数据处理中的矩阵方法-思考题

李厚华-202418019427056

模板匹配（Template Matching） 是一种基于像素相似度的图像匹配方法，其核心思想是：在目标图像（大图）中滑动一个固定大小的模板图像（小图），逐像素计算相似度，找到与模板最相似的区域，可以使用**归一化互相关**、**亚像素定位的相位相关法**和**归一化平方差**作为相似度的度量方式。

最终得到的亚像素级平移量为：x方向**10.8239 像素**，y方向**10.1777 像素**。

以下将给出**归一化互相关**、**相位相关法**和**归一化平方差**的简单介绍或证明，最后给出代码运行结果。

---

1 归一化互相关

1.1 互相关

互相关通过滑动计算两幅图像的相似性来寻找最佳匹配位置。平移量通过最大化互相关值确定。

- **公式**：

$$(f \star g)(u,v) = \sum_{x,y} f(x,y) \cdot g(x+u, y+v)$$

  其中：
  - f 是参考图像（`im1`），
  - g 是平移后的图像（`im2`），
  - (u,v) 是待检测的平移量。
- **归一化互相关（NCC）**：

$$\mathrm{NCC}(u,v) = \frac{\sum_{x,y}(f(x,y)-\mu_f)(g(x+u,y+v)-\mu_g)}{\sqrt{\sum_{x,y}(f(x,y)-\mu_f)^2} \cdot \sqrt{\sum_{x,y}(g(x+u,y+v)-\mu_g)^2}}$$

- μ_f, μ_g 是图像局部均值，
- NCC值范围 $[-1, 1]$，1表示完全匹配。

1.2. 平移量计算步骤

1. **计算互相关矩阵**：在时域中逐像素滑动计算相似性。
2. **寻找峰值位置**：互相关矩阵的最大值对应最佳匹配位置。
3. **调整平移量**：根据峰值位置确定平移量 (dx, dy)。

---

2 亚像素定位的相位相关法

2.1 二维傅里叶平移定理

设原二维信号为 $f(x, y)$，其傅里叶变换为：

$$F(k_x, k_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-i2\pi(k_x x + k_y y)} \, dx dy$$

若信号在空域中平移 $(\Delta x, \Delta y)$，则平移后的信号为 $f(x - \Delta x, y - \Delta y)$ 其傅里叶变换为：

$$\mathcal{F}\{f(x - \Delta x, y - \Delta y)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \Delta x, y - \Delta y) e^{-i2\pi(k_x x + k_y y)} \, dx dy$$

令：

$$u = x - \Delta x, \quad v = y - \Delta y$$

则 $x = u + \Delta x$，$y = v + \Delta y$，且 $dx dy = du dv$。代入上式：

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f(x - \Delta x, y - \Delta y)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) \, e^{-i2\pi[k_x(u + \Delta x) + k_y(v + \Delta y)]} \, du \, dv \\
&= e^{-i2\pi(k_x \Delta x + k_y \Delta y)} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) \, e^{-i2\pi(k_x u + k_y v)} \, du \, dv \\
&= F(k_x, k_y) \cdot e^{-i2\pi(k_x \Delta x + k_y \Delta y)}
\end{aligned}$$

从上式可以得出:

- 平移后信号的幅度谱与平移无关，仅有原信号的结构决定：

$$|\mathcal{F}\{f(x - \Delta x, y - \Delta y)\}| = |F(k_x, k_y)| \cdot \left| e^{-i2\pi(k_x \Delta x + k_y \Delta y)} \right| = |F(k_x, k_y)|$$

- 相位差是空间频率 (k_x, k_y) 的线性函数，其斜率由平移量 $(\Delta x, \Delta y)$ 决定：

$$\Delta\phi(k_x, k_y) = -2\pi(k_x \Delta x + k_y \Delta y)$$

因此若两幅图像 $f_1(x, y)$ 和 $f_2(x, y) = f_1(x - \Delta x, y - \Delta y)$ 仅存在平移，则可以通过计算互功率谱得到：

$$\frac{F_2 \cdot F_1^*}{|F_2 \cdot F_1|} = e^{-i2\pi(k_x \Delta x + k_y \Delta y)}$$

