中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

# Lecture 2

## 确知信号分析

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

# 目录
Contents

1 信号和信号分析

2 信号的内积运算和正交分解

3 确知信号的频域分析

4 确知信号通过LTI系统

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

# 目录
Contents


1 信号和信号分析

2 信号的内积运算和正交分解

3 确知信号的频域分析

4 确知信号通过LTI系统

# 信号

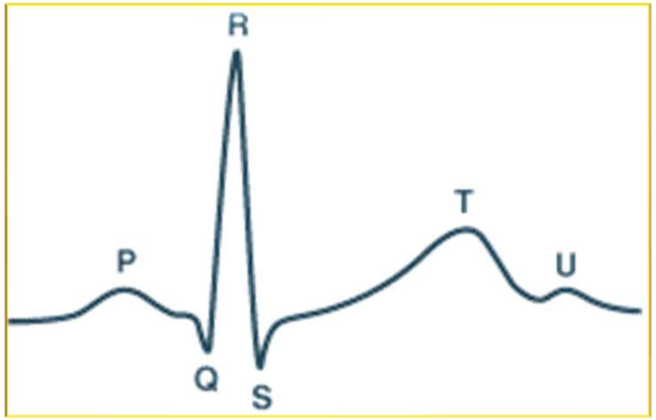
- 信号是信息的载体，表现为变化的物理量
- 信号中所包含的信息总是寄寓在某种形式的变换波形之中
  - ✓存在与否
  - ✓形状参数—幅度、频率、到达时间等
  - ✓两个信号之间的关系—输入输出之间等
- 数学上，可表示为一个或多个变量的函数

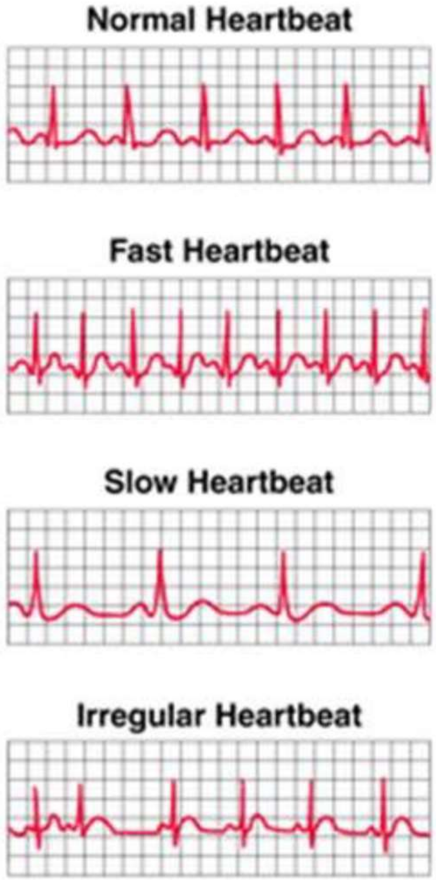
# 信号（处理）

- 信号处理，就是分析、操作物理量以及物理量的测量值的过程，达到发送、传输、获得信息，或者使信息更明确的过程
- 例如：
  - ✓ 放大
  - ✓ 叠加两个信号
  - ✓ 滤波
  - ✓ 分析信号参数如幅度、频率等
  - ✓ 人脸识别
  - ✓ 三维成像

## Electrocardiogram(ECG)

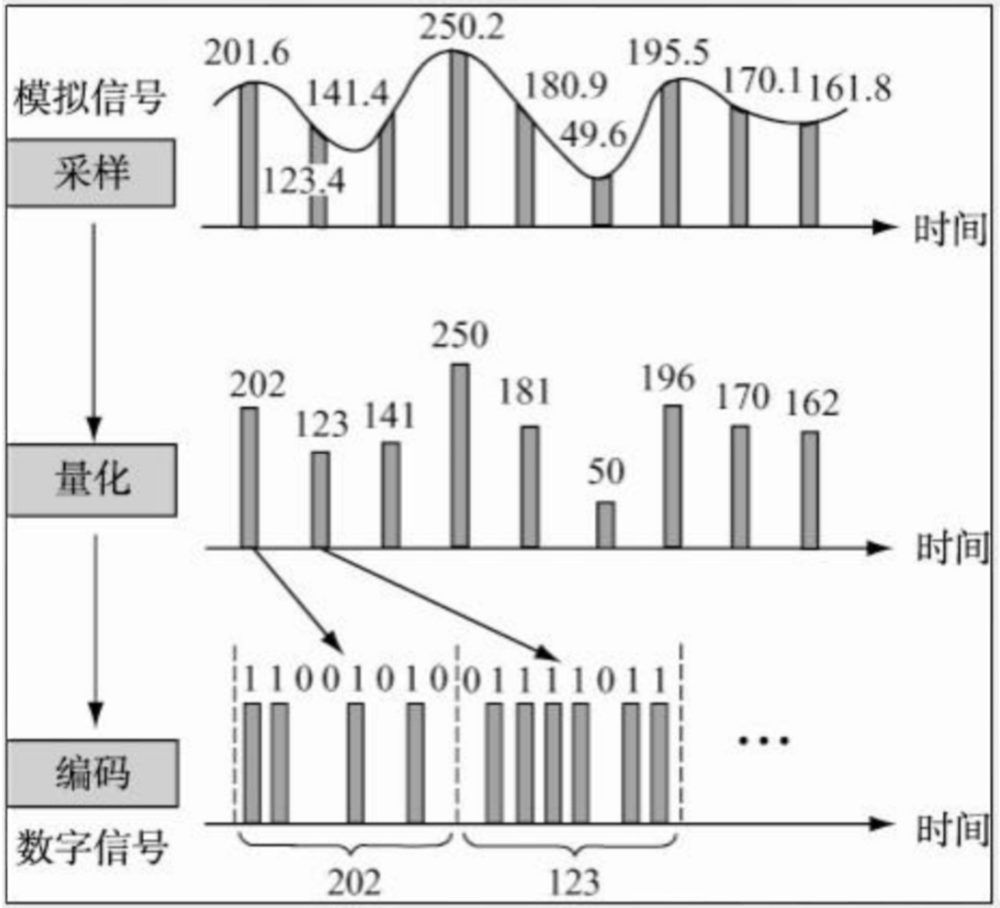
- 心脏细胞充放电，促使心肌收缩和恢复
- 心脏细胞的电荷改变，在体表形成的电场
- 找两个位置采集这个电压差，就得到心电
- 信号携带的信息，就是它所反映的心脏的各种状态和功能好坏



# 信号分类

- 确知信号/随机信号
- 周期信号/非周期信号
- 模拟信号/数字信号
- 能量信号/功率信号




University of Chinese Academy of Sciences

# 确知信号分析

- 信号分析方法：以基本信号之和或积分表示各种复杂信号，以对其性质及其对系统的作用进行分析研究。
- 频域分析法：正弦信号作为基本信号。
- 时域分析法：冲激函数$\delta(t)$作为基本信号。

