独立成分分析

耿修瑞

中国科学院空天信息创新研究院

gengxr@sina.com.cn

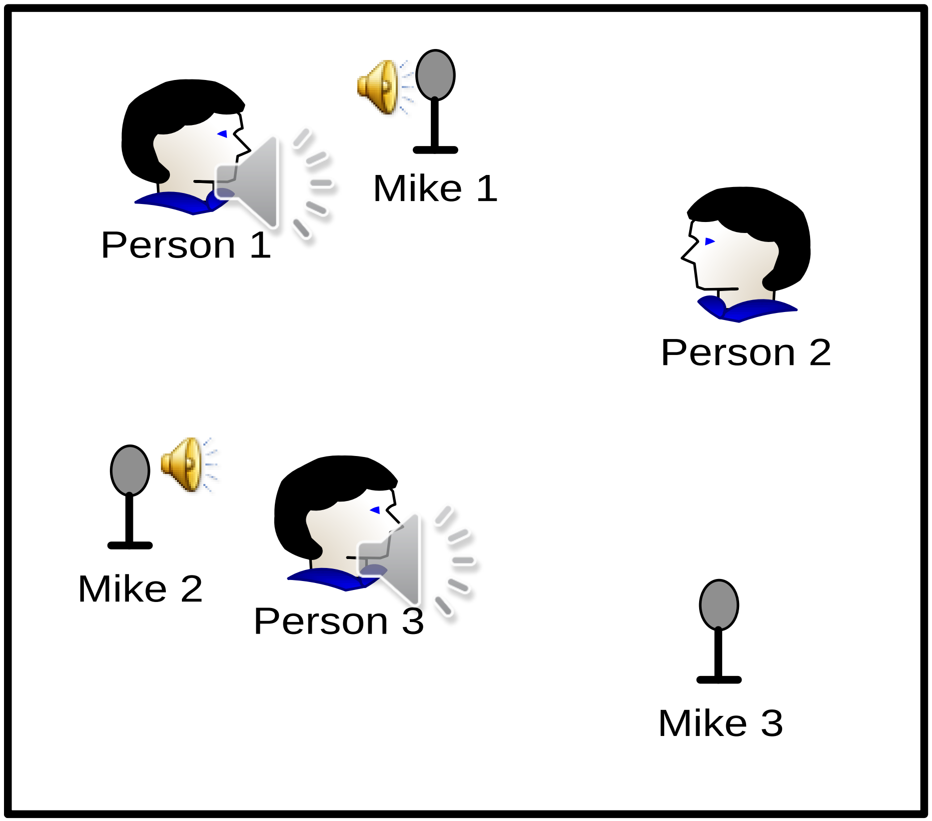
2024.4

提纲

- 问题背景
- 基本概念
- 独立成分分析
- 应用实例

问题背景

鸡尾酒会问题

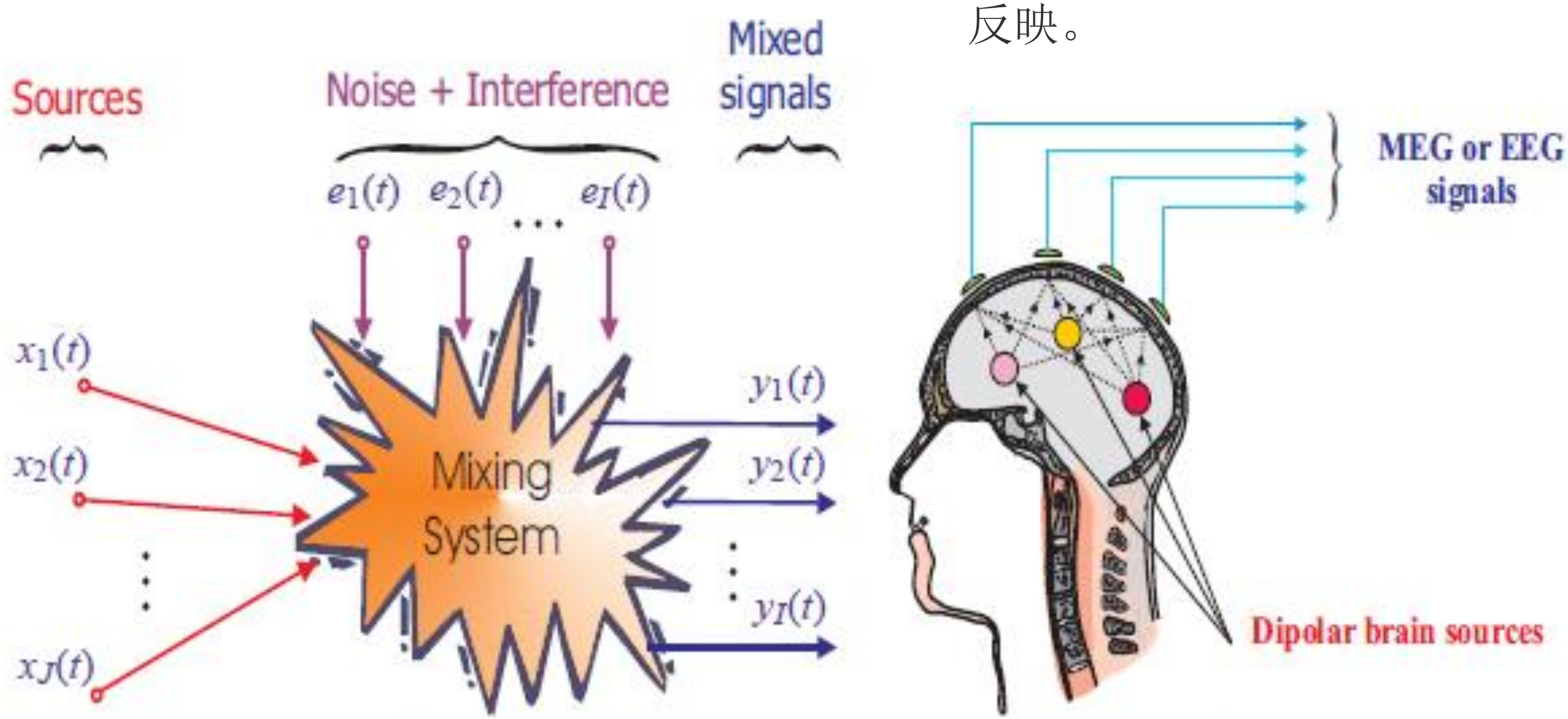


- 每个麦克风信号是所有说话人信号的混合

$$x_1(t) = a_{11}s_1(t) + a_{12}s_2(t) + a_{13}s_3(t)$$
$$x_2(t) = a_{21}s_1(t) + a_{22}s_2(t) + a_{23}s_3(t)$$
$$x_3(t) = a_{31}s_1(t) + a_{32}s_2(t) + a_{33}s_3(t)$$

脑电信号特征提取

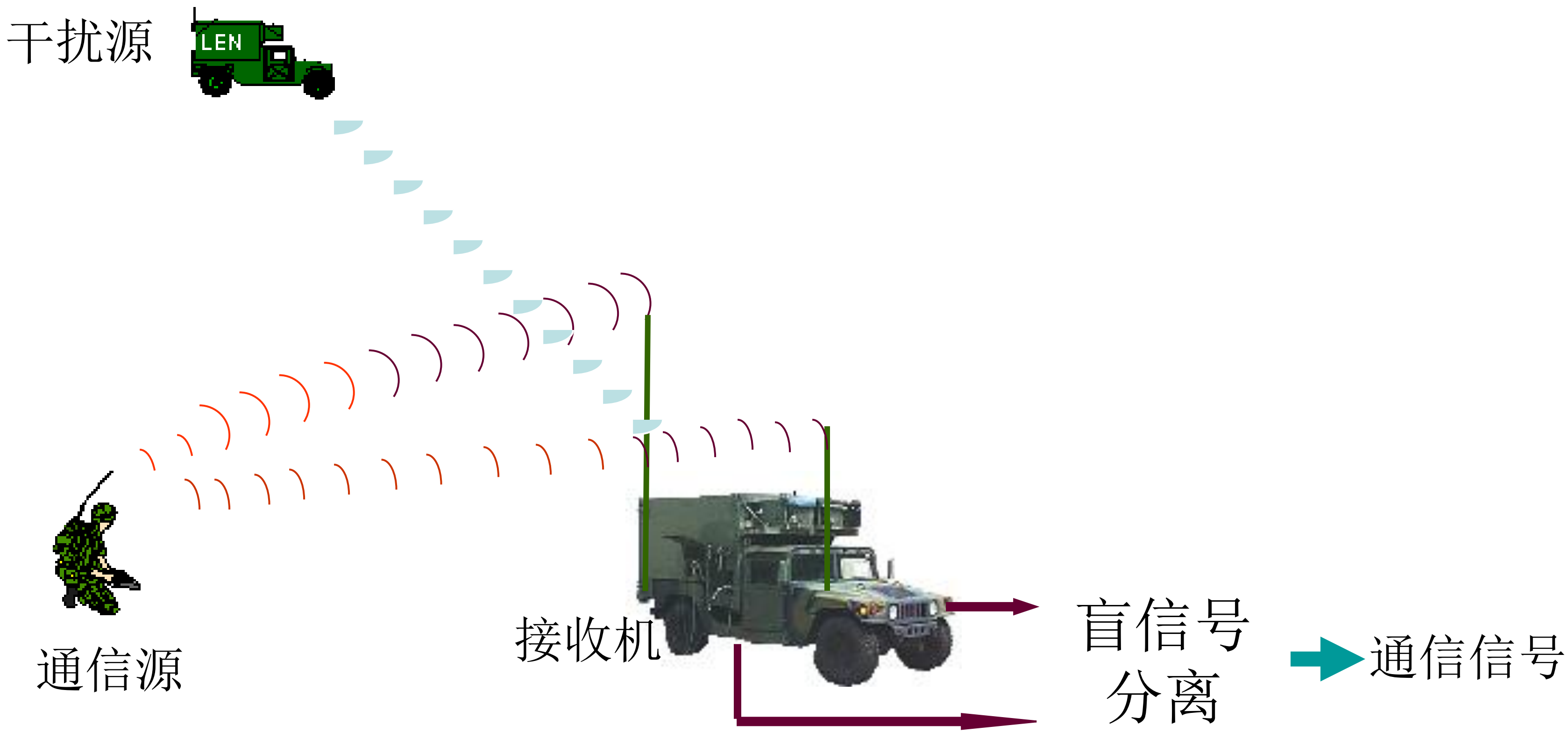
脑电图(EEG)是脑神经细胞电生理活动在大脑皮层或头皮表面的总体反映。



(a) (b)

