



傅里叶变换

耿修瑞

中国科学院空天信息创新研究院

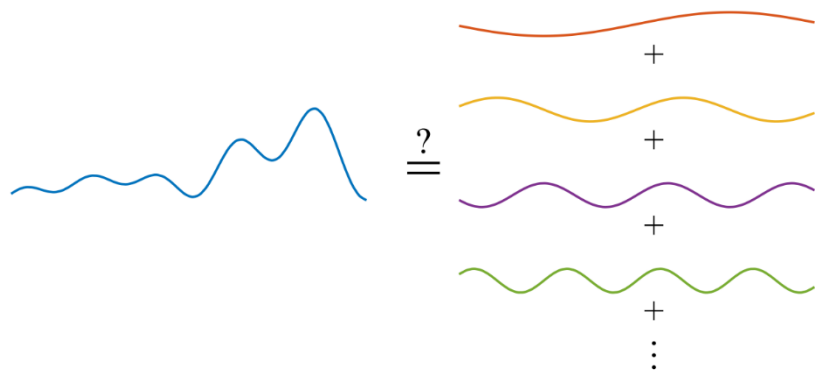
gengxr@sina.com.cn

2025.5

提纲

- 历史背景
- 傅里叶级数
- 傅里叶变换
- 离散傅里叶变换
- 快速傅里叶变换
- 循环移位矩阵
- 离散余弦变换
- 傅里叶变换的应用

历史背景



一个任意的函数能否被表示成三角函数之和？



傅里叶，法国，1786~1830

18世纪，“一个任意的函数能否被表示成三角函数之和”成了数学界大佬们激烈论证的话题，这些大佬包括伯努利、欧拉、大朗贝尔、拉格朗日、拉普拉斯。这一争论从18世纪60年代到70年代，但依旧没有完全证明。

傅里叶（Joseph Fourier, 1768-1830）于1803年左右开始研究热力学问题。1822年发表的《热的解析理论》是其对物理和数学领域贡献的代表作。在这篇著作中，傅里叶将欧拉、伯努利等人在特殊情况下应用三角函数表达其他函数的应用，发展为一般理论。因此，后来的三角级数展开被称作傅里叶级数，对应的一般复杂函数分解为简单三角函数的理论被称为傅里叶变换。

定义1（周期函数空间）：所有的周期为 T 的函数构成线性空间 H 。

- 封闭性（加法和数乘）
- 加法零元
- 加法逆元
- 加法和数乘的结合律和分配率
- 数乘单位元

傅里叶级数

任意线性空间上都可以定义内积么？

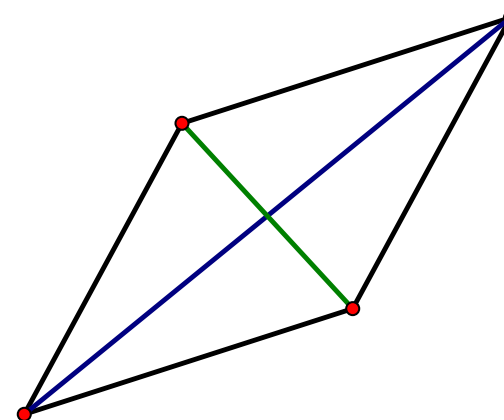
内积空间：

- 正定性： $\langle x, x \rangle \geq 0$, 当且仅当 $x=0$ 时等号才成立；
- 对称性（共轭对称性）： $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ 或 $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$
- 线性性： $\langle ax + by, z \rangle = a\langle x, z \rangle + b\langle y, z \rangle$

平行四边形法则：

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

线性空间是否可以定义内积，与选择的范数有关，当选择的范数满足平行四边形法则时，可以定义内积（**Jordan–von Neumann Theorem**）。



傅里叶级数

定义2（ H 上的内积）：在 H 上，可以定义元素的内积为

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) g(t) dt$$

定义了内积之后，可以验证，下面的一组三角函数构成 H 中的一组正交基。其中 $\omega_0 = 2\pi/T$ 称为基频

$$1, \cos(\omega_0 t), \sin(\omega_0 t), \cos(2\omega_0 t), \sin(2\omega_0 t), \dots$$

这意味着， H 中的所有函数，都可以由如下表达

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t))$$

其中

$$c_0 = \langle f(t), 1 \rangle$$

$$a_n = 2 \langle f(t), \cos(n\omega_0 t) \rangle, n = 1, 2, \dots$$

$$b_n = 2 \langle f(t), \sin(n\omega_0 t) \rangle, n = 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} & \int_{-T/2}^{T/2} \cos(m\omega_0 t) \sin(n\omega_0 t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t + n\omega_0 t) dt \\ & \quad - \frac{1}{2} \int_{-T/2}^{T/2} \sin(m\omega_0 t - n\omega_0 t) dt \\ &= -\frac{1}{2(m+n)\omega_0} \cos((m+n)\omega_0 t) \Big|_{-T/2}^{T/2} \\ & \quad + \frac{1}{2(m-n)\omega_0} \cos((m-n)\omega_0 t) \Big|_{-T/2}^{T/2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

傅里叶级数

除了三角函数，还可以选择复指数函数作为线性空间 H 的基：

$$\{e^{in\omega_0 t}, n \in \mathbb{Z}\}$$

相应地，空间中的内积公式调整为：

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \overline{g(t)} dt$$

可以验证，上述复指数函数构成线性空间的一组标准正交基：

$$\langle e^{im\omega_0 t}, e^{in\omega_0 t} \rangle = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}$$

H 中的任意函数 $f(t)$ 在这组基底下的表出系数（傅里叶系数），可以按如下公式计算

$$F_n = \langle f(t), e^{in\omega_0 t} \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt$$

