中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

Lecture 8

匹配滤波器

LECTURE7

- 传统CFAR：估计+参量检测，自适应门限

$$P_{fa}=\int_{th}^{\infty}exp\left(-\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)d\left(\frac{y^2}{2\sigma^2}\right)\overset{x={y}/{\sigma}}{=}exp\left(-\frac{\left(th'\right)^2}{2}\right)$$

  瑞利噪声/杂波：计算均值

- 非参量检测：检测单元与参考单元比较

$$T_{GS}=\sum_{j=1}^{M}R_j=\sum_{j=1}^{M}\sum_{k=1}^{N}U\left(z_j-z_{jk}\right),j=1,2\ldots M;k=1,2\ldots N$$

  统计检验量符合二项式分布

- 鲁棒检测：寻找最不利分布对进行似然检验
- 检测性能：参量检测>鲁棒检测>非参量检测
- 普适性：非参量检测>鲁棒检测>参量检测

检测场景

- **检测信噪比越大，检测性能越好**
- **接收滤波器设计逻辑：**
  - ✓ 滤波器输出波形与发送端波形均方误差最小
  - ✓ 滤波器输出信噪比最大
- **后者更适用于假设检验**

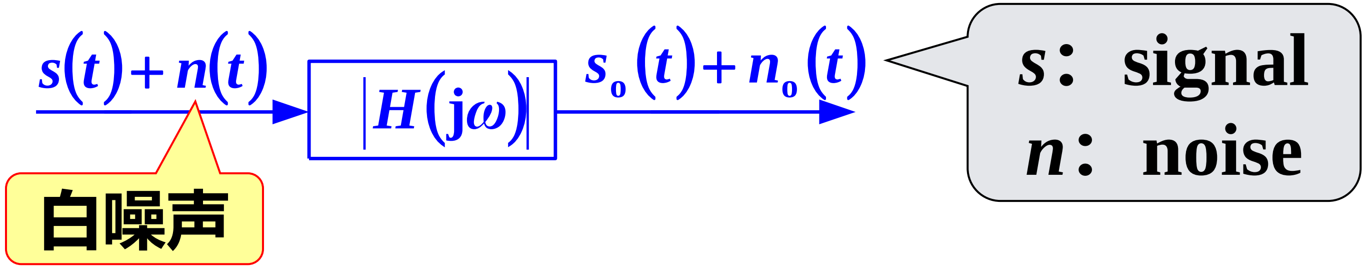
中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

目录
Contents

目录
Contents

定义

匹配滤波器：指滤波器的性能与信号的特性取得某种一致，使滤波器输出端的信号瞬时功率与噪声平均功率的比值最大。即当信号与噪声同时进入滤波器时，它使信号成分在某一瞬间出现尖峰值，而噪声成分受到抑制。



在$t=t_m$时刻信噪比

$$\rho=\frac{s_o^2(t_m)}{n_o^2(t_m)}$$

依据：滤波器使信号平方与噪声功率之比达到最大值。

瞬时信噪比

$S(j\omega)=\mathscr{F}[s(t)]$

$$s_o(t)=\mathscr{F}^{-1}\left[S(j\omega)H(j\omega)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)S(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$s_o(t_m)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)S(j\omega)e^{j\omega t_m}d\omega$$

$n(t)$是白噪声，其功率谱为常数N

$$\overline{n_o^2(t)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}N\left|H(j\omega)\right|^2 d\omega$$

$$\rho=\frac{s_o^2(t_m)}{\overline{n_o^2(t)}}=\frac{\left|\int_{-\infty}^{\infty}H(j\omega)S(j\omega)e^{j\omega t_m}d\omega\right|^2}{2\pi N\int_{-\infty}^{\infty}\left|H(j\omega)\right|^2 d\omega}$$

Schwarz Inequality

实内积空间

内积$(X,Y)=\sum_{i=1}^{M} x_i y_i$;　范数$\|X\|=\sqrt{(X,X)}=\sqrt{\sum_{i=1}^{M} x_i^2}$;

连续函数空间

$\langle \mathrm{x},\mathrm{y}\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,y(t)^{*}\,\mathrm{d}t$　　$\langle \mathrm{x},\mathrm{x}\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^{2}\,\mathrm{d}t=\|\mathrm{x}\|_2^2$

柯西一施瓦茨不等式　　$|\langle \mathrm{x},\mathrm{y}\rangle|^2 \le \langle \mathrm{x},\mathrm{x}\rangle\cdot\langle \mathrm{y},\mathrm{y}\rangle$

当且仅当x=ky*成立时上式取等号

令$\mathrm{x}=H(\mathrm{j}\omega)$，$\mathrm{y}=S(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t_m}$

匹配滤波器的传递函数

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} H(\mathrm{j}\omega)S(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t_m}\mathrm{d}\omega\right|^2 \le \int_{-\infty}^{\infty}|H(\mathrm{j}\omega)|^2\mathrm{d}\omega\int_{-\infty}^{\infty}|S(\mathrm{j}\omega)|^2\mathrm{d}\omega$$

当且仅当下式成立时上式取等号

$$H(\mathrm{j}\omega)=k\left[S(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t_m}\right]^*=kS(-\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_m}$$

k为任意常数，此时滤波器输出端信噪比的最大可能值为

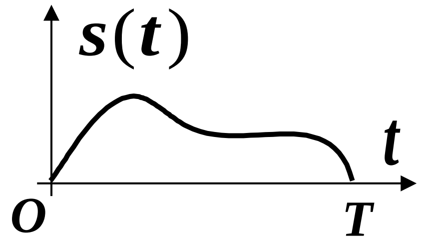
$$\rho_{\max}=\frac{s_{\mathrm{o}}^2(t_{\mathrm{m}})}{\overline{n_{\mathrm{o}}^2(t)}}=\frac{1}{2\pi N}\int_{-\infty}^{\infty}|S(\mathrm{j}\omega)|^2\mathrm{d}\omega$$

