中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

Lecture 3

随机信号与噪声

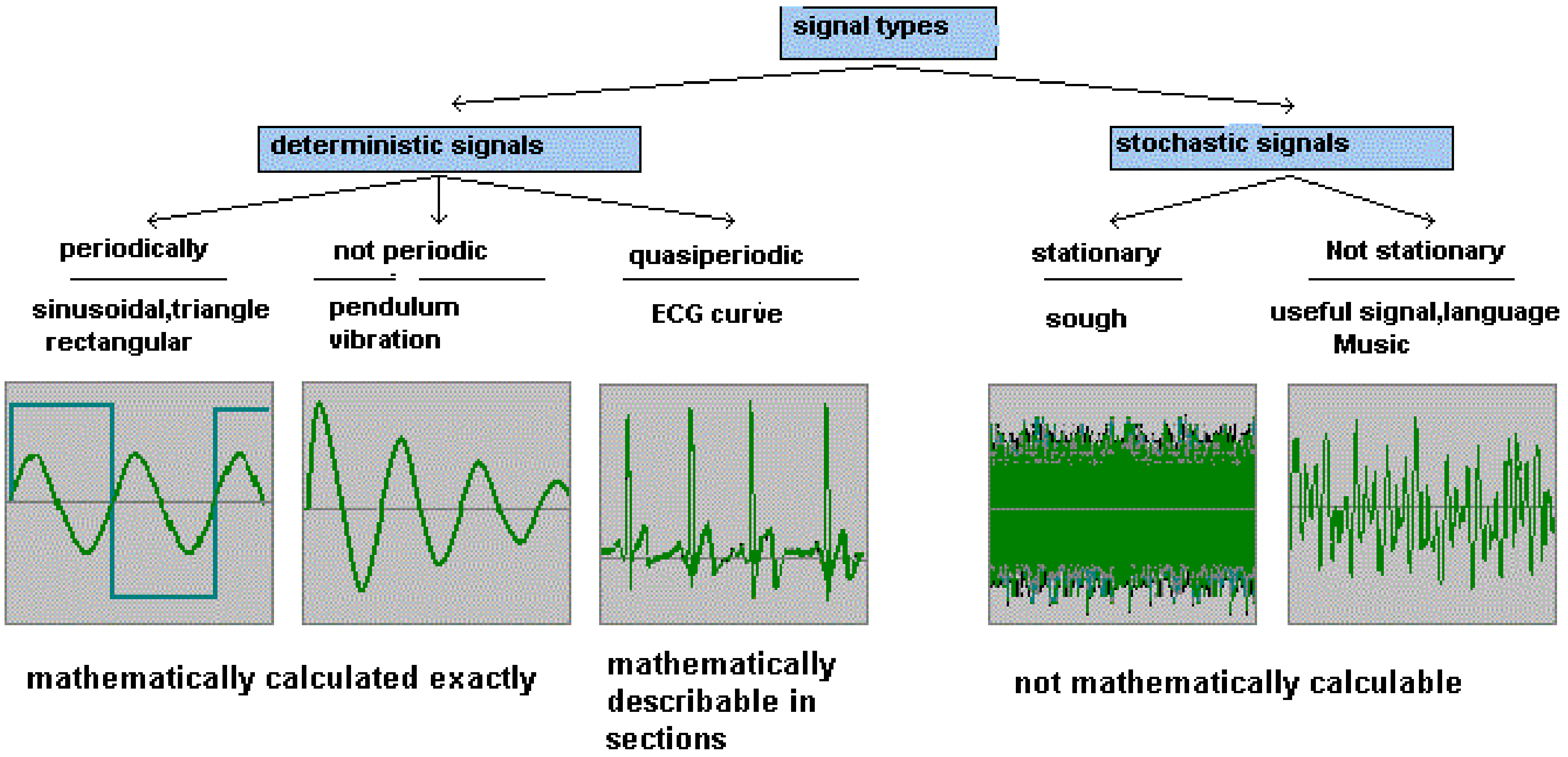
目录
Contents

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

目录
Contents

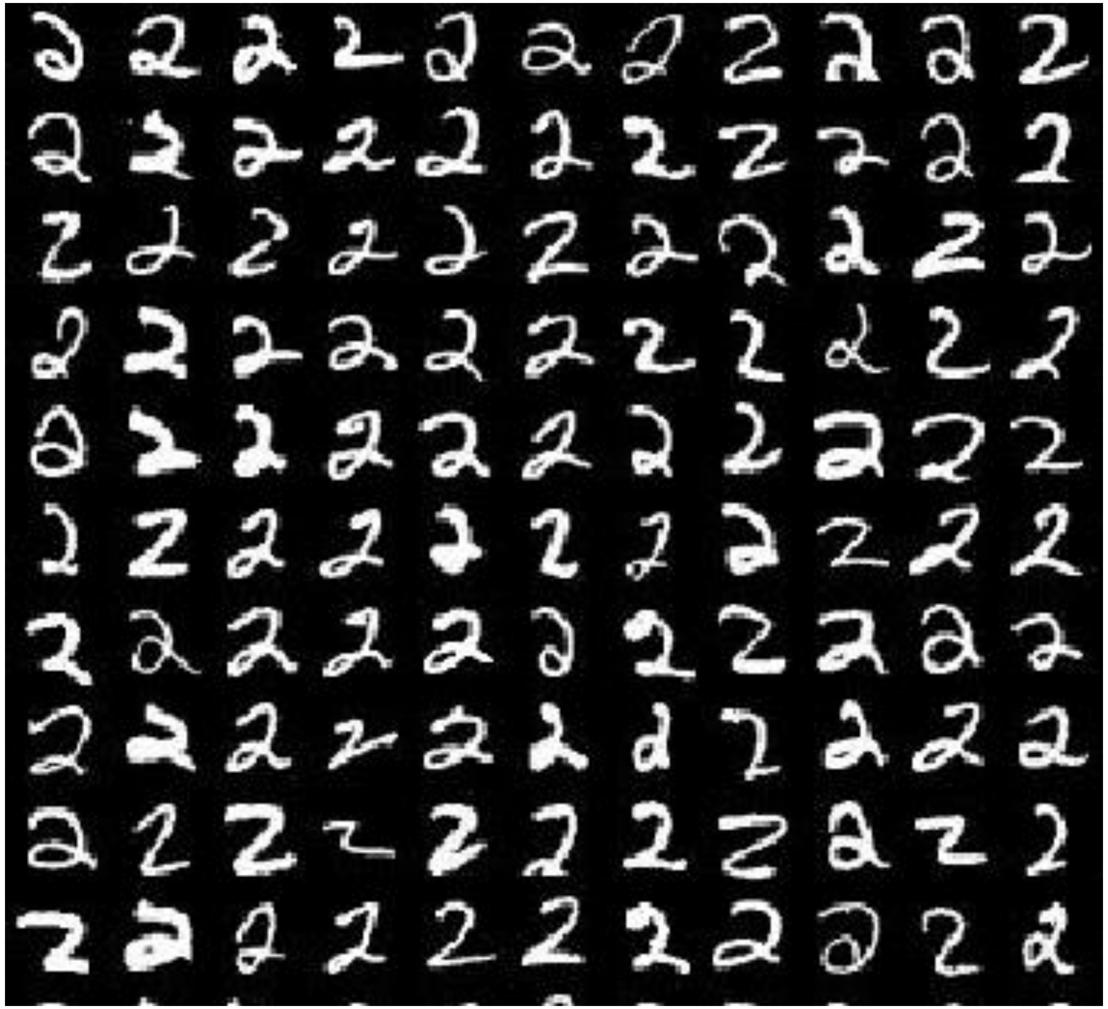