逆傅里叶变换后，会在空域中产生一个冲激函数 $\delta(x - \Delta x, y - \Delta y)$，其峰值位置直接给出平移量。

2.2 亚像素定位技术

传统的相位相关法只能提供整数级的位移估计，而在许多实际应用中，需要更高精度的匹配结果。可以采用抛物线拟合方法来实现亚像素级的位移估计。

抛物线拟合的基本原理是，在离散的相关峰附近，真实的连续相关函数可以近似为二次函数。通过对峰值及其相邻点进行抛物线拟合：

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

可以求得抛物线顶点的精确位置：

$$x_{peak} = -\frac{b}{2a}$$

在代码中，抛物线拟合是通过以下公式实现的：

$$\Delta x = \frac{v(1) - v(3)}{2 \cdot (v(1) + v(3) - 2 \cdot v(2))}$$

其中 $v(1), v(2), v(3)$ 分别是峰值点及其左右（或上下）相邻点的相关值。

循环边界处理

由于傅里叶变换的周期性，相位相关法天然具有处理循环边界的能力。当图像发生平移时，移出图像边界的部分会出现在另一侧，形成循环位移。

通过取模运算处理循环边界问题：

```
rows = mod((ypeak-1:ypeak+1) -1, size(corr,1)) +1;
cols = mod((xpeak-1:xpeak+1) -1, size(corr,2)) +1;
```

这种处理方式确保了在寻找相关峰附近的点时，即使超出图像边界也能正确映射到图像的另一侧。

2.3 平移量计算步骤

1. **计算傅里叶变换**：对两张图像分别进行2维傅里叶变换。
2. **计算互功率谱及其逆傅里叶变换**：对傅里叶变换结果进行共轭相乘，然后进行逆傅里叶变换。
3. **调整平移量**：根据峰值位置确定平移量 (dx, dy)。
4. **寻找亚像素位移**：通过抛物线拟合寻找亚像素级的位移。

---

3 归一化平方差

3.1 平方差

NSSD 通过计算模板图像（参考图像块）与目标图像中滑动窗口的像素值差异，并对其进行归一化，来评估两者的匹配程度，其核心原理是通过归一化处理消除光照和对比度变化的影响，从而更准确地反映图像内容的结构差异。其目标是找到使差异最小的位置，从而确定最佳匹配。

- **公式：**

$$\sum_{x=1}^{W}\sum_{y=1}^{H}(T(x,y)-I(x+dx,y+dy))^2$$

  - $T(x,y)$：模板图像（`im1`）的像素值（尺寸为 $W \times H$）。
  - $I(x+dx,y+dy)$：目标图像（`im2`）中平移 (dx,dy) 后的局部窗口像素值。
- **归一化平方差**

$$\text{NSSD}(dx,dy)=\frac{\sum_{x=1}^{W}\sum_{y=1}^{H}(T(x,y)-I(x+dx,y+dy))^2}{\sqrt{\sum T(x,y)^2\cdot\sum I(x+dx,y+dy)^2}}$$

  其中：
  - **分子**：模板与窗口的像素值平方差之和，直接衡量差异。
  - **分母**：归一化因子，消除模板和窗口整体亮度差异的影响。

3.2. 平移量计算步骤

1. **计算归一化平方差矩阵**：在时域中逐像素滑动目标图像计算归一化平方差。
2. **寻找最小值位置**：归一化平方差矩阵的最小值对应最佳匹配位置。
3. **调整平移量**：根据最小值位置确定平移量 (dx,dy)。