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

目录
Contents


1 信号和信号分析

2 信号的内积运算和正交分解

3 确知信号的频域分析

4 确知信号通过LTI系统

# 定义

线性空间：设$X$为一非空集合，若在$X$中规定了元素的加法和元素的数乘运算，并满足相应的结合律及分配律，则称$X$为一线性空间

$N$维实数空间$R^N$

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_N)^T \qquad x_i \in \mathbf{R} \qquad i = 1,2,\cdots,N$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_N + y_N)^T$$

$$a\mathbf{x} = (ax_1, ax_2, \cdots, ax_N)^T$$

如果上述定义中实数改为复数，则构成复数空间$\mathbf{C}^N$

连续函数空间 $L$：在区间$[a,b]$上全部连续函数的集合构成该空间

# 范数

设**X**为一线性空间，若对于任意$x \in \mathbf{X}$，有一个确定的非负实数$\|\mathbf{x}\|$与它对应，并满足

(1) $\forall x \in \mathbf{X}$，$\|x\| \geq 0$，当且仅当$x=0$，$\|x\|=0$

(2) $\forall x \in \mathbf{X}$ 及$a \in R$，$\|ax\|=|a| \cdot \|x\|$

(3) $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$

则称$\|x\|$为**X**的范数，**X**为线性赋范空间。

University of Chinese Academy of Sciences

# $\mathbf{R}^N$与$\mathbf{C}^N$空间的范数

令 $p$ 为实数，$1\le p<\infty$，在 $\mathbf{R}^N$ 或 $\mathbf{C}^N$ 空间元素 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_N)$ 的 $p$ 阶范数定义为

$$\|\mathbf{x}\|_p \underline{\underline{\mathrm{def}}} \begin{cases} \left[\sum_{i=1}^{N}|x_i|^p\right]^{\frac{1}{p}} & 1\le p<\infty \\ \max\limits_{1\le i\le N}|x_i| & p\to\infty \end{cases}$$

最常用的范数为$\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$，$\|\cdot\|_\infty$

在$\mathbf{R}^2$或$\mathbf{R}^3$中，二阶范数的物理意义是矢量的长度；
$\|\mathbf{x}\|_2$也称为欧氏范数或欧氏距。

# 连续时间信号空间 $L$空间中的范数

连续时间信号空间 $L$中，元素x的$p$阶范数$\|\mathbf{x}\|_p$的定义

$$\|\mathbf{x}\|_p = \begin{cases} \left[\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^p \mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}} & 1 \le p < \infty \\ \sup|x(t)| & p = \infty \end{cases}$$

$x(t)$的上确界

**1-范数** $\|\mathbf{x}\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| \mathrm{d}t \quad \mathrm{x} \in L$

**1-范数表示信号作用的强度**

**2-范数** $\|\mathbf{x}\|_2 = \left[\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \,\mathrm{d}\,t\right]^{\frac{1}{2}}$, 即 $\|\mathbf{x}\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \,\mathrm{d}\,t, \quad \mathrm{x} \in L$

**2-范数的平方表示信号的能量**

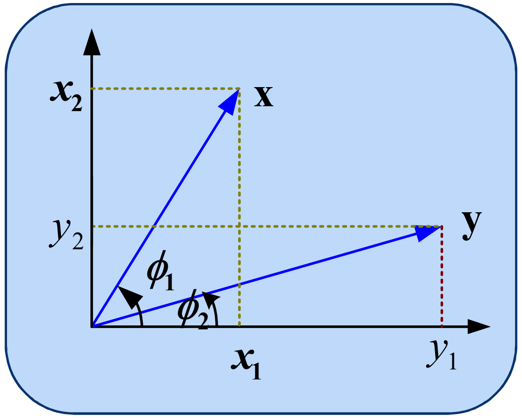
$U$或$I$在单位电阻上消耗的能量

**∞-范数** $\|\mathbf{x}\|_\infty = \sup|x(t)|, \mathrm{x} \in L$

定义在闭区间的x，$\|\mathbf{x}\|_\infty$表示信号的峰值

# 内积

内积的概念反映了元素之间的关系，在时域信号中则反映了信号之间的相互关系，如正交、相关




二维矢量空间中

直角坐标平面内两矢量相对位置关系

$$\cos(\phi_1 - \phi_2) = \cos\phi_1 \cos\phi_2 + \sin\phi_1 \sin\phi_2$$

$$= \frac{x_1}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{y_1}{\left(y_1^2 + y_2^2\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{x_2}{\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{y_2}{\left(y_1^2 + y_2^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x_1 y_1 + x_2 y_2}{\|\mathrm{x}\|_2 \cdot \|\mathrm{y}\|_2}$$

University of Chinese Academy of Sciences

# 内积

二维矢量空间的内积(点积)运算

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

给定了的矢量长度，标量乘积式反映了两矢量之间相对位置的“校准”情况：

$\cos(\phi_1 - \phi_2) = 0$,两矢量之夹角为 $90^\circ$,标量乘积为零

$\cos(\phi_1 - \phi_2) = 1$,两矢量夹角为 $0^\circ$,标量乘积取最大值 $|\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle|^2 \le \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$

Cauchy-Schwarz

多维 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$ $N$维实线性空间

$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i^*$ $N$维复线性空间

# 连续函数空间的内积

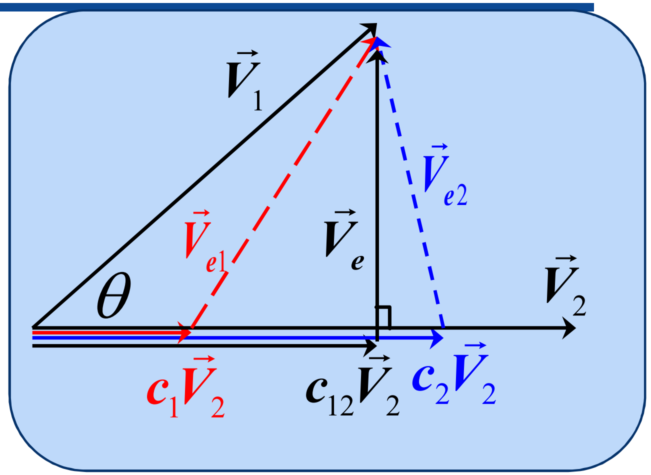
信号空间$L$内的两连续信号的内积

$$\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,y(t)^{*}\,\mathrm{d}t$$

对于$L$，信号$\mathbf{x}$与其自身的内积运算

$$\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\left|x(t)\right|^{2}\mathrm{d}t=\left\|\mathbf{x}\right\|_{2}^{2}$$

# 矢量的正交分解




二维矢量空间的矢量$\vec{V}_1$和$\vec{V}_2$

$\vec{V}_1$用$\vec{V}_2$表示，方式不唯一：

$$\vec{V}_1 = c_1\vec{V}_2 + \vec{V}_{e1} = c_2\vec{V}_2 + \vec{V}_{e2} = c_{12}\vec{V}_2 + \vec{V}_e$$

最小的误差分量：

$$\vec{V}_e \perp \vec{V}_2 \qquad \vec{V}_1 = c_{12}\vec{V}_2 + \vec{V}_e$$

$$c_{12}V_2 = V_1\cos\theta = \frac{V_1V_2\cos\theta}{V_2} = \frac{\langle \vec{V}_1, \vec{V}_2 \rangle}{V_2}, \qquad c_{12} = \frac{\langle \vec{V}_1, \vec{V}_2 \rangle}{\langle \vec{V}_2, \vec{V}_2 \rangle}$$

当$\theta$=0，$c_{12}$= 1, $\vec{V}_1$、$\vec{V}_2$ 完全重合；

随$\theta$增大，$c_{12}$减小；

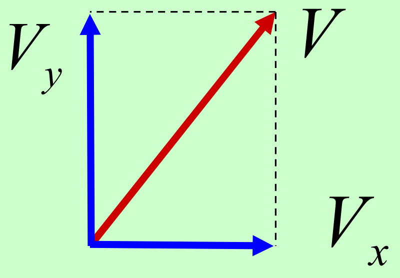
当$\theta$=90°，$c_{12}$= 0，$\vec{V}_1$和$\vec{V}_2$垂直。

