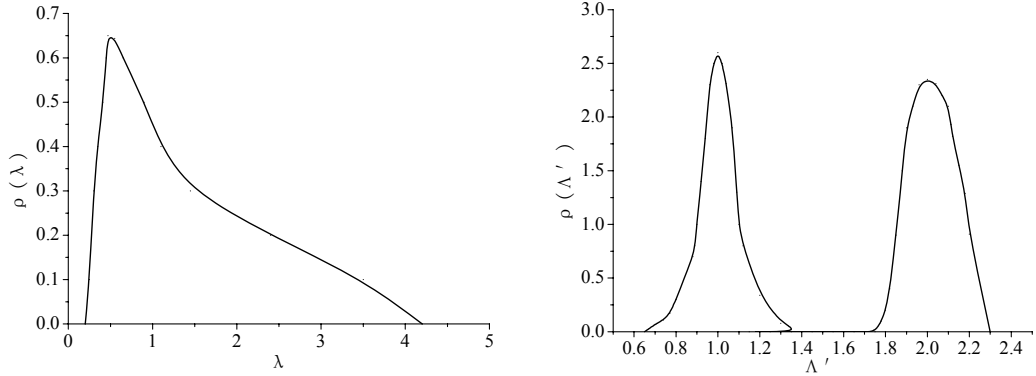
其中， N 是股票数， $x_{jt}(j=1, 2, \dots, N \quad t=1, 2, \dots, \infty)$ 是均值为 0、方差为 1 的独立、正态分布的随机变量， L_{ij} 来自于对 S 进行楚列斯基分解所得的下三角矩阵 L ，它满足 $LL^T = S$ 。可以证明， $R_{it}(i=1, 2, \dots, N)$ 的均值是 0，协方差矩阵为 S。将由 (6-11) 式得到的 R_{it} 作为样本序列的观察值，设由此方法形成的每只股票收益样本序列的观察值数量为 T ，则样本协方差矩阵 \hat{S} 的计算方法为

$$\hat{S}_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{it} R_{jt}$$

本文利用上述方法在 $q=0.3$ ($T=333$) 和 $q=0.05$ ($T=2000$) 的条件下都产生 200 个时间序列，这样在 $q=0.3$ ($T=333$) 和 $q=0.05$ ($T=2000$) 的条件下得到的样本协方差矩阵的数量都是 200。在 $T=333$ 和 $T=2000$ 两种情况下，本文考察了利用矩法对 200 个样本协方差矩阵去噪的效果。为了简化对问题的分析，对 \hat{S} 的特征值进行去噪时，将 p_1 和 p_2 等于 0.5 作为已知条件。这样，矩法对 S 的特征值估计的准确性就仅仅由对 Λ_1 和 Λ_2 的估计决定。对 Λ_1 和 Λ_2 估计的结果如图 6-2 和图 6-3 所示。

图 6-2a) 和 6-3a) 分别是 $q=0.3$ 和 $q=0.05$ 时样本协方差矩阵的特征值概率密度。可以看出，和图 6-2a) 相比，图 6-3a) 形成了 2 个分开的峰，1 和 2 可以分别近似地被看成两个峰的中心。上述说明， $q=0.05$ 时的样本协方差矩阵比 $q=0.3$ 时的样本协方差矩阵能更好地反映特征值的真实分布情况，这主要是由于样本协方差矩阵的噪声随时间序列长度的增大而减小的缘故。从图 6-3a) 可以看出，除 1 和 2 及与 1、2 相近的值外， $q=0.05$ 时的样本协方差矩阵的特征值取其他值的概率也非常高，这表明此时的样本协方差矩阵也不能比较准确地反映真正协方差矩阵的特征值分布。在本文的模拟条件下，容易取得任意长的样本时间序列。然而，在现实的经济条件下，样本时间序列的取得会受到数据可得性的限制，这使得取得长度为 2000 的样本序列在大部分时候是难以做到的。所以，和本文模拟产生的样本协方差矩阵相比，由实际金融数据计算的样本协方差矩阵一般都会更加不准确地反映真实的相关信息。可见，由于较大的误差，用由实际金融数据计算的样本协方差矩阵来表示真正的协方差矩阵并不

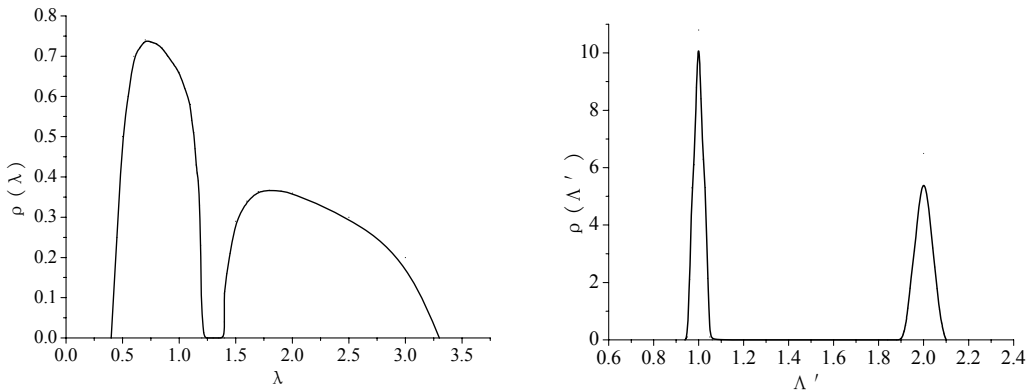
可行。



a) 样本协方差矩阵的特征值概率密度 b) 样本协方差矩阵去噪后的特征值概率密度

图 6-2 对 $q=0.3$ 的样本协方差矩阵去噪前后的特征值概率密度

Fig.6-2 Probability density of eigenvalues of sample covariance matrices pre-and post- denoising when q is equal to 0.3



a) 样本协方差矩阵的特征值概率密度 b) 样本协方差矩阵去噪后的特征值概率密度

图 6-3 对 $q=0.05$ 的样本协方差矩阵去噪前后的特征值概率密度

Fig.6-3 Probability density of eigenvalues of sample covariance matrices pre-and post- denoising when q is equal to 0.05

通过图 6-2a)和 6-2b)及图 6-3a)和 6-3b)的比较,可以看出,在 $q=0.3$ 和 $q=0.05$ 的情况下,去噪都使得样本协方差矩阵的特征值分布在以 1 和 2 为中心的较小区间内。尤其是 $T=2000$ 时,去噪后的样本协方差矩阵的特征值集中地分布在以 1 和 2 为中心的更狭小区间内,表明此时对真正特征值估计的准确性更高。 $q=0.05$ 时的样本协方差矩阵比 $q=0.3$ 时的样本协方差矩阵有更小的噪声,因此,利用前者的矩对真正协方差矩阵的矩进行估计,进而对真正特征值进行估计的准确性就会高于利用后者进行估计的准确性。上述分析表明,去噪

使样本协方差矩阵更正确地反映了特征值的真实分布情况，矩法对真正特征值的估计误差非常小。

接下来，分析样本协方差矩阵的个数对特征值估计准确性的影响。这里用特征值估计误差表示特征值估计准确性。具体地讲，在 $q=0.3$ 的情况下，本文分别分析了对 Λ_1 和 Λ_2 估计的准确性。如前所述，在 $q=0.3$ 的条件下产生的样本协方差矩阵的数量是 200。根据矩法的原理，在对 Λ_1 和 Λ_2 进行估计时，需要首先对 S 的不同阶数的矩进行计算。为了计算这些矩，我们既可以采用一个样本协方差矩阵，也可采用多个样本协方差矩阵。当用多个样本协方差矩阵计算 S 的某一阶矩时，公式(6-7)中等号右边的某一阶矩是这些样本协方差矩阵该阶矩的均值。可见，所使用的样本协方差矩阵的个数不同时， S 的各阶矩的计算结果就会不同，因此，对 Λ_1 和 Λ_2 的估计结果也会变化。所使用的样本协方差矩阵的数量对 Λ_1 和 Λ_2 估计的影响见图 6-4 和表 6-1。

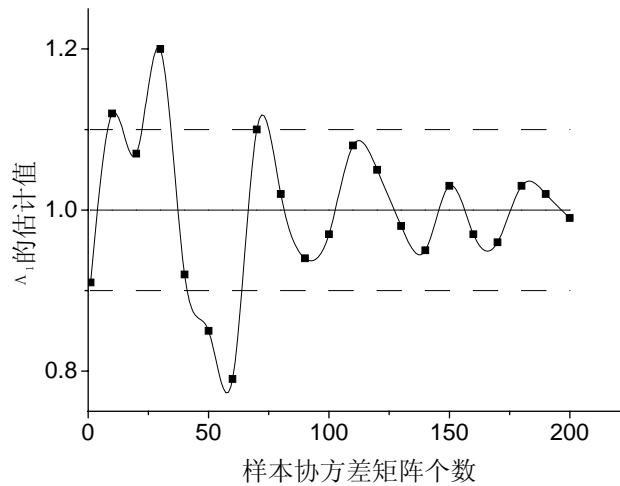


图 6-4 样本协方差矩阵个数对 Λ_1 的估计值的影响

Fig.6-4 The impact of the number of sample covariance matrices on estimate of Λ_1

对 Λ_1 和 Λ_2 的估计误差的计算方法为

$$error = \frac{|\Lambda_i - \Lambda'_i|}{\Lambda_i} \times 100\%$$

其中， Λ'_i 是对 Λ_i ($i=1, 2$) 的估计值， $error$ 表示估计的误差。对 Λ_2 的估计误差已在表 6-1 中给出。虽然对 Λ_1 的估计误差并没有直接给出，不过，通过和误差为 10%的估计结果的比较，也能对 Λ_1 的估计误差进行大致的衡量。图 6-4 中由 $\Lambda'_1=0.9$ 和 $\Lambda'_1=1.1$ 形成的两条虚线代表估计误差为 10%的两种

表 6-1 样本协方差矩阵个数对 Λ_2 的估计值的影响

Table 6-1 The impact of the number of sample covariance matrices on estimate of Λ_2

样本协方差矩阵个数	Λ_2 的估计值	Λ_2	误差(%)
1	2.1	2	5
14	2.15	2	7.5
27	1.87	2	6.5
41	2.11	2	5.5
55	1.86	2	7
69	1.89	2	5.5
84	1.91	2	4.5
98	2.10	2	5
112	2.09	2	4.5
126	1.93	2	3.5
140	1.92	2	4
154	2.05	2	2.5
168	2.06	2	3
186	2.03	2	1.5
200	1.95	2	2.5

情况，处于两条虚线之间的估计结果的误差小于 10%，处于两条虚线外的估计结果的误差大于 10%。由图 6-4 可以观察到，除了样本协方差矩阵个数较少的个别情况外，对 Λ_1 的估计误差都小于 10%。相比之下，对 Λ_2 的估计误差则更小，全部小于 10%。上述说明，矩法对 Λ_1 和 Λ_2 的估计误差较小，该方法的去噪效果很好。从图 6-4 和表 6-1 中还可以看出，对 Λ_1 和 Λ_2 的估计误差随样本协方差矩阵个数的增多呈现减小的趋势。由式(6-2)知，多个样本协方差矩阵某一阶矩的均值等于由这些样本协方差矩阵特征值的概率密度函数算出的同一阶矩。随样本协方差矩阵数量的增多，它们特征值的概率密度函数越来越接近于样本协方差矩阵特征值的总概率密度函数，由前者算出的矩就越来越接近于由

后者算出的矩。而由总概率密度函数算出的各阶矩能对总体协方差矩阵的各阶矩进行正确的估计，进而能对总体协方差矩阵的特征值进行正确的估计。因此，当样本协方差矩阵数量增多时，对总体协方差矩阵的各阶矩和特征值估计的准确性就会提高。

矩法通过对真正协方差矩阵特征值的估计较为准确地实现了对样本协方差矩阵特征值的去噪，它对真正协方差矩阵特征值估计的准确性受 q 的大小和样本协方差矩阵数量的影响。 q 越小和样本协方差矩阵数量越多，对真正协方差矩阵特征值估计的准确性就越高，矩法的去噪效果就越好。

6.3 基于矩法组合风险优化模拟研究

本节的主要研究工作是对矩法改进股票投资组合风险的有效性进行模拟研究。本节的研究中使用的股票收益总体协方差矩阵和样本协方差矩阵都并非来自于真实的金融世界，它们不是实际观察到的或由实际数据计算的。但是，作为对真实世界的一种抽象，这些总体协方差矩阵和样本协方差矩阵所反映的噪声的产生和作用机制与真实存在的情形相同。因此，可以借助它们分析实际样本协方差矩阵的去噪对 Markowitz 投资组合风险优化水平的影响。首先，需要对股票收益率间的总体协方差矩阵进行设定。然后，以该总体协方差矩阵为基础，产生一些股票收益人工时间序列，并计算股票收益率样本协方差矩阵。最后，考察去噪前后的 Markowitz 投资组合风险优化水平，并分析基于矩法的去噪对 Markowitz 投资组合风险优化水平改进的效果。可见，本节是利用模拟试验对真实系统中噪声的作用和去噪的影响进行分析的。在模拟研究中，由于总体协方差矩阵已知，因此，可以对噪声的作用大小和去噪对投资组合风险优化水平改进作用的大小进行精确的分析，这是模拟研究比实证研究具有的优势。下面，首先对总体协方差矩阵的设定进行介绍。