---

4 代码计算结果

4.1图片初步分析

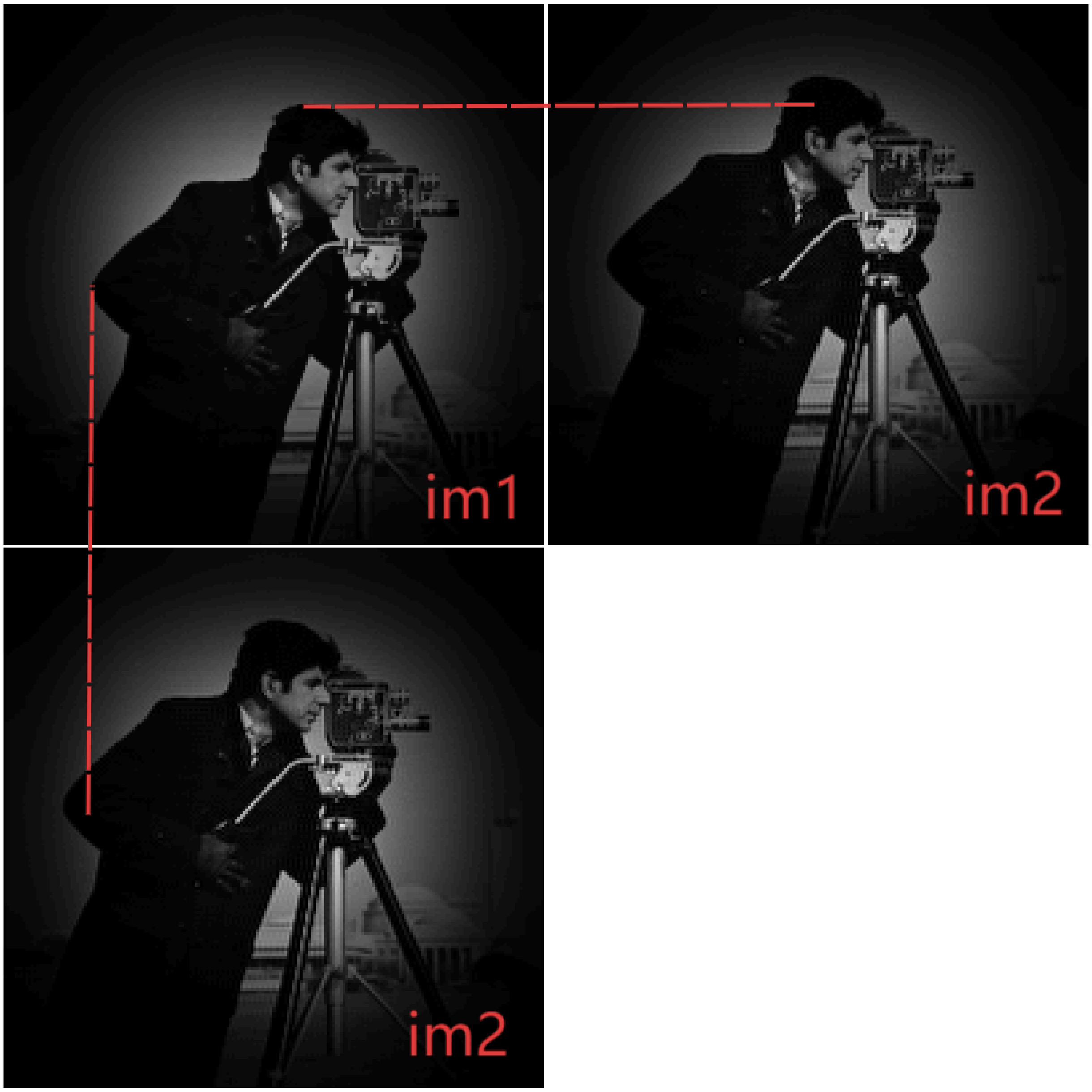

图1：原始图像数据

从原始图像对比中，可以看出im2是im1向上向左平移得到的，为判断后续结果是否正确提供了初步的判断条件。

4.2 归一化互相关结果