$c_{12}$表示$\vec{V}_1$和$\vec{V}_2$互相接近的程度

# 矢量的正交分解

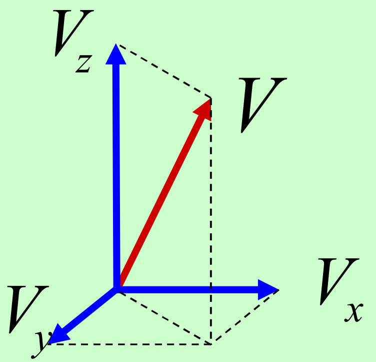
二维正交集

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y$$




三维正交集

$$\vec{V} = \vec{V}_x + \vec{V}_y + \vec{V}_z$$




- 平面中任一矢量可分解为***x,y***二方向矢量。
- 空间中任一矢量可分解为***x,y,z***三方向矢量。
- 一个三维空间矢量 $\vec{V} = x\vec{\mathrm{i}} + y\vec{\mathrm{j}} + z\vec{\mathrm{k}}$，必须用三个正交的矢量来表示，如果用二维矢量表示就会出现误差：

$$\vec{V} \approx x\vec{\mathrm{i}} + y\vec{\mathrm{j}}, \qquad \vec{V}_e = z\vec{\mathrm{k}} \neq 0$$

# 正交函数

假设在区间 $(t_1,t_2)$ 内用函数 $f_2(t)$ 近似表示 $f_1(t)$

$$f_1(t) \approx c_{12} f_2(t) \qquad (t_1 < t < t_2)$$

分解原则：均方误差最小，即误差信号功率(能量)最小

均方误差 $$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{(t_2 - t_1)} \int_{t_1}^{t_2} \left[ f_1(t) - c_{12} f_2(t) \right]^2 \mathrm{d}t$$

为求得使 $\overline{\varepsilon^2}$ 最小的 $c_{12}$ 值，需使 $\frac{\mathrm{d}\overline{\varepsilon^2}}{\mathrm{d}c_{12}} = 0$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c_{12}} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \left[ f_1(t) - c_{12} f_2(t) \right]^2 \mathrm{d}t \right\} = 0$$

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

# 正交函数

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}c_{12}}f_1^2(t)\mathrm{d}t-2\int_{t_1}^{t_2}f_1(t)f_2(t)\mathrm{d}t+2c_{12}\int_{t_1}^{t_2}f_2^2(t)\mathrm{d}t=0$$

解得 $$c_{12}=\frac{\int_{t_1}^{t_2}f_1(t)f_2(t)\mathrm{d}t}{\int_{t_1}^{t_2}f_2^2(t)\mathrm{d}t}=\frac{\langle f_1(t),f_2(t)\rangle}{\langle f_2(t),f_2(t)\rangle}$$

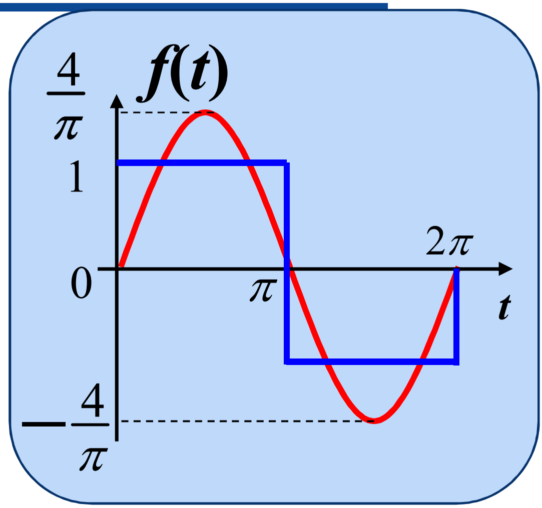
若$c_{12}$为零，则$f_1(t)$不包含$f_2(t)$的分量，称$f_1(t)$、$f_2(t)$为正交

$$\int_{t_1}^{t_2}f_1(t)f_2(t)\mathrm{d}t=0$$

中国科学院大学 University of Chinese Academy of Sciences

$$f(t)=\begin{cases}1 & (0<t<\pi)\\ -1 & (\pi<t<2\pi)\end{cases}$$

试用 $\sin t$ 在区间 $(0,\ 2\pi)$ 近似表示 $f(t)$，使均方误差最小。




解：函数 $f(t)$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内近似为

$$f(t)\approx c_{12}\sin t$$

$$c_{12}=\frac{\int_0^{2\pi} f(t)\sin t\,\mathrm{d}t}{\int_0^{2\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t}=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\pi}\sin t\,\mathrm{d}t-\int_{\pi}^{2\pi}\sin t\,\mathrm{d}t\right]=\frac{4}{\pi}\Rightarrow f(t)\approx\frac{4}{\pi}\sin t$$

# 正交函数集(orthogonal function set)

$n$个函数 $g_1(t), g_2(t), \ldots g_n(t)$ 构成一函数集，如在区间 $(t_1, t_2)$ 内满足正交特性，即

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i(t) g_j(t) \mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ K_i & (i = j) \end{cases}$$

则此函数集称为正交函数集。

归一化正交函数集： $\int_{t_1}^{t_2} g_i^2(t) \mathrm{d}t = 1$

**orthonormal set**

# 正交函数分解

$$f(t) \approx c_1 g_1(t) + c_2 g_2(t) + \cdots + c_n g_n(t) = \sum_{r=1}^{n} c_r g_r(t)$$

均方误差 $$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left[ f(t) - \sum_{r=1}^{n} c_r g_r(t) \right]^2 \mathrm{d}t$$

对于系数$c_r$，要使$\overline{\varepsilon^2}$最小，需满足 $\dfrac{\partial \overline{\varepsilon^2}}{\partial c_r} = 0$

$$c_r = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r(t) \mathrm{d}t}{\int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t) \mathrm{d}t} = \frac{1}{K_r} \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r(t) \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} f(t) g_r(t) \mathrm{d}t$$

归一化正交函数集

# 复变函数的正交特性

$$f_1(t) \approx c_{12} f_2(t) \qquad c_{12} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2^*(t)\mathrm{d}t}{\int_{t_1}^{t_2} f_2(t) f_2^*(t)\mathrm{d}t}$$

两复变函数在区间 **($t_1$, $t_2$)** 的正交的条件是

$$\int_{t_1}^{t_2} f_1(t) f_2^*(t)\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} f_1^*(t) f_2(t)\mathrm{d}t = 0$$

复变函数集 **{$g_r(t)$}($i$=1,2,…,$n$)** 为正交函数集满足

$$\int_{t_1}^{t_2} g_i(t) g_j^*(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & (i \neq j) \\ K_i & (i = j) \end{cases}$$

# 完备正交函数集

用正交函数集$\{g_i(t)\}$ ($i=1,2,\ldots,n$)在 $(t_1, t_2)$近似表示$f(t)$

$$f(t) \approx \sum_{r=1}^{n} c_r g_r(t)$$

$$\overline{\varepsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1}\left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)dt - \sum_{r=1}^{n} c_r^{\ 2} K_r\right]$$

若 $\lim_{n\to\infty}\overline{\varepsilon^2} = 0$，此函数集称为完备(complete)正交函数集.

$$f(t) = \sum_{r=1}^{\infty} c_r g_r(t)$$ 称为广义傅立叶级数展开

(generalized Fourier series）

中国科学院大学 University of Chinese Academy of Sciences

# 帕塞瓦尔定理(Parseval's theorem)

$$\int_{t_1}^{t_2} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{r=1}^{\infty} C_r^2 \int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{r=1}^{\infty} \int_{t_1}^{t_2} [C_r\, g_r(t)]^2\,\mathrm{d}t = \sum_{r=1}^{\infty} c_r^{\,2}$$

