7.5 平稳瑞利杂波环境中，采用对数单元平均恒虚警率处理，归一化输出 u 的概率密度函数为

$$p(u|H_0)=\frac{2}{a}\exp\left(\frac{2}{a}u-\gamma\right)\exp\left[-\exp\left(\frac{2}{a}u-\gamma\right)\right]$$

其中，γ 为欧拉常数；a 是对数接收机的常参数。若检测门限为 u_0，求虚警概率 p_f 的表示式。

7.5 解、$P_f=\int_{u_0}^{+\infty}p(u|H_0)\,du$

$$=\int_{u_0}^{+\infty}\frac{2}{a}\exp\left(\frac{2}{a}u-r\right)\exp\left[-\exp\left(\frac{2}{a}u-r\right)\right]du$$

$$=\int_{u_0}^{+\infty}\exp\left[-\exp\left(\frac{2}{a}u-r\right)\right]d\exp\left(\frac{2}{a}u-r\right)$$

$$=\int_{\exp\left(\frac{2}{a}u_0-r\right)}^{+\infty}\exp(-x)\,dx$$

$$=\exp\left[-\exp\left(\frac{2}{a}u-r\right)\right]$$

式中 r 为欧拉常数，可见当检测门限确定后，该检测具有恒虚警率性能。

7.10 非参量型广义符号检测中，秩值 R_j 为

$$R_j=\sum_{i=1}^{N}u(x_i-x_{ij})$$

式中，

$$u(x_i-x_{ij})=\begin{cases}1, & x_j>x_{ij}\text{ 或 }x_j=x_{ij}\ (i-j\text{ 为奇数})\\ 0, & x_j<x_{ij}\text{ 或 }x_j=x_{ij}\ (i-j\text{ 为偶数})\end{cases}$$

它是一个检验统计量。当参考单元样本数 N 很大时，根据中心极限定理，该检验统计量将趋于高斯分布。证明在假设 H_0 下，当 N 很大时，此检验统计量的均值和方差分别为

$$\mathrm{E}(R_j)=\frac{N}{2}$$

$$\mathrm{Var}(R_j)=\frac{N}{4}$$

7.10 解：首先求 $u(x_j - x_{ij}) = 1$ 的平均概率 $P(u=1)$，统计量 $u(x_j - x_{ij})$ 是属于(0,1)分布的离散随机变量。所以

$$P(u=1) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{x_{ij}}^{+\infty} p(x_j|H_0)\,dx_j\right] p(x_{ij}|H_0)\,dx_{ij}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[1 - \int_{-\infty}^{x_{ij}} p(x_j|H_0)\,dx_j\right] p(x_{ij}|H_0)\,dx_{ij}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[1 - F(x_{ij}|H_0)\right] p(x_{ij}|H_0)\,dx_{ij}$$

而 $dF(x_{ij}|H_0) = p(x_{ij}|H_0)\,dx_{ij}$.

又 ∵ $\lim\limits_{x_{ij}\to-\infty} F(x_{ij}|H_0) = 0 \qquad \lim\limits_{x_{ij}\to+\infty} F(x_{ij}|H_0) = 1$

$$P(u=1) = \int_0^1 (1 - F(x_{ij}|H_0))\,dF(x_{ij}|H_0)$$

$$= F(x_{ij}|H_0) - \frac{1}{2}F^2(x_{ij}|H_0)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

∴ $P(u=0) = 1 - P(u=1) = \frac{1}{2}$

则 $E[u(x_j - x_{ij})] = \frac{1}{2}\times 1 + \frac{1}{2}\times 0 = \frac{1}{2}$

$Var[u(x_j - x_{ij})] = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

∴ $E(R_j) = \sum\limits_{i=1}^{N} E[u(x_j - x_{ij})] = \frac{N}{2}$

$Var(R_j) = \sum\limits_{i=1}^{N} Var[u(x_j - x_{ij})] = \frac{N}{4}$

7.15 在例 7.8.1 的 ε 混合模型二元信号检测中，对数似然比检验为

$$\ln \lambda^*(x) = \begin{cases} \ln b + \ln c_1, & x \leqslant \dfrac{\sigma_n^2}{A}\ln c_1 + \dfrac{A}{2} \\ \ln b + \dfrac{A}{\sigma_n^2}x - \dfrac{A^2}{2\sigma_n^2}, & \dfrac{\sigma_n^2}{A}\ln c_1 + \dfrac{A}{2} < x < \dfrac{\sigma_n^2}{A}\ln c_0 + \dfrac{A}{2} \\ \ln b + \ln c_0, & x \geqslant \dfrac{\sigma_n^2}{A}\ln c_0 + \dfrac{A}{2} \end{cases}$$

证明其等效检验统计量 $v(x)$ 为

$$v(x) = \begin{cases} \dfrac{\sigma_n^2}{A}\ln c_1 + \dfrac{A}{2}, & x \leqslant x_1 \\ x, & x_1 < x < x_0 \\ \dfrac{\sigma_n^2}{A}\ln c_0 + \dfrac{A}{2}, & x \geqslant x_0 \end{cases}$$

式中，

证明：该证明的关键是将对数似然比检验中间一项化为 x.

即将 $\left(\ln b + \frac{A}{\sigma_n}x - \frac{A^2}{2\sigma_n}\right)$ 先减去 $\left(\ln b - \frac{A^2}{2\sigma_n}\right)$ 再除以 $\frac{A}{\sigma_n}$

与此同时，上下两项做同样的变化.

则
$$V(x)=\begin{cases} \frac{\sigma_n^2}{A}\ln c_1+\frac{A}{2} & x\le \frac{\sigma_n^2}{A}\left(\ln c_1+\frac{A}{2}-\ln b+\frac{A^2}{2\sigma_n^2}\right) \\ x, & \frac{\sigma_n^2}{A}\left(\frac{\sigma_n^2}{A}\ln c_1+\frac{A}{2}-\ln b+\frac{A^2}{2\sigma_n^2}\right)< x<\frac{\sigma_n^2}{A}\left(\frac{\sigma_n^2}{A}\ln c_0+\frac{A}{2}-\ln b+\frac{A^2}{2\sigma_n^2}\right) \\ \frac{\sigma_n^2}{A}\ln c_0+\frac{A}{2} & x\ge \frac{\sigma_n^2}{A}\left(\frac{\sigma_n^2}{A}\ln c_0+\frac{A}{2}-\ln b+\frac{A^2}{2\sigma_n^2}\right) \end{cases}$$

化简得
$$V(x)=\begin{cases} \frac{\sigma_n^2}{A}\ln c_1+\frac{A}{2} & x\le x_0 \\ x & x_0<x<x_1 \\ \frac{\sigma_n^2}{A}\ln c_0+\frac{A}{2} & x\ge x_1 \end{cases}$$

且
$$\begin{cases} x_0=\frac{\sigma_n^4}{A^2}\ln c_1-\frac{\sigma_n^2}{A}\ln b+\frac{A+\sigma_n^2}{2} \\ x_1=\frac{\sigma_n^4}{A^2}\ln c_0-\frac{\sigma_n^2}{A}\ln b+\frac{A+\sigma_n^2}{2} \end{cases}$$

$$b=\frac{1+\varepsilon_1}{1-\varepsilon_0}$$