数据处理中的矩阵方法-第 4 次思考题

李厚华 202418019427056

2025 年 3 月 19 日

1 思考题

问题：如何求 n 维空间中任意 m（m<n）个列向量构成的平行多面体的体积？

解答：

首先，我们已经知道行列式的几何意义便是高维多边形体积，这一点从对角矩阵上很容易理解。同时也知道高维空间三角形的面积为 $S=\sqrt{A^TA}$，比如课堂中所提供的示例。基于此我们假设 n 维空间中任意 m（m<n）个列向量构成的平行多面体的体积的计算方法同样为 $S=\sqrt{A^TA}$，其中 A^TA 即为 Gram 矩阵。

下边将给出 n 维空间中 m（$m<n$）个列向量构成的平行多面体体积 $V=\sqrt{\det(G)}$（G 为 Gram 矩阵）的证明：

1. 施密特正交化分解矩阵 A

设 m 个列向量构成 $n\times m$ 矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)$。通过施密特正交化，可将 A 分解为 $A=QR$，其中：

- Q 是 $n\times m$ 矩阵，列向量为正交向量组（即 $Q^TQ=I_m$，I_m 为 m 阶单位阵）;
- R 是 $m\times m$ 上三角可逆矩阵。

2. 计算 Gram 矩阵 G

由 $G=A^TA$，代入 $A=QR$ 得：

$$G=(QR)^T(QR)=R^TQ^TQR=R^TI_mR=R^TR$$

利用行列式性质：

$$\det(G)=\det(R^TR)=\det(R^T)\cdot\det(R)=[\det(R)]^2$$

3. 证明体积与 $\det(G)$ 的关系

因为体积 $V=|\det(R)|$，结合 $\det(G)=[\det(R)]^2$，可得：

$$V=\sqrt{\det(G)}$$

综上，Gram 矩阵的行列式 $\det(G)$ 等于向量组张成平行多面体体积的平方，这是代数运算与几何意义结合的结果。

另外给出行列式与体积的关系的证明：

1. 对于正交基情形

很容易理解正交基所对应的平行多面体的体积即为向量长度累乘。设矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$，其列向量两两正交。

$$\det(A)=\pm\prod_{i=1}^{n}|\alpha_i|$$

绝对值 $|\det(A)|=\prod_{i=1}^{n}|\alpha_i|$，恰好是所有向量长度的累乘，即正交向量组张成平行六面体的体积。

2. 对于一般基情形

对任意可逆矩阵 A，利用 QR 分解可得 $A=QR$，其中：

- Q 为正交矩阵（$Q^TQ=E$，正交变换不改变体积）；
- R 为上三角矩阵，对角线元素是正交化后向量的长度。

根据行列式性质：

$$\det(A)=\det(QR)=\det(Q)\cdot\det(R)$$

因正交矩阵 $\det(Q)=\pm1$，故 $|\det(A)|=|\det(R)|$。而 R 上三角矩阵，$|\det(R)|=\prod_{i=1}^{n}|r_{ii}|$（$r_{ii}$ 为对角线元素，对应正交化后向量长度），即平行多面体的体积。

综上，无论正交基还是一般基，矩阵行列式的绝对值始终等于其列向量张成平行多面体的体积。