投资组合效用问题的研究

屠新曙　王春峰　巴曙松

内容提要　每个投资者都有一条无差异曲线来表示他对于预期回报率和标准差的偏好。我们曾研究了风险资产进行投资组合时的效用最大化问题，通过空间变换把 *Markowitz* 模型的有效前沿用投资组合的权重向量表示出来，然后将无差异曲线（*IDC*）也用投资组合的权重向量表示出来，再由风险资产组合的有效选择原则求出了效用最大化的风险资产组合。在本文中，我们进一步研究了含无风险资产时投资组合的效用最大化问题，以及不同借贷利率下投资组合的效用最大化问题。

关键词　无差异曲线　有效前沿　投资组合

一、无差异曲线（IDC）与效用最大化的风险投资组合

选择投资组合是一种使投资者期望效用最大化的活动。这需要先推导出投资者关于风险和回报率的效用函数。按照古典经济学的分析，这个效用函数是用均值-方差来表现风险-回报率相互替换的大小和形式的，在风险-回报率平面中把它称为无差异曲线（IDC）。

假定每一投资者都能基于期望回报率和风险为各被选投资组合给出一个效用次序，具有较高期望回报率和较低风险的投资组合会有较高的效用。用于计算投资组合效用的一个函数如下，其自变量为期望回报率和回报率的方差:

$$U=R_p-\frac{1}{2}A\sigma_p^2 \tag{1}$$

其中 U 为效用值，而 A 是一个反映投资者回避风险程度的指数。对一个投资者来说，对风险回避的程度是可以确定的。我们把无差异曲线式变形为:

$$\sigma_p^2=\frac{2}{A}(R_p-U) \tag{2}$$

将$R_p=X^TR$和$\sigma_p^2=X^T\sum X$代入（2）式，就得到:

$$X^T\sum X=\frac{2}{A}(X^TR-U) \tag{3}$$

因为线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1,n-1}x_{n-1}=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2,n-1}x_{n-1}=b_2 \\ \cdots \\ a_{n-1,1}x_1+a_{n-2,2}x_2+\cdots+a_{2,n-1}x_{n-1}=b_{n-2} \end{cases}$$

的秩是 $n-2$，所以它的基础解系的个数是 1，即 $x_2,x_3,\cdots,x_{n-1}$ 都可由 x_1 表示（利用消元

法可得）。由于 $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$，因此 x_n 也可由 x_1 表示。将 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 代入（2）式，我们就分别得到效用最大化的最优风险投资组合的期望回报率和方差 R_T、σ_T^2。

二、含无风险资产时投资组合的效用最大化

无风险资产的借入和贷出把原来的 Markowitz 模型的有效前沿 $\overset{\frown}{AMB}$ 变成了直线 $\overline{CMD}$，如图 1 所示。这条直线从纵轴上无风险利率点 C 处向上延伸，与原有效前沿曲线相切于点 M，它包含了所有风险资产投资组合 M 与无风险借贷的组合。切点 M 所对应的投资组合称为市场投资组合 (market portfolio)，直线 $\overline{CMD}$ 就是含无风险资产时投资组合的有效前沿。一旦无差异曲线（IDC）是已知的，则最优的含无风险资产的投资组合就可由无差异曲线族与含无风险资产时投资组合有效前沿的切点 T 来确定，该切点 T 是一切被选投资组合中效用最大的投资组合，见图 2。

