矩阵概述

耿修瑞

中国科学院空天信息创新研究院

gengxr@sina.com.cn

2025.2

□班级微信群

主讲教师：耿修瑞
gengxr@sina.com.cn

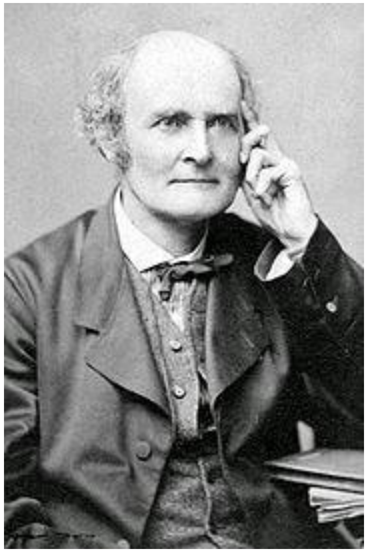
助教：申奕涵博士
yhshen07@163.com

- 矩阵的发展简介
- 矩阵的基本理解
- 矩阵的几个基本概念及应用

矩阵的发展简介

历史

矩阵的雏形最早出现在东汉前期的《九章 算术》。从莱布尼茨（Leibniz）1693年首次使用行列式开始，到1750年克莱姆（Gramer）法则问世，到1820年高斯（Gauss）提出消元法。人们还没有矩阵的概念。直到1851年，西尔维斯特（Sylvester）首先使用了矩阵一词，1855年凯莱（Cayley）给出矩阵的乘法定义，矩阵才在英国出现。在20世纪，当人们认为有限维度的矩阵已经终结的时候，计算机的出现，让矩阵代数获得新生。直到今天，矩阵代数已经成为各行各业科学家爱不释手的工具。



阿瑟.凯莱被公认为矩阵论奠基人

矩阵简介

矩阵理论主要数学家贡献

数学家	主要贡献
关孝和（日本）	行列式概念，行列式计算
莱布尼茨（德国）	行列式概念
欧拉	特征方程
克莱姆（法国）	克莱姆法则
范德蒙	范德蒙行列式
拉格朗日（法国）	特征方程，特征根
拉普拉斯（法国）	特征根
高斯（法国）	高斯消元法，矩阵乘积，矩阵的逆
柯西（法国）	行列式的矩阵表示，特征方程，对称矩阵正交变换
雅可比（德国，普鲁士）	雅克比矩阵、雅克比行列式
凯莱（英国）	矩阵论奠基人，凯莱-哈密尔顿定理，矩阵转置，矩阵之和，矩阵数乘，零矩阵，单位矩阵，矩阵乘积，逆矩阵，特征值，对称矩阵，反对称矩阵等
哈密尔顿（爱尔兰）	凯莱-哈密尔顿定理
西尔维斯特（英国）	矩阵的术语（matrix），特征根名词，西尔维斯特矩阵，对角矩阵，惯性定律
弗罗贝尼乌斯（德国）	秩、正交矩阵、相似矩阵和合同矩阵，凯莱-哈密尔顿定理
史密斯（英国）	增广矩阵
埃尔米特（法国）	埃尔米特矩阵

矩阵的基本理解

从线性方程组谈起

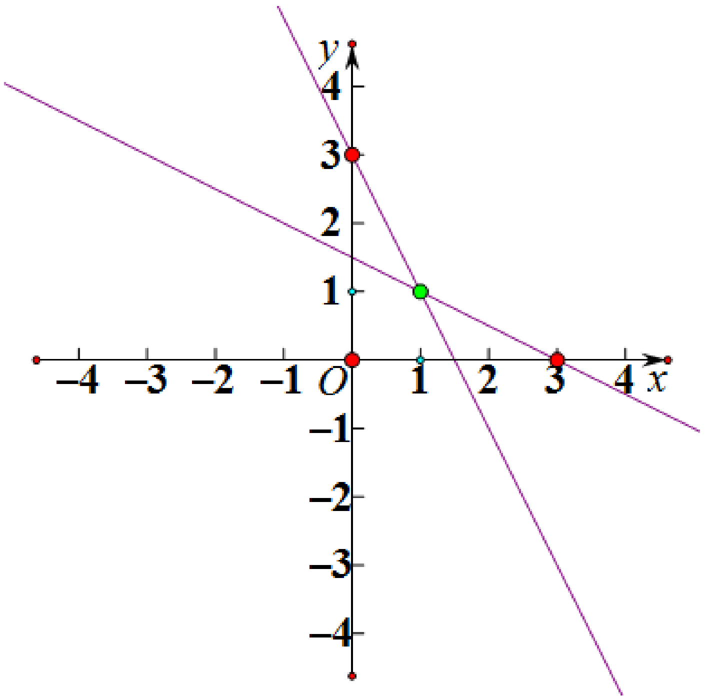
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

如何去看这个线性方程组?

矩阵的基本理解

角度1：几个方程的交集（行空间）

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$



一个问题：两个平面可以相交于一个点么?