傅里叶级数

定义3（傅里叶级数）对于一个周期为 T 的满足狄利克雷条件的函数 $f(t)$ ，其傅里叶系数公式为

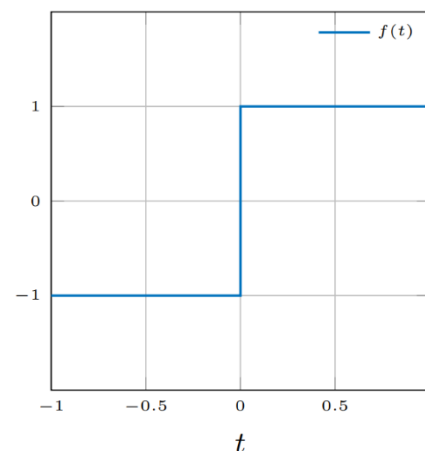
$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt$$

其中 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ 为函数的基频。相应地，函数 $f(t)$ 的傅里叶级数可以表示为

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{in\omega_0 t}$$

例1 计算一个周期为2的方波的傅里叶级数 ($k \in \mathbb{Z}$)

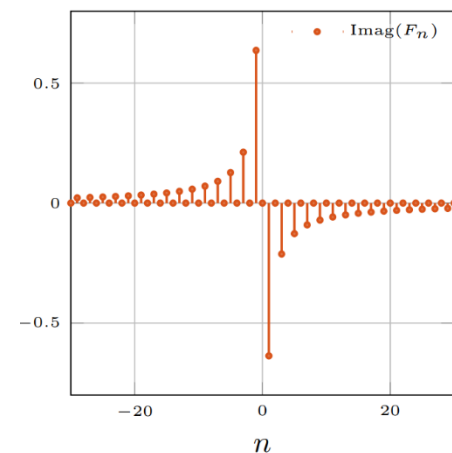
$$f(t) = \begin{cases} 1, & 2k \leq t < 2k+1 \\ -1, & 2k-1 \leq t < 2k \end{cases}$$



傅里叶级数

该函数的傅里叶系数为：

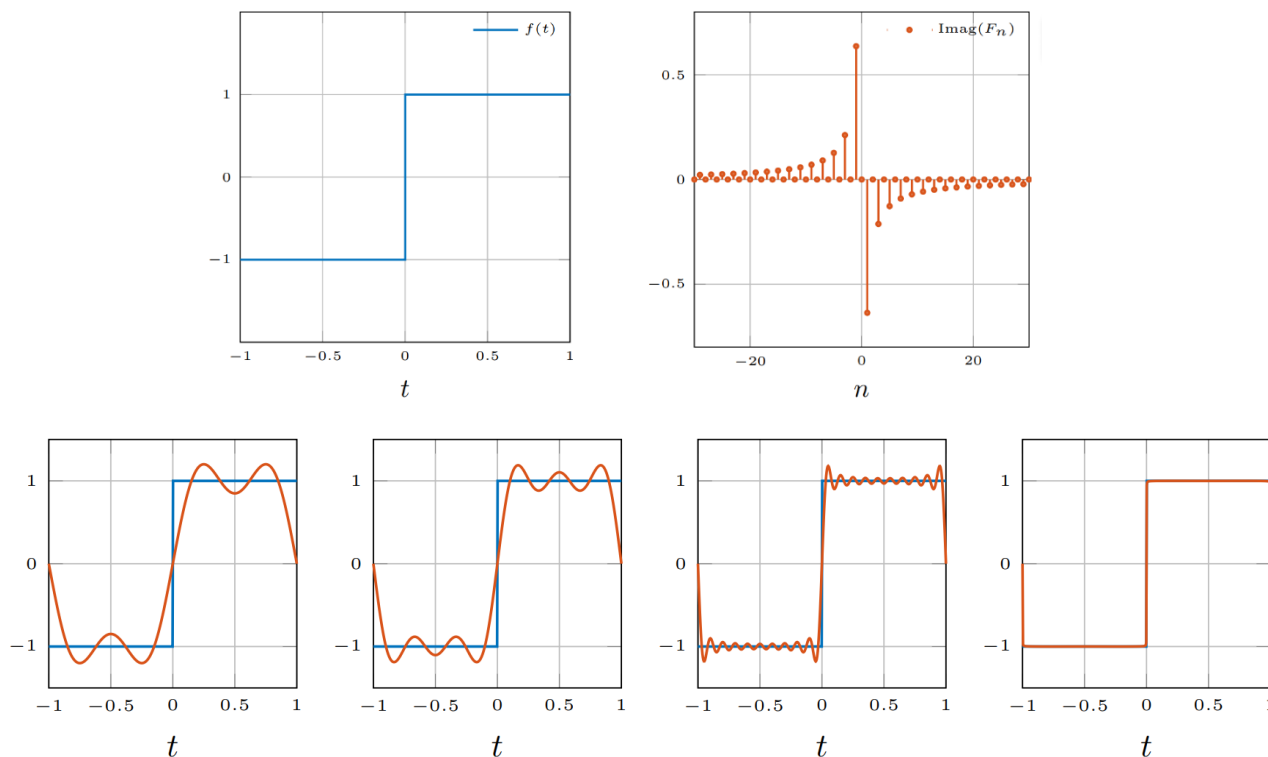
$$\begin{aligned}
 F_n &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(t) e^{-in\pi t} dt = -\frac{i}{2} \int_{-1}^1 f(t) \sin(n\pi t) dt \\
 &= -\frac{i}{2} \int_0^1 \sin(n\pi t) dt + \frac{i}{2} \int_{-1}^0 \sin(n\pi t) dt \\
 &= \frac{i}{2n\pi} \cos(n\pi t) \Big|_0^1 - \frac{i}{2n\pi} \cos(n\pi t) \Big|_{-1}^0 \\
 &= \begin{cases} 0, & n \text{ 为偶数} \\ -\frac{2i}{n\pi}, & n \text{ 为奇数} \end{cases}
 \end{aligned}$$