6.3.1 总体协方差矩阵模型的设定

总体协方差矩阵是总体标准差矩阵和总体相关矩阵的乘积。所以，对总体协方差矩阵的设定中最重要的一环是对总体相关矩阵的设定。本节选用了 2 个总体相关模型，一个是“市场+部门”相关模型，另一个是单一因子模型，它们都是由 Noh 提出的。“市场+部门”相关模型的相关结构如图 6-5 所示。该模型认为属于同一经济部门的公司股票收益率间的相关系数一定高于属于不同经济部门的公司股票收益率间的相关系数，于是，股票收益率的相关矩阵是一个分块对角矩阵。在对角块外的成分描述的是属于不同经济部门的公司

股票收益率间的相关系数，它们主要是在市场力量的作用下形成的，因此，假定对角块外的相关系数都相等，且非负，即 $\rho_0 \geq 0$ 。图 6-5 中的 M 个对角块表示 M 个经济部门，其中每个对角块中的相关系数表示属于某个特定经济部门的公司股票收益率间的相关系数。在“市场+部门”相关模型中，每个对角块内部的全部相关系数都是相等的，且大于对角块外的相关系数，即 $\rho_i \geq \rho_0 (i=1, 2, \dots, M)$ 。可以证明，包含 M 个经济部门的“市场+部门”相关矩阵有 M 个小于 1 的小特征值 $1 - \rho_i (i=1, 2, \dots, M)$ ，它们重复的次数为 $N_i - 1 (i=1, 2, \dots, M)$ ， N_i 是第 i 个经济部门中公司的数量。除此之外，该相关矩阵还有 M 个大特征值，它们的值取决于参数 ρ_0 、 ρ_i 和 N_i 。利用Frobenius–Perron定理得出，最大特征值与所有部门公司数量的和 N （ N_1 、 N_2 、 \dots 、 N_M 的和）是同阶的，最大特征值对应的特征向量的各成分都为正，该特征值和特征向量反映了一种对所有公司股票收益率都产生影响的市場力量。当将“市场+部门”相关矩阵作为总体相关矩阵时，相应的样本相关矩阵的特征值会在总体相关矩阵的基础上发生一些改变。样本相关矩阵的特征值和总体相关矩阵特征值的最大差别体现在样本相关矩阵的小特征值不再衰退，它们的大特征值的差别一般并不大。在公司总数量 N 和样本时间序列的长度 T 趋于无穷，而 $q=N/T$ 小于 1 且不变时，样本相关矩阵小特征值的谱密度为Marchenko–Pastur谱。根据对样本相关矩阵特征谱的一些实证研究结果^[27-35]，由实际数据计算的样本相关矩阵特征谱也具有“市场+部门”相关模型中样本相关矩阵特征谱的上述特点，这说明“市场+部门”相关模型的选用非常符合现实经济中股票收益率间真实的相关情况。

对总体相关矩阵进行设定时考虑的第二个相关模型是单一因子模型，它是“市场+部门”相关模型的一种特殊情况。在单一因子模型中， $\rho_i = \rho_0$ ，即不再具有对角块结构。单一因子相关矩阵有两个不同的特征值，一个特征值是 N 阶的，另一个 $N-1$ 重的小特征值 $1 - \rho_0$ 小于 1。

总体协方差矩阵是总体标准差矩阵和总体相关矩阵的乘积，所以，为了完成对总体协方差矩阵的设定，还需要对总体标准差矩阵进行设定。出于简便的考虑，让一个总体标准差矩阵的所有成分为一常数。

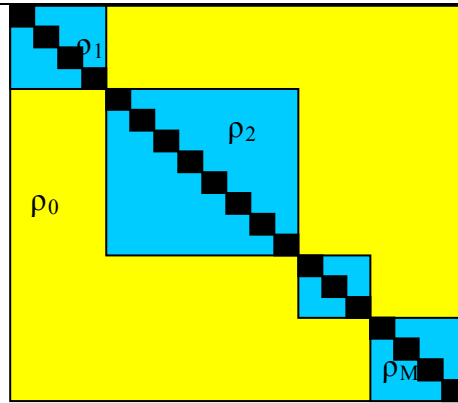


图 6-5 含有 M 个经济部门的“市场+部门”相关结构

Fig.6-5 Structure of the market-plus-sectors correlation matrix with M sectors

6.3.2 样本协方差矩阵的获取及其噪声影响分析

对总体协方差矩阵进行设定后，就可以根据总体协方差矩阵构建相应的样本协方差矩阵。设定总体协方差矩阵为 S ，则从 S 产生有限的时间序列的方法为

$$R_{it} = \sum_{j=1}^N A_{ij} y_{jt} \quad t=1, \dots, T \quad (6-12)$$

其中， A 是由 S 的楚列斯基分解得到的，满足 $S=AA^T$ 。 $y_{jt}(j=1, 2, \dots, N \quad t=1, 2, \dots, T)$ 是均值为 0、方差为 1 的高斯分布的随机变量。由(6-12)式算得的时间序列 $R_{it}(i=1, 2, \dots, N \quad t=1, 2, \dots, T)$ 即为样本时间序列。根据样本时间序列计算样本协方差矩阵的方法是

$$\hat{S}_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T R_{it} R_{jt} \quad (6-13)$$

其中， \hat{S}_{ij} 是样本协方差矩阵 \hat{S} 中第 i 只股票收益率和第 j 只股票收益率的协方差。接下来，对根据样本协方差矩阵 \hat{S} 构建的投资组合的风险优化水平的衡量方法进行说明。出于简化分析的目的，本节不在投资组合上施加收益约束等更多的限制条件而只构建最小方差组合。假定预测期和投资期中股票收益率的总体协方差矩阵都是 S ，预测期中股票收益率的样本协方差矩阵是 \hat{S} 。根据 \hat{S} 构建的最小方差组合的股票权重为

$$\hat{w}_i = \frac{\sum_{j=1}^N \hat{S}_{ij}^{-1}}{\sum_{i,j=1}^N \hat{S}_{ij}^{-1}} \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (6-14)$$

该组合在投资期中的风险为

$$R_r^2 = \sum_{i,j=1}^N \hat{w}_i S_{ij} \hat{w}_j$$

设投资期中最小组合风险为 R_{re}^2 。只有由 \hat{S} 构建的最小方差组合是投资期中真正最小方差组合时, R_{tr}^2 等于 R_{re}^2 。否则, R_{tr}^2 大于 R_{re}^2 。由于投资期中组合风险的最佳值是 R_{re}^2 , 所以可以用 R_{tr}^2 对 R_{re}^2 的偏离表示 R_{tr}^2 的优化水平。本节中表示 R_{tr}^2 对 R_{re}^2 的偏离大小的方法为

$$d = \frac{R_{tr}}{R_{re}} \geq 1$$

d 被称为风险比, 它是衡量噪声对组合风险影响的常用指标。 d 越大, 表示 R_{tr}^2 对 R_{re}^2 的偏离越大, R_{tr}^2 的优化水平就越低。如果 \hat{S} 没有噪声, 则 R_{tr}^2 等于 R_{re}^2 , 所以 d 等于 1。当 \hat{S} 有噪声时, d 大于 1, 说明噪声引起了投资组合风险优化水平的下降。 d 越大, 噪声对投资组合风险优化水平的影响就越大。

接下来, 按 6.3.1 节中的两种协方差矩阵模型对股票收益率总体协方差矩阵进行设定, 通过推导 d 分析样本协方差矩阵噪声对投资组合风险优化水平的影响。可以借助于总体协方差矩阵为“市场+部门”相关矩阵时的风险比得到以“市场+部门”相关矩阵为基础的总协方差矩阵模型下, 根据样本协方差矩阵建立的投资组合的风险比。设“市场+部门”相关矩阵为 C , 以它作为总协方差矩阵时的样本协方差矩阵为 $C^{(e)}$, 根据 $C^{(e)}$ 构建的投资组合的权重为 $w_i^{(e)}$ ($i=1, 2, \dots, N$), 该投资组合的风险优化水平为 d_1 , 真正最小方差组合的权重为 w_i ($i=1, 2, \dots, N$)。由风险比的计算方法知

$$d_1 = \frac{\sqrt{\left\langle \sum_{i,j=1}^N w_i^{(e)} C_{ij} w_j^{(e)} \right\rangle}}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^N w_i C_{ij} w_j}} \quad (6-15)$$

在以上述“市场+部门”相关矩阵 C 为基础的总协方差矩阵模型中, 总协方差矩阵是总体标准差矩阵和 C 的乘积。设各股票收益率的总体标准差为 $\sqrt{\Delta}$, 则总协方差矩阵为 ΔC 。由(6-12)式和(6-13)式不难证明, ΔC 对应的样本协方差矩阵为 $\Delta C^{(e)}$ 。根据(6-14)式, 由 $\Delta C^{(e)}$ 构建的最小方差组合的股票权重为

$$w_{\Delta i}^{(e)} = \frac{\sum_{j=1}^N (\Delta C_{ij}^{(e)})^{-1}}{\sum_{i,j=1}^N (\Delta C_{ij}^{(e)})^{-1}} = w_i^{(e)} \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad (6-16)$$

设真正最小方差组合的权重为 w'_i ($i=1, 2, \dots, N$), 则 w'_i 为

$$w'_i = \frac{\sum_{j=1}^N (\Delta C_{ij})^{-1}}{\sum_{i,j=1}^N (\Delta C_{ij})^{-1}} = w_i \quad (6-17)$$

以 $w_{\Delta i}^{(e)}$ ($i=1, 2, \dots, N$) 为权重的投资组合的风险优化水平为

$$d_2 = \frac{\sqrt{\left\langle \sum_{i,j=1}^N w_{\Delta i}^{(e)} \Delta C_{ij} w_{\Delta j}^{(e)} \right\rangle}}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^N w_i' \Delta C_{ij} w_j'}} \quad (6-18)$$

其中， $\langle \dots \rangle$ 表示均值。将(6-16)式和(6-17)式代入(6-18)式得到

$$d_2 = \frac{\sqrt{\left\langle \sum_{i,j=1}^N w_i^{(e)} C_{ij} w_j^{(e)} \right\rangle}}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^N w_i C_{ij} w_j}} \quad (6-19)$$

由(6-15)式和(6-19)式知，

$$d_1 = d_2$$

根据上面的推导，以“市场+部门”相关矩阵为基础的总体协方差矩阵模型中，由样本协方差矩阵建立的投资组合的风险比等于总体协方差矩阵为“市场+部门”相关矩阵时，由样本协方差矩阵建立的投资组合的风险比。根据Pafka等^[77]对总体协方差矩阵为“市场+部门”相关矩阵时的风险比的推导，得出

$$d_1 \approx \frac{1}{\sqrt{1-q}}$$

其中，

$$q=N/T$$

那么，以“市场+部门”相关矩阵为基础的总体协方差矩阵对应的样本协方差矩阵产生的投资组合的风险比为

$$d_2 \approx \frac{1}{\sqrt{1-q}} \quad (6-20)$$

通过上述推导，在以“市场+部门”相关矩阵为基础的总体协方差矩阵模型下，对由样本协方差矩阵构建的投资组合的风险优化水平进行了衡量。除此之外，还需要对以单一因子相关矩阵为基础的总体协方差矩阵模型下的投资组合的风险优化水平进行衡量。和以“市场+部门”相关矩阵为基础的总体协方差矩阵的风险比的推导思路 and 过程类似，可以通过总体协方差矩阵为单一因子相关矩阵时的风险比得到以单一因子相关矩阵为基础的总体协方差矩阵的风险比。这里不赘述具体的推导过程，而只给出推导的结果。当采用以单一因子相关矩阵为基础的总体协方差矩阵时，由样本协方差矩阵构建的最小方差组合的风险比为

$$d_3 \approx \frac{1}{\sqrt{1-q}} \quad (6-21)$$

在上面所有的风险比的表达式中， q 的取值范围为(0,1)。当 $q \geq 1$ 时，样本协方差矩阵不再是正定的，此时的样本协方差矩阵和在此基础上建立的投资组

合都是没有意义的。由(6-20)式和(6-21)式看出，以“市场+部门”相关矩阵为基础的总协方差矩阵和以单一因子相关矩阵为基础的总协方差矩阵的风险比都大于1，这说明样本协方差矩阵的噪声造成了所构建的最小方差组合与真正最小方差组合的偏离，从而引起了所构建的投资组合的风险优化水平的下降。另外，还可观察到，样本协方差矩阵的噪声对投资组合优化水平的影响取决于 q 。 q 越大，噪声对投资组合风险优化水平的影响就越大，这导致投资组合风险优化水平就越低。根据文献[105-106]的研究，样本协方差矩阵的噪声随 q 的提高而增大。可见，噪声对投资组合优化水平发挥多大的影响是由噪声的大小决定的。噪声越大，则它对投资组合优化水平的影响就越大。

