# 行列式及应用

耿修瑞

中国科学院空间信息创新研究院

gengxr@sina.com.cn

2025.3

- 行列式的定义
- 行列式的几何意义
- 行列式的代数意义
- 行列式的应用

# 行列式的定义

## 基本定义

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

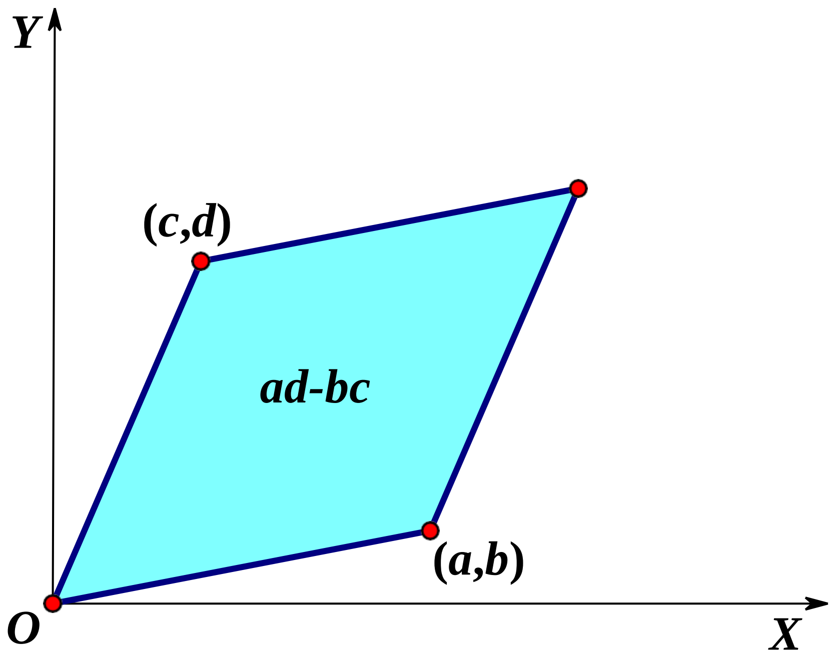
在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么它们就称为一个逆序。一个排列中逆序的总数就称为这个排列的逆序数。比如数列2，4，3，1，5。它的逆序数为4，分别为（21），（43），（41），（31)。

$$\det(\mathbf{A})=\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{1 j_2} \ldots a_{1 j_n}$$

$\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 是排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 的逆序数

# 行列式的几何意义

- 平面平行四边形的面积

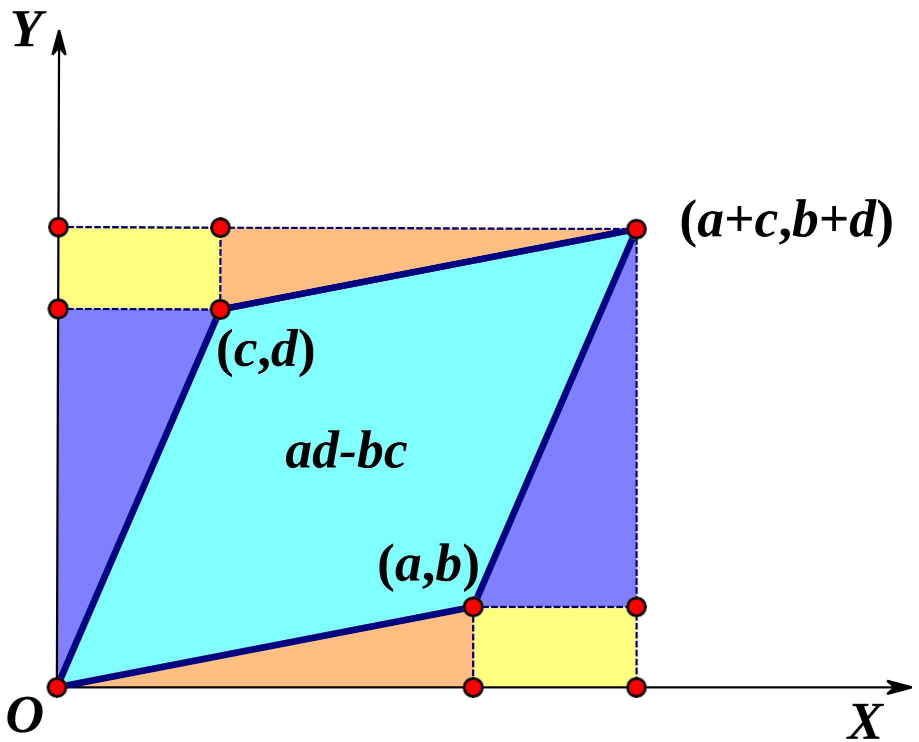



$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

线性变换角度？

# 行列式的几何意义

- 平面平行四边形的面积




平行四边形面积

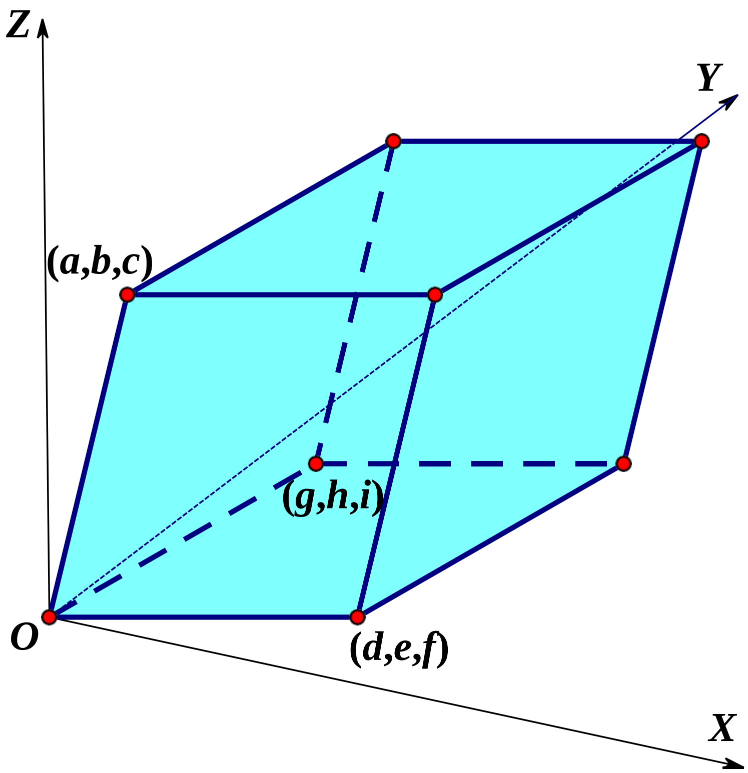
$$=(a+c)(b+d)-ab-cd-2bc$$

$$=ad-bc=\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

,

# 行列式的几何意义

- 三维空间平行六面体的体积

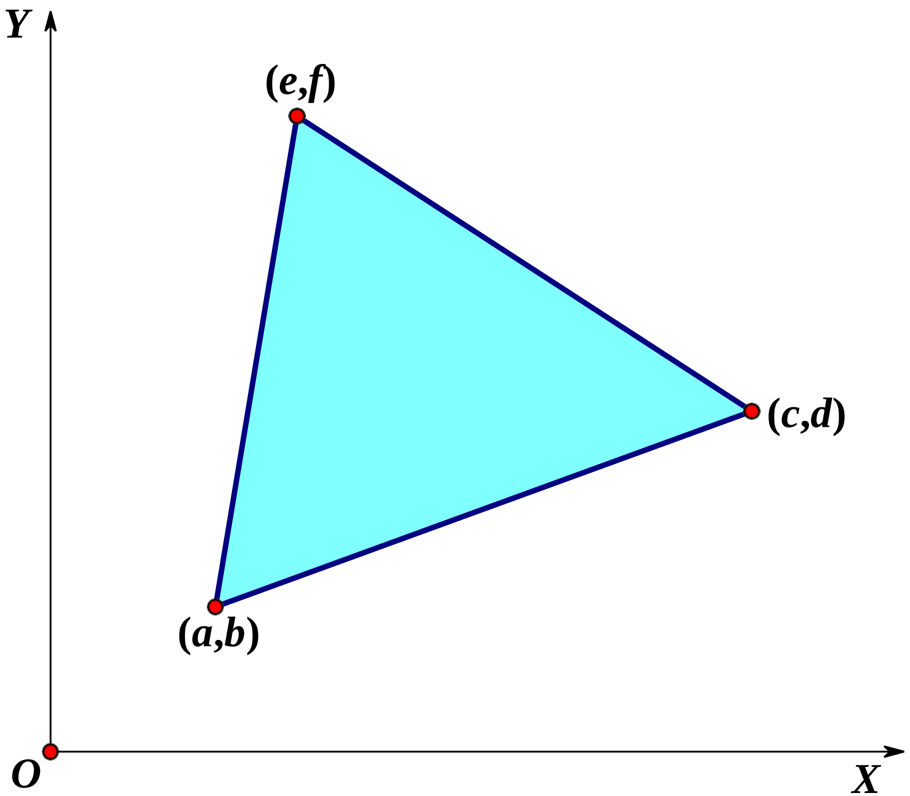



$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh$$

’

