

# 基 RI-EKF 的 SLAM 算法一致性分析

李厚华<sup>12</sup>

<sup>1</sup> 中国科学院空天信息创新研究院 <sup>2</sup> 中国科学院大学电子电气与通信工程学院

## 摘要

扩展卡尔曼滤波器 (EKF) 是经典滤波算法, 在同时定位与地图构建 (SLAM) 技术中应用广泛, 该技术可让机器人在未知环境实时定位并构建地图。但传统基于 EKF 的点特征 SLAM 存在收敛性与一致性问题, 影响机器人定位和地图构建的准确性与可靠性, 解决这些问题对提升机器人工作效能意义重大。

本文深入剖析基于右不变误差 EKF (RI-EKF) 的 SLAM 算法的收敛性与一致性。收敛性分析针对机器人静止观测新地标和静止后移动两种场景。场景 A 中, RI-EKF 姿态估计准确, 协方差矩阵稳定; 场景 B 里, 其位姿不确定性变化符合理论预期。一致性方面, RI-EKF 输出在随机刚体变换下不变, 能有效处理观测信息, 避免估计不一致问题。

通过与 SO (3)-EKF、Roc-EKF、FEJ-EKF、notR-EKF 和 SE (3)-EKF 等多种算法进行对比仿真实验发现: 在低噪声环境下完成闭环观测后, 多数算法的 RMS 指标先升后降, SE (3)-EKF 不收敛, RI-EKF 性能最佳; 高噪声环境中完成闭环观测后, SO (3)-EKF、notR-EKF 和 ROC-EKF 指标波动上升, FEJ-EKF 和 RI-EKF 能维持较低水平, SE (3)-EKF 依然最差; 低里程计噪声和高观测噪声时, 观测噪声增加对算法影响小于双高噪声情况, SO (3)-EKF 的 NEES 指标上升, 部分算法稳定, 但 notR-EKF 和 Roc-EKF 存在部分数据点不收敛; 高里程计噪声和低观测噪声时, 里程计噪声影响更显著, SO (3)-EKF 等算法滤波结果不收敛, RI-EKF 虽性能衰减但仍最优。

综上所述, RI-EKF 在不同噪声环境下均展现出卓越性能, 在机器人定位和地图构建的准确性与稳定性方面表现突出。研究成果为实际应用中机器人算法的选择和优化提供了重要参考, 在工业生产、物流配送、智能导航等领域具有广阔的应用前景。

**关键词:** SLAM, 收敛性, 一致性, RI-EKF

# 目录

<b>1</b>	<b>引言</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>EKF-SLAM 的基础理论框架</b>	<b>5</b>
2.1	SLAM 问题的两种形式	5
2.2	EKF-SLAM 的假设与特点	5
2.3	二维情况下的 EKF-SLAM 算法	5
2.4	RI - EKF - SLAM 的理论	9
<b>3</b>	<b>RI-EKF 的收敛性与一致性分析</b>	<b>11</b>
3.1	收敛性分析	11
3.2	一致性分析	15
3.3	评估指标	17
<b>4</b>	<b>仿真实验结果</b>	<b>19</b>
4.1	数据生成	19
4.1.1	轨迹与地标生成	19
4.1.2	里程计数据与观测数据的生成	20
4.2	结果和分析	22
4.2.1	低噪声情况	22
4.2.2	高噪声情况	23
4.2.3	低里程计噪声和高观测噪声情况	25
4.2.4	高里程计噪声和低观测噪声情况	27
<b>5</b>	<b>总结</b>	<b>28</b>
5.1	本文的结论	28
5.2	本文的工作	28
5.3	问题与不足	29
<b>6</b>	<b>致谢</b>	<b>30</b>
<b>A</b>	<b>附录</b>	<b>33</b>
A.1	定理 1 的证明	33
A.2	定理 2 的证明	35
A.3	定理 3 的证明	37

# 1 引言

在机器人领域，同时定位与地图构建（Simultaneous Localization and Mapping, SLAM）技术至关重要，它使机器人能在未知环境中实时确定自身位置并构建环境地图。随着深度学习和神经网络技术的发展，端对端的 SLAM 技术成为研究主流。但它数据需求大、资源消耗高，在实际应用中面临诸多限制。相比之下，基于滤波和优化的轻量级 SLAM 在移动端优势渐显。其中最为经典的便是扩展卡尔曼滤波器（Extended Kalman Filter, EKF）凭借良好的理论基础和计算效率，长期以来在解决 SLAM 问题中得到广泛应用。最早在 1987 年，Randall C. Smith 与 Peter Chessman 首先提出了 SLAM 问题，其分析了机器人移动时的空间不确定性的复合和融合方法 [1]。

然而，传统基于 EKF 的点特征 SLAM 存在估计不一致的问题，即算法会低估估计的不确定性，导致过于自信的结果，这一问题严重影响了机器人定位与地图构建的准确性和可靠性。早在 2001 年，学者们就已意识到 EKF-SLAM 的不一致性问题 [2]，后续诸多研究对此进行了深入探讨 [3, 4]，其中 Dissanayake 等人 [3] 发现实际 SLAM 中，雅可比矩阵需在估计值处计算，而非真实值，这会导致估计过于乐观（不一致）。线性化过程引入的误差是 EKF-SLAM 不一致的关键来源，且机器人方向不确定性是主要因素之一。当机器人静止观测新地标时，雅可比矩阵在不同估计状态下计算会导致不一致；当机器人在不同点观测同一地标时，雅可比矩阵间的关键关系可能被破坏，从而产生不一致。

为提升 EKF-SLAM 的一致性，研究人员从不同角度展开探索。有研究从问题本质出发，发现 EKF-SLAM 的不一致性与 SLAM 问题的部分可观测性紧密相关，受此启发，一系列显著改善一致性的 EKF-SLAM 算法应运而生，其中最为著名的便是“First Estimates Jacobian-EKF SLAM algorithm ,FEJ-EKF ”[5]，其中 FEJ-EKF 通过使用首次估计值来计算雅可比矩阵，确保了误差状态系统模型具有与实际非线性 SLAM 系统相同的可观测子空间维度，从而显著提高了估计的一致性和准确性。部分研究尝试改进算法的坐标框架，如“Robocentric EKF SLAM, Roc-EKF” [6] 将地标位置估计在机器人局部坐标系下，尽管地标在全局坐标系中静止，但在该算法下其位置估计不断变化。实践证明，这种以机器人为中心的表述在估计一致性方面有更好表现。

除一致性问题外，众多学者还关注 EKF-SLAM 算法的收敛性，试图分析其收敛特性并推导估计不确定性的界限。2001 年，Dissanayake 等人在假设线性运动和观测模型的条件下，证明地图协方差矩阵任意子矩阵的行列式在连续观测下单调递减。推导过程基于状态协方差矩阵的更新公式，利用正定半定矩阵性质，得出地图协方差矩阵及子矩阵行列式的变化趋势，表明随着观测增加，地图估计不确定性降低，每个地标绝对位置估计误差减小。2007 年，Huang 和 Dissanayake[3] 在非线性条件下，证明了地图协方差矩阵任意子矩阵的行列式在连续观测下单调递减，这一性质与线性 SLAM 问题中的相关结论类似，表明在非线性二维 EKF-SLAM 中，随着观测的进行，

地图的不确定性在某种程度上逐渐降低。

近年来，李群表示在三维方向/位姿估计中逐渐兴起。李群表示能为基于滤波器的算法和基于优化的算法带来更好的收敛性和准确性。同时，利用对称性和李群进行观测器设计也受到越来越多的关注。Silvère Bonnabel 将保对称理论与扩展卡尔曼滤波器相结合，产生了不变扩展卡尔曼滤波器 (Invariant-EKF, I-EKF) [7]。I-EKF 在推导过程中，通过定义合适的群作用和不变输出误差等，使观测器对坐标变化更不敏感，增强了其在非线性系统中的适应性，相比传统 EKF，在处理地标估计等问题时表现更优。随后，文献 [8] 提出了用于 2D SLAM 的右不变误差 EKF (本文称为“RI-EKF”)，该算法在预测阶段与 EKF 相同，更新阶段使用不同的估计误差变量，通过推导线性化误差系统和观测误差的近似，给出 IEKF-SLAM 算法的完整步骤，包括状态更新的特殊方式。文献 [9] 将 2D 的 RI-EKF 扩展到了三维，并从理论层面推导了该算法的收敛性与一致性，但是该论文缺少综合性的收敛性与一致性的对比分析且没有对多样性的生产生活场景进行仿真验证。

在本课程学习过程中，深入研究了多种 SLAM 算法，对 RI-EKF 引起了极大的兴趣。本文旨在对 RI-EKF 进行全面且深入的分析，这不仅是对课程知识的深化理解与实践应用，也是为解决实际 SLAM 问题提供更可靠的理论依据和技术支持。本文将在 [9] 的基础上更加详细分析 3D 情况下 RI-EKF 的收敛性和一致性，并与多种算法进行综合对比，弥补原文的不足。同时，证明该滤波器输出在任何随机刚体变换下的不变性，并探讨这种不变性与一致性之间的关系。通过理论分析和蒙特卡罗仿真，全面展示 RI-EKF 相较于其他经典算法，如 SO(3)-EKF, Roc-EKF, FEJ-EKF, Pseudo- RI-EKF (notR-EKF) 和 SE(3)-EKF，等在 3D 点特征 SLAM 中的优势，期望为相关领域的研究和应用提供有价值的参考。

本文的结构安排如下：

- 第二章介绍 EKF-SLAM 的基础理论框架，包括经典的二维 EKF-SLAM 和基于李群的 RI-EKF-SLAM。
- 第三章理论分析 RI-EKF 的收敛性与一致性，同时进行仿真实验对比验证理论的正确性。
- 第四章通过设置不同的仿真情况，分析 RI-EKF 与其他算法的优劣势，以及分析里程计噪声和观测噪声对算法性能的影响。
- 第五章是对本文的总结，介绍了本文的主要结论以及存在的不足。
- 第六章是致谢。
- 最后是附录。

## 2 EKF-SLAM 的基础理论框架

### 2.1 SLAM 问题的两种形式

从概率角度来看，SLAM 问题主要有两种形式：在线 SLAM 问题和完整 SLAM 问题 [10, 11]。在线 SLAM 问题旨在估计当前时刻机器人位姿  $x_n$  和地图  $m$  的后验概率，表达式为：

$$p(x_n, m | z_{1:n}, u_{1:n})$$

其中， $z_{1:n}$  表示从时刻 1 到时刻  $n$  的所有测量数据， $u_{1:n}$  表示从时刻 1 到时刻  $n$  的所有控制输入。许多在线 SLAM 算法是增量式的，处理完过去的测量和控制数据后便将其丢弃。完整 SLAM 问题则是计算机器人从初始时刻到当前时刻的整个路径  $x_{1:n}$  以及地图  $m$  的后验概率，其表达式为：

$$p(x_{1:n}, m | z_{1:n}, u_{1:n})$$

在线 SLAM 问题实际上是从完整 SLAM 问题中积分掉过去的位姿得到的，即：

$$p(x_n, m | z_{1:n}, u_{1:n}) = \iint \cdots \int p(x_{1:n}, m | z_{1:n}, u_{1:n}) dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1}$$

### 2.2 EKF-SLAM 的假设与特点

EKF-SLAM 算法是最早且具有重要影响力的 SLAM 算法之一，它将 EKF 应用于在线 SLAM 问题，并采用最大似然数据关联方法。该算法有以下假设和特点：

- 地图表示：EKF-SLAM 中的地图是基于特征的，由点地标组成。为了计算方便，点地标的数量通常较少（例如小于 1000 个），并且地标越明确，EKF-SLAM 的效果越好，这使得该算法有时需要使用人工信标作为地标。
- 噪声假设：与其他 EKF 算法一样，EKF-SLAM 对机器人运动和感知过程中的噪声假设为高斯噪声。同时，要求后验概率中的不确定性相对较小，否则 EKF 中的线性化操作会引入较大误差。
- 信息处理：EKF-SLAM 算法只能处理地标出现的正向观测信息，无法处理传感器测量中未检测到地标所产生的负向信息，这是由高斯信念表示的特性决定的。

### 2.3 二维情况下的 EKF-SLAM 算法

当对应关系已知时，EKF - SLAM 算法主要处理 SLAM 问题中的连续部分。此时，需要将机器人位姿和地图中的地标坐标合并为一个状态向量  $y_n$ ，即：

$$y_n = \begin{pmatrix} x_n \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & \theta & m_{1,x} & m_{1,y} & m_{2,x} & m_{2,y} & \cdots & m_{N,x} & m_{N,y} \end{pmatrix}^T \quad (1)$$

其中,  $x, y, \theta$  表示机器人在时刻  $n$  的坐标,  $m_{i,x}, m_{i,y}$  是第  $i$  个地标的坐标,  $N$  为地图中的地标数量, 状态向量  $y_n$  的维度为  $2N + 3$ , 在部分算法中假定地标未知, 需要在状态向量中为每一个地标添加特征签名  $s_i$ , 这时状态向量  $y_n$  的维度为  $3N + 3$ 。EKF - SLAM 通过计算  $p(y_n | z_{1:n}, u_{1:n})$  来估计状态向量。

该算法的流程如下:

- 运动更新:

根据机器人的运动模型对状态向量的均值和协方差进行更新。假设机器人的运动模型为:

$$y_{n+1} = y_n + \begin{pmatrix} -\frac{v_n}{\omega_n} \sin \theta + \frac{v_n}{\omega_n} \sin(\theta + \omega_n \Delta t) \\ \frac{v_n}{\omega_n} \cos \theta - \frac{v_n}{\omega_n} \cos(\theta + \omega_n \Delta t) \\ \omega_n \Delta t + \gamma_n \Delta t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

其中  $\Delta t$  为  $n-1$  时刻到  $n$  时刻之间的时间差。为了便于计算, 可将上式改写为:

$$y_{n+1} = y_n + F_x^T \begin{pmatrix} -\frac{v_n}{\omega_n} \sin \theta + \frac{v_n}{\omega_n} \sin(\theta + \omega_n \Delta t) \\ \frac{v_n}{\omega_n} \cos \theta - \frac{v_n}{\omega_n} \cos(\theta + \omega_n \Delta t) \\ \omega_n \Delta t + \gamma_n \Delta t \end{pmatrix} \quad (3)$$

其中,  $F_x$  是一个将 3 维状态向量映射到  $2N + 3$  维向量的矩阵:

$$F_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

考虑噪声后的完整运动模型为:

$$y_{n+1} = y_n + F_x^T \begin{pmatrix} -\frac{v_n}{\omega_n} \sin \theta + \frac{v_n}{\omega_n} \sin(\theta + \omega_n \Delta t) \\ \frac{v_n}{\omega_n} \cos \theta - \frac{v_n}{\omega_n} \cos(\theta + \omega_n \Delta t) \\ \omega \Delta t \end{pmatrix} + \mathcal{N}(0, F_x^T V_n F_x) \quad (5)$$

