

姓

学号

成绩

1. 设 $X(1), X(2), \dots, X(n)$ 是 n 个独立同分布的随机样本, 服从 $N(\mu, \sigma^2)$, 试给出 $\exp(\mu)$ 的无偏估计。
2. 设 $X(1), X(2), \dots, X(n)$ 是 n 个独立同分布的随机样本, 服从 $N(\mu, \sigma^2)$, 试给出 $\exp(\mu)$ 的 Cramer-Rao 下界。
3. 考虑零均值宽平稳随机序列 $X(n), W(n)$, 满足

$$X(n) = aX(n-1) + W(n)$$

$$W(n) = bW(n-1) + N(n)$$

其中 $N(n)$ 为零均值白噪声, 方差为 σ^2 。 $|a| < 1, |b| < 1$, 试构造 $X(n)$ 的二阶后向预测, 计算滤波器系数以及估计误差。

4. 考虑实信号 $X(n) = A(n) - A(n-1) + U(n)$, 其中 $A(n)$ 为随机信号, 相关函数为 $R_A(n) = \beta^{|n|}$ $|\beta| < 1$, $U(n)$ 为独立于 $A(n)$ 的零均值实白噪声。请利用 $X(n)$ 构造二阶 Wiener 滤波器, 对 $A(n)$ 进行估计, 给出滤波器系数和估计误差。
5. 考虑复信号

$$X(n) = \exp(j\theta n) + U(n)$$

其中 $U(n)$ 为零均值复白噪声, $E(U(n)U^*(n)) = 1$ 。请构造实系数 Kalman 滤波器, 对 $X(n)$ 进行估计, 写出滤波器的状态方程, 预测方程以及校对方程。

6. 考虑第三题的信号模型, 构造 LMS 滤波器, 使用下列误差度量

$$\epsilon(\theta) = E(Y - \theta^T X)^2 + \|\theta\|^2$$

利用 $X(n-1), X(n)$ 估计 $X(n+1)$, 请给出滤波器均值收敛的条件。

7. 考虑矩阵 $A \in R^{m \times n}$, 奇异值分解为 $A = U\Sigma V^T$, 已知

$$c_1 \|x\|_2 \leq \|Ax\|_2 \leq c_2 \|x\|_2 \quad \forall x \in R^n$$

请给出 c_1, c_2 , 以及分别达到上下界的 x

8. 考虑方阵 $A \in R^{n \times n}$, 其伪逆为 A^+ , 请给出正定矩阵 \tilde{A}, \tilde{A}^+ , 以及正交阵 Q_1, Q_2 , 使得

$$A = \tilde{A}Q_1, \quad A^+ = \tilde{A}^+Q_2, \quad Q_1Q_2 = I$$

9. 考虑第四题的信号模型 $X(n)$, 计算 $\{X(n), n = 1, 2, 3\}$ 的周期图谱估计的均值,

$$X(n) = A(n) - A(n-1) + U(n)$$