# 行列式的几何意义

- 平面三角形的面积

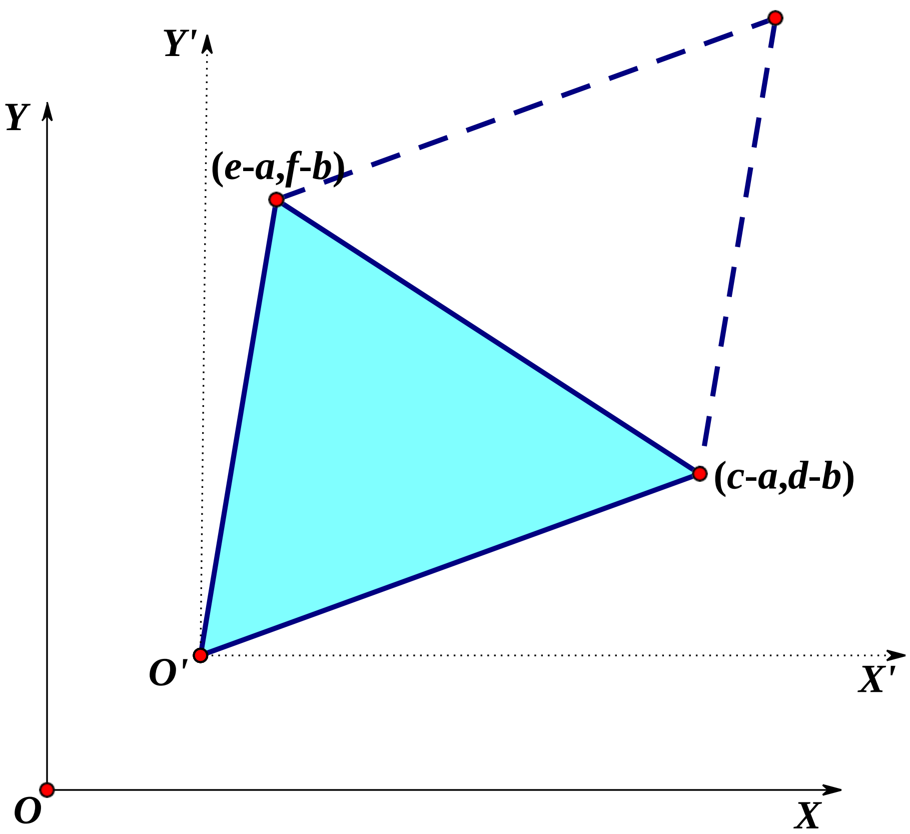



如何求此三角形的面积呢？

,

# 行列式的几何意义

- 平面三角形的面积

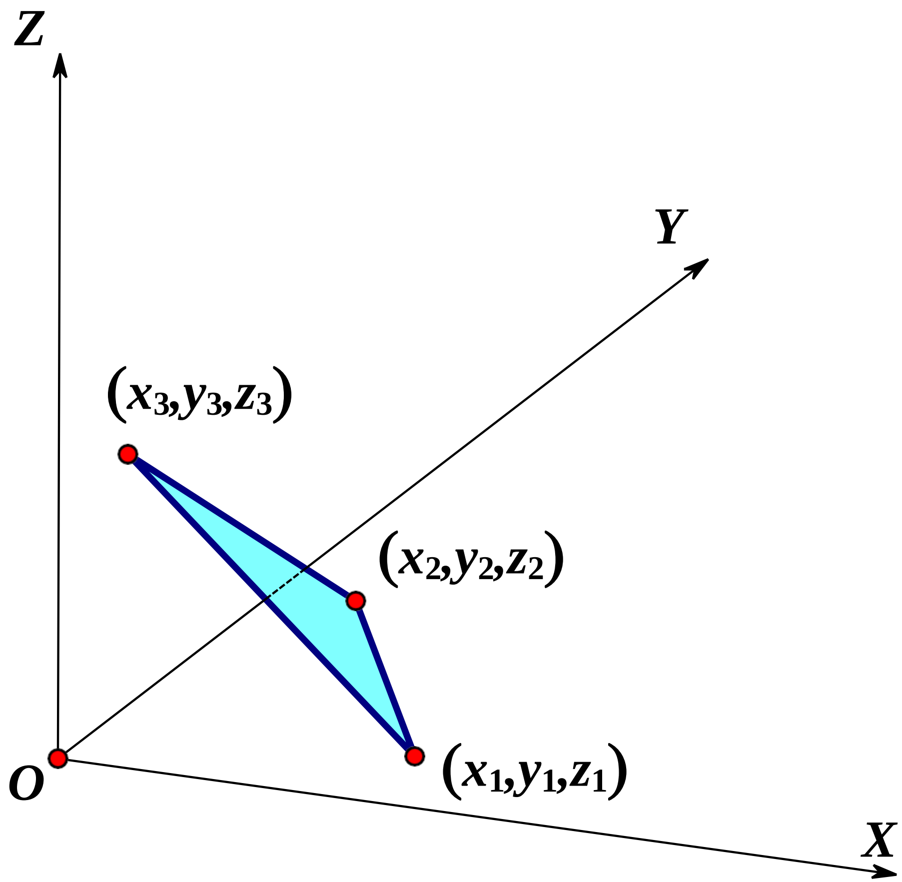



$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}abs\left(\begin{vmatrix} c-a & e-a \\ d-b & f-b \end{vmatrix}\right)$$

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}abs\left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & c & e \\ b & d & f \end{vmatrix}\right)$$

# 行列式的几何意义

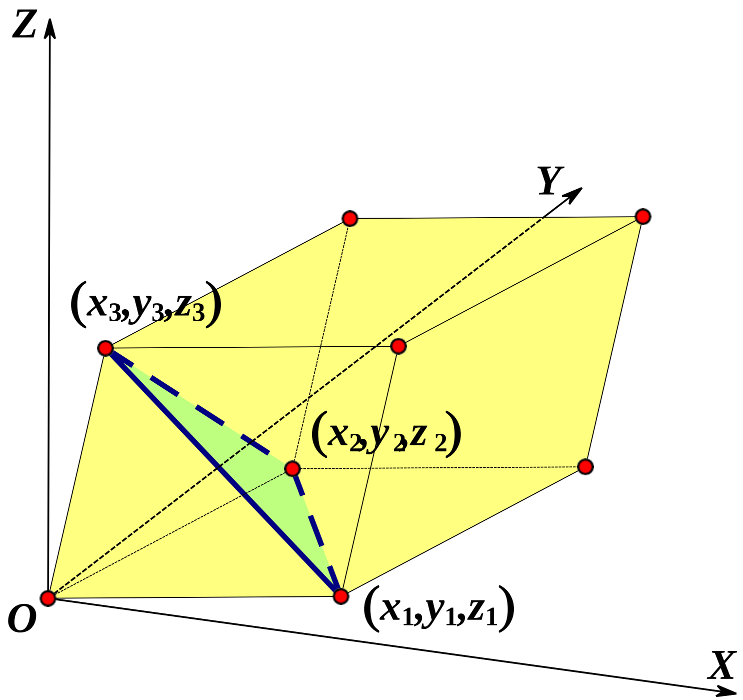
- 高维空间三角形的面积




如何求此三角形的面积呢？

# 行列式的几何意义

- 高维空间三角形的面积




$$V = abs\left(\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}\right)$$

绿色三角形面积？

,

# 行列式的几何意义

## 高维空间三角形的面积

记 $$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b}\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{bmatrix} a_2b_3-a_3b_2 & -(a_1b_3-a_3b_1) & a_1b_2-a_2b_1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$S_1=\frac{1}{2}\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\|=\frac{1}{2}\sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+(a_1b_2-a_2b_1)^2}$$