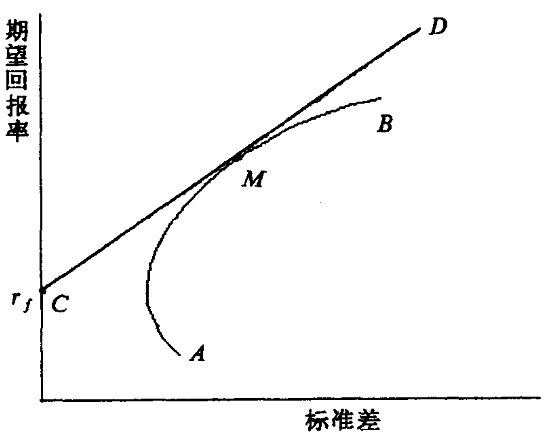

图 1　含无风险资产的投资组合的有效前沿

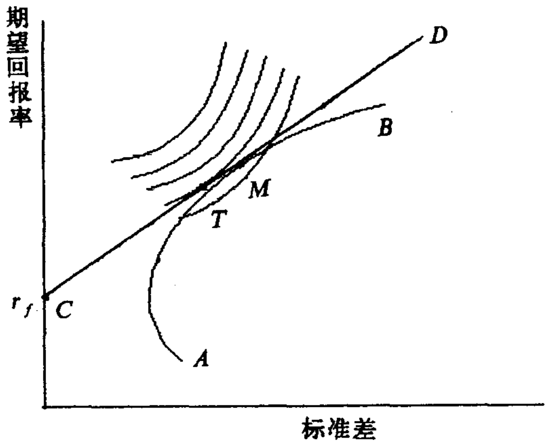

图 2　含无风险资产有效前沿上的最优投资组合选择

我们知道风险资产投资组合 M 处的权重向量 $X = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$ 及直线 $\overline{CMD}$ 的斜率 k 都由下列方程组确定:

$$\begin{cases} \partial_{11} X_1 + \partial_{12} X_2 + \cdots + \partial_{1,n-1} X_{n-1} = b_1 \\ \partial_{21} X_1 + \partial_{22} X_2 + \cdots + \partial_{2,n-1} X_{n-1} = b_2 \\ \cdots\ \partial_{n-2,1} X_1 + \partial_{n-2.2} X_2 + \cdots + \partial_{n-2,n-1} X_{n-1} = b_{n-2} \\ X_n = 1 - X_1 - X_2 - \cdots - X_{n-1} \\ X^T \sum X = \dfrac{1}{k^2} (r_f^2 - 2 r_f X^T R + (X^T R_2^2)) \end{cases} \tag{4}$$

其中

$$a_{ij} = \frac{\sigma_{ij} + \sigma_{nn} - \sigma_{in} - \sigma_{jn}}{R_i - R_n} - \frac{\sigma_{j,n-1} + \sigma_{nn} - \sigma_{jn} - \sigma_{n-1,n}}{R_{n-1} - R_n}$$

$$b_i = -\frac{\sigma_{in} - \sigma_{nn}}{R_i - R_n} + \frac{\sigma_{n-1,n} - \sigma_{nn}}{R_{n-1} - R_n}$$

$$(i = 1,2,\cdots,n-2\ ;\ j = 1,2,\cdots,n-1)$$

r_f 是无风险利率，$\sum = [\sigma_{ij}]_{n\times n}$ 是 n 种风险资产间的协方差矩阵，$R = [R_1, R_2, \cdots, R_n]^T$，$R_i = E(r_i)$ 是第 i 种风险资产的预期回报率。

进一步，我们可得到切点M处的期望回报率R_M和方差σ_M^2:

$$R_M = X^T R \tag{5}$$

$$\sigma_M^2 = X^T \sum X \tag{6}$$

同时，由 k 的值我们也可得到含无风险资产时投资组合的有效前沿$\overline{CMD}$:

$$R_p = r_f + k\sigma_p \tag{7}$$

将方程 (7) 带入 (2)，我们得到:

$$\sigma_p^2 = \frac{2}{A}(r_f + k\sigma_p - U) \tag{8}$$

这是一个一元二次方程。因为 T 是方程 (2) 和 (7) 的切点，故投资者的最大效用值为:

