基于效用最大化的投资组合模型

武可栋,韦增欣

(广西大学 数学与信息科学学院,南宁 530004)

摘 要 效用是投资者确定投资策略的一个很重要指标,由此有了效用最大化投资组合模型。本文根据均值-半方差模型对均值-方差模型修正的思想,建立了修正后的效用最大化投资组合模型。使用二次规划的一种求解方法——积极集法,对模型进行了求解。实证分析表明,修正后的模型可以为投资者提供有效的投资策略。

[关键词] 效用最大化;投资组合;积极集法

doi: 10.3969/j.issn.1673-0194.2017.01.069

[中图分类号] F830.59;F224 [文献标识码] A [文章编号] 1673-0194(2017)01-0119-04

1 前 言

在证券投资组合理论研究和具体实践中,马克维茨(Markowitz)证券投资组合均值-方差模型不仅是现代证券投资组合理论的基石,也是整个现代金融经济理论的基石。它不但使投资组合的研究在理论上得到飞跃,而且还在证券市场的应用上引起一场革新。直到今天,人们在处理证券投资组合的收益-风险分析时,Markowitz证券投资组合均值-方差模型仍然是一个基本工具。虽然Markowitz的均值-方差模型是最早用比较准确的数量关系来衡量风险的方法,但由于其严格的条件限制和复杂的计算,加上用方差来度量风险的自身局限性,使其在应用中受到很大的限制。

近几年来,学者们对均值-方差模型进行批评、改进的同时,也提出了其他的风险度量模型,主要分为三类:一类是以均值-方差模型为基础的,包括方差、标准差、绝对偏差等;另一类是非线性风险指标,主要以Hurst指数为代表;最后一类是以收益率下方为风险度量目标的,包括下偏矩(LPM)、VaR、半方差等。但由于各种模型自身的一些局限性,至今仍没有哪一种模型能够在学术界和投资界中占据主流地位。

投资者一般把预期收益率下方视为风险,而把预期收益率上方视为超额收益,均值-半方差模型作为均值-方差模型的改进,以收益率下方为风险度量因子,更符合投资者在现实中的真实心理感受。近几年随着计算机行业的发展,使得均值-半方差模型的求解速度得以提升,均值-半方差模型显示出了强大的生命力和应用价值,对投资者具有良好的现实指导意义。

然而,因为证券市场是典型的信息不对称市场,证券收益具有不确定性,投资者无法准确判定各风险证券的未来收益,所以追求自身效用的最大化是投资者的一个很好地选择。效用的判定作为投资者的主观决策行为,投资者不同则相应的效用函数不同。由于在完全竞争的证券市场中已知的效用函数和初始偏好可以完整地把个体的风险偏好、理性程度等进行刻画。所以,学者对效用的研究也逐渐深入,建立了效用最大化投资组合模型。效用最大化投资组合模型在现实中有着广泛的应用,在国内也有不少的研究成果。例如:屠新曙等,研究了含无风险资产时投资组合的效用最大化问题;张鹏等研究了效用最大化模型的有效前沿,并且对模型的求解算法也进行了探索;袁子甲等分析了参数不确定性以及投资者初始信念对最优投资策略的影响。

本文基于均值-半方差模型对均值-方差模型修正的思想,对效用最大化模型进行了改进,提出了用半方差修正的效用最大化模型。

2 相关模型简介

本文对效用最大化模型改进的思想受到了均值-半方差模型对均值-方差模型修正的启发,首先对均值-方差模型以及均值-半方差模型作简要介绍,整理出其改进的思想;接着引入效用函数和效用最大化投资组合模型,说明其修正的必要性,并对模型进行改进。

2.1 均值-方差模型与均值-半方差模型简介

马克维茨(Markowitz)证券组合投资模型可以表述为以下形式:

$$\min \sigma^2=X'QX$$

$$s.t.\begin{cases}R'X=R_0\\F'X=1\end{cases} \tag{1}$$

其中$R=(R_1,R_2,\cdots,R_n)'$,为选定的n种证券预期收益率的期望值向量,σ^2为证券投资收益率的方差,$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$为