其中  $V_n$  为模型噪声的协方差矩阵,  $F_x^T V_n F_x$  的作用是将模型噪声的协方差维度由 3 映射到  $2N + 3$ 。

在 EKF 中, 使用一阶泰勒展开对运动函数进行近似:

$$g(u_{n+1}, y_n) \approx g(u_{n+1}, \mu_n) + G_{n+1}(y_n - \mu_n) \quad (6)$$

其中, 雅可比矩阵  $G_{n+1} = g'(u_{n+1}, \mu_n)$ , 且:

$$G_{n+1} = I + F_x^T g_{n+1} F_x \quad (7)$$

$$g_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{v_n}{\omega_n} \cos \mu_{n,\theta} + \frac{v_n}{\omega_n} \cos(\mu_{n,\theta} + \omega_n \Delta t) \\ 0 & 0 & -\frac{v_n}{\omega_n} \sin \mu_{n,\theta} + \frac{v_n}{\omega_n} \sin(\mu_{n,\theta} + \omega_n \Delta t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

由此可得到运动更新后的均值  $\bar{\mu}_{n+1}$  和协方差  $\bar{\Sigma}_{n+1}$ 。  $\bar{\mu}_{n+1}$  和  $\bar{\Sigma}_{n+1}$  的运动更新模型如下：

$$\bar{\mu}_{n+1} = \mu_n + F_x^T \begin{pmatrix} -\frac{v_n}{\omega_n} \sin \mu_{n,\theta} + \frac{v_n}{\omega_n} \sin(\mu_{n,\theta} + \omega_n \Delta t) \\ \frac{v_n}{\omega_n} \cos \mu_{n,\theta} - \frac{v_n}{\omega_n} \cos(\mu_{n,\theta} + \omega_n \Delta t) \\ \omega_n \Delta t \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$\bar{\Sigma}_{n+1} = G_{n+1} \bar{\Sigma}_n G_{n+1}^T + F_x^T V_{n+1} F_x \quad (10)$$

- 测量更新：

测量模型可表示为：

$$z_{n+1}^i = \begin{pmatrix} \sqrt{(m_{j,x} - x)^2 + (m_{j,y} - y)^2} \\ \arctan 2(m_{j,y} - y, m_{j,x} - x) - \theta \end{pmatrix} + \mathcal{N}(0, \begin{pmatrix} \sigma_r & 0 \\ 0 & \sigma_\phi \end{pmatrix}) \quad (11)$$

其中， $i$  是  $z_{n+1}$  中单个地标观测的索引， $j = c_{n+1}^i$  是时刻  $n+1$  观测到的地标索引， $r$  表示到地标的距离， $\phi$  是到地标的方位角， $s$  是地标签名， $\sigma_r, \sigma_\phi, \sigma_s$  是相应的测量噪声协方差。对测量函数进行线性近似：

$$h(y_{n+1}, j) \approx h(\bar{\mu}_{n+1}, j) + H_{n+1}^i (y_{n+1} - \bar{\mu}_{n+1}) \quad (12)$$

其中， $H_{n+1}^i$  是  $h$  关于状态向量  $y_{n+1}$  的导数，由于  $h$  仅依赖于机器人位姿  $x_{n+1}$  和第  $j$  个地标位置  $m_j$ ，所以  $H_{n+1}^i$  可分解为一个低维雅可比矩阵  $h_{n+1}^i$  和一个将  $h_{n+1}^i$  映射到全状态向量维度的矩阵  $F_{x,j}$ ：

$$H_{n+1}^i = h_{n+1}^i F_{x,j} \quad (13)$$

其中低维雅可比矩阵  $h_{n+1}^i$  为：

$$h_{n+1}^i = \begin{pmatrix} \frac{\bar{\mu}_{t,x} - \bar{\mu}_{j,x}}{\sqrt{q_{n+1}}} & \frac{\bar{\mu}_{t,y} - \bar{\mu}_{j,y}}{\sqrt{q_{n+1}}} & 0 & \frac{\bar{\mu}_{j,x} - \bar{\mu}_{t,x}}{\sqrt{q_{n+1}}} & \frac{\bar{\mu}_{j,y} - \bar{\mu}_{t,y}}{\sqrt{q_{n+1}}} \\ \frac{\bar{\mu}_{j,y} - \bar{\mu}_{t,y}}{q_{n+1}} & \frac{\bar{\mu}_{t,x} - \bar{\mu}_{j,x}}{q_{n+1}} & -1 & \frac{\bar{\mu}_{t,y} - \bar{\mu}_{j,y}}{q_{n+1}} & \frac{\bar{\mu}_{j,x} - \bar{\mu}_{t,x}}{q_{n+1}} \end{pmatrix} \quad (14)$$

$$F_{x,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \cdots 0 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 1 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \cdots 0 & 0 & 1 & 0 \cdots 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

步骤	操作	具体公式或说明
输入	输入当前状态向量 $y_n$ 、 协方差矩阵 $\bar{\Sigma}_n$ 、 控制输入 $u_n$ (包含 $v_n$ 、 $\omega_n$ 等)、 测量数据 $z_{n+1}$	-
运动更新	预测下一时刻状态向量均值 $\bar{\mu}_{n+1}$ 和协方差矩阵 $\bar{\Sigma}_{n+1}$	$\bar{\mu}_{n+1} = \mu_n + F_x^T \begin{pmatrix} -\frac{v_n}{\omega_n} \sin \mu_{n,\theta} + \frac{v_n}{\omega_n} \sin(\mu_{n,\theta} + \omega_n \Delta t) \\ \frac{v_n}{\omega_n} \cos \mu_{n,\theta} - \frac{v_n}{\omega_n} \cos(\mu_{n,\theta} + \omega_n \Delta t) \\ \omega_n \Delta t \end{pmatrix}$ $\bar{\Sigma}_{n+1} = G_{n+1} \bar{\Sigma}_n G_{n+1}^T + F_x^T V_{n+1} F_x,$ <p>其中 <math>G_{n+1} = I + F_x^T g_{n+1} F_x</math>,</p> $g_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{v_n}{\omega_n} \cos \mu_{n,\theta} + \frac{v_n}{\omega_n} \cos(\mu_{n,\theta} + \omega_n \Delta t) \\ 0 & 0 & -\frac{v_n}{\omega_n} \sin \mu_{n,\theta} + \frac{v_n}{\omega_n} \sin(\mu_{n,\theta} + \omega_n \Delta t) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
测量更新	计算卡尔曼增益 $K_{n+1}^i$ 、 残差 $z_{n+1}^i - \hat{z}_{n+1}^i$ 、 更新状态向量均值 $\bar{\mu}_{n+1}$ 和协方差矩阵 $\bar{\Sigma}_{n+1}$	$K_{n+1}^i = \bar{\Sigma}_{n+1} [H_{n+1}^i]^T (H_{n+1}^i \bar{\Sigma}_{n+1} [H_{n+1}^i]^T + Q_{n+1})^{-1}$ $\bar{\mu}_{n+1} = \bar{\mu}_{n+1} + K_{n+1}^i (z_{n+1}^i - \hat{z}_{n+1}^i)$ $\bar{\Sigma}_{n+1} = (I - K_{n+1}^i H_{n+1}^i) \bar{\Sigma}_{n+1},$ <p>其中测量模型</p> $z_{n+1}^i = \begin{pmatrix} \sqrt{(m_{j,x} - x)^2 + (m_{j,y} - y)^2} \\ \arctan 2(m_{j,y} - y, m_{j,x} - x) - \theta \end{pmatrix} + \mathcal{N}(0, \begin{pmatrix} \sigma_r & 0 \\ 0 & \sigma_\phi \end{pmatrix}),$ $H_{n+1}^i = h_{n+1}^i F_{x,j},$ $h_{n+1}^i = \begin{pmatrix} \frac{\bar{\mu}_{t,x} - \bar{\mu}_{j,x}}{q_{n+1}} & \frac{\bar{\mu}_{t,y} - \bar{\mu}_{j,y}}{\sqrt{q_{n+1}}} & 0 & \frac{\bar{\mu}_{j,x} - \bar{\mu}_{t,x}}{\sqrt{q_{n+1}}} & \frac{\bar{\mu}_{j,y} - \bar{\mu}_{t,y}}{\sqrt{q_{n+1}}} \\ \frac{\bar{\mu}_{j,y} - \bar{\mu}_{t,y}}{q_{n+1}} & \frac{\bar{\mu}_{t,x} - \bar{\mu}_{j,x}}{q_{n+1}} & -1 & \frac{\bar{\mu}_{t,y} - \bar{\mu}_{j,y}}{q_{n+1}} & \frac{\bar{\mu}_{j,x} - \bar{\mu}_{t,x}}{q_{n+1}} \end{pmatrix},$ <p><math>F_{x,j}</math> 是将 <math>h_{n+1}^i</math> 映射到全状态向量维度的矩阵</p>
地标初始化	初始化新地标位置	<p>当首次观测到一个地标时，</p> $\begin{pmatrix} \bar{\mu}_{j,x} \\ \bar{\mu}_{j,y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mu}_{t,x} \\ \bar{\mu}_{t,y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{n+1}^i \cos(\phi_{n+1}^i + \bar{\mu}_{t,\theta}) \\ r_{n+1}^i \sin(\phi_{n+1}^i + \bar{\mu}_{t,\theta}) \end{pmatrix}$

表 1: 二维情况下的 EKF - SLAM 算法流程

上式中  $q_{n+1} = (\bar{\mu}_{j,x} - \bar{\mu}_{t,x})^2 + (\bar{\mu}_{j,y} - \bar{\mu}_{t,y})^2$ ，为地标与机器人之间的欧式距离。

当首次观测到一个地标时，为了避免因初始估计导致的线性化问题，使用以下方  
式初始化地标位置：

$$\begin{pmatrix} \bar{\mu}_{j,x} \\ \bar{\mu}_{j,y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mu}_{t,x} \\ \bar{\mu}_{t,y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{n+1}^i \cos(\phi_{n+1}^i + \bar{\mu}_{t,\theta}) \\ r_{n+1}^i \sin(\phi_{n+1}^i + \bar{\mu}_{t,\theta}) \end{pmatrix} \quad (16)$$

根据上述公式计算卡尔曼增益  $K_{n+1}^i$ ，并对状态向量的均值和协方差进行更新：

$$K_{n+1}^i = \bar{\Sigma}_{n+1} [H_{n+1}^i]^T (H_{n+1}^i \bar{\Sigma}_{n+1} [H_{n+1}^i]^T + Q_{n+1})^{-1} \quad (17)$$

$$\bar{\mu}_{n+1} = \bar{\mu}_{n+1} + K_{n+1}^i (z_{n+1}^i - \hat{z}_{n+1}^i) \quad (18)$$

$$\bar{\Sigma}_{n+1} = (I - K_{n+1}^i H_{n+1}^i) \bar{\Sigma}_{n+1} \quad (19)$$

二维情况下的 EKF - SLAM 的算法流程总结如表1所示。



## 2.4 RI - EKF - SLAM 的理论

RI - EKF (Right Invariant Error EKF) - SLAM 算法是基于李群表示的一种改进的 SLAM 算法。它利用李群和李代数的理论,使得传统的 EKF 具有与原始系统相同的不变性,通过几何适配的校正项来提高估计的性能。

在三维场景中,SLAM 问题的状态变量表示为  $X = (R, p, f^1, \dots, f^N)$ , 其中  $R \in SO(3)$  是机器人的旋转矩阵,表示机器人的方向,其中  $SO(3)$  是由所有的  $3 \times 3$  实正交矩阵  $R$  组成;  $p \in \mathbb{R}^3$  是机器人的位置;  $f^i \in \mathbb{R}^3$  是第  $i$  个地标的坐标,所有变量均在固定的世界坐标系下描述。

- RI - EKF 的运动模型:

$$X_{n+1} = f(X_n, u_n, \varepsilon_n) = (R_n \exp(w_n + \varepsilon_n^w), p_n + R_n(v_n + \varepsilon_n^v), f_n^1, \dots, f_n^N) \quad (20)$$

其中,  $u_n = \begin{bmatrix} w_n^T & v_n^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^6$  是里程计信息,  $w_n \in \mathbb{R}^3$  是从时间  $n$  到  $n+1$  的角增量,  $v_n \in \mathbb{R}^3$  是线性平移,  $\exp(-)$  是  $SO(3)$  的指数映射,  $\varepsilon_n = \begin{bmatrix} (\varepsilon_n^w)^T & (\varepsilon_n^v)^T \end{bmatrix}^T \sim N(0, V_n)$  是里程计噪声。

- RI - EKF 的观测模型:

$$z_{n+1} = h_{n+1}(X_{n+1}, \xi_{n+1}) \quad (21)$$

其中,  $h_{n+1}(X_{n+1}, \xi_{n+1})$  是一个列向量,由所有  $i \in O_{n+1}$  的  $h^i(X_{n+1}, \xi_{n+1}^i) = R_{n+1}^T(f_{n+1}^i - p_{n+1}) + \xi_{n+1}^i \in \mathbb{R}^3$  堆叠而成,  $O_{n+1}$  表示在时间  $n+1$  观测到的地标集合,  $\xi_{n+1} \sim N(0, Q_{n+1})$  是观测噪声向量,  $Q_{n+1}$  是观测噪声协方差矩阵,为块对角矩阵。

- RI - EKF 的实现细节

在 RI - EKF 中,状态空间被建模为李群  $G(N)$ 。其相关的群运算为:

$$X_1 X_2 = (R_1 R_2, R_1 p_2 + p_1, \dots, R_1 f_2^N + f_1^N) \quad (22)$$

李代数与  $\mathbb{R}^{3N+6}$  同态,指数映射  $\exp$  表示为:

$$\exp(e) \in \mathcal{G}(N) = (\exp(e_\theta), J_r(-e_\theta)e_p, J_r(-e_\theta)e^1, \dots, J_r(-e_\theta)e^N) \quad (23)$$

其中,  $e = \begin{bmatrix} e_\theta^T & e_p^T & (e^1)^T & \dots & (e^N)^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{3N+6}$ ,  $e_\theta, e_p, e^i \in \mathbb{R}^3$ ,

$$\exp(y) = I_3 + \frac{\sin(\|y\|)}{\|y\|} S(y) + \frac{1 - \cos(\|y\|)}{\|y\|^2} S^2(y)$$

$$J_r(y) = I_3 - \frac{1 - \cos(\|y\|)}{\|y\|^2} S(y) + \frac{\|y\| - \sin(\|y\|)}{\|y\|^3} S^2(y)$$