信号的能量

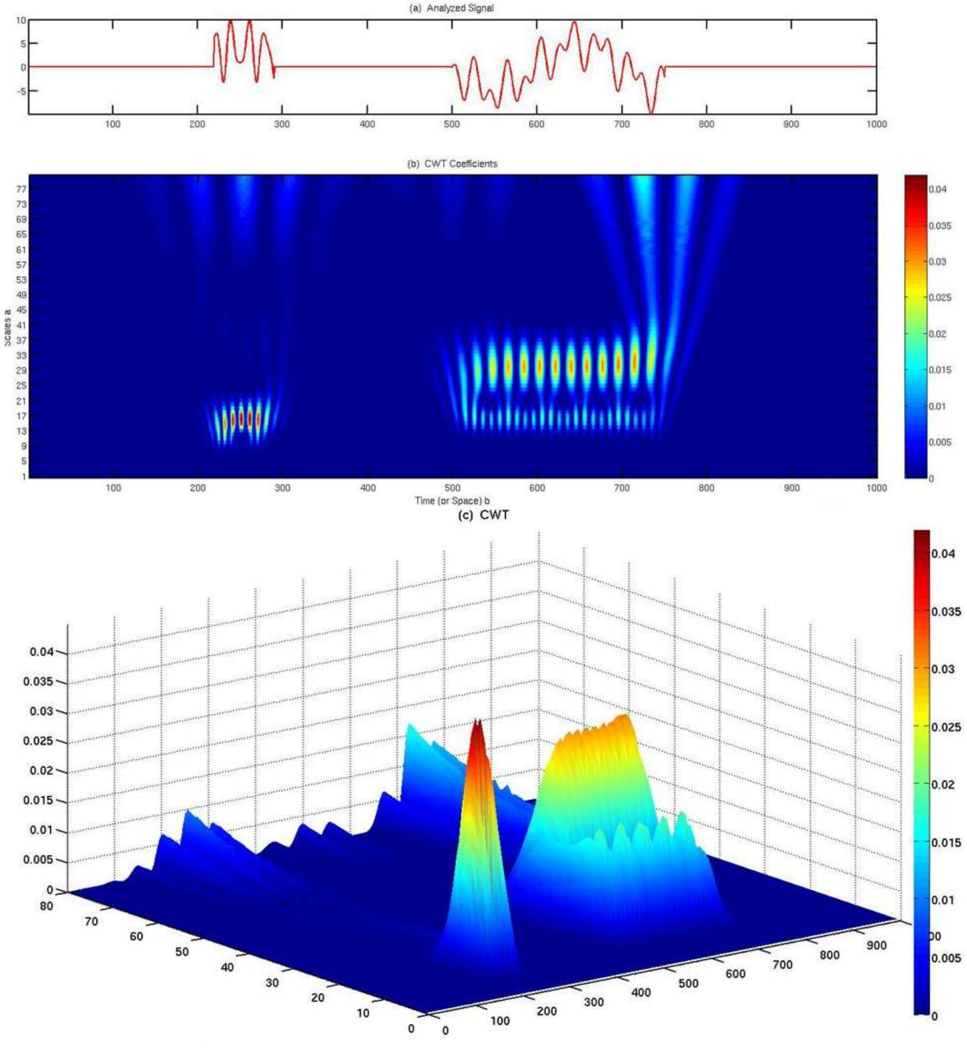
基底信号的能量

各信号分量的能量

物理意义：
一个信号所含有的能量(功率)恒等于此信号在完备正交函数集中各分量能量(功率)之和。

数学本质：矢量空间信号正交变换的范数不变性。

# CWT




$$WT_x(a,b)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)dt$$

- 一维连续信号**CWT**结果为尺度**-**平移平面的二维连续曲面；
- 尺度参数、平移参数连续变化；
- 小尺度上的小波系数反映高频细节，平移轴分辨率高，定位准确率高；
- 大尺度上的小波系数反映低频细节，平移轴分辨率低，定位准确率低。

中国科学院大学 University of Chinese Academy of Sciences

# 目录
Contents

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences


1 信号和信号分析

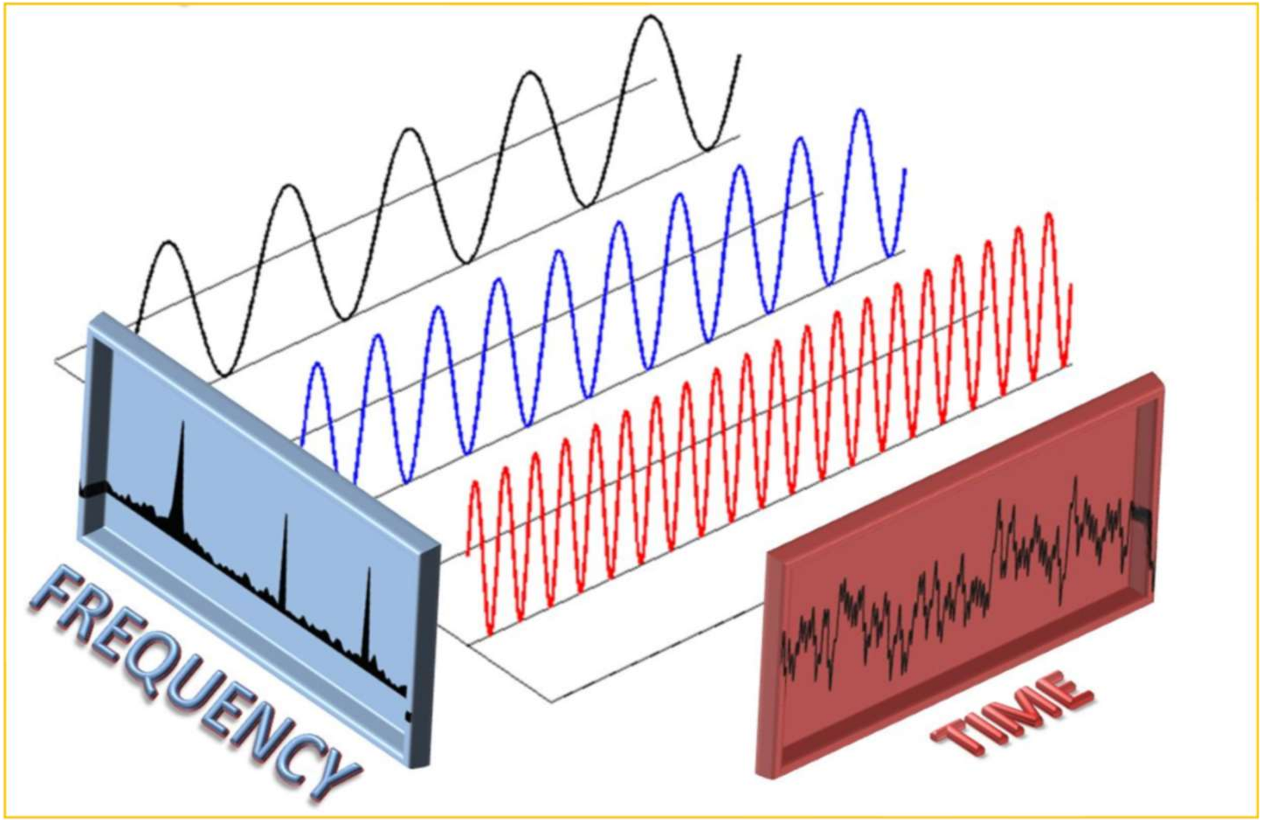
2 信号的内积运算和正交分解

3 确知信号的频域分析

4 确知信号通过LTI系统

# 频域分析

- 把信号表示为一组不同频率的虚指数信号或正弦信号的加权和，并着重讨论权重与频率的关系

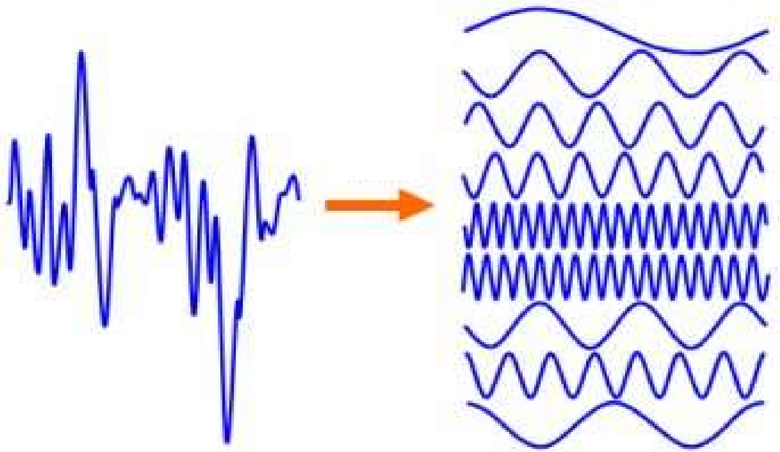



- 傅里叶级数
- 傅里叶变换
- 信号采样

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

# 频域分析

- 现实世界很多信号具有周期性，甚至是正弦变化的如电磁波、声波、光、热辐射、震动、股价等
- 很多系统对于物理量的作用，与物理量的变化快慢有关，如电阻、电容、电感对电压电流变化的反应--不同频率有不同衰减