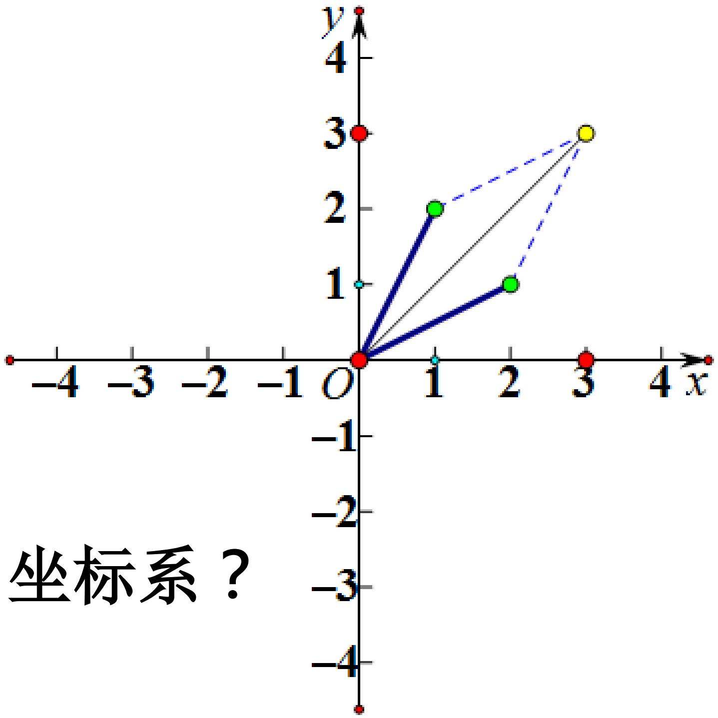
思考：方程什么时候有解？什么时候无解？什么时候有无穷多解？（高维？）

矩阵的基本理解

角度2：几个向量之间的关系（列空间）

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases}$$

$$x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$



坐标系？

思考：方程什么时候有解？什么时候无解？什么时候有无穷多解？如何判断常数向量是否在系数矩阵的列空间？

矩阵的基本理解

角度3：线性变换的角度

线性变换根据值域的选择可以分为两种情形！
$(1) T: V \to V;\ (2) T: V \to W$
我们只考虑第一种情形

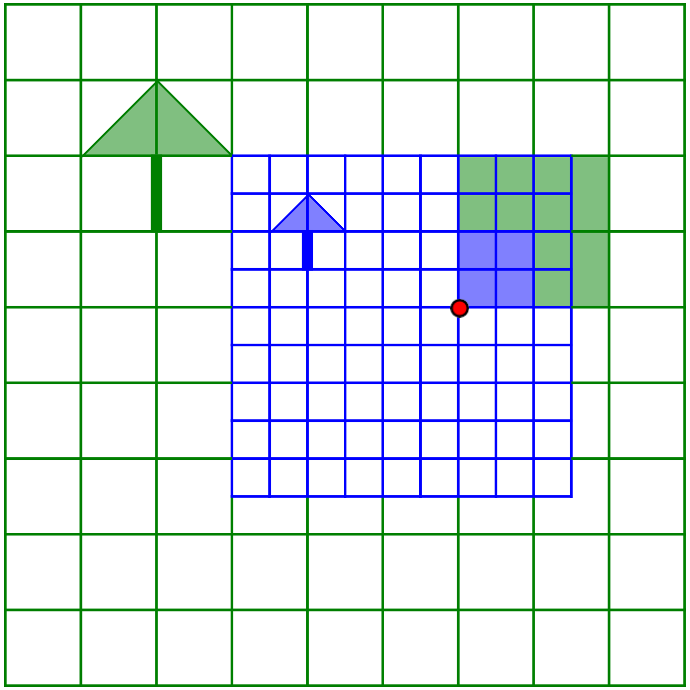
$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Linear algebra is the study of ***linear transformations*** and their algebraic properties. 陶哲轩

矩阵的基本理解

1. 缩放变换： $T(x_1, x_2) = (kx_1, kx_2)$



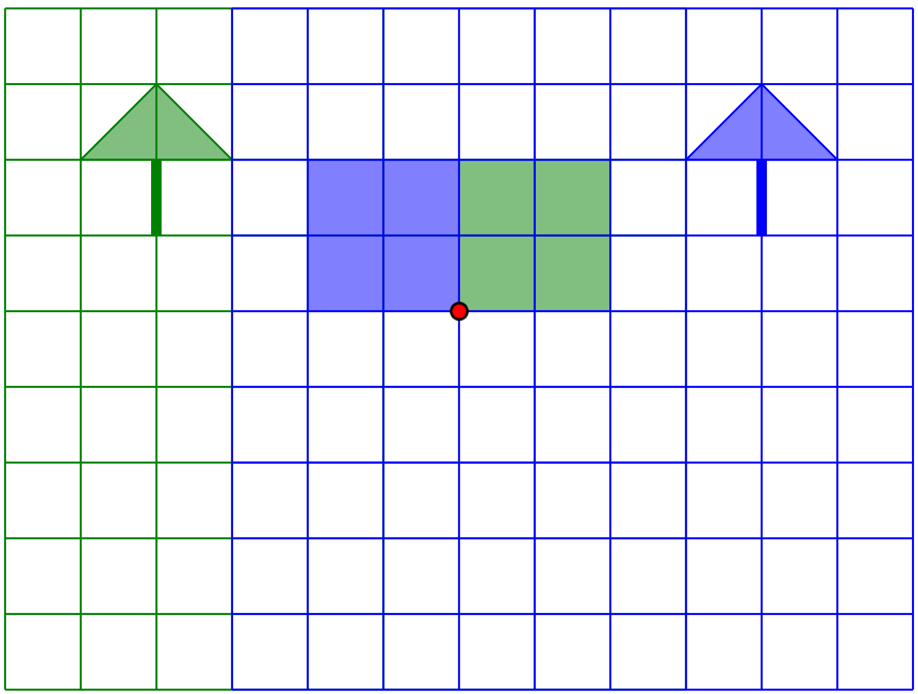
$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