# 行列式的几何意义

- 高维空间三角形的面积

$$S_2=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right|}=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\\ a_3 & b_3\end{bmatrix}\right|}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix}a_1^2+a_2^2+a_3^2 & a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\\ a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3 & b_1^2+b_2^2+b_3^2\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)-\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3\right)^2}$$

$$\left(\sum a_kb_k\right)^2\le\sum a_k^2\sum b_k^2$$

柯西-施瓦茨不等式

$$S_1=\frac{1}{2}\left\|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{\left(a_2b_3-a_3b_2\right)^2+\left(a_1b_3-a_3b_1\right)^2+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2}$$

$$S_1=S_2\,?$$

# 行列式的几何意义

- 思考题（2分）

如何求n维空间中任意m（m<n）个列向量构成的平行多面体的体积？

# 行列式的几何意义

## 叉积

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)\mathbf{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\mathbf{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{k}$$

$$\overset{\text{记为}}{=}\left[(a_2b_3-a_3b_2)\ \ -(a_1b_3-a_3b_1)\ \ (a_1b_2-a_2b_1)\right]^{\mathrm{T}}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & -a_3 & a_2\\ a_3 & 0 & -a_1\\ -a_2 & a_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & b_3 & -b_2\\ -b_3 & 0 & b_1\\ b_2 & -b_1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{bmatrix}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$$

# 行列式的几何意义

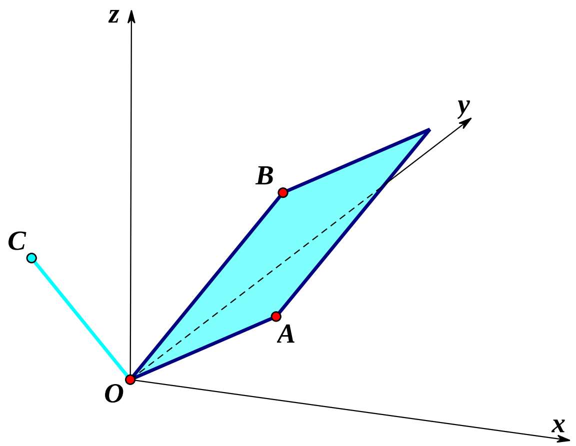
## 叉积

1. 反对称性

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$$

2. 几何意义

两个三维向量的叉积仍为三维向量，该向量的模等于两个向量张成的平行四边形的面积，向量的方向垂直于该平行四边形。




3. 局限

叉积运算只适用于三维向量，两个更高维的向量没有叉积的概念

# 行列式的定几何意义

## 楔形积-二维情形

$$\mathbf{a}=[a_1\ \ a_2]^{\mathrm{T}}=a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2, \qquad \mathbf{b}=[b_1\ \ b_2]^{\mathrm{T}}=b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}=(a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2)\bullet(b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2)$$
$$=a_1b_1\mathbf{e}_1\bullet\mathbf{e}_1+a_1b_2\mathbf{e}_1\bullet\mathbf{e}_2+a_2b_1\mathbf{e}_2\bullet\mathbf{e}_1+a_2b_2\mathbf{e}_2\bullet\mathbf{e}_2$$

如果规定 $\mathbf{e}_1\bullet\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_2\bullet\mathbf{e}_2=1, \quad \mathbf{e}_1\bullet\mathbf{e}_2=\mathbf{e}_2\bullet\mathbf{e}_1=0$

则上述公式为向量内积 $\mathbf{a}\bullet\mathbf{b}=a_1b_1+a_2b_2$

如果规定 $\mathbf{e}_1\bullet\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_2\bullet\mathbf{e}_2=0, \quad \mathbf{e}_1\bullet\mathbf{e}_2=-\mathbf{e}_2\bullet\mathbf{e}_1$

则上述公式为向量楔形积，记为

$$\mathbf{a}\Lambda\mathbf{b}=(a_1b_2-a_2b_1)\mathbf{e}_1\Lambda\mathbf{e}_2=\det(\mathbf{A})\mathbf{e}_1\Lambda\mathbf{e}_2 \qquad \mathbf{A}=[\mathbf{a}\ \mathbf{b}]$$

可以发现，向量的楔形积与矩阵行列式对应

# 行列式的定几何意义

## 楔形积-三维情形

$$\mathbf{a}\Lambda\mathbf{b}=\left(a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3\right)\Lambda\left(b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2+b_3\mathbf{e}_3\right)$$

$$=a_1b_1\mathbf{e}_1\Lambda\mathbf{e}_1+a_1b_2\mathbf{e}_1\Lambda\mathbf{e}_2+a_1b_3\mathbf{e}_1\Lambda\mathbf{e}_3+a_2b_1\mathbf{e}_2\Lambda\mathbf{e}_1+a_2b_2\mathbf{e}_2\Lambda\mathbf{e}_2$$

$$a_2b_3\mathbf{e}_2\Lambda\mathbf{e}_3+a_3b_1\mathbf{e}_3\Lambda\mathbf{e}_1+a_3b_2\mathbf{e}_3\Lambda\mathbf{e}_2+a_3b_3\mathbf{e}_3\Lambda\mathbf{e}_3$$

$$=\left(a_1b_2-a_2b_1\right)\mathbf{e}_1\Lambda\mathbf{e}_2+\left(a_1b_3-a_3b_1\right)\mathbf{e}_1\Lambda\mathbf{e}_3+\left(a_2b_3-a_3b_2\right)\mathbf{e}_2\Lambda\mathbf{e}_3$$

记$\mathbf{i}=\mathbf{e}_2\Lambda\mathbf{e}_3,\mathbf{j}=\mathbf{e}_3\Lambda\mathbf{e}_1,\mathbf{k}=\mathbf{e}_1\Lambda\mathbf{e}_2$

$$\mathbf{a}\Lambda\mathbf{b}=\left[a_2b_3-a_3b_2\quad -\left(a_1b_3-a_3b_1\right)\quad a_1b_2-a_2b_1\right]^{\mathrm{T}}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\left[a_2b_3-a_3b_2\quad -\left(a_1b_3-a_3b_1\right)\quad a_1b_2-a_2b_1\right]^{\mathrm{T}}$$

# 行列式的几何意义

## 楔形积-三维情形

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3,\qquad \mathbf{b}=\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & b_3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2+b_3\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{c}=\begin{bmatrix}c_1 & c_2 & c_3\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=c_1\mathbf{e}_1+c_2\mathbf{e}_2+c_3\mathbf{e}_3,\qquad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c}\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c} &= (a_1\mathbf{e}_1+a_2\mathbf{e}_2+a_3\mathbf{e}_3)\wedge(b_1\mathbf{e}_1+b_2\mathbf{e}_2+b_3\mathbf{e}_3)\wedge(c_1\mathbf{e}_1+c_2\mathbf{e}_2+c_3\mathbf{e}_3)\\
&= a_1b_1c_1\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_1+a_1b_1c_2\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2+a_1b_1c_3\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_3+a_1b_2c_1\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_1+a_1b_2c_2\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_2\\
&\quad +a_1b_2c_3\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3+a_1b_3c_1\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_1+a_1b_3c_2\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_2+a_1b_3c_3\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_3+a_2b_1c_1\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_1\\
&\quad +a_2b_1c_2\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2+a_2b_1c_3\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_3+a_2b_2c_1\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_1+a_2b_2c_2\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_2+a_2b_2c_3\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3\\
&\quad +a_2b_3c_1\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_1+a_2b_3c_2\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_2+a_2b_3c_3\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_3+a_3b_1c_1\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_1+a_3b_1c_2\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\\
&\quad +a_3b_1c_3\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_3+a_3b_2c_1\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_1+a_3b_2c_2\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_2+a_3b_2c_3\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3+a_3b_3c_1\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_1\\
&\quad +a_3b_3c_2\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_2+a_3b_3c_3\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_3\\
&= a_1b_2c_3\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3+a_1b_3c_2\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_2+a_2b_1c_3\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_3+a_2b_3c_1\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_1+a_3b_1c_2\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2+a_3b_2c_1\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_1\\
&= (a_1b_2c_3-a_1b_3c_2-a_2b_1c_3+a_2b_3c_1+a_3b_1c_2-a_3b_2c_1)\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3\\
&= \det(\mathbf{A})\,\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

