



中国科学院大学  
University of Chinese Academy of Sciences

# Lecture 7

## 恒虚警率检测

# LECTURE 6

---

- ✓ 多元假设检验

Bayes平均风险最小准则、最小平均错误概率准则、最大后验准则

- ✓ 白噪声下独立同分布的多样本检测

积累效应：样本数量决定检验信噪比提升程度

- ✓ 序贯检测（修正NP准则）

样本数量多个且不固定：信号质量好直接判决；否则增加新样本



# 检测方法

---

- ✓ 经典信号检测（参量检测）

似然比处理器

- ✓ 非参量检测（CFAR）

干扰的概率密度完全未知

- ✓ 鲁棒检测

干扰的概率密度部分已知，寻找最不利分布对



# 检测场景

- 干扰：噪声+杂波（反射回波、敌方干扰等）
- 干扰强度引起判决概率的变化
- **Constant False Alarm Rate**：估计+检测，保持虚警率恒定

2.7 设  $x(t)=n(t)$ ，式中， $n(t)$  是均值为零、方差为  $\sigma_n^2$  的平稳高斯噪声。 $x(t)$  通过中心频率为  $\omega_0$  的窄带线性系统后，其包络(幅度)  $q$  的概率密度函数服从瑞利分布(Rayleigh Distribution)，即

$$p(q)=\begin{cases} \frac{q}{\sigma_n^2} \exp\left(-\frac{q^2}{2\sigma_n^2}\right) & q \geq 0 \\ 0 & q < 0 \end{cases}$$

- (1) 求  $q$  的均值  $\mu_q$  和方差  $\sigma_q^2$ 。
- (2) 为了分析方便，对包络  $q$  进行归一化处理，即令  $u=q/\sigma_n$ ，求包络  $q$  的归一化信号  $u$  的概率密度函数  $p(u)$ 。
- (3) 求  $u \geq u_0$  的概率  $P(u \geq u_0)$ ；结果说明了什么？







中国科学院大学  
University of Chinese Academy of Sciences

1

恒虚警率信号检测

2

非参量检测

3

鲁棒检测

目录  
Contents



中国科学院大学  
University of Chinese Academy of Sciences

1

恒虚警率信号检测

2

非参量检测

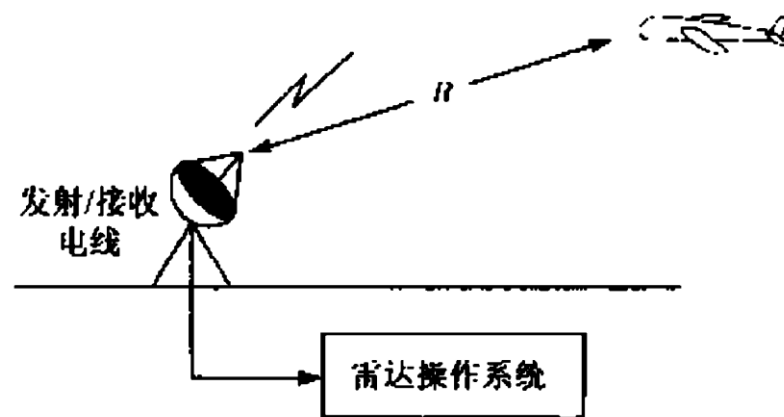
3

鲁棒检测

目录  
Contents

# 必要性

- NP准则:  $P_{fa}$  是主要指标之一
- 自动检测雷达:  
保证系统不会因为干扰太强而过载
- 人工检测雷达:  
在强干扰下损失一点检测性能, 保持工作能力



# CFAR

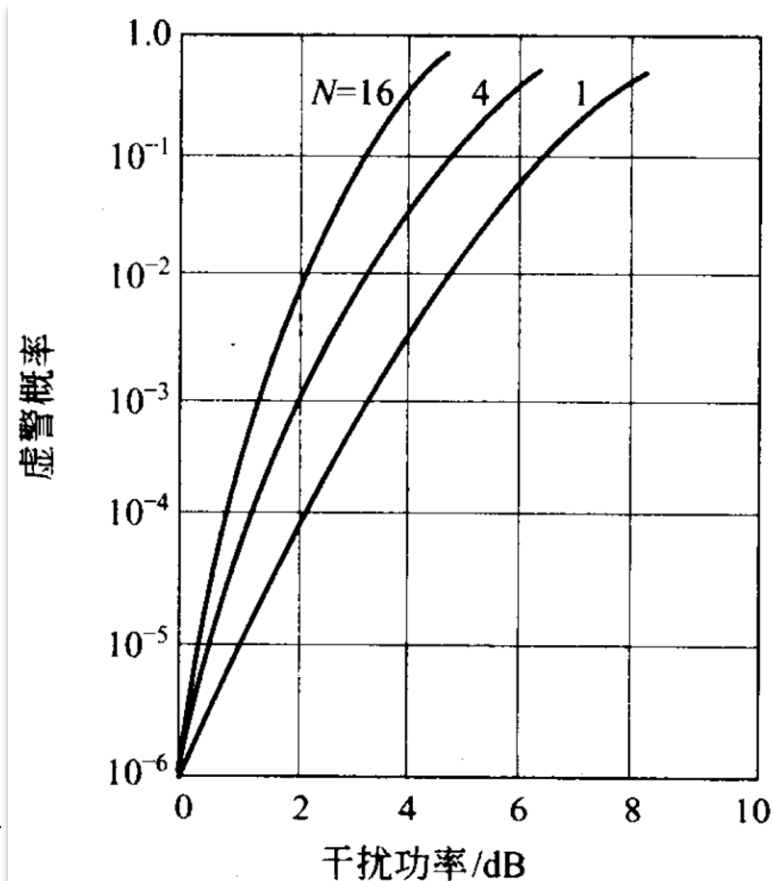
- 瑞利分布

- ✓ 高斯噪声通过窄带线性系统
- ✓ 低分辨率雷达下平稳杂波

$$f(y | H_0) = \begin{cases} \frac{y}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right), & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

- 单次检测时虚警概率随干扰强度变化

$$P_{fa} = \int_{th}^{\infty} \frac{y}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) dy = \exp\left(-\frac{th^2}{2\sigma^2}\right)$$





# CFAR

---

- 指标

- 恒虚警率性能--实际设备偏离理想情况的程度;
- 恒虚警率损失 ( $L_{CFAR}$ ) --雷达信号经过恒虚警处理后, 为了达到原信号的检测能力所需的SNR的增加量