确知/随机信号

- 正弦信号等都是现实世界物理量变化关系的一些理想形式
- 变化都非常规律，已知信号的所有信息（幅度、频率、相位，出现与否）



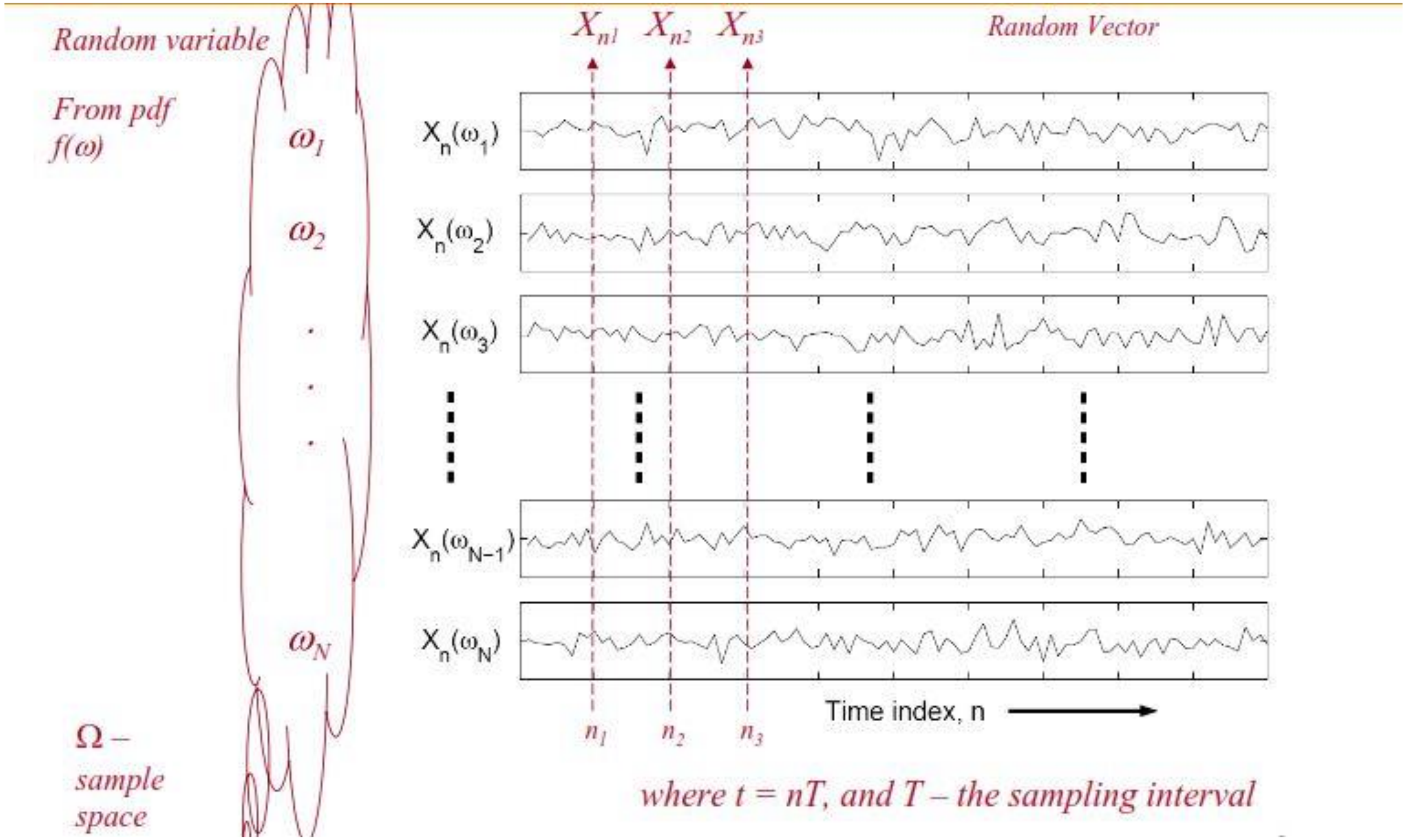
统计信号处理

- 从预测的角度，知识有限
- 从信号分类的角度，差异存在
- 需要一种分析“真实信号”的思路，具有“一种信号”/“一类信号”/“某类信号的总体”的形式
- 设计一个“好”的处理，就是指对这个集合里的所有信号，总体上表现不错