$$k = 0.5$$

注意观察变换前后图形面积的变化

矩阵的基本理解

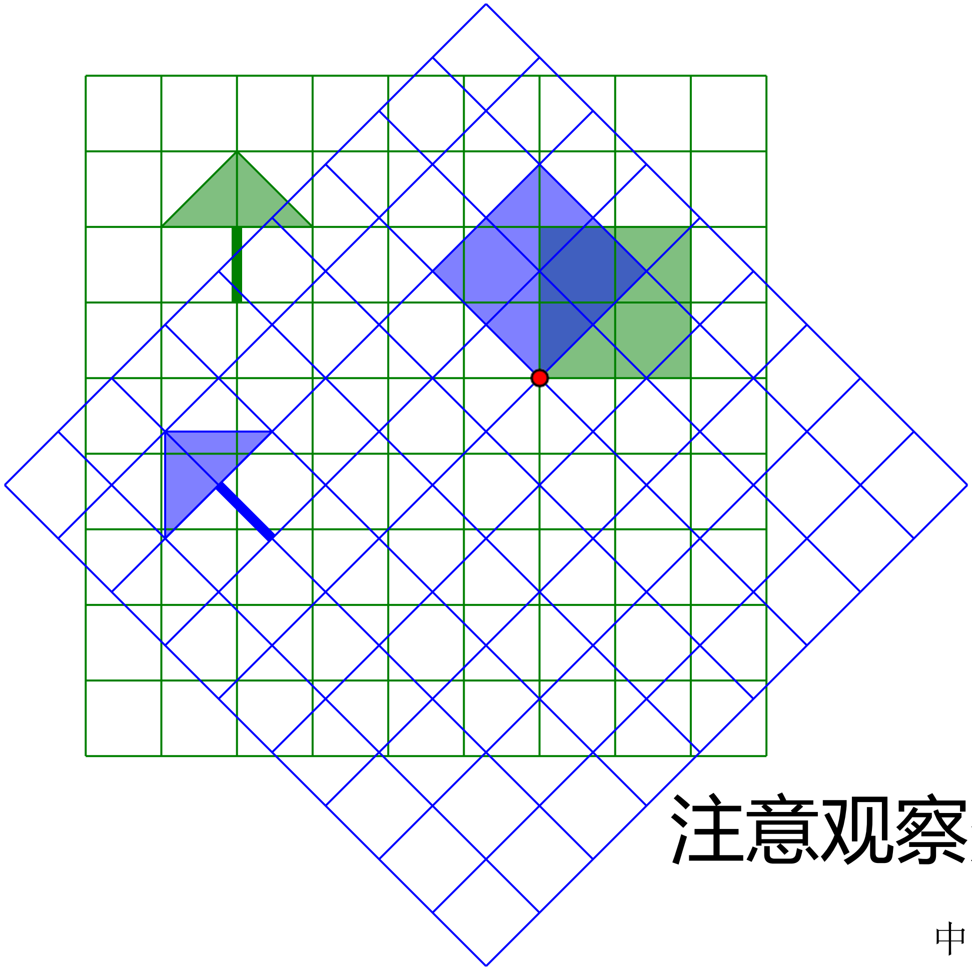
2. 反射变换： $T\left(x_1, x_2\right)=\left(-x_1, x_2\right)$



$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

矩阵的基本理解

3. 旋转变换：$T\left(x_1,x_2\right)=\left(\cos\left(\theta\right)x_1-\sin\left(\theta\right)x_2,\sin\left(\theta\right)x_1+\cos\left(\theta\right)x_2\right)$



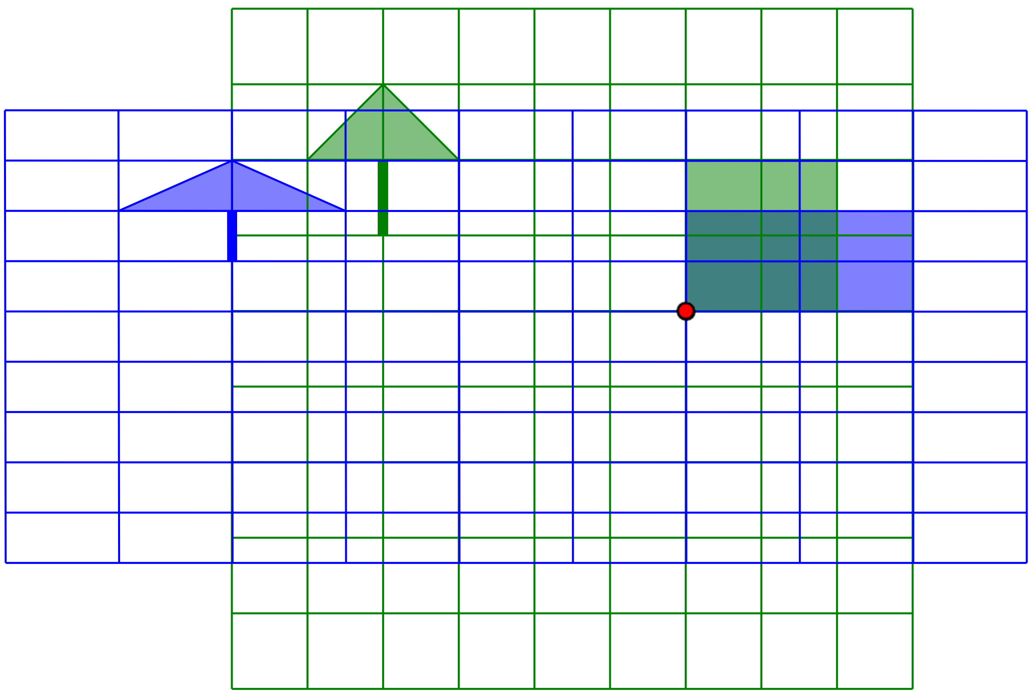
$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}\cos\left(\theta\right) & -\sin\left(\theta\right)\\ \sin\left(\theta\right) & \cos\left(\theta\right)\end{bmatrix}$$