傅里叶级数

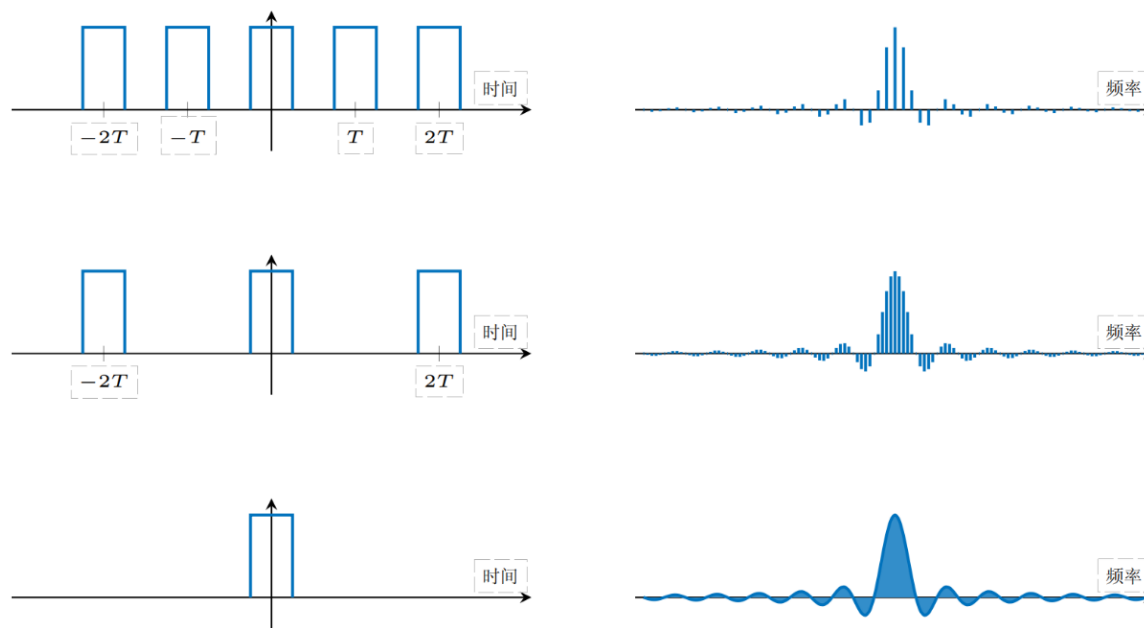


$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{in\omega_0 t} = \frac{4}{\pi} \left(\sin(\pi t) + \frac{1}{3} \sin(3\pi t) + \frac{1}{5} \sin(5\pi t) + \frac{1}{7} \sin(7\pi t) + \dots \right)$$



从左到右分别为：2,3,10,1000个正弦波之和

傅里叶变换



从傅里叶级数到傅里叶变换

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{in\omega_0 t} = \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \right) e^{in\omega_0 t} \\ &= \lim_{\omega_0 \rightarrow 0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\omega_0}{2\pi} \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt \right) e^{in\omega_0 t} \\ &\stackrel{\substack{\text{令 } \omega = n\omega_0 \\ d\omega = \omega_0}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned}$$

傅里叶变换: $F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$

反傅里叶变换: $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega$

傅里叶变换

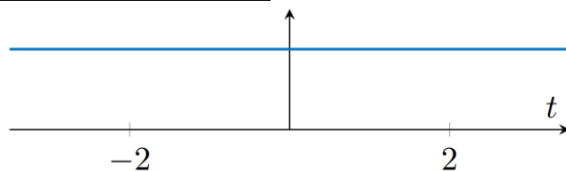
例2 计算下列函数的傅里叶变换

$$1. f(t) = 1$$

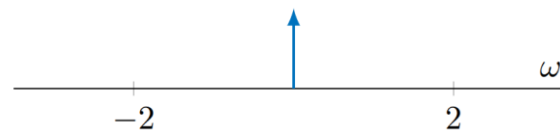
$$\text{由于 } g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\text{所以 } F(\omega) = \sqrt{2\pi} \delta(\omega)$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)}$$



常函数能量集中在零频率



$$2. f(t) = e^{i\alpha t}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha t} e^{-i\omega t} dt = \sqrt{2\pi} \delta(\omega - \alpha)$$

傅里叶变换

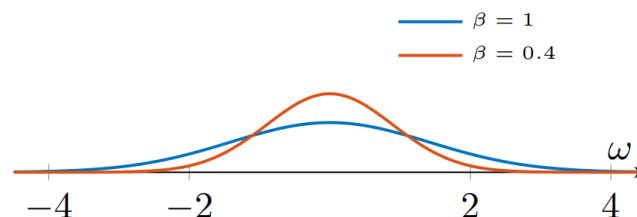
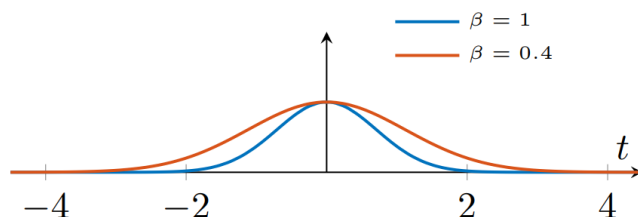
$$3. f(t) = e^{-\beta t^2}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta t^2} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta \left(t + \frac{i\omega}{2\beta}\right)^2 - \frac{\omega^2}{4\beta}} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta \left(t + \frac{i\omega}{2\beta}\right)^2} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta t^2} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}} \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} = \frac{1}{\sqrt{2\beta}} e^{-\frac{\omega^2}{4\beta}}$$

高斯函数的傅里叶变换仍然是高斯函数，时域窄高斯对应频域宽高斯，时域宽高斯对应频域窄高斯



$$4. f(t) = \begin{cases} -1, & -1 \leq t < 0 \\ 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \sin(\omega t) dt + \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^0 \sin(\omega t) dt \\ &= \frac{2i}{\sqrt{2\pi}\omega} (\cos \omega - 1) \end{aligned}$$