统计信号处理

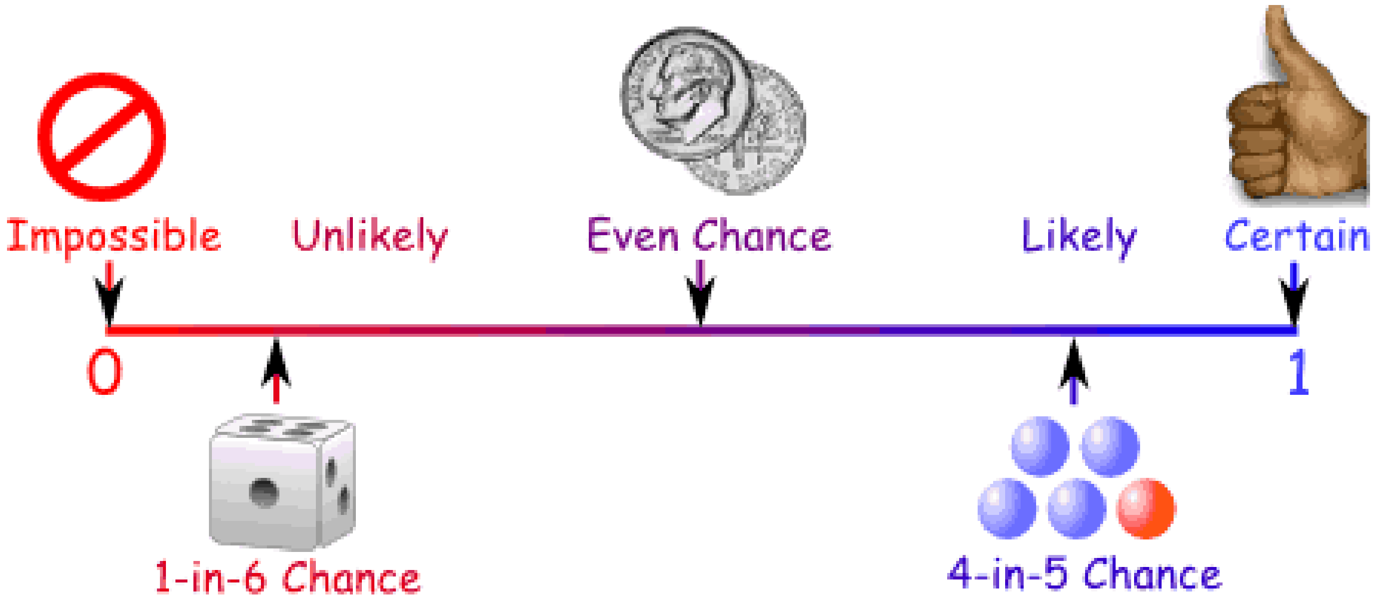
- 分析信号，使用随机函数（随机变量的角度），有一套统计方法
- 随机过程：设T⊂R^1，T是实数集合，对于每一个t∈T，$x_t(\omega)$为一随机变量，其中ω代表某概率空间的元素，那么$\{x_t(\omega)$，t∈T}即为随机过程，简记为$\{x(t)\}$，t∈T



概率

- Numerical degree of belief

- [0,1]



- 条件概率P(A|B)

- 联合概率P(A,B)

Sum Rule:

$$P(A) = \sum P(A,\omega_i)$$

Product Rule:

$$P(A,B)=P(B|A)P(A)=P(A|B)P(B)$$

概率密度函数

- 概率密度函数是一个随机变量的全部统计特性的数学描述

  ✓ $f(x) \geq 0$

  ✓ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathbf{d}x = 1$

  ✓ $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\,\mathbf{d}x$

- n维随机变量（随机矢量）

  $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

- 随机过程

  n维概率密度函数$f(x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n)$

统计量

- 均值

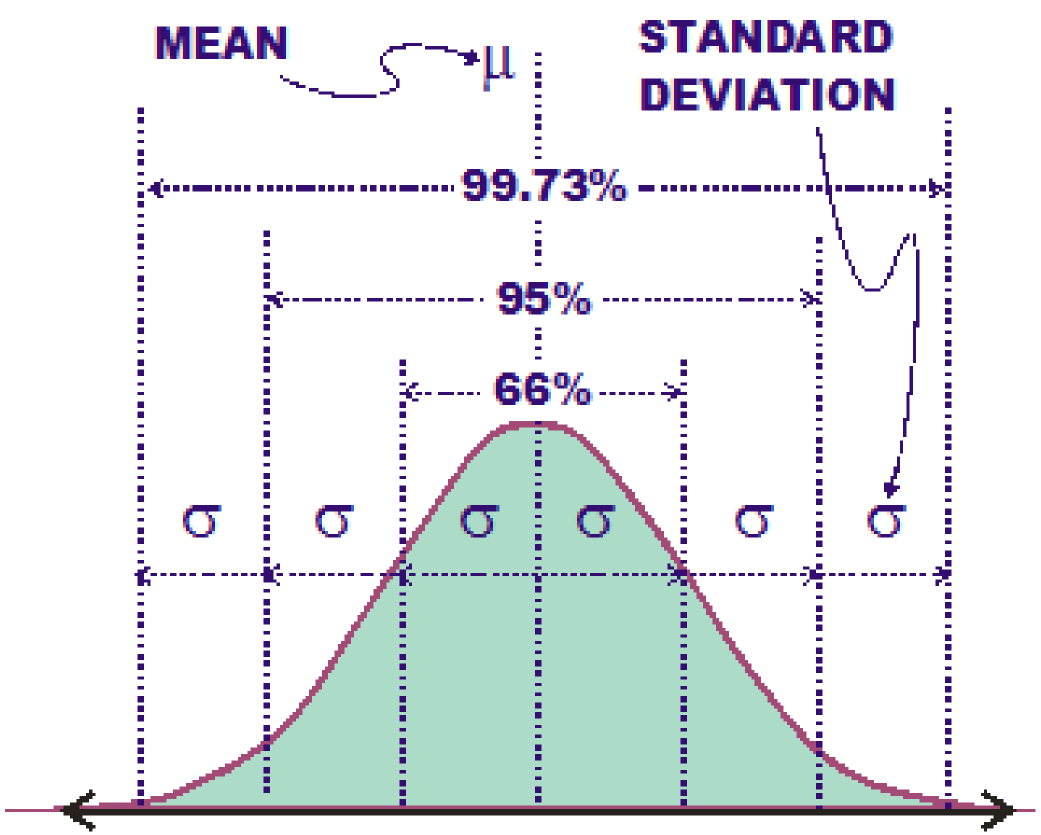
$$E\left[x(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}xf\left(x;t\right)dx=m_x\left(t\right)$$