$$\theta=\pi/4$$

注意观察变换前后图形面积的变化

矩阵的基本理解

4. 挤压变换： $T\left(x_1, x_2\right) = \left(\frac{3}{2}x_1, \frac{2}{3}x_2\right)$

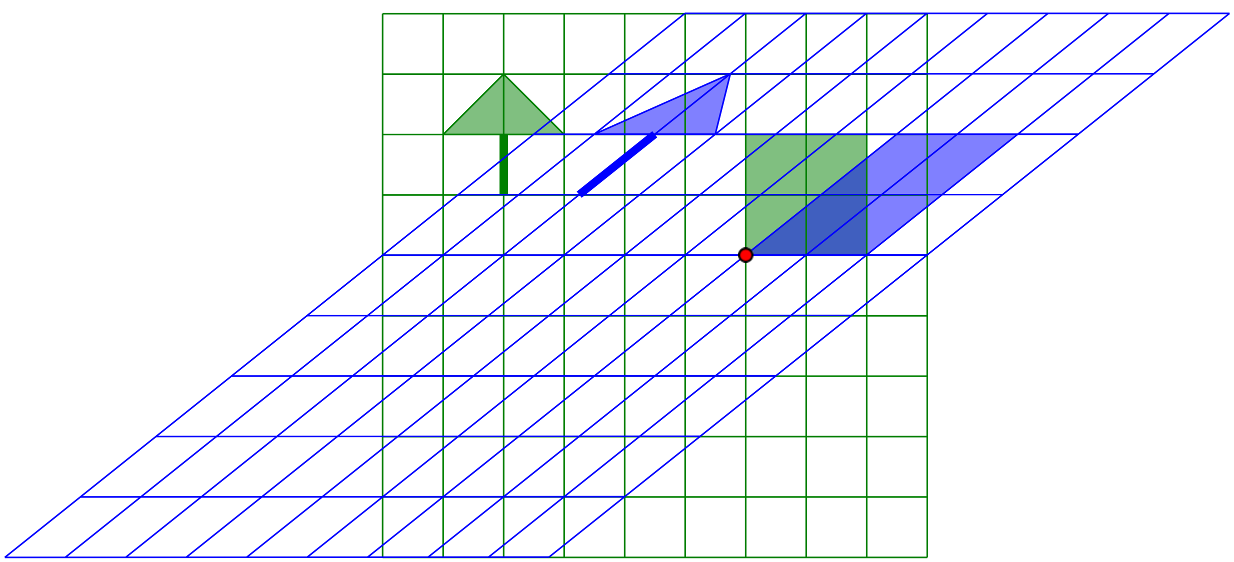


$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

注意观察变换前后图形面积的变化

矩阵的基本理解

5. 错切变换： $T\left(x_1, x_2\right) = \left(x_1 + 1.25x_2, x_2\right)$



$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1.25 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

注意观察变换前后图形面积的变化

矩阵的基本理解

- 投影变换
- 置换变换
- 移位变换
- 离散余弦变换
- 傅里叶变换
- 小波变换
- 主成分变换
- 微积分
- 卷积
- 。。。

线性变换无处不在！

矩阵的基本理解

- 讨论：自然界存在多少种线性变换?

矩阵的基本理解

- **线性变换**

线性空间上满足如下两个条件的映射，称之为线性空间上的线性变换。

$$1.\ T(k\mathbf{x}) = kT(\mathbf{x})$$

$$2.\ T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$$

讨论：平移变换是否为线性变换？

矩阵的基本理解

- 线性变换与矩阵

$$T(\mathbf{x})=T(x_1\mathbf{e}_1+x_2\mathbf{e}_2+\cdots+x_n\mathbf{e}_n)=x_1T(\mathbf{e}_1)+x_2T(\mathbf{e}_2)+\cdots+x_nT(\mathbf{e}_n)$$
$$=x_1(a_{11}\mathbf{e}_1+a_{21}\mathbf{e}_2+\cdots+a_{n1}\mathbf{e}_n)+x_2(a_{12}\mathbf{e}_1+a_{22}\mathbf{e}_2+\cdots+a_{n2}\mathbf{e}_n)+\cdots+$$
$$x_n(a_{1n}\mathbf{e}_1+a_{2n}\mathbf{e}_2+\cdots+a_{nn}\mathbf{e}_n)=(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\cdots,\mathbf{e}_n)\mathbf{Tx}$$