中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

# 周期信号的傅里叶级数

$$\left\{e^{\mathrm{j}n\omega t}\right\}_{n=-\infty}^{\infty}=\left\{\phi_n(t)\right\}_{n=-\infty}^{\infty} \text{是完备正交集}, \omega=\frac{2\pi}{T}$$

$$\left\langle\phi_i(t),\phi_j(t)\right\rangle=\int_{t_0}^{t_0+T}\phi_i^*(t)\phi_j(t)\mathrm{d}t=T\delta_{ij}$$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{\mathrm{j}n\omega t}$$

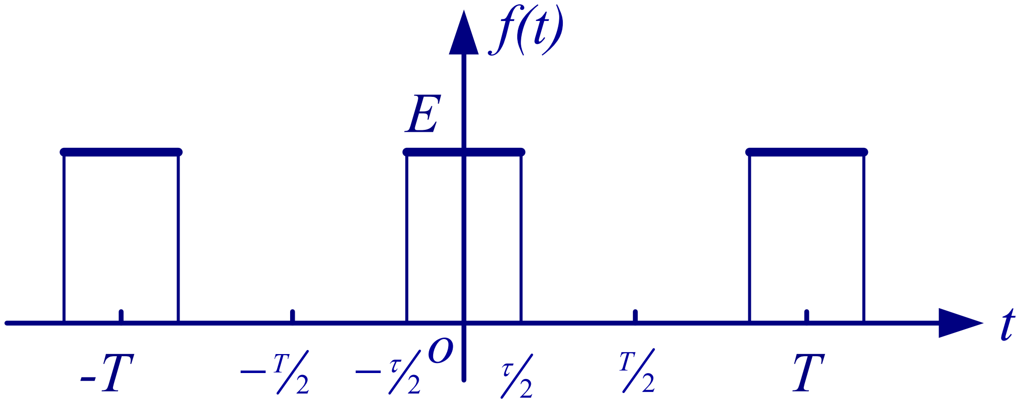
其中：

$$F_n=\frac{\left\langle f(t),\ e^{\mathrm{j}n\omega t}\right\rangle}{\left\langle e^{\mathrm{j}n\omega t},\ e^{\mathrm{j}n\omega t}\right\rangle}=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}f(t)e^{-\mathrm{j}n\omega t}\mathrm{d}t$$

University of Chinese Academy of Sciences

周期矩形脉冲信号：

$$f(t)=E\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right],\quad -\frac{T}{2}\le t\le\frac{T}{2}$$



- 三角函数形式

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\omega t,$$

$$a_0=\frac{E\tau}{T},\quad \Omega=n\omega$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos n\omega t\mathrm{d}t\quad =\frac{2E\tau}{T}\mathrm{Sa}\left(\frac{1}{2}n\omega\tau\right)=\frac{2E\tau}{T}\mathrm{Sa}\left(\frac{1}{2}\Omega\tau\right)$$

$$a_n=|a_n|e^{j\phi_n}$$

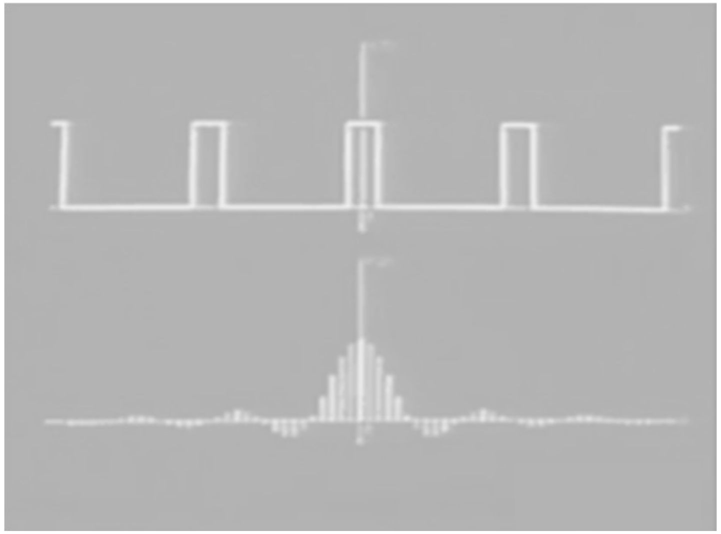
- 指数形式

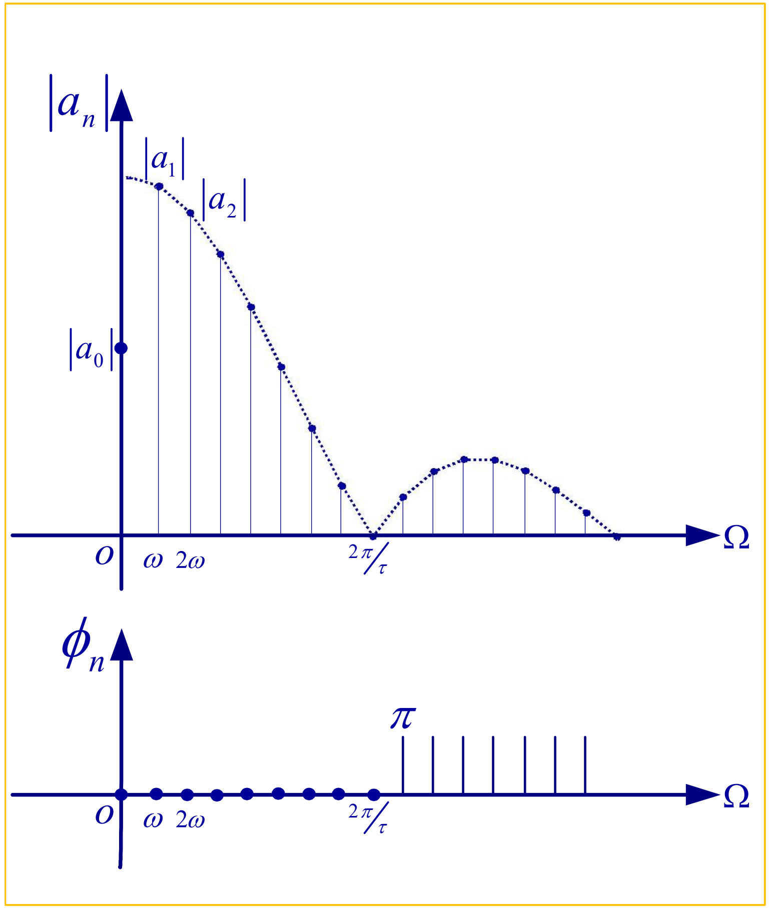
$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega t}\Rightarrow F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)e^{-jn\omega t}\mathrm{d}t=\frac{E\tau}{T}\mathrm{Sa}\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right)=\frac{E\tau}{T}\mathrm{Sa}\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right)$$

✓ $f(t)$的频谱为可列的无穷多条线谱

✓ 谱线间隔$\omega = {}^{2\pi}\!/_{T}$，$T\uparrow$，$\omega\downarrow$，谱分辨率提高

✓ 谱包络为 $\mathrm{Sa}\left(\frac{1}{2}\Omega\tau\right)$，$\tau\uparrow$，$\Omega_0\downarrow$