# 行列式的几何意义

## 楔形积-四维情形

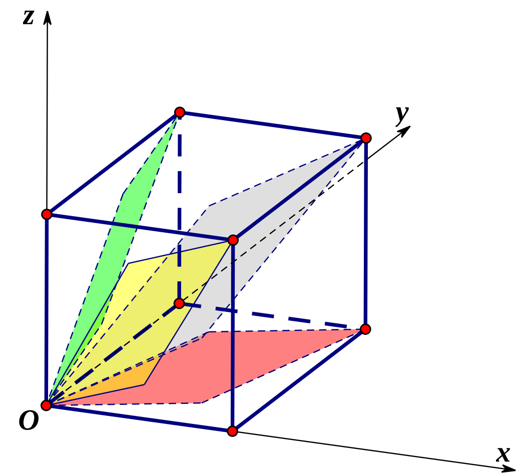
尝试计算四维空间中任意两个向量之间的楔形积，并讨论其几何意义？

四维空间中任意三个向量的楔形积？

四维空间中任意四个向量的楔形积？

# 行列式的几何意义

## 楔形积的几何意义

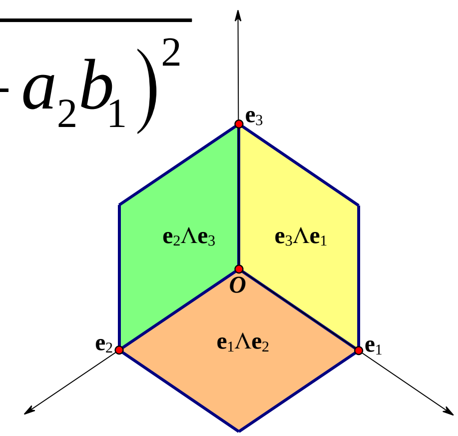



$$\mathbf{a} = \left[a_1\ a_2\ a_3\right]^{\mathrm{T}} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3,$$

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = \left(a_1b_2 - a_2b_1\right)\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2 + \left(a_1b_3 - a_3b_1\right)\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_3 + \left(a_2b_3 - a_3b_2\right)\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3$$

$$\|\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\| = \sqrt{\left(a_2b_3 - a_3b_2\right)^2 + \left(a_1b_3 - a_3b_1\right)^2 + \left(a_1b_2 - a_2b_1\right)^2}$$




直线与投影，投影分量的含义？直线长度与投影分量的关系？
平面图形及投影，投影分量的含义？
图形面积与投影分量的关系？
更高维的情形？
高维体积情形？

# 行列式的几何意义

## ■楔形积-一般情形

n维空间中任意m个向量之间的楔形积

$$\mathbf{a}_1 \wedge \mathbf{a}_2 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_m = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=1}^{n} a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{mi_m} \mathbf{e}_{i_1} \wedge \mathbf{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{i_m}$$

$$\mathbf{a}_i = a_{i1}\mathbf{e}_1 + a_{i2}\mathbf{e}_2 + \cdots + a_{in}\mathbf{e}_n$$

# 行列式的几何意义

## 楔形积与行列式

对于三维空间中的任意三个向量 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$，记 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c}\end{bmatrix}$，则有

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}=\left|\mathbf{A}\right|\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3$$

对于四维空间中的任意四个向量 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}$，记 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} & \mathbf{d}\end{bmatrix}$，则有

$$\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}\wedge\mathbf{c}\wedge\mathbf{d}=\left|\mathbf{A}\right|\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\mathbf{e}_3\wedge\mathbf{e}_4$$

对于n维空间中的任意n个向量 $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\cdots,\mathbf{a}_n$，记 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{bmatrix}$，则有

$$\mathbf{a}_1\wedge\mathbf{a}_2\wedge\cdots\wedge\mathbf{a}_n=\left|\mathbf{A}\right|\mathbf{e}_1\wedge\mathbf{e}_2\wedge\cdots\wedge\mathbf{e}_n$$

# 行列式的几何意义

## 行列式与混合积

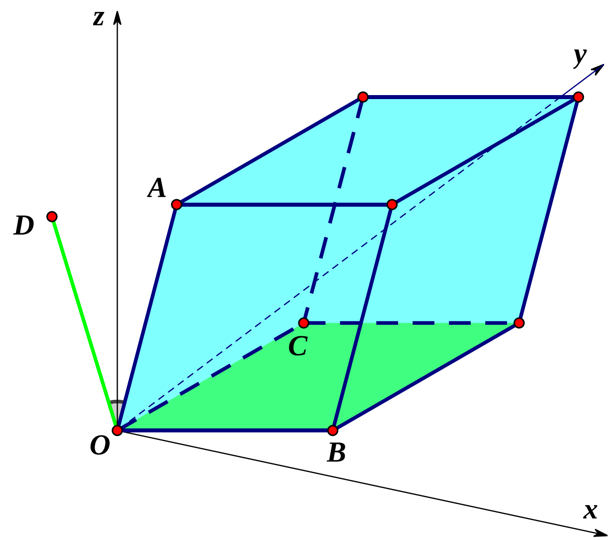
$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{abs}(\det(\mathbf{A}))=\mathrm{abs}\left(\left(\mathbf{a}_{i_1}\wedge\mathbf{a}_{i_2}\wedge\cdots\wedge\mathbf{a}_{i_s}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{a}_{i_{s+1}}\wedge\mathbf{a}_{i_{s+2}}\wedge\cdots\wedge\mathbf{a}_{i_n}\right)\right)$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c}\end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A})=\mathbf{a}^{\mathrm{T}}(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$

$$=\mathbf{b}^{\mathrm{T}}(\mathbf{c}\times\mathbf{a})=\mathbf{c}^{\mathrm{T}}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$



# 行列式的代数意义

## 重线性函数

令 $V^k = V\times V\times\cdots\times V$ 是$k$个线性空间$V$的个笛卡尔积，
则一个函数 $f:V^k\to R$ 是$V$ 上的 $k$ 重线性函数，是指对于它的任意一个分量，该函数都是线性的：

$$f\left(\cdots, a\mathbf{v}_1+b\mathbf{v}_2,\cdots\right)=af\left(\cdots,\mathbf{v}_1,\cdots\right)+bf\left(\cdots,\mathbf{v}_2,\cdots\right)$$

试举例，常见的重线性函数？

$$f\left(\mathbf{v},\mathbf{w}\right)=\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{w}$$

$$\det\left(\left[\cdots,\mathbf{v}+\mathbf{w},\cdots\right]\right)=\det\left(\left[\cdots,\mathbf{v},\cdots\right]\right)+\det\left(\left[\cdots,\mathbf{w},\cdots\right]\right)$$

# 行列式的代数意义

## 对称重线性函数与交代（alternating）重线性函数

一个 $k$ 线性函数 $f:V^k \to R$ 是**对称**的，如果对于 $k$ 阶置换群中的所有元素 $\sigma \in S_k$，都有

$$f\left(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \cdots, \mathbf{v}_{\sigma(k)}\right) = f\left(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k\right)$$

一个 $k$ 线性函数 $f:V^k \to R$ 是**交代**的，如果对于 $k$ 阶置换群中的所有元素 $\sigma \in S_k$，都有

$$f\left(\mathbf{v}_{\sigma(1)}, \cdots, \mathbf{v}_{\sigma(k)}\right) = \operatorname{sgn}(\sigma) f\left(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k\right)$$

置换的奇偶和逆序数的奇偶是一致的

讨论内积和行列式是对称的，还是交代的？

$$f(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = f(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{w}$$

$$\det\left(\left[\cdots, \mathbf{v}, \cdots, \mathbf{w}, \cdots\right]\right) = -\det\left(\left[\cdots, \mathbf{w}, \cdots, \mathbf{v}, \cdots\right]\right)$$

# 行列式的代数意义

## 重线性函数的张量表达

希尔伯特空间上任意一个有界线性泛函 $f$，都可以表达为内积的形式：即存在唯一的**w**，使得

$$f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{v}$$

那么任何一个有界重线性函数$g$ 可以表示为？

$$g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{W}\mathbf{v}_2$$

思考：尝试证明

$$g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = ?$$

$$g(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n) = ?$$

张量！

# 行列式的代数意义

## 行列式就是交代重线性函数

$$\det(\mathbf{A}) = \det\left(\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{bmatrix}\right) = \boldsymbol{A} \times_1 \mathbf{a}_1 \times_2 \mathbf{a}_2 \cdots \times_n \mathbf{a}_n$$

$$\det(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times_1 \mathbf{a}_1 \times_2 \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det(\mathbf{A}) = \boldsymbol{A} \times_1 \mathbf{a}_1 \times_2 \mathbf{a}_2 \times_3 \mathbf{a}_3$$