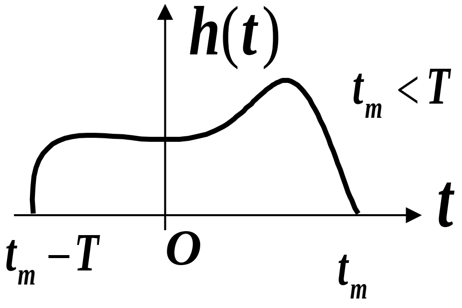
匹配滤波器的约束关系 $H(\mathrm{j}\omega)=kS(-\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_{\mathrm{m}}}$

其冲激响应为$h(t)=\mathscr{F}^{-1}\left[H(\mathrm{j}\omega)\right]=ks(t_{\mathrm{m}}-t)$

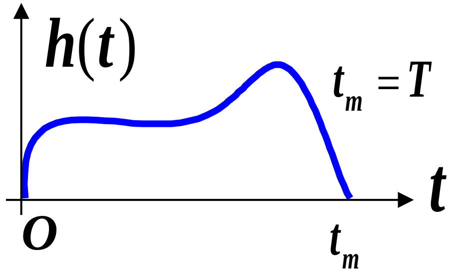
中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

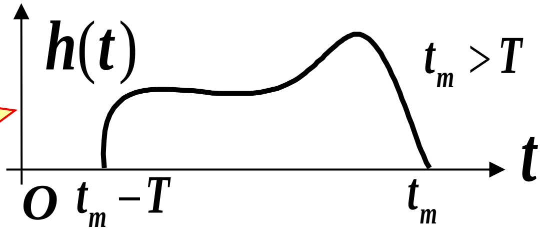
匹配滤波器的冲激响应





物理上不可实现





希望观测时间t_m小

为保证物理可实现性，冲激响应应为

$$h(t)=\begin{cases} ks_i(t_m-t) & t\geq 0 \\ 0 & t<0 \end{cases}$$

必须有：当$t<0$ 时，$s_i(t_m-t)=0$

即，当$t>t_m$ 时，$s_i(t)=0$

对于 $h(t)=k\cdot s(t_m-t)$

一般取$t_m=T$，同时$k=1$，则$h(t)=s(T-t)$

匹配滤波器的冲激响应是所需信号$s(t)$对纵轴镜像并延迟时间T。

相关运算器

匹配滤波器的功能相当于对**s(t)**进行自相关运算

$$s_o(t)=\int_{-\infty}^{\infty}s_i(t-\tau)ks_i(T-\tau)d\tau \overset{k=1}{=} R_s(t-T)$$

s(t)的匹配滤波器输入***y*(t)**在***T***时刻的值等于**s(t)**和***y*(t)**的相关

$$y_o(t)=\int_{-\infty}^{\infty}y(t-\tau)s_i(T-\tau)d\tau \overset{t=T}{=} \int_0^T y(u)s_i(u)du$$

在***t*=*T***时刻，自相关***R*$_s$(t)**取峰值；而噪声通过滤波器所完成的互相关运算相对于有用信号受到明显抑制。

从改善系统信噪比考虑，匹配滤波器是线性系统的最佳滤波器。

输出最大

当t=T时，输出信号峰值为

相关定理得到

$$s_o(T)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|S(\mathrm{j}\omega)\right|^2\mathrm{d}\omega$$

由于 $s_o(t)=R_S(T-t)$ 得 $s_o(T)=\int_{-\infty}^{\infty}s^2(t)\mathrm{d}t$

所以

$$s_o(T)=\int_{-\infty}^{\infty}s^2(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|S(\mathrm{j}\omega)\right|^2\mathrm{d}\omega=E$$

匹配滤波器输出信号的最大值出现在t=T时刻，其大小等于信号的能量E，且与波形无关。

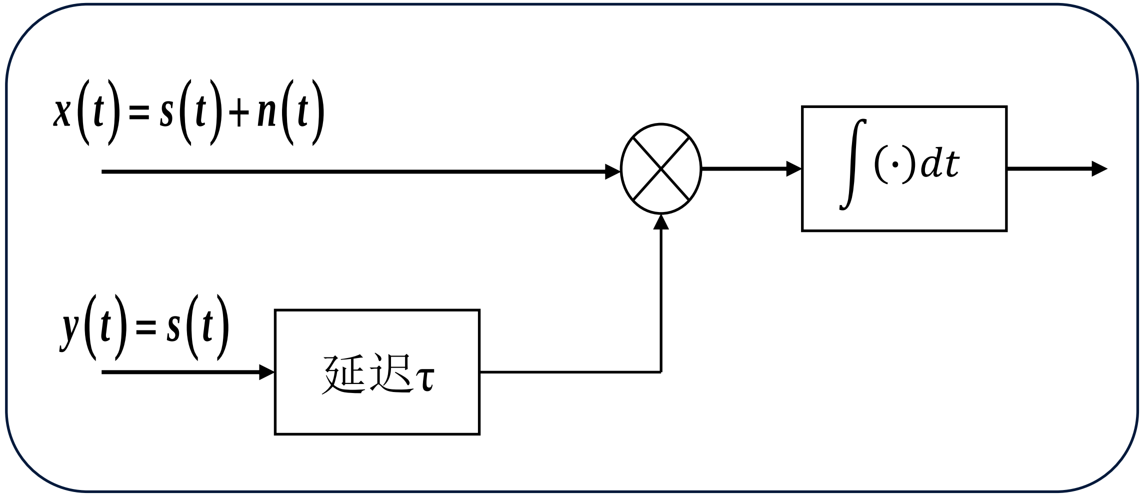
相关器

- 互相关函数

$$R_{xy}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)y(t+\tau)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[s(t)+n(t)\right]s(t+\tau)dt$$