- 分类

- 噪声环境的恒虚警率处理/杂波环境的恒虚警率处理
- 参量型/非参量型

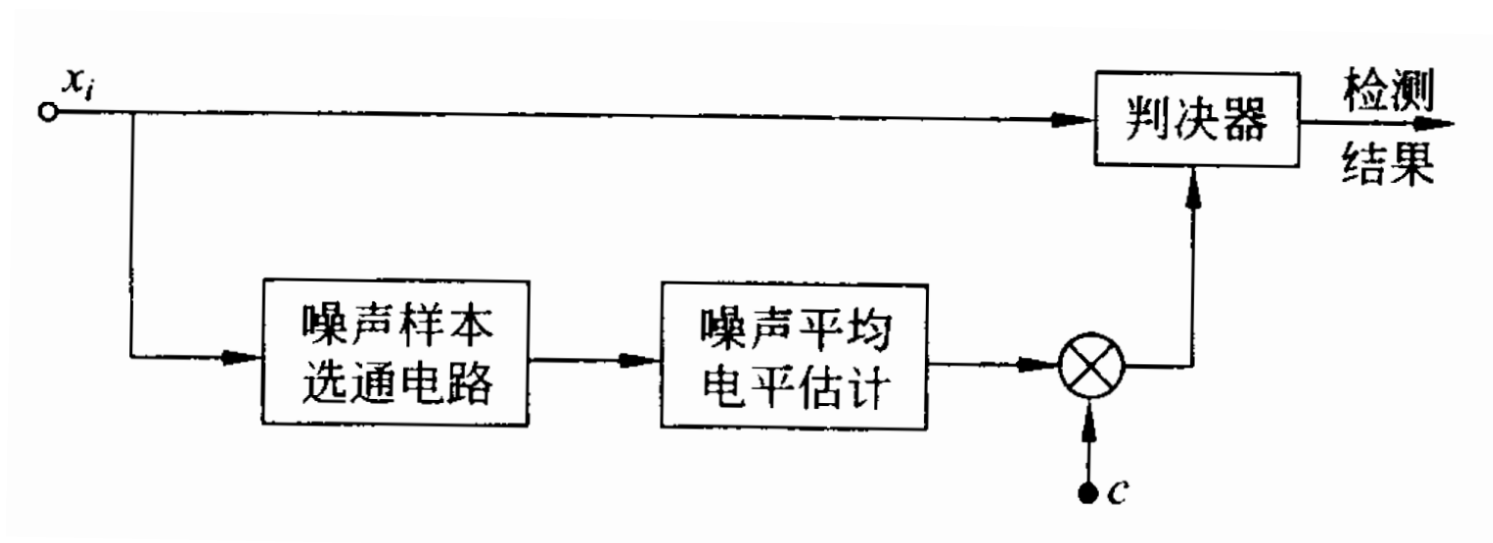


# 噪声下的自动门限检测

- 归一化处理

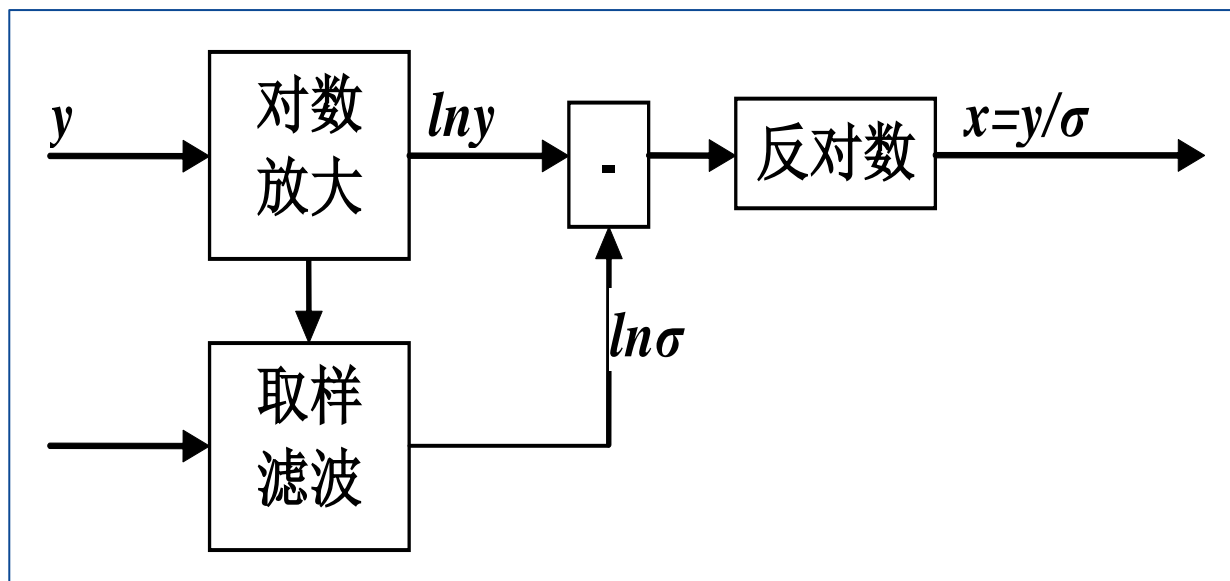
$$x = y / \sigma$$

$$P_{fa} = \int_{th}^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) d\left(\frac{y^2}{2\sigma^2}\right) \stackrel{x=y/\sigma}{=} \exp\left(-\frac{(th')^2}{2}\right)$$



# 噪声取样滤波电路

- 干扰强度参数的估计  $Rayleigh : mean = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$ 
  - ✓ 雷达休止期内取样
  - ✓ 远距离段取样
  - ✓ 匹配滤波器信号前段



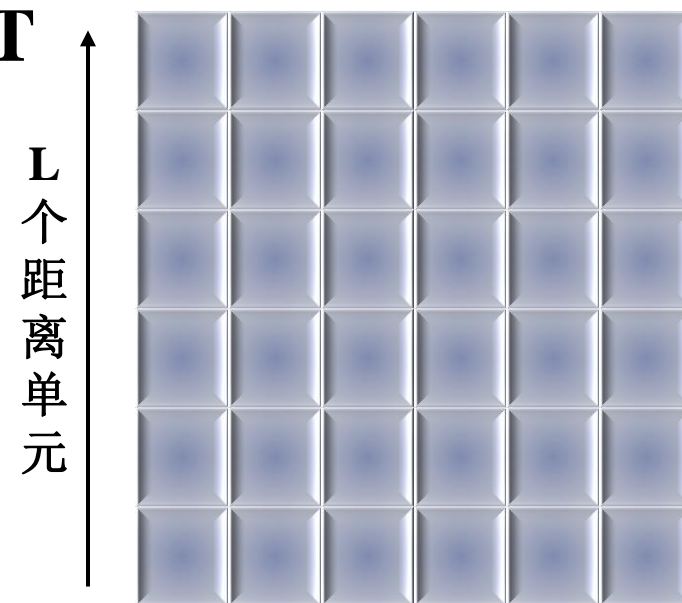


- 动目标检测（Moving Target Detection, MTD）
- 第*i*个距离单元第*n*个探测周期的信号 $y_{i|n}$ 进行DFT

$$X_i(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x_{i|n} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}$$