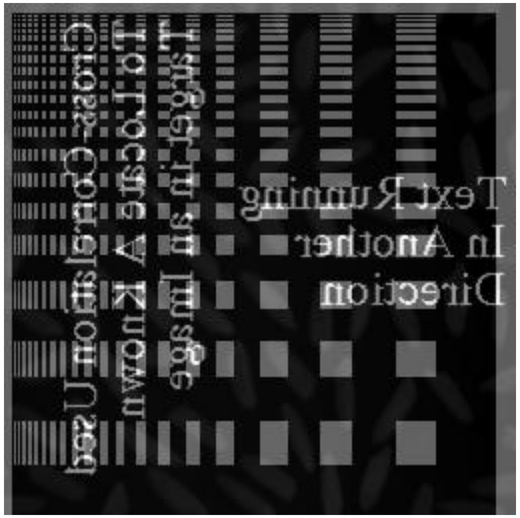
问题背景

移动与军用通信



问题背景

一个具体例子：如何从这三个混合的图像中恢复出三个独立的成分？



问题背景

PCA结果

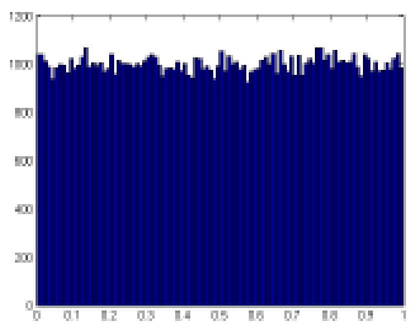
以方差为目标函数看来解决不了问题！

问题背景

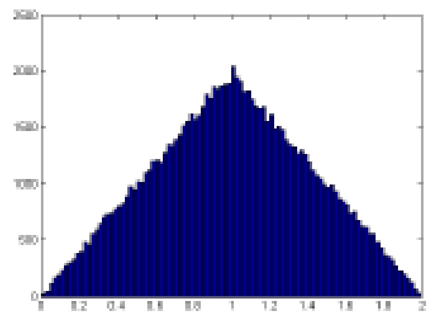
中心极限定理：

中心极限定理：对于多个独立的随机变量，它们和的平均，满足

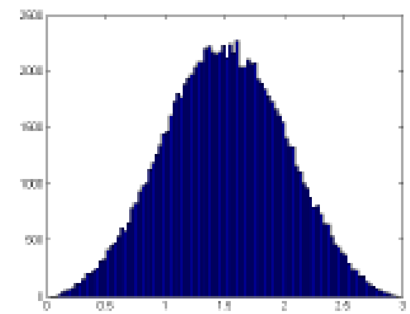
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\to \text{高斯分布}$$



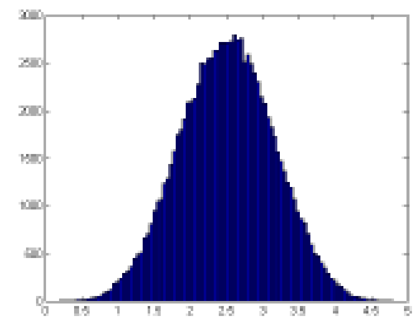
一个均匀分布



两个均匀分布之和



三个均匀分布之和

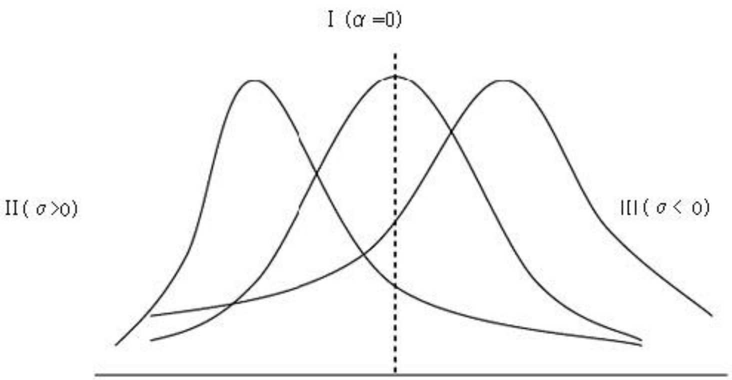


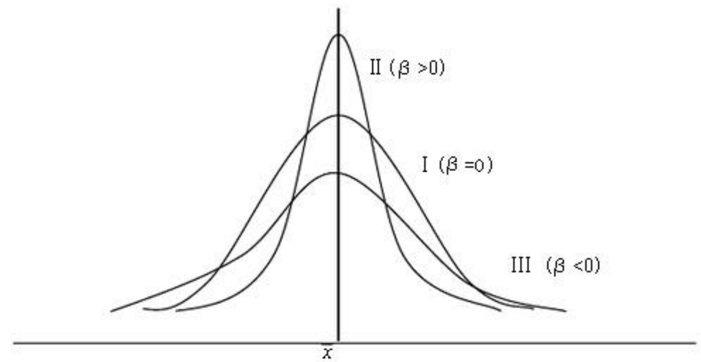
五个均匀分布之和

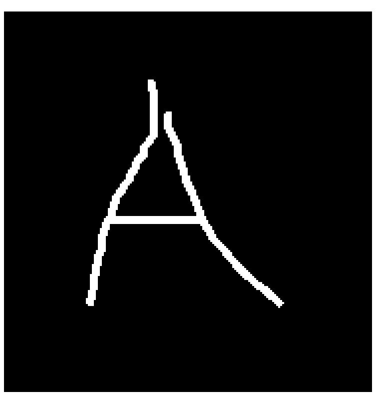
这里是否能有一个思路？

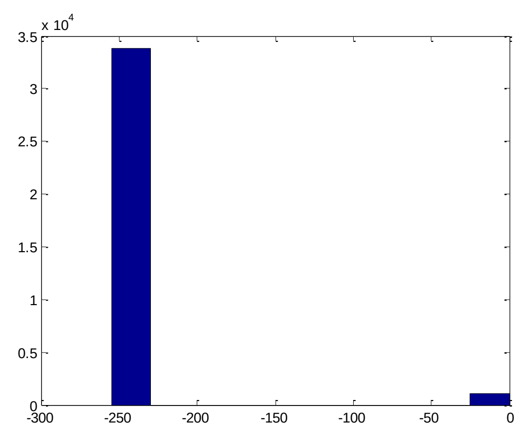
基本概念

非高斯分布示意图









基本概念

偏度的概念

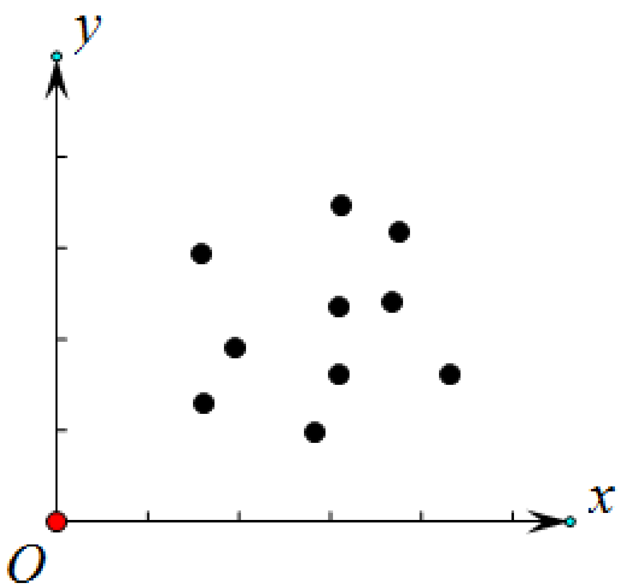
$$Skewness(\mathbf{x}) = \frac{E(x_i - \overline{x})^3}{\sigma^3} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^3}{Var(\mathbf{x})^{3/2}}$$

峭度的概念

$$Kurtosis\left(\mathbf{x}\right) = \frac{E\left(x_i - \overline{x}\right)^4}{\sigma^4} - 3 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \overline{x}\right)^4}{Var\left(\mathbf{x}\right)^2} - 3$$