- 方差

$$V_X\left(t\right)=E\left\{\left[x(t)-m_x(t)\right]^2\right\}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[x-m_x(t)\right]^2 f\left(x;t\right)dx=\sigma_x^2\left(t\right)$$

- 严格平稳随机过程
- 广义平稳随机过程



统计量

- 有时候我们需要归纳一些更为简单的信息，便于直观理解；有时候，我们只有数据本身（做了很多次实验，看到一些结果），真实的概率分布并不知道
- 统计量，对于概率理论来讲，是对概率分布的描述和概括；对于数据分析来说，是对数据的描述和概括
- 矩是最常见的统计量

矩

- 一阶矩不能表达信号受其它时刻的影响，或者说信号多个时刻的联合变化情况

- 二阶矩可以表达两个时刻，信号的联合变化情况

- 自相关：同一随机信号前后两个时刻互相依赖，协同变化的关系

$$R_X(t_1,t_2)=E[x(t_1)x(t_2)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2f(x_1,x_2;t_1,t_2)dx_1dx_2$$

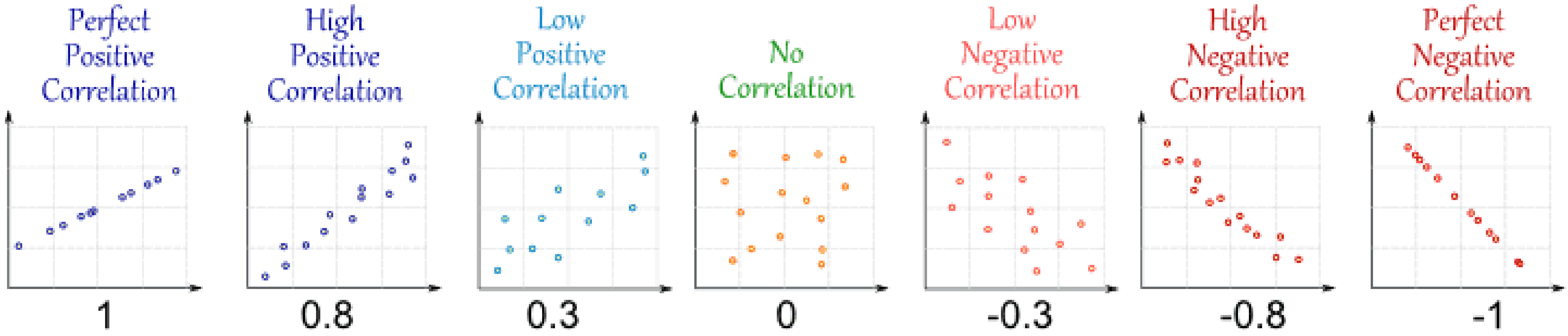
- 互相关：两个不同的随机信号两个时刻互相依赖，协同变化的关系

$$R_{XY}(t_1,t_2)=E\{x_1y_2\}=\iint x_1y_2f(x_1,y_2;t_1,t_2)dx_1dy_2$$

$$R_{YX}(t_1,t_2)=E\{y_1x_2\}=\iint y_1x_2f(y_1,x_2;t_1,t_2)dy_1dx_2$$

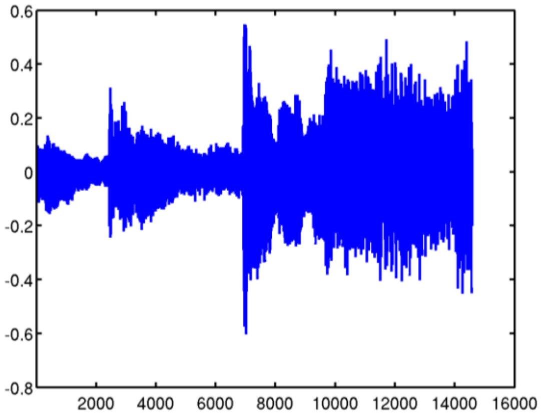
矩

- 协方差 $C_X(t_1,t_2)=E\{[x(t_1)-m_1][x(t_2)-m_2]\}=R_X(t_1,t_2)-m_1m_2$
- 互协方差 $C_{XY}(t_1,t_2)=E\{[x(t_1)-m_X(t_1)]\cdot[y(t_2)-m_Y(t_2)]\}=R_{XY}(t_1,t_2)-m_X(t_1)m_Y(t_2)$
- 相关系数 $\rho_X(t_1,t_2)=\dfrac{E\{(x_1-m_1)(x_2-m_2)\}}{\sigma_1\sigma_2}$

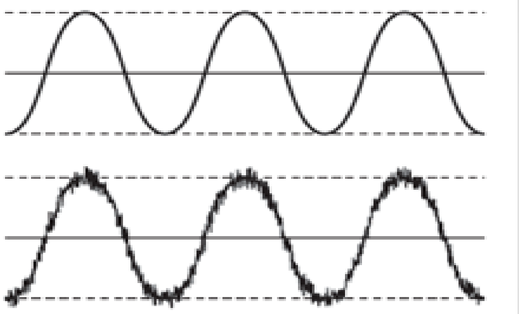


Q:互不相关性和统计独立性?

