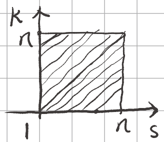
9. 考虑第四题的信号模型 X(n)，计算 $\{X(n), n=1,2,3\}$ 的周期图谱估计的均值，

$X(n) = A(n) - A(n-1) + U(n)$

解：
$$\hat{S}_{period}(\omega) = \frac{1}{n} E\left|\sum_{k=1}^{n} x_k \exp(-j\omega k)\right|^2$$
$$= \frac{1}{n} E\left\{\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} x_k x_s^* \exp[-j\omega(k-s)]\right\}$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} E\{x_k x_s^*\} \exp[-j\omega(k-s)]$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{s=1}^{n} R_x(k-s) \exp[-j\omega(k-s)]$$



令 $k' = k-s \quad s' = s$

$k'=0 \quad s \in (0, n)$

$k'=1 \quad s \in (1, n-1)$

$k'=2 \quad s \in (1, n-2)$

...

$k'=n-1 \quad s=1$

$$原式 = \frac{1}{n}\left\{\sum_{k'=1-n}^{0} R_x(k')\exp(-j\omega k')\times(n-k') + \sum_{k'=1}^{n-1} R_x(k')\exp(-j\omega k')(n-|k'|)\right\}$$
$$= \sum_{k'=1-n}^{n-1}\left(1-\frac{|k'|}{n}\right)R_x(k')\exp(-j\omega k')$$

$k'=-1$ 时 $s\in(2, n)$

$k'=-2$ 时 $s\in(3, n)$

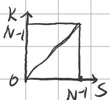
$$= R_x(0) + \frac{4}{3}R_x(1)\cos(\omega) + \frac{2}{3}R_x(2)\cos(2\omega)$$

考虑零均值 Gaussian 白噪声序列 $X(k)$，功率谱是 1，有人计算谱估计 $S_X(\omega)$ 时，忘记取模，得到如下形式

$$S_X(\omega) = \frac{1}{N}\left(\sum_{k=0}^{N-1} X(k)\exp(-j\omega k)\right)^2$$

请计算这种谱估计的均值 $E(S_X(\omega))$ 和协方差 $E(S_X(\omega_1)\overline{S_X(\omega_2)})$。

解：
$$E(S_x(\omega)) = \frac{1}{N}E\left\{\left[\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\exp(-j\omega k)\right]^2\right\}$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{s=0}^{N-1} E\{x(k)x(s)\}\exp[-j\omega(k+s)]$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{s=0}^{N-1} R_x(k-s)\exp(-j\omega(k+s))$$



$$= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} R_x(0)\exp(-2j\omega k)$$
$$= \frac{\sigma^2}{N}\left(\sum_{k=0}^{N-1}\exp(-2j\omega k)\right) = \frac{1}{N}\frac{1-e^{-2j\omega N}}{1-e^{-2j\omega}}$$

$$E(S_x(\omega_1)\overline{S_x(\omega_2)}) = \frac{1}{N^2}E\left\{\left(\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\exp(-j\omega_1 k)\right)^2\left(\sum_{k=0}^{N-1} x(k)\exp(-j\omega_2 k)\right)^{2*}\right\}$$
$$= \frac{1}{N^2}\sum_{k_1}\sum_{k_2}\sum_{l_1}\sum_{l_2} E\{x(k_1)x(k_2)x(l_1)x(l_2)\}\exp[-j\omega_1(k_1+k_2)]\times\exp[j\omega_2(l_1+l_2)]$$
$$= \frac{1}{N^2}\sum_{k_1}\sum_{k_2}\sum_{l_1}\sum_{l_2}[\delta(k_1-k_2)\delta(l_1-l_2) + \delta(k_1-l_1)\delta(k_2-l_2)$$

$$+\delta(k_1-l_2)\,\delta(k_2-l_1)\big]\exp[-j\omega_1(k_1+k_2)]\exp[j\omega_2(l_1+l_2)]$$

$$=\frac{1}{N^2}\left\{\sum_{k_1}\sum_{l_1}e^{-2j\omega_1 k_1}e^{2j\omega_2 l_1}+2\sum_{k_1}\sum_{k_2}e^{-j\omega_1 k_1+j\omega_2 k_2}\right\}$$

$$=\frac{1}{N^2}\frac{1-e^{-2j\omega_1 N}}{1-e^{-2j\omega_1}}\cdot\frac{1-e^{2j\omega_2 N}}{1-e^{2j\omega_2}}+\frac{2}{N^2}\frac{1-e^{-j\omega_1 N}}{1-e^{-j\omega_1}}\cdot\frac{1-e^{j\omega_2 N}}{1-e^{j\omega_2}}$$

8. 请计算第 3 题中的随机信号样本 $X(1)$, $X(2)$ 的 Capon 谱估计。

提示：Capon 谱估计的表达式为

2021年

$$S_c=\frac{1}{a^T(\omega)R^{-1}a(\omega)}$$

9. 请计算第 3 题中的随机信号样本 $X(1)$, $X(2)$, $X(3)$ 的周期图谱估计的均值，并将这里得到的结果与第 8 题结果以及信号的理论谱进行比较，分析 Capon 方法与周期图方法的优劣。