基本概念

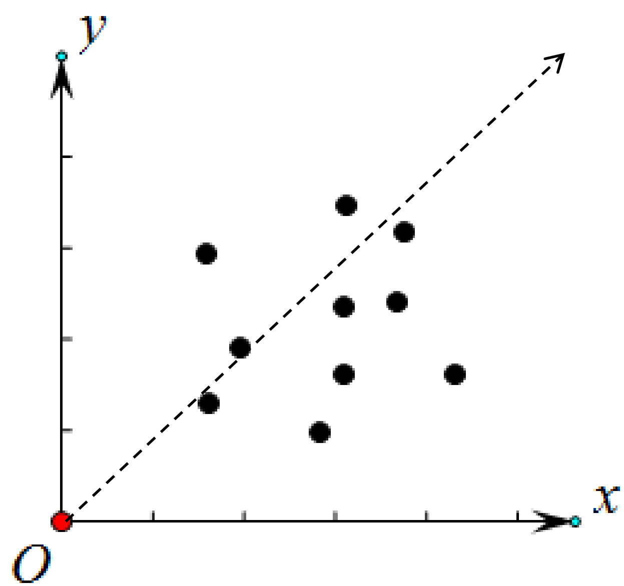
- 样本的偏度描述的是单个随机变量的三阶统计（针对的是单特征数据）。



比如对于平面上分布的这些散点我们不能说这些数据的偏度是多少！而只能说这些数据在某个方向投影之后的偏度是多少！

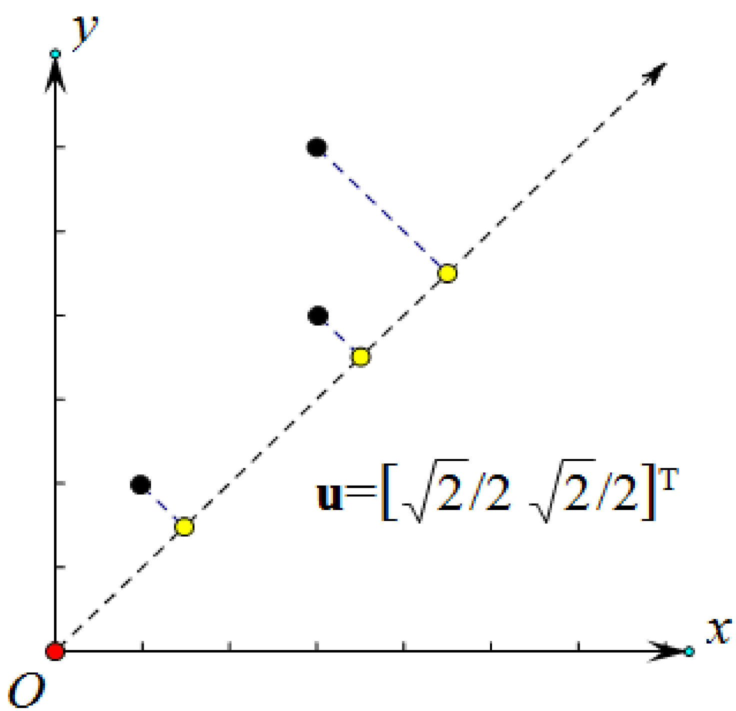
基本概念

- 任意方向偏度的计算？



基本概念

- 以平面上三个点（1,2），（3,4），（3,6）为例计算此数据在任意方向的偏度



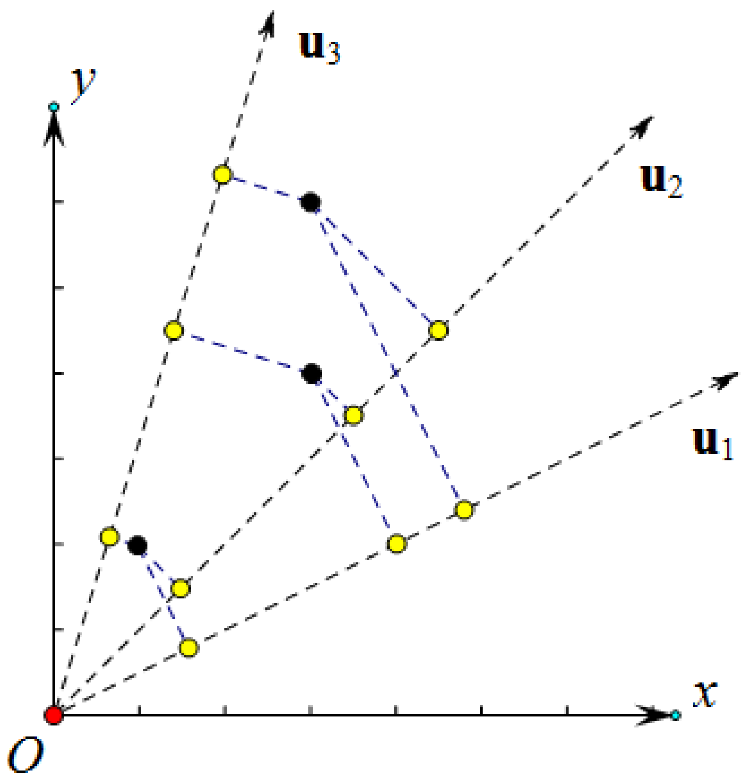
$$X=\begin{bmatrix}1 & 3 & 3\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$$

先投影，再计算偏度

skewness($\mathbf{u}^T\mathbf{X}$)

基本概念

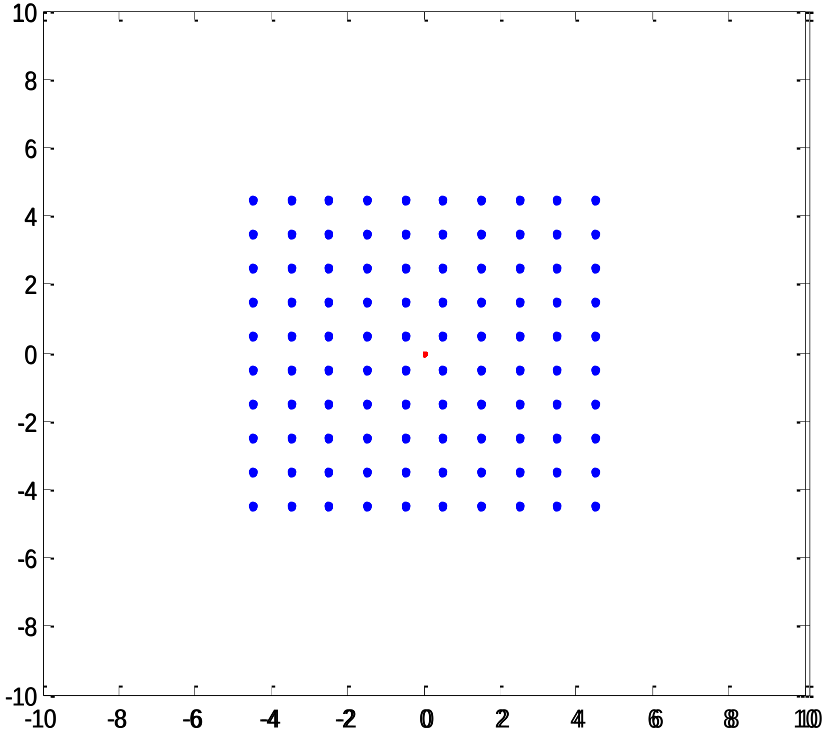
- 以平面上三个点（1,2），（3,4），（3,6）为例计算此数据在任意方向的偏度



skewness($\mathbf{u}^T\mathbf{X}$)

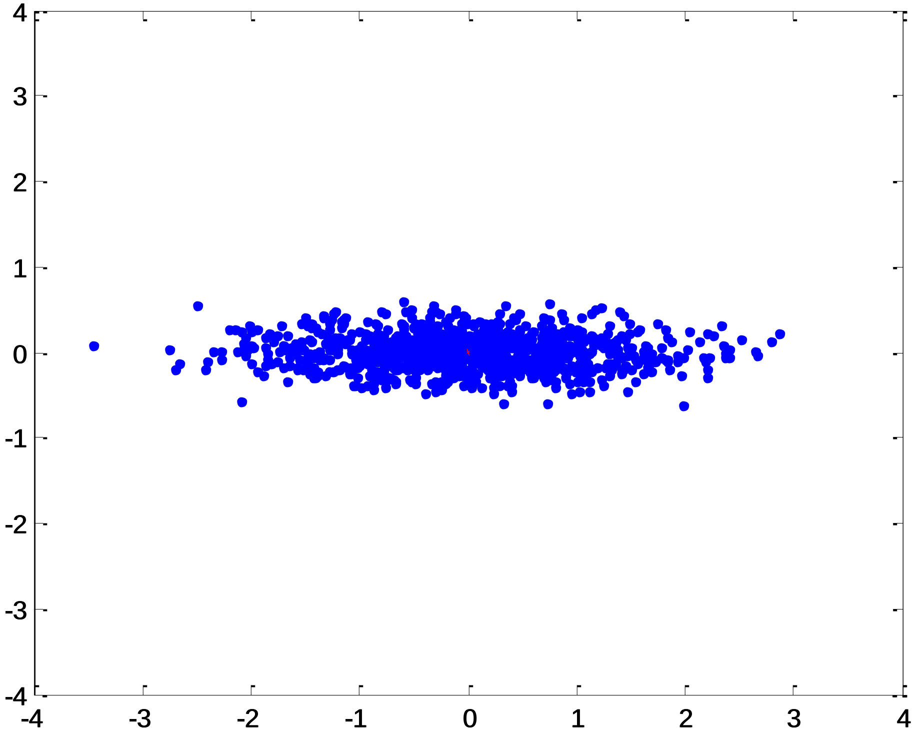
基本概念

- 估计一下该数据的各个方向的偏度情况?



基本概念

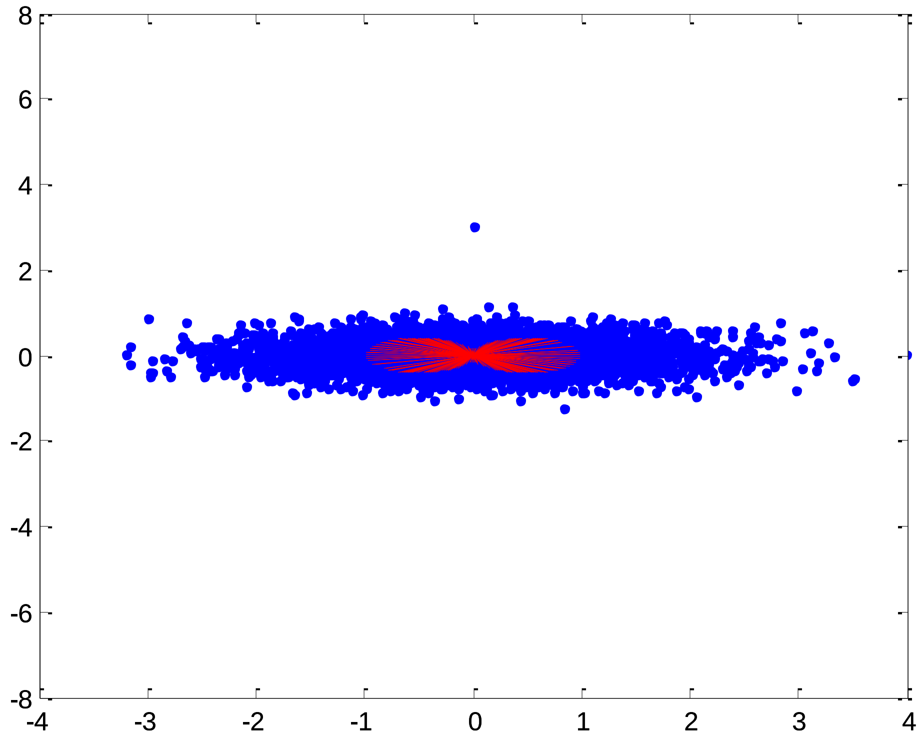
- 估计一下该数据的偏度分布情况？



高斯分布各个方向的偏度都为0!

