

姓名\_\_\_\_\_学号\_\_\_\_\_成绩\_\_\_\_\_

1. 设  $X(1), X(2)$  是独立同分布的随机样本, 服从均匀分布  $U(0, \theta)$ , 试给出  $\theta^2$  的无偏估计。
2. 考虑如下拟合模型,  $(A, B)$  为二元未知参数

$$X(n) = A\alpha^n + B\beta^n + W(n), \quad n = 1, 2$$

其中  $W(n)$  为零均值宽平稳高斯噪声, 相关函数  $R_W(\tau)$  满足

$$R_W(0) = 1, \quad R_W(1) = \rho$$

试计算  $(A, B)$  的 Cramer-Rao 界。

3. 考虑零均值宽平稳随机序列  $X(n)$ , 满足

$$X(n) = \frac{1}{2}W(n-1) + W(n)$$

其中  $W(n)$  的功率谱密度满足

$$S_W(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < \pi/2 \\ 0 & \text{others} \end{cases}$$

请计算  $X(n)$  的二阶后向线性预测器系数以及预测误差。

4. 考虑零均值宽平稳随机序列  $X(n)$ , 满足

$$X(n) = aX(n-1) + bX(n-2) + W(n)$$

其中  $W(n)$  为零均值高斯白噪声, 方差为  $\sigma^2$ 。试构造二阶线性滤波器, 利用  $X(n), X(n-1)$  对  $W(n)$  进行估计, 并计算估计误差。

5. 考虑第 4 题中的随机序列, 请构造适当的 Kalman 滤波器, 对  $X(n)$  进行滤波。只需写出状态方程, 观测方程, 预测方程以及校正方程即可。

6. 考虑 LMS 滤波器, 误差度量为  $\epsilon(\theta) = (Y - \theta^T X)^2$ 。该滤波器有如下变化形式

$$\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_{n-1} + \alpha e(n)X(n) + \beta(\hat{\theta}_n - \hat{\theta}_{n-1})$$

也就是给出了所谓的 Momentum 项。请给出滤波器均值收敛的条件。

7. 设矩阵  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , 其奇异值分解为  $A = U\Sigma V^T$ 。请计算矩阵  $B = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$  的奇异值分解

8. 设  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , 其伪逆为  $A^+$ ,  $\text{rank}(A) = k$ , 试计算

$$\text{Tr}(A(A^+A)^n A^+) \quad \text{和} \quad \text{Tr}(A^+(AA^+)^n A)$$

9. 考察第 3 题信号  $X(k), k = 1, 2$ , 请计算该信号的 Capon 谱估计。