$S(\cdot)$  是将三维向量转换为反对称矩阵的算子,  $S(x)y = x \times y$ 。

RI - EKF 传播步骤的雅可比矩阵为:

$$G_n = I_{3N+6}, F_n = ad_{\hat{x}_n} B_n$$

其中,  $B_n = \begin{bmatrix} -J_r(-w_n) & 0_{3,3} \\ -S(v_n)J_r(-w_n) & I_3 \\ 0_{3N,3} & 0_{3N,3} \end{bmatrix}$ , 更新步骤的雅可比矩阵  $H_{n+1}$  由所有  $i \in O_{n+1}$  的矩阵  $H_{n+1}^i$  堆叠而成, 其中:

$$H_{n+1}^i = \begin{bmatrix} 0_{3,3} & \hat{R}_{n+1|n}^T & \cdots & -\hat{R}_{n+1|n}^T & 0_{3,3(N-i)} \end{bmatrix}$$

当机器人观测到新地标时, 需要扩充状态  $X \in G(N)$  并调整协方差矩阵  $P$ 。具体过程如下: 输入:  $\hat{X}, P, z$ ; 输出:  $\hat{X}_{new}, P_{new}$ ; 过程:  $\hat{f}_{N+1} = \hat{p} + \hat{R}z \in \mathbb{R}^3$ ,  $\hat{X}_{new} = (\hat{X}, \hat{f}_{N+1}) \in G(N+1)$ ;

$$P_{new} = M_N^\top P \hat{R} Q \hat{R}^\top + M_N^\top P M N$$

其中,  $M_N = \begin{bmatrix} 0_{3,3} & I_3 & 0_{3,3N} \end{bmatrix}^\top$ ,  $Q$  是新地标观测的噪声协方差矩阵。

RI - EKF - SLAM 的算法流程总结如表2所示:。

步骤	操作	具体公式或说明
输入	输入当前估计状态 $\hat{X}_n$ 、 协方差矩阵 $P_n$ 、 里程计 $u_n$ 、观测 $z_{n+1}$	-
传播	预测下一时刻状态均值 $\hat{X}_{n+1 n}$ 和协方差矩阵 $P_{n+1 n}$	$\hat{X}_{n+1 n} = f(\hat{X}_n, u_n, 0)$ $P_{n+1 n} = G_n P_n G_n^\top + F_n V_n F_n^\top$ $G_n = I_{3N+6}, F_n = ad_{\hat{x}_n} B_n$
计算	计算中间变量 $S$ 、 卡尔曼增益 $K$ 、残差 $y$	$S = H_{n+1} P_{n+1 n} H_{n+1}^\top + Q_{n+1}$ $K = P_{n+1 n} H_{n+1}^\top S^{-1}$ $y = h_{n+1}(\hat{X}_{n+1 n}, 0) - z_{n+1}$
更新	更新状态均值 $\hat{X}_{n+1}$ 和协方差矩阵 $P_{n+1}$	$\hat{X}_{n+1} = \hat{X}_{n+1 n} \oplus K y$ $P_{n+1} = (I - K H_{n+1}) P_{n+1 n}$
地标初始化	扩充状态和调整协方差矩阵	$\hat{f}_{N+1} = \hat{p} + \hat{R} z$ $\hat{X}_{new} = (\hat{X}, \hat{f}_{N+1})$ $P_{new} = M_N^\top P \hat{R} Q \hat{R}^\top + M_N^\top P M N$

表 2: RI - EKF - SLAM 算法流程

其中  $\oplus$  为收缩映射, 其定义为  $X = \hat{X} \oplus e := \exp(e) \hat{X}$ , 其中  $X \in G(N)$  是实际位姿和地标,  $\hat{X} \in G(N)$  是均值估计, 不确定性向量  $e = \begin{bmatrix} e_\theta^T & e_p^T & (e^1)^T & \cdots & (e^N)^T \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{3N+6}$  服从高斯分布  $N(0, P)$ 。

### 3 RI-EKF 的收敛性与一致性分析

#### 3.1 收敛性分析

RI - EKF 算法的收敛性分析至关重要，下面将针对两种不同场景进行详细探讨，同时对多种算法进行仿真，例如：SO(3)-EKF, 机器人中心-EKF(Robotcentric-EKF,Roc-EKF ), 第一估计雅克比 EKF(the First Estimates Jacobian EKF SLAM algorithm ,FEJ-EKF), 伪 RI-EKF(Pseudo-RI-EKF, notR-EKF) 和 SE(3)EKF, 综合对比显示 RI-EKF 的性能优势。

- 场景 A：机器人保持静止

**定理 1.** 若机器人在点  $A$  保持静止，且未观测到之前见过的任何地标，而是多次观测一个新地标。经过  $RI - EKF$  的传播和更新过程，机器人姿态以及已观测到的  $N$  个地标的均值估计和相关不确定性保持不变。当新地标被纳入时，状态的协方差矩阵会发生变化，经过  $k$  次观测后，协方差矩阵变为

$$P_k = \begin{bmatrix} P & L \\ L^\top & \frac{\hat{R}Q\hat{R}^\top}{k} + W \end{bmatrix} \quad (24)$$

随着观测次数  $k$  趋于无穷大，协方差矩阵最终稳定为

$$P_\infty^A = \begin{bmatrix} P & L \\ L^\top & W \end{bmatrix} \quad (25)$$

定理1的详细证明见附录A.1。

为了直观展示该定理，本文进行了模拟假设机器人始终静止，且不断观测“新”地标（观测噪声协方差不为零），观测噪声标准差设为机器人到地标距离各轴的 1%，机器人初始姿态协方差矩阵  $P_\theta \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  设为  $\frac{1}{2}I_3$ 。仿真结果如图1所示

根据旋转角度、角度估计协方差矩阵的迹  $\det(P_\theta)$  结果可以看出，RI - EKF、FEJ-EKF、notR-EKF 和 Roc-EKF 能够正确推断出机器人静止且方向和角度不确定性不变；而 SO(3)-EKF 和 SE(3)-EKF 却错误地更新了机器人方向，在第 5 次观测附近，机器人方向估计出现了巨大的偏差，随后角度变换趋于 0 但仍不为 0，同时算法预测方向不确定性随观测次数增加而减小，这显然是不合理的。

根据位置估计协方差矩阵的迹  $\det(P_r)$  结果可以看出，所有算法都准确估计出了机器人静止且位置不确定性不变，以上所有仿真结果体现出 RI - EKF 在场景 A 情况下具有准确的收敛性。

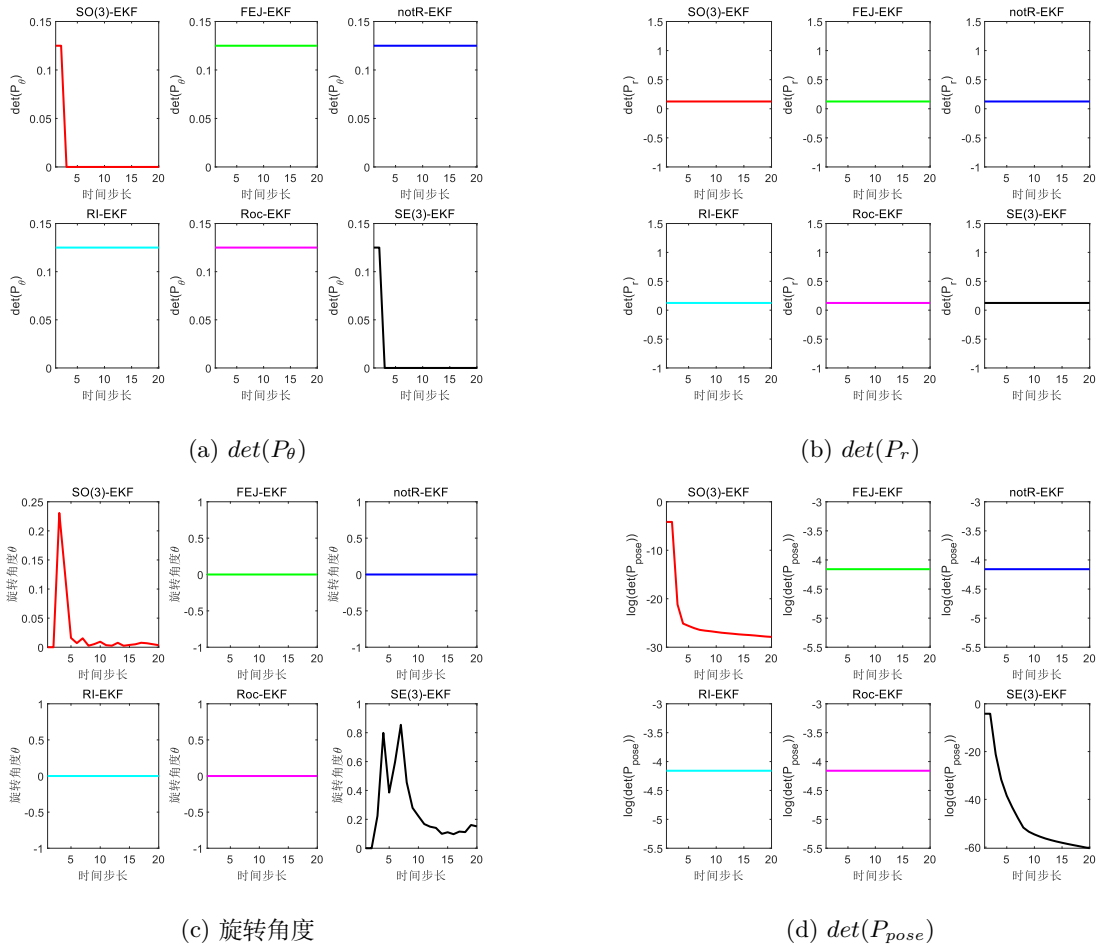


图 1: 场景 A 位姿估计仿真结果

上述定理可容易地扩展到多地标场景，得到如下推论：

**推论 1.** 当机器人在点  $A$  静止，仅观测  $m$  个新地标  $k$  次时， $RI - EKF$  的姿态估计不变，协方差矩阵变为

$$P_k = \begin{bmatrix} P & L_1 & \cdots & L_m \\ L_1^\top & \frac{\hat{R}_1 \Psi_1 \hat{R}_1^\top}{k} + W_1 & \cdots & C_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_m^\top & C_{m1} & \cdots & \frac{\hat{R}_m \Psi_m \hat{R}_m^\top}{k} + W_m \end{bmatrix} \quad (26)$$

当  $k \rightarrow \infty$  时，协方差矩阵变为

$$P_\infty^A = \begin{bmatrix} P & L_1 & \cdots & L_m \\ L_1^\top & W_1 & \cdots & C_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_m^\top & C_{m1} & \cdots & W_m \end{bmatrix} \quad (27)$$

- 场景 B: 机器人静止一段时间后移动一步

**定理 2.** 考虑机器人在点  $A$  静止并观测多个新地标  $k$  次 ( $k = \infty$ ) 后, 移动到点  $B$  并继续观测相同地标的情况。假设观测噪声协方差  $Q = \phi I_3 (\phi \in \mathbb{R}^+)$ , 在点  $B$  观测  $l$  次后,  $RI-EKF$  的协方差矩阵  $P_l^B = P_\infty^A + \bar{P}_l^B$ , 其中  $P_\infty^A$  为点  $A$  处的最终协方差矩阵,  $\bar{P}_l^B$  由下式给出:

$$\bar{P}_l^B = \sum_{i=1}^l \left( \frac{1}{l} \sum_{j=1}^l (H_i^\top R^{-1} H_j) \right)^{-1} \quad (28)$$

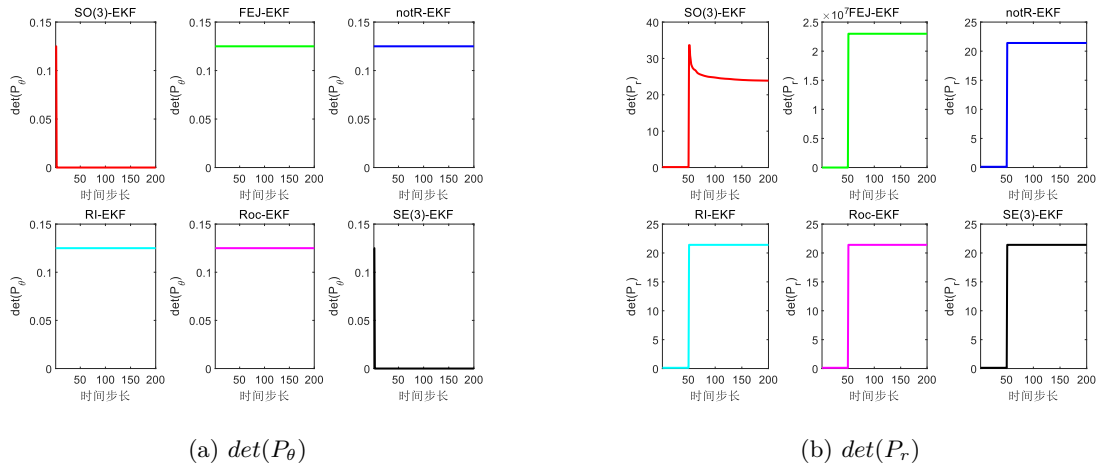
当  $l$  趋于无穷大时, 如果存在三个地标与机器人位置不共面, 协方差矩阵  $P_\infty^B = P_\infty^A$ 。

定理2的详细证明见附录A.2。

通过一个实际场景来理解该定理。初始时机器人在点  $A$  静止, 持续观测多个之前未见过的地标, 50 次观测后移动到点  $B$ , 且该移动过程机器人状态中的旋转矩阵不变, 然后在点  $B$  静止并继续观测多个地标 150 次, 机器人初始姿态协方差矩阵与场景  $A$  一致。另外仿真了两种情况下的位姿估计结果:

- 情况 1 机器人在  $A$  点与  $B$  点观测的地标不一致, 且地标数量根据机器人在仿真场景中的观测能力确定, 这里设置仿真场景是一个  $50m \times 40m \times 20m$  的长方形空间, 地标生成数量为 300 个, 机器人最远观测距离为  $25m$ , 最大观测角度为  $120^\circ$ 。
- 情况 1 机器人在  $A$  点与  $B$  点观测的地标一致, 且地标数量都为 30 个, 为了保证机器人前后观测的地标一致, 这里同样设置仿真场景是一个  $50m \times 40m \times 20m$  的长方形空间, 地标生成数量为 30 个, 机器人最远观测距离为  $80m$  ( $80m$  大于场景内的最远距离), 最大观测角度为  $360^\circ$ 。

从图2可以看到, 在开始时刻,  $SO(3)$ -EKF 和  $SE(3)$ -EKF 却错误地更新了机器人方向, 随后旋转角度也发生了不同程度的变化,  $RI-EKF$ 、 $FEJ$ -EKF、 $notR$ -EKF 和  $Roc$ -EKF 能够正确推断出机器人静止且方向不确定性不变, 结果与场景  $A$  位姿估计结果一致。