6.3.3 模拟研究的步骤、结果和分析

理论上讲，作为一种去噪的手段，矩法能改进投资组合风险的优化水平。下面，对矩法改进投资组合风险优化水平的有效性进行模拟验证。由于本节设定的两种总协方差矩阵模型都采用含有经济部门的相关结构，因此，这两种总协方差矩阵的不同的特征值数都是由经济部门数决定的，而远低于股票数量 N 。具体地说，采用含有 M 个经济部门的相关结构的总协方差矩阵的不同的特征值数为 $2M$ 个，含有单一因子相关结构的总协方差矩阵的不同的特征值数为2个，这些不同的特征值都会重复一定的次数。这样，在应用矩法对总协方差矩阵的特征值进行估计时，就没有必要将未知特征值的数量设定为 N 个，而可以根据对经济部门数的猜测，只计算少于 N 个的未知特征值和这些不同特征值重复的次数。设股票总数为 $N=100$ ，“市场+部门”相关结构中的经济部门数为 $M=5$ 。利用矩法对由第一个总协方差矩阵模型产生的样本协方差矩阵去噪时，考察了 $M=3、5、7$ 和 9 时的去噪效果。利用矩法对由第二个总协方差矩阵模型产生的样本协方差矩阵去噪时，假定对总协方差矩阵的不同特征值数事先进行了正确的猜测，这样只需计算2个不同的特征值和它们的重数。

当采用第一个总协方差矩阵模型时，在一定的 q 下，应用矩法对样本协方差矩阵去噪前后的风险比的得到需要经过如下的步骤：

第1步 给定一个含有5个经济部门的相关矩阵和一个含有相等成分的标准差矩阵，并在此基础上计算预测期和投资期中股票收益率总协方差矩阵 S 。

第2步 根据(6-12)式，由 S 产生100只股票收益率的样本时间序列。将样本时间序列的这一产生过程重复50次，这样由(6-13)式就算得了预测期中的

50 个样本协方差矩阵 \hat{S} 。

第 3 步 分别计算由上述 50 个样本协方差矩阵构建的投资组合的风险比，然后计算风险比的均值。

第 4 步 当猜测总体相关结构中含有 3 个经济部门时，利用矩法对上述 50 个样本协方差矩阵去噪，并计算由去噪后的样本协方差矩阵构建的投资组合的风险比及其均值。

第 5 步 重复第四步的工作，不过和第四步的唯一不同是应用矩法时猜测的经济部门数是 5。

第 6 步 重复第四步的工作，不过和第四步的唯一不同是应用矩法时猜测的经济部门数是 7。

第 7 步 重复第四步的工作，不过和第四步的唯一不同是应用矩法时猜测的经济部门数是 9。

当采用第二个总体协方差矩阵模型时，组合中的股票数也是 100。此时由于假定对总体相关结构进行了正确的猜测，因此无需考虑总体协方差矩阵的特征值数不同的一些情况。在一定的 q 下，对样本协方差矩阵去噪前后的风险比的得到需要经过如下的步骤：

第 1 步 给定一个单一因子相关矩阵和一个含有相等成分的标准差矩阵，并在此基础上计算预测期和投资期中股票收益率总体协方差矩阵 S 。

第 2 步 根据(6-12)式，由 S 产生 100 只股票收益率的样本时间序列。将样本时间序列的这一产生过程重复 50 次，这样由(6-13)式就算得了预测期中的 50 个样本协方差矩阵 \hat{S} 。

第 3 步 分别计算由上述 50 个样本协方差矩阵构建的投资组合的风险比，然后计算风险比的均值。

第 4 步 利用矩法对上述 50 个样本协方差矩阵去噪，并计算由去噪后的样本协方差矩阵构建的投资组合的风险比及其均值。

两类总体协方差矩阵的风险比的结果如图 6-6 和图 6-7 所示。由(6-20)式和(6-21)式知，无论采用两个总体协方差矩阵模型中的哪一个，未对样本协方差矩阵去噪时的风险比的理论值都近似地等于 $1/\sqrt{1-q}$ ，所以，将 $d=1/\sqrt{1-q}$ 作为图 6-6 和图 6-7 中的风险比 d 的理论曲线。在某个 q 下，由 50 个样本得到的 d 的标准差也被显示在图 6-6 和 6-7 中。另外，需要说明的是，每个 q 都同时对应着几种不同的结果。为了清楚地区分这些结果，将它们进行了分开的显示。这样，在图 6-6 中，除了考虑 3 部门的矩法的 d 外，其他结果并没有显示在对应的 q 的正上方。

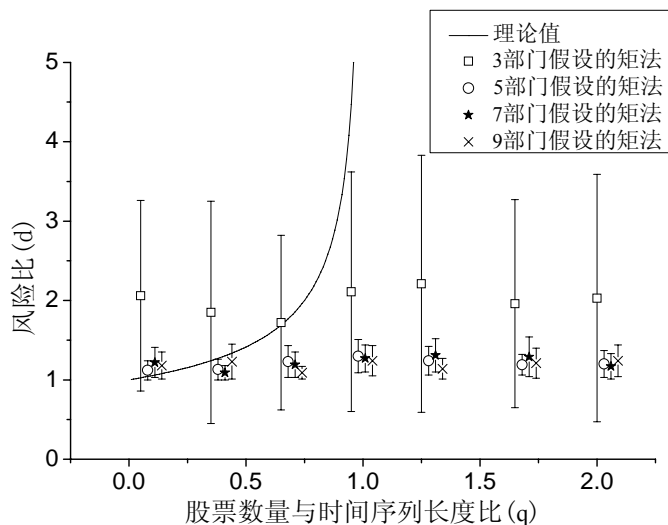


图 6-6 含有“市场+部门”相关结构的总体协方差矩阵模型的风险比

Fig.6-6 Risk ratio of population covariance matrix model with market-plus-sectors correlation structure

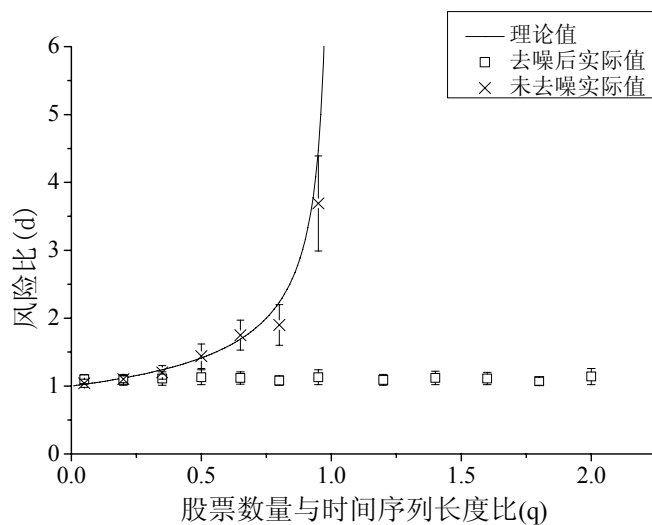


图 6-7 含有单一因子相关结构的总体协方差矩阵模型的风险比

Fig.6-7 Risk ratio of population covariance matrix model with one-factor correlation structure

从图 6-7 中可以看出，用 d 的理论曲线可以很好地拟合未去噪时的 d ，这意味着在分析个别样本协方差矩阵的噪声对投资组合风险优化水平的影响时，不必根据这些样本协方差矩阵实际地计算 d ，而可以简单地用 d 的理论值来表示噪声的影响，这无疑有利于减少计算 d 时的繁重的计算量。基于上述考虑，当采用总体协方差矩阵的第一个模型时，我们并没有计算个别协方差矩阵的 d

值，而是用 d 的理论值来近似地代替它。

下面分析样本协方差矩阵噪声对投资组合风险优化水平的影响。从图 6-6 和 6-7 可以观察到，在 q 的不同取值下， d 都大于 1，说明样本协方差矩阵的噪声造成所构建的最小方差组合与投资期真正最小方差组合的偏离，从而引起投资组合风险优化水平的下降。噪声对投资组合风险优化水平的影响并非一成不变的。如图 6-6 和 6-7 所示，未去噪的 d 随 q 的增大而呈现增大的趋势，说明投资组合风险优化水平随 q 的增大而减小。之所以存在该现象，是因为样本协方差矩阵的噪声随 q 的增大而增大，从而噪声对组合风险优化水平的影响也随之增大。

接下来分析矩法对组合风险优化水平的改进作用。本节应用的矩法包括两种情况，一种情况是对经济部门数或总体协方差矩阵的不同特征值数进行了正确的猜测，包括采用第一个总体协方差矩阵模型时考虑 5 部门的矩法和采用第二个总体协方差矩阵模型时考虑 2 个不同特征值的矩法；另一种情况是对经济部门数或总体协方差矩阵的不同特征值数没有进行正确的猜测，主要是指采用第一个总体协方差矩阵模型时考虑 3 个、7 个或 9 个部门的矩法。从图 6-6 和 6-7 可以看出，总体来讲，矩法通过对样本协方差矩阵的去噪起到了改进投资组合风险优化水平的作用。当矩法对经济部门数或总体协方差矩阵的不同特征值数进行正确的猜测时， d 的均值的变化范围是 $[1.07, 1.3]$ ，说明组合风险高于最小风险的最高比例仅为 30%，这意味着组合风险和最小风险非常接近，矩法使组合风险达到了一个较高的优化水平。当猜测的部门数不等于真正的部门数时，矩法的去噪效果能否因此受到不利的影响要视对部门数的猜测而定。矩法建立在计算总体协方差矩阵矩的基础上，猜测的部门数越多，则需要计算的矩的数量就越多。和真正的部门数相比，考虑更多的部门数会导致需要计算的矩的数量的增加，从而会为特征值的估计提供更多的信息，因此，矩法的去噪效果变化不大。相反，如果猜测的部门数小于真正的部门数，则所计算的矩包含的信息就会不足，因此矩法的去噪效果会减小。从图 6-6 中可以总结出矩法的去噪能力随猜测的部门数或特征值数变化的规律。随猜测的部门数或特征值数的增加，它们越来越接近于真正的部门数或特征值数，矩法的去噪能力就在提高。当猜测的部门数或特征值数等于真正的部门数或特征值数时，矩法的去噪能力达到最大。在这之后，当猜测的部门数或特征值数继续增加时，尽管需要计算的矩的增多能为特征值的估计提供更多的信息，不过这并不能使矩法的去噪能力发生大的改变。可见，当猜测的部门数或特征值数等于真正的部门数或特征值数时，矩法的去噪能力会达到一种饱和状态，我们将该现象称为矩法

的饱和现象。根据矩法的饱和现象，当对部门数或特征值数猜测的准确性没有确切的把握时，应尽量增大所猜测的部门数或特征值数，这样有利于取得较好的去噪效果。矩法的饱和现象也为确定总体协方差矩阵的部门数或特征值数提供了一种方法。当随着部门数或特征值数的猜测数量的增加，矩法的去噪能力达到饱和即去噪效果不再增加时，此时的部门数或特征值数即为总体协方差矩阵的真正部门数或特征值数。

前面分析了猜测的部门数或特征值数对矩法的去噪能力的影响。除了猜测的部门数或特征值数外， q 的变化也会对矩法的去噪效果造成影响。从图 6-6 和图 6-7 能够观察到，去噪后 d 的减小额随 q 的增大而增大，说明去噪引起的组合风险优化水平的提高也随 q 的增大而提高，这主要是由于噪声对组合风险优化水平的影响随 q 的增大而增大的缘故。

6.4 基于矩法股票投资组合风险优化实证研究

本节的主要工作是对矩法用于投资组合风险优化的效果进行实证分析。由于目前对金融波动率去噪的主要方法是 PG+法，因此，本节通过和 PG+法的比较来对矩法的组合风险优化效果的强弱进行评价。作为本节的研究基础，先对本节涉及的不同条件下投资组合的构建方法和组合风险优化水平的表示方法进行介绍。

6.4.1 构建的投资组合及其风险优化水平表示方法

首先，对本节需要用到的 Markowitz 投资组合的构建方法进行介绍。

6.4.1.1 Markowitz 投资组合的构建方法

这里，将投资期即被预测日记为 t_0 ，设 t_0 前的 T 天为预测期（不包括 t_0 ）。在预测投资期股票收益率的协方差矩阵时，本节将预测期股票日收益率的样本协方差矩阵作为投资期股票收益率的协方差矩阵。要构建 Markowitz 投资组合，除了对股票收益率的协方差矩阵进行预测外，还需要对投资期中各只股票均值收益率进行预测。本节将对投资期股票均值收益率的预测分为两种情况，一种情况是正确的预测，此时将 t_0 后的 T 天（包括 t_0 ）中各只股票的日均收益率作为投资期各只股票的均值收益率。另一种情况是利用预测期各只股票的日均收益率预测投资期股票均值收益率。