其中 $k = 0, 1, \dots, N-1$ ,  $i = 1, 2, \dots, L$

- 噪声均匀存在于二维数据矩阵的各单元中
- 不同多普勒频率的目标出现在不同频率通道
- 不同距离的雷达目标出现在不同距离单元



N个频率通道

(N个探测周期)



中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences





噪声电平估计:

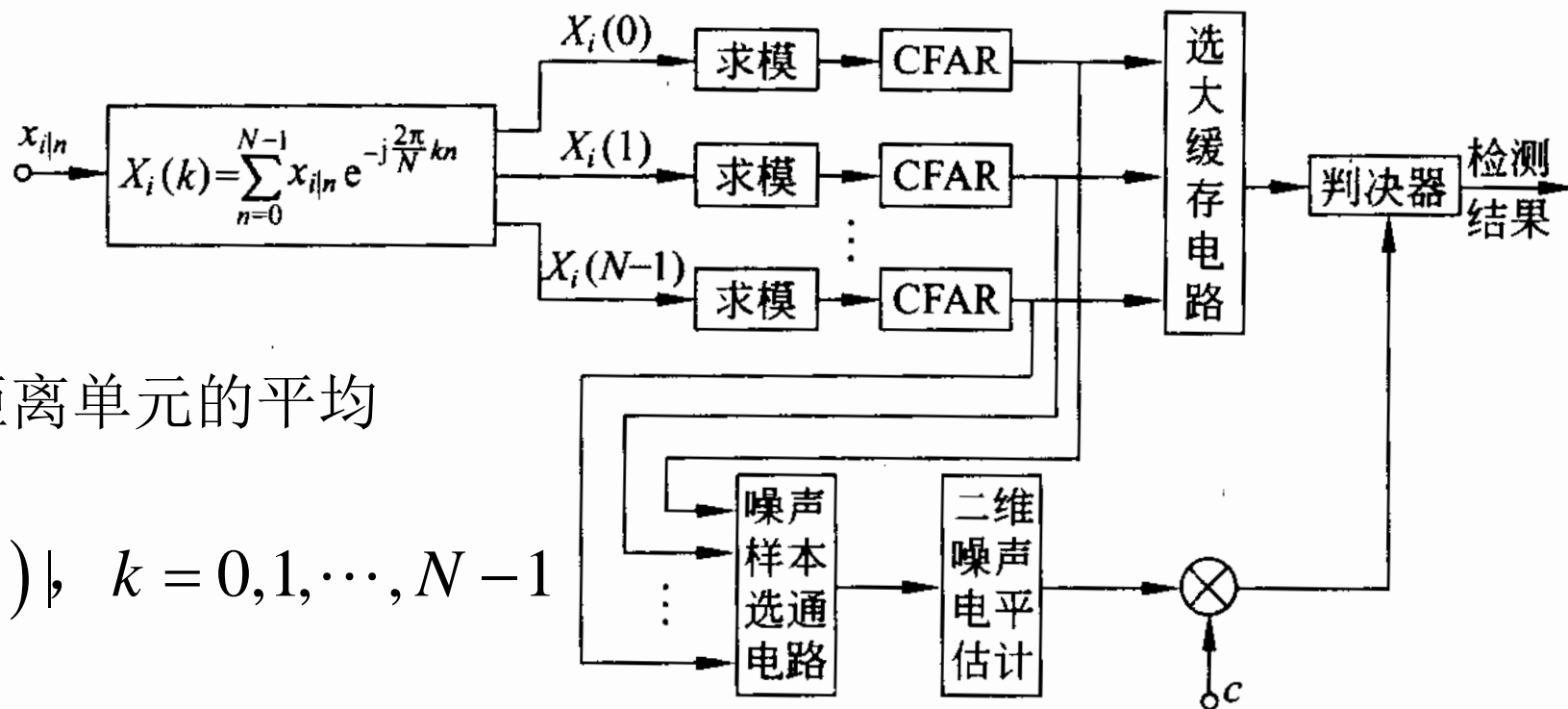
二维平均

每个频率通道进行 $N_n$ 个距离单元的平均

$$mean_{k|n} = \frac{1}{N_n} \sum_{i=l}^{l+N_n-1} |X_i(k)|, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