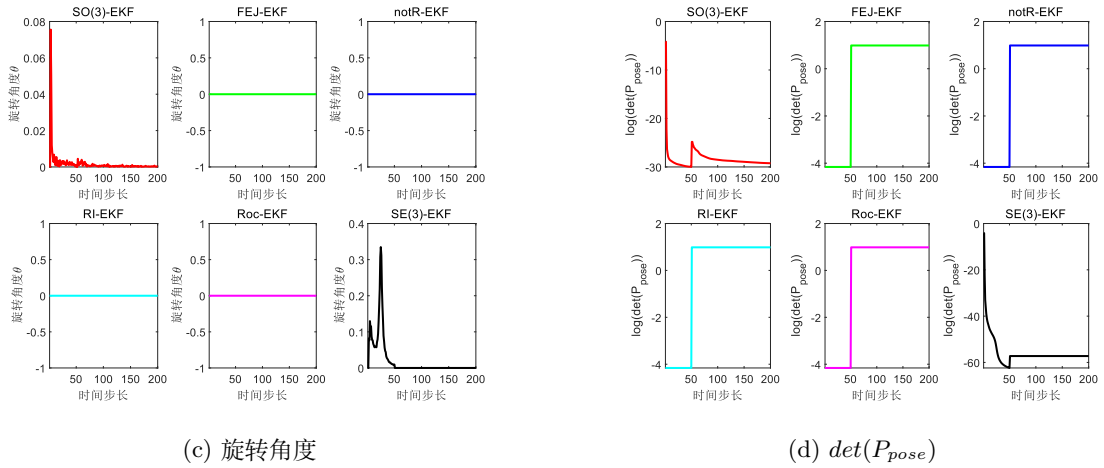
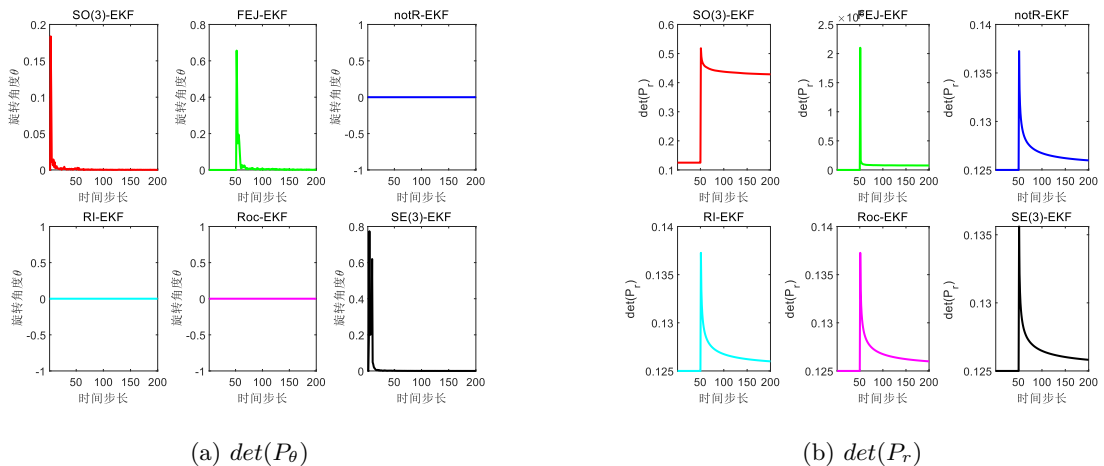


图 2: 场景 B : 情况 1 位姿估计仿真结果

在机器人移动到 B 点后, 六种算法都正确推断出机器人方向不确定性不变, 但坐标估计的不确定性显著增加, 原因观测新地标时引入了大量的观测噪声, 从而导致机器人位置不确定性增加。

从图3可以看到, 在机器人移动到 B 点后, FEJ-EKF 的角度不确定性发生了波动, 且错误判断机器人角度发生了巨大变化, 且 FEJ-EKF 的位姿不确定性低于初始值, 这表明其错误地注入了信息, 导致对不确定性的估计过于乐观。RI - EKF、notR-EKF 和 Roc-EKF 的位姿不确定性在 A 点时保持不变, 在 50 时刻时机器人移动至 B 点发生变化, 但随着观测次数的增加, 位姿不确定性逐渐回落, 仿真结果与理论相一致。



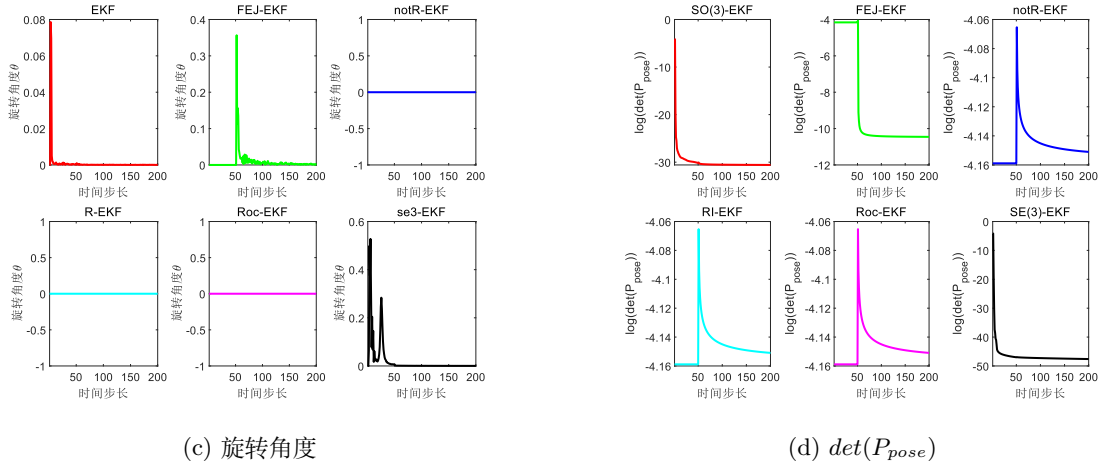


图 3: 场景 B : 情况 2 位姿估计仿真结果

### 3.2 一致性分析

在一致性分析部分, 本节将探讨 RI - EKF 算法在处理观测信息时的一致性表现, 以及与其他算法的对比, 理解其背后的原理对于评估算法的可靠性和稳定性具有重要意义。

- 不可观测性与不变性

首先回顾 SLAM 系统的不可观测性, 从非线性系统的角度来看, SLAM 的数学模型 (状态变量、运动模型和观测模型) 在局部是不可观测的。通过随机刚体变换来描述这种不可观测性, 定义随机刚体变换  $\mathcal{T}_g(X)$  为:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_g(X) = & (\exp(\Theta_1) \bar{R} R, \exp(\Theta_1) \bar{R} p + \bar{T} + \Theta_2, \\ & \exp(\Theta_1) \bar{R} f^1 + \bar{T} + \Theta_2, \dots, \\ & \exp(\Theta_1) \bar{R} f^N + \bar{T} + \Theta_2) \end{aligned} \quad (29)$$

其中  $\mathbf{X}$  由 (1) 给出,  $\mathbf{g} = (\tilde{\mathbf{R}}, \tilde{\mathbf{T}}, \Theta)$ ,  $\tilde{\mathbf{R}} \in \text{SO}(3)$  (特殊正交群, 三维空间中的旋转矩阵集合),  $\tilde{\mathbf{T}} \in \mathbb{R}^3$  (三维实数空间), 且  $\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1^\top & \Theta_2^\top \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^6$  是具有协方差  $\tilde{\Sigma}$  的高斯白噪声。当协方差  $\tilde{\Sigma} = \mathbf{0}_{6,6}$  ( $6 \times 6$  的零矩阵) 时, 此变换退化为确定性刚体变换。当  $\mathbf{g} = (\mathbf{I}_3, \mathbf{0}_{3,1}, \Theta)$  ( $\mathbf{I}_3$  是  $3 \times 3$  的单位矩阵,  $\mathbf{0}_{3,1}$  是  $3 \times 1$  的零矩阵) 时, 此变换退化为随机恒等变换。

可以验证, 系统的输出 (观测值) 对于任何随机刚体变换  $T_g$  都是不变的, 因为对于任意两个初始估计  $(\hat{X}_0, P_0)$  和  $(\hat{Y}_0, P_{y0})$  (其中  $\hat{Y}_0 = T_g(\hat{X}_0)$  且  $P_{y0} = \bar{Q}_1 P_0 \bar{Q}_1^\top + \bar{Q}_2 \Sigma \bar{Q}_2^\top$ ), 有  $h_n(\hat{X}_n, 0) = h_n(\hat{Y}_n, 0)$ , 对所有  $n > 0$  成立, 这意味着 SLAM 系统在随机刚体变换下是不可观测的。

接下来, 将用数学方法描述基于 EKF 框架的 SLAM 滤波器对随机刚体变换的不变性。如果对于任意两个初始估计  $(\hat{X}_0, P_0)$  和  $(\hat{Y}_0, P_{y0})$ , 其中  $\hat{Y}_0 = \mathcal{T}_g(\hat{X}_0)$ ,

$P_{y_0} = \overline{Q}_1 P_0 \overline{Q}_1^\top + \overline{Q}_2 \Sigma \overline{Q}_2^\top$ ，并且

$$\overline{Q}_1 = \left. \frac{\partial \mathcal{T}_{\hat{g}}(\hat{X}_0 \oplus e) \ominus \mathcal{T}_{\hat{g}}(\hat{X}_0)}{\partial e} \right|_{e=0},$$

$$\overline{Q}_2 = \left. \frac{\partial \mathcal{T}_g(\hat{X}_0) \ominus \mathcal{T}_{\hat{g}}(\hat{X}_0)}{\partial \Theta} \right|_{\Theta=0}$$

且  $\hat{g} = (\overline{R}, \overline{T}, 0)$ ，对于所有  $n > 0$ ，都有  $h_n(\hat{X}_n, 0) = h_n(\hat{Y}_n, 0)$ ，那么基于一般 EKF 框架的滤波器的输出（估计观测值）在任何随机刚体变换  $\mathcal{T}_g$  下都是不变的。上述  $\hat{x}_n$  和  $\hat{Y}_n$  分别表示从初始条件  $(\hat{X}_0, P_0)$  和  $(\hat{Y}_0, P_{y_0})$  出发，在时间  $n$  时，使用从时间 0 到  $n$  的相同输入（里程计和观测值），该滤波器的均值估计。

如上所示，这里的不变性可以分为对确定性刚体变换的不变性和对随机恒等变换的不变性。定理 3 和表 3 总结了一些基于一般 EKF 框架的滤波器的不变性结果。

**定理 3.** *RI - EKF* 的输出在随机刚体变换下是不变的，而 *EKF* 的输出仅在确定性刚体变换下不变，*notR-EKF* 仅在随机恒等变换下不变，*SE(3)-EKF* 在确定性刚体变换和随机恒等变换下均不具有不变性。

定理 3 的详细证明见附录 A.3。

从 RI - EKF 的证明过程可以看出，其不确定性表示在确定性刚体变换下可以线性变换，这使得它在确定性刚体变换下保持不变；同时，对随机恒等变换的不变性直接取决于雅可比矩阵  $G_n$  和  $H_n$ 。

滤波器	确定性刚体变换	随机恒等变换	随机刚体变换
RI-EKF	是	是	是
notR-EKF	否	是	否
SO(3)-EKF	是	否	否
SE(3)-EKF	否	否	否

表 3: EKF 不变性

- 一致性与不变性的关系

由于 SLAM 系统在随机刚体变换下的不可观测性是其基本属性，一个一致的滤波器应该保持这种不可观测性，即其估计输出在任何随机刚体变换下都不变。对确定性刚体变换的不变性意味着估计不依赖于全局坐标系的选择，对随机恒等变换的不变性意味着全局坐标系的不确定性不会影响估计结果。如果一个滤波器不具备这种性质，那么全局坐标系的选择或其不确定性可能会产生意外信息，导致估计不一致（过度自信）。



在之前的收敛性分析案例中，SO(3) - EKF（三维场景下的 EKF）由于对随机恒等变换不具有不变性，在处理新地标观测时产生了不合理的估计（姿态不确定性因新地标而降低）；而 RI - EKF 由于对随机刚体变换具有不变性，能够产生符合预期的估计结果。这充分说明了不变性对于滤波器一致性的重要影响。在设计滤波器时，保证其对随机刚体变换的不变性是提高一致性的关键。例如，在一些研究中提出的可观测性约束滤波器，通过特定的雅可比矩阵计算方式，使得滤波器输出在随机恒等变换下不变，同时结合状态空间的建模，使其在确定性刚体变换下也不变，最终获得了对随机刚体变换的不变性，提高了滤波器的一致性。

### 3.3 评估指标

在机器人同时定位与地图构建（SLAM）领域，RMS（Root Mean Square，均方根）和 NEES（Normalized Estimation Error Squared，归一化估计误差平方）是用于评估算法性能的重要指标。

#### 1. RMS（均方根）：

RMS 用于衡量估计值与真实值之间误差的平均大小。在 SLAM 中，通常会关注机器人位置和姿态估计的准确性，RMS 通过对误差的平方求平均再取平方根来计算。以机器人位置估计为例，假设在一系列时间步  $t = 1, 2, \dots, n$  中，机器人位置的估计值为  $\hat{p}_t$ ，真实值为  $p_t$ ，则位置估计的 RMS 误差计算公式为：

$$RMS_{position} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\hat{p}_t - p_t)^2} \quad (30)$$

对于姿态估计，若姿态估计值为  $\hat{\theta}_t$ ，真实姿态为  $\theta_t$ （姿态一般用某种数学形式表示，如四元数或旋转矩阵，此处简化表示为  $\theta$ ），则姿态估计的 RMS 误差计算公式为：

$$RMS_{orientation} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\hat{\theta}_t - \theta_t)^2} \quad (31)$$

RMS 值越小，表明估计值与真实值越接近，算法在位置或姿态估计方面的准确性越高。

#### 2. NEES（归一化估计误差平方）：

NEES 用于评估估计的一致性。在理想情况下，当估计器是一致的时，NEES 应该围绕 1 波动。计算 NEES 时，首先需要计算估计误差  $e_t = \hat{x}_t - x_t$ （其中  $\hat{x}_t$  是状态估计值， $x_t$  是真实状态），然后根据估计误差协方差矩阵  $P_t$  对误差进行归一化处理。对于姿态估计的 NEES 计算，公式为：

$$NEES_{orientation} = \frac{1}{m} \sum_{t=1}^m e_t^\top P_t^{-1} e_t \quad (32)$$

其中  $m$  是用于计算 NEES 的样本数量。如果 NEES 值持续远离 1，例如远大于 1，可能表示估计器低估了不确定性，导致过度自信的估计结果；若 NEES 值远小于 1，则可能表示估计器高估了不确定性。在评估 SLAM 算法性能时，通常会多次运行算法（如进行蒙特卡罗模拟），统计不同运行情况下的 NEES 值，观察其是否在合理范围内波动，以此判断算法的一致性。