$$=R_s(\tau)+R_{sn}(\tau)$$



（噪声均值为零，与信号不相关）

$$=R_s(\tau)$$

- 自相关函数

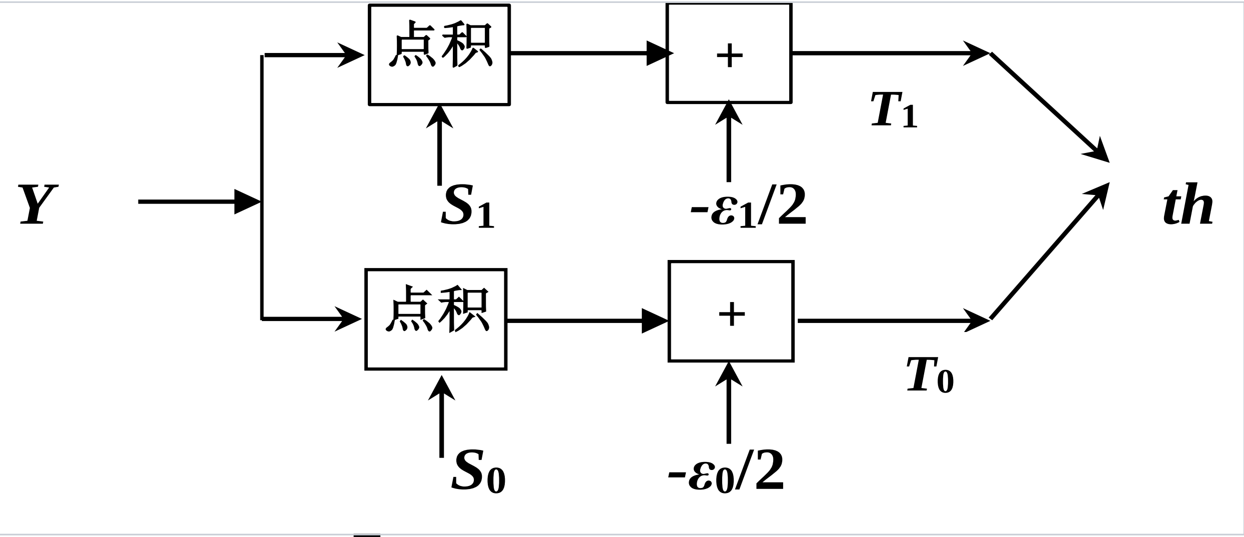
$$R_x(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)x(t+\tau)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left[s(t)+n(t)\right]\left[s(t+\tau)+n(t+\tau)\right]dt$$

$$=R_s(\tau)+R_n(\tau)$$

相关接收

H_1:$Y=S_1+N$

H_0:$Y=S_0+N$



- 对数似然比

$$l(Y)=-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{M}\left[2y_i s_{0i}-2y_i s_{1i}-\left(s_{0i}^2-s_{1i}^2\right)\right]$$

- 等效检验统计量

$$\boxed{T(Y)=\sigma^2\cdot l(Y)=\sum_{i=1}^{M}y_i\left(s_{1i}-s_{0i}\right)-\frac{1}{2}\left(\varepsilon_1-\varepsilon_0\right)=T_1(Y)-T_0(Y)}$$

数字匹配滤波器

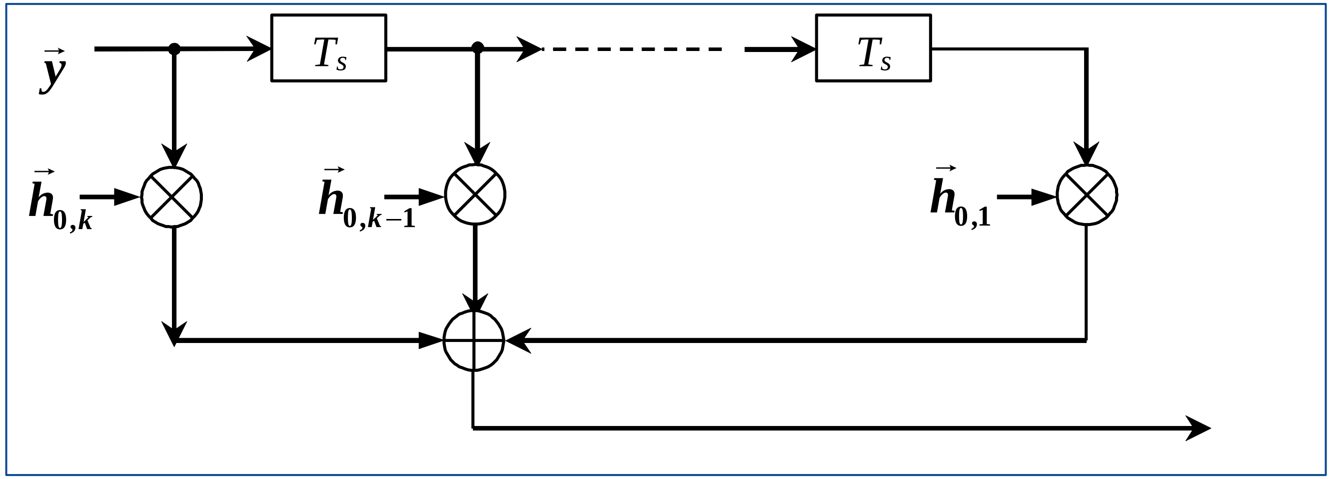
卷积和 $x_n = \sum_{i=1}^{n} h_{n-i} y_i$

匹配滤波器 $h_n = s_{k-n}, n = 1, 2, \ldots, k$

$$\vec{h}_0 = \left[h_{0,1}, \quad h_{0,2}, \ldots, h_{0,k} \right]$$

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} h_{n-i} y_i = \sum_{i=1}^{n} s_{k-(n-i)} y_i$$