基本概念

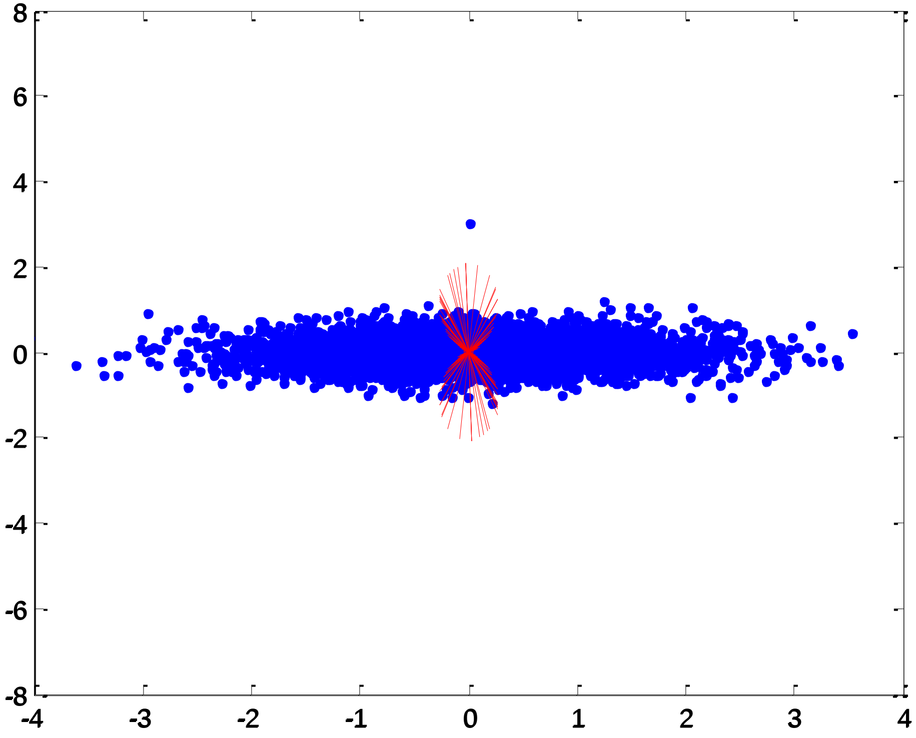
- 异常点对偏度分布的影响？



异常点的加入对方差几乎没有任何影响！

基本概念

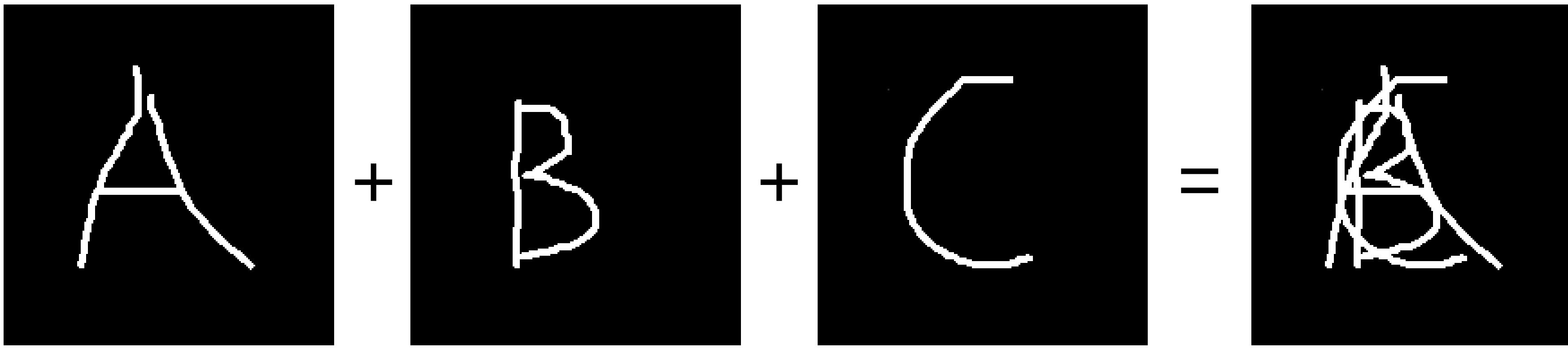
- 异常点对偏度分布的影响



异常点的加入对偏度影响非常大！

基本概念

- 图片混合偏度分布的影响

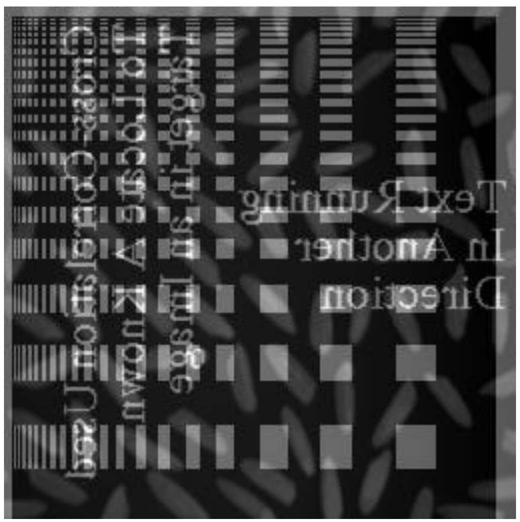
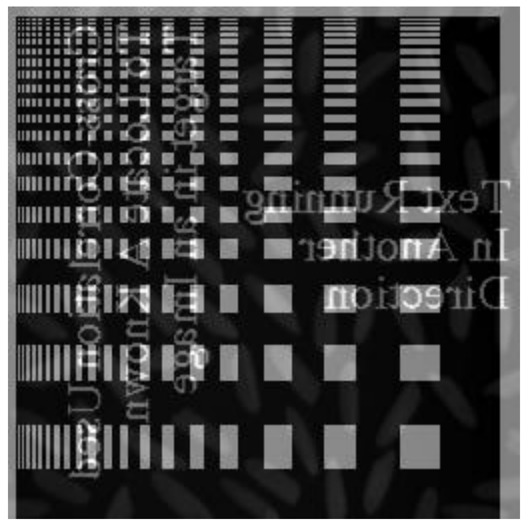
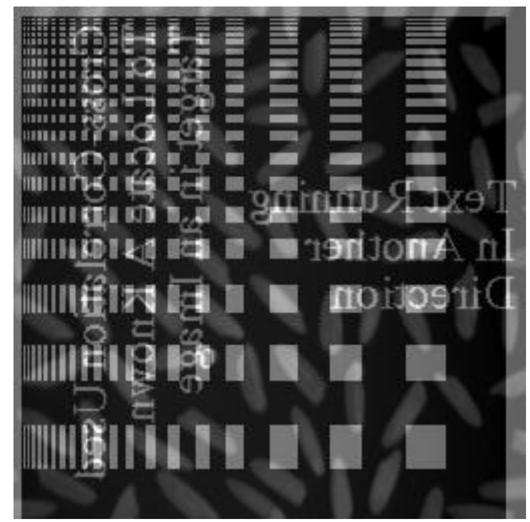


Skew=5.3306　　Skew=5.4983　　Skew=6.4594　　Skew=3.2652

它们的混合导致偏度的下降！

独立成分分析

穷举法求这三个图片线性组合极值偏度！

Matlab演示，并分析其中问题？

独立成分分析

主成分分析回顾

- 考察目标：方差
- 模型：

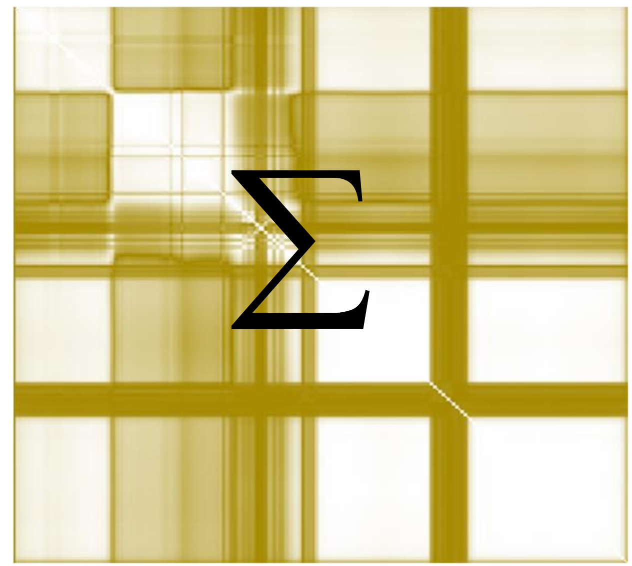
$$\begin{cases} \max\limits_{\mathbf{u}} \mathbf{u}^T \Sigma \mathbf{u} \\ \mathbf{u}^T \mathbf{u} = 1 \end{cases}$$

- 模型的解：

$$\Sigma \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$$

$$[u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_{L-1} \quad u_L]$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{L-1} \\ u_L \end{bmatrix}$$



$$\mathrm{var}(\mathbf{u}^{\mathrm{T}} \mathbf{X}) = \mathbf{u}^{\mathrm{T}} \Sigma \mathbf{u}$$

PCA给我带来最大的启示就是图像任意方向的方差可以由协方差矩阵直接表达

独立成分分析

由PCA带来的启示

- ICA中，任意方向的偏度是否也可以用某个“矩阵”表示？

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_L \end{bmatrix}=\left[\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_N\right], \qquad \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}=\left[\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_1,\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_N\right]$$

$$Skewness(\mathbf{x})=\frac{E(x_i-\bar{x})^3}{\sigma^3}=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^3}{Var(\mathbf{x})^{3/2}}$$

$$Skewness(\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})=\frac{E\left(\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_i-E\left(\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\right)\right)^3}{\sigma^3}=\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}_i-E\left(\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\right)\right)^3}{Var(\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{3/2}}$$

分母比较碍事
先把分母处理
一下！

独立成分分析

数据白化:

为了消除分母的影响，需要首先对数据进行白化

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{X},\ \text{满足}\ \mathrm{cov}\left(\hat{\mathbf{X}}\right) = \mathbf{I}$$

1.中心化 $\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{N}\mathbf{X}\mathbf{l}$ $\mathbf{X} = \mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}\mathbf{l}^{T}$

2.特征分解 $\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{N}\mathbf{X}\mathbf{X}^{T}$ $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}$