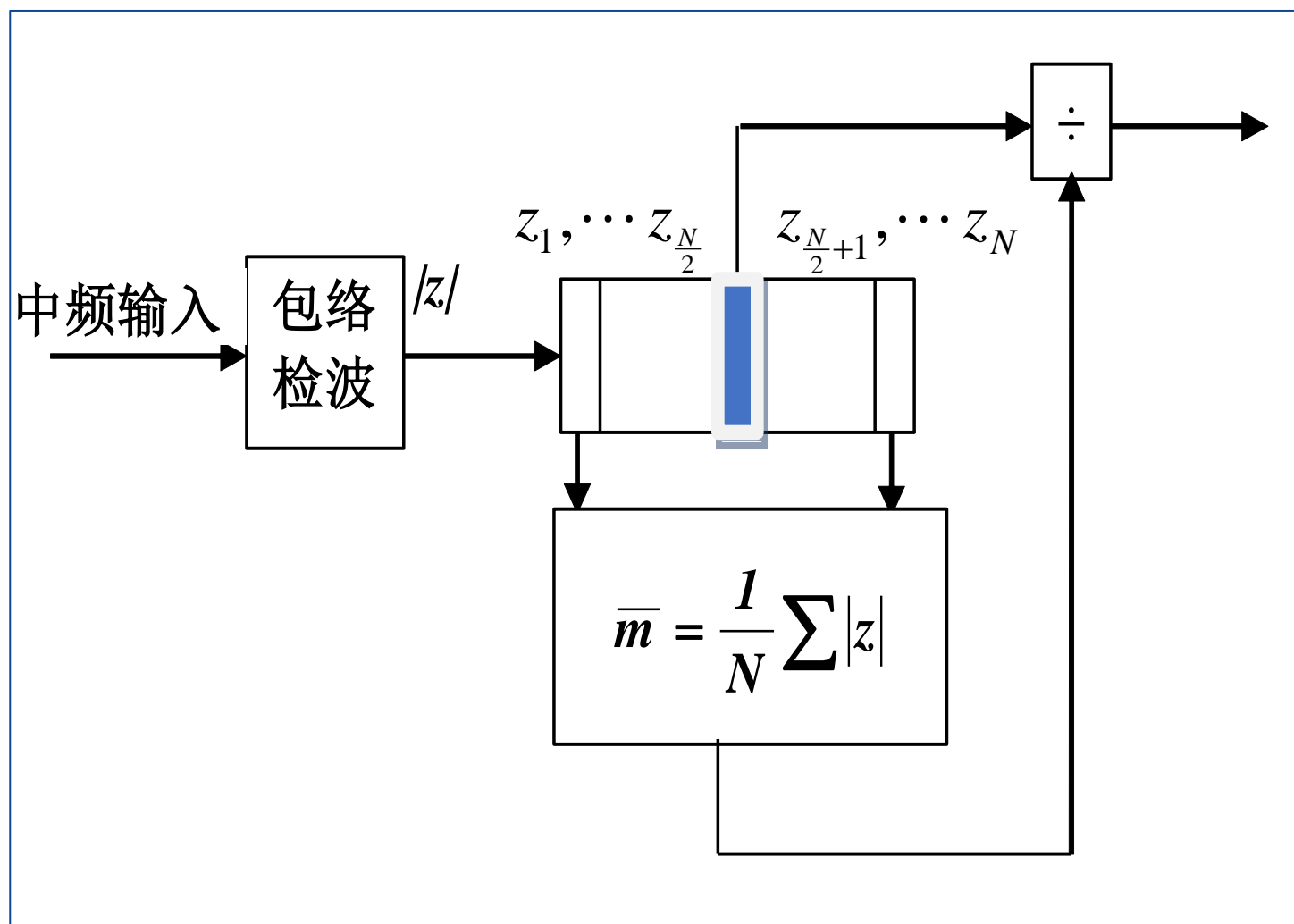
再进行频率通道间平均

$$mean = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N mean_{k|n} X_i(k)$$



# 瑞利杂波：邻近单元平均恒虚警电路

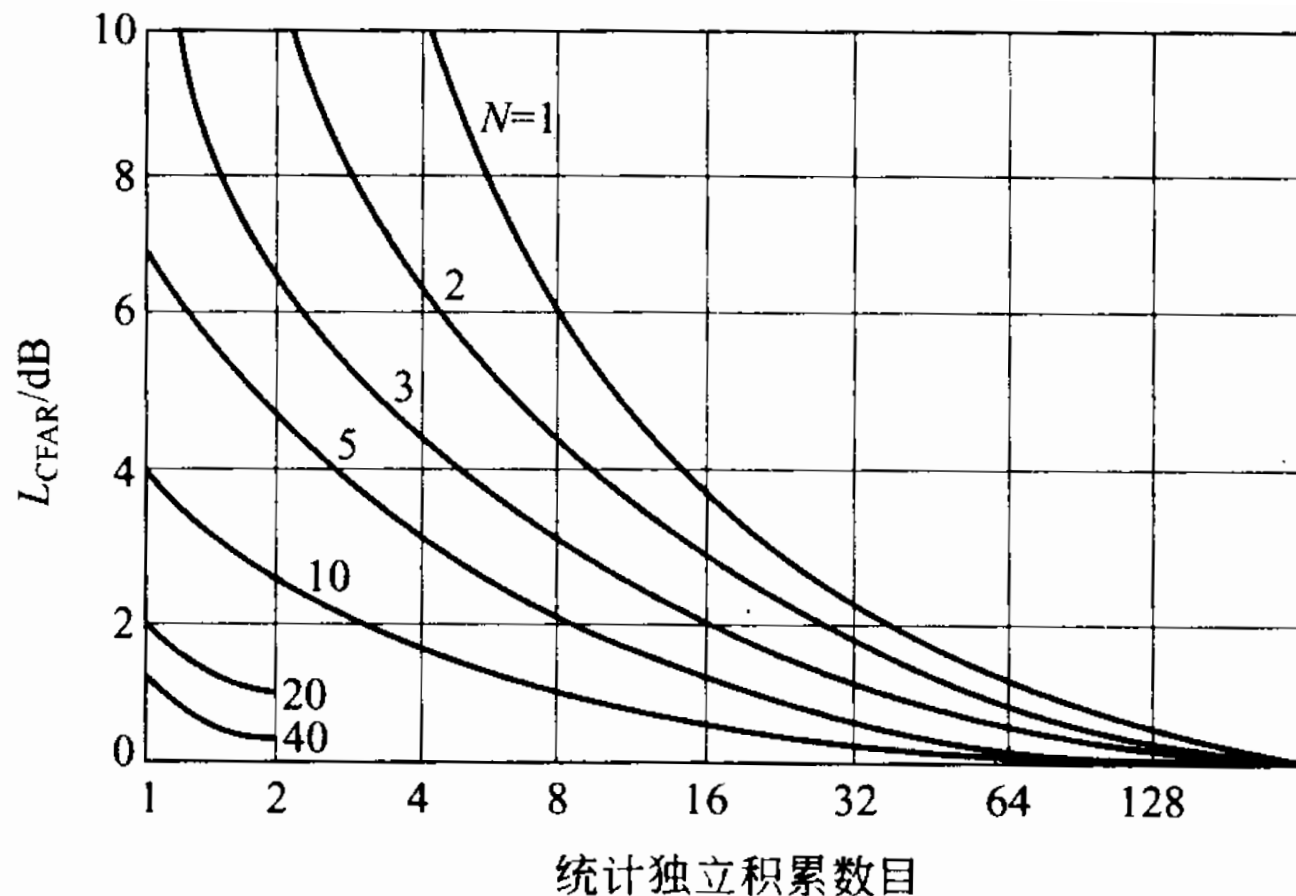
- 区域性杂波
- 平稳长度有限
- 检测单元
- 前后距离临近单元  
(参考单元)
- 保护单元