当$n = k$时，$x_k = \sum_{i=1}^{k} s_i y_i$



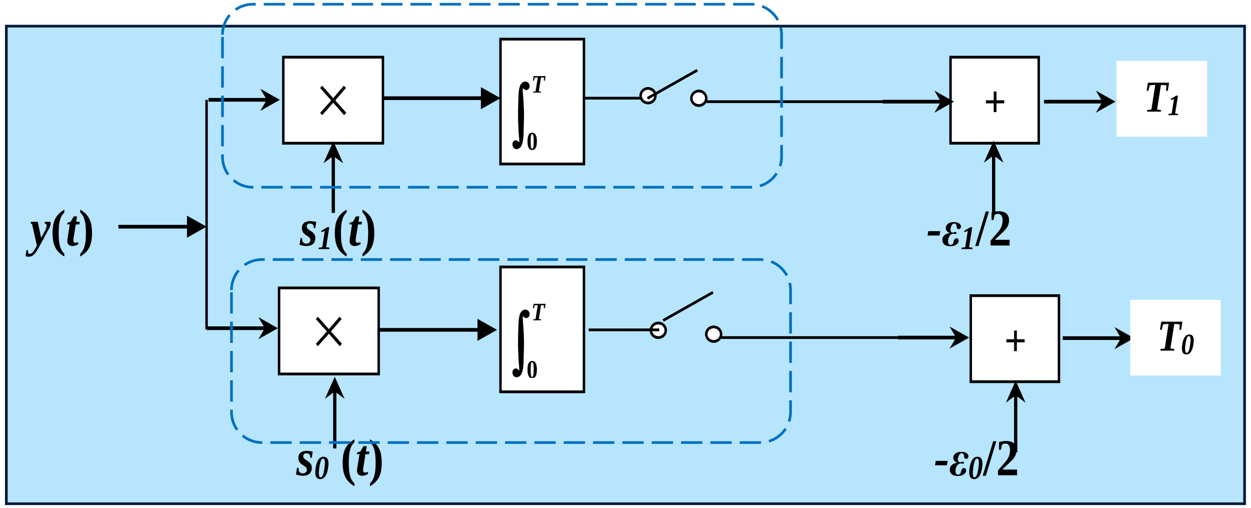
相关（点积）由数字匹配滤波器实现

扩展：IID高斯噪声下的连续波形接收

设$y(t)$为实信号

$$T_i=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{k}y_j u_{ij}-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{j=1}^{k}\left|s_{ij}\right|^2$$

$$\left(\Delta t\to 0,k\to\infty,k\cdot\Delta t=T\right)$$



等效为

$$\boxed{\int_0^T y(t)s_i(t)dt-\frac{1}{2}\int_0^T\left|s_i(t)\right|^2dt=\int_0^T y(t)s_i(t)dt-\frac{\varepsilon_i}{2}}$$

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

目录
Contents

广义匹配滤波器

$$\left(\frac{S}{N}\right)_0=\frac{\left|s_o(T)\right|^2}{E\left\{n_0^2(T)\right\}}=\frac{\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)S(\omega)e^{-j\omega T}d\omega\right|^2}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_z(\omega)\left|H(\omega)\right|^2d\omega}$$

$$\leq\frac{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\left|H(\omega)\right|^2S_z(\omega)d\omega\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left|S(\omega)\right|^2}{S_z(\omega)}d\omega}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S_z(\omega)\left|H(\omega)\right|^2d\omega}\leq\frac{1}{2\pi}\int\frac{\left|S(\omega)\right|^2}{S_z(\omega)}d\omega$$

$$H(\omega)=k\frac{S_i^*(\omega)}{S_z(\omega)}e^{-j\omega T}$$

高斯有色噪声

N~N(0，C)，其中C为噪声协方差矩阵

特例：对于平稳IID的AGWN，$C=\sigma^2$I

以零假设/备择假设为例，

似然函数：

$$f\left(Y \setminus H_1\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{\frac{N}{2}}\det^{\frac{1}{2}}\left(C\right)}\exp\left(-\frac{1}{2}\left[Y-S\right]^T C^{-1}\left[Y-S\right]\right)$$

$$f\left(Y \setminus H_0\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^{\frac{N}{2}}\det^{\frac{1}{2}}\left(C\right)}\exp\left(-\frac{1}{2}Y^T C^{-1} Y\right)$$

检验统计量

对数似然比

判决准则$l(Y)=\ln\dfrac{f(Y\backslash H_1)}{f(Y\backslash H_0)}\geq \ln th$

$$l(Y)=-\frac{1}{2}\left[(Y-S)^T C^{-1}(Y-S)-Y^TC^{-1}Y\right]=Y^TC^{-1}S-\frac{1}{2}S^TC^{-1}S$$

等效检验统计量

$$T(Y)=Y^TC^{-1}S\geq \ln th+\frac{1}{2}S^TC^{-1}S$$

扩展：复信号最佳数字接收?

$$y_j = u_{ij} + z_j$$

$$\vec{y} = \vec{u}_i + \vec{z}$$

$$f(\vec{z}) = \frac{1}{(2\pi)^k \det(C)} \exp\left(-\frac{1}{2}\vec{z}^T C^{-1} \vec{z}^*\right)$$

$$f(\vec{y} \backslash H_i) = \frac{1}{(2\pi)^k \det(C)} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\vec{y} - \vec{u}_i\right]^T C^{-1} \left[\vec{y} - \vec{u}_i\right]^*\right)$$