3.白化算子 $\mathbf{F} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}^{-1/2}$

$$\begin{aligned}\mathrm{cov}\left(\hat{\mathbf{X}}\right) &= \frac{1}{N}\mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{F} \\ &= \frac{1}{N}\boldsymbol{\Lambda}^{-1/2}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}^{-1/2} \\ &= \boldsymbol{\Lambda}^{-1/2}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}^{-1/2} \\ &= \boldsymbol{\Lambda}^{-1/2}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\Lambda}^{-1/2} = \mathbf{I}\end{aligned}$$

讨论：还有别的白化算子么？

独立成分分析

- 协偏度张量的引入:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{N}\mathbf{X}\mathbf{l} \quad \mathbf{X} = \mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}\mathbf{l}^T$$

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ \vdots \\ \hat{X}_L \end{bmatrix} = [\hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2, \cdots, \hat{\mathbf{r}}_N],$$

$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{X}} = \left[\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{r}}_1, \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{r}}_2, \cdots, \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{r}}_N\right]$$

$$\begin{aligned}
&Skewness\left(\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{X}}\right) \\
&= Skewness\left(\left[\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{r}}_1, \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{r}}_2, \cdots, \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{r}}_N\right]\right) \\
&= \frac{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{r}}_i - 0\right)^3}{Var(\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{X}})^{3/2}} \\
&= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\hat{\mathbf{r}}_i\right)^3 \\
&= \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\hat{\mathbf{r}}_i \circ \hat{\mathbf{r}}_i \circ \hat{\mathbf{r}}_i\right)\right) \times_1 \mathbf{u} \times_2 \mathbf{u} \times_3 \mathbf{u} \\
&= \underline{S} \times_1 \mathbf{u} \times_2 \mathbf{u} \times_3 \mathbf{u}
\end{aligned}$$

独立成分分析

主偏度分析：概念的引入

- ICA中，任意方向的偏度的解析表达

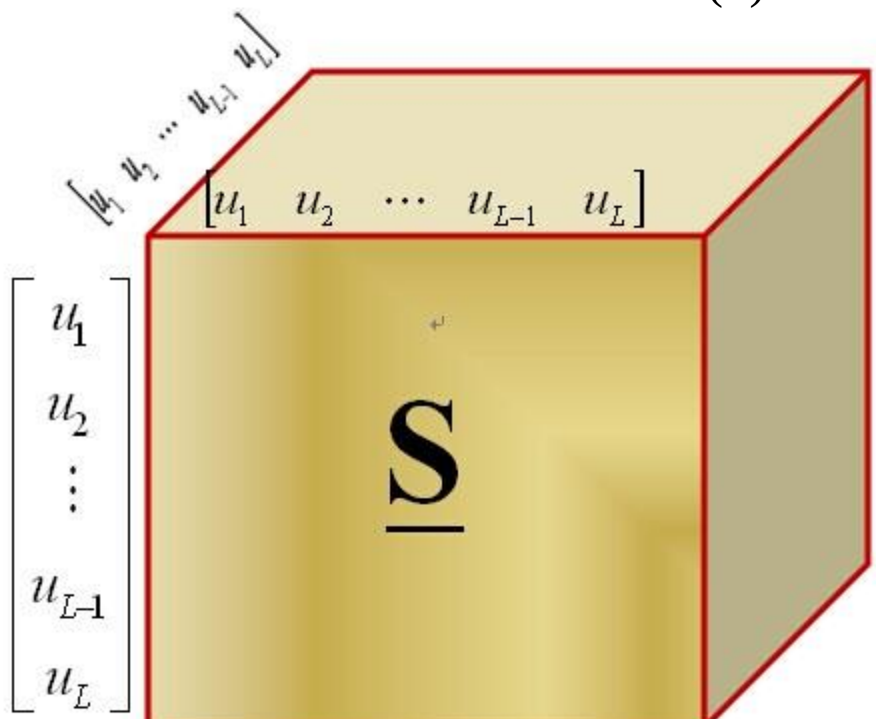
$$skewness(\mathbf{u}^T\hat{\mathbf{X}}) = \underline{\mathbf{S}} \times_1 \mathbf{u} \times_2 \mathbf{u} \times_3 \mathbf{u}$$

$$= \sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{L}\sum_{k=1}^{L} s_{ijk} u_i u_j u_k$$

$$Skewness(\mathbf{x}) = \frac{E(x_i - \bar{x})^3}{\sigma^3} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^3}{Var(\mathbf{x})^{3/2}}$$

在任意方向**u**的偏度等于用他的各个分量分别从三个方向对协偏度张量进行加权求和

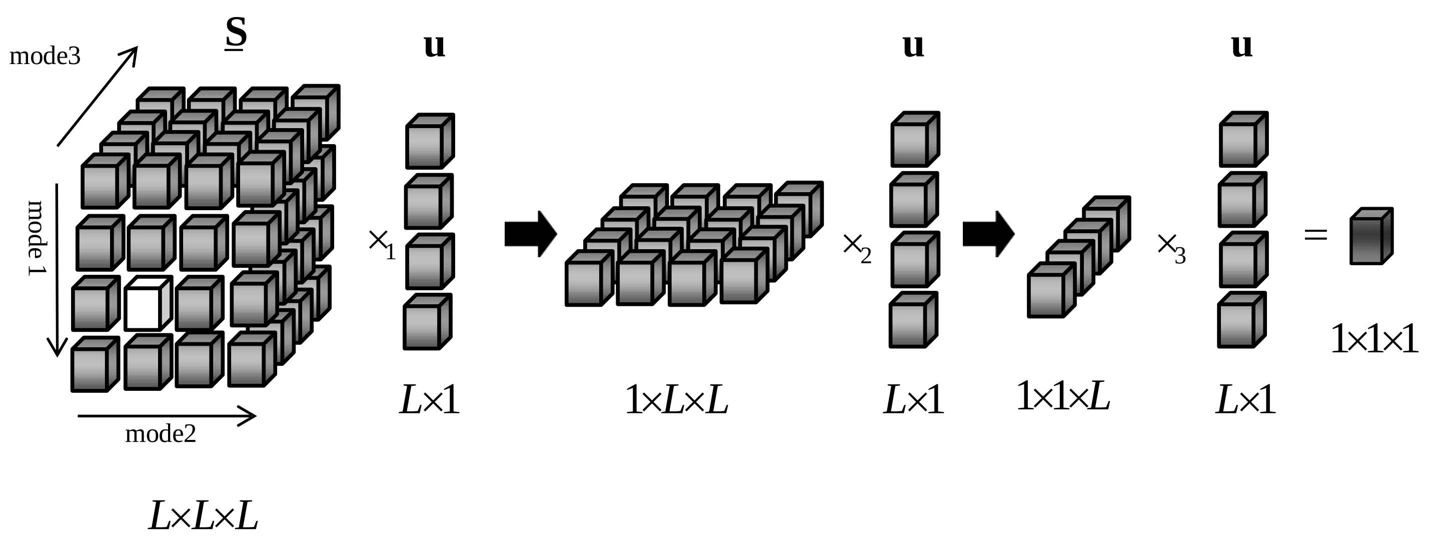
> 值得一提的是，国际上我们首先将<u>协偏度张量</u>的概念引入遥感、图像处理、信号处理社区！



独立成分分析

- 任意方向偏度计算示意图

$$skewness(\mathbf{u}^T\mathbf{X}) = \underline{\mathbf{S}} \times_1 \mathbf{u} \times_2 \mathbf{u} \times_3 \mathbf{u}$$



独立成分分析

回顾：协方差矩阵的计算

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_L \end{bmatrix}=\left[\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\cdots,\mathbf{x}_N\right],\text{假设数据已经中心化，即}X_i\mathbf{1}_N=0$$

$$\Sigma=\begin{bmatrix} \mathrm{cov}(X_1,X_1) & \cdots & \mathrm{cov}(X_1,X_L) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}(X_L,X_1) & \cdots & \mathrm{cov}(X_L,X_L) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{N}X_1X_1^{\mathrm{T}} & \cdots & \frac{1}{N}X_1X_L^{\mathrm{T}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{N}X_LX_1^{\mathrm{T}} & \cdots & \frac{1}{N}X_LX_L^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}$$

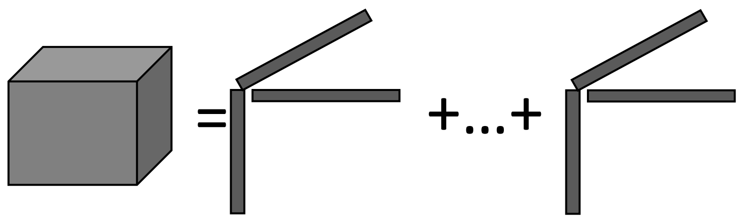
$$=\frac{1}{N}\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_L \end{bmatrix}\left[X_1^{\mathrm{T}},\cdots,X_L^{\mathrm{T}}\right]=\frac{1}{N}\mathbf{X}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{N}\left[\mathbf{x}_1,\cdots,\mathbf{x}_N\right]\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_N^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i^{\mathrm{T}}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{x}_i\circ\mathbf{x}_i$$

独立成分分析

协偏度张量的计算（外积法）：

$$\underline{\mathbf{S}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{\mathbf{r}}_i^{\,3} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{\mathbf{r}}_i \circ \hat{\mathbf{r}}_i \circ \hat{\mathbf{r}}_i$$

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{F}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \hat{X}_1 \\ \vdots \\ \hat{X}_L \end{bmatrix} = \left[\hat{\mathbf{r}}_1, \hat{\mathbf{r}}_2, \cdots, \hat{\mathbf{r}}_N\right],$$



协偏度张量的计算（内积法）：

$$s_{ijk} = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}\hat{X}_i(l)\hat{X}_j(l)\hat{X}_k(l)$$

$$s_{ijk} = s_{ikj} = s_{jik} = s_{jki} = s_{kij} = s_{kji}$$

对称张量！

$$s_{ijk} = \cos kewness\left(\hat{X}_i, \hat{X}_j, \hat{X}_k\right)$$

是$\hat{X}_i, \hat{X}_j, \hat{X}_k$的协偏度

$$s_{iii} = \cos kewness\left(\hat{X}_i, \hat{X}_i, \hat{X}_i\right)$$

是$\hat{X}_i$的偏度

独立成分分析

- 试用两种方法计算下列数据在 $\mathbf{u}=\left[\sqrt{2}/2 \quad \sqrt{2}/2\right]^{\mathrm{T}}$ 方向的偏度