讨论：试写出3阶行列式对应的交代张量的每一个元素？

# 行列式的代数意义

**Definition（ $n$ 模积）**

一张量$\mathcal{A} \in R^{I_1 \times I_2 \cdots \times I_N}$与矩阵$\mathbf{U} \in R^{J \times I_n}$ 的$n$ 模积记作：

$$\mathcal{A} \times_n \mathbf{U} \in R^{I_1 \times \cdots \times I_{n-1} \times J \times I_{n+1} \times \cdots \times I_N},$$

相对应的元素表示为：

$$(\mathcal{A} \times_n \mathbf{U})_{i_1 \ldots i_{n-1} j i_{n+1} \ldots i_N} = \sum_{i_n=1}^{I_n} a_{i_1, i_2, \ldots, i_N} u_{j i_n}.$$

$$\boldsymbol{A} \times_1 \mathbf{u}_1 \times_2 \mathbf{u}_2 \times_3 \mathbf{u}_3 = \sum_{i=1}^{L} \sum_{j=1}^{L} \sum_{k=1}^{L} a_{i,j,k} u_i u_j u_k$$

# 行列式的代数意义

## 行列式就是交代重线性函数

讨论：试写出3阶行列式对应的交代张量的每一个元素？

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

$$= \boldsymbol{A} \times_1 \mathbf{a}_1 \times_2 \mathbf{a}_2 \times_3 \mathbf{a}_3$$

$$\boldsymbol{A}(:,:,1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}(:,:,2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}(:,:,3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# 行列式的代数意义

## □行列式就是交代重线性函数

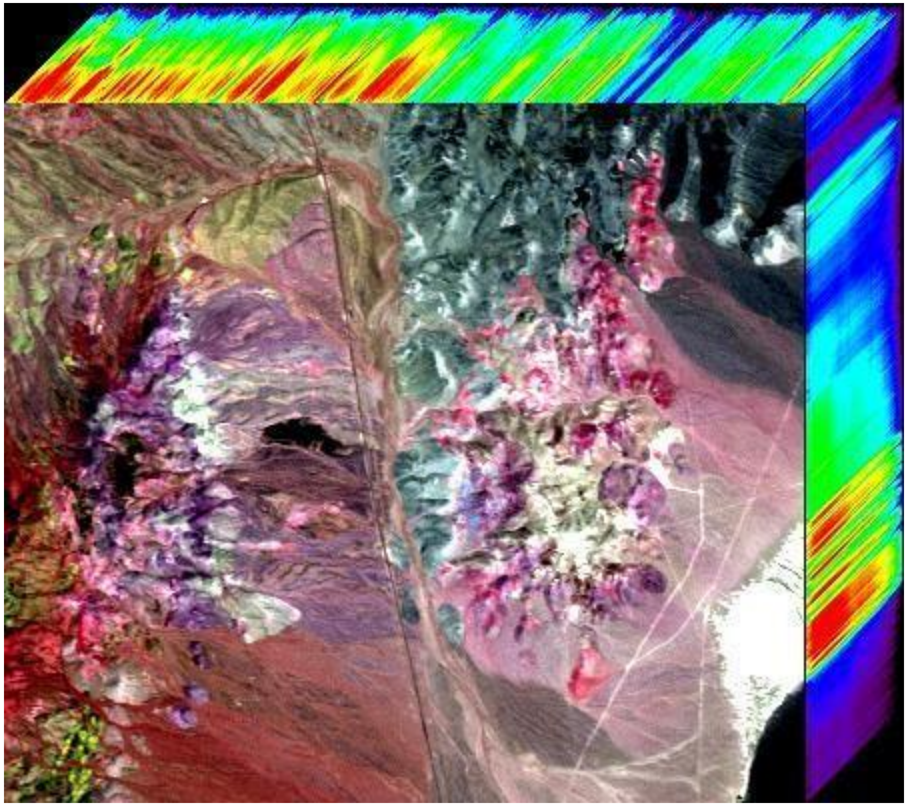
$$\det(\mathbf{A}) = \det\left(\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n\end{bmatrix}\right) = \boldsymbol{A} \times_1 \mathbf{a}_1 \times_2 \mathbf{a}_2 \cdots \times_n \mathbf{a}_n$$

$$a_{j_1 j_2 \cdots j_n} = \begin{cases} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} & \text{当} j_1 j_2 \cdots j_n \text{是} 12 \cdots n \text{ 的一个置换时} \\ 0 & \text{当} j_1 j_2 \cdots j_n \text{不是} 12 \cdots n \text{ 的一个置换时} \end{cases}$$

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1 j_1} a_{1 j_2} \ldots a_{1 j_n}$$