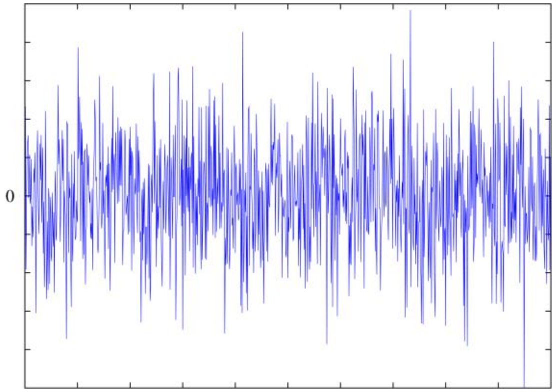
平稳随机信号



语音信号在不同时刻的均值、方差，相关都不同



有噪声的正弦——均值不同，但是方差相同，相关也是相同



纯噪声——均值相同，方差也相同，相关也相同

Q:平稳(Stationary）？

University of Chinese Academy of Sciences

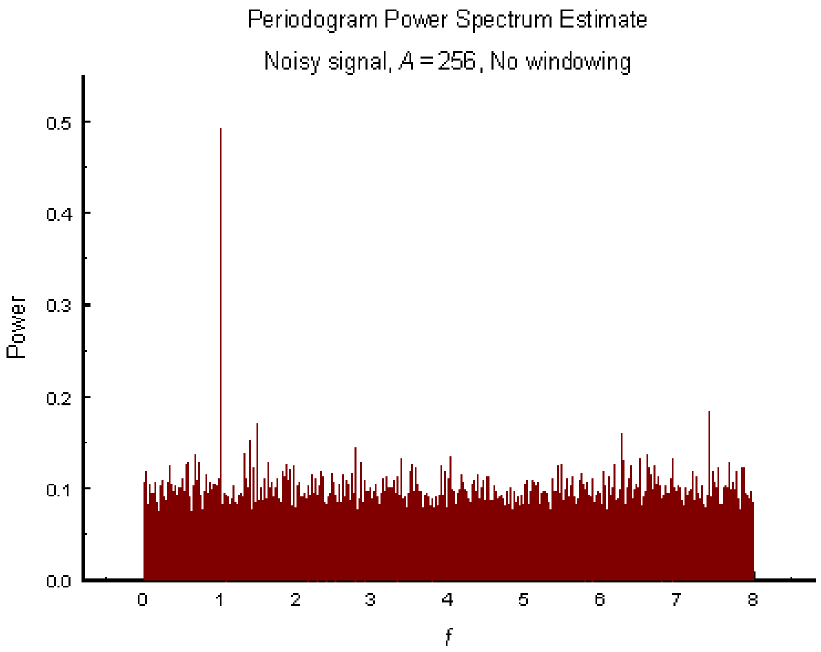
平稳随机信号

- 平稳
  - 是指随机信号的统计特性（均值，方差，**pdf**）都不随时间而变化
- 平稳可以相对某个统计量来说
  - 所有统计量都不变——严格平稳，只有噪声才可能
  - 均值是平稳的——幅度变化的零均值噪声
  - 方差平稳——信噪比不变的正弦信号
- 宽平稳
  - 一阶统计量和二阶统计量不变的随机信号，
  - 基本上就是指功率不变，均值不变的噪声
- $\mu = E[X_n] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n$
- $r_{XX}[k] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x_n x_{n+k}$

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

功率谱

维纳-辛钦定理（广义平稳随机过程）



$$S_X(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} R_X(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$R_X(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_X(\omega)e^{j\omega\tau}d\omega$$

University of Chinese Academy of Sciences

目录
Contents

噪声分类

- **单频噪声**
- **脉冲噪声**
- **起伏噪声**

热噪声

散粒噪声

宇宙噪声

$$\boxed{f(n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n}exp\left\{-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}\right\}}$$

$$f(x_1,x_2,\cdots x_n;t_1,t_2,\cdots t_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\left|C_X\right|^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(X-m)^T C_X^{-1}(X-m)\right]\right\}$$