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix} 1.5405 & -0.9916 & 0.2220 & -0.7709 \\ -0.5383 & -1.3727 & 0.9481 & 0.9629 \end{bmatrix}$$

方法1. 容易验证，该数据的协方差矩阵为单位阵

$$\Sigma=\frac{1}{4}\mathbf{X}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

该数据在 $\mathbf{u}$ 方向的投影为

$$Y=\mathbf{u}^{T}\mathbf{X}=\begin{bmatrix} 0.7087 & -1.6718 & 0.8274 & 0.1358 \end{bmatrix}=\mathbf{y}^{\mathrm{T}}$$

投影后数据的偏度为

$$Skewness(\mathbf{y})=\frac{\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(y_i-\bar{y})^3}{Var(\mathbf{y})^{3/2}}=-0.9369$$

独立成分分析

- 试用两种方法计算下列数据在 $\mathbf{u}=\left[\sqrt{2}/2 \quad \sqrt{2}/2\right]^{\mathrm{T}}$ 方向的偏度

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix} 1.5405 & -0.9916 & 0.2220 & -0.7709 \\ -0.5383 & -1.3727 & 0.9481 & 0.9629 \end{bmatrix}$$

方法2.该数据的协偏度张量为

$$\underline{\mathbf{S}}(:,:,1)=\begin{bmatrix} 0.5584 & -0.5020 \\ -0.5020 & -0.4843 \end{bmatrix} \qquad \underline{\mathbf{S}}(:,:,2)=\begin{bmatrix} -0.5020 & -0.4843 \\ -0.4843 & -0.2494 \end{bmatrix}$$

因此数据在 $\mathbf{u}$ 方向的偏度为

$$\underline{\mathbf{S}}\times_1\mathbf{u}\times_2\mathbf{u}\times_3\mathbf{u}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 sum\left(\underline{\mathbf{S}}\right)=-0.9369$$

独立成分分析

实践题（3分）

如何快速构建数据的协偏度张量?请尝试自己用Matlab编程实现。函数统一为S=Tensor（X）的形式，返回的S是一个L*L*L的三阶张量，其中输入参数X为L*N的矩阵。

打分标准（一般模式，挑战模式）
一般模式（默认）：
结果正确，且速度可接受，1分
结果正确，且速度与我的程序相当，2分
结果正确，且速度明显优于我的程序，3分
挑战模式（可选）：
结果正确，分数=round（$3t_0/t_1$）,其中t_0 , t_1 分别是我，你程序的运行时间。Round是四舍五入函数。

独立成分分析

主偏度分析（PSA）

- 模型：

$$\max g(\mathbf{u}) = \underline{\mathbf{S}} \times_1 \mathbf{u} \times_2 \mathbf{u} \times_3 \mathbf{u}$$

$$s.t.\ \mathbf{u}^T \mathbf{u} = 1$$

- 协偏度张量的特征分析：

$$\underline{\mathbf{S}} \times_1 \mathbf{u} \times_3 \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$$

如何求解？

独立成分分析

主偏度分析（PSA）

- 协偏度张量的特征分析：

$$\underline{\mathbf{S}} \times_1 \mathbf{u} \times_3 \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$$

固定点法求解（思考？）：

$$\mathbf{u} = \underline{\mathbf{S}} \times_1 \mathbf{u} \times_3 \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|}$$

独立成分分析

主偏度分析（PSA）

- 协偏度张量的特征分析：

$$\underline{\mathbf{S}} \times_1 \mathbf{u} \times_3 \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$$

特征对的个数：

阶数为m，维数为n的超对称张量实特征对的个数最多不超过[Cartwright, 2012]

$$M(m,n) = \frac{(m-1)^n - 1}{m-2}$$

独立成分分析

如何得到第二个成分（PCA）

- 正交投影法

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^{\#}, \quad \mathbf{X}_1 = \mathbf{P}_1\mathbf{X}$$

$$\Sigma_1 = \frac{1}{N}\mathbf{X}_1\mathbf{X}_1^{\mathrm{T}} = \mathbf{P}_1\Sigma\mathbf{P}_1$$

$$= \mathbf{\Sigma} \times_1 \mathbf{P}_1 \times_2 \mathbf{P}_1$$

$$\Sigma_1\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$$

- Deflation法

$$\Sigma_1 = \Sigma - \lambda_1\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^{\mathrm{T}}$$

$$\Sigma_1\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$$

试讨论用这两个方法得到的第二个成分，与直接利用下式得到的第二个成分是否一致？

$$\Sigma\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$$

独立成分分析

如何得到第二个成分（PCA）

- Kronecker正交补法

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \left(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1\right)\left(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1\right)^{\#}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_1 = unvec\left(\mathbf{P}_1 vec\left(\boldsymbol{\Sigma}\right)\right)$$

$$\Sigma_1 \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$$

Kronecker正交补法与前两种方法等价

$$vec\left(\mathbf{ABC}\right) = \left(\mathbf{C}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{A}\right) vec\left(\mathbf{B}\right)$$

$$\left(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}\right)\left(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}\right) = \mathbf{AC} \otimes \mathbf{BD}$$

$$\left(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \otimes \mathbf{B}^{\mathrm{T}}$$

独立成分分析

如何得到第二个成分（PSA）

- 正交投影法

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^{\#}, \qquad \mathbf{X}_1 = \mathbf{P}_1\hat{\mathbf{X}}$$

$$\underline{\mathbf{S}}_1 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\mathbf{P}_1\hat{\mathbf{r}}_i)^3 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{P}_1\hat{\mathbf{r}}_i \circ \mathbf{P}_1\hat{\mathbf{r}}_i \circ \mathbf{P}_1\hat{\mathbf{r}}_i$$

$$= \underline{\mathbf{S}} \times_1 \mathbf{P}_1 \times_2 \mathbf{P}_1 \times_3 \mathbf{P}_1$$

$$\mathbf{u} = \underline{\mathbf{S}}_1 \times_1 \mathbf{u} \times_3 \mathbf{u}$$

- Deflation法

$$\underline{\mathbf{S}}_1 = \underline{\mathbf{S}} - \lambda_1 \mathbf{u}_1 \circ \mathbf{u}_1 \circ \mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{u} = \underline{\mathbf{S}}_1 \times_1 \mathbf{u} \times_3 \mathbf{u}$$

试讨论用这两个方法得到的第二个成分是否一致？

独立成分分析

如何得到第二个成分（PSA）

- Kronecker正交补法

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \left(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1\right)\left(\mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1 \otimes \mathbf{u}_1\right)^{\#}$$

$$\underline{\mathbf{S}}_1 = tensor\left(\mathbf{P}_1 vec\left(\underline{\mathbf{S}}\right)\right)$$

$$\mathbf{u} = \underline{\mathbf{S}}_1 \times_1 \mathbf{u} \times_3 \mathbf{u}$$

Kronecker正交补法与Deflation法等价？

独立成分分析

主偏度变换预处理：

1. 计算数据的均值向量且将数据中心化:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{n}\mathbf{X}\mathbf{l} \qquad \mathbf{X} = \mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}\mathbf{l}^T$$

2.计算协方差矩阵： $\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{n}\mathbf{X}\mathbf{X}^T$

3.计算协方差矩阵的特征值与特征向量：$\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{U} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}$

4.计算数据的白化算子：$\mathbf{F} = \mathbf{U}\boldsymbol{\Lambda}^{-1/2}$

5. 对数据进行白化：$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{F}^T\mathbf{X}$

6. 计算协偏度张量： $\underline{\mathbf{S}} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{\mathbf{r}}_i^{\,3} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{\mathbf{r}}_i \circ \hat{\mathbf{r}}_i \circ \hat{\mathbf{r}}_i$

独立成分分析

主偏度变换：

1\. 计算数据的第一极值偏度方向$\mathbf{u}_1$：

$$\mathbf{u} = \underline{\mathbf{S}} \times_1 \mathbf{u} \times_3 \mathbf{u}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u} / \|\mathbf{u}\|$$

2\.消除第一个主偏度方向的影响：

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^{\#}$$

$$\hat{\mathbf{X}} \leftarrow \mathbf{P}_1 \hat{\mathbf{X}}$$

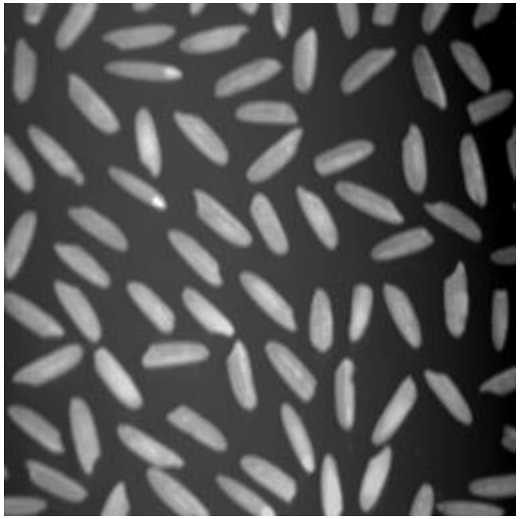
3\.计算新数据的协偏度张量$\underline{\mathbf{S}}_1$，

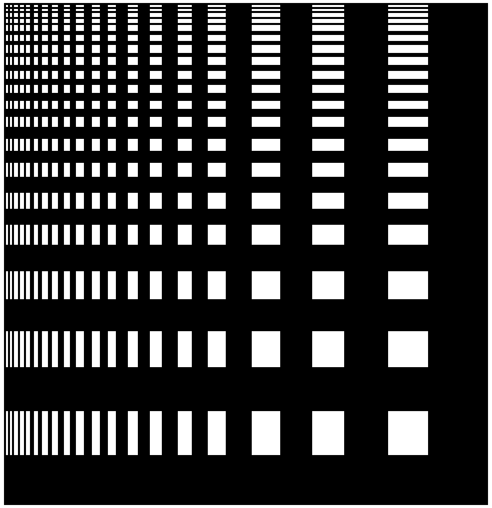
$$\underline{\mathbf{S}}_1 = \underline{\mathbf{S}} \times_1 \mathbf{P}_1 \times_2 \mathbf{P}_1 \times_3 \mathbf{P}_1$$