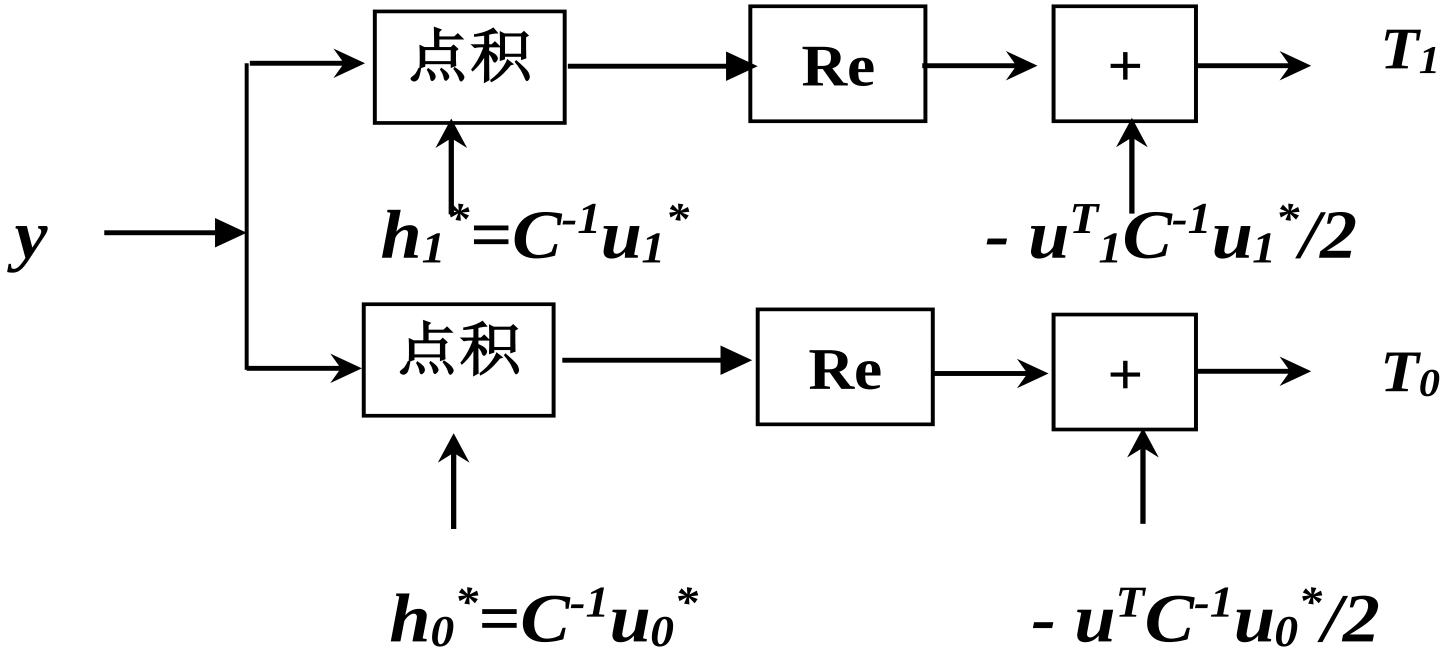
中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

$$L(\vec{y}) = exp(\frac{1}{2}(\vec{u}_1 - \vec{u}_0)^T C^{-1}\vec{y}^* + \frac{1}{2}\vec{y}^T C^{-1}(\vec{u}_1 - \vec{u}_0)^*$$

$$+\frac{1}{2}\vec{u}_0^T C^{-1}\vec{u}_0^* - \frac{1}{2}\vec{u}_1^T C^{-1}\vec{u}_1^*)$$

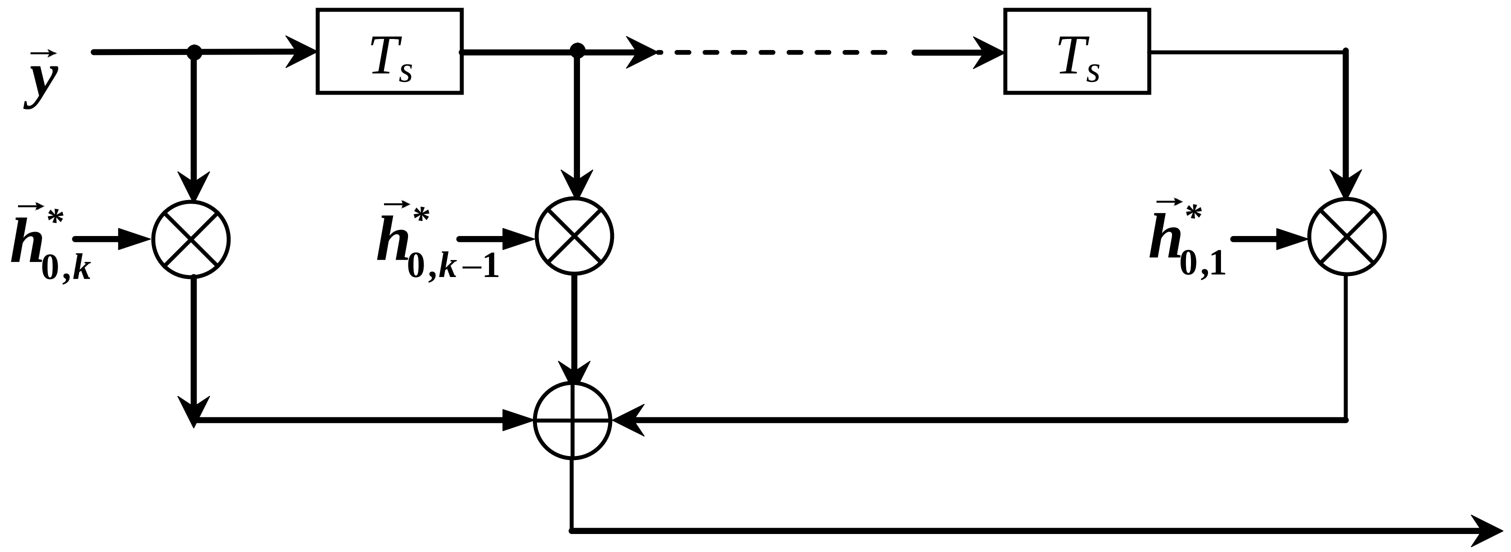
$$l(\vec{y}) = Re\left\{\vec{y}^T C^{-1}\left(\vec{u}_1^* - \vec{u}_0^*\right)\right\} + \frac{1}{2}\vec{u}_0^T C^{-1}\vec{u}_0^* - \frac{1}{2}\vec{u}_1^T C^{-1}\vec{u}_1^*$$