## 4 仿真实验结果

为综合对比 SO(3)-EKF、FEJ-EKF、notR-EKF、ROC-EKF、SE(3)-EKF 与 RI-EKF 的算法性能 (所有算法均已拓展至三维空间), 本实验通过生成机器人运动轨迹、随机地标、添加噪声后的里程计数据和观测数据, 同时在本实验中默认已经实现数据关联, 同时设置仿真场景是一个  $200m \times 200m \times 120m$  的长方形空间, 地标生成数量为 300 个, 机器人最远观测距离为  $25m$ , 最大观测角度为  $120^\circ$ 。同时针对不同的观测噪声和测量噪声水平, 均进行 50 次蒙特卡罗仿真, 最后计算不同算法的均方根误差 (RMS) 和平均归一化估计误差平方 (NEES) 分别用于评价精度和一致性。

### 4.1 数据生成

#### 4.1.1 轨迹与地标生成

本实验所生成的三维轨迹是基于三维 Lissajous 曲线的数学模型构建的三维闭合曲线, 闭合曲线可以保证 EKF 算法可以形成闭合回路, 从而降低估计误差。该轨迹的位置坐标由以下参数方程决定:

设时间参数为  $t$ , 缩放半径为  $r = 15$ , 振幅分别为  $A_x = 5$ 、 $A_y = 4$ 、 $A_z = 2$ , 频率分别为  $\omega_x = 0.3$ 、 $\omega_y = 0.2$ 、 $\omega_z = 0.4$ , 相位差分别为  $\varphi_x = 0$ 、 $\varphi_y = 0$ 、 $\varphi_z = 1$ 。在三维空间中, 轨迹上点的位置坐标  $\mathbf{P}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  满足:

$$\begin{cases} x(t) = r \times A_x \sin(\omega_x t + \varphi_x) = 15 \times 5 \sin(0.3t + 0) = 75 \sin(0.3t) \\ y(t) = r \times A_y \sin(\omega_y t + \varphi_y) = 15 \times 4 \sin(0.2t + 0) = 60 \sin(0.2t) \\ z(t) = r \times A_z \sin(\omega_z t + \varphi_z) = 15 \times 2 \sin(0.4t + 1) = 30 \sin(0.4t + 1) \end{cases} \quad (33)$$

从上述公式可以看出, 每个坐标轴方向上的运动都是正弦函数形式, 振幅、频率和相位差的不同组合使得  $x$ 、 $y$  和  $z$  方向的振荡存在一定的时间差, 最终轨迹在三维空间中呈现出复杂而独特的形态, 曲线的具体形状会随着时间  $t$  的推移而不断变化。

此外, 除了位置坐标, 轨迹还包含了欧拉角信息。欧拉角  $\mathbf{E}(t) = (\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))$  随时间的变化关系为:

$$\begin{cases} \alpha(t) = 0.5t + 2 \\ \beta(t) = -0.3t \\ \gamma(t) = 0.4t \end{cases} \quad (34)$$

其中  $\alpha(t)$  表示绕  $x$  轴的旋转角度,  $\beta(t)$  表示绕  $y$  轴的旋转角度,  $\gamma(t)$  表示绕  $z$  轴的旋转角度, 这些欧拉角的变化进一步丰富了轨迹在空间中的姿态信息。每个时间点的欧拉角会通过 `euler2rotation_matrix` 函数转换为  $3 \times 3$  的旋转矩阵, 用于描述轨迹在该时刻的空间定向。

最后, 本文定义了一个边界值向量  $\mathbf{b} = [30, 30, 30]$ , 用于在已有轨迹位置范围的基础上向外扩展一定的距离。根据已有的轨迹信息求取每个维度 ( $x$ 、 $y$ 、 $z$ ) 上的最

小值向量  $\mathbf{p}_{min} = \mathbf{p}_{min} - \mathbf{b}$  和最大值向量  $\mathbf{p}_{max}$ ：接着计算地标生成范围的最小值向量  $\mathbf{l}_{min}$  和最大值向量  $\mathbf{l}_{max} = \mathbf{p}_{max} + \mathbf{b}$ ：

对于第  $i$  个维度 ( $i = 1, 2, 3$ )，使用均匀分布的随机数  $\mathbf{r} \in [0, 1]^n$  进行线性变换，得到地标坐标的第  $i$  列：

$$\mathbf{L}_{:,i} = \mathbf{l}_{min}(i) + \mathbf{r} \cdot (\mathbf{l}_{max}(i) - \mathbf{l}_{min}(i))$$

其中， $\mathbf{L}_{:,i}$  表示矩阵  $\mathbf{L}$  的第  $i$  列， $\mathbf{l}_{min}(i)$  和  $\mathbf{l}_{max}(i)$  分别表示向量  $\mathbf{l}_{min}$  和  $\mathbf{l}_{max}$  的第  $i$  个元素。通过这种方式，可以在扩展后的范围内随机生成  $n = 300$  个三维地标位置。

生成的轨迹与地标如图4所示：

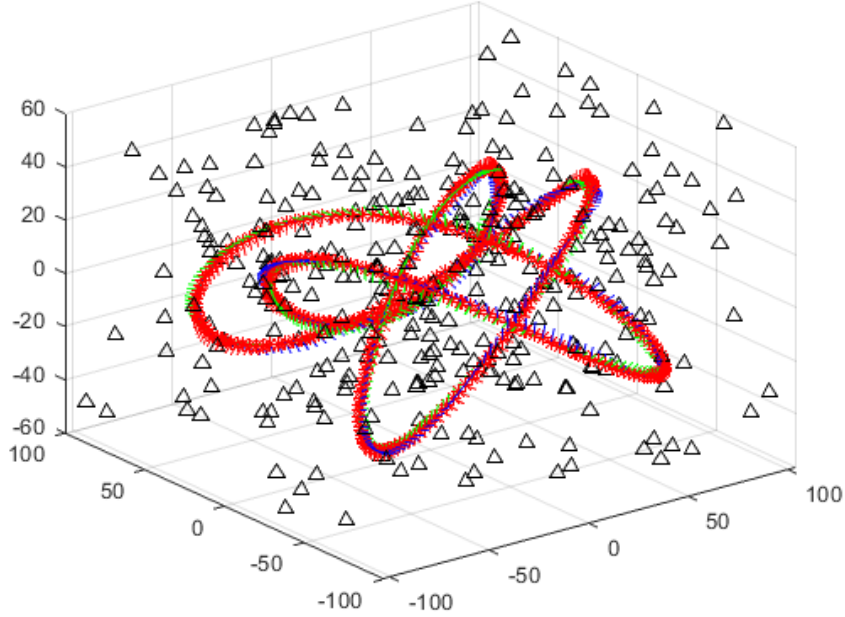


图 4:

#### 4.1.2 里程计数据与观测数据的生成

这部分主要介绍里程计数据 (Odometry) 和观测数据 (Observations) 的生成。

- 里程计数据生成

首先计算相邻两个时刻  $i$  和  $i + 1$  的相对旋转矩阵  $R_{\Delta} = R_i^T R_{i+1}$ ，其中  $R_i$  和  $R_{i+1}$  分别是时刻  $i$  和时刻  $i + 1$  的旋转矩阵。通过  $SO(3)$  李代数的对数映射，将相对旋转矩阵转换为三维旋转向量：

$$\omega_{\Delta} = \log_{SO(3)}(R_{\Delta})$$

计算从时刻  $i$  到时刻  $i+1$  的平移差异  $\mathbf{t}_\Delta = \mathbf{p}_{i+1} - \mathbf{p}_i$ ，然后将其转换到时刻  $i$  的机器人坐标系下：

$$\mathbf{t}'_\Delta = R_i^T \mathbf{t}_\Delta$$

其中  $\mathbf{p}_i$  和  $\mathbf{p}_{i+1}$  分别是时刻  $i$  和时刻  $i+1$  的位置向量。

为了模拟里程计的噪声，通过生成高斯噪声  $\mathbf{n}_1$  和  $\mathbf{n}_2$ ，分别用于旋转和平移的扰动：

$$\mathbf{n}_1 = \sigma_{odom} \cdot \mathcal{N}(0, \mathbf{I}) \cdot \omega_\Delta$$

$$\mathbf{n}_2 = \sigma_{odom} \cdot \mathcal{N}(0, \mathbf{I}) \cdot \mathbf{t}'_\Delta$$

其中  $\sigma_{odom}$  里程计噪声水平， $\mathcal{N}(0, \mathbf{I})$  是均值为 0，协方差为单位矩阵的高斯噪声。根据添加噪声后的旋转和平移数据，更新机器人的位姿。新的旋转矩阵  $R'_{i+1}$  和位置  $\mathbf{p}'_{i+1}$  计算公式如下：

$$R'_{i+1} = R'_i \cdot \exp_{SO(3)}(\mathbf{n}_1) \cdot R_\Delta$$

$$\mathbf{p}'_{i+1} = \mathbf{p}'_i + R'_i \cdot (\exp_{SO(3)}(\mathbf{n}_1) \cdot \mathbf{t}'_\Delta + J_r(-\mathbf{n}_1) \cdot \mathbf{n}_2)$$

其中  $J_r$  是右雅可比矩阵。

最后将平移差异和旋转向量组合成一个里程计数据。

- 观测数据生成

对于每一个时间步  $i$ ，提取机器人的位置  $\mathbf{p}_i$  和旋转矩阵  $R_i$ ，并计算机器人的朝向向量  $\mathbf{z}_i$ 。然后，计算机器人与地标之间的坐标差  $\mathbf{d}_{ij}$ ：

$$\mathbf{d}_{ij} = \mathbf{l}_j - \mathbf{p}_i$$

其中  $\mathbf{l}_j$  是第  $j$  个地标的位置向量。接着计算机器人到地标的指向角度  $\theta_{ij}$ ：

$$\theta_{ij} = \arccos \left( \frac{\mathbf{d}_{ij} \cdot \mathbf{z}_i}{\|\mathbf{d}_{ij}\| \|\mathbf{z}_i\|} \right)$$

如果角度  $\theta_{ij}$  在可观测视野角度内且距离  $\|\mathbf{d}_{ij}\|$  小于可观测最远距离，则进行下一步。将坐标差转换到机器人的坐标系下：

$$\mathbf{d}'_{ij} = R_i^T \mathbf{d}_{ij}$$

在观测数据上添加高斯噪声  $\mathbf{n}_{ob} = \sigma_{obsv} \cdot \mathcal{N}(0, \mathbf{I}) \cdot \mathbf{d}'_{ij}$ ，其中  $\sigma_{obsv}$  是观测噪声水平。

$$\mathbf{d}''_{ij} = \mathbf{d}'_{ij} + \mathbf{n}_{ob}$$

最后将地标编号和转换后的坐标差作为观测数据。

## 4.2 结果和分析

在本小节中，运用 SO(3)-EKF、ROC-EKF、FEJ-EKF、notR-EKF、SE(3)-EKF 以及 RI-EKF 算法，对不同噪声水平下的里程计数据与观测数据展开处理。通过这一过程，旨在对比各类算法的抗噪性能，剖析里程计噪声与观测噪声对算法影响的差异。同时，从收敛性与一致性的维度，深入分析不同算法抗噪性能存在差异的内在原因。

随后，计算各算法的四个指标，分别为：RMS-位置（单位：m）、RMS-方向、NEES-位姿以及 NEES-方向。最终，依据所获取的指标数据，对各类算法的滤波效果进行综合评估。

### 4.2.1 低噪声情况

在低噪声工况下，将代码中的噪声水平精确设定为  $\sigma_{odom} = 1\%$ ,  $\sigma_{obsv} = 1\%$ 。这一参数设定旨在高度模拟搭载高精度里程计与测距仪的机器人实际运行状态，同时还还原电磁干扰、机械振动等各类干扰均较弱的日常工作环境，力求使仿真条件贴近理想工作场景。最终，仿真所获取的各项数据结果，完整汇总于图5和表4之中，以便后续深入分析。

表 4:  $\sigma_{odom} = 1\%$ ,  $\sigma_{obsv} = 1\%$  仿真结果详细数据

	RMS-位置/m	RMS-方向/rad	NEES-位姿	NEES-方向
SO(3)-EKF	1.23807	0.01900	1.26242	1.28821
FEJ-EKF	1.14553	0.01790	1.14120	1.10161
notR-EKF	1.19107	0.01760	2.73861	1.04456
<b>RI-EKF</b>	<b>1.12004</b>	<b>0.01750</b>	<b>1.09141</b>	<b>1.06126</b>
Roc-EKF	1.19732	0.01773	1.91895	1.12621
SE(3)-EKF	101.74737	2.13931	1328199.62438	1706658.72630

通过对图 5 的结果进行分析可知，对于 SO (3)-EKF、FEJ-EKF、notR-EKF、RI-EKF 以及 ROC-EKF 这几种算法，其 RMS: 位置和 RMS: 方向指标均呈现出先急剧上升的态势。这是由于机器人在移动进程中持续观测新地标，进而引入了新的噪声。然而，当步长达到 150 时，这些指标迅速下降，其中 RMS: 方向维持在较低水平，而 RMS: 位置仍处于波动状态。推测其原因可能是机器人在完成一个完整的运动周期后返回了起始位置，进而观测到原有地标，新的观测数据对噪声起到了一定的滤除作用。

在所有算法中，NEES: 方向指标均在一定范围内呈缓慢上升趋势，这一现象与 NEES 计算过程中引入归一化操作相关，即随着新噪声的不断引入，该指标并非急剧上升，而是缓慢递增。此外，在低噪声水平下，notR-EKF 和 Roc-EKF 的 NEES: 位