$$U = r_f + \frac{k^2}{2A} \tag{9}$$

由 U 的值我们就可得到投资者的效用最大的无差异曲线方程，同时由点 T 处的标准差我们也可分别得到含无风险资产时使投资者效用最大的投资组合 T 的期望回报率和方差 R_T、σ_T^2:

$$R_T = r_f + k\sigma_T = r_f + \frac{k^2}{A} \tag{10}$$

$$\sigma_T^2 = \frac{k^2}{A^2} \tag{11}$$

令 W 代表投资于无风险资产的比例，则 $1-W$ 为投资于风险资产 M 的比例，则投资者效用最大的投资组合 T 的期望回报率和方差可分别表示为:

$$R_T = Wr_f + (1-W)R_M$$

$$\sigma_T = (1-W)\sigma_M$$

因此

$$W = 1 - \frac{\sigma_T}{\sigma_M} \tag{12}$$

即投资者效用最大的投资组合T中有$W\times 100\%$的无风险资产。

假设投资者的借入利率为r_{f1}，贷出利率为r_{f2}

$$r_{f1} > r_{f2}$$

不同借贷利率下投资组合的有效前沿是图 2 中的折线，其中两条直线的方程分别是:

$$R_p = r_{f1} + k_1\sigma_p \tag{13}$$

$$R_p = r_{f2} + k_2\sigma_p \tag{14}$$

因此，要求出不同借贷利率下投资组合的有效前沿，我们只需求出两条直线（L_1 和 L_2）的斜率 k_1 和 k_2 以及两切点（M_1 和 M_2）的期望回报率和方差即可。

一旦我们知道无差异曲线（IDC），则不同借贷利率下最优的投资组合就可由无差异曲线族与不同借贷利率下投资组合有效前沿的切点来确定，该切点（T_1,T_2,T_3 中的一个）是一切被选投资组合中效用最大的投资组合。

类似于（10）式和（11）式，我们可分别得到借入无风险资产时使投资者效用最大的投资组合 T_1 的期望回报率和方差 R_{T1}、σ_{T1}^2：

$$R_{T1} = r_{f1} + k_1\sigma_{T1} = r_{f1} + \frac{k_1^2}{A} \tag{15}$$

$$\sigma_{T1}^2 = \frac{k_1^2}{A^2} \tag{16}$$

和贷出无风险资产时使投资者效用最大的投资组合 T_2 的期望回报率和方差 R_{T2}、σ_{T2}^2：

$$R_{T2} = r_{f2} + k_2\sigma_{T2} = r_{f2} + \frac{k_2^2}{A} \tag{17}$$

$$\sigma_{T2}^2 = \frac{k_2^2}{A^2} \tag{18}$$

类似于上述方法，我们可分别得到效用最大化的风险投资组合的期望回报率和方差 R_{T3}、σ_{T3}^2。

在得到 T_1、T_2、T_3 的期望回报率和方差后，我们就能确定这三个切点中哪一个点位于不同借贷利率下投资组合的有效前沿上，而这个位于有效前沿上的切点就是我们所要求的不同借贷利率下效用最大化的投资组合。

参考文献

Harry Markowitz, Portfolio Selection, Journal of Finance, March 77～91, 1952.

John von Neumann and Oskar Morgenstern, Theory of Games and Economic Behavior, New York: John Wiley, 1944.

Kenneth J. Arrow, Essays in the Theory of Risk-Bearing, Chicago: Markham, 1971.

Paul J. H. Schoemaker, The Expected Utility Model: Its Variants, Purposes, Evidence and Limitations, Journal of Economic Literature, 20(2), 529～563, 1982.

Mark Kritzman, About Utility [J], Financial Analysts Journal, 48(3), 17～20, 1992.

王春峰、屠新曙、厉斌：《效用函数意义下风险投资组合的有效选择问题的研究》，《中国管理科学》，Vol.10(2002), No.2。

2002 年 3 月

（作者单位：屠新曙、王春峰，天津大学管理学院；

巴曙松，北京大学中国经济研究中心）