设股票数量是 N ，通过上述方法产生的对第 i 只股票的投资期均值收益率的预测为 r_i ，对第 i 只股票和第 j 只股票收益率协方差的预测是 \hat{S}_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, N$)，那么对一个以 w_i 为第 i 只股票的投资权重的投资组合的投资期均值收益率

的预测值为，

$$r_p \equiv \sum_{i=1}^N w_i r_i$$

对该投资组合的投资期方差的预测值为，

$$\hat{\sigma}_p^2 \equiv \sum_{i,j=1}^N w_i w_j \hat{S}_{ij}$$

Markowitz投资组合就是在 r_p 的取值既定和 $\sum_{i=1}^N w_i=1$ 的约束条件下，使 $\hat{\sigma}_p^2$ 达到最小的投资组合。在允许卖空即允许 w_i 为负的条件下，Markowitz投资组合为

$$w^* = \lambda \hat{S}^{-1} 1 + \gamma \hat{S}^{-1} r$$

其中， \hat{S} 是对投资期股票收益率协方差矩阵的预测值， $1^T = (1, \dots, 1)$ ， r 是投资期均值收益率向量，其他参数为，

$$\lambda = \frac{C - r_p B}{\Delta}$$

$$\gamma = \frac{r_p A - B}{\Delta}$$

其中，

$$A = 1^T \hat{S}^{-1} 1$$

$$B = 1^T \hat{S}^{-1} r$$

$$C = r^T \hat{S}^{-1} r$$

$$\Delta = AC - B^2$$

$\gamma=0$ 时得到的最优组合被称为全面最小风险组合，它是本节后面部分在更现实条件下研究组合风险优化时所使用的组合。

不同于允许卖空时的Markowitz投资组合，在不允许卖空即投资权重非负约束条件下的Markowitz投资组合没有明确的表达式，所以，本节采用分支定界法^[125]求解投资权重非负约束条件下的Markowitz投资组合。

6.4.1.2 Markowitz 投资组合风险优化水平的表示方法

Markowitz 投资组合风险就是 Markowitz 投资组合收益率的以方差表示的投资期风险。由于投资期股票收益率的协方差矩阵并不可知，因此，本节用投资期后 T 天（包括投资期）的股票日收益率样本协方差矩阵近似地代替投资期真正的协方差矩阵。这样，Markowitz 投资组合风险是以 Markowitz 投资组合的已实现风险表示的。Markowitz 投资组合已实现风险的计算方法如下，

$$R_{re(p)}^2 \equiv \sum_{i,j=1}^N w_i^* w_j^* \sigma_{ij}^2$$

其中， w_i^* 是Markowitz投资组合权重， $\{\sigma_{ij}^2\}_{i,j=1}^N$ 是股票收益率已实现协方差矩阵，即 t_0 后 T 天的股票日收益率样本协方差矩阵。

本节采用两种方法表示 Markowitz 投资组合风险的优化水平，第一种方法是用 Markowitz 投资组合风险的大小表示 Markowitz 投资组合风险优化水平。 $R_{re(p)}^2$ 越低，表示 Markowitz 投资组合风险的优化水平越高。第二种方法是用对 Markowitz 投资组合风险的预测准确率表示 Markowitz 投资组合风险的优化水平。本节采用如下方法衡量对 Markowitz 投资组合风险的预测准确率。

$$R \equiv \frac{|R_{re(p)} - R_{pr(p)}|}{R_{pr(p)}} \quad (6-22)$$

其中， $R_{pr(p)}^2$ 是 Markowitz 投资组合风险的预测值，它的计算方法为

$$R_{pr(p)}^2 \equiv \sum_{i,j=1}^N w_i^* w_j^* \hat{S}_{ij}$$

R 越小，表明对 Markowitz 投资组合风险的预测准确率越高，Markowitz 投资组合风险的优化水平也就越大。

按照是否正确地预测股票收益率和是否允许卖空，本节将投资组合的构建条件分为四种情况。情况 I 是正确地预测股票收益率且允许卖空的情况；情况 II 是用股票收益率历史数据预测股票收益率且允许卖空的情况；情况 III 是正确地预测股票收益率且不允许卖空的情况；情况 IV 是用股票收益率历史数据预测股票收益率且不允许卖空的情况。接下来，先在符合情况 I 的理想化条件下分析矩法的组合风险优化效果。然后，对所有四种情况下矩法的组合风险优化效果进行研究，从而进一步地揭示出矩法的组合风险优化效果的大小和变化规律。和情况 I 相比，其余三种情况都更接近于现实。因此，可以将包含所有四种情况的研究看成是现实化条件下的实证研究。本节所用数据为 2000 年前（不包括 2000 年）开始在上海证券交易所上市的市值最大的 340 只 A 股股票 2000-2010 年的日收益数据，它们来自于国泰安数据库。

6.4.2 理想化条件下的实证分析

下面先以从前述 340 只股票中随机选出的 140 只股票的组合为例，对各个 r_p 下矩法的组合风险优化效果开展全面的研究。

6.4.2.1 含 140 只股票的组合分析

将 2007-2008 年作为构建 Markowitz 投资组合的预测期，得到的矩法和 PG+法的组合风险优化效果如图 6-8 所示。图 6-8 给出了在 r_p 的每个取值下，

注：该章实证研究中所用的 340 只股票收益率数据及大量组合优化分析中各个组合包含的股票名称、预测期和投资期信息过多，而不便将其列出，所以，仅在附录中给出了 340 只股票的名称和理想化条件下分析的 140 只股票的名称，如附表 2 和附表 3 所示。如果读者需要上述数据和信息，请向 libingna519@163.com 发邮件获取。

未去噪的组合、由矩法得到的组合和由PG+法得到的组合各自的被预测风险和已实现风险。从图 6-8 中能够观察到，当预期收益率 r_p 取任一个值时，由矩法和PG+法构建的组组合的被预测风险和已实现风险之差都小于未去噪时的差，表明由矩法和PG+法得到的组合风险预测准确率高于未去噪时的预测准确率。而且能够看出，由矩法和PG+法得到的组合已实现风险始终低于未去噪时的组合风险。上述说明不管以组合风险预测准确率还是以已实现风险表示组合风险优化水平，矩法和PG+法都能起到促进组合风险优化的作用。由图 6-8 还能看出，由矩法得到的组合风险预测准确率始终高于PG+法，且由矩法得到的组合已实现风险始终低于PG+法，说明矩法的组合风险优化效果好于PG+法。

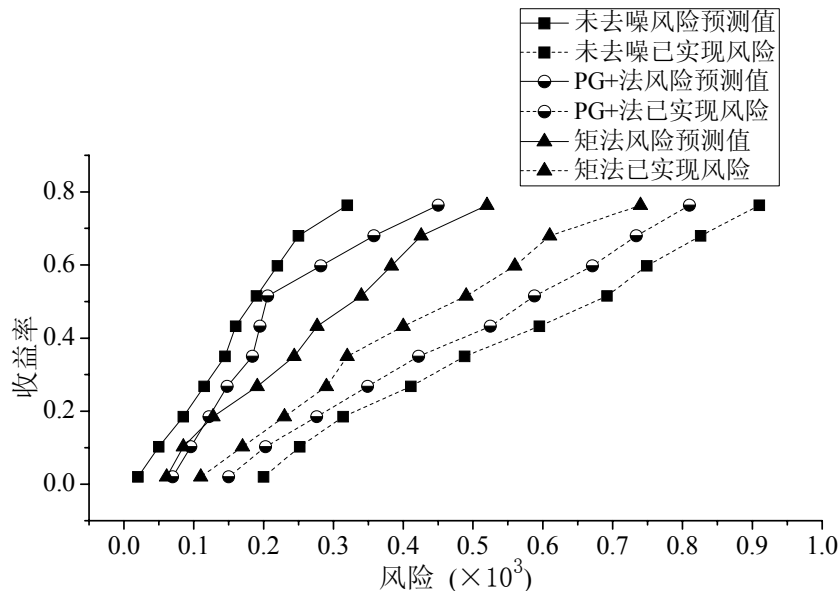


图 6-8 各预期收益率下用 PG+法和矩法去噪前后的组合风险

Fig.6-8 Portfolio risks pre-and post- denoising by the PG+ approach and the moment method for all the values of the expected return

6.4.2.2 大量组合的优化分析

接下来，在组合中股票、股票数和预测期变化的条件下研究矩法的组合风险优化效果。

1. 组合风险的预测准确率

前述关于矩法组合风险优化效果的分析是基于一个股票数为 140 的特定组合做出的，因此，所得结论是否具有普适性需要进一步的验证。为此，下面分析矩法用于股票数、股票和预测期不同的更多组合的去噪效果。这些组合的形成方法如下。首先，对组合中股票数 N 进行确定。为了尽可能地实现组合规

模的多样化, 让 N 取等差排列的 15 个值, 它们是 10、20、30、40、50、60、70、80、90、100、110、120、130、140 和 150。然后, 对 N 的任一既定取值, 预测期 T 从 $N+50$ 增加到 300, T 的相邻两值间的差都是 10, 这样就形成了若干对 (N, T) 。最后, 对某对 (N, T) , 从备选的 340 只股票中随机选出 N 只股票, 并随机地确定投资期, 这样就得到了一个投资组合。将上述过程重复 50 次, 就得到了该对 (N, T) 对应的 50 个投资组合。利用该方法不难得到每对 (N, T) 对应的 50 个投资组合。

对上述每个组合, 都需要计算出在全面最小风险组合的收益率和该组合最大收益率间等差取值的 10 个 r_p 值。在每对 (N, T) 对应的每个组合的 10 个 r_p 值都被确定后, 针对每个 r_p 值, 计算由 PG+法和矩法得到的组合风险预测准确率, 即 R_{PG+} 和 R_{mom} 。然后统计出 $R_{mom} > R_{PG+}$ 的 r_p 在每对 (N, T) 对应的 50 个组合的全部 r_p 所占的比例, 结果如图 6-9 所示。

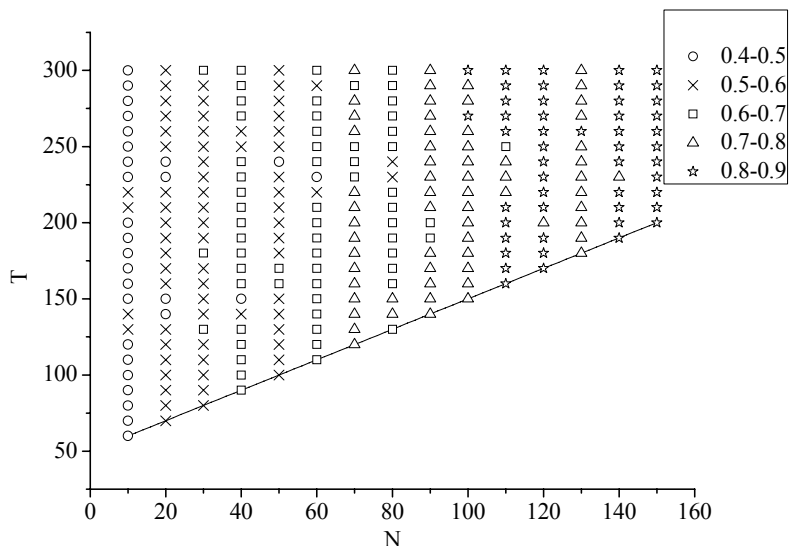


图 6-9 矩法的组合风险预测准确率高于

PG+法的 r_p 在每一对 (N, T) 包含的全部 r_p 中的比例

Fig.6-9 The percentage of values of r_p for which the moment method has higher prediction accuracy of portfolio risks than the PG+ approach in all the values of r_p involved in every (N, T)

图 6-9 中位于所有图标底部的直线代表 $T=N+50$ 。该图以不同的图标表示不同的取值区间, 描述了每一对 (N, T) 包含的全部 r_p (50×10) 中, 由矩法得到的风险预测准确率高于 PG+法的 r_p 所占比例取值区间。由图 6-9 能够观察到, 由矩法得到的风险预测准确率高于 PG+法的 r_p 在某一队 (N, T) 包含的全部 r_p 中所占的比例主要和 N 有关, 当 N 小于 20 时, 该比例一般小于 50%, 而

当 N 大于 20 时, 由矩法得到的风险预测准确率高于PG+法的概率开始高于 50%, 且具有一种随 N 增加而增大的趋势。

2. 组合的风险

通过对PG+法和矩法的组合已实现风险的测度, 发现对于资产数量很小的组合, PG+法的组合风险更小。但随着 N 的增加, 矩法的已实现风险同PG+法的差距有一种减小的趋势。在 N 增至 33 后, 当 r_p 较小时, 矩法的已实现风险小于PG+法的概率达 50%以上。而矩法在 r_p 较大时具有的优势是在 N 达到 51 以上才体现出来的。在 r_p 较小和较大时矩法的优势都具有一种随 N 增大而增大的趋势, 这同矩法在组合风险预测准确率上的优势的变化趋势是一致的。