# 恒虚警损失

- 参考单元个数受限
- 噪声起伏增大
- 虚警率起伏
- 为保证原始性能，  
需要提高检测SNR

$$L_{CFAR} = \frac{SNR(N)}{SNR(\infty)} \Big|_{P_D, P_F \text{ 一定}}$$



$$L_{CFAR} (P_{fa}=10^{-6}, P_d=0.5)$$



中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences



中国科学院大学  
University of Chinese Academy of Sciences

1

恒虚警率信号检测

2

非参量检测

3

鲁棒检测

目录  
Contents



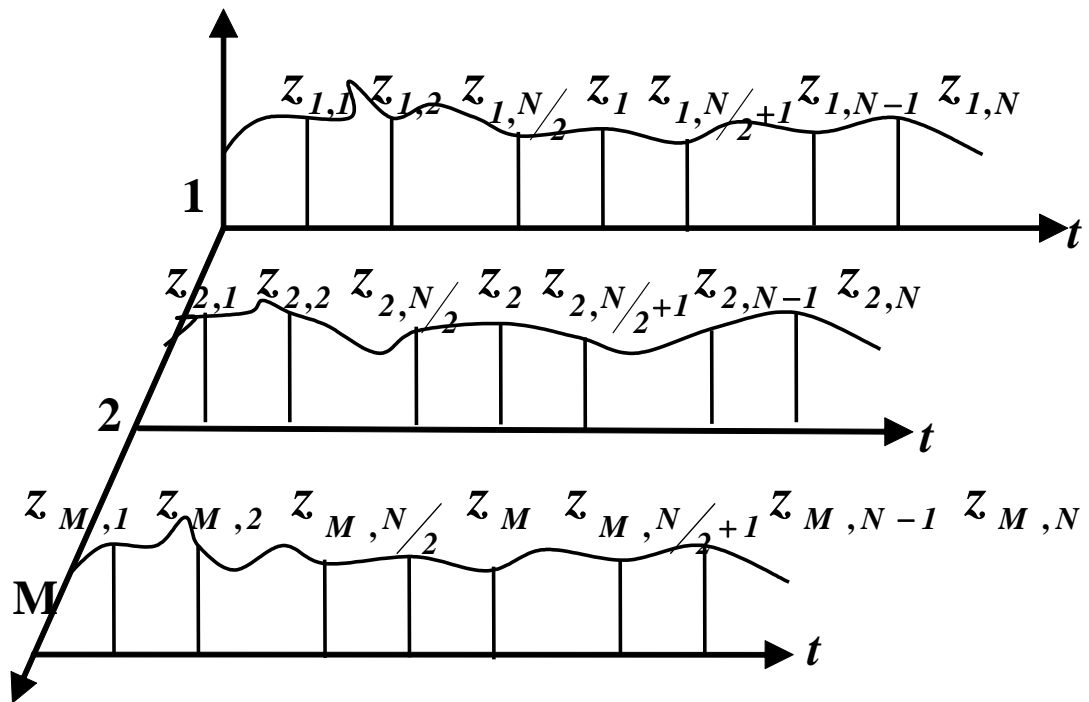
# 自由分布检测

---

- 参量检测：基于对干扰信号统计特性的了解
- 非参量检测：环境复杂，干扰分布未知或是时变
- 数理统计检测
- 基本思想：通过检测单元与邻近参考单元相比较，统计的确定有无信号存在



# 信号采集和采样存储矩阵



$$\begin{bmatrix} z_{1,1}, z_{1,2}, \dots, z_{1,N/2}, z_{1,N/2+1}, \dots, z_{1,N-1}, z_{1,N} \\ z_{2,1}, z_{2,2}, \dots, z_{2,N/2}, z_{2,N/2+1}, \dots, z_{2,N-1}, z_{2,N} \\ \vdots \\ z_{M,1}, z_{M,2}, \dots, z_{M,N/2}, z_{M,N/2+1}, \dots, z_{M,N-1}, z_{M,N} \end{bmatrix}$$



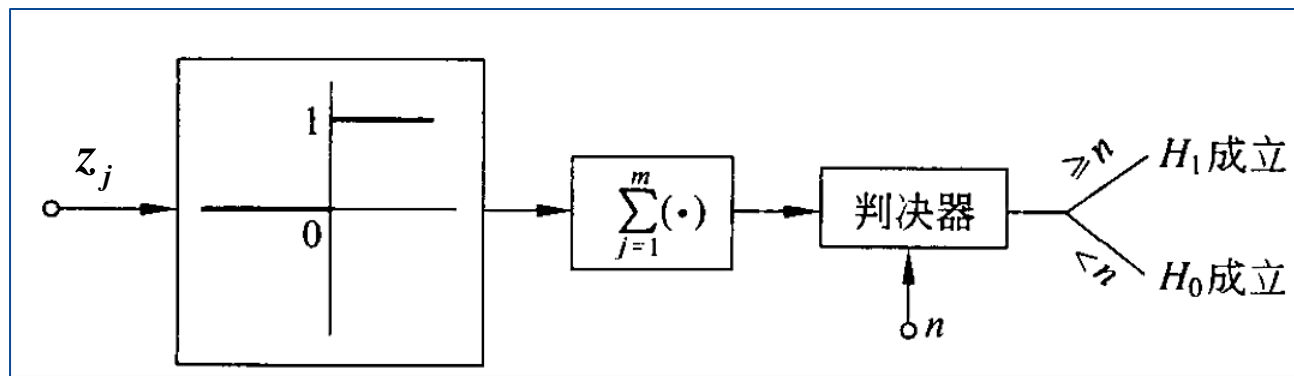
# 符号检验统计

## 检验统计量

$$T_s = \sum_{k=1}^N U(z_j)$$

$$U(z_j) = \begin{cases} 1 & z_j \geq 0 \\ 0 & z_j < 0 \end{cases}$$

$$\text{或 } U(z_j) = \begin{cases} 1 & z_j > 0 \text{ 或 } z_j = 0 (j \text{ 为奇数}) \\ 0 & z_j < 0 \text{ 或 } z_j = 0 (j \text{ 为偶数}) \end{cases}$$



# 广义符号（秩和）检验统计

## 检验统计量

$$T_{GS} = \sum_{j=1}^M R_j = \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N U(z_j - z_{jk}), j = 1, 2 \dots M; k = 1, 2 \dots N$$

$$\text{秩} R_j = \sum_{k=1}^N U(z_j - z_{jk})$$

$$U(z_j - z_{jk}) = \begin{cases} 1 & z_j > z_{jk} \\ 0 & z_j < z_{jk} \end{cases}$$





# Mann-Whitney检验统计

## 检验统计量

$$T_{MW} = \sum_{j=1}^M \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N U(z_j - z_{lk}), j, l = 1, 2 \dots M; k = 1, 2 \dots N$$