# 非周期信号的傅里叶变换

傅里叶正变换：

$$F(\omega)=\mathscr{F}\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$$

傅里叶反变换：

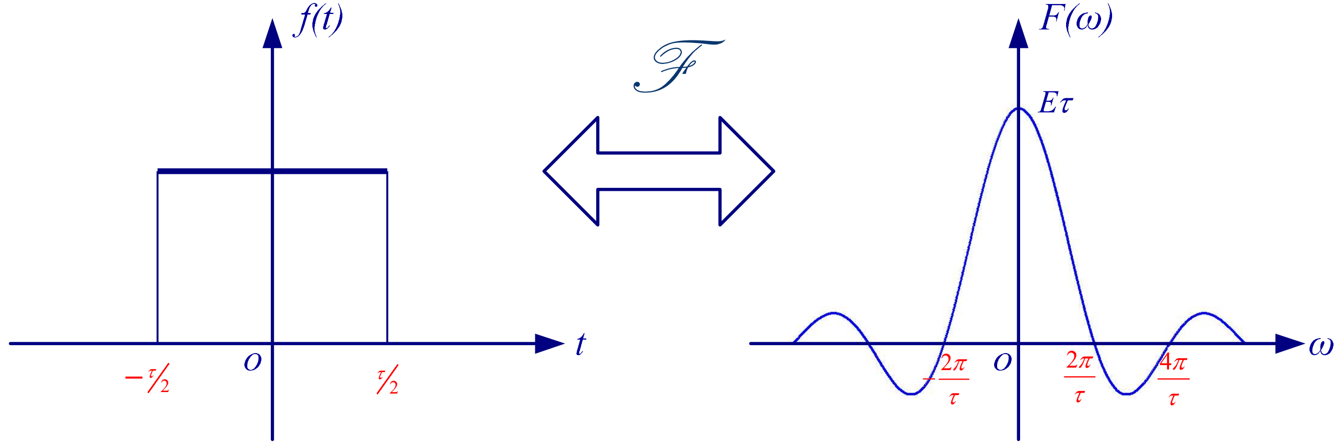
$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}\{F(\omega)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}\omega\overset{\omega=2\pi f}{=}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}f$$

$F(\omega)=|F(\omega)|e^{\mathrm{j}\phi(\omega)}$为$f(t)$的（频）谱（密度）

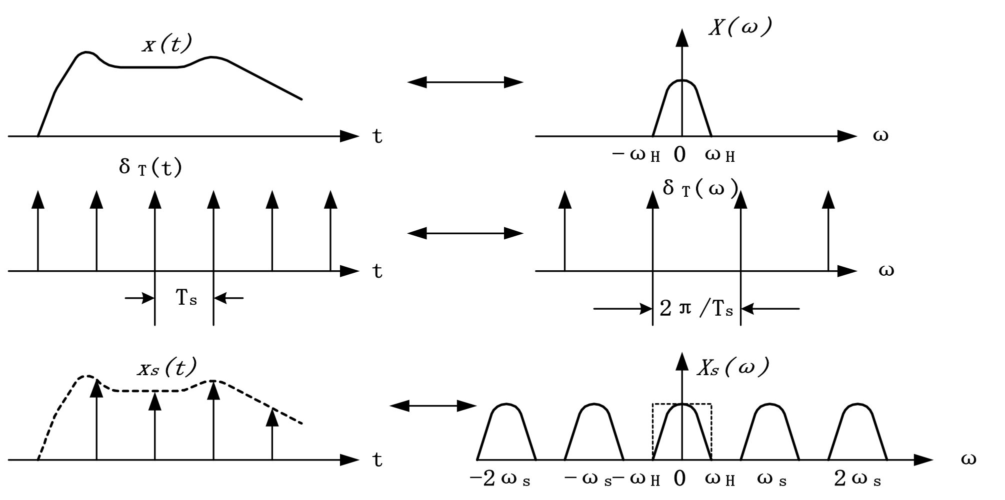
$|F(\omega)|$为$f(t)$的幅度谱（密度），$\phi(\omega)$为$f(t)$的相位谱（密度）

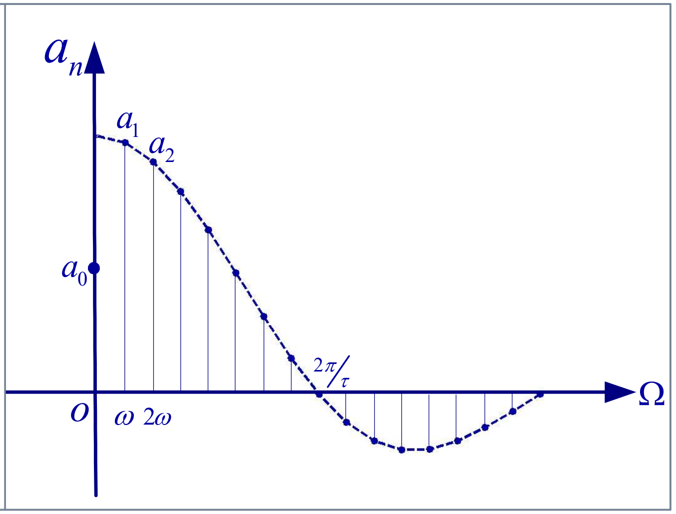
University of Chinese Academy of Sciences

$$f(t)=E\left[u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right]\overset{\mathscr{F}}{\Longleftrightarrow} F(\omega)=E\tau\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$



# 周期信号的傅里叶变换



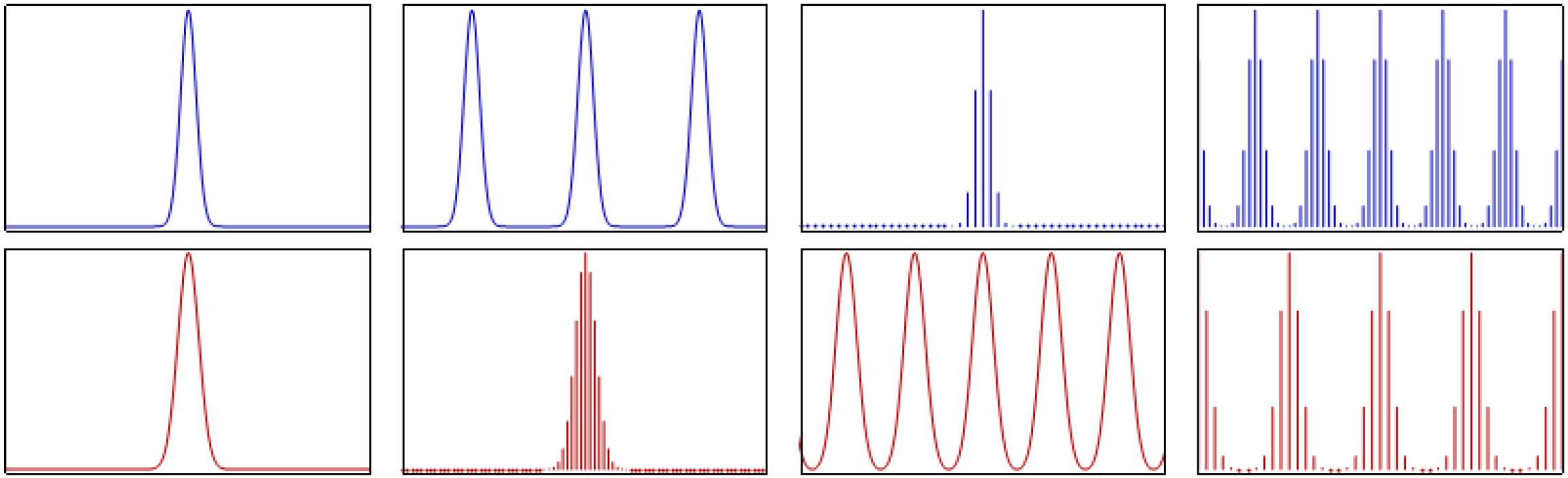




有：$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_0 t}$， $F_n=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}f(t)e^{-jn\omega_0 t}\mathrm{d}t$

$$\boxed{F(\omega)=\mathscr{F}\left\{f(t)\right\}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\mathscr{F}\left\{e^{jn\omega_0 t}\right\}=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\delta(\omega-n\omega_0)}$$

