数据处理中的矩阵方法-第 3 次作业

李厚华 202418019427056

2025 年 3 月 16 日

1 思考题

a,b 是 n 维空间中的任意两个不相关的列向量，试构建一个在 a，b 所在的平面旋转任意角度 x 的矩阵?

首先明确，二维旋转矩阵的形式为二维旋转矩阵是：

$$R_2 = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{bmatrix}$$

但该矩阵作用在二维向量上，将其绕原点旋转角度 x。而在 n 维空间中，旋转只发生在由 a 和 b 张成的二维子空间里，其他的 n-2 个维度保持不变。这里可以利用 QR 分解中所需要的 Givens 旋转，Givens 旋转矩阵用于在由两个坐标轴所张成的平面内进行旋转，例如在第 i 和第 j 个坐标轴平面内旋转，其矩阵形式是在单位矩阵的基础上，修改 (i,i),(i,j),(j,i),(j,j) 四个位置的元素为 cosx, -sinx, sinx, cosx。

但是，这里的平面并不是由坐标轴张成的，而是由任意两个线性无关的向量 a 和 b 张成的平面，因此需要将 a，b 向量先利用 Gram-Schmidt 正交化，再利用 Givens 旋转。在 n 维空间中，给定两个线性无关的列向量 a 和 b，构建它们在平面内旋转任意角度 x 的矩阵步骤如下：

1. Gram-Schmidt 正交化：将 a 和 b 正交化得到标准正交基 u 和 u 。

$$u_1 = \frac{a}{\|a\|}$$

$$u_2' = b - (b^\top u_1)u_1$$

然后归一化：

$$u_2 = \frac{u_2'}{\|u_2'\|}$$

2. 构造 Givens 旋转矩阵：在由 u 和 u 张成的平面内应用二维旋转，其余维度保持不变。

旋转矩阵形式为：

$$R = I + (\cos x - 1)(u_1 u_1^\top + u_2 u_2^\top) + \sin x (u_2 u_1^\top - u_1 u_2^\top)$$

其中 I 是 n 维单位矩阵。该矩阵 R 是一个正交矩阵，保持向量长度不变，并在 a 和 b 所在的平面内旋转角度 x，其他正交方向保持不变。