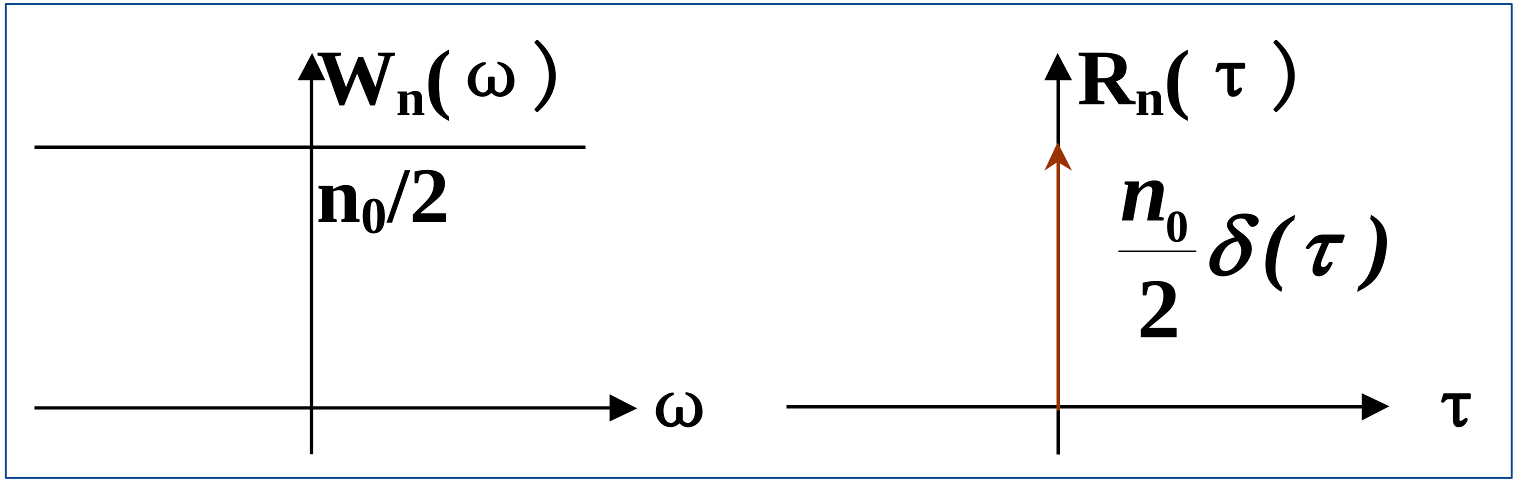
University of Chinese Academy of Sciences

频域分析

噪声的功率在整个频率轴上均匀分布，或者说功率谱密度为常数，则此噪声称作白噪声。

$W_n(\omega)=n_0/2 \qquad -\infty<\omega<\infty$ （双边）

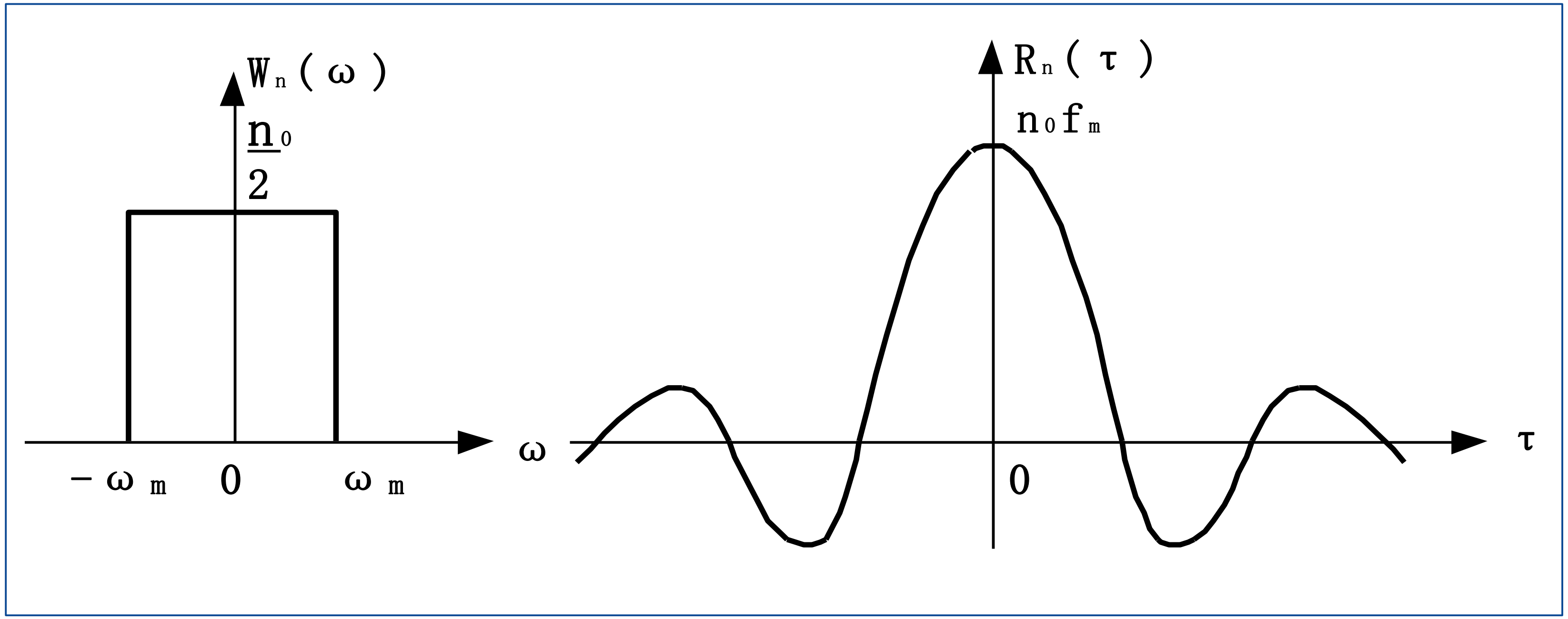
$W_n(\omega)=n_0 \qquad 0<\omega<\infty$ （单边）



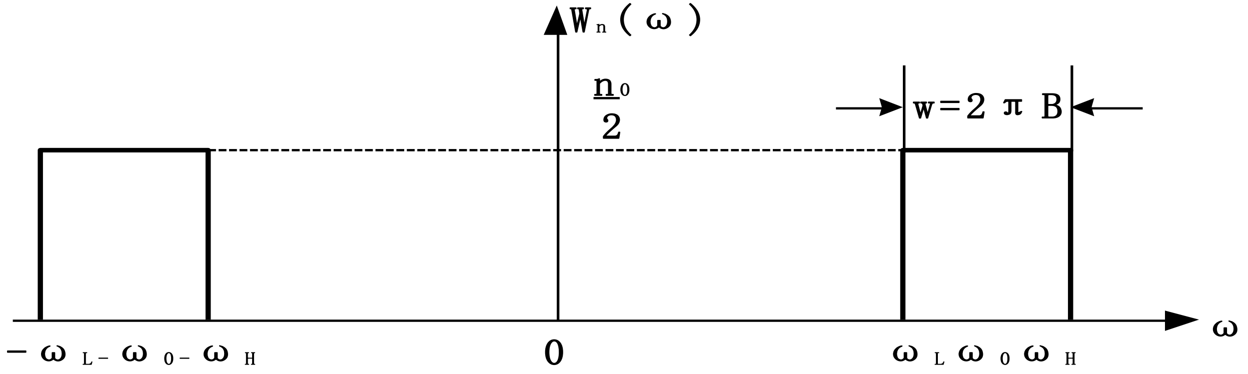
中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