通过编写代码实现归一化互相关：

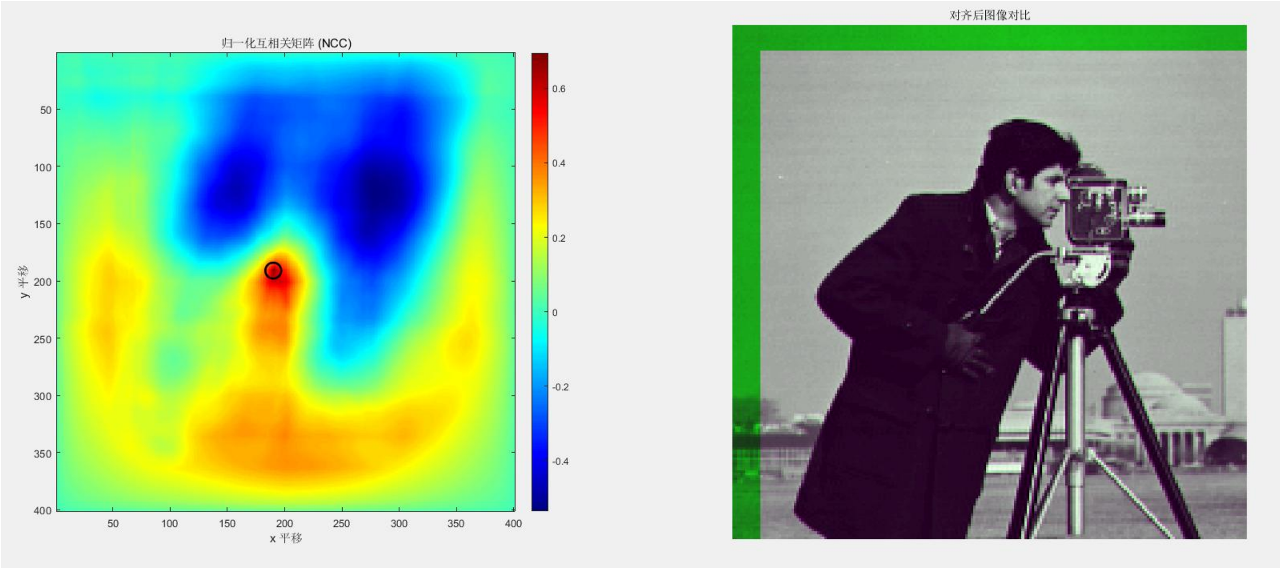

图2：归一化互相关图

提取相关图的峰值位置，可以得到平移量为：x方向 -11 像素，y方向 -10 像素。即im2是im1向上平移11个像素，向左平移10个像素后得到的，与初步分析结果一致。