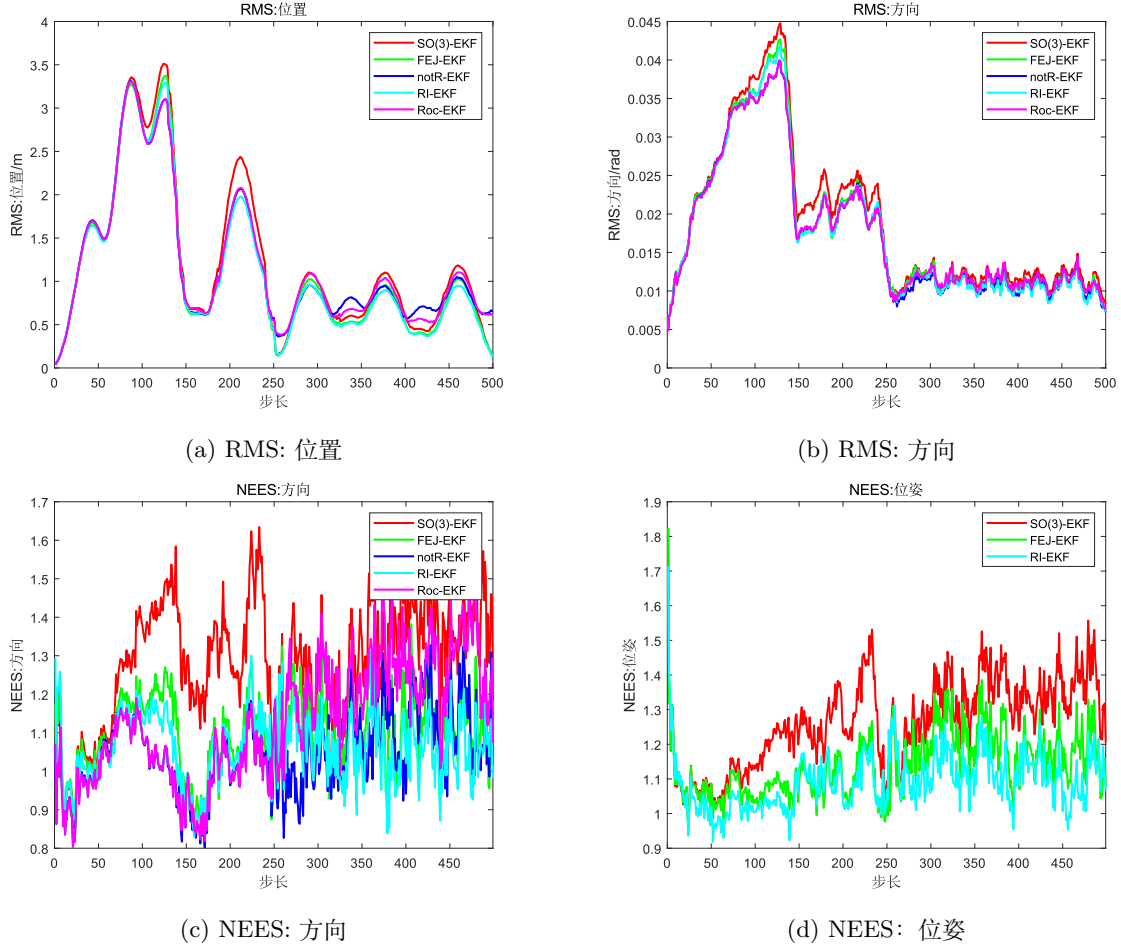


图 5:  $\sigma_{odom} = 1\%$ ,  $\sigma_{obs} = 1\%$  仿真结果

姿指标在部分数据点处已不再收敛。

SE (3)-EKF 在所有指标下均表现出不收敛的状态。这些结果可解释为 SE (3)-EKF 对于确定性刚体变换或随机恒等变换均不具备不变性。在上述四个指标的评估中，RI-EKF 的数据表现最为优异，这归因于其不受随机刚体变化的影响，具体数据查看表4。

#### 4.2.2 高噪声情况

在高噪声状况下，将代码内的噪声水平设置为  $\sigma_{odom} = 5\%$ ,  $\sigma_{obs} = 5\%$ 。该设置目的在于模拟配备低精度里程计与测距仪的机器人运行情况。在大型工厂车间，大量运转设备产生强电磁干扰；建筑工地地形复杂、灰尘多；矿山存在粉尘与磁场异常；电磁干扰严重区信号冲突不断；高低温极端环境影响传感器性能。仿真所得结果汇总于图6与表5之中，以分析算法在恶劣工况下的性能。

通过对图6的结果进行深入分析可以发现，对于 SO(3)-EKF、FEJ-EKF、notR-EKF、RI-EKF 以及 ROC-EKF 这几种算法，其 RMS: 位置和 RMS: 方向指标均再次

表 5:  $\sigma_{odom} = 5\%, \sigma_{obsv} = 5\%$  仿真结果详细数据

	RMS-位置/m	RMS-方向	NEES-位姿	NEES-方向
SO(3)-EKF	11.20684	0.16422	6.97933	7.37357
FEJ-EKF	8.31578	0.12612	1.95168	2.02175
notR-EKF	12.77276	0.16627	33.76281	5.18903
<b>RI-EKF</b>	<b>7.18777</b>	<b>0.11125</b>	<b>1.20605</b>	<b>1.19921</b>
Roc-EKF	9.13520	0.12711	3.75589	2.13839
SE(3)-EKF	110.32556	2.21975	40781.19779	51726.20976

呈现出先急剧上升的趋势,这一现象与低噪声条件下的仿真结果相契合。然而,当步长达到 150 之后,SO(3)-EKF、notR-EKF 以及 ROC-EKF 的 RMS: 位置和 RMS: 方向指标开始呈现出波动上升的态势,与之形成鲜明对比的是,FEJ-EKF 和 RI-EKF 依旧能够维持在较低的水平。这一差异主要归因于在高噪声环境中,SO(3)-EKF、notR-EKF 以及 ROC-EKF 算法难以有效消除噪声的干扰。

进一步观察各算法的 NEES 指标,SO(3)-EKF、notR-EKF 以及 ROC-EKF 的 NEES: 位置和 NEES: 位姿指标均呈现出不同程度的上升趋势。其中,notR-EKF 算法的 NEES: 位姿指标已出现严重的不收敛情况,具体数据可参照表5。而 FEJ-EKF 和 RI-EKF 在高噪声环境下依然保持着与低噪声环境时同样出色的滤波效果。

毫无疑问,在本次高噪声环境的仿真测试中,SE(3)-EKF 算法的性能表现依然最差,其所有指标均处于不收敛的状态。而 RI-EKF 算法在各项指标上的数据表现依旧最为优异,展现出了其高噪声环境下卓越的抗噪性能和稳定性。

当将噪声水平提升至  $\sigma_{odom} = 10\%$  和  $\sigma_{obsv} = 10\%$  时,FEJ-EKF 和 notR-EKF 率先出现崩溃现象,其结果呈现出完全不收敛的状态。在这种极端噪声环境下,包括 RI-EKF 在内的其他算法处理效果亦未能达到理想预期。然而,需要着重指出的是,即便在如此恶劣的条件下,RI-EKF 的算法性能依旧最为出色,这充分彰显了其对随机刚体变换所具备的极其优异的不变性效果。

表 6:  $\sigma_{odom} = 10\%, \sigma_{obsv} = 10\%$ 

	RMS-位置/m	RMS-方向	NEES-位姿	NEES-方向
SO(3)-EKF	33.94088	0.43743	17.33655	14.10849
FEJ-EKF	NaN	0.61802	NaN	NaN
notR-EKF	NaN	0.90548	NaN	NaN
<b>RI-EKF</b>	<b>24.17826</b>	<b>0.31948</b>	<b>1.36886</b>	<b>1.19321</b>
Roc-EKF	29.73805	0.36309	4.13987	2.43774
SE(3)-EKF	126.84735	2.20661	8092.77323	10804.73452



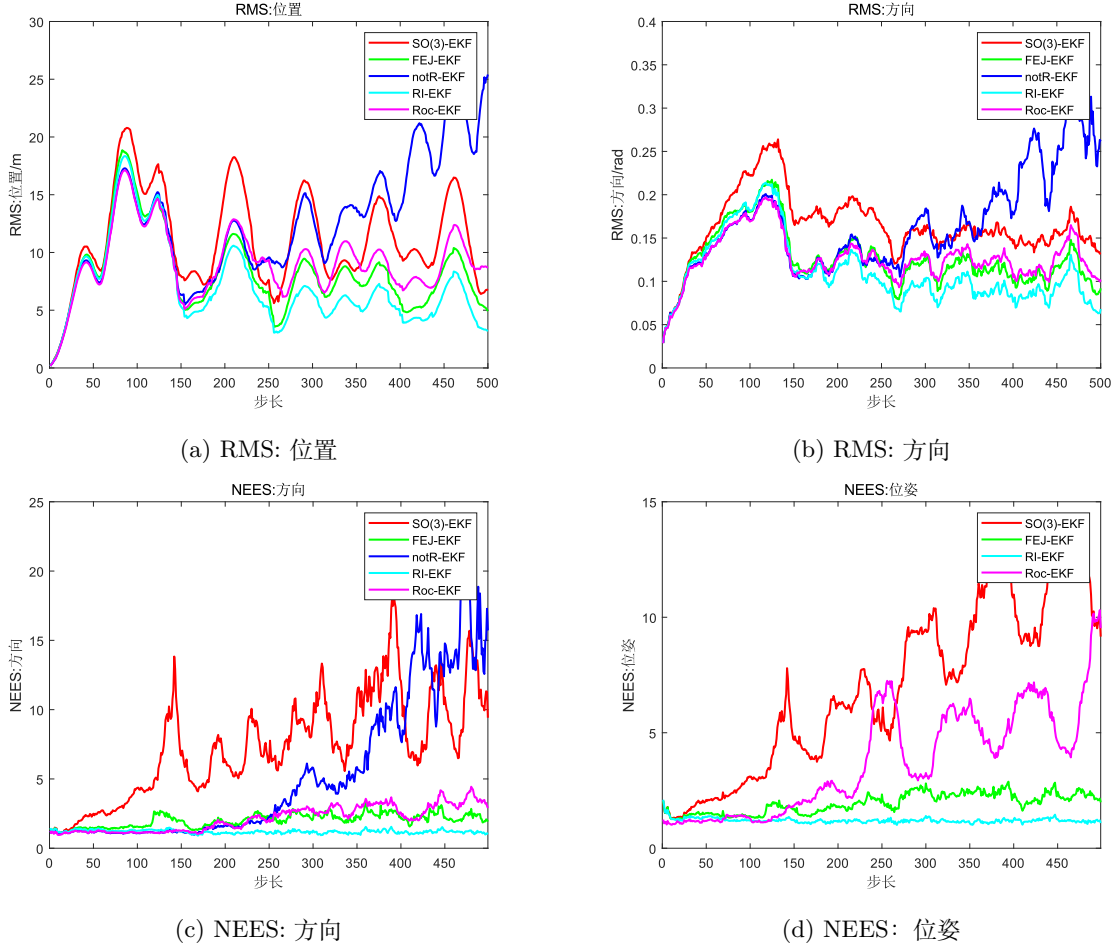


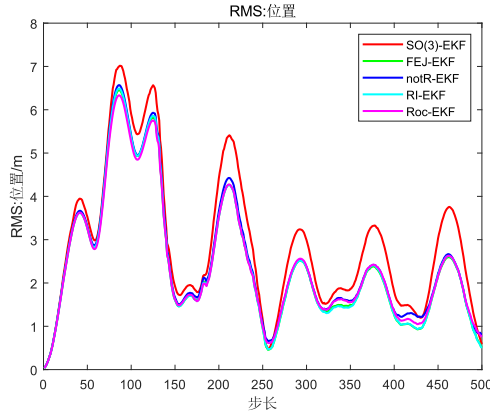
图 6:  $\sigma_{odom} = 5\%$ ,  $\sigma_{obs} = 5\%$  仿真结果

#### 4.2.3 低里程计噪声和高观测噪声情况

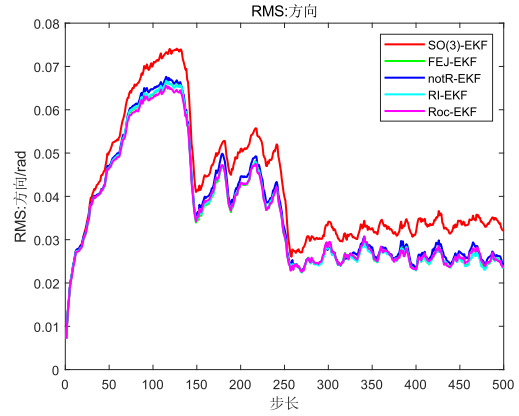
实际场景中，机器人传感器受环境影响各异。像室内物流仓库，地面平坦使里程计噪声低，可货物、货架反射干扰，或者在存在大量粉尘、雾气的工业现场，让观测噪声高。鉴于低里程计噪声和高观测噪声的实际场景广泛存在，为了解不同算法在这类工况下的性能，本实验对低里程计噪声和高观测噪声情况进行仿真与分析，各项数据结果汇总于图7和表7之中，以便后续深入分析。

表 7:  $\sigma_{odom} = 1\%, \sigma_{obsv} = 10\%$  仿真结果详细数据

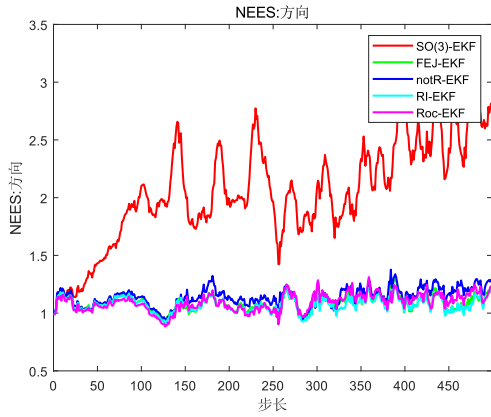
	RMS-位置/m	RMS-方向	NEES-位姿	NEES-方向
SO(3)-EKF	2.94266	0.04239	1.84325	2.06556
FEJ-EKF	2.45138	0.03600	1.12034	1.09145
notR-EKF	2.53160	0.03685	1.30412	1.14056
<b>RI-EKF</b>	<b>2.44775</b>	<b>0.03596</b>	<b>1.09161</b>	<b>1.07703</b>
Roc-EKF	2.46733	0.03593	1.22420	1.09359
SE(3)-EKF	94.95608	1.78819	81958.22464	72146.06555



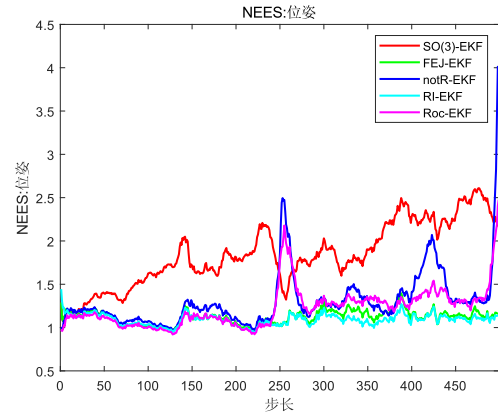
(a) RMS: 位置



(b) RMS: 方向



(c) NEES: 方向



(d) NEES: 位姿

图 7:  $\sigma_{odom} = 1\%, \sigma_{obsv} = 10\%$  仿真结果

对比图5、6和7可以看到，观测噪声从  $\sigma_{obsv} = 1\%$  增加到  $\sigma_{obsv} = 10\%$  对算法处理效果所带来的影响是小于同时将  $\sigma_{odom}$ ， $\sigma_{obsv}$  增加到 5% 的。在 150 步长后 RMS: 位置的波动程度大于低噪声情况，但是远小于 5% 的高噪声情况；RMS: 方向最后的稳定程度高于低噪声情况，但所有算法都趋于稳定。

观察各算法的 NEES 指标，SO(3)-EKF 的 NEES: 方向和 NEES: 位姿指标呈现不

断上升的趋势，而其余算法都稳定在 1.1 左右。notR-EKF 和 Roc-EKF 算法的 NEES: 位姿指标都在部分数据点呈现不收敛状况，可见这三种算法对于观测噪声的耐噪性能远远低于 FEJ-EKF 和 RI-EKF。