傅里叶变换

傅里叶级数与傅里叶变换之间有着紧密的联系。假设 $f(t)$ 仅在 $[-T/2, T/2]$ 区间有值，则它的傅里叶变换为

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

对 $f(t)$ 进行周期延拓，即将其看作周期为 T 的周期信号，那么对于周期延拓后的信号，我们可以计算它的傅里叶系数：

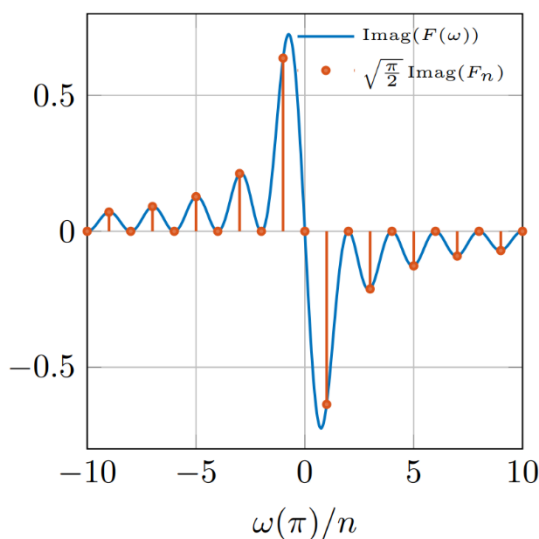
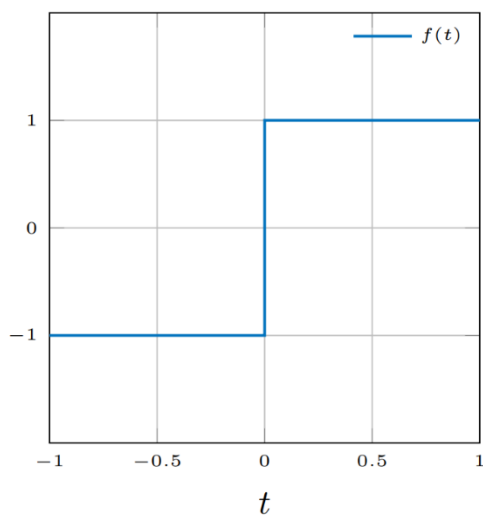
$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-in\frac{2\pi}{T}t} dt$$

对比上述两个公式，我们有（即傅里叶系数对应傅里叶变换的一个采样）：

$$F_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} F\left(n \frac{2\pi}{T}\right)$$

性质1：在傅里叶变换中，时域的周期化对应了频域的离散化

例3 比较周期为 2 的方波的傅里叶级数与其单周期的方波的傅里叶变换



将例1和例2.4的结论绘制在同一个图上，从中明显可以看出傅里叶系数对应了傅里叶变换的采样

傅里叶变换

采样函数（冲激串函数）：

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t-n)$$

用周期为 τ 的冲激串函数对连续信号采样：

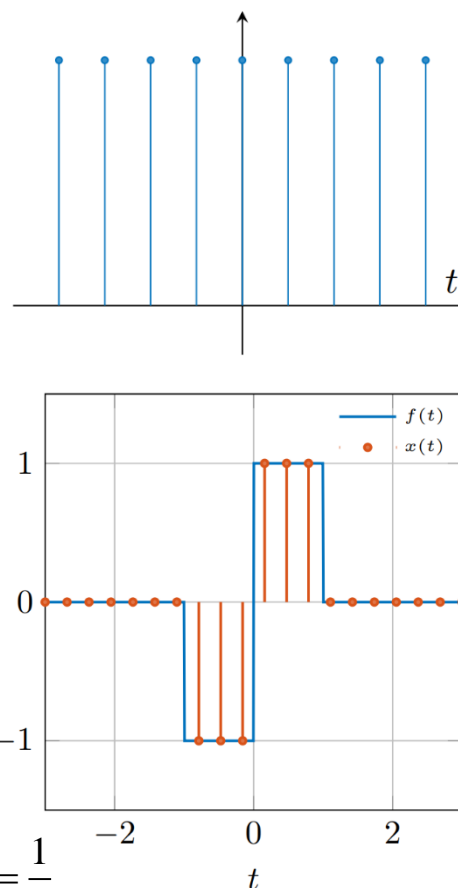
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-k\tau) f(t)$$

既然 $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-k\tau)$ 是周期为 τ 的周期函数，可计算其傅里叶系数为（其中 $\omega_s = 2\pi/\tau$ 为采样频率）：

$$F_n = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-k\tau) e^{-in\omega_s t} dt = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \delta(t) e^{-in\omega_s t} dt = \frac{1}{\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \delta(t) dt = \frac{1}{\tau}$$

因此有：

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-k\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{in\omega_s t} = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega_s t}$$



$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)}$$

傅里叶变换

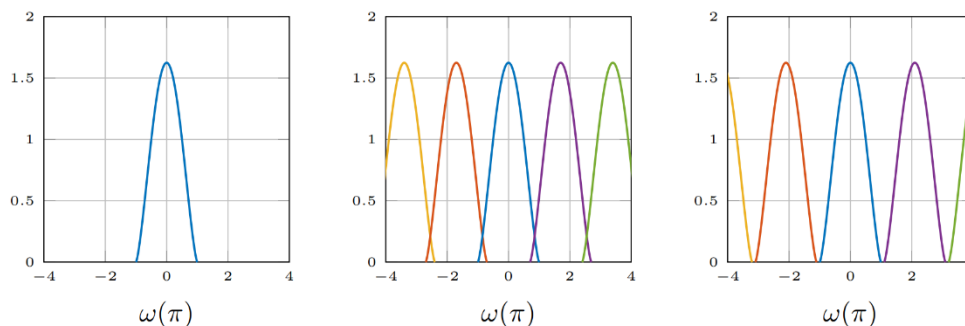
对采样后的信号进行傅里叶变换

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\omega_s t} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i(n\omega_s - \omega)t} dt = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s) \end{aligned}$$

称为采样后信号 $x(t)$ 的离散时间傅里叶变换。不难发现， $X(\omega)$ 是一个周期为 ω_s 的周期函数，这对应了傅里叶变换的另外一个重要性质：

性质2：在傅里叶变换中，时域的离散化对应频域的周期化。

定理1（香农采样定理）：对于一个带宽为 ω_0 的连续实信号 $f(t)$ ，如果采样率满足 $\omega_s \geq 2\omega_0$ ，则采样后的离散信号 $x(t)$ 能够完美重建得到 $f(t)$