[收稿日期] 2016-11-03

[基金项目] 国家自然科学基金资助项目(11161003)。

[作者简介] 韦增欣(1962-),男,广西武鸣人,广西大学数学与信息科学学院教授,博士生导师,主要研究方向:投资(通讯作者)。

n 种证券投资比例系数的向量，$Q=(\sigma_{ij})_{n\times n}$ 表示 n 种证券收益率的协方差矩阵，R_0 为证券组合的预期收益率，$F=(1,1,\cdots,1)'$ 是 n 维单位列向量。

均值-半方差投资组合模型的形式为：

$$\min SV=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(u_i)^2 \tag{2}$$

$$s.t.\begin{cases}R'X\geqslant R_0\\F'X=1\\u_i=(R_0-R_i)^+\end{cases}$$

其中 SV 表示证券投资收益率的半方差，其他的字母含义同(1)式。

2.2 效用最大化模型的引入

18 世纪 Bernoulli 就开始了有关效用函数的研究，20 世纪效用函数理论得到了大的发展，Von Neunann，Arrow，Schoemaker 等在这方面做了大量工作。效用函数在标准差-预期收益率平面中称为无差异曲线(IDC)，它用均值-方差来表现风险-预期收益率相互替换的大小和形式。其一般形式为：

$$U=R_0-\frac{1}{2}\mathrm{A}\sigma^2 \tag{3}$$

其中，U 为效用值，A 是一个反映投资者回避风险程度的指数，正如(3)式所示，效用会随着预期收益率的增大而增大，随方差的减小而增大。

效用最大化模型的形式如下：

$$\max U=R_0-\frac{1}{2}\mathrm{A}\sigma^2 \tag{4}$$

$$s.t.\begin{cases}R_0=R'X\\F'X=1\\\sigma^2=X'QX\end{cases}$$

这里，U 为效用值，A 是反映投资者回避风险程度的指数，$R=(R_1,R_2,\cdots,R_n)'$ 为选定 n 的种证券预期收益率的期望值向量，σ^2 为证券投资收益率的方差，$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$ 为 n 种证券投资比例系数的向量，$Q=(\sigma_{ij})_{n\times n}$ 表示 n 种证券收益率的协方差矩阵，R_0 为证券组合的预期收益率，$F=(1,1,\cdots,1)'$ 是 n 维单位列向量。

3 效用最大化模型的修正

正如前文所述，均值-半方差模型是对均值-方差的修正，其思想是用半方差替代方差，来修正模型的偏差，以更好的反映投资者的偏好。因为均值-方差模型将投资风险定义为投资收益的不确定性，而半方差模型则将投资风险定义为可能的损失。不同的定义导致了不同的计算思路和不同的模型，也就会有不同的投资结果。均值-半方差模型以收益率下方为风险的度量因子，能够更有效地度量风险，更符合投资者的真实心理感受，将位于投资期望线之上和之下的收益率分开计算，既规避了风险又确保了投资者的最大收益避免了均值-方差模型造成的过滤掉可能的超额收益机会，所以更有利于投资者进行投资。受此思想的启发，重新审视了效用最大化模型，发现效用函数中方差项也有修正的必要。因为在期望收益率之上的项产生的方差，对投资者来讲是“好”的，投资者是偏好这类方差的，所以把这类方差与期望收益率之下的项产生的方差一并同等处理，就有不妥，有修正的必要。

本文对效用最大化模型的修正，主要是在方差项上做了改进。做法类似于半方差模型对方差项的处理。把 σ^2 项换为 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(u_i)^2$，再加上不允许卖空这个约束，修正后的模型为：

$$\max U=R_0-\frac{1}{2}A\times\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(u_i)^2 \tag{5}$$

$$s.t.\begin{cases}R_0=R'X\\F'X=1\\x_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n\\u_i=(R_0-R_i)^+\end{cases}$$

其中，U 为效用值，A 是一个反映投资者回避风险程度的指数，R_0 为证券组合的预期收益率，$R=(R_1,R_2,\cdots,R_n)'$ 为选定的 n 种证券预期收益率的期望值向量，$X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$ 为 n 种证券投资比例系数的向量，$F=(1,1,\cdots,1)'$ 是 n 维单位列向量。

