2023

2. 设 X(1),X(2),⋯,X(n) 是 n 个独立同分布的随机样本，服从$N(\mu,\sigma^2)$，试给出 exp (μ)的 Cramer-Rao 下界。

解:

$$f(x(1),x(2),\cdots x(n),\mu,\sigma^2)=\frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right\}$$

$$\therefore \ln(f)=-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2-\frac{n}{2}\ln 2\pi-n\ln\sigma$$

$$\therefore \frac{\partial \ln(f)}{\partial \mu}=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)=\underbrace{\frac{n}{\sigma^2}}_{I(\mu)}\left(\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i}_{g(\mu)}-\mu\right)$$

$$\frac{\partial^2 \ln(f)}{\partial \mu^2}=-\frac{n}{\sigma^2}$$

所以 Fisher 信息 $I(\mu)=-E\left\{\frac{\partial^2\ln(f)}{\partial\mu^2}\right\}=\frac{n}{\sigma^2}$

$\therefore$ 对于μ的估计的 Cramer-Rao下界为 $Var(\hat{\mu})\geq\frac{1}{I(\mu)}=\frac{\sigma^2}{n}$，当 $\mu=g(\mu)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$时达到下界

而对于$g(\mu)$的Cramer-Rao下界为 $Var(g(\hat{\mu}))=\left[\frac{\partial g(\mu)}{\partial \mu}\right]^2 Var(\hat{\mu})$

$\therefore$ $\exp(\mu)$的Cramer-Rao下界为 $\frac{e^{\mu^2}\sigma^2}{n}$

2022

2. 设 X(1),…,X(n) 是 n 个独立同分布随机样本，服从 Poisson 分布$P(\lambda)$，试给出未知参数λ的 Cramer-Rao 下界，并给出达到该下界的 λ 的无偏估计。

解:

$$P(x=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

$$f(\vec{x},\lambda)=e^{-n\lambda}\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}$$

$$\therefore \ln(f)=-n\lambda+\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln\lambda-\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i!)$$

$$\therefore \frac{\partial\ln f}{\partial\lambda}=-n+\frac{1}{\lambda}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\quad\Rightarrow\quad\lambda=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$\frac{\partial^2\ln f}{\partial\lambda^2}=-\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$\therefore I(\lambda)=-E\left\{\frac{\partial^2\ln f}{\partial\lambda^2}\right\}=\frac{n\lambda}{\lambda^2}=\frac{n}{\lambda}$$

$\therefore$ 对于λ的估计的 Cramer-Rao下界为 $\frac{\lambda}{n}$. 达到该下界的λ的无偏估计为 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

2. 设 (X(1),X(2))是独立同分布的随机样本，服从一维高斯分布N(θ, θ^2)，请计算 θ 的 Cramer-Rao 下界。

2021年

解.

$$f(\vec{x},\theta)=\frac{1}{2\pi\theta^2}\exp\left\{-\frac{(x_1-\theta)^2+(x_2-\theta)^2}{2\theta^2}\right\}$$

$$E(x)=\theta$$

$$E(x^2)=\theta^2+\theta^2=2\theta^2$$

$$\therefore \ln(f)=-\frac{(x_1-\theta)^2+(x_2-\theta)^2}{2\theta^2}-\ln 2\pi-2\ln\theta$$

$$=-\frac{x_1^2+x_2^2}{2\theta^2}+\frac{x_1+x_2}{\theta}-2\ln\theta-1-\ln 2\pi$$

$$\frac{\partial\ln f}{\partial\theta}=(x_1^2+x_2^2)\frac{1}{\theta^3}-\frac{x_1+x_2}{\theta^2}-\frac{2}{\theta}$$

$$\frac{\partial^2\ln f}{\partial\theta^2}=-\frac{3}{\theta^4}(x_1^2+x_2^2)+\frac{2(x_1+x_2)}{\theta^3}+\frac{2}{\theta^2}$$

12 − 4 −2

$$I(\theta)=-E\left\{\frac{\partial^2\ln f}{\partial\theta^2}\right\}=\frac{3}{\theta^4}\times4\theta^2-\frac{2\times2\theta}{\theta^3}-\frac{2}{\theta^2}=\frac{6}{\theta^2}$$

∴ 对于θ的估计的Cramer-Rao下界为 $\frac{\theta^2}{6}$