离散傅里叶变换

傅里叶变换一般用来处理连续信号，而在实际应用中，我们的研究对象往往是有限的离散的数字信号，因此，离散傅里叶变换（DFT）应运而生。

对于一个连续信号 $f(t)$ ，对其以 $\omega_s = \frac{2\pi}{\tau}$ 的采样率进行采样，得到：

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\tau) f(t)$$

实际应用中，我们一般情况下仅能得到一个有限长的信号，设共采样了 N 个点，对应的离散信号为

$$\mathbf{x} = [x_0 \quad x_1 \quad \cdots \quad x_{N-1}]^T$$

其中 $x_k = x(k\tau) = f(k\tau)$

将没有采样到的点视为零值，则该离散信号的傅里叶变换为

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - k\tau) \right) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - k\tau) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k\tau) e^{-i\omega k\tau} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i\omega k\tau}. \end{aligned}$$

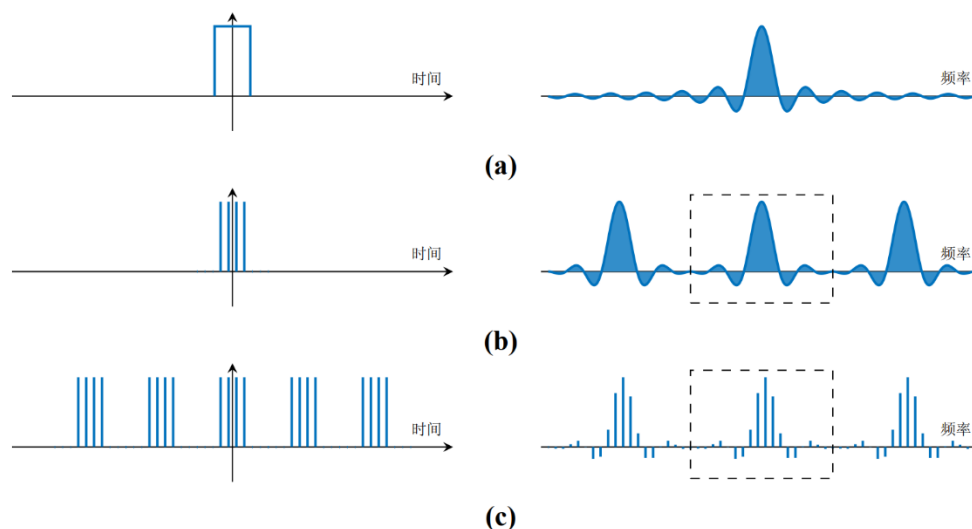
离散傅里叶变换

基于时域离散化对应频域周期化的性质，我们知道 $X(\omega)$ 为一周期信号。进一步地，利用时域周期化对应频域离散化这一性质，我们将采样得到的信号周期延拓为一个周期为 $T = N\tau$ 的周期信号，此时可以计算该信号的傅里叶系数。而我们又知道，傅里叶系数对应傅里叶变换的一个采样，即

$$F_n = \frac{\sqrt{2\pi}}{T} F\left(n \frac{2\pi}{T}\right)$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} X_n &= \frac{\sqrt{2\pi}}{T} X\left(n \frac{2\pi}{T}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{N\tau} X\left(n \frac{2\pi}{N\tau}\right) \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{N\tau} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-i\left(n \frac{2\pi}{N\tau}\right)k\tau} \\ &= \frac{1}{N\tau} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{2\pi n k i}{N}} \end{aligned}$$



从傅里叶变换到离散傅里叶变换：(a) 方波的傅里叶变换；(b) 时域的离散化对应频域的周期化；(c) 时域的周期化对应频域的离散化

离散傅里叶变换

傅里叶变换一般用来处理连续信号，而在实际应用中，我们的研究对象往往是有限的离散的数字信号，因此，离散傅里叶变换（DFT）应运而生。

定义4（离散傅里叶变换）给定一个向量

$$\mathbf{x} = [x_0 \quad x_1 \quad \cdots \quad x_{N-1}]^T$$

那么其离散傅里叶变换同样为一个向量

$$\mathbf{X} = [X_0 \quad X_1 \quad \cdots \quad X_{N-1}]^T$$

并且，离散傅里叶变换的正变换公式为

$$X_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{2\pi nki}{N}}$$

离散傅里叶逆变换公式为

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} X_k e^{\frac{2\pi nki}{N}}$$

离散傅里叶变换

离散傅里叶变换的基(不考虑系数)

$$\begin{array}{ll}
 n = 0 & 1, 1, \dots, 1 \\
 n = 1 & 1, e^{-\frac{2\pi i}{N}}, \dots, e^{-\frac{2(N-1)\pi i}{N}} \\
 \vdots & \\
 n = N-1 & 1, e^{-\frac{2(N-1)\pi i}{N}}, \dots, e^{-\frac{2(N-1)(N-1)\pi i}{N}}
 \end{array}$$

记 $\xi = e^{-\frac{2\pi i}{N}}$ ，则这组基底可以表示为

$$\begin{array}{ll}
 n = 0 & 1, 1, 1, \dots, 1 \\
 n = 1 & 1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{N-1} \\
 n = 2 & 1, \xi^2, \xi^4, \dots, \xi^{2(N-1)} \\
 \vdots & \\
 n = N-1 & 1, \xi^{N-1}, \xi^{2(N-1)}, \dots, \xi^{(N-1)^2}
 \end{array}$$

每个基
向量的
相邻元
素相位
差恒定

离散傅里叶变换

离散傅里叶变换的矩阵表达

$$\mathbf{F} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{\frac{2\pi i}{N}} & \dots & e^{\frac{2(N-1)\pi i}{N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{\frac{2(N-1)\pi i}{N}} & \dots & e^{\frac{2(N-1)(N-1)\pi i}{N}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{G} = \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^H = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{\frac{2\pi i}{N}} & \dots & e^{\frac{2(N-1)\pi i}{N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{\frac{2(N-1)\pi i}{N}} & \dots & e^{\frac{2(N-1)(N-1)\pi i}{N}} \end{bmatrix}$$

$$X_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{2\pi nki}{N}} \quad \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & e^{\frac{2\pi i}{N}} & \dots & e^{\frac{2(N-1)\pi i}{N}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{\frac{2(N-1)\pi i}{N}} & \dots & e^{\frac{2(N-1)(N-1)\pi i}{N}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{F}\mathbf{x}$$