4 求解模型的算法设计

首先(5)式的目标函数由于 $-\frac{1}{2}A\times\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(u_i)^2$ 的存在，不是凸的。可以对模型做一个简单处理，来解决这个问题。处理后的模型变为：

$$\min -U=-R_0+\frac{1}{2}A\times\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(u_i)^2$$

$$s.t.\begin{cases}R_0=R'X\\F'X=1\\x_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,n\\u_i=(R_0-R_i)^+\end{cases} \tag{6}$$

其次 $u_i=(R_0-R_i)^+$ 这个约束，在求解过程中很不好用，这里把此约束化为其等价形式，即 $\begin{cases}u_i\geqslant R_0-R_i\\u_i\geqslant 0\end{cases}$，易证这两项是等价的。

另外，为了随后求解方便，对符号进行了处理：令 $x_{n+i}=u_i$。$i=1,2,\cdots,n$ 经过上述的处理，(6)式化为：

$$\min -U=-R_0+\frac{1}{2}A\times\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{n+i})^2$$

$$s.t.\begin{cases}R_0=R'X\\F'X=1\\x_i\geqslant 0,i=1,2,\cdots,2n\\x_{n+i}\geqslant R_0-R_i\end{cases}\tag{7}$$

至此，得到了一个二次规划模型。二次规划的求解方法很多，这里采用积极集法（active set method）。对于线性约束非线性规划问题，积极集法是一类很一般的方法，它有两个重要的性质：第一，所有迭代点都是可行点；第二，每次迭代都利用当前的积极集来定义搜索方向，并通过线性搜索来确定步长。积极集法是一种可行点方法，它可以通过求解一串等式约束问题来达到求解不等式约束问题的目的。并且该算法能够减少约束条件的个数，简化约束条件，在寻找最优解的过程中能够解决优化变量在各个约束条件中不相容的问题。所以，它可以提高非线性优化模型的准确率和效率。下面对积极集法做一个简单的介绍。对在线性约束条件下求解非线性函数的极小化问题可以描述为：

$$\min_{x\in R^n} f(x)$$

$$s.t.\begin{cases}a_i'x=b_i,i=1,2,\cdots,m_e\\F'X=1\\a_i'x\geqslant b_i,i=m_e+1,\cdots,m\\x_{n+i}\geqslant R_0-R_i\end{cases}\tag{8}$$

积极集法的思想是：如果 x_k 是等式约束问题：

$$\min_{x\in R^n} f(x)$$

$$\text{s.t.}a_i'x=b_i,i\in S_k\tag{9}$$

的解，其中 $S_k=E\cup I_k,E=\{1,2,\cdots,m_e\},I_k\subseteq I=\{m_e+1,\cdots,m\}$，则只要相应的 Lagrange 乘子 $\lambda_k=(\lambda_k^1,\lambda_k^2,\cdots,\lambda_k^m)$ 满足：

$$\lambda_k^i\geqslant 0,i\in I_k\tag{10}$$

则 x_k 就是不等式约束的 Kuhn-Tucker 点。如果 x_k 是问题的解，但不是最优解，可令 $i_k\in I_k$，使得：

$$\lambda_k^{ik}=\min_{i\in I_k}\lambda_k^i<0\tag{11}$$

且取 $S_k=S_k\backslash\{i_k\}$，然后重新求解问题。如果当前迭代点 x_k 不是问题的稳定点，可解问题：

$$\min_{x\in R^n} f(x_k+d)$$

$$s.t.a_i'd=0,i\in S_k\tag{12}$$

设问题的解为 d_k，显然 x_k+d_k 是问题的解。如果 x_k+d_k 是可行点，则可令 x_k+d_k 为新的迭代点。否则，假设 d_k 是下降方向，即 $d_k'g_k<0$，则可在上 d_k 进行搜索求得 α_k。步长 α_k 应满足：

$$\alpha_k<\min_{\substack{i\in S_k\\a_i'd_k<0}}\frac{b_i-a_i^kx_k}{a_i'd_k}\tag{13}$$