6.4.3 现实化条件下的实证分析

前面的部分中, 为了集中地研究协方差矩阵估计的问题, 我们做出了投资者对组合资产的未来收益能正确预测的假定。而且, 我们对组合权重没有施加任何约束。因此, 许多组合中的一些股票权重为负, 表明投资者需要进行卖空操作。我们已经研究了在这些理想化的条件下矩法在组合优化中的应用。本部分研究现实化条件下的组合风险优化。具体地, 这里分别以 2000-2001 年、2001-2002 年、2002-2003 年、2003-2004 年、2004-2005 年、2005-2006 年、2006-2007 年和 2007-2008 年作为预测期, 研究了理想化条件下所采用的 140 只股票在 6.4.1.2 节所述四种组合构建条件下的风险优化。为简化起见, 本部分只考虑全面最小风险组合, 结果见表 6-2、表 6-3 和表 6-4。

由表 6-2 能看出, 无论采用哪个预测期, 也无论在何种组合构建条件下, 由矩法得到的 R_{\min} 都是最低的, 其次是PG+法, 未去噪时的 R_{\max} 最高, 这些说明在任意一种情况下, 矩法和PG+法都能改进组合风险预测的准确率, 且矩法的组合风险优化效果都是最好的。由表 6-3 能够看出, 当用组合已实现风险衡量组合风险优化水平时, 除个别情况外, 矩法的组合风险优化效果都好于PG+法。可见, 总体上讲, 无论以已实现风险还是组合风险预测准确率衡量组合风险的优化水平, 在根据是否正确地预测收益率和是否允许卖空划分的四种情况的任意一种情况下, 矩法和PG+法都能起到改进组合风险优化水平的作用, 且矩法的组合风险优化作用大于PG+法。

为了分析是否正确地预测股票收益率和是否允许卖空对去噪法的组合风险优化效果的影响, 根据表 6-2 和表 6-3 的结果计算了各种情况下矩法和PG+法的组合风险优化效果, 如表 6-4 所示。表 6-4 中组合风险优化效果的表示方法有两种: 一种是各段时期中组合已实现风险下降的平均百分比; 另一种是各段时期中组合风险预测准确率的平均增长值。由于由式(6-22)计算的 R 值的下降

意味着预测准确率的提高，因此，表 6-4 中PG+法和矩法预测准确率的提高分别用各投资期中 R_{PG+} 和 R_{mom} 比 R_{mar} 的平均下降表示。由表 6-4 可以观察到能否正确地预测股票收益率和是否允许卖空对去噪法的组合风险优化效果的如下影响：

表 6-2 在四种组合构建条件下组合风险预测准确率

Table 6-2 Accuracy of portfolio risk forecast under four types of conditions for portfolio construction

预测期	情况 I			情况 II			情况 III			情况 IV		
	R_{mar}	R_{PG+}	R_{mom}	R_{mar}	R_{PG+}	R_{mom}	R_{mar}	R_{PG+}	R_{mom}	R_{mar}	R_{PG+}	R_{mom}
2000-2001	1.9	0.9	0.45	2.32	1.1	0.7	2.06	0.88	0.53	2.14	1.06	0.74
2001-2002	1.83	1.03	0.43	2.14	0.99	0.61	1.99	0.75	0.4	1.96	0.91	0.58
2002-2003	2.12	1.2	0.75	1.98	0.78	0.39	2.26	1.06	0.65	2.04	0.9	0.63
2003-2004	2.45	1.3	0.96	2.06	0.82	0.43	2.11	1.02	0.64	2.21	1.03	0.76
2004-2005	1.99	1.09	0.48	2.25	0.94	0.6	2.04	0.95	0.62	2.09	0.89	0.63
2005-2006	2.36	1.26	0.98	2.43	1.23	0.83	2.35	1.15	0.96	2.12	1.13	0.74
2006-2007	1.89	0.91	0.47	2.37	1.11	0.67	2.13	0.92	0.64	2.01	1.07	0.69
2007-2008	2.17	1.02	0.59	2.13	0.95	0.49	2.45	1.14	0.63	2.28	1.22	0.88

注： R_{mar} 、 R_{PG+} 和 R_{mom} 分别表示未去噪、以PG+法和以矩法去噪的组合风险预测准确率

1、当用股票历史收益率预测各只股票的均值收益率时，矩法和 PG+法的以已实现风险下降百分比衡量的组合风险优化效果都会变得更加明显。如表 6-4 所示，情况 I 和情况 III 下矩法引起的已实现风险下降的百分比小于情况 II 和情况 IV 下引起的已实现风险下降的百分比。PG+法也存在和矩法类似的特点。根据 Markowitz 证券投资组合理论，组合预期收益率一定时构建的投资组合是从很多备选组合中选出的。显然，当对各只股票的均值收益率进行正确的预测时，所有备选组合的真实收益率相同，都等于预期收益率。因此，所有备选组合的真实风险也会比较接近。作为对真实风险的近似，这些备选组合的已实现风险的离散度就会较小，使得由去噪引起的组合已实现风险的下降不如非正确预测收益率时的下降明显。由表 6-4 还可以观察到，因用历史收益率预测

各只股票的均值收益率而导致的组合风险优化效果的明显化仅体现在以已实现风险的下降衡量的组合风险优化效果上。当以组合风险预测准确率的提高衡量组合风险的优化效果时，用历史收益率预测各只股票的均值收益率并不能带来更明显的组合风险优化效果。组合风险预测的准确率主要是由用于构建投资组合的收益率协方差矩阵和真正的协方差矩阵的差别决定的。由于对股票收益率的预测发生变化时，未去噪的协方差矩阵、以矩法去噪的协方差矩阵、以 PG+法去噪的协方差矩阵和真正的协方差矩阵都不会因此而变化，因此，未去噪时的组合风险预测准确率、以矩法去噪的组合风险预测准确率和以 PG+法去噪的组合风险预测准确率受收益率预测的影响都不大。所以，当对股票收益率的预测改变时，以组合风险预测准确率的提高衡量的组合风险优化效果并不会发生较大的变化。

表 6-3 在四种组合构建条件下组合的已实现风险

 Table 6-3 Realized risks of portfolios under four types of conditions for portfolio construction ($\times 10^3$)

投资期	情况 I			情况 II			情况 III			情况 IV		
	MAR	PG+	MOM	MAR	PG+	MOM	MAR	PG+	MOM	MAR	PG+	MOM
2000-2001	0.91	0.75	0.73	3.65	2.37	2.14	1.12	1.02	0.96	3.89	2.76	2.75
2001-2002	1.25	0.92	1.01	3.06	2.07	1.95	1.12	1.08	0.92	3.78	2.92	2.29
2002-2003	1.16	0.94	0.85	3.91	2.84	2.27	0.97	0.86	0.83	4.15	3.92	2.97
2003-2004	0.73	0.59	0.51	3.87	2.52	2.06	0.88	0.79	0.68	4.01	2.84	2.92
2004-2005	0.94	0.89	0.76	3.01	2.32	1.98	1.04	0.97	0.85	2.74	1.69	1.57
2005-2006	0.86	0.77	0.63	4.26	2.97	2.85	1.10	0.99	0.95	4.61	2.67	3.17
2006-2007	0.51	0.45	0.48	2.95	2.06	1.74	0.71	0.64	0.51	3.53	2.59	2.62
2007-2008	0.46	0.42	0.38	2.71	2.13	1.65	0.65	0.53	0.51	3.46	2.42	2.51

注：MAR 表示未去噪，PG+表示 PG+法，MOM 表示矩法

2、当对股票均值收益率的预测相同时，不允许卖空会导致矩法的以已实现风险下降百分比衡量的组合风险优化效果的下降。如表 6-4 所示，矩法在情况 I 下的组合风险优化效果好于情况 III 下的风险优化效果，情况 II 下的组合风险优化效果也好于情况 IV 下的风险优化效果。由于不允许卖空时的备选组合是

允许卖空时的备选组合的一个子集，因此，不允许卖空时由矩法选取的最佳组合的风险必然比允许卖空时由矩法选取的最佳组合的风险大，从而造成不允许卖空时矩法去噪效果的下降。由表 6-4 还可以观察到，因不允许卖空而导致的组合风险优化效果的下降仅体现在以已实现风险的下降衡量的组合风险优化效果上。当以组合风险预测准确率的提高衡量组合风险的优化效果时，不允许卖空并不能导致组合风险优化效果的下降。组合风险预测准确率主要是由用于构建投资组合的收益率协方差矩阵和真正的协方差矩阵的差别决定的，而是否允许卖空对矩法去噪前后的组合风险预测准确率的影响很小，因此，当不允许卖空时，矩法的以组合风险预测准确率的提高衡量的组合风险优化效果并不会发生较大的变化。

表 6-4 四种情况下 PG+法和矩法的组合风险优化效果

Table 6-4 Portfolio risk optimization effect of the PG+ approach and the moment method in four cases

	情况 I		情况 II		情况 III		情况 IV	
优化效果的表示法	PG+	MOM	PG+	MOM	PG+	MOM	PG+	MOM
已实现风险的下降(%)	14.80	20.63	29.31	39.23	9.89	18.86	27.95	31.44
预测准确率的提高	1.01	1.45	1.22	1.62	1.19	1.54	1.08	1.40

6.5 本章小结

以股票收益总体协方差矩阵和样本协方差矩阵特征谱矩的关系为理论基础，采用模拟退火算法估计总体协方差矩阵的特征值，从而提出了对样本协方差矩阵去噪的矩法。和现有 RMT 去噪法对噪声特征值替换的做法不同，矩法引入了一种对总体协方差矩阵的全部特征值进行估计的新去噪思路。

通过构建 toy 模型，对矩法去噪效果的模拟研究结果表明矩法能将股票收益总体协方差矩阵特征值的估计误差控制在一个较小范围内（一般不超过 10%），说明矩法的去噪效果很好，且去噪效果受到样本序列长度和样本协方差矩阵数量的影响。通过设定符合现实经济情况的总体协方差矩阵模型，将矩法用于股票投资组合风险优化的模拟研究结果表明，样本协方差矩阵的噪声造成 Markowitz 投资组合与投资期最小方差组合的偏离，从而引起 Markowitz 投资组合风险优化水平的下降。矩法能够起到改进组合风险优化水平的作用，且

噪声的影响越大，矩法引起的投资组合风险优化水平的提高就越大。矩法对组合风险的优化能力受到对总体协方差矩阵的部门数或特征值数的猜测的制约而存在饱和现象。

针对矩法的组合风险优化效果开展的实证分析结果表明，矩法能通过股票收益协方差矩阵的去噪而促进组合风险的优化，以已实现风险下降的百分比衡量的矩法的组合风险优化效果因用历史收益率预测各只股票的均值收益率而提高，也因不允许卖空而下降；矩法的组合风险优化作用比最常用的 PG+去噪法更大。和 PG+法相比，矩法在组合风险预测准确率和已实现风险上具有的优势分别在股票数量增至 20 和 51 时出现，且都随股票数量增长而呈增大的趋势。

结 论

本文指出了 Markowitz 股票投资组合风险中的噪声问题，分析了股票收益历史相关矩阵和协方差矩阵的噪声对 Markowitz 投资组合风险优化水平的影响，并选取 RMT 去噪法作为解决噪声影响和提高 Markowitz 投资组合风险优化水平的方法。在此基础上，研究了基于面向收益历史相关矩阵和协方差矩阵的 RMT 去噪法股票投资组合风险优化的问题。本论文的主要研究结论和创新性成果如下：

(1) 建立了面向收益相关矩阵的 KRMIN 去噪法改进股票投资组合风险优化水平。论文对股票收益相关矩阵的特征向量最小扰动稳定性进行了数理推导，从而弥补了特征向量 Krzanowski 稳定性研究领域的空白。并基于特征向量最小扰动稳定性的最大化，建立了对股票收益相关矩阵去噪的基于最小扰动 Krzanowski 稳定性的 RMT 去噪法，即 KRMIN 去噪法。KRMIN 法吸纳了 KR 法的以相关矩阵特征向量稳定性的提高为核心的思想，不仅通过采用特征向量最小扰动稳定性弥补了 KR 法原理的缺陷，而且还通过扩展特征值设定方法和采用模拟退火算法计算特征值弥补了 KR 法算法的缺陷。理论研究和实证研究均表明，由于在收益相关矩阵特征向量的稳定性和特征值算法准确性上的优势，KRMIN 方法的组合风险优化效果好于其他 RMT 去噪法。