离散傅里叶变换

$$\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^H \overset{\text{记}}{=} [\boldsymbol{\eta}_0 \quad \boldsymbol{\eta}_1 \quad \cdots \quad \boldsymbol{\eta}_{N-1}]$$

当以 $\{\boldsymbol{\eta}_0, \boldsymbol{\eta}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}_{N-1}\}$ 作为 \mathbb{C}^N 的基底时

$$\mathbf{x} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{X} = X_0 \boldsymbol{\eta}_0 + X_1 \boldsymbol{\eta}_1 + \cdots + X_{N-1} \boldsymbol{\eta}_{N-1}$$

当以 $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{N-1}\}$ 作为 \mathbb{C}^N 的基底时

$$\mathbf{x} = \mathbf{I} \mathbf{x} = x_0 \mathbf{e}_0 + x_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + x_{N-1} \mathbf{e}_{N-1}$$

$\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{N-1}\}$ 到 $\{\boldsymbol{\eta}_0, \boldsymbol{\eta}_1, \dots, \boldsymbol{\eta}_{N-1}\}$ 的过渡矩阵为 \mathbf{F}^{-1} ，相应地，同一个向量在这两个基底的坐标关系满足

$$\mathbf{X} = (\mathbf{F}^{-1})^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{F} \mathbf{x}$$

离散傅里叶变换

例4 以 $w_0 = 2\pi/0.1$ 的采样率对如下连续信号在 $0 \leq t < 2$ 区间进行采样,

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

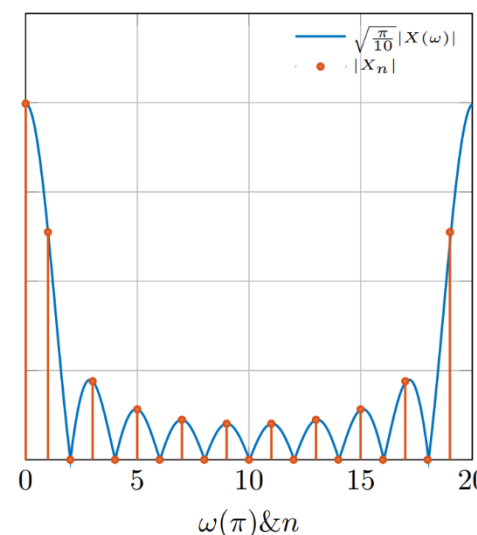
计算采样后信号的离散时间傅里叶变换和离散傅里叶变换

采样后的信号为

$$x(t) = \sum_{k=0}^{19} \delta(t - 0.1k) f(t)$$

计算离散时间傅里叶变换

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{19} \delta(t - 0.1k) f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^9 e^{-\frac{\omega k i}{10}} \end{aligned}$$

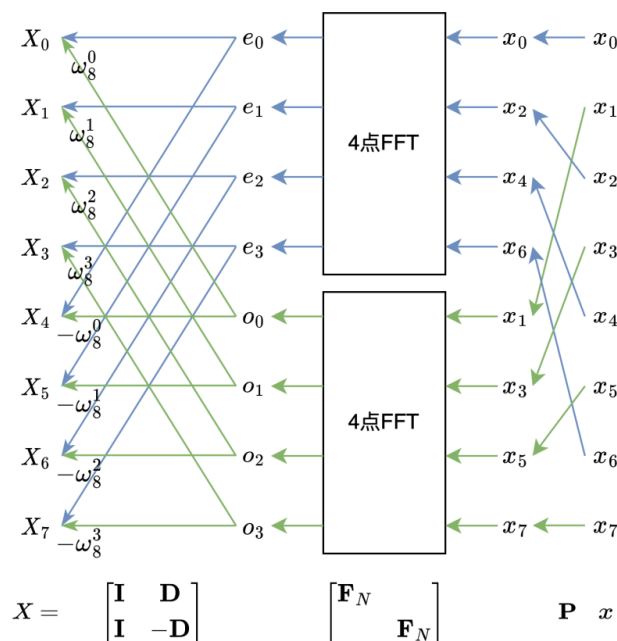


计算离散傅里叶变换（可以发现，离散傅里叶变换是离散时间傅里叶变换的一个采样）

$$X_n = \frac{1}{\sqrt{20}} \sum_{k=0}^{19} x_k e^{-\frac{2\pi n k i}{20}} = \frac{1}{\sqrt{20}} \sum_{k=0}^9 e^{-\frac{\pi n k i}{10}} = \sqrt{\frac{\pi}{10}} X(\pi n)$$

快速傅里叶变换 (FFT)

离散傅里叶变换的计算复杂度为 $O(N^2)$ ，快速傅里叶变换利用离散傅里叶变换矩阵的特殊性质将复杂度降为 $O(N \log N)$ 。



上述示意图给出了快速傅里叶变换的基本原理及对应的矩阵表达

循环移位矩阵



循环移位矩阵 (Cyclic Shift Matrix)

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = [u_0 \quad u_1 \quad \cdots \quad u_{N-2} \quad u_{N-1}]^T$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{u} = [u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_{N-1} \quad u_0]^T$$

讨论：循环移位矩阵在实数域内是否可以开任意次方？

循环移位矩阵的特征向量

$$\mathbf{Q}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_{N-1} & u_0 \end{bmatrix}^T = \lambda \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & \cdots & u_{N-2} & u_{N-1} \end{bmatrix}^T$$

由于循环移位矩阵为正交阵，所以其特征值的模必然为1，下面分两种情况讨论

1. 当特征值为实数时，必然有 $\lambda = 1$ 或者 $\lambda = -1$

当 $\lambda = 1$ 时，必然有 $u_0 = u_1 = \cdots = u_{N-1}$ ，此时 N 无论为奇数还是偶数均可。

当 $\lambda = -1$ 时，必然有 $u_0 = -u_1 = u_2 = -u_3 = \cdots$ ，此时 N 必然为偶数才行。

2. 当特征值为复数时，特征向量的各个相邻像元必然等相位间隔，相应的特征值对应着相位差

。

$$u_1 = \lambda u_0$$

$$u_2 = \lambda u_1$$

$$\vdots$$

$$u_{N-1} = \lambda u_{N-2}$$

$$u_0 = \lambda u_{N-1}$$

定理2 $N \times N$ 大小的循环移位矩阵有如下特征分解公式

$$\mathbf{Q} = \mathbf{F} \mathbf{D} \mathbf{F}^H = \mathbf{F}^H \bar{\mathbf{D}} \mathbf{F}$$