$$Re\left\{\vec{y}^T \vec{h}^*\right\} \geq th'$$


点积
Re
+
T_1
y
$h_1^*=C^{-1}u_1^*$
$-\ u^T{}_1C^{-1}u_1^*/2$
点积
Re
+
T_0
$h_0^*=C^{-1}u_0^*$
$-\ u^TC^{-1}u_0^*/2$

相关（点积）由数字广义匹配滤波器实现

$$\vec{h}_0^* = \left[h_{0,1}^*,\ h_{0,2}^*, \ldots, h_{0,k}^*\right]$$



每次测量受到噪声干扰为n_k，k=1,2...N, n_k为均值零、方差$\sigma_k{}^2$的高斯干扰或噪声。N次独立观测。

解：

$$T(Y)=Y^T C^{-1} S=\sum_{k=1}^{N}\frac{y_k s_k}{\sigma_k^2}\geq th',\text{判}H_1\text{假设为真；否则}H_0\text{为真}$$

且H_1假设下

白化噪声

$$T(Y)=\sum_{k=1}^{N}\frac{y_k s_k}{\sigma_k^2}=\sum_{k=1}^{N}\frac{(s_k+n_k)s_k}{\sigma_k^2}=\sum_{k=1}^{N}\left(n_k'+\frac{s_k}{\sigma_k}\right)\frac{s_k}{\sigma_k}$$

失真信号

University of Chinese Academy of Sciences

预白化

- **对于任意正定矩阵C，C^{-1}存在且正定**

$$C^{-1}=D^TD$$

- **检验统计量**

$$T(Y)=Y^TC^{-1}S=Y^TD^TDS=Y'^TS'$$

其中$Y'=DY$，$S'=DS$

- **预白化矩阵D**

令$N'=DN$

则$C_{N'}=E\left[N'N'^T\right]=E\left[DNN^TD^T\right]=DE\left[NN^T\right]D^T$

$$=DCD^T=D\left(D^TD\right)^{-1}D^T=I$$

目录
Contents

确知信号的正交展开

- **能量有限确知信号** $g(t)=\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}a_k f_k(t)$
- **归一化正交函数集:(0，T)域**

$$\left\langle f_i(t),\ f_j(t)\right\rangle=\int_0^T f_i(t)f_j^*(t)dt=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$$

$$a_k=\left\langle g(t),\ f_k(t)\right\rangle=\int_0^T g(t)f_k^*(t)dt \qquad \tilde{A}=\left[a_1,a_2,\cdots\right]^T$$

- **归一化完备正交函数集:**

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^T\left|g(t)-\sum_{k=1}^{N}a_k f_k(t)\right|^2dt=0$$

卡亨南-洛维(Karhunen-Loéve)展开

- **随机信号样本函数** $y(t) = \lim_{N\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{N} y_i f_i(t)\right]$

- **均方误差**

$$\lim_{N\to\infty} E\left[\left(g(t)-\sum_{k=1}^{N} a_k f_k(t)\right)^2\right]=0$$

- **要求展开系数不相关**

$$E\left\{\left[y_i - E(y_i)\right]\cdot\left[y_j - E(y_j)\right]^*\right\}=\lambda_j\delta_{ij}$$

齐次积分方程

正交函数满足 $\boxed{\int_0^T \operatorname{cov}\{y(t_1)y(t_2)\} f_j(t_2)dt_2 = \lambda_j f_j(t_1), 0 \le t_1 \le T}$

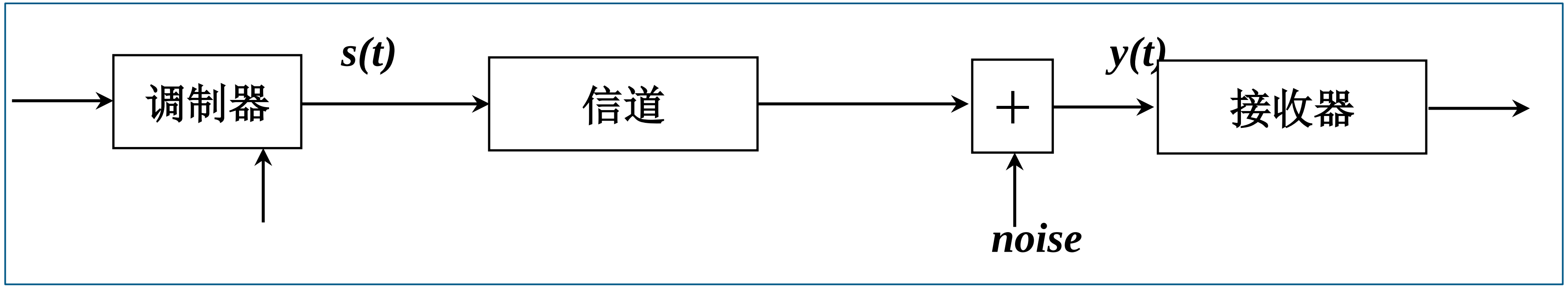
$$E\left\{\left[y_i - E(y_i)\right]\cdot\left[y_j - E(y_j)\right]^*\right\}$$