才会使 $x_k+\alpha_kd_k$ 是可行点。

为了实现对问题的求解，首先需要求得（8）式的一个可行解 x_1 作为初始可行解，并且令 $S_1=A(x_1)$，$A(x_1)$ 是在 x_1 处的积极集合，那么积极集法的求解步骤为：

Step1：给出初始点 x_1，$S_1=A(x_1)$，且令 $k=1$；

Step2：如果 x_k 不是问题的解，转到 Step4；

Step3：如果（10）满足，则停止；否则，求出 i_k 满足（11），且令 $S_k=S_k\backslash\{i_k\}$；

Step4：解问题，给出 d_k；

Step5：进行线性搜索求出 $\alpha_k>0$，且满足式（13）；$x_{k+1}=x_k+\alpha_kd_k$，对所有 $j\notin S_k$ 执行：如果 $a_j'x_{k+1}=b_j$，则 $S_k=S_k\cup\{j\}$；

Step6：$S_k+1=S_k$；$k=k+1$；转到 Step2。

5 实证分析

针对本文建立的修正的效用最大化投资组合模型，给出下面的实证分析，以验证模型和算法的有效性和可行性。在沪深A股中选择评级较高（使用同花顺软件中的评价结果，数据由同花顺软件导出）的8支股票，并且尽量涉及较多的行业，以分散风险。按照以上原则选择投资的目标，它们分别是：600000浦发银行、600007中国国贸、600009上海机场、600236桂冠电力、600483福能股份、600519贵州茅台、600763通策医疗、601199江南水务。

使用这8支股票在2014年的12个月收益率数据，运用（5）式的模型并用Matlab对积极集算法进行编程，运行结果见表1。

由表1可以看出：

（1）A值作为投资者回避风险的程度，其大小对结果有很大的影响。总的来看，A的取值越大，投资者就越倾向于波动较小的投资方案。当A在逐渐变大的过程中，方差较大的股票份额在逐渐变小，而方差较小的股票所占的比例在不断增大。从浦发银行和江南水务的投资比例变化可以清楚看出。

（2）在本次实证分析中，A的取值在0.25~0.35之间时对结果的影响比较显著，一旦超出此区间，对结果的影响不显著。所以投资者在选择A值时要慎重，可以先找到A的显著范围，在此范围内根据自己厌恶风险的程度，选择适当的投资组合。以免做出不恰当的投资决策。