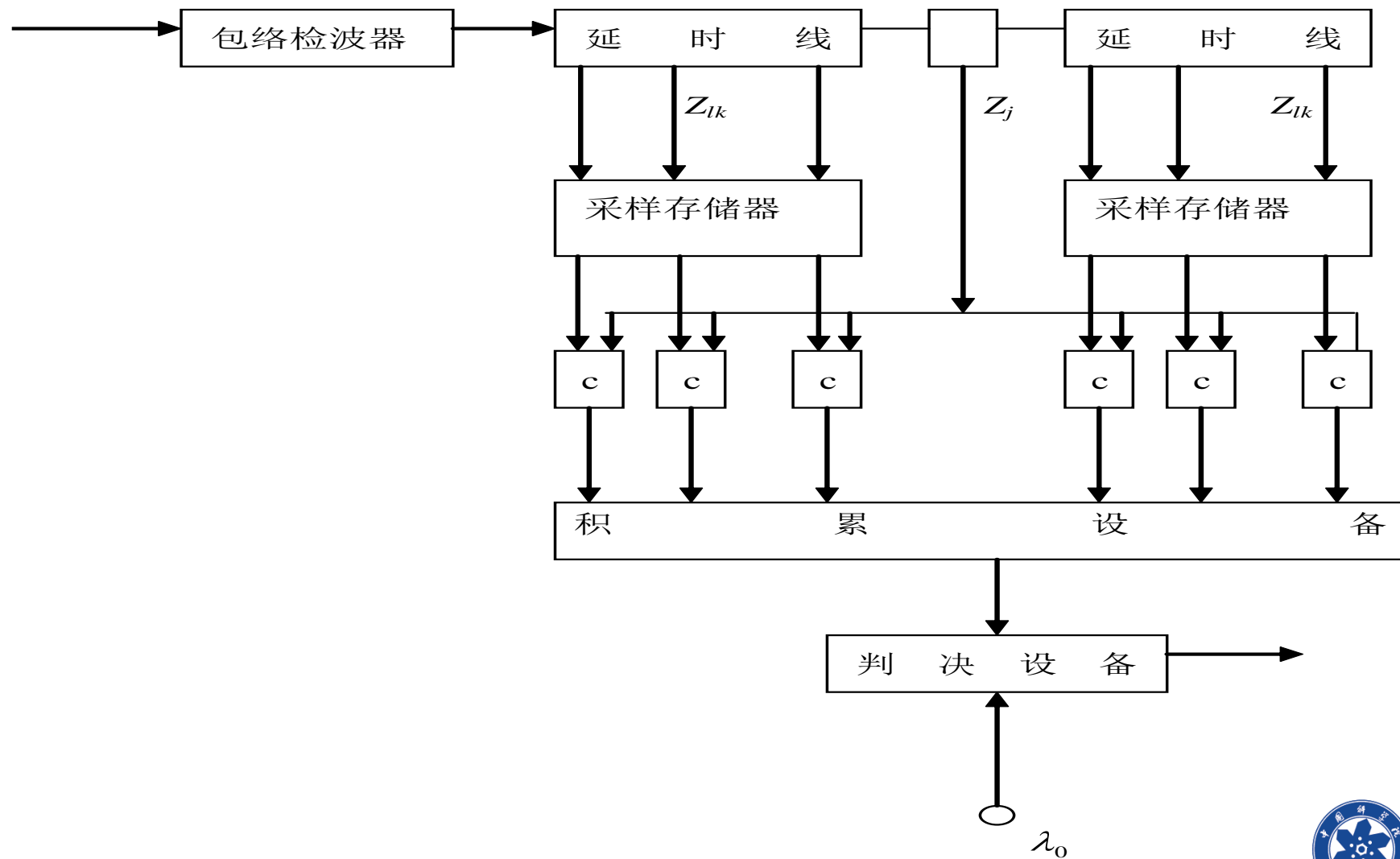
$$\text{秩} R_j = \sum_{l=1}^M \sum_{k=1}^N U(z_j - z_{lk})$$

- 判决准则:

$T \geq th$ , 判 $H_1$ 为真, 否则 $H_0$ 为真



# 检验器



# 检测性能（GS检验）

- 参考单元采样 $z_{jk}$ 的pdf为 $f_0(z)$ （IID）
- 检测单元采样 $z_j$ 的pdf为 $f_0(z)$ （无信号）
- 检测单元采样 $z_j$ 的pdf为 $f_1(z)$ （有信号）
- 虚警：检测单元无信号但 $R_j$ 超过某数值 $l_j$
- 任一参考单元 $z_{jk}$ 超过 $z_j$ 的概率为

$$\int_{z_j}^{\infty} f_0(z) dz$$



# 虚警概率

- 单次测量 $R_j = l_j$ 的概率为二项式分布

$$P_j(R_j = l_j) = C_N^{l_j} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(z_j) \left( \int_{z_j}^{\infty} f_0(z) dz \right)^{N-l_j} \left( 1 - \int_{z_j}^{\infty} f_0(z) dz \right)^{l_j} dz_j$$

$$\text{设 } P = \int_z^{\infty} f_0(z) dz$$

$$P_{fa}(R = l) = C_N^l \int_{-\infty}^{\infty} f_0(z) P^{N-l} (1-P)^l dz$$

Taylor's formula

$$= C_N^l \sum_{n=0}^l (-1)^n C_l^n \int_{-\infty}^{\infty} f_0(z) P^{N-l+n} dz$$





# 虚警概率

$$\begin{aligned} P_{fa} &= C_N^l \sum_{n=0}^l (-1)^n C_l^n \int_0^1 P^{N-l+n} dP \Big|_{dP=f_0(z)dz} \\ &= C_N^l \sum_{n=0}^l (-1)^n C_l^n \frac{1}{N-l+n+1} \\ &\quad \left( \sum_{n=0}^l (-1)^n C_l^n \frac{1}{a+n} = \frac{l!}{a(a+1)\cdots(a+l)} \right) \\ &= \frac{N!}{l!(N-l)!} \cdot \frac{l!}{(N-l+1)(N-l+2)\cdots N(N+1)} = \frac{1}{N+1} \\ P_{fa}(R \geq l) &= \sum_{n=l}^N P_{fa}(R=n) = 1 - \frac{l}{N+1} = \frac{1}{N+1}(N+1-l) \end{aligned}$$