理想低通白噪声

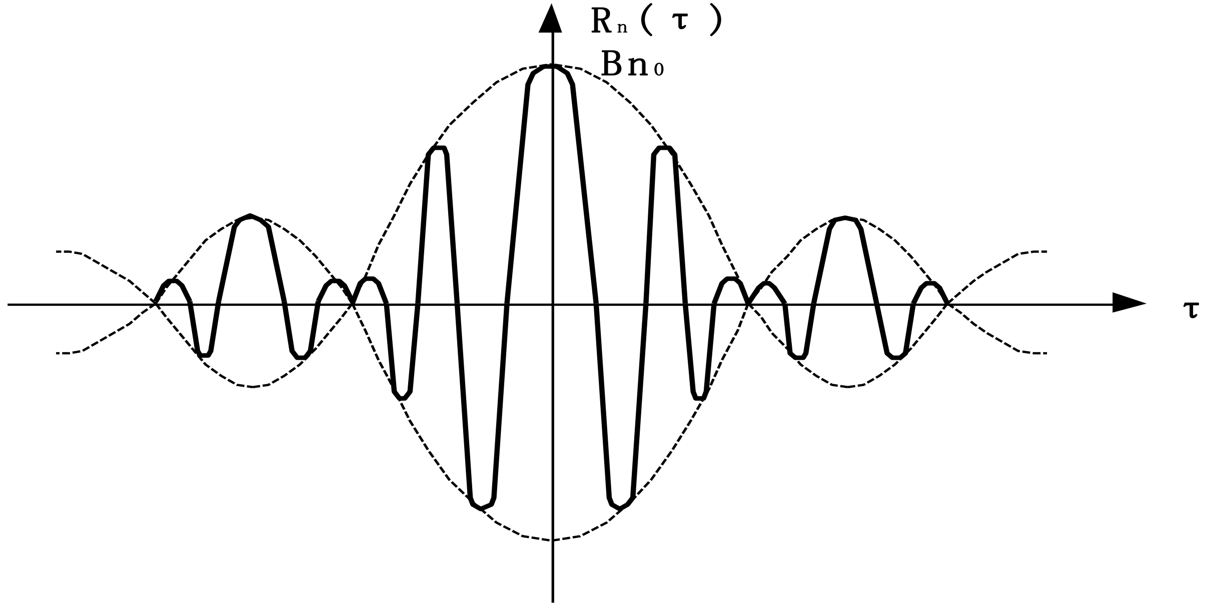
$$R_n(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_m}^{\omega_m}\frac{n_0}{2}e^{j\omega\tau}d\omega=f_m n_0 Sa(2\pi f_m\tau)$$



理想带通白噪声



(a)



(b)