(2) 建立了面向多元波动率模型的 RMT 去噪法改进股票投资组合风险优化水平。论文探究了基于 RMT 股票收益率多元波动率模型去噪的机理，提出了基于 RMT 多元波动率模型去噪的一般方法，对该方法的组合风险优化作用进行了理论分析。研究表明，该方法能通过对股票收益率相关矩阵的去噪而实现对股票收益率多元波动率模型的去噪，进而起到改进组合风险优化水平的作用。为了进一步验证该方法改进组合风险优化水平的有效性，建立了将基于 RMT 的相关矩阵估计和波动率结合在一起的 SC-GARCH 模型和 IO-GARCH 模型，并针对我国股市进行了实证研究。结果表明 RMT 去噪法能对多元波动率模型的最低噪声维度进行正确的确定，从而实现股票投资组合风险优化水平的最大化。这证实了论文提出的面向股票收益率多元波动率模型的 RMT 去噪模型的正确性，RMT 能够为多元波动率模型的去噪，并进而为股票投资组合风险的优化提供有效的理论支持。该研究填补了基于 RMT 多元波动率模型去噪领域的研究空白，为解决多元波动率模型的“维数灾祸”问题提供了一种新的有效方法，而且开辟了基于 RMT 多元波动率模型去噪实现组合风险优化的

新思路。

(3) 建立了面向收益样本协方差矩阵的蒙特卡洛 RMT 去噪法改进小组合风险优化水平。本文提出了小股票组合的概念,分析指出了小股票组和条件下对收益样本协方差矩阵去噪的已有 RMT 方法因噪声特征值边界界定误差而产生的组合风险优化作用下降的问题,并为解决该问题,采用蒙特卡洛模拟法确定样本协方差矩阵的最大噪声特征值,从而建立了蒙特卡洛 RMT 去噪法。实证研究结果表明,在股票收益序列长度和衰减因子不变时,随股票数量的减小,LCPB 法、PG+法和 KR 法等已有 RMT 去噪法比蒙特卡洛 RMT 法具有的去噪优势因已有方法对噪声特征值边界界定误差的增大而呈减小趋势。直至当已有 RMT 去噪法对噪声特征值边界界定误差开始超过蒙特卡洛 RMT 法的误差时,已有方法的组合风险优化作用变得低于蒙特卡洛 RMT 法。这说明蒙特卡洛 RMT 去噪法是一种解决小股票组合风险优化条件下已有 RMT 去噪法效力下降问题的有效方法。

(4) 建立了面向收益样本协方差矩阵的矩法改进股票投资组合风险优化水平。以股票收益总体协方差矩阵和样本协方差矩阵特征谱矩的关系为理论基础,采用模拟退火算法估计总体协方差矩阵的特征值,从而提出了对样本协方差矩阵去噪的矩法。和现有 RMT 去噪法对噪声特征值替换的做法不同,矩法引入了一种对总体协方差矩阵的全部特征值进行估计的新去噪思路。通过构建 toy 模型,对矩法去噪效果的模拟研究结果表明矩法能将股票收益总体协方差矩阵特征值的估计误差控制在一个较小范围内(一般不超过 10%),且去噪效果会受到样本序列长度和样本协方差矩阵数量的影响。采用模拟研究和实证研究两种方法,分别从理论层面和实证层面分析了矩法对股票投资组合风险优化水平的改进作用。分析结果表明矩法能够起到改进组合风险优化水平的作用,且噪声的影响越大,矩法引起的投资组合风险优化水平的提高就越大;矩法去噪能力存在饱和现象;矩法的组合风险优化作用大于常用的 RMT 去噪法;以已实现风险下降的百分比衡量的矩法的组合风险优化效果因用历史收益率预测各只股票的均值收益率而提高,也因不允许卖空而下降。

对基于 RMT 相关或多元波动率的去噪及其在股票投资组合风险优化中的应用的研究目前处于较为初级的阶段,还有大量需要研究的内容。

(1) 本文建立的各种 RMT 去噪法是否适用于外汇、期货等除股票外的其他金融资产组合的去噪和风险的优化是一个具有较大研究意义的课题。

(2) 除了 KR 法和 KRMIN 法中相关矩阵特征向量稳定性的衡量方法外,金融相关矩阵特征向量的 Krzanowski 稳定性还可以用特征值增大时的特

征向量最大扰动和特征值减小时的特征向量最小扰动度量。以这两种扰动衡量的稳定性是否也能成功地用于建立更多 RMT 去噪法是非常值得探讨的问题。

（3）蒙特卡洛 RMT 去噪法和矩法是否能够通过股票收益相关矩阵的去噪而改进组合风险优化水平需要进一步的研究和证实。

参考文献

- [1] 刘国芳.从证券化率看宏观经济管理[J].经济与管理研究,2009(7):25-30.
- [2] 戴志辉.证券公司股票投资风险的计量、预测和控制[D].西安:西北大学国民经济学学科博士学位论文,2007:3-5.
- [3] 肖新华,刘冬荣.个人股票投资风险的成因与防范分析[J].财经问题研究,2009(2):73-76.
- [4] Muirhead R J.Aspects of Multivariate Statistical Theory[M]. New York: Wiley,1982:74-69.
- [5] Efetov K B.Supersymmetry and the Theory of Disordered Metals[J].Adv. Phys.,1983(32):53-76.
- [6] Efetov K B.Level Spacing Distribution in Small Metallic Particles[J]. Phys. G: Nucl. Phys.,1982(15): L909.
- [7] Efetov K B.Supersymmetric Method in the Localization Theory[J].Zh. Eksp. Teor. Fiz.,1982,82:872-890.
- [8] Hejhal D A. On the Triple Correlation of Zeros of the Zeta Function[J]. Int. Math. Res. Not.,1994(7):293-323.
- [9] Bogomolny E B,Keating J P.Random Matrix Theory and the Riemann Zeros I: Three-and- Four-Point Correlations[J]. Nonlinearity,1995(8):1115-1143.
- [10] Katz N M,Sarnak P.Random Matrices, Frobenius Eigenvalues and Monodromy[M].Providence, RI:American Mathematical Society,1999:156-191.
- [11] Conrey J B,Farmer D W,Keating J P.Autocorrelation of Random Matrix Polynomials[J].Communications in Mathematical Physics,2003,237(3):365-395.
- [12] Keating J P,Linden N,Rudnik Z.Random Matrix Theory, the Exceptional Lie Groups and L-functions[J].Phys. A:Math. Gen.,2003(36):33-44.
- [13] Keating J P,Snaith N C. Random Matrix Theory and $\zeta(1/2 + it)$ [J]. Commun. Math. Phys.,2000(214):57-73.
- [14] Keating J P ,Snaith N C.Random Matrix Theory and L-functions at $s=1/2$ [J].Commun. Math. Phys.,2000(214):91-114.
- [15] Wegner F J.Algebraic Derivation of Symmetry-relations for Disordered Electronic Systems[J]. Z. Phys. B,1983 (49):297-302.
- [16] Efetov K B.Supersymmetry in Disorder and Chaos[M].Cambridge: Cambridge University Press,1997:56-79.
- [17] Brody T A,Flores J,French J B,et al.Random-matrix Physics:Spectrum and

-
- Strength Fluctuations[J]. Rev. Mod. Phys., 1981(53):385-412.
- [18] Webb R A, Washburn S, Umbach C P, et al. Observation of H/E Aharonov-Bohm Oscillations in Normal-Metal Rings[J]. Phys. Rev. Lett., 1985(54):269-302.
- [19] Eguchi T, Kawai H. Reduction of Dynamical Degrees of Freedom in the Large N Gauge Theory[J]. Phys. Rev. Lett., 1982(48):106-145.
- [20] Forrester P J. The Spectrum Edge of Random Matrix Ensembles[J]. Nucl. Phys. B, 1993(402):709-747.
- [21] Zirnbauer M R. Riemannian Symmetric Superspaces and Their Origin in Random-Matrix Theory[J]. J. Math. Phys., 1996, 37:498-523.
- [22] Kazakov V A, Migdal A A. Induced QCD at Large N[J]. Nucl. Phys. B, 1993(397): 214-245.
- [23] Douglas M R, Shenker S H. Strings in Less Than One-Dimension[J]. Nuclear Physics B, 1990, 335(3):635-654.
- [24] Jimbo M, Miwa T, Mori Y, et al. Density Matrix of an Impenetrable Bose Gas and the Fifth Painleve Transcendent[J]. Physica D: Nonlinear Phenomena, 1980, 1(1):80-158.
- [25] Tracy C A, Widom H. Level Spacing Distributions and the Airy Kernel[J]. Communications in Mathematical Physics, 1994, 159(1):151-174.
- [26] Berry M V. Semiclassical Theory of Spectral Rigidity[J]. Proc. R. Soc. A, 1985, 400(1819):229-251.
- [27] Laloux L, Cizeau P, Bouchaud J, et al. Noise Dressing of Financial Correlation Matrices[J]. Phys. Rev. Lett., 1999, 83(7):1467-1470.
- [28] Laloux L, Cizeau P, Potters M, et al. Random Matrix Theory and Financial Correlations[J]. Int. J. Theor. Appl. Finance, 2000, 3(3):391-397.
- [29] Potters M, Bouchaud J, Laloux L. Financial Applications of Random Matrix Theory: Old Laces and New Pieces[C/OL]. (2005-07-14) [2012-03-11]. <http://arxiv.org/abs/physics/0507111>.
- [30] Plerou V, Gopikrishnan P, Rosenow B, et al. Universal and Nonuniversal Properties of Cross Correlations in Financial Time Series[J]. Phys. Rev. Lett., 1999, 83(7):1471-1474.
- [31] Plerou V, Gopikrishnan P, Rosenow B, et al. A Random Matrix Theory Approach to Financial Cross-Correlations[J]. Physica A, 2000, 287(3-4):374-382.
- [32] Stanley H E, Plerou V. Quantifying Economic Fluctuations[J]. Physica A, 2001, 302:126-137.
- [33] Stanley H E, Plerou V. Quantifying Fluctuations in Economic Systems by Adapting Methods of Statistical Physics[J]. Physica A, 2000, 287:339-361.

- [34] Plerou V, Gopikrishnan P, Rosenow B, et al. Collective Behaviour of Stock Price Movements-a Random Matrix Theory Approach[J].Physica A, 2001, 299:175-180.
- [35] Rosenow B, Plerou V. Application of Random Matrix Theory to Study Cross-Correlations of Stock Prices[J]. International Journal of Theoretical and Applied Finance,2000,3(3):399-403.
- [36] Plerou V, Gopikrishnan P, Rosenow B, et al. Econophysics:Financial Time Series from a Statistical Physics Point of View[J]. Physica A,2000,279:443-456.
- [37] Lee Y H.Noise Detection from Financial Correlation Matrices[R/OL]. (2001) [2012-04-11]. <http://web.mit.edu/bazant/www/teach/18.325>.
- [38] Sadik C. Cross Correlations in an Emerging Market Financial Data[J]. Physica A,2007,376:555-564.
- [39] Utsugi A, Ino K, Oshikawa M. Random Matrix Theory Analysis of Cross Correlations in Financial Markets[J]. Phys. Rev. E,2004,70(2):1-5.
- [40] Nilantha K, Ranasinghe, Malmi P. Eigenvalue Density of Cross-correlations in Sri Lankan Financial Market[J]. Physica A,2007,378(2):345-356.
- [41] Wilcox D,Gebbie T. An Analysis of Cross-correlations in an Emerging Market[J].Physica A,2007,375(2):584-598.
- [42] 李良新.中国股票市场有效性的随机矩阵实证分析[J].现代商业,2009(5):30-31.
- [43] Conlon T, Ruskin H J,Crane M. Random Matrix Theory and Fund of Funds Portfolio Optimisation[J]. Physica A,2007,382(2):565-576.
- [44] Malevergne Y,Sornette D. Collective Origin of the Coexistence of Apparent Random Matrix Theory Noise and of Factors in Large Sample Correlation Matrices[J]. Physica A,2004,331 (3-4): 660-668.
- [45] Pafka S, Potters M,Kondor I. Exponential Weighting and Random-matrix-theory-based Denoising of Financial Covariance Matrices for Portfolio Optimization[J/OL].(2004-02-24)[2012-04-25]. <http://eprintweb.org/S/article/cond-mat/0402573/cited>.
- [46] Wilcox D, Gebbie T. On the Analysis of Cross-correlations in South African Market Data[J]. Physica A,2004,344:294-298.
- [47] Coronello C. Sector Identification in a Set of Stock Return Time Series Traded at the London Stock Exchange[J].Acta Physica Polonica B,2005, 36:2653-2676.
- [48] Garas A, Argyrakis P. Correlation Study of the Athens Stock Exchange[J]. Physica A,2007, 380(1-2):399-410.