# 发现概率

$$\text{设 } P = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(z) dz$$

$$\text{则 } P_D(R=l) = C_N^l \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z) P^{N-l} (1-P)^l dz$$

$$= C_N^l \sum_{n=0}^l (-1)^n C_l^n \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z) P^{N-l+n} dz$$

$$P_{fa}(R > l) = \sum_{m=l}^N P_d(R = m)$$





**例 16-4** 按照性别相同、体重接近的原则将大蟾蜍配成 10 个区组 ( $b=10$ ), 每个区组包括 4 只蟾蜍, 随机将其分配到 4 个处理组 ( $k=4$ ) 中: 对照组、实验 I 组、实验 II 组和实验 III 组, 分别在蟾蜍上颌黏膜处滴加 0.5 ml 不同的溶液并保持 30 min。4 种溶液分别为 pH 6.8 的磷酸盐缓冲液 (PBS)、总皂苷 (PNS) 溶液、PNS 脂质体和脂质体。观察记录离体上颌黏膜纤毛运动持续的时间 (min), 结果如表 16-6。

| 区组号         | 纤毛运动时间(秩次) |        |         |        |
|-------------|------------|--------|---------|--------|
|             | PBS 溶液     | PNS 溶液 | PNS 脂质体 | 脂质体    |
| 1           | 630(3)     | 487(1) | 720(4)  | 619(2) |
| 2           | 621(4)     | 387(1) | 601(3)  | 567(2) |
| 3           | 546(4)     | 316(1) | 539(3)  | 531(2) |
| 4           | 498(4)     | 257(1) | 264(2)  | 367(3) |
| 5           | 523(4)     | 286(1) | 310(2)  | 432(3) |
| 6           | 531(4)     | 367(1) | 431(3)  | 422(2) |
| 7           | 520(4)     | 345(1) | 492(3)  | 489(2) |
| 8           | 532(4)     | 324(2) | 335(3)  | 316(1) |
| 9           | 623(4)     | 321(1) | 620(3)  | 611(2) |
| 10          | 664(4)     | 432(1) | 656(3)  | 597(2) |
| $R_i$       | 39         | 11     | 29      | 21     |
| $\bar{R}_i$ | 3.9        | 1.1    | 2.9     | 2.1    |





(1) 假设

$H_0$ : 在任一区组内(在性别相同、体重接近的情况下)四种溶液处理过的黏膜纤毛运动时间总体分布相等。

$H_1$ : 在任一区组内四组溶液处理过的黏膜纤毛运动时间总体分布不全相等。

$\alpha=0.05$ 。

(2) 编秩 在各区组内将各测量值按照由小到大的顺序编秩,如有相同测量值取平均秩次。将各处理组的秩次相加得各处理组的秩和  $R_i$ 。

(3) 计算统计量  $M$  值

$$M = \sum (R_i - \bar{R})^2 \quad (16-7)$$

式中,平均秩和  $\bar{R} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k R_i = \frac{b(k+1)}{2}$ 。由此可见,当  $H_0$  为真时,各个处理组的秩和  $R_i$  应该比较接近于平均秩和  $\bar{R}$ ,因此统计量  $M$  比较小;反之,当  $H_0$  非真时,至少存在两个处理组的秩和  $R_i$  应远离于平均秩和  $\bar{R}$ ,因此统计量  $M$  会比较大。





中国科学院大学  
University of Chinese Academy of Sciences

1

恒虚警率信号检测

2

非参量检测

3

鲁棒检测

目录  
Contents

# 统计特性部分已知

---

- 干扰分布形式已知，但参量未知
  - 自适应技术
  - 参数估计
- 干扰特性复杂，多种分布的组合
  - 非参量检测
  - 用已知统计知识拟合某PDF参量检测
  - 鲁棒检测——寻找最不利分布对





# Huber混合模型

$$\mathcal{P}_i = \left\{ q_i' \mid q_i' = (1 - \varepsilon_i)p_i + \varepsilon_i h_i', h_i' \in \mathcal{K} \right\}, i = 0, 1, 0 \leq \varepsilon < 1$$

$$\phi_0(z) = \begin{cases} 1, T_N(z) > K \\ k, T_N(z) = K \\ 0, T_N(z) < K \end{cases} \quad \text{拒绝 } H_0$$

$$\phi_1(z) = \begin{cases} 1, T_N(z) < K \\ 1 - k, T_N(z) = K \\ 0, T_N(z) > K \end{cases} \quad \text{拒绝 } H_1$$



# 等效优化准则

$$\text{令 } L_0 = c_{10} - c_{00}; L_1 = c_{01} - c_{11}$$

虚警风险

$$R(q_0', \phi_0) = L_0 E_{q_0'}(\phi_0) = L_0 \int_{T_N > K} q_0' dz + L_0 k \int_{T_N = K} q_0' dz$$

漏警风险

$$R(q_1', \phi_1) = L_1 E_{q_1'}(\phi_1) = L_1 \int_{T_N < K} q_1' dz + L_1 (1 - k) \int_{T_N = K} q_1' dz$$



# 等效优化准则

---

- 最小化  $\max_{i=0,1} \sup R(q_i', \phi_i)$
- $\sup R(q_0', \phi_0)$  的约束下, 最小化  $\sup R(q_1', \phi_1)$
- 最小化  $\sup \left[ \lambda_0 R(q_0', \phi_0) + \lambda_1 R(q_1', \phi_1) \right]$



# 最不利分布对

$R(q_i', \phi) \leq R(q_i, \phi), i = 0, 1$ , 则  $q_i$  为最不利分布对

$$q_0(z) = \begin{cases} (1 - \varepsilon_0) p_0(z), & p_1(z) / p_0(z) < c'' \\ \frac{(1 - \varepsilon_0)}{c''} p_1(z), & p_1(z) / p_0(z) \geq c'' \end{cases}$$

$$q_1(z) = \begin{cases} (1 - \varepsilon_1) p_1(z), & p_1(z) / p_0(z) > c' \\ \frac{(1 - \varepsilon_1)}{c'} p_0(z), & p_1(z) / p_0(z) \leq c' \end{cases}$$



# 似然比

$$L(z) = \frac{q_1(z)}{q_0(z)} = \begin{cases} bc', p_1(z)/p_0(z) \leq c' \\ b \frac{p_1(z)}{p_0(z)}, c' < p_1(z)/p_0(z) < c'' \\ bc'', p_1(z)/p_0(z) \geq c'' \end{cases} \quad \text{其中 } b = \frac{1-\varepsilon_1}{1-\varepsilon_0}$$



