

风险资产组合均值 - CVaR 模型的算法分析

李 婷, 张卫国

(宁夏大学 数学计算机学院, 宁夏 银川 750021)

摘 要: CVaR 是指损失超过 VaR 的条件均值, 反映了损失超过 VaR 时可能遭受的平均损失水平, 它克服了 VaR 的非一致性、非凸性等不足. 本文基于 CVaR 风险计量技术, 分析了风险证券的投资收益率在服从正态分布下的风险资产组合均值 - CVaR 模型, 给出了该风险资产组合有解的条件, 以及在该条件满足下, 最小均值 - CVaR 组合的投资比例解析形式和最小值.

关键词: 风险投资; CVaR; 最小解

中图分类号: O29 **文献标识码:** A **文章编号:** 1000-2162(2006)06-0004-04

风险价值(Value at Risk, 简称 VaR)是在正常的市场条件和给定的置信度内, 用于评估和计量金融资产或证券投资组合在既定时期内所面临的市场风险大小和可能遭受的潜在最大价值损失. VaR 可以描述为下面形式 $P(\Delta P \leq -\text{VaR}) = \alpha$, 其中 α 称为置信度, 一般地, α 在 0.01 - 0.05 之间. 然而, 过于单纯的 VaR 风险计量方法存在严重的缺陷. VaR 不是一致性风险度量, 不一定满足凸性, 另外, 使用 VaR 的前提条件是假设市场是正常的, 对于某些极端情况, VaR 显得束手无策.

为了克服 VaR 的不足, Rockafeller 和 Uryasev^[1] 提出了条件风险价值(Conditional Value - at - Risk, 简称 CVaR)的风险计量技术, 文[4]对正态情形下风险资产组合的均值 - CVaR 有效前沿做了研究, 并与经典的均值 - 方差边界进行了对比. 本文在此基础上给出了在风险证券的投资收益率服从正态分布下最小均值 - CVaR 风险资产组合有解的条件, 并在该条件满足下, 具体给出了最小均值 - CVaR 组合的投资比例解析形式和最小解.

1 条件风险价值 CVaR 定义

设 $f(X, Y)$ 是损失函数, 其中 $X \in \mathbf{R}^n$ 为风险资产的投资比例, $Y \in \mathbf{R}^m$ 为随机向量, 代表能影响损失的市场不确定性. 当损失为负时, 意味着有正的收益.

设 Y 的概率密度为 $p(Y)$, 对任意给定的 X , 损失 $f(X, Y)$ 的分布也随之确定, 若其分布函数 $\Phi(X, \text{VaR})$ 在任意一点都连续, 则

$$\Phi(X, \text{VaR}) = P\{Y | f(X, Y) \leq \text{VaR}\} = \int_{f(X, Y) \leq \text{VaR}} p(Y) dY$$

$f(X, Y) \leq \text{VaR}$ 在相应的概率置信度 $\beta (0 < \beta < 1)$ 下, 损失 VaR 和 CVaR 分别定义为

$$\text{VaR}_\beta(X) = \min\{\text{VaR} \in \mathbf{R} : \Phi(X, \text{VaR}) \geq \beta\}$$

$$\text{CVaR}_\beta(X) = E[f(X, Y) | f(X, Y) \geq \text{VaR}_\beta(X)] = (1 - \beta)^{-1} \int_{f(X, Y) \geq \text{VaR}_\beta(X)} f(X, Y) p(Y) dY$$

2 正态情形下风险资产组合均值 - CVaR 模型的算法分析

设投资者已选定 n 种风险证券进行组合投资, n 种风险证券的投资收益率为随机变量 $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$, Y 服从正态分布 $N(\mu, V)$, 其中 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^T$ 是 n 种风险证券的期望收益率向量, V 为

收稿日期: 2006-01-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(70571024)

作者简介: 李 婷(1974-), 女, 山东潍坊人, 宁夏大学讲师, 硕士;

张卫国(1963-), 男, 宁夏中卫人, 华南理工大学教授, 博士, 博士生导师.

收益率的协方差阵, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 是在风险证券上的投资比例向量, 且

$$F^T X = 1, F = (1, 1, \dots, 1)^T$$

基于 CVaR 的证券组合优化模型(I)为

$$\min \text{CVaR}_\beta(X), \quad \text{s. t.} \begin{cases} X^T F = 1 \\ X^T \mu = \bar{r} \end{cases} \tag{1}$$

其中, \bar{r} 是投资者给定的证券组合期望收益率.

