1. 设 $X(1),X(2)$ 是两个独立同分布的随机样本，服从二项分布$B(n,p)$，试给出至少两种 p^2 的无偏估计。

2. 设 $X(1),X(2)$ 是两个独立同分布的随机样本，服从二项分布$B(n,p)$，请计算 p^2 的 Cramer-Rao 下界。并通过对第 1 题中两种无偏估计的均方误差的计算，指出哪一个无偏估计更加接近 Cramer-Rao 下界。

3. 考虑零均值宽平稳随机序列$X(n)$，满足

$$X(n) = S(n) + V(n)$$

其中$S(n),V(n)$是独立的随机序列，功率谱密度满足，

$$S_S(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \pi/2 \\ 0 & others \end{cases},\ S_V(\omega) = \begin{cases} 1 & \pi/4 < |\omega| < \pi/2 \\ 0 & others \end{cases}$$

请构造二阶线性滤波器，用$X(n)$和$X(n-1)$估计 $S(n)$。请计算滤波器系数以及预测误差。

4. 考虑零均值宽平稳随机序列$X(n)$，满足

$$X(n) = aX(n-1) + W(n) + bW(n-1)$$

其中$W(n)$为零均值高斯白噪声，方差为σ^2。$|a| < 1, |b| < 1$，试构造$X(n)$的二阶后向预测，实计算滤波器系数以及估计误差。

5. 考虑标准的状态方程

$$X(n) = AX(n-1) + U(n)$$
$$Y(n) = HX(n) + V(n)$$

其中$U(n),W(n)$为零均值白噪声，协方差矩阵分别为Q,R。考察 Kalman 滤波器与 Wiener 滤波器的关联。令$S(n) = \hat{X}(n|n), S(n-1) = \hat{X}(n|n-1)$，请用$Y(n)$, $S(n-1)$构造 Wiener 滤波器，对$S(n)$进行估计，写出滤波器的传递函数。

6. 考虑 LMS 滤波器，误差度量为$\epsilon(\theta) = (Y - \theta^T X)^2$。该滤波器有如下变化形式

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} + \alpha e(n)X(n) + \beta(\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_{n-1})$$

也就是给出了所谓的 Momentum 项。请给出滤波器均值收敛的条件。

7. 请求解如下的优化问题，设矩阵$A \in R^{m\times n}$，$x \in R^m$，$y \in R^n$，

$$\min_{x,y}(x^T A y)^2,\ s.t\ \|x\| = \|y\| = 1$$

8. 设$A \in R^{m\times n}$，其伪逆为A^+，$\mathrm{rank}(A) = k$，试计算

$$\mathrm{rank}(A((A^T A)^+ A^T A)^n A^T)$$

9. 考虑信号 Capon 谱估计的如下推广形式。设$a(\omega) = (1, \cdots, \exp(j(n-1)\omega))$，随机信号矢量$X \in$

9. 考虑信号 Capon 谱估计的如下推广形式。设$a(\omega) = (1, \cdots, \exp(j(n-1)\omega))$，随机信号矢量$X \in$

R^n，ω_1，ω_2 是两个给定的频率，求解如下优化问题：

$$\min_{\theta} E\|\theta^H X\|^2\text{，s.t}\quad \theta^H a(\omega_1) = 1\text{，}\theta^H a(\omega_2) = 1$$

10. 零均值宽平稳随机序列$X(n), n = 1, 2$，满足

$$X(n) = \frac{1}{3}W(n-1) + W(n)$$

其中$W(n)$是零均值白噪声，方差为 1。计算 $X(n)$ 的周期图谱估计的均值，