#### 4.2.4 高里程计噪声和低观测噪声情况

在实际应用里，机器人所处环境千差万别，高里程计噪声与低观测噪声的情况时有发生，因而对其进行仿真与分析很有必要。从传感器特性而言，里程计依赖机械部件运转测量，在震动大、机械磨损严重时，噪声易增大。而观测传感器如激光雷达，在开阔、无遮挡、光线稳定的环境下，能保持低噪声。

在一些老旧工厂，地面坑洼不平，机器人车轮行驶震动大，导致里程计噪声高；但室内光线稳定，无杂物干扰，激光雷达观测噪声低。通过仿真分析，能明晰算法在这种复杂工况下的性能，为机器人算法优化与实际应用提供参考。各项数据结果汇总于表8之中。

表 8:  $\sigma_{odom} = 10\%$ ,  $\sigma_{obsv} = 1\%$  仿真结果详细数据

	RMS-位置/m	RMS-方向	NEES-位姿	NEES-方向
SO(3)-EKF	29.92357	0.39411	138.55112	139.82125
FEJ-EKF	NaN	0.95014	NaN	NaN
notR-EKF	NaN	1.31097	NaN	NaN
<b>RI-EKF</b>	<b>25.66577</b>	<b>0.35503</b>	<b>9.90809</b>	<b>7.62432</b>
Roc-EKF	33.82340	0.37946	26.61331	14.07308
SE(3)-EKF	NaN	2.24338	NaN	NaN

通过对表8的详细分析可知，SO(3)-EKF、FEJ-EKF、notR-EKF 以及 SE(3)-EKF 算法的滤波结果均未呈现收敛态势。RI-EKF 和 Roc-EKF 算法的处理效果亦不理想，其性能衰减程度远高于在高观测噪声环境下的表现。即便处于这样的不利情形，RI-EKF 算法在各项指标上仍表现最优。

将表8与表7进行对比后发现，相较于高观测噪声引发的算法性能损失，高里程计噪声对算法性能的负面影响更为显著。基于此研究结论，在实际生产作业过程中，首要任务是确保机器人运行于稳定且平坦的工作环境，同时，还需定期对老旧机器人的机械部件及里程计进行检查与更新，以此保障机器人工作的稳定性与算法运行的有效性。

## 5 总结

### 5.1 本文的结论

本研究围绕基于 RI-EKF 的 SLAM 算法展开,深入分析了 RI-EKF 的收敛性与一致性,并通过仿真实验对比了多种算法在不同噪声情况下的性能。

在收敛性方面,RI-EKF 在机器人静止观测新地标场景下,姿态估计准确,协方差矩阵稳定;机器人静止后移动场景中,位姿不确定性变化符合理论预期,相比其他算法表现更优。如在场景 A 中,机器人静止观测新地标,RI-EKF 能正确推断机器人状态,而 SO (3)-EKF 和 SE (3)-EKF 出现错误更新;场景 B 里,FEJ-EKF 在机器人移动后角度不确定性波动,RI-EKF 则稳定可靠。

一致性上,RI-EKF 输出在随机刚体变换下不变,这使其能有效处理观测信息,避免因全局坐标系选择或不确定性产生的估计不一致问题。相比之下,SO(3)-EKF 仅在确定性刚体变换下不变,notR-EKF 仅在随机恒等变换下不变,SE (3)-EKF 在两种变换下均不具备不变性。

仿真实验表明,低噪声时,多数算法 RMS 指标先升后降,SE (3)-EKF 不收敛,RI-EKF 性能最佳;高噪声下,SO (3)-EKF、notR-EKF 和 ROC-EKF 指标波动上升,FEJ-EKF 和 RI-EKF 维持较低水平,SE (3)-EKF 仍最差;低里程计噪声和高观测噪声时,观测噪声增加对算法影响小于双高噪声,SO (3)-EKF 的 NEES 指标上升,其余部分算法稳定但 notR-EKF 和 Roc-EKF 会出现部分数据点不收敛情况;高里程计噪声和低观测噪声时,里程计噪声增加带来的影响大于观测噪声增加带来的影响,SO (3)-EKF 等算法滤波结果不收敛,RI-EKF 虽性能衰减但仍最优。

基于研究结果,在生产生活中,对于使用机器人的场景,若环境噪声难以避免,应优先选用对随机刚体变换具有不变性的 RI-EKF 算法,以确保机器人定位和地图构建的准确性与稳定性。同时,要注重机器人工作环境的优化,尽量为其提供稳定、平坦的运行环境,减少里程计噪声。对于老旧机器人,需定期检查和更新机械部件及里程计,保障其传感器性能,从而提升机器人在实际应用中的整体效能,更好地服务于工业生产、物流配送、智能导航等领域。

### 5.2 本文的工作

1. 文献 [9] 中关于收敛性与一致性的理论阐述较为晦涩,理解难度较大。鉴于此,本研究对相关理论进行了更为详细和全面的证明。这一工作使得基于 EKF - SLAM 算法的一致性分析更加深入细致,为后续研究者对该算法的进一步改进提供了清晰的理论依据和研究方向。
2. 文献 [9] 仅对 SO(3)-EKF 与 RI-EKF 的收敛性和一致性展开对比,难以全面展现 RI-EKF 的性能优势。与之不同,本研究对常见的 SO(3)-EKF、ROC-EKF、

FEJ-EKF、notR-EKF、SE(3)-EKF 以及 RI-EKF 这六种算法进行了综合比较分析，以更全面地揭示各算法特性及 RI-EKF 的优势所在。

3. 在日常生产生活中，机器人面临的工作场景复杂多样。现有文献多聚焦于高低噪声环境下算法性能的分析，却忽视了不同水平的里程计和观测噪声组合的情况。本研究补充了低里程计噪声与高观测噪声、高里程计噪声与低观测噪声这两种工况下的仿真分析，并据此提出了更具针对性的建议，为机器人在实际生产生活中的应用提供了更丰富的理论支持。

### 5.3 问题与不足

1. 本文开展的仿真实验是基于数据关联已实现这一假设条件进行的，并未对数据未关联情况进行仿真。由于实际操作中数据关联问题不可忽视，且不同场景下数据关联方式存在差异，因此，该研究成果无法直接应用于实际操作，其普适性有待进一步增强。
2. 尽管本研究借助了开源代码开展工作，但所处理的数据均为仿真数据，并非源自开源的真实数据。鉴于仿真数据与真实数据在特性、分布及复杂程度等方面存在差异，真实环境中存在诸多仿真难以完全模拟的因素，如传感器噪声的复杂性、环境干扰的多样性等。因此，本研究目前所得到的部分结论的可靠性与普适性仍需进一步深入探讨。
3. 在本研究中，通过仿真实验对 SO(3)-EKF、ROC-EKF、FEJ-EKF、notR-EKF、SE(3)-EKF 以及 RI-EKF 等算法的收敛性、一致性差异和抗噪性能进行了分析。然而，需要指出的是，本研究仅局限于仿真层面的探讨，尚未从理论角度对 SO(3)-EKF、ROC-EKF、FEJ-EKF、notR-EKF 和 SE(3)-EKF 算法展开深入研究。由于缺乏理论层面的深度剖析，后续研究有必要对这些算法进行更深入的理论探索，以全面了解其性能表现。

## 6 致谢

在完成本项工作的艰难历程中，内心满溢着无尽的感激之情。在此，我要诚挚地感谢《现代信号数字处理 I》课程的张颢老师。在课堂上，张老师以其渊博的学识和独特的教学方法，助力我深入学习并扎实巩固了线性卡尔曼滤波的基础知识。这些知识在我探索非线性卡尔曼滤波 EKF 以及 EKF - SLAM 理论基础的道路上，发挥了不可估量的作用。

同时，我也要衷心感谢彭健坤同学、时天昭同学和贺峥同学。在课程学习的过程中，以及大作业代码编写和报告完成的各个环节，他们始终给予我无私的帮助与宝贵的建议，这些帮助与建议，在我完成大作业的过程中提供了巨大的支持。

并且，我也要感谢我的女朋友陈敏，在寒假的日子里，她陪伴了我许多，在一起时她照顾了生病卧床的我，那是十分脆弱的我，同时她也在我对报告撰写提供了一些思路与建议，给予了我莫大的帮助。

最衷心地感谢 Teng Zhang 等作者的开源代码：[EKF-SLAM-on-Manifold](#)。

最衷心地感谢作者 O\_MMMM\_O 的博客：[扩展卡尔曼滤波（EKF）理论讲解与实例（matlab、python 和 C++ 代码）](#)。

最衷心地感谢作者 mjmmm 的博客：[从零开始使用 matlab 实现 EKF-SLAM 算法（含完整代码）](#)。

最后，我还想特别感谢陪伴我度过这段充实时光的小米电脑与显示器。它们的存在，尤其是那两个屏幕，如同得力的助手，极大地提升了我完成大作业的效率。借助它们，我能够更加便捷地查阅资料、整理思路，快速熟悉这个全新的领域，并凭借自己的努力独自完成这份大作业报告。

李厚华

2025 年 2 月 23 日

## 参考文献

- [1] Randall C. Smith and Peter C. Cheeseman. On the representation and estimation of spatial uncertainty. *The International Journal of Robotics Research*, 5:56 – 68, 1986.
- [2] S.J. Julier and J.K. Uhlmann. A counter example to the theory of simultaneous localization and map building. In *Proceedings 2001 ICRA. IEEE International Conference on Robotics and Automation (Cat. No.01CH37164)*, volume 4, pages 4238–4243 vol.4, 2001.
- [3] Shoudong Huang and Gamini Dissanayake. Convergence and consistency analysis for extended kalman filter based slam. *IEEE Transactions on Robotics*, 23(5):1036–1049, 2007.
- [4] Tim Bailey, Juan Nieto, Jose Guivant, et al. Consistency of the ekf-slam algorithm. In *2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pages 3562–3568, 2006.
- [5] Guoquan Paul Huang, Anastasios I. Mourikis, and Stergios I. Roumeliotis. A first-estimates jacobian ekf for improving slam consistency. In *International Symposium on Experimental Robotics*, 2009.
- [6] José A. Castellanos, José Neira, and Juan D. Tardós. Limits to the consistency of ekf-based slam. *IFAC Proceedings Volumes*, 37(8):716–721, 2004. IFAC/EURON Symposium on Intelligent Autonomous Vehicles, Lisbon, Portugal, 5-7 July 2004.
- [7] Silvére Bonnabel. Symmetries in observer design: Review of some recent results and applications to ekf-based slam. In Krzysztof Kozłowski, editor, *Robot Motion and Control 2011*, pages 3–15, London, 2012. Springer London.
- [8] Axel Barrau and Silvére Bonnabel. An ekf-slam algorithm with consistency properties. *ArXiv*, abs/1510.06263, 2015.
- [9] Teng Zhang, Kanzhi Wu, Jingwei Song, et al. Convergence and consistency analysis for a 3-d invariant-ekf slam. *IEEE Robotics and Automation Letters*, 2(2):733–740, 2017.
- [10] Muhammet Fatih Aslan, Akif Durdu, Abdullah Yusefi, et al. A tutorial: Mobile robotics, slam, bayesian filter, keyframe bundle adjustment and ros applications. *Studies in Computational Intelligence*, 2021.

- [11] Sebastian Thrun, Wolfram Burgard, and Dieter Fox. Probabilistic robotics. *Communications of the ACM*, 2002.



## A 附录

### A.1 定理 1 的证明

以下主要是对定理 1 的证明，即当机器人静止且不断观测新地标时，RI - EKF 算法下机器人位姿和地标估计的相关性质。下面是详细推导过程：

#### 1. 符号说明与初始设定：

设初始估计状态为  $\hat{X} = (\hat{R}, \hat{p}, \hat{f}^1, \dots, \hat{f}^N)$ ，对应的协方差矩阵为  $P$ 。每次观测新地标后，状态向量会扩充，协方差矩阵也会相应更新。当观测到新地标时，根据地标初始化方法（算法 2），状态向量扩充为  $\hat{X}_{new} = (\hat{X}, \hat{f}_{N+1})$ ，协方差矩阵更新为  $P_{new} = \begin{bmatrix} P & L \\ L^\top & \hat{R}Q\hat{R}^\top + W \end{bmatrix}$ ，其中  $L = PM_N$ ， $W = M_N^\top PM_N$ ， $M_N = \begin{bmatrix} 0_{3,3} & I_3 & 0_{3,3N} \end{bmatrix}^\top$ 。

#### 2. 数学归纳法基础：

第一次观测新地标后，均值估计状态扩充为  $\hat{X}_1 = (\hat{R}, \hat{p}, \hat{f}^1, \dots, \hat{f}^N, \hat{f}^{N+1})$ ，机器人位姿和之前地标的均值估计未改变。协方差矩阵变为  $P_1 = \begin{bmatrix} P & L \\ L^\top & \hat{R}Q\hat{R}^\top + W \end{bmatrix}$ 。

#### 3. 数学归纳法假设：

第  $k$  次观测后，假设经过  $k$  次观测后，估计状态为  $\hat{X}_k = (\hat{R}, \hat{p}, \hat{f}^1, \dots, \hat{f}^N, \hat{f}_k^{N+1})$ ，协方差矩阵为  $P_k = \begin{bmatrix} P & L \\ L^\top & \frac{\hat{R}Q\hat{R}^\top}{k} + W \end{bmatrix}$ 。

#### 4. 第 $k + 1$ 次观测：

因为机器人静止，在时间  $k$  进行传播时，根据 RI - EKF 算法，均值估计  $\hat{X}_{k+1|k} = \hat{X}_k$ ，协方差矩阵  $P_{k+1|k} = P_k = \begin{bmatrix} P & L \\ L^\top & \frac{\hat{R}Q\hat{R}^\top}{k} + W \end{bmatrix}$ 。

#### 5. 第 $k + 1$ 次观测：

计算  $S = HP_{k+1|k}H^\top + Q$

已知  $H = \begin{bmatrix} 0_{3,3} & \hat{R}^\top & 0_{3,3N} & -\hat{R}^\top \end{bmatrix}$ ，进行矩阵乘法  $HP_{k+1|k}H^\top$ ：

$$\begin{aligned}
HP_{k+1|k}H^\top &= \begin{bmatrix} 0_{3,3} & \hat{R}^\top & 0_{3,3N} & -\hat{R}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & L \\ L^\top & \frac{\hat{R}Q\hat{R}^\top}{k} + W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ \hat{R} \\ 0_{3N \times 3} \\ -\hat{R} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \hat{R}^\top P\{4:6,:\} - \hat{R}^\top L^\top & \hat{R}^\top P\{4:6,4:6\} - \hat{R}^\top (\frac{\hat{R}Q\hat{R}^\top}{k} + W) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ \hat{R} \\ 0_{3N \times 3} \\ -\hat{R} \end{bmatrix} \\
&= \hat{R}^\top P\{4:6,4:6\}\hat{R} - \hat{R}^\top L^\top \hat{R} - \hat{R}^\top P\{4:6,4:6\}\hat{R} + \hat{R}^\top (\frac{\hat{R}Q\hat{R}^\top}{k} + W)\hat{R} \\
&= \frac{1}{k} \hat{R}^\top \hat{R}Q\hat{R}^\top \hat{R} + \hat{R}^\top W\hat{R} - \hat{R}^\top L^\top \hat{R}
\end{aligned}$$