因为 Y 服从正态分布, 根据 VaR 的定义, 由文[1]可知

$$\text{VaR}_\beta(X) = -\mu(X) + b_1(\beta)\sigma(X)$$

其中

$$b_1(\beta) = \sqrt{2} \text{erf}^{-1}(2\beta - 1) = \Phi^{-1}(\beta) \tag{2}$$

$$\text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt, \Phi(\cdot) \text{ 是标准正态分布的分布函数.}$$

$$\text{CVaR}_\beta = E[f(X, Y) | f(X, Y) \geq \text{VaR}_\beta(X)] = \frac{1}{1 - \beta} \int_{f(X, Y) \geq \text{VaR}_\beta(X)} f(X, Y) p(Y) dY = -\mu(X) + b_2(\beta)\sigma(X)$$

其中

$$b_2(\beta) = (\sqrt{2\pi} \exp(\text{erf}^{-1}(2\beta - 1))^2 (1 - \beta))^{-1} \tag{3}$$

于是 CVaR_β 证券组合优化模型(I)等价于下列模型(II)

$$\min b_2(\beta)\sigma(x) - \mu(x), \quad \text{s. t.} \begin{cases} X^T F = 1 \\ X^T \mu = \bar{r} \end{cases} \tag{4}$$

由文[3]知, 证券组合模型(III)

$$\min \sigma^2 = X^T V X, \quad \text{s. t.} \begin{cases} X^T F = 1 \\ X^T \mu = \bar{r} \end{cases}$$

其有效集 E 及投资比例向量分别为

$$E = \{(\sigma, \bar{r}) | \sigma^2 = (A - 2B\bar{r}^2)/(AC - B^2), \bar{r} \geq B/C\} \tag{5}$$

$$X = \frac{A - B\bar{r}}{AC - B^2} V^{-1} F + \frac{C\bar{r} - B}{AC - B^2} V^{-1} \mu \tag{6}$$

其中 $V = (\sigma_{ij})_{n \times n}$ 是风险阵(收益率的协方差阵), 且设 V 是正定的, $A = \mu^T V^{-1} \mu, B = \mu^T V^{-1} F, C = F^T V^{-1} F, \delta = AC - B^2, F = (1, 1, \dots, 1)^T$.

当 $\bar{r} = \frac{B}{C}$ 时, 风险取得最小值 $\sigma = \frac{1}{\sqrt{C}}$.

定理 1^[4] 组合 X 属于均值 - CVaR 边界 \Leftrightarrow 组合 X 属于均值 - 方差边界.

$$\frac{[(\text{CVaR} + \mu)/b_2]^2}{1/C} - \frac{[\mu - B/C]^2}{\delta/C^2} = 1 \tag{7}$$

定理 2 在风险证券的投资收益率服从正态分布下, 模型(I)或模型(II)在置信水平 $100\beta\%$ 下有解 $\Leftrightarrow \beta > \Phi(W)$.

其中

$$W = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\ln\left(\sqrt{\frac{C}{\delta}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1 - \beta)}\right)}$$

证明 根据(5)式, 可得

$$\bar{r} = \frac{B}{C} + \sqrt{\frac{\delta}{C}(\sigma^2 - \frac{1}{C})} \tag{8}$$

又知当 $\bar{r} = \frac{B}{C}$ 时, 风险取得最小值 $\sigma = \frac{1}{\sqrt{C}}$.

根据定理1、(4)式和(8)式, 可得 $\min_{\sigma \geq 1/\sqrt{C}} b_2(\beta)\sigma - \left[\frac{B}{C} + \sqrt{\frac{\delta}{C}(\sigma^2 - \frac{1}{C})} \right]$.

设 $Q = b_2(\beta)\sigma - \left[\frac{B}{C} + \sqrt{\frac{\delta}{C}(\sigma^2 - \frac{1}{C})} \right]$, 对 Q 求 σ 的一阶导数

$$\frac{\partial Q}{\partial \sigma} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(b_2(\beta)\sigma - \left[\frac{B}{C} + \sqrt{\frac{\delta}{C}(\sigma^2 - \frac{1}{C})} \right] \right) = b_2(\beta) - \frac{\sigma \sqrt{\frac{\delta}{C}}}{\sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{C}}}$$

因为 $\lim_{\sigma \rightarrow 1/\sqrt{C}} \left(b_2(\beta) - \frac{\sigma \sqrt{\frac{\delta}{C}}}{\sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{C}}} \right) = -\infty$, 因此, 当 $\sigma = \frac{1}{\sqrt{C}}$ 时, (4) 式是无解的.