4\.根据不动点法求第二极值偏度方向$\mathbf{u}_2$，以此类推。

独立成分分析

主偏度分析结果





独立成分分析

PSA与FastICA比较

- FastICA

$$\mathbf{u} = E\left\{\mathbf{x}g\left(\mathbf{u}^T\mathbf{x}\right)\right\} - E\left\{g'\left(\mathbf{u}^T\mathbf{x}\right)\right\}\mathbf{u}$$

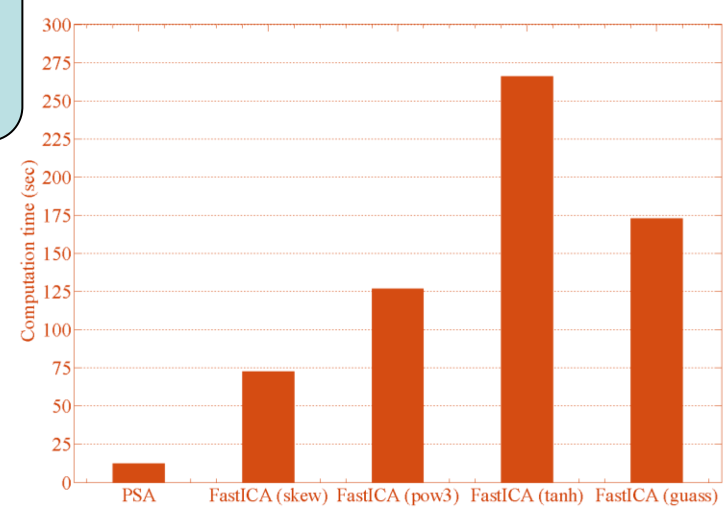
x：原始图像
$\mathbf{u}^T\mathbf{x}$：投影
g($\mathbf{u}^T\mathbf{x}$):函数计算
g’():求导
E():期望算子
……

- PSA

只涉及简单的张量向量代数运算，而与原始图像无关

$$\mathbf{u} = \underline{\mathbf{S}} \times_1 \mathbf{u} \times_3 \mathbf{u}$$

Algorithm	FastICA	PSA
Computational complexity	$2kp^2M$	$\frac{1}{3}p^3M + kp^4$

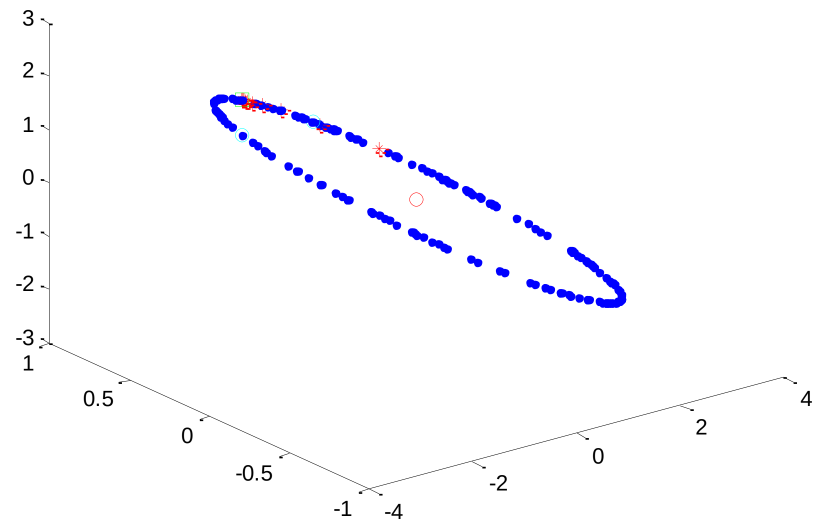


独立成分分析

- 一个现象（思考原因？）：

1. 主成分分析中，无论初值如何选取，总会收敛到全局最大方差方向：

$$\mathbf{u} = \Sigma \mathbf{u}$$



2. 主偏度分析中，任给一个初始向量，则不一定可以收敛到最大偏度方向：

$$\mathbf{u} = \underline{\mathbf{S}} \times_1 \mathbf{u} \times_3 \mathbf{u}$$

独立成分分析

- 重新考察主偏度分析的目标函数（偏度）

$$skewness(\mathbf{u}^T\mathbf{X}) = \boxed{\underline{\mathbf{S}} \times_1 \mathbf{u} \times_2 \mathbf{u} \times_3 \mathbf{u}} = \boxed{\frac{1}{N} sum\left(\left(\mathbf{u}^T\mathbf{X}\right).\hat{\ }3\right)}$$

这是*L*维特征空间的一个统计概念

这是*N*维样本空间的一个几何概念

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{1,N-1} & x_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{L1} & x_{L2} & \cdots & x_{L,N-1} & x_{LN} \end{bmatrix}$$

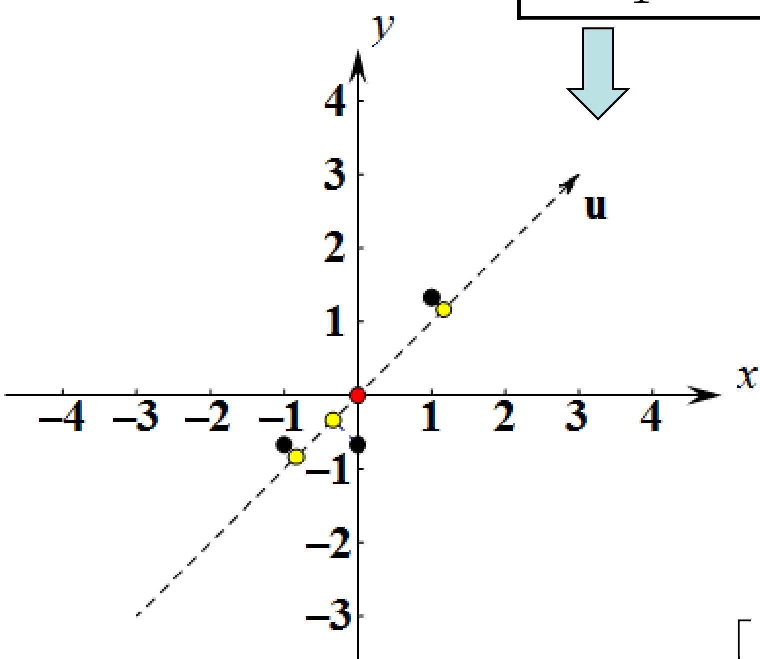
关键在于如何看待$\mathbf{X}^T\mathbf{u}$！！！

独立成分分析

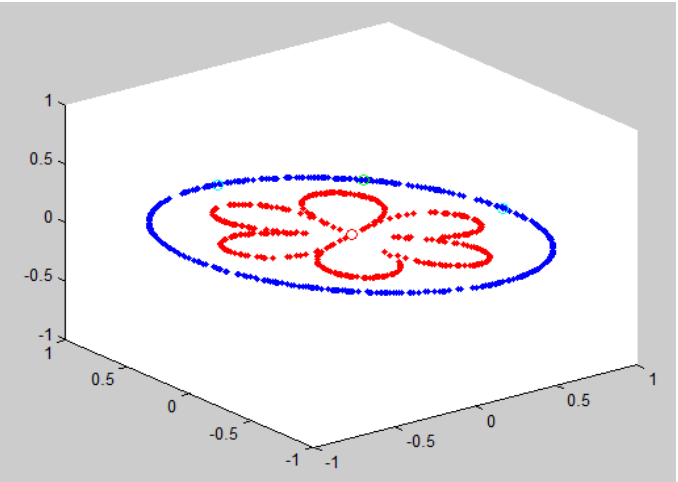
- 重新考察主偏度分析的$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xRightarrow{\text{白化}} \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0.4521 & -1.1462 & 0.6941 \\ -1.0625 & 0.1397 & 0.9228 \end{bmatrix}$

  目标函数（偏度）

$$skewness(\mathbf{u}^T\mathbf{X}) = \boxed{\underline{\mathbf{S}} \times_1 \mathbf{u} \times_2 \mathbf{u} \times_3 \mathbf{u}} = \boxed{\frac{1}{N} sum\left(\left(\mathbf{u}^T\mathbf{X}\right).\hat{\ }3\right)}$$



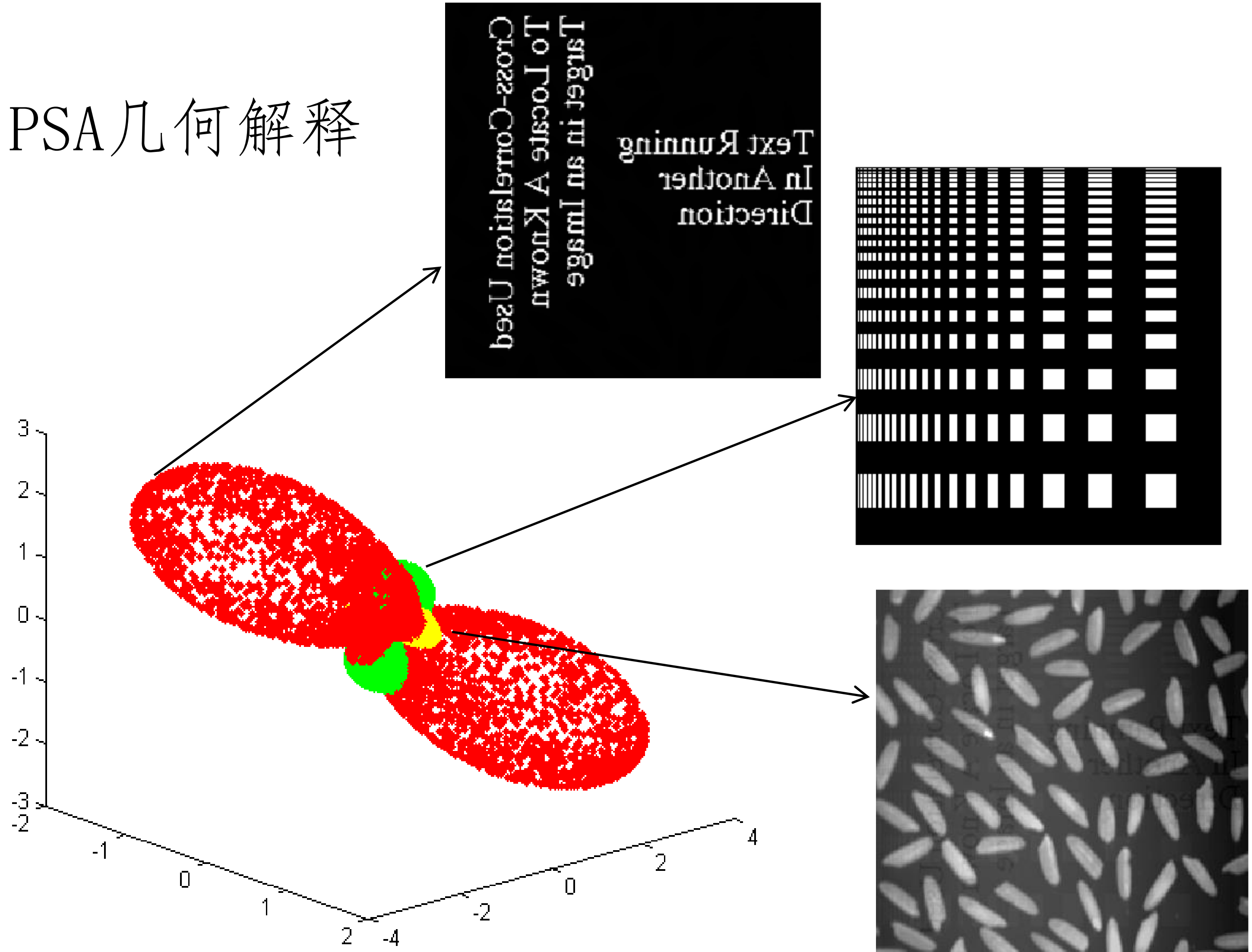
$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3]$$



