

姓名_____

学号_____

成绩_____

1. 设 $X(1), X(2)$ 独立同分布, 服从均匀分布 $U(1, \theta)$, 请计算 θ^2 的无偏估计。
2. 设 $X(1), \dots, X(n)$ 是 n 个独立同分布随机样本, 服从 Poisson 分布 $P(\lambda)$, 试给出未知参数 λ 的 Cramer-Rao 下界, 并给出达到该下界的 λ 的无偏估计。

3. 考虑随机序列 $X(n)$, 满足

$$X(n) = 0.5X(n-1) + W(n) + 0.5W(n-1)$$

其中 $W(n)$ 为零均值白噪声, 功率谱为 1, 请构造线性滤波器, 用 $X(n-1)$ 、 $X(n)$ 估计 $X(n+1)$ 。
请计算滤波器系数以及预测误差。

4. 考虑随机信号

$$X(n) = X(n-1) + \alpha X(n-2) + V(n)$$

$$Y(n) = \beta X(n) + W(n)$$

其中 $V(n), W(n)$ 是独立的, 功率为 σ^2 的白噪声, 请设立合适的状态变量, 建立适当的状态方程, 并在此基础上构建 Kalman 滤波, 利用 $\{Y(n)\}$ 来估计未知状态 $\{X(n)\}$, 请给出 Kalman 滤波的预测方程, 校正方程, 以及滤波增益的递推方程。(无需给出预测误差的递推关系)

5. 考虑第二题中的随机序列 $X(n)$, 请构造 LMS 自适应滤波器, 用 $X(n-1)$ 、 $X(n)$ 估计 $X(n+1)$, 给出滤波器系数的自适应递推式, 并计算确保收敛的步长范围。
6. 设矩阵 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, 非零奇异值为 $\sigma_1, \dots, \sigma_k$, 请计算矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix}$$

的所有特征值。

7. 考虑两个不同的数据模型 $Y_1 = X\theta + \epsilon_1$, $Y_2 = X\theta + \epsilon_2$, $X \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\theta \in \mathbb{R}^n$, $Y \in \mathbb{R}^m$, $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{R}^m$ 为独立的随机噪声向量, $\epsilon_1 \sim N(0, \sigma_1^2 I)$, $\epsilon_2 \sim N(0, \sigma_2^2 I)$, 设 $\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 分别为两个模型的最小二乘解, 令 $\hat{\theta} = \alpha \hat{\theta}_1 + (1 - \alpha) \hat{\theta}_2$, 求解如下优化问题 (这里 Tr 表示矩阵的迹)

$$\min_{\alpha} Tr E(\hat{\theta} - E\hat{\theta})(\hat{\theta} - E\hat{\theta})^T$$

8. 考虑零均值 Gaussian 白噪声序列 $X(k)$, 功率谱是 1, 有人计算谱估计 $S_X(\omega)$ 时, 忘记取模, 得到如下形式

$$S_X(\omega) = \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^{N-1} X(k) \exp(-j\omega k) \right)^2$$

请计算这种谱估计的均值 $E(S_X(\omega))$ 和协方差 $E(S_X(\omega_1) \overline{S_X(\omega_2)})$ 。