-
- [49] 郑波.金融动力学的时空关联与大波动特性——兼谈中西方金融市场的对比研究[J].物理,2010 (2):95-100.
 - [50] Pafka S,Kondor I.Estimated Correlation Matrices and Portfolio Optimization [J]. Physica A,2004,343(1-4):623-634.
 - [51] Letchford A,Gao J,Zheng L.Filtering Financial Time Series by Least Squares [J].International Journal of Machine Learning and Cybernetics,2013, 4(2):140-154.
 - [52] Hassani H,Dionisio A,Ghodsi M.The Effect of Noise Reduction in Measuring the Linear and Nonlinear Dependency of Financial Markets[J]. Nonlinear Analysis:Real World Applications,2010,11(1):492-502.
 - [53] Lu C J, Lee T S, Chiu C C. Financial Time Series Forecasting Using Independent Component Analysis and Support Vector Regression[J]. Decision Support Systems,2009,47(2):115-125.
 - [54] Kang W, Kim K, Shin H. Denoising Monte Carlo Sensitivity Estimates[J]. Operations Research Letters, 2012,40(3):195-202.
 - [55] Neaime S.The Global Financial Crisis, Financial Linkages and Correlations in Returns and Volatilities in Emerging MENA Stock Markets[J].EMERGING MARKETS REVIEW,2012,13(3):268-282.
 - [56] Elton E J, Gruber M J.Modern Portfolio Theory and Investment Analysis[M]. New York: Wiley,1995:34-78.
 - [57] Chopra V K, Ziemba W T, Portf J. The Effect of Errors in Mean,Variances,and Covariance on Optimal Portfolio Choice[J]. The Journal of Portfolio Management,1993,19(2):6-11.
 - [58] Livan G, Rebecchi L. Asymmetric Correlation Matrices:An Analysis of Financial Data[J]. European Physical Journal B,2012, 85(6):1-11.
 - [59] Giacomo L,Simone A,Enrico S. Fine Structure of Spectral Properties for Random Correlation Matrices: An Application to Financial Markets[J]. Physical Review E, 2011, 84(1):1-13.
 - [60] Drozd S, Kwapien J, Oswiecimka P. Empirics Versus RMT in Financial Cross-correlations[J]. Acta Physica Polonica B, 2007, 38(13): 4027-4039.
 - [61] Akansu A N, Torun M U. Toeplitz Approximation to Empirical Correlation Matrix of Asset Returns: A Signal Processing Perspective[J]. IEEE Journal on Selected Topics in Signal Processing,2012, 6(4): 319-326.
 - [62] Vincenzo T, Fabrizio L. Cluster Analysis for Portfolio Optimization[J].Journal of Economic Dynamics & Control,2008, 32(1):235-258.
 - [63] Plerou V, Gopikrishnan P, Rosenow B, et al.Random Matrix Approach to Cross Correlations in Financial Data[J]. Phys. Rev.E,2002,65(6):1-6.
 - [64] Sharifi S, Crane M, Shamaie A, et al. Random Matrix Theory for Portfolio

- Optimization: a Stability Approach[J]. *Physica A*,2004,335(3-4):629-643.
- [65] Krzanowski.Sensitivity of Principal Components[J].*J. Royal Stats. Soc. B*, 1984,46 (3):558-563.
- [66] Daly J, Crane M, Ruskin H J. Random Matrix Theory Filters in Portfolio Optimisation:A Stability and Risk Assessment[J].*Physica A*, 2008, 387 (16): 4248-4260.
- [67] 史宇峰.金融资产收益相关矩阵选取方法研究[J].*证券市场导报*,2008 (5):65-68.
- [68] Jiang J, Ma K, Cai X. Scaling and Correlations in Foreign Exchange Market[J]. *Physica A*, 2007, 375(1):274-280.
- [69] Jiang J, Ma K, Cai X. Non-linear Characteristics and Long-range Correlations in Asian Stock Markets [J]. *Physica A*, 2007, 378(2):399-407.
- [70] 都国雄.经济物理学的发展内容与发展趋势[J].*现代经济探讨*,2006(4):47-49.
- [71] Reese C, Rosenow B. Predicting Multivariate Volatility[J/OL]. (2003-04-03) [2002-04-15]. <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0304082>.
- [72] Muirhead R B.Aspects of Multivariate Statistical Theory[M]. New York:Wiley,1982:45-65.
- [73] 王明进.高维波动率的预测[J].*数量经济技术经济研究*,2008(11):137-148.
- [74] 刘志东.多元 GARCH 模型结构特征、参数估计与假设检验研究综述[J].*数量经济技术经济研究*,2010 (9):147-160.
- [75] 李文君,尹康.多元 GARCH 模型研究述评[J].*数量经济技术经济研究*,2009(10):138-147.
- [76] Bauwens L, Laurent S, Rombouts J V K.Multivariate GARCH Models:a Survey[J]. *Journal of Applied Econometrics*, 2006,21(1):79-109.
- [77] Pafka S,Kondor I.Noisy Covariance Matrices and Portfolio Optimization ii [J].*Physica A*,2002,319:487-494.
- [78] Burda Z, Jurkiewicz J, Nowak M A. Is Econophysics a Solid Science[J].*Acta Phys.Pol. B*,2003,34(1):87-131.
- [79] Kondor I, Pafka S,Nagy G. Noise Sensitivity of Portfolio Selection under Various Risk Measures[J]. *J. Banking Finance*,2007,31(5):1545-1573.
- [80] Varga-Haszonits I, Kondor I. Noise Sensitivity of Portfolio Selection in Constant Conditional Correlation GARCH Models[J].*Physica A*,2007, 385: 307-318.
- [81] Jens S. The Asymptotic Spectrum of the EWMA Covariance Estimator[J]. *Physica A*,2007,385(2):621-630.
- [82] Eun C,Resnick B. Estimating the Correlation Structure of International Share Prices[J]. *Journal of Finance*,1984,39:1311-1324.

- [83] Chan L, Karceski J, Lakonishok J. On Portfolio Optimization: Forecasting Covariances and Choosing the Risk Model[J]. *Reviews of Financial Studies*,1999,12:937-974.
- [84] 王明进.多元波动率模型的一些新进展[J]. *数理统计与管理*,2010,29(2): 233-245.
- [85] Ledoit O, Wolf M.A Well-conditioned Estimator for Large-dimensional Covariance Matrices[J]. *J. Multivar. Anal.*,2004, 88 (2):365-411.
- [86] Ledoit O, Wolf M. Improved Estimation of the Covariance Matrix of Stock Returns with an Application to Portfolio Selection[J].*J. Empirical Finance*, 2003,10 (5):603-621.
- [87] Ledoit O, Wolf M.Honey,I Shrunk the Sample Covariance Matrix[J]. *The Journal of Portfolio Management*,2004, 30 (4): 110-119.
- [88] Burda Z, Goerlich A,Jarosz A.Signal and Noise in Correlation Matrix[J].*Phys. A*, 2004,343:295-308.
- [89] Bollerslev T.Modelling the Coherence in Short-run Nominal Exchange Rates: a Multivariate Generalized ARCH Model[J].*Rev. Econ.Stat.*,1990,72:498-505.
- [90] Burda Z, Jarosz A, Jurkiewicz J.Applying Free Random Variables to Random Matrix Analysis of Financial Data[J/OL]. (2006-03-04)[2012-04-28]. <http://cdsweb.cern.ch/record/933639/>.
- [91] Daly J, Crane M,Ruskin H J.Random Matrix Theory Filters and Crrency Portfolio Otimisation[J].*Journal of Physics:Conference Series*,2010,221(1):4-8.
- [92] 向骏文.基于马科维茨投资组合理论的股票投资策略[J].*中国证券期货*,2012,20(8):202.
- [93] 刘志东,薛莉. 金融市场高维波动率的扩展广义正交 GARCH 模型与参数估计方法研究[J].*中国管理科学*,2010,18(6):33-41.
- [94] Frei M, Kuensch H R. Sequential State and Observation Noise Covariance Estimation Using Combined Ensemble Kalman and Particle Filters[J]. *Monthly Weather Review*,2012,140(5): 1476-1495.
- [95] Menon R, Gerstoft P,Hodgkiss W S. Asymptotic Eigenvalue Density of Noise Covariance Matrices[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*,2012,60(7): 3415-3424.
- [96] Bandiera F, Besson O, Ricci G.Knowledge-Aided Covariance Matrix Estimation and Adaptive Detection in Compound-Gaussian Noise [J].*IEEE Transactions on Signal Processing*, 2010,58(10): 5390-5396.
- [97] Mcaleer M, Medeiros M C.Realized Volatility:A Review[J].*Econometric Reviews*,2008,27(1-3):10-45.

-
- [98] Bandi F M, Russell J R. Separating Microstructure Noise from Volatility[J]. Journal of Financial Economics, 2006, 79(3): 655-692.
- [99] Ghysels E, Sinko A. Volatility Forecasting and Microstructure Noise[J]. Journal of Econometrics, 2011, 160(1): 257-271.
- [100] Boozer A D. The Role of Spatial Topology in a Toy Model of Classical Electrodynamics in (1+1) Dimensions[J]. Physics Letters A, 2010, 374(19-20): 1901-1908.
- [101] Eelbode D, Van de Voorde L. A Toy Model for Higher Spin Dirac Operators[J]. Physics of Atomic Nuclei, 2010, 73(2): 282-287.
- [102] Kumar J. A Toy Model for Gauge-mediation in Intersecting Brane Models[J]. Physical Review D, 2009, 79(6): 1-6.
- [103] Dimov I I, Kolm P N, Maclin L. Hidden Noise Structure and Random Matrix Models of Stock Correlations[J]. Quantitative Finance, 2012, 12(4): 567-572.
- [104] Martins A C R. Non-stationary Correlation Matrices and Noise[J]. Physica A-Statistical Mechanics and its Applications, 2007, 379(2): 552-558.
- [105] Menon R, Gerstoft P, Hodgkiss W S. Asymptotic Eigenvalue Density of Noise Covariance Matrices[J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2012, 60(7): 3415-3424.
- [106] Henker T, Husodo Z A. Noise and Efficient Variance in the Indonesia Stock Exchange[J]. Pacific-basin Finance Journal, 2010, 18(2): 199-216.
- [107] Matteson D S, Ruppert D. Time-Series Models of Dynamic Volatility and Correlation A Tutorial on Univariate and Multivariate Cases[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2011, 28(5): 72-82.
- [108] Poon S H, Granger C W J. Forecasting Volatility in Financial Markets: A Review[J]. Journal of Economic Literature, 2003, 41(2): 478-539.
- [109] Olivier L, Michael W. Improved Estimation of the Covariance Matrix of Stock Returns with an Application to Portfolio Selection[J]. Journal of Empirical Finance, 2003(10): 603-621.
- [110] Sengupta A M, Mitra P P. Distributions of Singular Values for Some Random Matrices[J]. Physical Review E, 1999, 60(3): 3389-3392.
- [111] 王林, 张蕾, 刘连峰. 用模拟退火算法寻找 Heston 期权定价模型参数[J]. 数量经济技术经济研究, 2011(9): 131-139.
- [112] 任世科, 何正文, 徐渝. 基于联合视角的项目支付问题及其模拟退火启发式算法[J]. 系统工程, 2012, 30(6): 82-89.
- [113] 罗大为. 股票收益率影响因素的实证分析[J]. 人民论坛, 2011(2): 152-153.
- [114] 林立子, 陈希敏. 后危机时代我国股票收益率影响因素的实证研究[J]. 西安财经学院学报, 2010, 23(5): 14-17.

-
- [115] 王大伟,王雪标.影响我国股票收益率的多因素实证研究—基于panel data模型分析[J].东北财经大学学报,2008(5):18-23.
- [116] 屠年松,徐光远.中国股票市场质量的国际比较[J].云南社会科学,2012(5):123-127.
- [117] 李进芳,王仁曾.Bootstrap方法在证券投资基金风险测量中的应用[J].统计研究,2010,27(3):66-69.
- [118] 张萍.基于 Bootstrap 方法的统计分析[J].宜宾学院学报,2011,11(12):31-33.
- [119] 徐正国,张世英.多维高频数据的“已实现”波动建模研究[J].系统工程学报,2006,21(1):6-11.
- [120] Alexander C O. Orthogonal GARCH [J].Mastering Risk, 2001(2):1-38.
- [121] 高岳,王家华,杨爱军.具有时变自由度的 t-copula 蒙特卡罗组合收益风险研究[J].中国管理科学,2011,19(2):10-15.
- [122] 刘金全,李楠,郑挺国.随机波动模型的马尔可夫链-蒙特卡洛模拟方法—在沪市收益率序列上的应用[J].数理统计与管理,2010,29(6):1026-1035.
- [123] 盛世明.基于连接函数的 VaR 的蒙特卡洛算法[J].统计与决策,2010(21):27-29.
- [124] Davar K.Probability[M].America:American Mathematical Society, 2007:60-67.
- [125] 张京.非负约束条件下组合证券投资决策的分枝定界法[J].数学的实践与认识,2004,34(5):18-23.