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

在给定一组基的情况下，有限维线性空间上的线性变换唯一对应一个矩阵。

矩阵的基本理解

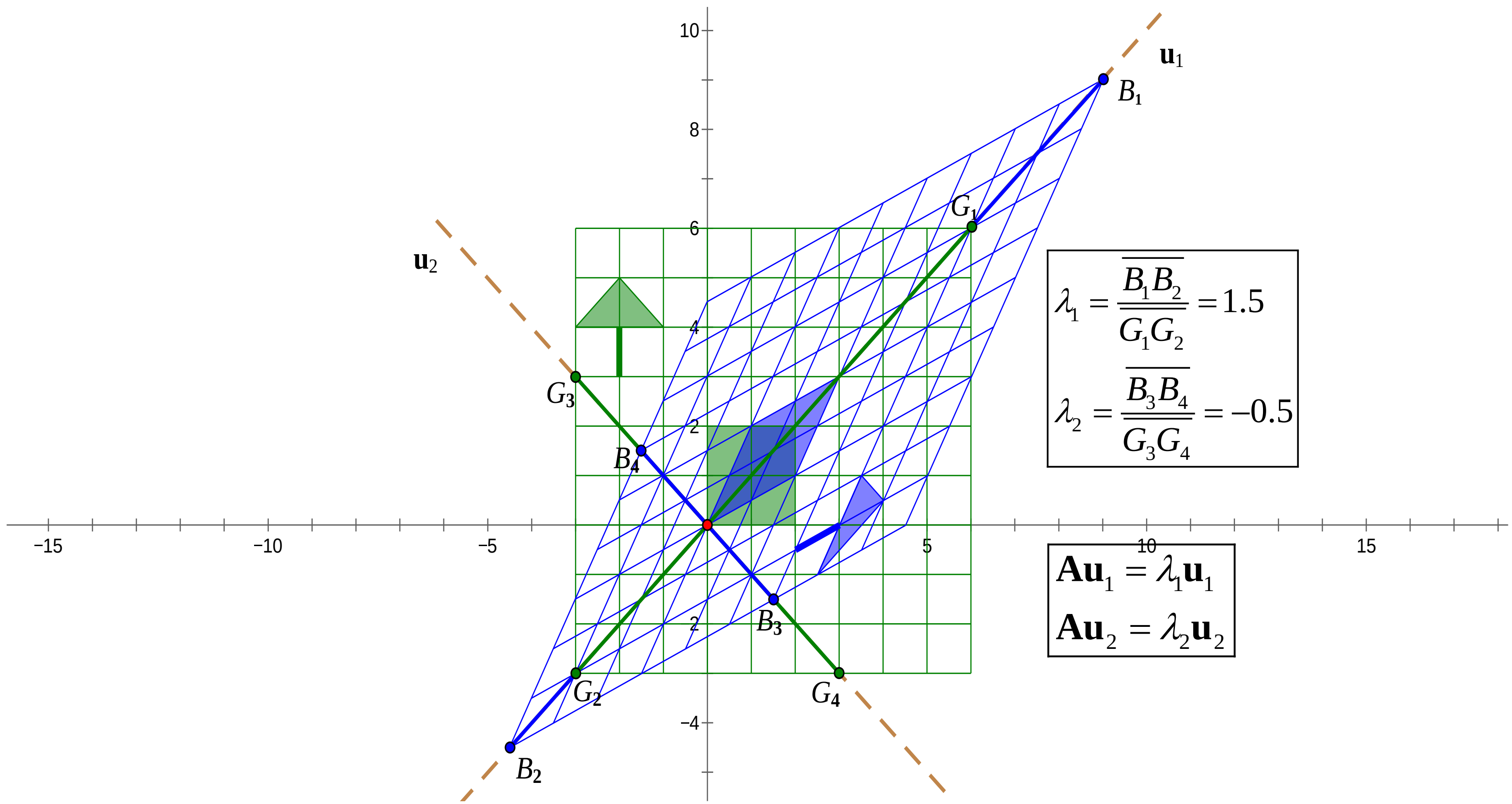
- 讨论：任意给定一个矩阵，它所对应的线性变换都具体包含哪些动作呢？

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

矩阵的基本理解

实特征值

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 1 & 0.5 \end{bmatrix}$$



$$\lambda_1 = \frac{\overline{B_1B_2}}{\overline{G_1G_2}} = 1.5$$

$$\lambda_2 = \frac{\overline{B_3B_4}}{\overline{G_3G_4}} = -0.5$$

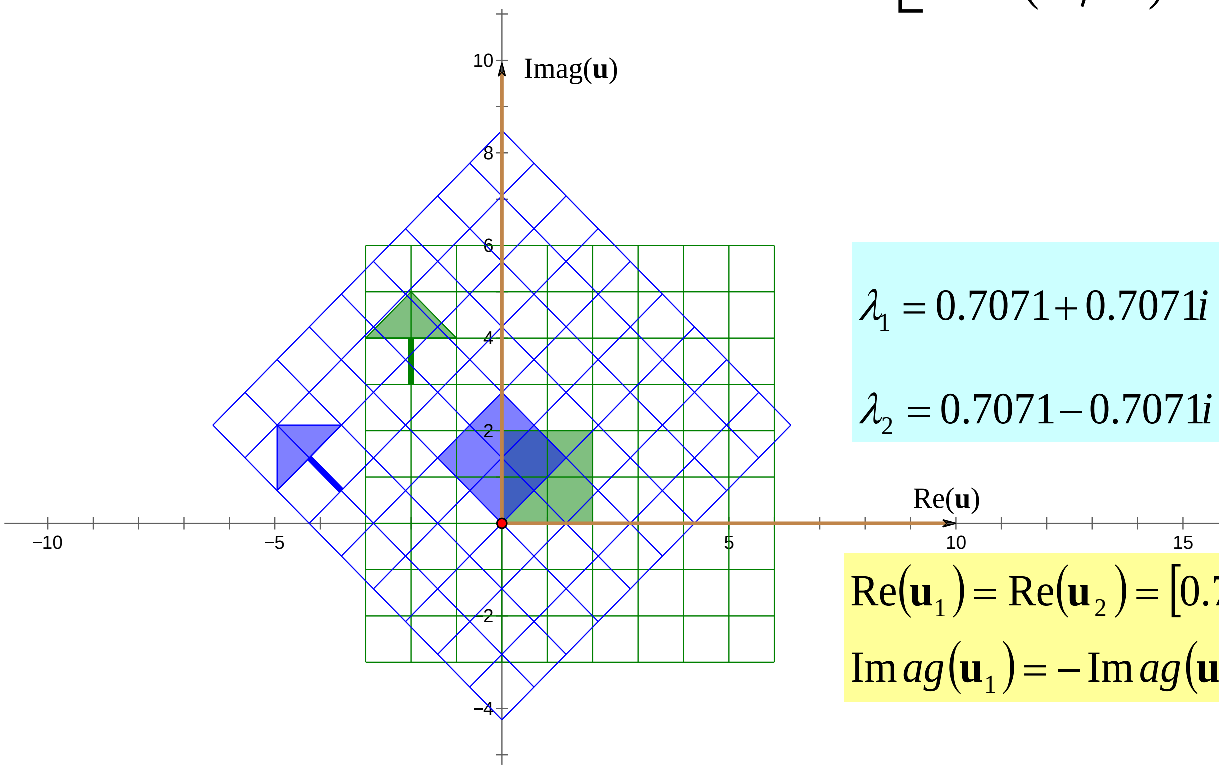
$$\mathbf{Au}_1 = \lambda_1\mathbf{u}_1$$

$$\mathbf{Au}_2 = \lambda_2\mathbf{u}_2$$

矩阵的基本理解

复特征值

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\cos(\pi/4) & -\sin(\pi/4)\\ \sin(\pi/4) & \cos(\pi/4)\end{bmatrix}$$



$$\lambda_1=0.7071+0.7071i=e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$\lambda_2=0.7071-0.7071i=e^{-\frac{\pi}{4}i}$$

$$\mathrm{Re}(\mathbf{u}_1)=\mathrm{Re}(\mathbf{u}_2)=[0.7071\quad 0]^T$$

$$\mathrm{Im}ag(\mathbf{u}_1)=-\mathrm{Im}ag(\mathbf{u}_2)=[0\quad 0.7071]^T$$

矩阵的基本理解

- 讨论

矩阵的特征值除了实数、复数还有别的数么？（基本的线性动作除了缩放，反射，旋转，还有别的么？）

矩阵的基本理解

- 讨论：任意方阵的特征根求解与代数学基本定理关系?

代数学基本定理：任何复系数一元n次多项式方程在复数域上至少有一根(n≥1)
推论：n次复系数多项式方程在复数域内有且只有n个根（重根按重数计算）。

$$p(\lambda)=\det(\mathbf{A}\text{-}\lambda\mathbf{I})=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=\alpha_0+\alpha_1\lambda+\cdots+\alpha_n\lambda^n=0$$

矩阵的基本理解

● 数的发展

Kronecker is famously reported to have said, "God created the natural numbers; all else is the work of man". The truth of this statement (literal or otherwise) is debatable; but one can certainly view the other standard number systems $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ as (iterated) completions of the natural numbers $\mathbf{N}$ in various senses. For instance:

- The integers $\mathbf{Z}$ are the additive completion of the natural numbers $\mathbf{N}$ (the minimal additive group that contains a copy of $\mathbf{N}$).
- The rationals $\mathbf{Q}$ are the multiplicative completion of the integers $\mathbf{Z}$ (the minimal field that contains a copy of $\mathbf{Z}$).
- The reals $\mathbf{R}$ are the metric completion of the rationals $\mathbf{Q}$ (the minimal complete metric space that contains a copy of $\mathbf{Q}$).
- The complex numbers $\mathbf{C}$ are the algebraic completion of the reals $\mathbf{R}$ (the minimal algebraically closed field that contains a copy of $\mathbf{R}$).