4.3 相位相关法结果

通过编写代码傅里叶求图像匹配的过程：

- 傅里叶变换结果展示

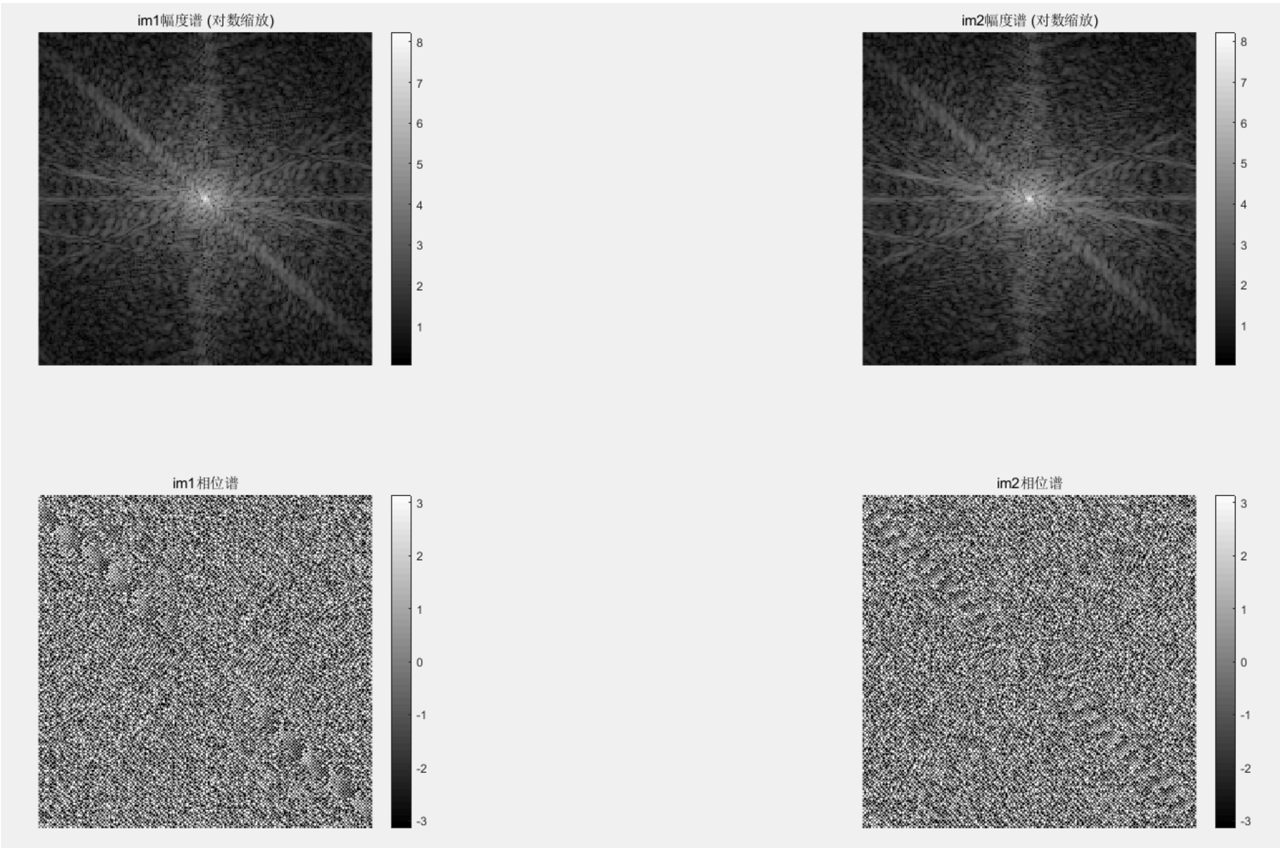

图3：图片傅里叶变换结果

从上图中可以看出两张图片的幅度谱一致，相位图不同（左上-右下方向的一条模糊斜线向下平移了一定位置）。

- 互功率谱

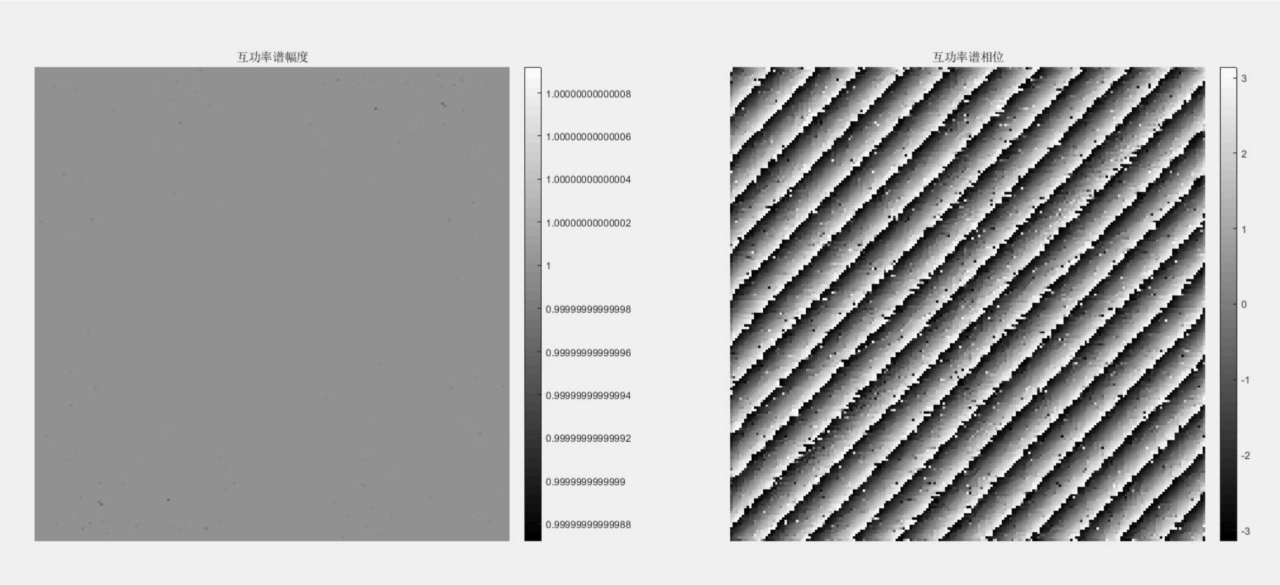

图4：互功率谱

可以发现两张图片的互功率谱的幅度为1，与**二维傅里叶平移定理**结论一致，相位谱呈现左下-右上方向的平行斜线。

- 对功率谱进行逆傅里叶变换

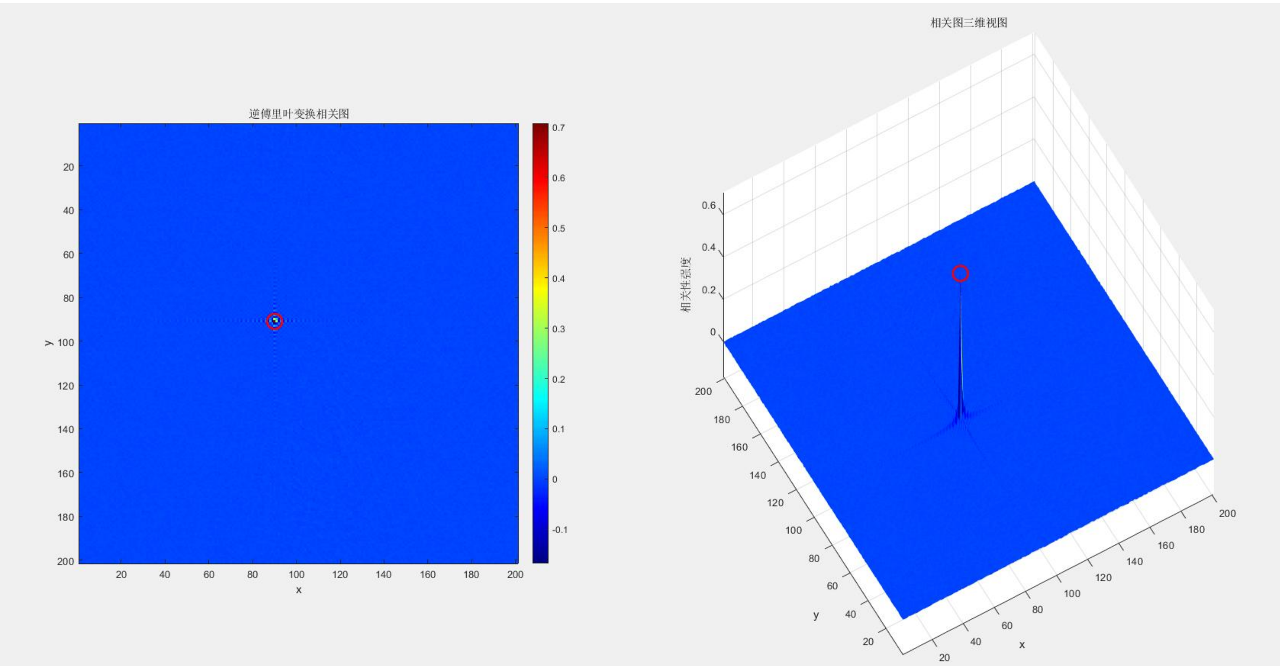

图5：互功率谱逆傅里叶变换结果

提取相关图（互功率谱的逆傅里叶变换）的峰值位置，可以得到平移量为：x方向 -11 像素，y方向 -10 像素。

- 抛物线拟合，通过以下代码进行抛物线拟合

```
% 处理循环边界，获取3x3邻域
rows = mod((ypeak-1:ypeak+1) -1, size(corr,1)) +1;
cols = mod((xpeak-1:xpeak+1) -1, size(corr,2)) +1;

x_slice = corr(ypeak, cols);
y_slice = corr(rows, xpeak);

% 抛物线拟合亚像素位移
% x方向
v = x_slice;
denominator = v(1) + v(3) - 2*v(2);
if denominator == 0
    delta_x = 0;
else
    delta_x = (v(1) - v(3)) / (2 * denominator);
end

% y方向
v = y_slice;
denominator = v(1) + v(3) - 2*v(2);
if denominator == 0
    delta_y = 0;
else
    delta_y = (v(1) - v(3)) / (2 * denominator);
end
```