附录

附表 1 第 4 章实证研究所用的 100 只股票名称

Appendix Table 1 One hundred stocks used in the empirical research of Chapter 4

上海梅林	钢联股份	白猫股份	昌九生化	力诺太阳
海通证券	禾嘉股份	中视传媒	天利高新	香梨股份
马钢股份	辽宁成大	华润万东	熊猫烟花	上柴股份
上海贝岭	莲花味精	福日电子	郑州煤电	罗顿发展
海信电器	银鸽投资	象屿股份	长江投资	美尔雅
东方金钰	金花股份	金健米业	华升股份	黄河旋风
中牧实业	安彩高科	哈空调	伊力特	波导股份
香江控股	天坛生物	标准股份	荣华实业	澳柯玛
武昌鱼	凯乐科技	海南椰岛	昆明制药	国旅联合
盘江股份	迪康药业	航天晨光	烽火通信	中化国际
中铁二局	ST 狮头	天威保变	九龙山	大西洋
中珠控股	新安股份	仪电电子	市北高新	维维股份
金杯汽车	S 中纺机	大众交通	老凤祥	万业企业
号百控股	爱建股份	新南洋	沱牌舍得	常林股份
上海新梅	东方银星	中电广通	西藏城投	汉商集团
界龙实业	江西铜业	贵航股份	武钢股份	三峡新材
长春燃气	生益科技	大唐电信	ST 华光	浙江富润
中国玻纤	兖州煤业	中体产业	联美控股	洪都航空
首旅股份	江西铜业	龙净环保	上海能源	中发科技
洪城股份	山鹰纸业	南化股份	金丰投资	三爱富

附表 2 第 6 章实证研究所用的 340 只股票名称

Appendix Table 2 Three hundred and forty stocks used in the empirical research of Chapter 6

浦发银行	武钢股份	东风汽车	中国国贸	上海机场
中江地产	黄山旅游	华润万东	中国医药	象屿股份
中纺投资	华润双鹤	皖维高新	南京高科	宇通客车
银鸽投资	浙江富润	宋都股份	同仁堂	哈高科
华新水泥	福建水泥	山西汾酒	马钢股份	浙江东日
广日股份	鄂尔多斯	鼎立股份	金杯汽车	广州发展
老凤祥	中路股份	悦达投资	安信信托	东方金钰
神马股份	昆明机床	黑化股份	吉林森工	华北制药
祁连山	天业股份	ST 长油	金枫酒业	云天化
振华重工	浙江医药	澄星股份	同方股份	三峡水利
上工申贝	中国玻纤	华远地产	三精制药	金花股份
航天电子	升华拜克	华联矿业	耀皮玻璃	华银电力
东风科技	首商股份	人福医药	中国船舶	开创国际
益民集团	航空动力	中茵股份	兰州民百	江苏索普
南山铝业	隧道股份	岷江水电	新华传媒	秦岭水泥
郑州煤电	鲁商置业	云南城投	昌九生化	明星电力
陆家嘴	兰生股份	雅戈尔	特变电工	太极集团
莲花味精	重庆啤酒	重庆路桥	湖南海利	友谊股份
华东电脑	黄河旋风	大连控股	航天机电	ST 宏发
东湖高新	中房股份	中视传媒	博闻科技	禾嘉股份
永泰能源	巨化股份	海欣股份	山西焦化	飞乐音响
生益科技	一汽富维	啤酒花	兴发集团	信达地产
海南航空	春兰股份	杉杉股份	大元股份	同济科技
通策医疗	铁龙物流	申通地铁	大龙地产	兰花科创
江苏阳光	紫江企业	建发股份	自仪股份	西部资源
福耀玻璃	南京化纤	上海机电	中体产业	万里股份
彩虹股份	杭钢股份	青山纸业	亚盛集团	西宁特钢
工大首创	欧亚集团	百视通	上海金陵	交运股份
嘉宝集团	金种子酒	哈药股份	中航重机	西藏旅游
联美控股	界龙实业	国金证券	金健米业	南京新百
双钱股份	大商股份	银座股份	中华企业	氯碱化工
南京医药	申达股份	厦门空港	中国卫星	王府井
百大集团	太极实业	中炬高新	东安动力	浦东金桥
南宁百货	锦州港	东方明珠	天坛生物	北人股份
福建南纸	万业企业	龙头股份	香溢融通	第一医药
金瑞矿业	广电网络	新黄浦	尖峰集团	新世界
太原重工	川投能源	上海辅仁	东阳光铝	西藏城投
新湖中宝	ST 华光	上海普天	中船股份	保税科技
浙江东方	新疆天业	ST 东盛	天津港	上海梅林
罗顿发展	鲁信创投	ST 园城	凤凰光学	申能股份
三普药业	水井坊	棱光实业	汉商集团	外高桥
新华百货	浙大网新	三爱富	新钢股份	长春经开
常林股份	乐山电力	新潮实业	爱建股份	南京熊猫

附表 2（续表）

通化东宝	创兴资源	京能置业	华资实业	江中药业
ST 厦华	青岛海尔	伊力特	锦江投资	中源协和
东软集团	S 仪化	广船国际	星湖科技	东百集团
武汉控股	锦江股份	宁波富达	中葡股份	大唐电信
中粮屯河	S 上石化	国中水务	江苏吴中	博瑞传播
金宇集团	中牧股份	浪潮软件	物产中大	正和股份
兖州煤业	多伦股份	安徽合力	沱牌舍得	复星医药
宁波联合	浙江广厦	五矿发展	古越龙山	冠城大通
葛洲坝	包钢稀土	美都控股	鹏博士	海泰发展
厦工股份	苏州高新	大众交通	亚泰集团	林海股份
东方集团	天津磁卡	瑞茂通	成商集团	秋林集团
东方航空	新华锦	中海海盛	上柴股份	丹化科技
永鼎股份	重庆百货	宝信软件	世茂股份	格力地产
津劝业	华域汽车	辽宁成大	上海建工	上海物贸
创业环保	美尔雅	卧龙地产	龙建股份	上海新梅
大名城	浪莎股份	上实发展	洛阳玻璃	东方电气
中电广通	中青旅	廊坊发展	上汽集团	国投电力
航天长峰	新疆众和	宏图高科	海通证券	伊利股份
上海九百	上海贝岭	四川长虹	长江投资	南通科技
运盛实业	梅花集团	京投银泰	北京城乡	大众公用
内蒙华电	钱江生化	哈投股份	中达股份	轻纺城
ST 祥龙	珠江实业	航天通信	梅雁吉祥	长江传媒
综艺股份	中储股份	城投控股	友好集团	厦门国贸
东方通信	鲁抗医药	云煤能源	国电电力	三安光电
福田汽车	云维股份	中航黑豹	宁波海运	金龙汽车

附表 3 第 6 章在理想化条件下所分析的 140 只股票名称

Appendix Table 3 One hundred and forty stocks analyzed under idealized conditions in Chapter 6

南山铝业	隧道股份	岷江水电	新华传媒	秦岭水泥
郑州煤电	鲁商置业	云南城投	昌九生化	明星电力
陆家嘴	兰生股份	雅戈尔	特变电工	太极集团
莲花味精	重庆啤酒	重庆路桥	湖南海利	友谊股份
华东电脑	黄河旋风	大连控股	航天机电	ST 宏发
东湖高新	中房股份	中视传媒	博闻科技	禾嘉股份
永泰能源	巨化股份	海欣股份	山西焦化	飞乐音响
生益科技	一汽富维	啤酒花	兴发集团	信达地产
海南航空	春兰股份	杉杉股份	大元股份	同济科技
通策医疗	铁龙物流	申通地铁	大龙地产	兰花科创
江苏阳光	紫江企业	建发股份	自仪股份	西部资源
福耀玻璃	南京化纤	上海机电	中体产业	万里股份
彩虹股份	杭钢股份	青山纸业	亚盛集团	西宁特钢
工大首创	欧亚集团	百视通	上海金陵	交运股份
嘉宝集团	金种子酒	哈药股份	中航重机	西藏旅游
联美控股	界龙实业	国金证券	金健米业	南京新百
双钱股份	大商股份	银座股份	中华企业	氯碱化工
南京医药	申达股份	厦门空港	中国卫星	王府井
百大集团	太极实业	中炬高新	东安动力	浦东金桥
南宁百货	锦州港	东方明珠	天坛生物	北人股份
福建南纸	万业企业	龙头股份	香溢融通	第一医药
金瑞矿业	广电网络	新黄浦	尖峰集团	新世界
太原重工	川投能源	上海辅仁	东阳光铝	西藏城投
新潮中宝	ST 华光	上海普天	中船股份	保税科技
浙江东方	新疆天业	ST 东盛	天津港	上海梅林
罗顿发展	鲁信创投	ST 园城	凤凰光学	申能股份
三普药业	水井坊	棱光实业	汉商集团	外高桥
新华百货	浙大网新	三爱富	新钢股份	长春经开

攻读博士学位期间发表的学术论文

- [1] Li Bingna, Hui Xiaofeng. Research on improvement of Chinese portfolio quality based on random matrix theory[C]// National Natural Science Foundation of China (NSFC), Harbin Institute of Technology. 2011 International Conference on Management Science and Engineering, ICMSE 2011 - 18th Annual Conference Proceedings. IEEE Computer Society, 2011: 847-853. (第3章, EI 收录号: 20115114608129)
- [2] 惠晓峰, 李冰娜. 基于随机矩阵理论决定多元GARCH模型最佳维度研究[J]. 运筹与管理, 2011, 20(4): 141-148. (第4章)
- [3] 李冰娜, 惠晓峰. 基于最小扰动相关去噪法股票投资组合风险优化[J]. 系统工程理论与实践. (第3章, EI源期刊, 已录用)
- [4] 李冰娜, 惠晓峰. 基于随机矩阵理论我国股票投资组合噪声分析及风险控制[J]. 系统工程, 2012, 30(8): 38-44. (第3章)

哈尔滨工业大学博士学位论文原创性声明及 使用授权说明

学位论文原创性声明

本人郑重声明：此处所提交的学位论文《基于 RMT 去噪法股票投资组合风险优化研究》，是本人在导师指导下，在哈尔滨工业大学攻读学位期间独立进行研究工作所取得的成果。据本人所知，论文中除已注明部分外不包含他人已发表或撰写过的研究成果。对本文的研究工作做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式注明。本声明的法律结果将完全由本人承担。

作者签名：李冰娜

日期：2013年4月17日

学位论文使用授权说明

本人完全了解哈尔滨工业大学关于保存、使用学位论文的规定，即：

(1) 已获学位的研究生必须按学校规定提交学位论文；(2) 学校可以采用影印、缩印或其他复制手段保存研究生上交的学位论文；(3) 为教学和科研目的，学校可以将学位论文作为资料在图书馆及校园网上提供目录检索与阅览服务；(4) 根据相关要求，向国家图书馆报送学位论文。

保密论文在解密后遵守此规定。

本人保证遵守上述规定。

作者签名：李冰娜

日期：2013年4月17日

导师签名：高晓峰

日期：2013年4月17日

致 谢

本论文是在导师惠晓峰教授的亲切关怀和悉心指导下完成的，论文选题和写作中都倾注了惠老师大量的汗水和心血。五年多来，惠老师在学习和生活上都给了我巨大的帮助，惠老师踏实的工作作风、严谨的治学精神、诲人不倦的学者风范令我不仅在学业上得以进步，而且懂得了做人的道理和对待生活的态度，这些收获使我一生受益匪浅。在这里谨向惠老师表示崇高的敬意和诚挚的谢意！

感谢我的硕士导师曲世友教授。在哈工大期间曲老师给予我很多的帮助和指导。感谢在我论文的开题中提宝贵意见的王福胜教授、王雪峰教授、王铁男教授、姜明辉教授和吴冲教授。感谢李向阳教授、张庆普教授、胡珑瑛教授、王雪峰教授和吴冲教授在预答辩中提出的宝贵建议。感谢胡运权教授、毕克新教授、张庆普教授、田也壮教授、王雪峰教授和吴冲教授在正式答辩中提出的完善建议。感谢答辩秘书李嵩松老师的辛勤工作。

感谢王小娜、陈浩、张一、张硕、彭云艳、马辉、王锐、李喆、李嵩松和吴亚军等同学在我博士生涯中给予我的热情关心和帮助，他们陪我度过了一段难忘的求学时光。

最后，感谢我的父母、弟弟和其他家人的全力支持。特别感谢我的男友李连江，他在学习和生活上对我的帮助支持我度过了学习生涯中最艰难的岁月。

个人简历

李冰娜，女，汉族，1979年1月生，黑龙江省绥棱人。

1997年9月——2001年7月在黑龙江大学经济学院国际金融专业学习，获经济学学士学位。

2001年7月——2005年7月在哈尔滨金融学院金融系任教。

2005年9月——2007年7月在哈尔滨工业大学管理学院应用经济系金融学专业学习，获经济学硕士学位。

2007年9月——2013年4月在哈尔滨工业大学管理学院工商管理系技术经济及管理专业攻读博士学位。