矩阵的基本理解

- 思考

  1. 基本的数与基本动作的对应

  2. 自然界中最基本的线性动作是什么?

矩阵的基本理解

- 矩阵特征值和特征向量的几何意义

(1) 可对角化矩

(2) 不可对角化矩阵

矩阵的基本理解

- 可对角化矩阵

对于任意一个$n \times n$矩阵$\mathbf{A}$，若存在一个对角矩阵$\mathbf{D}$与其相似。即总存在一个可逆矩阵$\mathbf{U}$，使得$\mathbf{A}=\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^{-1}$，则称该矩阵可对角化。

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

矩阵的基本理解

- 可对角化矩阵

(1)特征值为实数（一个特征值和一个特征向量表征一个基本的线性动作）

(2)特征值为复数（两个互为共轭的特征值和相应的两个特征向量表征一个基本的线性动作）

矩阵的基本理解

- 可对角化矩阵

对于一个可对角化的矩阵，其特征值告诉我们在这个矩阵的作用下发生了什么动作，特征向量告诉我们这些动作发生在什么地方。

矩阵的基本理解

- 不可对角化矩阵

对于任意一个$n\times n$矩阵$\mathbf{A}$，总存在一个若当矩阵$\mathbf{J}$与其相似。即总存在一个可逆矩阵$\mathbf{P}$，使得$\mathbf{A}=\mathbf{PJP}^{-1}$

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \mathbf{B}_s \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B}_i=\begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

矩阵的基本理解

- 不可对角化矩阵

当矩阵特征值的代数重数（特征值的重根个数）大于几何重数（该特征值对应的线性无关的特征向量的个数），其不可对角化。

不可对角化矩阵必然包含剪切变换，该变换需要用若干特征值和相应的广义特征向量描述

矩阵的基本理解

- 讨论：自然界存在多少种线性变换?

矩阵的基本理解

试分析如下矩阵对应的线性变换

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 0.6 & 1.4 & 3.8 & 4.2 & 2.6 \\ 0.2 & 1.8 & 0.6 & 0.4 & 0.2 \\ 0.6 & -0.6 & 0.8 & 0.2 & 0.6 \\ -0.4 & 0.4 & 0.8 & 0.2 & -0.4 \\ 0.6 & -0.6 & -1.2 & -0.8 & -1.4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}=\mathbf{PJP}^{-1}$$

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix}\mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 & \mathbf{p}_3 & \mathbf{p}_4 & \mathbf{p}_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1+i & 1-i & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-i & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & i & -i & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

矩阵的基本理解

- 讨论：一个实方阵是否可以开任意次方且结果仍为实矩阵？

矩阵的基本理解

- 思考题（2分）：如何计算如下矩阵的任意次方（比如0.5次方）

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

矩阵的基本理解

角度4：矩阵与代数结构

单个的矩阵可以描述基本的线性动作，而多个矩阵的集合可以构成各种不同的代数结构

矩阵对于加法，数乘，乘法都具有封闭性。这对后续各种结构的讨论非常关键！

矩阵的基本理解

线性空间：

域（K）上的线性空间是指一个非空集合 X，其上定义了两种运算(分别成为矢量加法和标量乘法），对于任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X, r \in K$，满足：

封闭性（Closure)

c1. 矢量加法是封闭的

c2. 标量乘法也是封闭合

加法公理

a1. 加法交换律成立

a2. 加法结合律成立

a3. 存在加法零元（零向量的存在性）

a4. 存在加法逆元（负向量的存在性）

矩阵的基本理解

线性空间：

标量乘法公理

s1. 标量乘法的结合律

s2. 标量乘法的分配律（两个）

s3. 标量单位元的存在性（标量乘法的单位律）

全体n阶矩阵构成线性空间！

矩阵的基本理解

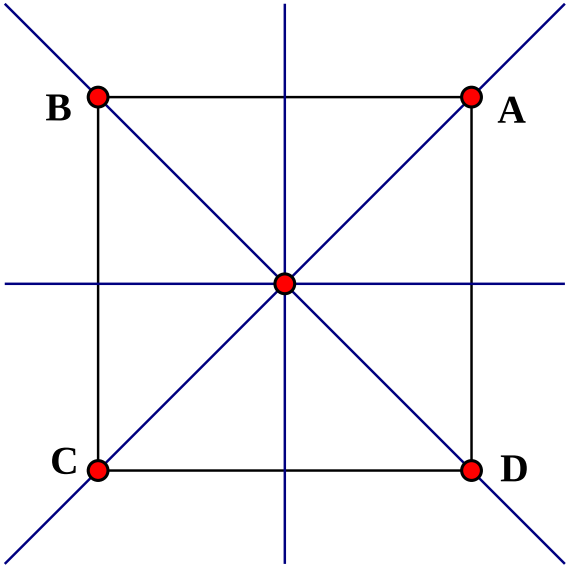
- 群：

群表示一个拥有满足封闭性、满足结合律、有单位元、有逆元的二元运算的代数结构。

全体n阶可逆矩阵构成群！

矩阵的基本理解

讨论：如何用矩阵描述以下正方形的对称性?