# 行列式的应用

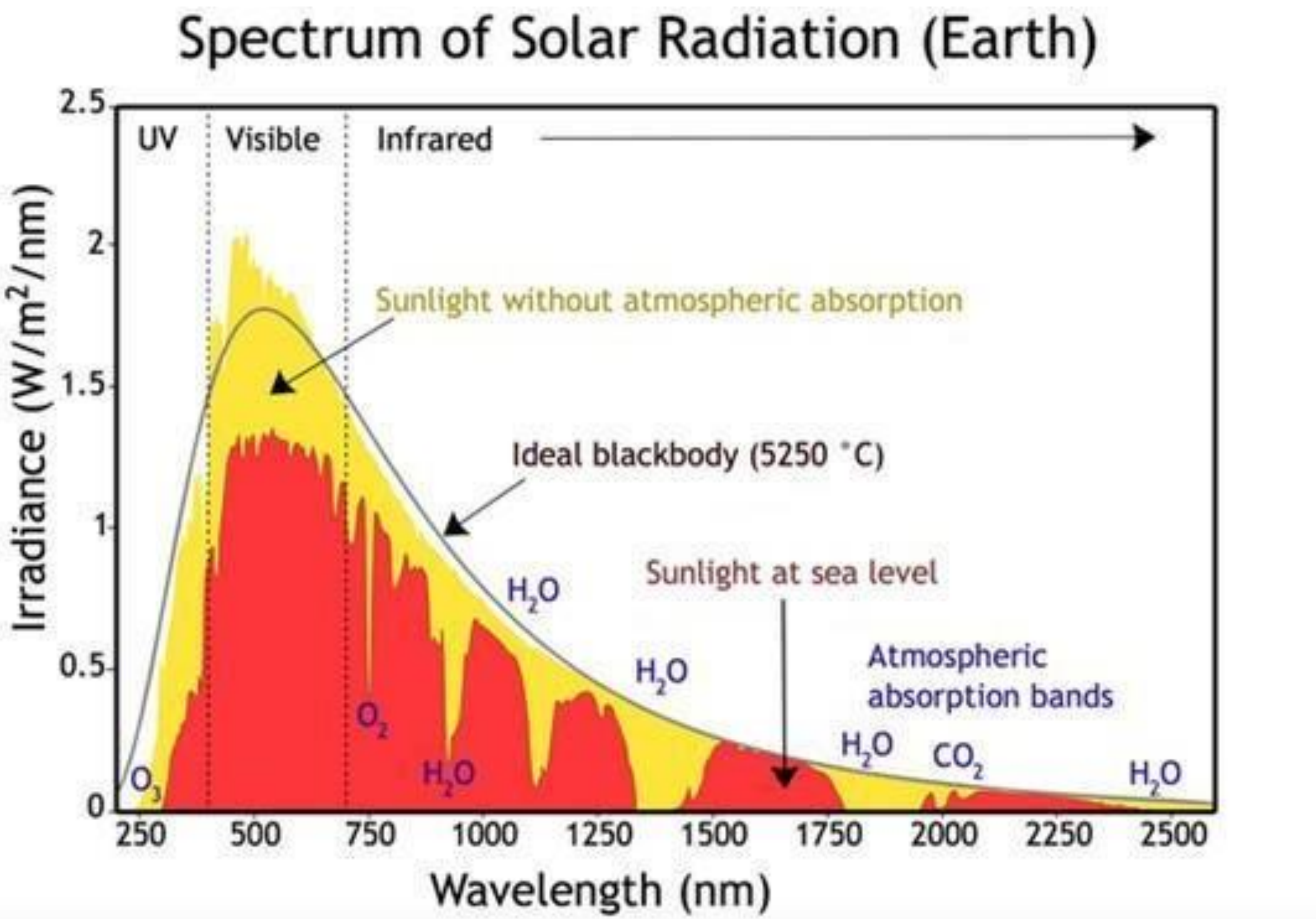
- 假彩色合成



如何选择合适的R，G，B三波段使得假彩色合成图具有更多的信息量？

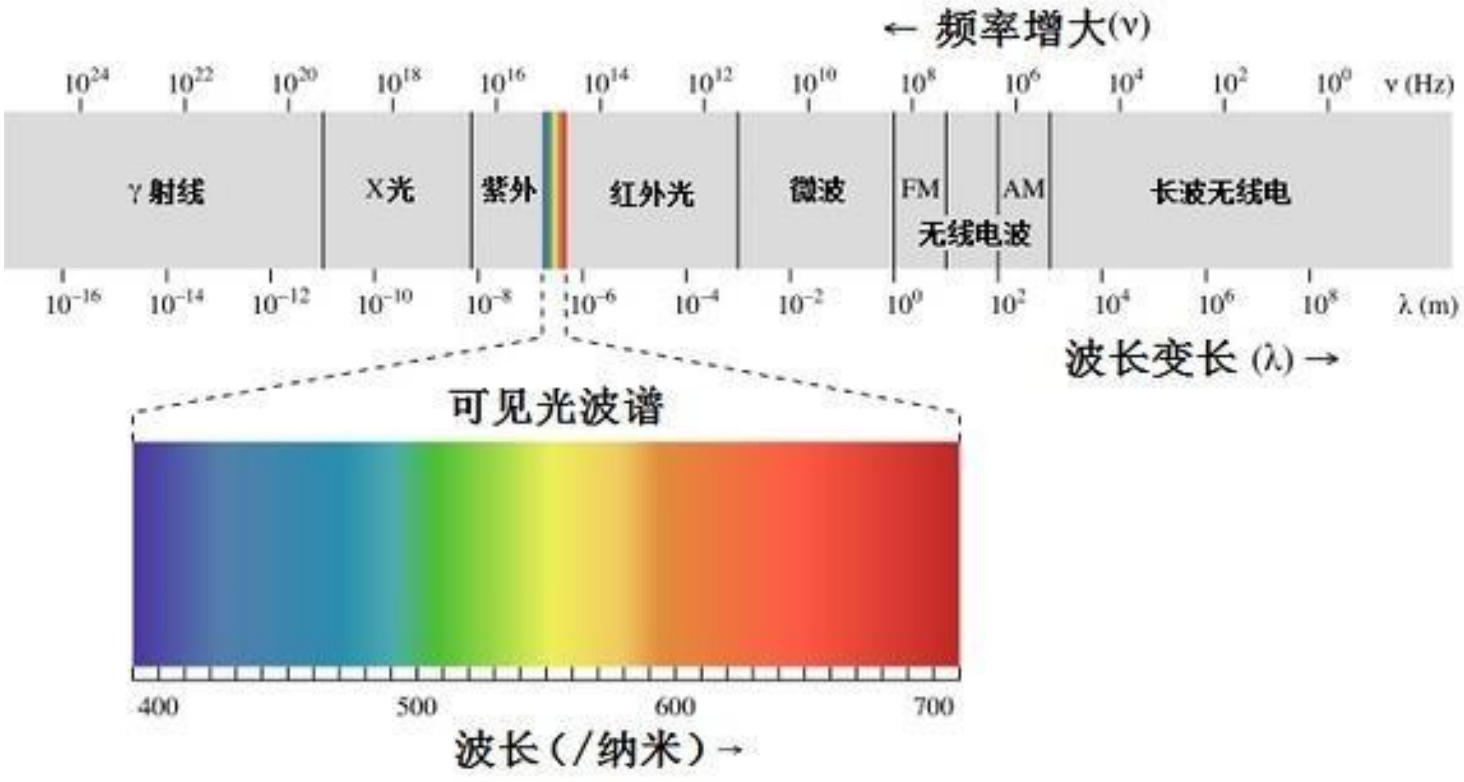
# 行列式的应用

- 太阳辐射光谱



# 行列式的应用

- 太阳辐射光谱



# 行列式的应用

## 人眼感光原理

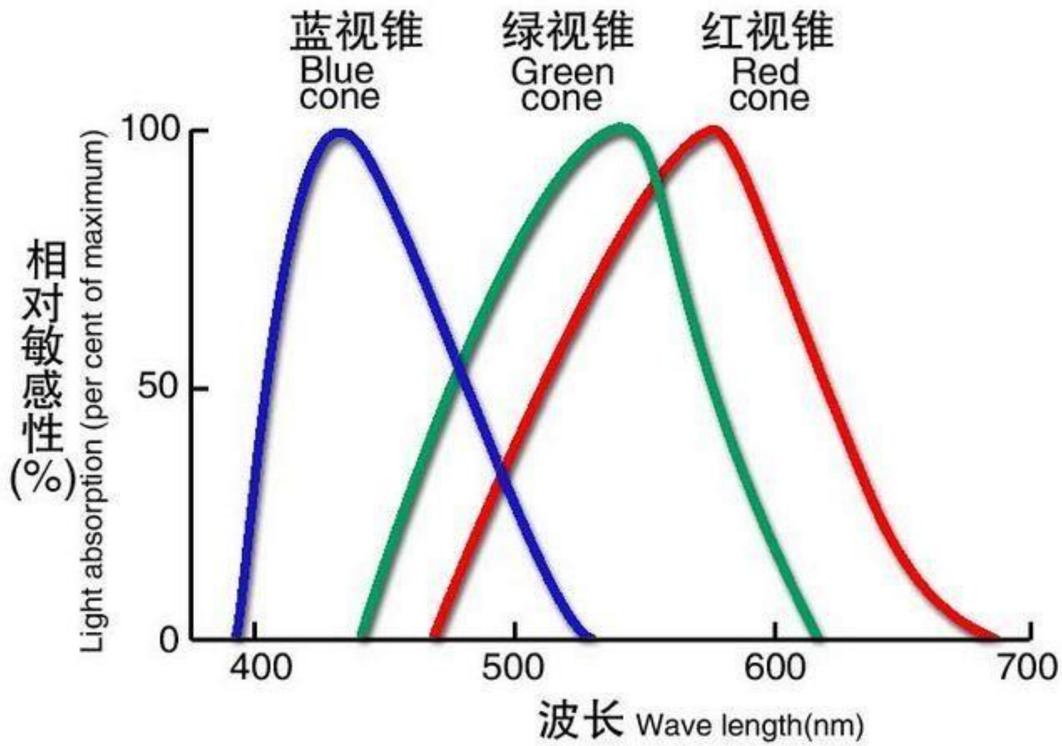
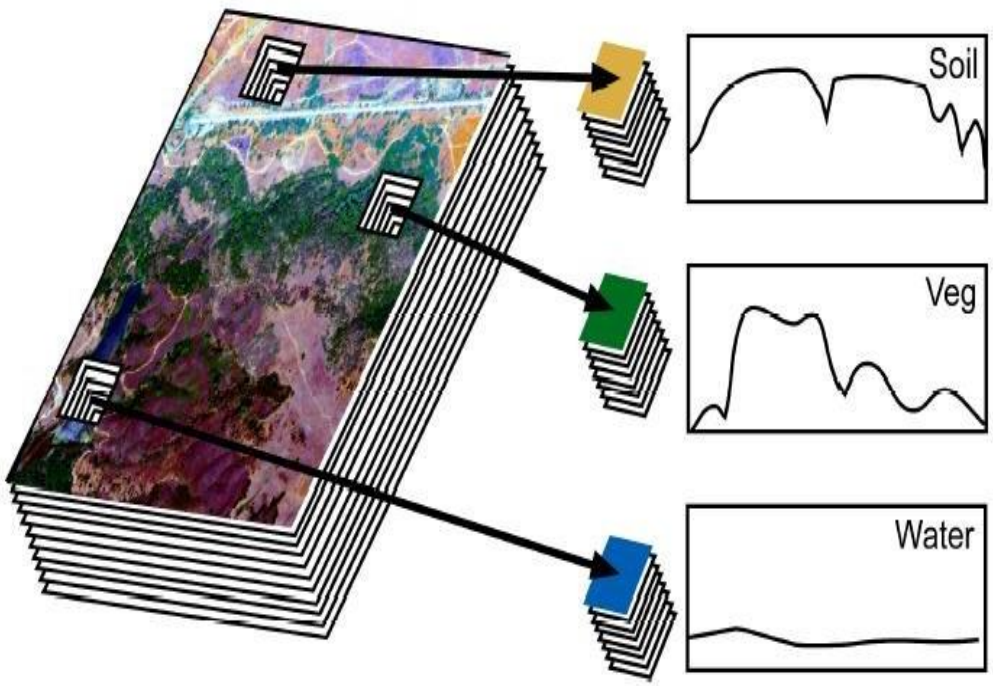