其中 \mathbf{F} 为对应大小的离散傅里叶变换矩阵， \mathbf{D} 为特征值矩阵，其对角元素为 $e^{-\frac{2\pi ki}{N}}, k=0,1,\dots,N-1$ 。

根据定理2中循环移位矩阵的对角化公式，我们知道循环移位矩阵 \mathbf{Q} 和其对角矩阵 \mathbf{D} 是相似的，两者是同一个与坐标选择无关的线性变换在不同坐标系下的矩阵表示。或者说，这个与坐标无关的线性变换在时域内表现为平移（循环移位），在频域内表现为相位移动。

循环移位矩阵的频域解释：将循环移位矩阵作用于离散信号 \mathbf{x} 将得到时域上一个新的信号 \mathbf{Qx} ，由于 $\mathbf{Q} = \mathbf{F}^H \bar{\mathbf{D}} \mathbf{F}$ ，因此上述循环移位操作可以分解为三个动作，分别为

- (1) 首先对信号进行离散傅里叶变换，即 \mathbf{Fx}
- (2) 然后在频域对上述变换后的信号进行相位调整，即 $\bar{\mathbf{D}}(\mathbf{Fx})$
- (3) 最后再用离散傅里叶逆变换将相位调整后的信号变换回时域，
即 $\mathbf{F}^H \bar{\mathbf{D}} \mathbf{Fx}$

由于 $\mathbf{Q}^m = \mathbf{F}^H \bar{\mathbf{D}}^m \mathbf{F}$ ，因此，时域上任意大小的循环移位均可以给出如上频域解释。

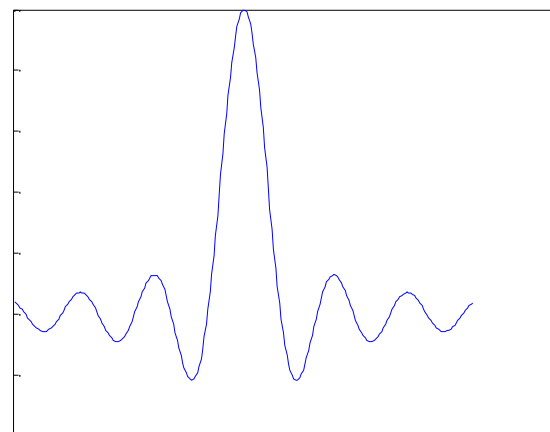
循环移位矩阵的时域解释：当 m 为整数时，从时域的角度 \mathbf{Q}^m 的作用就是将一个向量进行 m 个单位的循环移位，即

$$\mathbf{Q}^m \mathbf{x} = [x_m \quad \cdots \quad x_{N-1} \quad x_0 \quad \cdots \quad x_{m-1}]^T$$

但当 m 为任意实数时，又该如何从时域角度理解 \mathbf{Q}^m 的作用呢？

定理3 当 N 为奇数且趋向于正无穷时，利用循环移位矩阵的任意实数次方来对信号进行平移等价于对信号进行sinc插值。

思考：请尝试对上述定理进行证明
(可以作为读书报告题目)



尽管离散傅里叶变换在理论上具有重要意义，并且快速傅里叶变换（FFT）在一定程度上加快了计算速度，但其在很多领域的实用性仍然受到复数运算的限制。由于实偶函数的傅里叶变换仍然是偶函数，这一特性催生了一种专门在实数域中进行的变换—离散余弦变换（DCT）。

不考虑常系数的影响，发现DFT可以分为两个部分

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{-\frac{2\pi nki}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) - i \sum_{k=0}^{N-1} x_k \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)$$

对信号进行对称延拓得到 $\tilde{x}_k (k = -(N-1), \dots, 1, 0, 1, \dots, N-1)$ ，延拓后的信号关于原点对称 ($\tilde{x}_{-k} = \tilde{x}_k = x_k$)。记延拓后信号的离散傅里叶变换为

$$\tilde{X}_n (n = -(N-1), \dots, 1, 0, 1, \dots, N-1)$$

容易验证，该序列的任意分量的虚部均为0

$$\text{Im} ag(\tilde{X}_n) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \tilde{x}_k \sin\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) = 0$$

进一步地，可以验证， \tilde{X}_n 的实部关于原点对称，即 $\tilde{X}_n = \tilde{X}_{-n}$

$$\begin{aligned}\operatorname{Real}(\tilde{X}_n) &= \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} \tilde{x}_k \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) \\&= \tilde{x}_0 + \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{x}_k \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) + \sum_{k=-(N-1)}^{-1} \tilde{x}_k \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) \\&= \tilde{x}_0 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{x}_k \cos\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) \\&= \operatorname{Real}(\tilde{X}_{-n})\end{aligned}$$

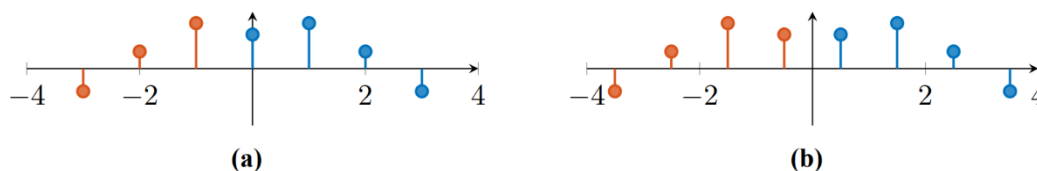
从上面的推导可以看出，当 $n=0$ 时，延拓后信号离散傅里叶变换的分量为

$$\tilde{X}_0 = \tilde{x}_0 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{x}_k = x_0 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} x_k$$