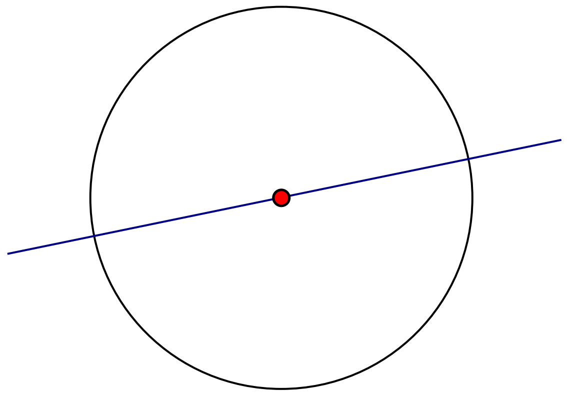


$$\mathbf{I}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\quad \mathbf{Q}_1=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}\quad \mathbf{Q}_2=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}\quad \mathbf{Q}_3=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\quad \mathbf{R}_2=\begin{bmatrix}-1&0\\0&1\end{bmatrix}\quad \mathbf{R}_3=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\quad \mathbf{R}_4=\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}$$

矩阵的基本理解

讨论：如何用矩阵描述以下圆形的对称性?



连续对称！

矩阵的基本理解

- 李群：

一个李群G是一个微分流形同时也是一个群，且群乘积映射：$G \times G \to G$ 以及它的逆映射是可微的。

全体n阶可逆矩阵构成李群!

矩阵的基本理解

代数:

一个域K上的代数是该域上带有如下乘法映射的线性空间 (X) $\mu: X\times X\to X$，对任意的 $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in X, r\in K$，该映射满足:

$$1.(\mathbf{x}\times\mathbf{y})\times\mathbf{z}=\mathbf{x}\times(\mathbf{y}\times\mathbf{z})$$

$$2.(\mathbf{x}+\mathbf{y})\times\mathbf{z}=\mathbf{x}\times\mathbf{z}+\mathbf{y}\times\mathbf{z}\ \textit{and}\ \mathbf{x}\times(\mathbf{y}+\mathbf{z})=\mathbf{x}\times\mathbf{y}+\mathbf{x}\times\mathbf{z}$$

$$3.\ r(\mathbf{x}\times\mathbf{y})=(r\mathbf{x})\times\mathbf{y}=\mathbf{x}\times(r\mathbf{y})$$

全体n阶矩阵构成代数!

大多数常见的函数空间构成代数

矩阵的基本理解

李代数:

一个有限维李代数是一个线性空间X，加上一个从$X \times X$到X的满足如下性质的映射[ ]

$1.[\ ]$是双线性的.

$2.[\mathbf{x},\mathbf{y}]=-[\mathbf{y},\mathbf{x}]$, 对于任意的$\mathbf{x},\mathbf{y}\in X$

$3.\left[\mathbf{x},[\mathbf{y},\mathbf{z}]\right]+\left[\mathbf{y},[\mathbf{z},\mathbf{x}]\right]+\left[\mathbf{z},[\mathbf{x},\mathbf{y}]\right]=\mathbf{0}$

对于任意的$\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in X$

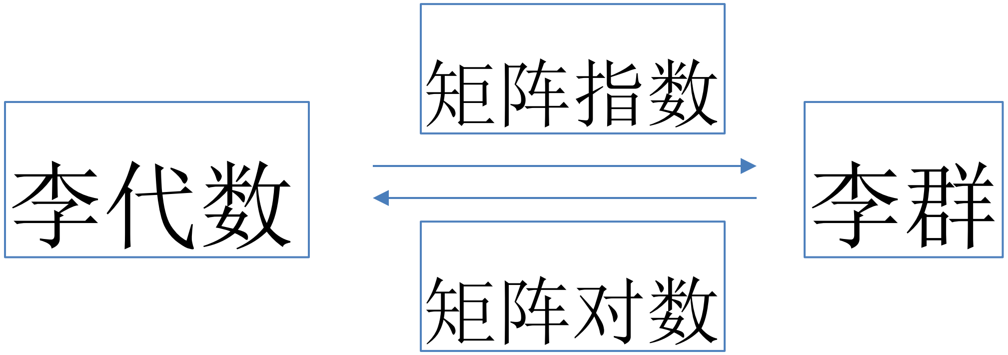
$[\mathbf{x},\mathbf{y}]=\mathbf{xy}-\mathbf{yx}$

全体n阶矩阵构成李代数!

但大多数常见的函数空间并不构成李代数

矩阵的基本理解

- 矩阵李群和矩阵李代数的关系



矩阵的基本理解

几个常用的例子：

- 一般线性群 $GL(n;R)$ 为矩阵李群，其矩阵李代数为所有 n 阶实矩阵的集合 $gl(n;R)$
- 特殊线性群 $SL(n;R)$ 为矩阵李群，其矩阵李代数为所有迹为0的 n 阶实矩阵 $sl(n;R)$
- 正交群 $O(n)$ 为矩阵李群，其矩阵李代数为所有的 n 阶反对称矩阵 $so(n)$ （0和1）

矩阵的基本理解

（1）每一个紧李群都同构于一个矩阵李群！

（2）每一个李代数都同构于一个矩阵李代数！

Theorem 3.31 (Ado). *Every finite-dimensional real Lie algebra is isomorphic to a subalgebra of* $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{R})$. *Every finite-dimensional complex Lie algebra is isomorphic to a (complex) subalgebra of* $\mathfrak{gl}(n;\mathbb{C})$.

矩阵的基本理解

讨论:

1. 矩阵之间可以加减，对应什么代数结构?
2. 矩阵可以具有F范数，对应什么代数结构?
3. 两个矩阵之间可以计算距离，对应什么代数结构?
4. 矩阵之间可以计算内积，对应什么代数结构?
5. 矩阵之间可以计算角度，对应什么代数结构?
6. 矩阵之间可以相乘，对应什么代数结构?
7. 可逆矩阵的全体构成开集，对应什么代数结构?
8. 矩阵的李括号运算，对应什么代数结构?

每一种运算都是相应的代数结构赋予的！尝试从代数结构的角度重新审视我们小学时学过的加减乘除！

矩阵的基本理解

讨论：我们生存的三维空间具有什么代数结构?