图 – 人视网膜中三种不同视锥细胞的光谱相对敏感性

颜色是生物学概念而不是物理学概念。颜色是我们的眼睛和大脑赋予的，在物理上只有频率，没有颜色。在人眼的视网膜上有2种感官细胞：一种叫视锥细胞，一种视杆细胞，视锥细胞大概600～700万个，视杆细胞大概一亿2500万个左右，正是这些细胞给我们五彩斑斓的世界。

# 行列式的应用

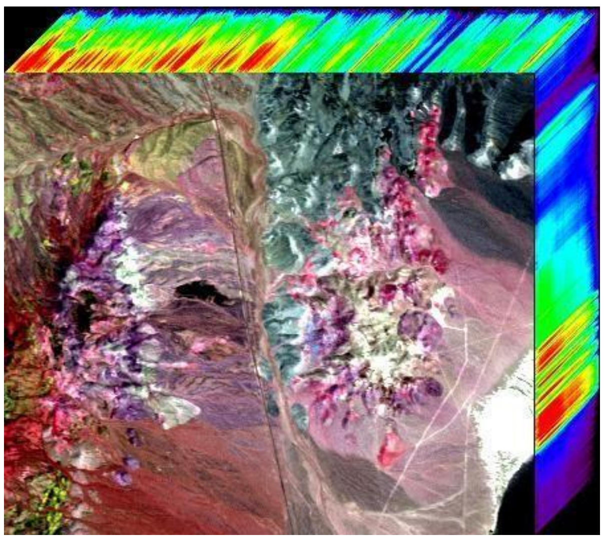
## 高光谱遥感的概念

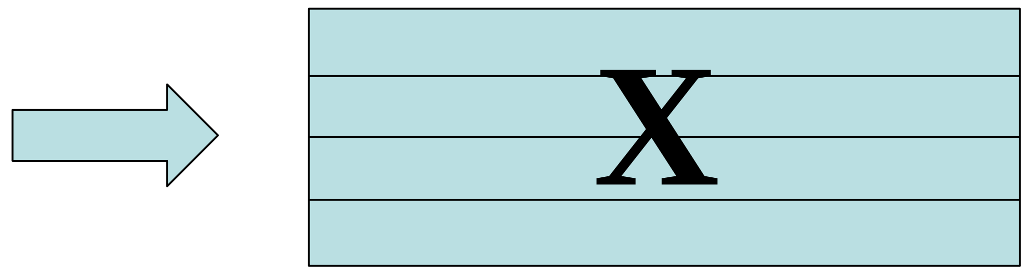



从每个象元均可提取一条连续的光谱曲线

# 行列式的应用

## 图像的矩阵表示






在实际处理的时候，一般都要先把一个数据立方体展成一个大矩阵？矩阵的每一行对应原始数据立方体的一个波段的图像，矩阵的每一列，代表的原始数据立方体的一个光谱向量。

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_L \end{bmatrix}$$

# 行列式的应用

## 假彩色合成

采用体积标准：$\sqrt{\det(\mathbf{X}\mathbf{X}^{T})}$或$\det(\mathbf{X}\mathbf{X}^{T})$

波段选择方法：穷举？

$$\max_{i,j,k} \det(\mathbf{X}([i,j,k],:)\mathbf{X}([i,j,k],:)^{\mathrm{T}})$$

注：在假设数据为多元高斯分布的情况下，波段子集协方差矩阵的行列式和波段子集的（联合）熵两个指标等价

http://www.asprs.org/wp-content/uploads/pers/1985journal/jun/1985_jun_681-687.pdf

# 行列式的应用

## 一个基本结论

$$
\begin{aligned}
\mathrm{H}[\boldsymbol{x}] &= -\int p(\boldsymbol{x}) \ln p(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= -\int p(\boldsymbol{x}) \ln\left[(2\pi)^{-\frac{k}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right]\right] \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= -\int p(\boldsymbol{x}) \left[\ln\left((2\pi)^{-\frac{k}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{-\frac{1}{2}}\right) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right] \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= \ln\left((2\pi)^{\frac{k}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{2}\int p(\boldsymbol{x}) \left[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu})\right] \mathrm{d}\boldsymbol{x} \\
&= \ln\left((2\pi)^{\frac{k}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{2}\int p(\boldsymbol{y}) \times \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y} \mathrm{d}\boldsymbol{y} \\
&= \ln\left((2\pi)^{\frac{k}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k} \mathrm{E}[y_i^2] \\
&= \ln\left((2\pi)^{\frac{k}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{k}{2} \\
&= \ln\left[(2\pi \mathrm{e})^{\frac{k}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{1}{2}}\right] \\
&= \frac{k}{2}(\ln 2\pi + 1) + \frac{1}{2}\ln|\boldsymbol{\Sigma}|
\end{aligned}
$$

在正态分布假设下，具有最大熵的波段子集即为具有最大协方差矩阵行列式的波段子集。

# 行列式的应用

- 假彩色合成

采用体积标准：$V=\sqrt{\det(\mathbf{X}\mathbf{X}^T)}$或$V=\det(\mathbf{X}\mathbf{X}^T)$

波段选择方法：后向法？

$$\max_i \det(\mathbf{X}([1:i-1,i+1:L],:)\mathbf{X}([1:i-1,i+1:L],:)^{\mathrm{T}})$$

# 行列式的应用

- 假彩色合成

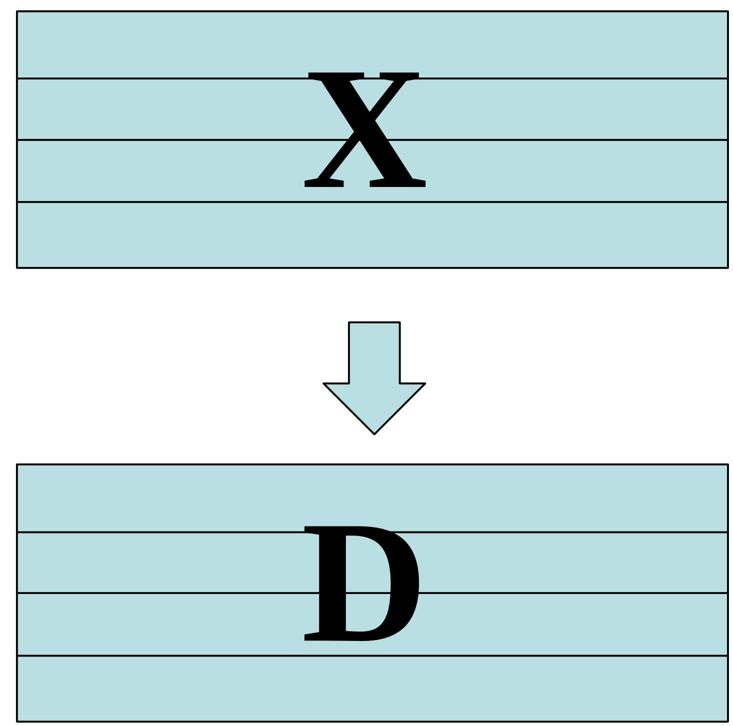
采用体积标准：$V=\sqrt{\det(\mathbf{X}\mathbf{X}^T)}$或$V=\det(\mathbf{X}\mathbf{X}^T)$