取 $\frac{\partial Q}{\partial \sigma} = 0$, 即 $b_2(\beta) - \frac{\sigma \sqrt{\frac{\delta}{C}}}{\sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{C}}} = 0$, 可得

$$\sigma = \sqrt{\frac{b_2^2(\beta)}{Cb_2^2(\beta) - \delta}} \quad (9)$$

从(9)式可以看出, $Cb_2^2(\beta) - \delta > 0$, 即 $b_2(\beta) > \sqrt{\frac{\delta}{C}}$, 它是模型(I)或模型(II)在置信水平 $100\beta\%$ 下有解的必要条件.

下面证明 $b_2(\beta) > \sqrt{\frac{\delta}{C}}$ 是模型(I)或模型(II)在置信水平 $100\beta\%$ 下有解的充分条件.

对 Q 求 σ 的二阶导数

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q}{\partial \sigma^2} &= \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \left(b_2(\beta) - \frac{\sigma \sqrt{\frac{\delta}{C}}}{\sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{C}}} \right) = - \frac{\sqrt{\frac{\delta}{C}} \sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{C}} - \frac{\sigma^2 \sqrt{\frac{\delta}{C}}}{\sqrt{\sigma^2 - \frac{1}{C}}}}{\sigma^2 - \frac{1}{C}} = \\ &= \frac{\frac{1}{C} \sqrt{\frac{\delta}{C}}}{(\sigma^2 - \frac{1}{C})^{\frac{3}{2}}} > 0, \forall \sigma \in \left(\frac{1}{\sqrt{C}}, +\infty \right) \end{aligned}$$

综上所述, 模型(I)或模型(II)在置信水平 $100\beta\%$ 下有解, 当且仅当 $b_2(\beta) > \sqrt{\frac{\delta}{C}}$.

结合(2)式和(3)式可以推得

$$\Phi^{-1}(\beta) > \sqrt{2} \cdot \sqrt{\ln \left(\sqrt{\frac{C}{\delta}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-\beta)} \right)}$$

令 $W = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\ln \left(\sqrt{\frac{C}{\delta}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1-\beta)} \right)}$, 则 $\beta > \Phi(W)$.

证毕.

定理3 如果 $\beta > \Phi(W)$, 最小 CVaR 的证券组合优化模型(I)的投资比例向量为

$$X = G + H \left[\frac{B}{C} + \sqrt{\frac{\delta}{C} \left(\frac{b_2^2(\beta)}{Cb_2^2(\beta) - \delta} - \frac{1}{C} \right)} \right]$$

及模型(I)的最小值为 $b_2(\beta) \sqrt{\frac{b_2^2(\beta)}{Cb_2^2(\beta) - \delta}} - \left[\frac{B}{C} + \sqrt{\frac{\delta}{C} \left(\frac{b_2^2(\beta)}{Cb_2^2(\beta) - \delta} - \frac{1}{C} \right)} \right]$.

其中

$$G = \frac{1}{\delta}(AV^{-1}F - BV^{-1}\mu), H = \frac{1}{\delta}(CV^{-1}\mu - BV^{-1}F)$$

证明 由定理2的证明得 $\sigma_{\min} = \sqrt{\frac{b_2^2(\beta)}{Cb_2^2(\beta) - \delta}}$.

由上式和(8)式相应可得 $\bar{r} = \frac{B}{C} + \sqrt{\frac{\delta}{C} \left(\frac{b_2^2(\beta)}{Cb_2^2(\beta) - \delta} - \frac{1}{C} \right)}$.

根据定理1和(6)式,有

$$X = \frac{1}{\delta}(AV^{-1}F - BV^{-1}\mu) + \frac{1}{\delta}(CV^{-1}\mu - BV^{-1}F) \left[\frac{B}{C} + \sqrt{\frac{\delta}{C} \left(\frac{b_2^2(\beta)}{Cb_2^2(\beta) - \delta} - \frac{1}{C} \right)} \right]$$

$$CVaR_{\min} = b_2\sigma - \mu = b_2(\beta) \sqrt{\frac{b_2^2(\beta)}{Cb_2^2(\beta) - \delta}} - \left[\frac{B}{C} + \sqrt{\frac{\delta}{C} \left(\frac{b_2^2(\beta)}{Cb_2^2(\beta) - \delta} - \frac{1}{C} \right)} \right] \quad \text{证毕.}$$

参考文献:

- [1] R Tyrrell Rockafellar and Stanislav Uryasev. Optimization of Conditional Value - at - Risk[J]. Journal of Risk, 2000, 2:21 - 24.
- [2] R Tyrrell Rockafellar, Stanislav Uryasev. Conditional value - at - risk for general loss distributions[J]. Journal of Banking & Finance, 2002, 26:1443 - 1471.
- [3] 张卫国,王荫清. 无风险投资或贷款下证券组合优化模型及应用[J]. 预测, 1996, 15:65 - 67.
- [4] 刘小茂,李楚霖,王建华. 风险资产组合的均值-CVaR有效前沿(I)[J]. 管理工程学报, 2003, 17:29 - 33.