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

# DFT



# 能量谱密度

- 信号波形的能量

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}U(t)i(t)dt$$

- 归一化能量:电阻值1Ω
- 能量信号：能量为有限值的信号

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}f^2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2 d\omega$$

- 能量谱密度：

$E(\omega)=|F(\omega)|^2$ 焦耳/赫兹

University of Chinese Academy of Sciences

# 功率谱密度

- 功率信号： 信号在(-∞<$t$<+∞)内存在，具有无穷大能量，但平均功率为有限值。
- 功率谱密度：

$$W(\omega)=\lim_{T\to\infty}\frac{\left|F_T(\omega)\right|^2}{T}\text{瓦特/赫兹}$$

$$P=\lim_{T\to\infty}\{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f^2(t)dt\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{T\to\infty}\frac{\left|F_T(\omega)\right|^2}{T}d\omega$$

University of Chinese Academy of Sciences

# 自相关函数

- 能量信号：

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)f(t+\tau)dt$$

- 功率信号

$$R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}f(t)f(t+\tau)dt$$

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

# 自相关函数性质

- 实函数的自相关函数是实偶函数，即**$R(-\tau)=R(\tau)$**
- 维纳-辛钦：信号的自相关函数与其相应的能量谱密度/功率谱密度构成傅氏变换与反变换的关系。
- 信号的自相关函数在原点的值等于信号的能量/功率。
- 自相关函数的最大值出现在原点。

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

# 目录
Contents


1 信号和信号分析

2 信号的内积运算和正交分解

3 确知信号的频域分析

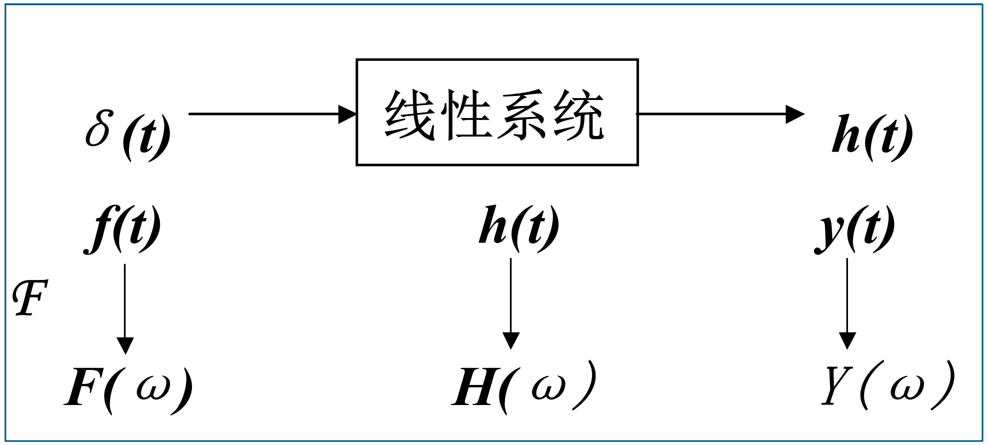
4 确知信号通过LTI系统

# 系统

- 系统：可看作产生信号变换的任何过程，是可以对各种物理量进行操作、约束、分析的实体
- 对于系统来说，基于物理原理/生物原理/数学原理，对多种物理量、物理量测量值进行约束和操作
  - ✓ 海洋，风速——洋流的关系
  - ✓ 电路来说——输入电压和输出电压的关系
  - ✓ 软件——输入向量和输出向量的关系

# LTI系统

- 系统特性：**Linear；Time Invariant；Casual；BIBO stable**
- **LTI系统传递函数*H*(*ω*)和冲激响应*h*(*t*)**




$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

$$=h(t)*f(t)=f(t)*h(t)$$

$$Y(\omega)=H(\omega)F(\omega)$$

方法：把输入信号分解为多冲激的叠加形式

# LTI系统

- LTI系统对复信号$e^{st}$的响应

$$e^{st} \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau = H(s)\cdot e^{st}$$

其中$H(s)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$

表明：**LTI**系统对复指数信号仍是复指数信号，系统只改变了其幅度

若$x(t)=\sum_i a_i e^{s_i t} \rightarrow y(t)=\sum_i a_i H(s_i)e^{s_i t}$

- $s=j\omega$时，复指数信号变成了正弦信号

University of Chinese Academy of Sciences

# LTI系统输出响应的谱密度

- 能量信号：

$$E_i(\omega) = \left|F(\omega)\right|^2$$

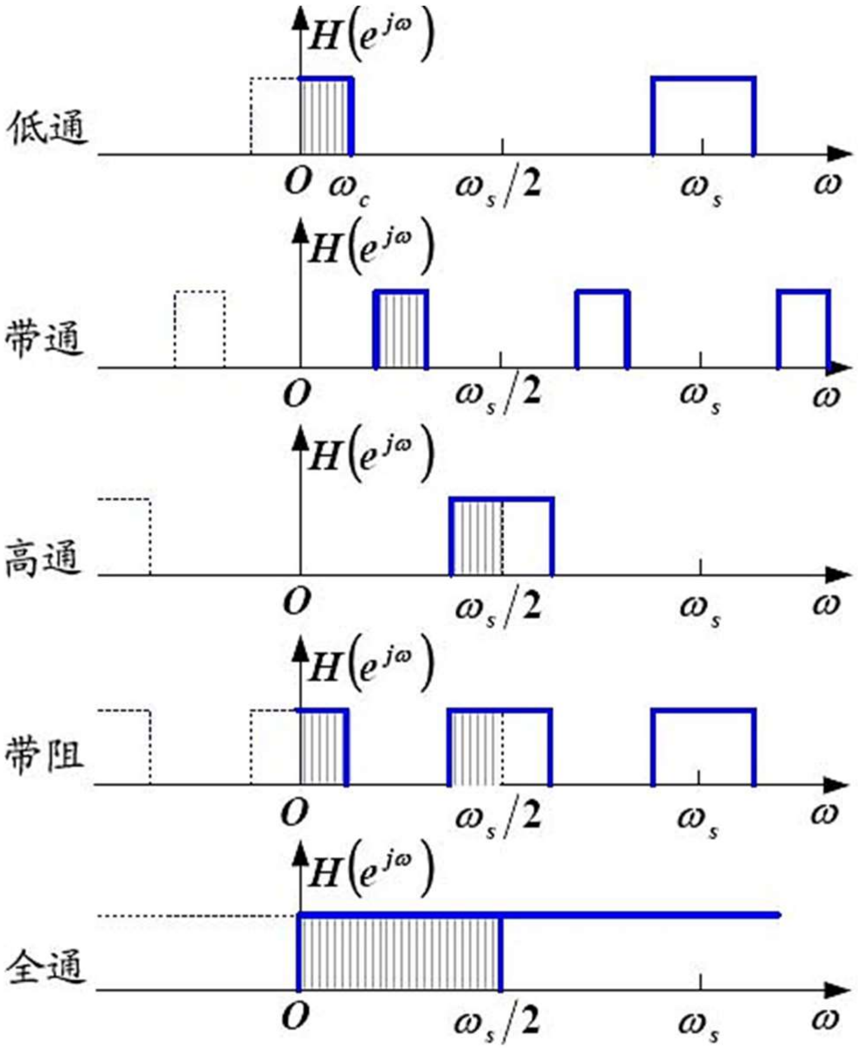
$$E_o(\omega) = \left|Y(\omega)\right|^2 = \left|F(\omega)\cdot H(\omega)\right|^2 = \left|H(\omega)\right|^2 \cdot E_i(\omega)$$