改进策略：利用梯度信息

$$\mathbf{D}=\frac{\partial\det(\mathbf{X}\mathbf{X}^T)}{\partial\mathbf{X}}$$

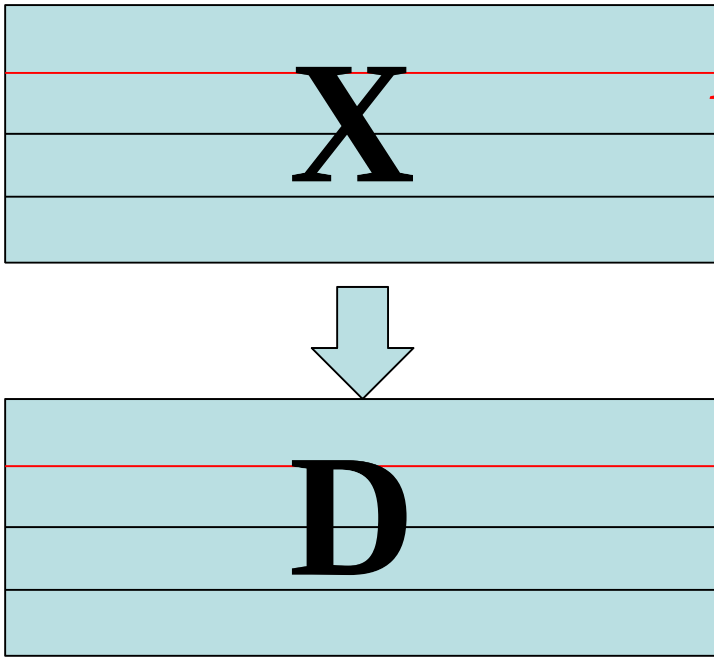
$$=2\det(\mathbf{X}\mathbf{X}^T)(\mathbf{X}\mathbf{X}^T)^{-1}\mathbf{X}$$

**D** 的大小与原图像 **X** 的大小相同。那么 **D** 的每一行有什么含义呢？



# 行列式的应用

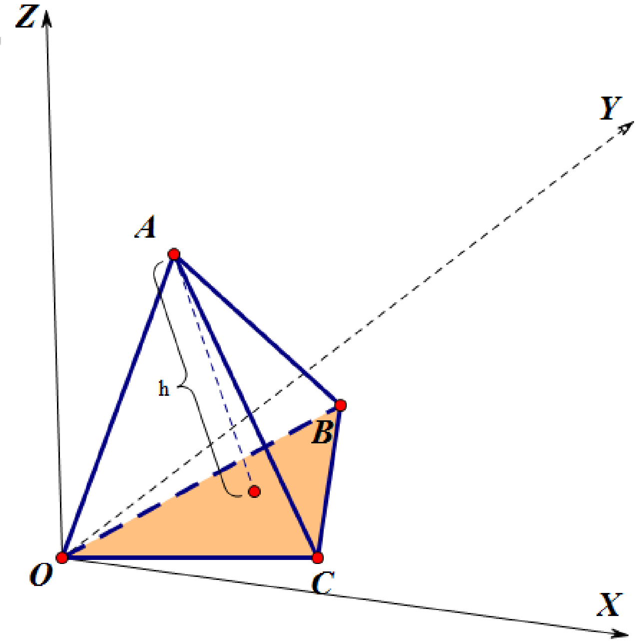
- 假彩色合成




$A$

$$\frac{\partial V}{\partial A}$$

$$S_{OBC} \propto \left\| \frac{\partial V}{\partial A} \right\|$$




$$V_m = \frac{1}{(m-1)!} V_{m-1} h$$

$$dV_m = \frac{1}{(m-1)!}\left((dV_{m-1})h + V_{m-1}dh\right)$$

$$dV_m = \frac{1}{(m-1)!} V_{m-1} dh$$

$$V_{m-1} = (m-1)\frac{dV_m}{dh}$$

# 行列式的应用

## 假彩色合成

$$\mathbf{D}=\frac{\partial \det(\mathbf{X}\mathbf{X}^{\mathrm{T}})}{\partial \mathbf{X}}=2\det(\mathbf{X}\mathbf{X}^{\mathrm{T}})(\mathbf{X}\mathbf{X}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{X}$$

进一步简化：

$$\mathbf{D}\mathbf{D}^{\mathrm{T}}=2\det(\mathbf{X}\mathbf{X}^{\mathrm{T}})(\mathbf{X}\mathbf{X}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{X}\left(2\det(\mathbf{X}\mathbf{X}^{\mathrm{T}})(\mathbf{X}\mathbf{X}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{X}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$=4\det(\mathbf{X}\mathbf{X}^{\mathrm{T}})^{2}(\mathbf{X}\mathbf{X}^{\mathrm{T}})^{-1}\mathbf{X}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(\mathbf{X}\mathbf{X}^{\mathrm{T}})^{-1}=c(\mathbf{X}\mathbf{X}^{\mathrm{T}})^{-1}$$

$(\mathbf{X}\mathbf{X}^{\mathrm{T}})^{-1}$的对角元素是有几何意义的！！！

# 行列式的应用

## 假彩色合成

进一步简化：分块矩阵求逆公式

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{U} \\ \mathbf{V} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}\left(\mathbf{D} - \mathbf{V}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}\right)^{-1}\mathbf{V}\mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}\left(\mathbf{D} - \mathbf{V}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}\right)^{-1} \\ -\left(\mathbf{D} - \mathbf{V}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}\right)^{-1}\mathbf{V}\mathbf{A}^{-1} & \left(\mathbf{D} - \mathbf{V}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{U}\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{u} \\ \mathbf{u}^T & d \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\left(d - \mathbf{u}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\right)^{-1}\mathbf{u}^T\mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\left(d - \mathbf{u}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\right)^{-1} \\ -\left(d - \mathbf{u}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\right)^{-1}\mathbf{u}^T\mathbf{A}^{-1} & \left(d - \mathbf{u}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\right)^{-1} \end{bmatrix}$$

假设$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{u} \\ \mathbf{u}^T & d \end{bmatrix}$，且$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{u} \\ \mathbf{u}^T & d \end{bmatrix}^{-1} \overset{记}{=} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}} & \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^T & c \end{bmatrix}$

则有$\boxed{\mathbf{A}^{-1} = \hat{\mathbf{C}} - \dfrac{\mathbf{c}\mathbf{c}^T}{c}}$

Sherman-Morrison公式

$$\left(\mathbf{A} + \mathbf{x}\mathbf{y}^T\right)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}\mathbf{y}^T\mathbf{A}^{-1}}{1 + \mathbf{y}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}}$$

# 行列式的应用

- 讨论

体积标准：$V = \det(\mathbf{X}\mathbf{X}^T)$ $\quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_L \end{pmatrix}$

$\tilde{V} = \det(\tilde{\mathbf{X}}\tilde{\mathbf{X}}^T) \quad \tilde{\mathbf{X}} = \begin{pmatrix} X_2 - X_1 \\ \vdots \\ X_L - X_1 \end{pmatrix}$

$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial \mathbf{X}} = ?$ $\tilde{V} = \det(\mathbf{Q}\mathbf{X}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}^{\mathrm{T}})$ $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$

# 行列式的进一步思考

- 群同态定理：对于任意群G和H,如果存在一个由G到H的群同态φ，则G的核Ker(φ)是G的一个正规子群，且G /Ker(φ)与φ(G)同构。

- 行列式可以认为是从一般线性群到非零实数群的**同态**映射，其核空间为特殊线性群。这说明特殊线性**群**是一般线性群的正规子群。

# 行列式的进一步思考

## 李群的同态映射

行列式作为李群同态映射，可以诱导出两个李群的李代数间的线性映射，而这个线性映射正是矩阵的迹。

$$\boxed{trace(\mathbf{X}) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \det\left(e^{t\mathbf{X}}\right)}$$

# 总结

- 几何上，矩阵的行列式其大小等于该矩阵各个列向量张成的平行多面体的体积。
- 代数上，矩阵的行列式是一个重交代线性函数。
- 叉积只适用于三维向量，楔形积可以适用于任意维度的向量，其几何意义均与平行多面体的体积相关。
- 混合积的几何意义也是平行多面体的体积，且该体积可以表示为该平行多面体的两个互补的子平行多面体的内积。
- 基于矩阵李群同态映射定理，矩阵行列式可以用来定义矩阵的迹。

# 谢　谢

**耿修瑞**

中国科学院空间信息创新研究院

**gengxr@sina.com.cn**