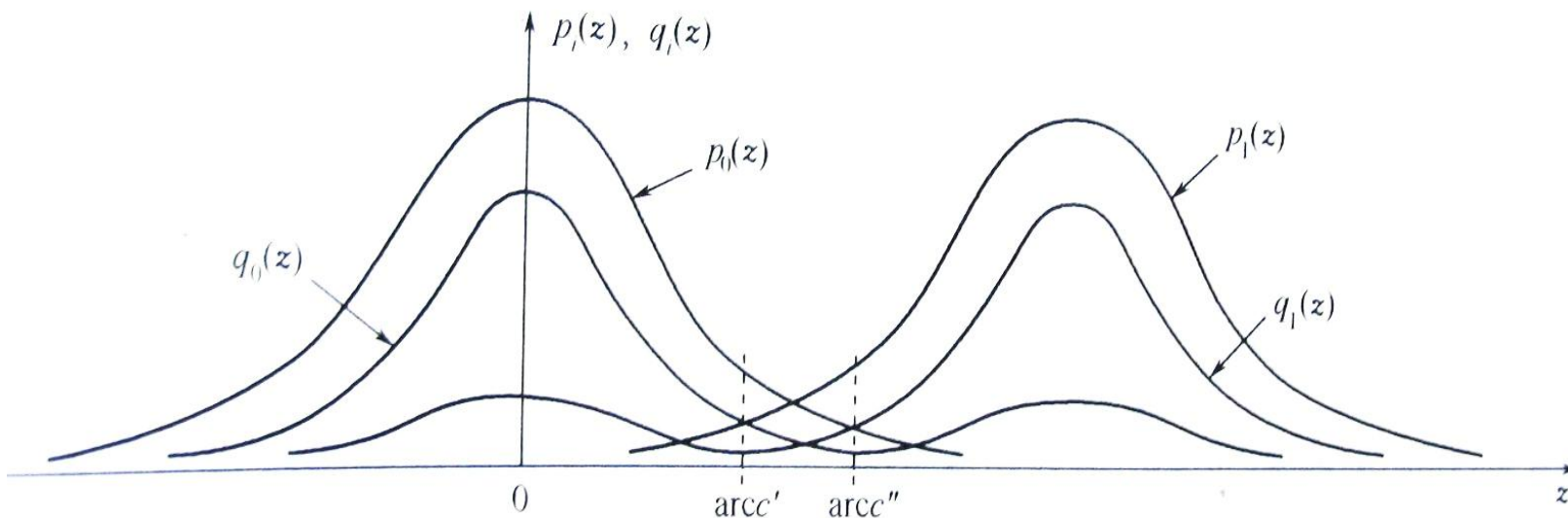


# 高斯型噪声中已知信号的鲁棒检测

主分布

$$p_0(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$$p_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma^2}\right\}$$



$$0 \leq c' < c'' < \infty$$



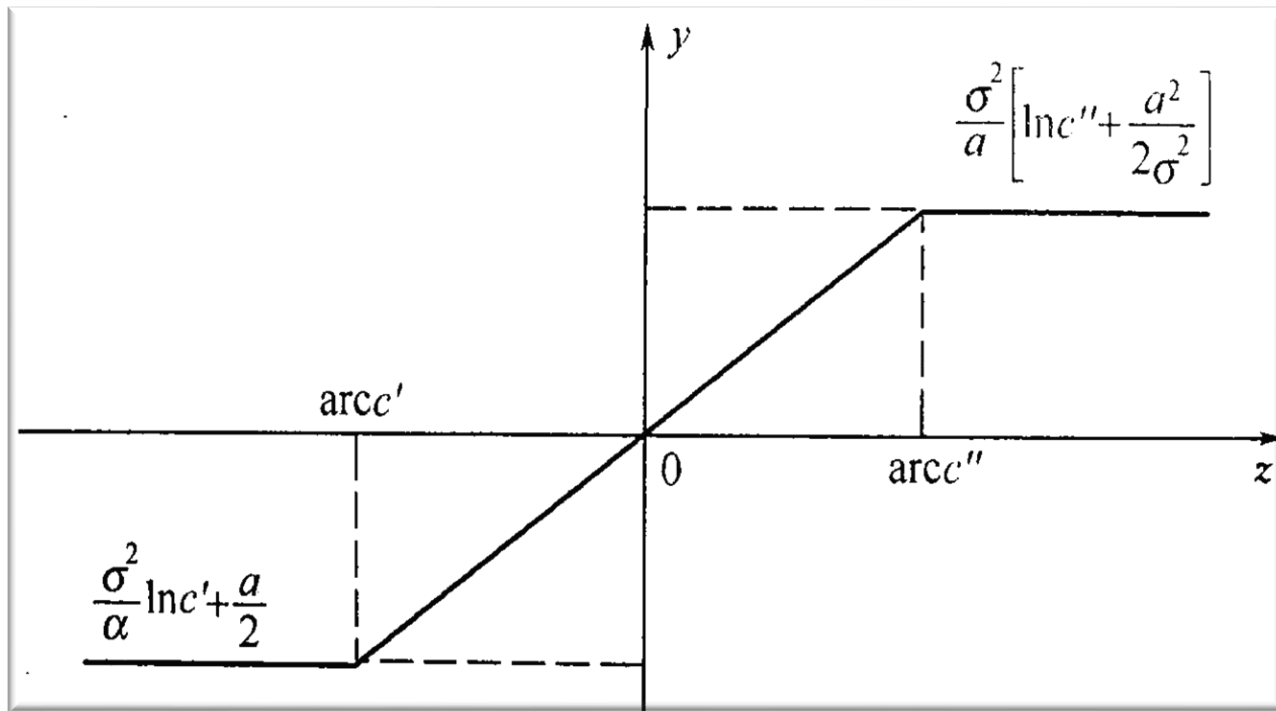
中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences



当  $z \in (arcc', arcc'')$

$$\frac{q_1(z)}{q_0(z)} = b \frac{p_1(z)}{p_0(z)} = b \exp \left\{ \frac{1}{\sigma^2} \left( az - \frac{1}{2} a^2 \right) \right\} \Rightarrow \ln \frac{q_1(z)}{q_0(z)} = \ln b + \frac{1}{\sigma^2} \left( az - \frac{1}{2} a^2 \right)$$



$$y = \begin{cases} \frac{\sigma^2}{a} \left[ \ln c' + \frac{a^2}{2\sigma^2} \right], & p_1/p_0 \leq c' \\ z, & c' < p_1/p_0 < c'' \\ \frac{\sigma^2}{a} \left[ \ln c'' + \frac{a^2}{2\sigma^2} \right], & p_1/p_0 \geq c'' \end{cases}$$



中国科学院大学

University of Chinese Academy of Sciences



# summary

---

- 传统CFAR: 估计+参量检测, 自适应门限
- 非参量检测: 检测单元与参考单元比较
- 鲁棒检测: 寻找最不利分布对进行似然检验
- 检测性能: 参量检测>鲁棒检测>非参量检测
- 普适性: 非参量检测>鲁棒检测>参量检测

Ref: §3.9、§3.10(电工赵版)or chap7(清华赵版)



# Q

---

- 连续波形?
- 非白噪声?





中国科学院大学  
University of Chinese Academy of Sciences

FIN