由于  $\hat{R} \in SO(3)$ ,  $\hat{R}^\top \hat{R} = I$ , 则  $\hat{R}^\top \hat{R}Q\hat{R}^\top \hat{R} = Q$ , 且可以证明  $\hat{R}^\top W\hat{R} - \hat{R}^\top L^\top \hat{R} = 0$  (此处根据  $L = PM_N$  和  $W = M_N^\top PM_N$  的定义以及矩阵运算性质可得)。所以  $HP_{k+1|k}H^\top = \frac{1}{k}Q$ , 进而  $S = HP_{k+1|k}H^\top + Q = \frac{1}{k}Q + Q = \frac{k+1}{k}Q$ 。

## 5.2. 计算卡尔曼增益

$$\begin{aligned}
K &= P_{k+1|k}H^\top S^{-1} \text{ 将 } P_{k+1|k} = \begin{bmatrix} P & L \\ L^\top & \frac{\hat{R}Q\hat{R}^\top}{k} + W \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 0_{3,3} & \hat{R}^\top & 0_{3,3N} & -\hat{R}^\top \end{bmatrix}, \\
S &= \frac{k+1}{k}Q \text{ 代入:}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K &= \begin{bmatrix} P & L \\ L^\top & \frac{\hat{R}Q\hat{R}^\top}{k} + W \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{3 \times 3} \\ \hat{R} \\ 0_{3N \times 3} \\ -\hat{R} \end{bmatrix} (\frac{k}{k+1}Q^{-1}) \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\hat{R}Q\hat{R}^\top}{k}\hat{R} \end{bmatrix} \frac{k}{(k+1)Q^{-1}} \\
&= \begin{bmatrix} 0_{(6+3N) \times 3} \\ -\frac{k}{k+1}\hat{R}^\top \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

## 5.3 . 计算 $Ky$

其中  $y = h_{n+1}(\hat{X}_{k+1|k}, 0) - z_{k+1}$ 。由于  $K$  的前  $6 + 3N$  列都是零矩阵, 所以  $Ky$  除了最后 3 个元素外, 其余元素都为零。这表明经过  $k+1$  次观测后, 机器人位姿和旧地标的估计与第  $k$  步时相同。

## 5.4 . 计算 $k+1$ 时刻的协方差矩阵 $P_{k+1} = (I - KH)P_{k+1|k}$

先计算  $KH$ :

$$\begin{aligned} KH &= \begin{bmatrix} 0_{(6+3N) \times 3} \\ -\frac{k}{k+1} \hat{R}^\top \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_{3,3} & \hat{R}^\top & 0_{3,3N} & -\hat{R}^\top \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0_{(6+3N) \times (6+3N)} & 0_{(6+3N) \times 3} \\ 0_{3 \times (6+3N)} & \frac{k}{k+1} I_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{则 } I - KH = \begin{bmatrix} I_{(6+3N) \times (6+3N)} & 0_{(6+3N) \times 3} \\ 0_{3 \times (6+3N)} & \frac{1}{k+1} I_3 \end{bmatrix}$$

再计算  $P_{k+1} = (I - KH)P_{k+1|k}$ :

$$\begin{aligned} P_{k+1} &= \begin{bmatrix} I_{(6+3N) \times (6+3N)} & 0_{(6+3N) \times 3} \\ 0_{3 \times (6+3N)} & \frac{1}{k+1} I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & L \\ L^\top & \frac{\hat{R}Q\hat{R}^\top}{k} + W \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P & L \\ L^\top & \frac{\hat{R}Q\hat{R}^\top}{k+1} + W \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## 6. 极限情况

当  $k \rightarrow \infty$  时, 对  $P_k$  取极限:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} P & L \\ L^\top & \frac{\hat{R}Q\hat{R}^\top}{k} + W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & L \\ L^\top & W \end{bmatrix} = P_\infty^A$$

综上, 通过数学归纳法, 从初始状态开始, 逐步推导每次观测后的状态更新, 证明了在机器人静止且观测新地标情况下, RI - EKF 算法的均值估计和协方差矩阵的变化符合定理 1 所描述的性质。

## A.2 定理 2 的证明

主要证明了定理 2, 即当机器人在点 A 静止观察新地标无穷次后移动一步到点 B, 并在点 B 观察相同地标时, RI - EKF 的协方差矩阵变化情况。下面是详细推导过程:

### 1. 初始条件与符号说明:

假设机器人在点 A 静止时, 经过无穷次观测新地标, 此时协方差矩阵为  $P_A^\infty$ , 其形式由定理 1 给出。机器人从点 A 移动到点 B 时, 控制量为  $u = [w^\top, v^\top]^\top$ , 运动模型相关的噪声协方差矩阵为  $\Phi$ 。

定义  $\tilde{\Phi} = B\Phi B^\top$ , 其中  $B = \begin{bmatrix} -J_r(-w) & 0_{3,3} \\ -S(v)J_r(-w) & I_3 \end{bmatrix}$ ,  $J_r(\cdot)$  是右雅可比矩阵,  $S(\cdot)$  是斜对称算子。

定义  $E = \begin{bmatrix} I_6 \\ 0_{3(N+m),6} \end{bmatrix}$ ，是一个用于将与机器人运动相关的部分（6 维，包含位置和姿态）从整个系统状态（维度为  $3(N+m)+6$ ， $N$  表示已有的地标数量， $m$  表示新观察的地标数量）中提取出来的矩阵。

假设在点  $B$  观测地标时，观测噪声协方差矩阵为  $\bar{Q} = \phi I_{3m}$  ( $\phi \in \mathbb{R}^+$ )，且假设  $Q = \phi I_3$ 。

## 2. 机器人移动到点 $B$ 时的协方差矩阵：

根据定理 1 的结果和 RI-EKF 算法中传播步骤的雅可比矩阵（公式 (4)），机器人从点  $A$  移动到点  $B$  后，协方差矩阵  $P_B^0$  可表示为：

$$P_B^0 = P_A^\infty + \Delta P$$

其中  $\Delta P = ad_{\hat{x}_A} E \tilde{\Phi} E^\top ad_{\hat{x}_A}^\top$ 。这里，伴随算子  $ad_{\hat{x}_A}$  是在李代数框架下描述状态变换对协方差影响的工具， $\tilde{\Phi}$  是经运动模型相关矩阵  $B$  变换后的噪声协方差矩阵。 $\Delta P$  可视为由里程计噪声引起的增量不确定性。

从直观上理解， $ad_{\hat{x}_A} E \tilde{\Phi} E^\top ad_{\hat{x}_A}^\top$  表示的是，先通过  $E$  提取与机器人运动相关的噪声协方差部分  $\tilde{\Phi}$ ，然后利用伴随算子  $ad_{\hat{x}_A}$  考虑机器人在点  $A$  的状态对这部分噪声协方差在整个状态空间中的传播影响。

## 3. 在点 $B$ 观测 $l$ 次后的信息矩阵：

在点  $B$  观测  $l$  次后，信息矩阵  $\Omega_l^B$  ( $P_l^B$  的逆矩阵) 为：

$$\Omega_l^B = \Omega_0^B + \sum_{j=1}^l H_j^\top \bar{Q}^{-1} H_j$$

其中  $H_j$  由所有  $H_j^i = \hat{R}_j^\top H^i$  ( $i = 1, \dots, m$ ) 堆叠而成， $\hat{R}_j$  是在点  $B$  观测  $j$  次后的估计方向。

由于  $\bar{Q}$  是各向同性的，所以  $H_j^\top \bar{Q}^{-1} H_j = H^\top \bar{Q}^{-1} H$  ( $j = 1, \dots, l$ )。那么信息矩阵可简化为：

$$\Omega_l^B = \Omega_0^B + l H^\top \bar{Q}^{-1} H$$

## 4. 在点 $B$ 观测 $l$ 次后的协方差矩阵：

根据伍德伯里恒等式 (Woodbury matrix identity)：设  $A$  是  $n \times n$  的可逆矩阵， $U$  是  $n \times k$  矩阵， $C$  是  $k \times k$  的可逆矩阵， $V$  是  $k \times n$  矩阵，则  $(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$ 。

对于  $P_B^l = (\Omega_l^B)^{-1}$ ，其中  $\Omega_l^B = \Omega_0^B + l H^\top \bar{Q}^{-1} H$ ，令  $A = \Omega_0^B$ ， $U = H^\top$ ， $C = \frac{1}{l} \bar{Q}$ ， $V = H$ ，可得：

$$P_B^l = P_B^0 - P_B^0 H^\top \left( \frac{\bar{Q}}{l} + H P_B^0 H^\top \right)^{-1} H P_B^0$$

又因为  $HP_A^\infty = 0$ ，将  $P_B^0 = P_A^\infty + \Delta P$  代入上式可得：

$$\begin{aligned}
P_B^l &= P_A^\infty + \Delta P - \Delta P H^\top \left( \frac{\bar{Q}}{l} + H \Delta P H^\top \right)^{-1} H \Delta P \\
&= P_A^\infty + ad_{\hat{x}_A} E [\tilde{\Phi} - \tilde{\Phi} \tilde{H}^\top \left( \frac{\bar{Q}}{l} + \tilde{H} \tilde{\Phi} \tilde{H}^\top \right)^{-1}] E^\top ad_{\hat{x}_A}^\top \\
&= P_A^\infty + ad_{\hat{x}_A} E (\tilde{\Phi}^{-1} + l \tilde{H}^\top \bar{Q}^{-1} \tilde{H})^{-1} E^\top ad_{\hat{x}_A}^\top \\
&= P_A^\infty + \bar{P}_B^l
\end{aligned}$$

其中  $\tilde{H} = H ad_{\hat{x}_A} E$ ，第二行到第三行同样利用了伍德伯里恒等式（Woodbury matrix identity）。

5. 当  $l$  趋于无穷时的协方差矩阵：

一般来说，当  $m > 3$  且有三个地标与机器人位置不共面时， $\tilde{H}^\top \bar{Q}^{-1} \tilde{H}$  是满秩的。在这种情况下，当  $l \rightarrow \infty$  时， $P_B^l \rightarrow P_A^\infty$ 。

### A.3 定理 3 的证明

1. 证明 SO(3)-EKF 和 RI-EKF 对确定性刚体变换的不变性：

假设在一般 EKF 框架下，时间 0 的估计为  $(\hat{X}_0, P_0)$ 。经过一步里程计  $u_0$  传播后，估计变为  $(\hat{X}_{1|0}, P_{1|0})$ 。再获得观测  $z_1$  后，估计变为  $(X_1, P_1)$ 。

在 SO(3)-EKF 和 RI-EKF 中，对于任何刚体变换  $T$ ，存在矩阵  $Q_T$  使得  $\mathcal{T}(X \oplus Q_T^{-1}e) = \mathcal{T}(X) \oplus e \quad \forall X$ 。

若在时间 0 应用确定性刚体变换  $T$ ，估计变为  $(\hat{Y}_0, P_{y0})$ ，其中  $\hat{Y}_0 = T(\hat{X}_0)$  且  $P_{y0} = Q_T P_0 Q_T^\top$ 。

计算传播过程中的新雅可比矩阵  $G_{y0}$ ：

$$\begin{aligned}
G_{y0} &= \frac{\partial f(\hat{Y}_0 \oplus e, u_0, 0) \ominus f(\hat{Y}_0, u_0, 0)}{\partial e} \Big|_0 = \frac{\partial f(\hat{X}_0 \oplus e, u_0, 0) \ominus f(\hat{X}_0, u_0, 0)}{\partial e} \Big|_0 \\
&\stackrel{(21)}{=} \frac{\partial f(\hat{X}_0 \oplus Q_T^{-1}e, u_0, 0) \ominus f(\mathcal{T}(\hat{X}_0), u_0, 0)}{\partial e} \Big|_0 \\
&= \frac{\partial \mathcal{T}(f(\hat{X}_0 \oplus Q_T^{-1}e, u_0, 0)) \ominus \mathcal{T}(f(\hat{X}_0, u_0, 0))}{\partial e} \Big|_0 \\
&= \frac{\partial \mathcal{T}(f(\hat{X}_0, u_0, 0) \oplus F_0 Q_T^{-1}e) \ominus \mathcal{T}(f(\hat{X}_0, u_0, 0))}{\partial e} \Big|_0 \\
&= F_0 Q_T^{-1}
\end{aligned}$$

同理可得  $Gy_0 = Q_T G_0$ 。因此，经过一步传播后，估计变为  $(\hat{Y}_{1|0}, Py_{1|0})$ ，其中  $\hat{Y}_{1|0} = f(\hat{Y}_0, u_0, 0) = T(\hat{X}_{1|0})$  且  $Py_{1|0} = Gy_0 Py_0 Gy_0^\top + Gy_0 \Phi_0 Gy_0^\top = Q_T P_{1|0} Q_T^\top$ 。

更新过程中的新雅可比矩阵  $Hy_1 = H_1 Q_T^{-1}$ 。进而容易得到  $K_y = Q_T K$ ，从而  $\hat{Y}'_1 = \hat{Y}_{1|0} \oplus K_y y = T(\hat{X}_{1|0}) \oplus Q_T K y = T(\hat{X}_{1|0} \oplus K y) = T(\hat{X}_1)$ 。更新后的协方差矩阵变为  $Py_1 = (I - K_y Hy_1) Py_{1|0} = Q_T P_1 Q_T^\top$ 。

综上， $\hat{Y}_1 = T(\hat{X}_1)$  且  $Py_1 = Q_T P_1 Q_T^\top$ 。通过数学归纳法，可以得出 SO(3)-EKF (和 RI-EKF) 的输出在确定性刚体变换下是不变的。

2. 证明 RI-EKF 对随机恒等变换  $T_g(g = (I_3, 0, \Theta))$  的不变性：

考虑 RI-EKF 中时间 0 的估计为  $(\hat{X}_0, P_0)$ 。若应用随机刚体变换  $T_g$ ，估计变为  $(\hat{X}_0, P_0 + \Delta P)$ ，其中  $\Delta P = C \bar{\Sigma} C^\top$  且

$$C = \left. \frac{\partial \mathcal{T}_g(\hat{X}_0) \ominus \hat{X}_0}{\partial \Theta} \right|_0 = \begin{bmatrix} I_3 & 0_{3,3} \\ 0_{3,3} & I_3 \\ \vdots & \vdots \\ 0_{3,3} & I_3 \end{bmatrix}$$

由于  $G_n = I$  (见式 (4))，传播后估计变为  $(\hat{X}_{1|0}, P_{1|0} + \Delta P)$ 。注意到  $H_1 \Delta P = 0$ ，很容易得到后验估计  $(\hat{X}_1, P_1 + \Delta P)$ 。

综上，可以得出 RI-EKF 的输出在随机恒等变换下是不变的。