$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0.4521 & -1.1462 & 0.6941 \\ -1.0625 & 0.1397 & 0.9228 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} \quad Z = \mathbf{u}^T\mathbf{X} = u_1X_1 + u_2X_2$$

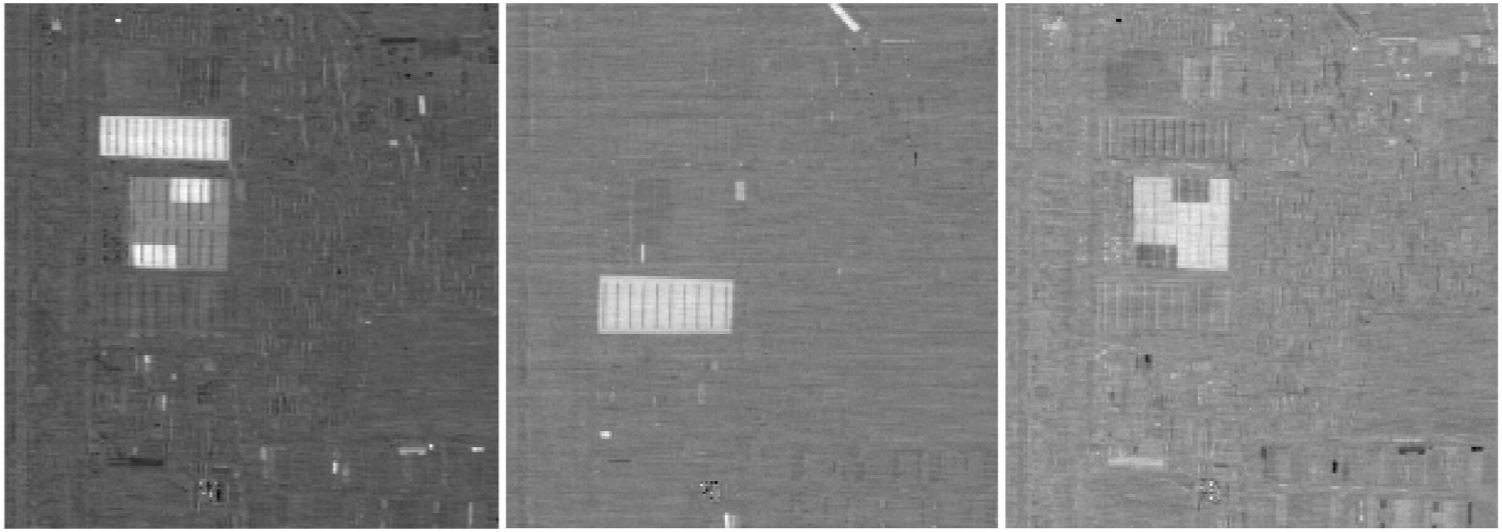
独立成分分析

- PSA几何解释



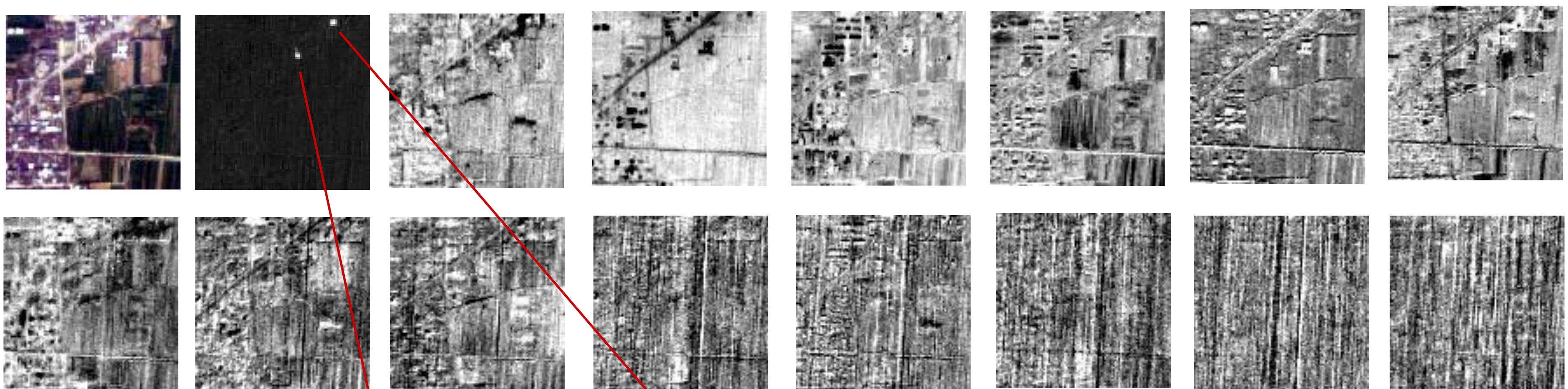
应用实例

伪装揭露：右图为真彩色合成图；下图为PSA部分结果



应用实例

小目标检测

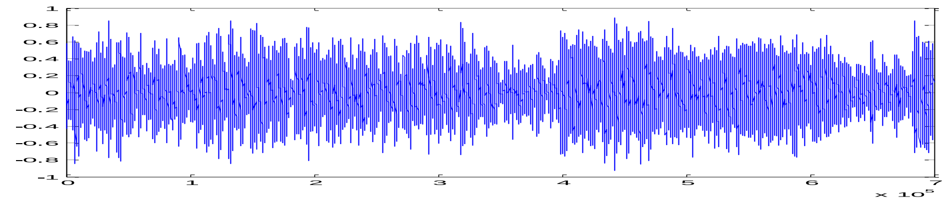


感兴趣目标出现在PSA的第一成分！

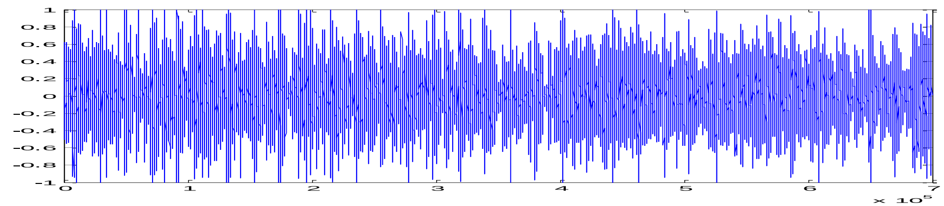
应用实例

语音识别

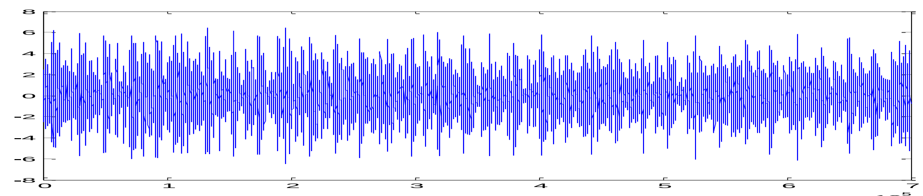
混合信号1：



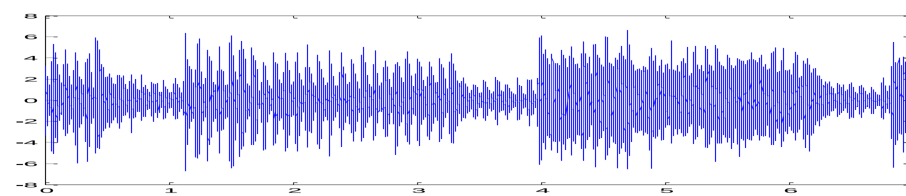
混合信号2：



复原信号1：



复原信号2：



独立成分分析

讨论

1. 偏度和量纲有关系么？
2. 白化会影响偏度么？任意的线性变换呢？
3. 协偏度张量的特征值和特征向量的含义？
4. 协偏度张量可逆么？
5. 协偏度张量存在行列式么？
6. PSA的结果和原始数据之间的关系？
7. PSA什么时候失效？

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Det}\left(\underline{\mathbf{A}}\right) = &(a_{111}^2 a_{222}^2 + a_{112}^2 a_{221}^2 + a_{121}^2 a_{212}^2 + a_{122}^2 a_{211}^2) \\
&-2(a_{111}a_{112}a_{221}a_{222} + a_{111}a_{121}a_{212}a_{222} + a_{111}a_{122}a_{211}a_{222} \\
&+a_{112}a_{121}a_{212}a_{221} + a_{112}a_{122}a_{221}a_{211} + a_{121}a_{122}a_{212}a_{211}) \\
&+4(a_{111}a_{122}a_{212}a_{221} + a_{112}a_{121}a_{211}a_{222})
\end{aligned}
$$

独立成分分析

□ 思考题

如何精确求解协偏度张量的所有特征值与特征向量？

谢　谢

耿修瑞

中国科学院空天信息创新研究院

gengxr@sina.com.cn