

姓名_____

学号_____

成绩_____

1. 设 $X(1), X(2)$ 是两个独立同分布随机样本, 服从 Poisson 分布 $P(\lambda)$, 试给出 λ^2 的无偏估计。
提示:

$$X \sim P(\lambda) \Rightarrow P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \exp(-\lambda)$$

2. 设 $(X(1), X(2))$ 是独立同分布的随机样本, 服从一维高斯分布 $N(\theta, \theta^2)$, 请计算 θ 的 Cramer-Rao 下界。
3. 考虑随机序列 $X(n)$, 满足

$$X(n) = S(n) + V(n)$$

其中 $S(n), V(n)$ 是独立的零均值宽平稳随机序列, 功率谱密度满足,

$$S_S(\omega) = \begin{cases} a & |\omega| \leq \pi/4 \\ 0 & \text{others} \end{cases}, \quad S_V(\omega) = \begin{cases} b & \pi/4 \leq |\omega| \leq \pi/2 \\ 0 & \text{others} \end{cases}, \quad \omega \in [-\pi, \pi]$$

请构造线性滤波器, 用 $X(n+1)$ 、 $X(n)$ 和 $X(n-1)$ 估计 $S(n)$ 。请计算滤波器系数以及预测误差。

提示: 功率谱密度 $S(\omega)$ 与相关函数 $R(\tau)$ 的关系为

$$R(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(\omega) \exp(j\omega k) d\omega$$

4. 考虑随机信号

$$X(n) = A\rho^n + V(n)$$

其中 $V(n)$ 是功率为 σ^2 的白噪声, ρ 是已知参数。请设立合适的状态变量, 建立适当的状态方程, 并在此基础上使用 Kalman 滤波来估计未知参数 A , 请给出 Kalman 滤波的预测方程, 校正方程, 以及滤波增益的递推方程。(无需给出预测误差的递推关系)

5. 考虑第 3 题中的随机序列 $X(n)$, 现试图利用 LMS 滤波器来构造对该序列的二阶线性预测, 系数为 $c(k) = (c_1(k), c_2(k))$, 误差度量为

$$e^2(n) = (X(n) - c_1(n)X(n-1) - c_2(n)X(n-2))^2$$

滤波方程为:

$$\begin{pmatrix} c_1(k+1) \\ c_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1(k) \\ c_2(k) \end{pmatrix} + \mu e(k) \begin{pmatrix} X(k-1) \\ X(k-2) \end{pmatrix}$$

μ 为步长。请给出最大允许之步长 (用 a, b 表示)。

提示: 设 $(X(n-1), X(n-2))^T$ 的相关矩阵为 R , 其特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 那么滤波器均值收敛的条件为

$$0 < \max\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} < \frac{1}{\mu}$$

6. 设矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为对称正定阵， $B \in \mathbb{R}^{n \times k}$ 为满秩矩阵， $X \in \mathbb{R}^n$ ， $U \in \mathbb{R}^k$ ，请计算

$$\min_{B^T X = U} X^T A X$$

7. 考虑矩阵 $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ，如果矩阵 A^- 满足 $AA^-A = A$ ，则称 A^- 为 A 的 g 逆。请计算

$$\min_{A^-} \|A^-\|_F$$

提示：考虑矩阵的 SVD。

8. 请计算第 3 题中的随机信号样本 $X(1), X(2)$ 的 Capon 谱估计。

提示：Capon 谱估计的表达式为

$$S_c = \frac{1}{a^T(\omega)R^{-1}a(\omega)}$$

9. 请计算第 3 题中的随机信号样本 $X(1), X(2), X(3)$ 的周期图谱估计的均值，并将这里得到的结果与第 8 题结果以及信号的理论谱进行比较，分析 Capon 方法与周期图方法的优劣。