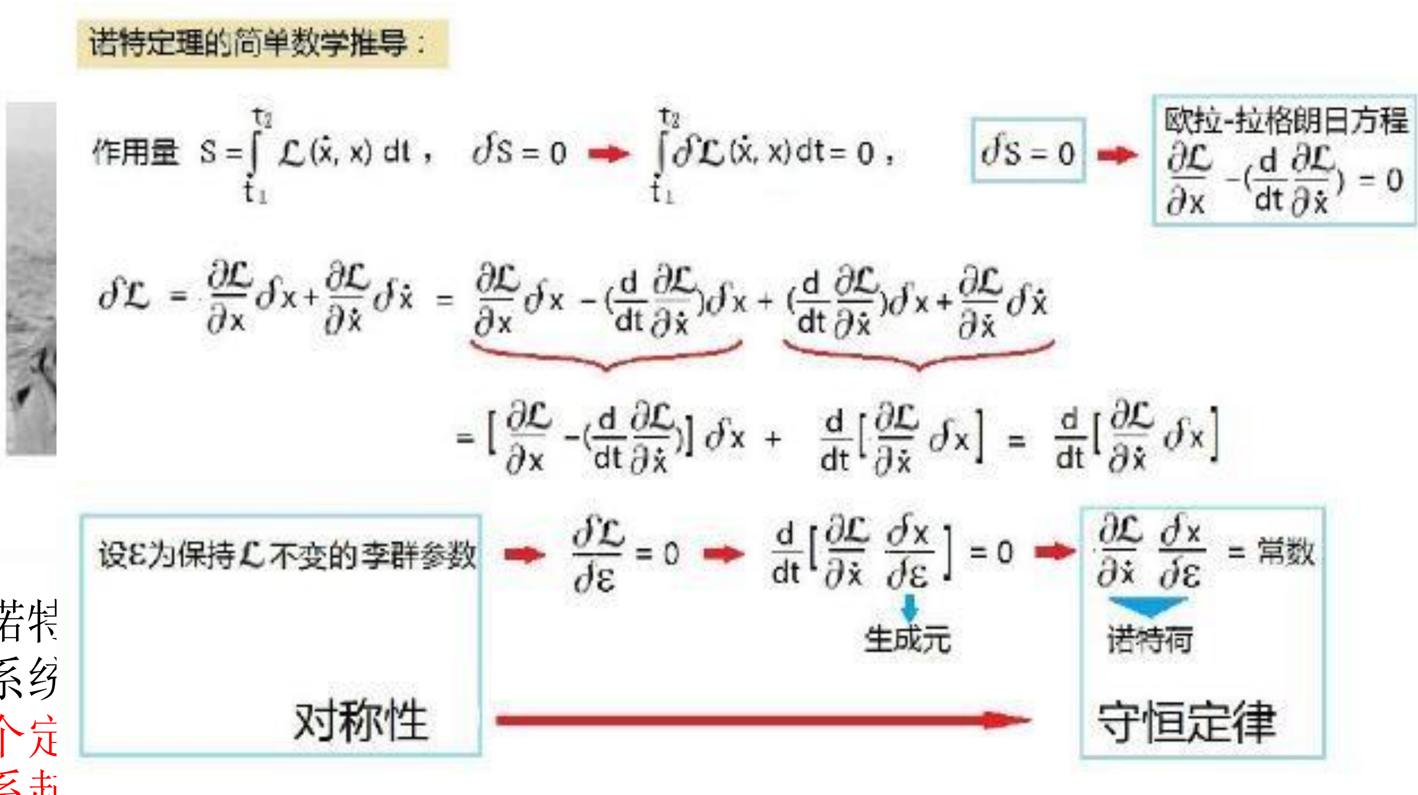
矩阵的基本理解

角度5：矩阵的物理内涵

某些矩阵的代数结构对应着自然界中基本的物理结构

矩阵的基本理解

矩阵李群（对称性）与守恒定律



诺特 …… 持
系统 …… 文
个定 …… 关
系起 ……
的SU(3)则对应于“色”荷守恒。总之，现代物理学及统一场论中，对称和守恒似乎已经成为物理学家们探索自然奥秘的强大秘密武器。诺特这位伟大的女性，为我们揭开了数学和物理之间这个妙不可言的神秘联系（引自张天蓉科学网博客）。

矩阵的基本理解

总结（对矩阵的认识的三个阶段）

- 首先，矩阵是一种新的数学符号或者代数工具，它有各种不知来由的定义和不知所谓的代数性质。在此阶段，矩阵就像黑匣子，抽象而晦涩。
- 其次，矩阵是线性变换在给定坐标系下的代数表达，它可以表征自然界中的各种线性动作。在此阶段，矩阵就像一幅图景，具体而清晰。
- 最后，矩阵具有深刻的物理内涵，各种不同的矩阵代数结构对应着自然界中各种不同的物理结构。在此阶段，矩阵就像一架通往终极真理的天梯，美妙而神秘。

矩阵的几个基本概念及应用

- 二次型（曲线拟合，数据压缩，特征提取，混合像元分析）
- 三次型（盲信号分离）
- 行列式（特征选择）
- 迹（特征检测）
- 秩（监督分类）
- 矩阵乘积、矩阵的幂（图论、聚类分析）
- 范数（压缩感知、特征分析）
- 特征值与特征向量（应用极为广泛...）
- 矩阵开方（图像匹配）
- 矩阵指数（李群，李代数）

参考资料

- 陶哲轩，线性代数讲义
- Gilbert Strang，麻省理工公开课：线性代数
- 张贤达，矩阵分析和应用
- Brian C. Hall, Lie Groups, Lie Algebras, and Representations
- 耿修瑞，矩阵之美-基础篇；
  矩阵之美-算法篇；
  矩阵之美-应用篇（未出版）

作业说明

- 课堂上布置的思考题均为选做题，计入平时成绩加分项，一般情况下均要求本周日晚上11点前完成。参与的同学可以将作业发至我邮箱（gengxr@sina.com.cn）
- 读书报告满分成绩为100

考试说明

- 针对任何与矩阵相关的文献（可以是文章、书籍、博客等）或者文献中的部分内容（模型、算法、定理等）写一篇读书笔记。字数不限。
- 在课程结束后一个月内将读书笔记发至我邮箱（gengxr@sina.com.cn）
- 读书笔记命名：姓名+题目

谢　谢

耿修瑞

中国科学院空天信息创新研究院

gengxr@sina.com.cn