Minimum modeling of mean - CVaR arithmetic analysis

LI Ting, ZHANG Wei-guo

(Department of Mathematics and Computer, Ningxia University, Yinchuan 750021, China)

Abstract: Conditional Value - at - Risk (CVaR) is known as mean excess loss, it is the conditional expectation of losses above that amount VaR. As an alternative measure of risk, CVaR is known to have better properties than VaR, such as subadditivity and convexity. Based on the normal assumption for the distribution of financial returns, here analyze the minimum modeling of mean - CVaR, and evaluate when the model has efficient solution, and when this condition is satisfied, the formula of efficient frontier of portfolio and minimum value are presented.

Key words: risk - investment; CVaR; minimum value

责任编辑:朱夜明

作者: [李婷](#), [张卫国](#), [LI Ting](#), [ZHANG Wei-guo](#)
作者单位: [宁夏大学, 数学计算机学院, 宁夏, 银川, 750021](#)
刊名: [安徽大学学报 \(自然科学版\)](#) [ISTIC](#) [PKU](#)
英文刊名: [JOURNAL OF ANHUI UNIVERSITY \(NATURAL SCIENCES\)](#)
年, 卷(期): 2006, 30 (6)
被引用次数: 1次

参考文献(4条)

1. [刘小茂](#); [李楚霖](#); [王建华](#) [风险资产组合的均值-CVaR有效前沿 \(I\)](#) [期刊论文]-[管理工程学报](#) 2003 (1)
2. [张卫国](#); [王荫清](#) [无风险投资或贷款下证券组合优化模型及应用](#) 1996
3. [R Tyrrell Rockafellar](#); [Stanislav Uryasev](#) [Conditional value-at-risk for general loss distributions](#) 2002
4. [R Tyrrell Rockafellar](#); [Stanislav Uryasev](#) [Optimization of Conditional Value-at-Risk](#) 2000

本文读者也读过(10条)

1. [曹静](#), [秦超英](#), [覃森](#), [CAO Jing](#), [QIN Chao-ying](#), [QIN Sen](#) [均值-CVaR模型下的两基金分离定理](#) [期刊论文]-[系统工程学报](#) 2006, 21 (2)
2. [罗樱](#), [于欣](#), [LUO Ying](#), [YU Xin](#) [CVaR度量下基于安全第一的最优投资组合](#) [期刊论文]-[江南大学学报 \(自然科学版\)](#) 2006, 5 (5)
3. [王增建](#) [基于VaR和CVaR模型的我国股票市场短期风险度量的比较研究 and 应用](#) [学位论文] 2011
4. [蒋敏](#), [姜宝珍](#), [孟志青](#), [虞晓芬](#), [Jiang Min](#), [Jiang Baozhen](#), [Meng Zhiqing](#), [Yu Xiao fen](#) [基于多目标CVaR模型的证券组合投资的风险度量和策略](#) [期刊论文]-[经济数学](#) 2007, 24 (4)
5. [谢玮](#) [金融资产的CVaR风险的区间估计及假设检验](#) [期刊论文]-[华章](#) 2010 (5)
6. [刘小茂](#), [杜红军](#), [LIU Xiao-mao](#), [DU Hong-jun](#) [金融资产的VaR和CVaR风险的优良估计](#) [期刊论文]-[中国管理科学](#) 2006, 14 (5)
7. [喻春华](#) [基于Laplace分布的均值-CVaR模型研究](#) [学位论文] 2008
8. [姚燕云](#), [Yao Yanyun](#) [基于Omega函数的投资基金业绩评估](#) [期刊论文]-[绍兴文理学院学报](#) 2009, 29 (9)
9. [迟国泰](#), [王际科](#), [齐菲](#), [CHI Guo-tai](#), [WANG Ji-ke](#), [QI Fei](#) [基于CVaR风险度量和VaR风险控制的贷款组合优化模型](#) [期刊论文]-[预测](#) 2009, 28 (2)
10. [胡雪明](#), [吴坤](#) [国外金融资产价格变化行为研究进展述评](#) [期刊论文]-[经济师](#) 2003 (9)

引证文献(1条)

1. [许文坤](#), [陈云霞](#), [杜倩](#), [张卫国](#) [基于拟蒙特卡罗方法的可转债VaR和ES风险度量](#) [期刊论文]-[统计与决策](#) 2011 (4)

本文链接: http://d.g.wanfangdata.com.cn/Periodical_ahdxxb200606002.aspx