- 功率信号：

$$W_o(\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{\left|Y_T(\omega)\right|^2}{T} = \lim_{T\to\infty}\frac{\left|H(\omega)F_T(\omega)\right|^2}{T}$$

$$= \left|H(\omega)\right|^2 \cdot \lim_{T\to\infty}\frac{\left|F_T(\omega)\right|^2}{T} = \left|H(\omega)\right|^2 \cdot W_i(\omega)$$

# 滤波器

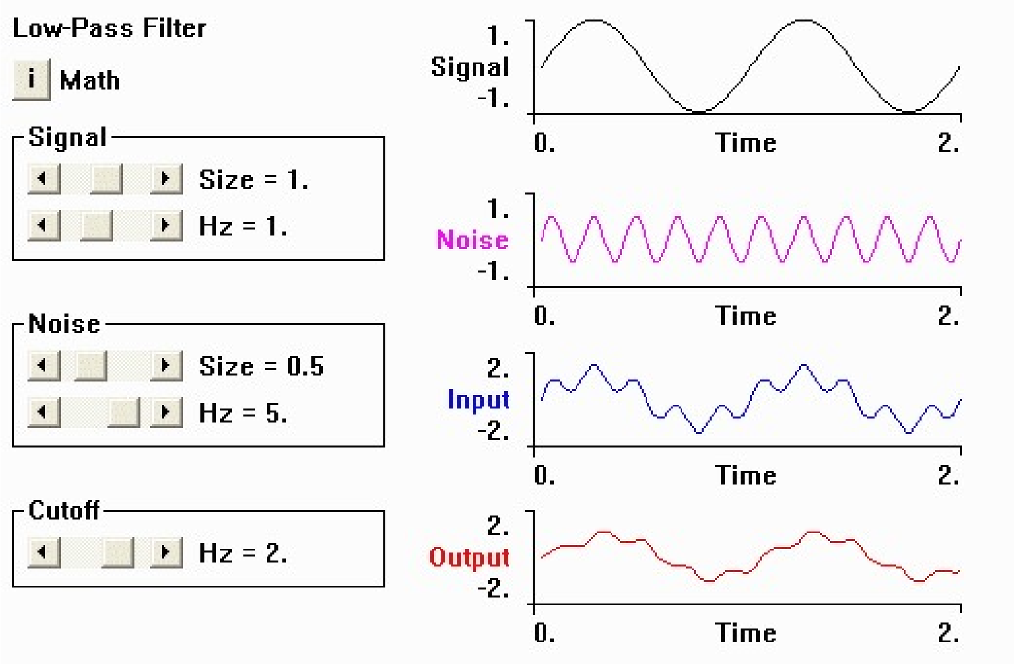



$$H(z)=\frac{\sum_{r=0}^{M} b_r z^{-r}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

University of Chinese Academy of Sciences

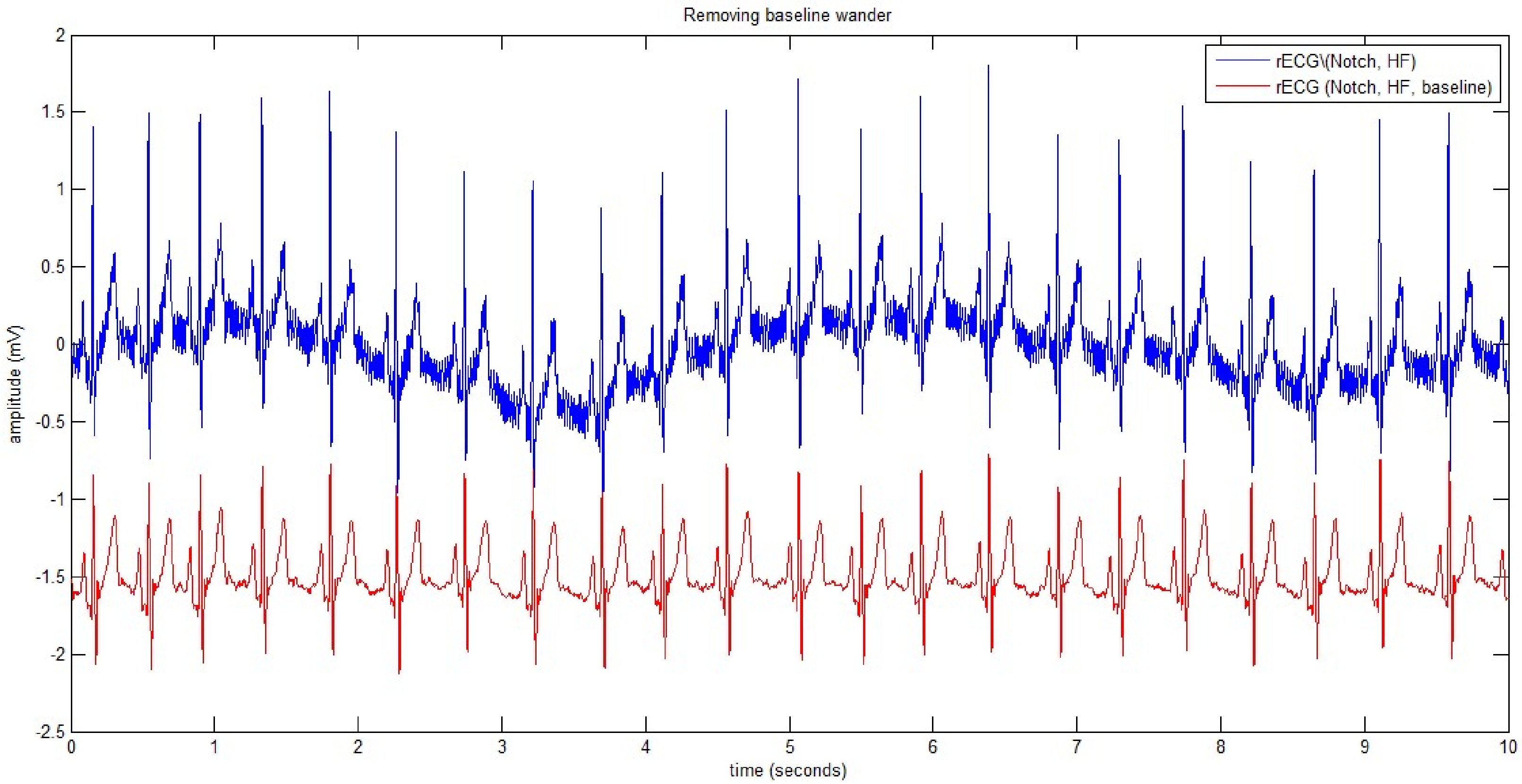
# 滤波器

狭义--频率选择滤波器




基于不同分量频率不同这一特性

# 频率选择



Removing baseline wander
rECG\(Notch, HF)
rECG (Notch, HF, baseline)
amplitude (mV)
time (seconds)
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10


Q：频带重合?

# 滤波器

滤波就是要改变输入信号的波形，去除不想要的分量：任何一种处理、系统，只要能达到这个目的都可以可以成为滤波

**LTI**系统只能对输入信号的频率成分进行衰减（和延迟），所以

更具体的讲，是指“为了滤除或者衰减输入信号的某些频率成分的**LTI**系统”**----**所以是从频域角度出发的（已知的是频域的特性，转移函数）

操作（运算）：

加减，常系数，微分，积分

变量（信号）：

输入信号，输出信号

中国科学院大学 University of Chinese Academy of Sciences


中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences
FIN