最终得到的亚像素级平移量为：x方向10.8239 像素，y方向10.1777 像素。

4.3 归一化平方差结果

通过代码实现归一化平方差求图像匹配的过程

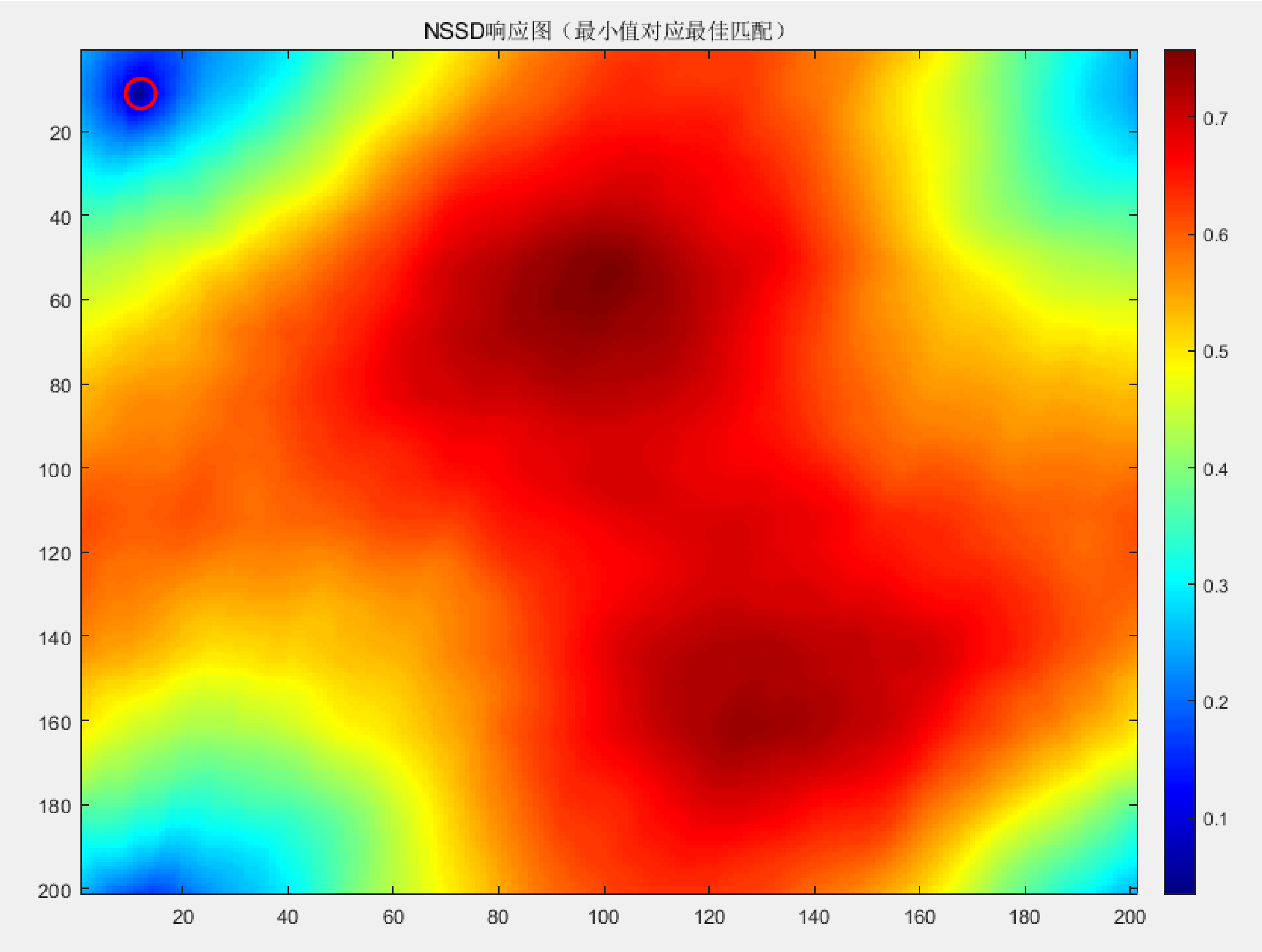

图5：归一化方差

提取NSSD图的最小值位置，可以得到 `im2` 平移量为：x方向 11 像素，y方向 10 像素时， `im2` 与 `im1` 之间的归一化平方差最小，也就是 `im1` 的平移量为：x方向 -11 像素，y方向 -10 像素时得到 `im2` 。

---

5 方法对比

方法	核心思想	光照鲁棒性	几何鲁棒性	计算效率
NSSD	归一化平方差	高	低	低
NCC	归一化协方差	高	低	低
相位相关法	傅里叶域相位差	中	中（仅平移）	高

超像素图像匹配理论介绍

超像素图像匹配是计算机视觉领域的重要研究方向，主要用于确定不同图像间的相对位移、旋转和缩放等变换关系。其核心目标是找到使两幅图像达到最佳对齐的变换参数。

亚像素定位技术

传统的相位相关法只能提供整数级的位移估计，而在许多实际应用中，需要更高精度的匹配结果。您的代码中采用了抛物线拟合方法来实现亚像素级的位移估计。

抛物线拟合的基本原理是，在离散的相关峰附近，真实的连续相关函数可以近似为二次函数。通过对峰值及其相邻点进行抛物线拟合：

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

可以求得抛物线顶点的精确位置：

$$x_{peak} = -\frac{b}{2a}$$

在代码中，抛物线拟合是通过以下公式实现的：

$$\Delta x = \frac{v(1) - v(3)}{2 \cdot (v(1) + v(3) - 2 \cdot v(2))}$$

其中 $v(1), v(2), v(3)$ 分别是峰值点及其左右（或上下）相邻点的相关值。

循环边界处理

由于傅里叶变换的周期性，相位相关法天然具有处理循环边界的能力。当图像发生平移时，移出图像边界的部分会出现在另一侧，形成循环位移。

您的代码中通过取模运算处理了循环边界问题：

```
rows = mod((ypeak-1:ypeak+1) -1, size(corr,1)) +1;
cols = mod((xpeak-1:xpeak+1) -1, size(corr,2)) +1;
```

这种处理方式确保了在寻找相关峰附近的点时，即使超出图像边界也能正确映射到图像的另一侧。

通过结合相位相关法和亚像素定位技术，您提供的代码实现了一种高效且精确的图像匹配方法，可以满足许多实际应用的需求。