$$= E\{\int_0^T \left[y(t_1) - E\left(y(t_1)\right)\right] f_i^*(t_1)dt_1 \cdot \int_0^T \left[y(t_2) - E\left(y(t_2)\right)\right]^* f_j(t_2)dt_2\}$$

$$= \int_0^T \underbrace{\int_0^T Cov\{y(t_1)y(t_2)\} f_j(t_2)}_{\lambda_j f_j(t_1)} f_i^*(t_1)dt_2dt_1$$

$$= \lambda_j \delta_{ij}$$

窄带接收



- **发送信号** $s(t) = Re\left\{\tilde{s}(t)e^{j2\pi f_c t}\right\}, 0 \le t \le T$
- **窄带噪声** $n(t) = Re\left\{\tilde{n}(t)e^{j2\pi f_c t}\right\}$
- **接收信号**

$$y(t) = Re\left\{\alpha e^{-j\beta}\tilde{s}(t)e^{j2\pi f_c t}\right\} + n(t), 0 \le t \le T$$

等效假设表达

$$y_i = \int_0^T \tilde{y}(t) f_i^*(t) dt, i = 1, \dots N$$

$$s_i = \int_0^T \tilde{s}(t) f_i^*(t) dt, i = 1, \dots N$$

$$n_i = \int_0^T \tilde{n}(t) f_i^*(t) dt, i = 1, \dots N$$

展开系数不相关，且高斯分布

$$\tilde{y}(t) = \alpha e^{-j\beta} \left[\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} s_i f_i(t) \right] + \left[\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} n_i f_i(t) \right]$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \left(\alpha e^{-j\beta} s_i + n_i \right) f_i(t)$$

$$\Rightarrow y_i = \alpha e^{-j\beta} s_i + n_i, \quad i = 1, \dots N$$

齐次积分方程性质

- 若齐次积分方程的核为半正定核，则其特征值必为非负定的实数
- 至少存在一个非零实数λ及平方可积函数$f(t)$使齐次积分方程成立
- 若$f_j(t)$是齐次积分方程的解，则$cf_j(t)$亦为其解
- 若$f_1(t)$和$f_2(t)$都是λ的特征函数，则$c_1f_1(t)+ c_2f_1(t)$也是其特征函数
- 不同特征值的特征函数相互正交
- Mercer定理：假设随机信号均值为零

$$Cov\{s(t_1),s(t_2)\}=\sum_j \lambda_j f_j(t_1) f_j^*(t_2)$$

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

齐次积分方程性质

- 特征值的和就是信号能量
- $\{\lambda_j\}$为可数集合且有界
- 对于某一特定的特征值而言，其线性独立的特征函数的个数有限，且可被归一正交化
- $$\lim_{N\to\infty}\int_0^T E\left\{\left|s(t)-\sum_{i=1}^{N} y_i f_i(t)\right|^2\right\}dt=0$$
- 若核函数正定，则$\{f_j(t)\}$必形成一个归一化完备正交函数集

离散KL展开

长度为N的离散随机信号X =[X$_1$, X$_2$,… ,X$_n$]^T

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} = y_1 \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{12} \\ \vdots \\ \phi_{1N} \end{bmatrix} + y_2 \begin{bmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{22} \\ \vdots \\ \phi_{2N} \end{bmatrix} + \cdots + y_N \begin{bmatrix} \phi_{N1} \\ \phi_{N2} \\ \vdots \\ \phi_{NN} \end{bmatrix}$$

$$y_i = \left[\Phi_i^*\right]^T \cdot \left[x_1, x_2, \cdots, x_N\right]^T$$

要求 $E\left\{\left[y_i - E\left(y_i\right)\right] \cdot \left[y_j - E\left(y_j\right)\right]^*\right\} = \lambda_j \delta_{ij}$

$$\Rightarrow cov\left\{X, X\right\}\Phi_j = \lambda_j \Phi_j$$

KL展开：$X = \left[\Phi_1, ..., \Phi_N\right] \cdot \left[y_1, ..., y_N\right]^T = \Phi Y$

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

目录
Contents

KL展开假设表达

- 零均值平稳噪声$n(t)$，功率谱密度$N_0/2$
- 自相关函数$r_n(t\text{-}u) = (N_0/2)\delta(t\text{-}u)$
- 展开系数的观测模型

$$\begin{cases} H_0: y_i = n_i \\ H_1: y_i = s_i + n_i \end{cases}, \quad i = 1, 2, \ldots N$$

$$y_i = \int_0^T \tilde{y}(t) f_i^*(t) dt, i = 1, \ldots N$$

$$s_i = \int_0^T \tilde{s}(t) f_i^*(t) dt, i = 1, \ldots N$$

$$n_i = \int_0^T \tilde{n}(t) f_i^*(t) dt, i = 1, \ldots N$$

展开系数不相关，且高斯分布

似然表达

$$E\{y_i \backslash H_0\} = E\left\{\int_0^T n(t) f_i(t)dt\right\} = \left\{\int_0^T E[n(t)] f_i(t)dt\right\} = 0$$

$$V\{y_i \backslash H_0\} = E\{n_i^2\} = E\left\{\int_0^T n(t) f_i(t)dt \int_0^T n(u) f_i(u)du\right\}$$

$$= \int_0^T f_i(t)\left[\int_0^T E\{n(t)n(u)\} f_i(u)du\right]dt$$

$$= \frac{N_0}{2}\int_0^T f_i(t)\left[\int_0^T \delta(t-u) f_i(u)du\right]dt = \frac{N_0}{2}\int_0^T f_i^2(t)dt = \frac{N_0}{2}$$

$$f(Y \backslash H_0) = \left(\frac{1}{\pi N_0}\right)^{N/2} exp\left[-\sum_{i=1}^{N}\frac{y_i^2}{N_0}\right]$$