（3）随着A的增大，预期收益率不断减小。这也符合我们的一般认知：即风险越大，收益越大。随着风险的减小，预期收益率也随之减小。

以上三点也在一定程度上说明了所建立的模型的合理性，即修正后的模型在定量分析中符合已有的基本结果，所以对投资者具有指导意义，可以作为投资者进行投资的依据。

表 1　8 支股票在不同 A 值下的最大效用、预期收益率以及投资比例比较

A 的取值	浦发银行	中国国贸	上海机场	桂冠电力	福能股份	贵州茅台	通策医疗	江南水务	最大效用	预期收益率/%
0.05	1	0	0	0	0	0	0	0	3.946 9	4.76
0.10	1	0	0	0	0	0	0	0	3.133 8	4.76
0.20	1	0	0	0	0	0	0	0	1.507 6	4.76
0.25	1	0	0	0	0	0	0	0	0.694 5	4.76
0.26	0.941 2	0.007 3	0.005 3	0.011 9	0.008 2	0.010 1	0.011 4	0.004 6	0.532 4	4.683 1
0.27	0.765 8	0.029 6	0.022 4	0.045 8	0.033 0	0.039 8	0.044 1	0.019 4	0.377 1	4.450 5
0.28	0.602 3	0.051 2	0.039 3	0.076	0.056 6	0.067 1	0.073 4	0.034 2	0.230 3	4.232 3
0.29	0.452 7	0.072 1	0.057 3	0.100 5	0.078 5	0.090 6	0.097 7	0.050 7	0.091 1	4.025 9
0.30	0.314 2	0.093 1	0.077 9	0.119 9	0.099 4	0.110 9	0.117 3	0.067 4	−0.041 2	3.828 7
0.31	0.214 3	0.106 1	0.098 1	0.120 5	0.109 5	0.115 6	0.119 1	0.116 9	−0.167 1	3.643
0.32	0.144 8	0.111 3	0.121 4	0.107 6	0.109 5	0.107 8	0.107 6	0.189 9	−0.287 2	3.466 4
0.33	0.095 9	0.108 6	0.155 0	0.088 1	0.100 5	0.091 9	0.089 0	0.271 0	−0.401 9	3.301 1
0.34	0.070 8	0.085	0.155 5	0.067 2	0.077 2	0.069 9	0.067 8	0.406 6	−0.511 7	3.142 7
0.35	0.056 4	0.053 5	0.068 3	0.049 4	0.051 6	0.049 9	0.049 5	0.621 6	−0.616 9	2.988 4
0.40	0	0	0	0	0	0	0	1	−1.092 3	2.61
0.50	0	0	0	0	0	0	0	1	−2.017 8	2.61
0.60	0	0	0	0	0	0	0	1	−2.943 4	2.61
方差/%	7.439 7	4.668 5	4.799 7	6.305 9	5.997 3	6.277 5	6.059 3	4.702 5		
平均收益率/%	4.760 0	3.270 0	2.852 5	3.768 3	3.410 0	3.626 7	3.730 8	2.610 0		

6　结　语

本文在效用最大化投资组合模型的基础上，对模型进行了优化，建立了新的效用函数，修正了原有的效用最大化投资组合模型，并针对模型的特点，采用积极集算法对模型进行求解。为验证模型的合理性和算法的有效性对选择的 8 支股票进行了实证分析。实证分析表明，该模型在定量分析中，与已有的基本结论一致，可以反映出风险与收益的关系，因此能够为投资者投资提供参考依据。

主要参考文献

[1]H Markowitz.Portfolio Selection [J].The Journal of Finance，1952，7(1)：77-91.

[2]卫海英，徐广伟. 半方差风险计量模型的实证比较及改进研究[J]. 暨南学报：哲学社会科学版，2004，26(5)：24-30.

[3]屠新曙，王春峰，巴曙松.投资组合效用问题的研究[J].数量经济技术经济研究，2002，19(5)：37-40.

[4]张鹏.基于参数法的效用最大化投资组合有效前沿研究[J].武汉科技大学学报，2013，36(1)：74-80.

[5]袁子甲，李仲飞.参数不确定性和效用最大化下的动态投资组合选择[J].中国管理科学，2010，18(5)：1-6.

[6]Ma，Yuhong，X Gong，and G Tian.A Mean-Semi-variance Portfolio Optimization Model with Full Transaction Costs [C]//2014 International Conference of IEEE on Computational Intelligence and Communiceation Networks，2014：623-627.

[7]Reny，Philip J.Advanced Microeconomic Theory [M]. Ottawa：Addison Wesley，1998.

[8]Neumann J L V，Morgenstern O V.The Theory of Games and Economic Behavior[M].Princeton，NJ：Princeton Universtiy Press，1945.

[9]赵长明. 我国二手房地产交易价格风险的核算[J]. 统计与决策，2014(1)：12-14.

[10]Schoemaker P J H.The Expected Utility Model：Its Variants，Purposes，Evidence and Limitations[J]. Journal of Economic Literature，1982，20(2)：529-563.

[11]屠新曙.证券市场风险管理[M].北京：科学出版社，2008.

[12]Markowitz H M.Portfolio Selection：Efficient Diver-sification of Investments[M].New York：John Wiley，1959.

[13]徐绪松，马莉莉，陈彦斌.考虑损失规避的期望效用投资组合模型[J].中国管理科学，2007(5)：42-47.

[14]解可新.最优化方法[M].天津：天津大学出版社，2004.

[15]刘兴高.应用最优化方法及 Matlab 实现[M].北京：科学出版社，2014.

[16]王继光.积极集法在天然气管网最大收益优化模型中的应用[C]//全国油气储运科技、信息与标准技术交流大会，2013.