而原始信号的离散傅里叶变换的分量为

$$X_0 = x_0 + \sum_{k=1}^{N-1} x_k = \sum_{k=0}^{N-1} x_k$$

二者并不成正比，这是因为我们对信号进行对称延拓的时候， x_0 位于对称中心并没有被复制。因此，在实际应用中，通常将信号平移0.5个单位，然后再进行对称延拓。延拓后信号的离散傅里叶变换对应原始信号的离散余弦变换。



信号的两种延拓方式.(a)直接延拓；(b) 平移后延拓

定义5（离散余弦变换） 给定一个实向量

$$\mathbf{x} = [x_0 \quad x_1 \quad \cdots \quad x_{N-1}]^T$$

那么离散余弦变换同样为一个实向量

$$\mathbf{X} = [X_0 \quad X_1 \quad \cdots \quad X_{N-1}]^T$$

并且，离散余弦的正变换公式为

$$X_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cos \left(\frac{\pi n \left(k + \frac{1}{2} \right)}{N} \right)$$

离散余弦的逆变换公式为

$$x_k = \frac{X_0}{N} + \frac{2}{N} \sum_{n=1}^{N-1} X_n \cos \left(\frac{\pi n \left(k + \frac{1}{2} \right)}{N} \right)$$

离散余弦变换的矩阵表达:

$$\mathbf{X} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cos\left(\frac{\pi \frac{1}{2}}{N}\right) & \cos\left(\frac{\pi \frac{3}{2}}{N}\right) & \cdots & \cos\left(\frac{\pi \frac{2N-1}{2}}{N}\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos\left(\frac{\pi (N-1) \frac{1}{2}}{N}\right) & \cos\left(\frac{\pi (N-1) \frac{3}{2}}{N}\right) & \cdots & \cos\left(\frac{\pi (N-1) \frac{2N-1}{2}}{N}\right) \end{bmatrix}$$

定理4 拉普拉斯算子对应的矩阵 \mathbf{L} 具有如下对角化公式

$$\mathbf{L} = \mathbf{C}^T \mathbf{D} \mathbf{C}^{-T}$$

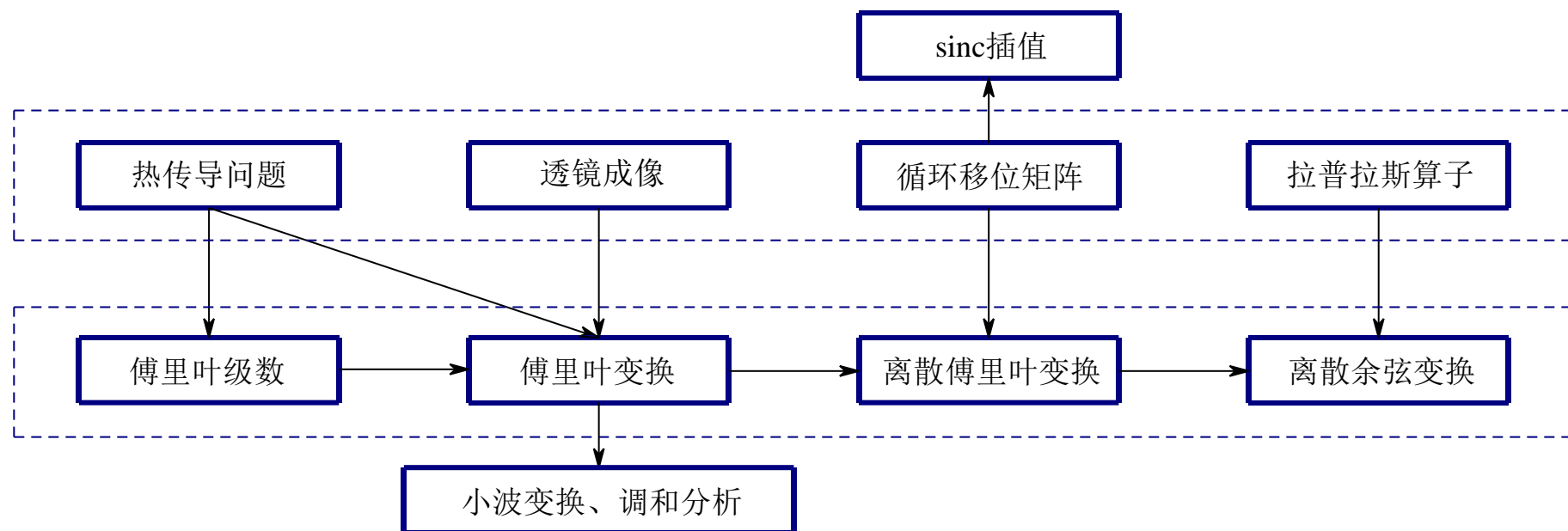
其中 \mathbf{C} 为离散余弦变换矩阵, \mathbf{D} 为对角矩阵。

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

傅里叶变换的应用

基于透镜成像和傅里叶变换的关系诞生了傅里叶光学这一方向。傅里叶变换已经在诸多领域产生了广泛的应用，比如信号处理领域的频谱仪、机械领域的振动分析仪、光学领域的傅里叶变换光谱仪、微波遥感领域的相控阵雷达合成孔径雷达、医学领域的核磁共振等等。

小结



小结

1. 傅里叶级数告诉我们，满足一定条件的周期函数可以表示为一系列三角函数的和。
2. 任意绝对可积的函数的傅里叶变换可以认为是周期为无穷大的周期函数的傅里叶级数。
3. 在傅里叶变换中，时域的周期化对应频域的离散化，而时域的离散化对应频域的周期化。
4. 离散傅里叶变换是酉变换，其变换矩阵是循环移位矩阵的特征向量矩阵。
5. 平移（循环移位）和相移对应同一个线性变换，该线性变换在时域内表现为平移，在频域内表现为相移，而（离散）傅里叶变换则架起了两者之间转换关系的桥梁。
6. 循环移位矩阵在时域内可以实现 sinc 函数的功能。



谢 谢

耿修瑞

中国科学院空天信息创新研究院

gengxr@sina.com.cn