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

似然表达

$$E\{y_i \setminus H_1\} = E(s_i + n_i) = s_i + E(n_i) = s_i$$

$$V\{y_i \setminus H_1\} = V\{y_i \setminus H_0\} = \frac{N_0}{2}$$

$$f(Y \setminus H_1) = \left(\frac{1}{\pi N_0}\right)^{N/2} exp\left[-\sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - s_i)^2}{N_0}\right]$$

University of Chinese Academy of Sciences

波形的似然函数

$$s(t)=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}s_i f_i(t),\quad n(t)=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}n_i f_i(t)$$

$$f\left(y(t)\backslash H_1\right)=\lim_{N\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{\pi N_0}\right)^{N/2}exp\left[-\sum_{i=1}^{N}\frac{(y_i-s_i)^2}{N_0}\right]\right\}$$

令$$F=\lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{\pi N_0}\right)^{N/2}$$

$$f\left(y(t)\backslash H_1\right)=F\,exp\lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{N_0}\sum_{i=1}^{N}(y_i-s_i)^2\right]$$

波形的似然函数

$$f\left(y(t)\backslash H_1\right)=F\exp\left(-\frac{1}{N_0}\right)\left\{\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{N}y_i\int_0^T y(t)f_i(t)dt\right]\right.$$

$$\left.-2\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{N}s_i\int_0^T y(t)f_i(t)dt\right]+\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{N}s_i\int_0^T s(t)f_i(t)dt\right]\right\}$$

$$=F\exp\left[-\frac{1}{N_0}\int_0^T y^2(t)dt+\frac{2}{N_0}\int_0^T y(t)s(t)dt-\frac{1}{N_0}\int_0^T s^2(t)dt\right]$$

$$=F\exp\left[-\frac{1}{N_0}\int_0^T y^2(t)dt+\frac{2}{N_0}\int_0^T y(t)s(t)dt-\frac{E_s}{N_0}\right]$$

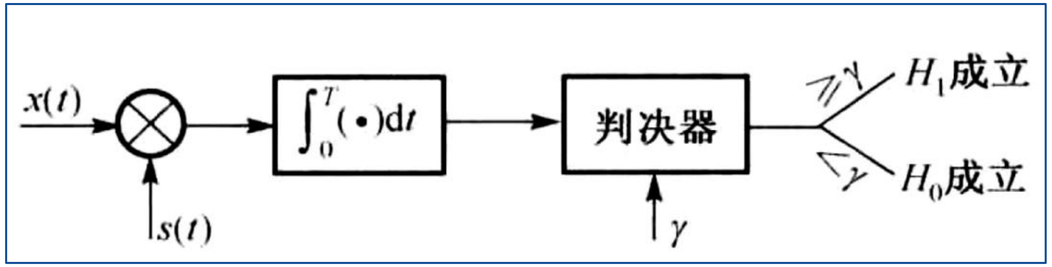
同理$f\left(y(t)\backslash H_0\right)=F\exp\left[-\frac{1}{N_0}\int_0^T y^2(t)dt\right]$

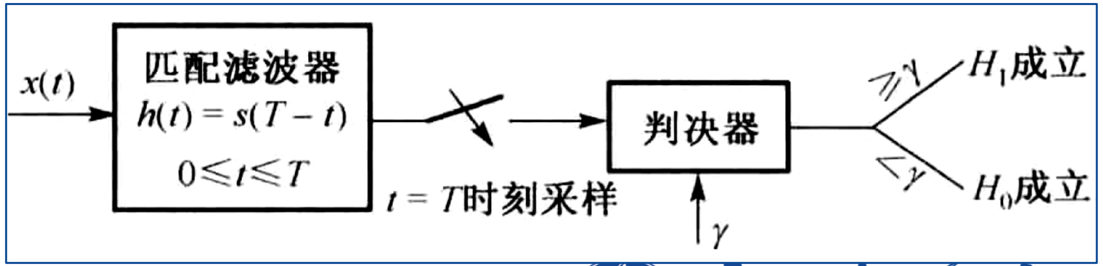
检验准则

$$L\left[y(t)\right]=\frac{f\left(y(t)\backslash H_1\right)}{f\left(y(t)\backslash H_0\right)}=\exp\left[\frac{2}{N_0}\int_0^{\mathrm{T}} y(t)s(t)dt-\frac{E_s}{N_0}\right]\overset{H_1}{\geq} th$$

等效判决

$$l\left[y(t)\right]=\int_0^{\mathrm{T}} y(t)s(t)dt\overset{H_1}{\geq}\gamma\left(=\frac{N_0}{2}\ln th+\frac{E_s}{2}\right)$$





Q: $s_0(t)$和$s_1(t)$情况?

summary

- 为达到最佳检测性能，使用匹配滤波器进行接收
- 高斯白噪声下接收机的点积运算亦可由匹配滤波器实现
- 非白噪声可使用广义匹配滤波器实现预白化后的相关接收
- K-L通过正交投影达到白化效果

Ref：§4.1-§4.3(赵版)or §4.1-§4.4(KAY版)

Q

- 连续最佳接收的性能评估?
- 非白噪声的检测?

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

FIN