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

目录
Contents

窄带确知信号

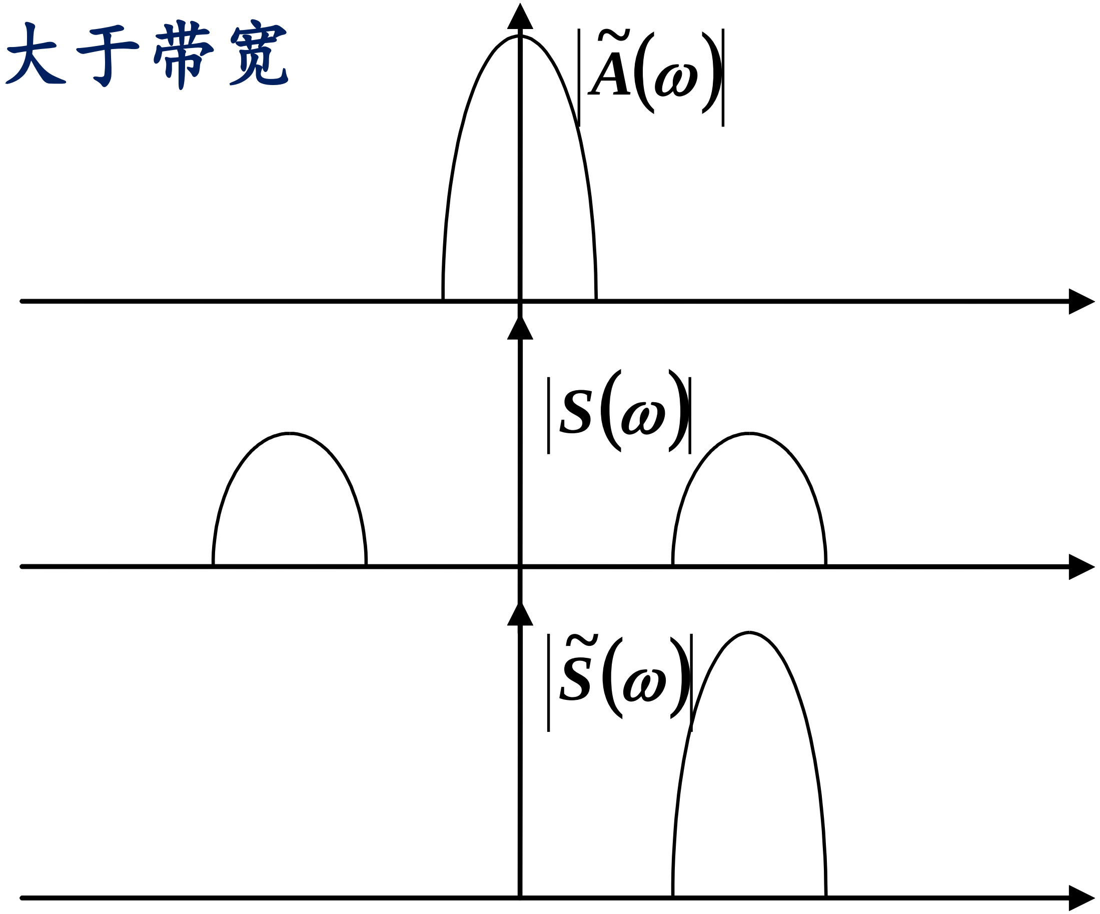
窄带确知信号：频谱中心频率远远大于带宽

$$s(t)=a(t)\cos\left[\omega_c t+\theta(t)\right]$$

$$\text{复信号}\tilde{s}(t)=a(t)e^{j\left[\omega_c t+\theta(t)\right]}$$

$$=\tilde{a}(t)e^{j\omega_c t}$$

$$\text{复包络}\tilde{a}(t)=a(t)e^{j\theta(t)}$$



窄带系统

窄带滤波器： 通带传输函数的中心频率远远大于带宽

$$x_p(t) = x(t) + j\hat{x}(t) = \tilde{x}(t)e^{j\omega_c t}$$

$$y_p(t) = y(t) + j\hat{y}(t) = \tilde{y}(t)e^{j\omega_c t}$$

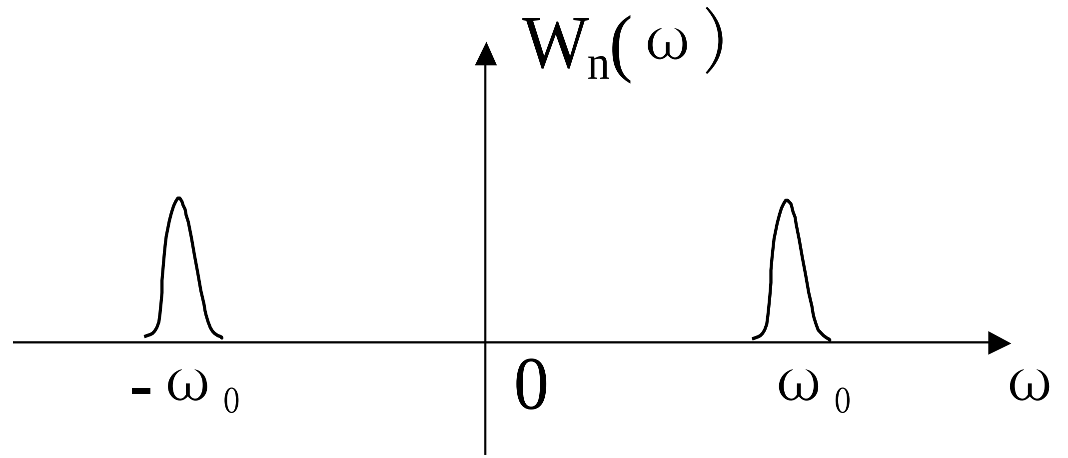
$$h_p(t) = h(t) + j\hat{h}(t) = \tilde{h}(t)e^{j\omega_c t}$$

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{2}\int \tilde{h}(\tau)\tilde{x}(t-\tau)d\tau = \frac{1}{2}\tilde{h}(t) * \tilde{x}(t)$$

窄带随机信号

窄带随机信号： 功率谱中心频率远远大于带宽

$$
\begin{aligned}
n(t) &= r_n(t)\cos\left[\omega_0 t + \varphi_n(t)\right] \\
&= r_n(t)\cos\varphi_n(t)\cos\omega_0 t \\
&\quad -r_n(t)\sin\varphi_n(t)\sin\omega_0 t \\
&= n_I(t)\cos\omega_0 t - n_Q(t)\sin\omega_0 t
\end{aligned}
$$



其中 $\boldsymbol{n_I(t)=r_n(t)\cos\varphi_n(t)}$ **n(t)**的同相分量

$\boldsymbol{n_Q(t)=r_n(t)\sin\varphi_n(t)}$ **n(t)**的正交分量

包络$r_n(t)=\sqrt{n_I^2(t)+n_Q^2(t)}$，相位$\varphi_n(t)=arctg\dfrac{n_Q(t)}{n_I(t)}$

窄带高斯信号

一个均值为零的窄带平稳高斯噪声的同相分量和正交分量都是低通型平稳高斯噪声，且均值为零，方差都是σ_n^2,在同一时刻上两者相互独立。

$$E\left[n_I(t)\right]=E\left[n_Q(t)\right]=0$$

$$\sigma_I^2=\sigma_Q^2=\sigma_n^2$$

$$R_n(0)=R_I(0)=R_Q(0)$$

$$f(n_I,n_Q)=\frac{1}{2\pi\sigma_n^2}exp(-\frac{n_I^2+n_Q^2}{2\sigma_n^2})$$

窄带高斯信号

包络和相位的联合概率密度 $f(r_n,\varphi_n)=|J|\cdot f(n_I,n_Q)$

Jacobi行列式

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial n_I}{\partial r_n} & \dfrac{\partial n_Q}{\partial r_n}\\[2ex] \dfrac{\partial n_I}{\partial \varphi_n} & \dfrac{\partial n_Q}{\partial \varphi_n}\end{vmatrix}=r_n$$

$$\therefore f(r_n,\varphi_n)=|J|\cdot f(n_I,n_Q)=\frac{r_n}{2\pi\sigma_n^2}exp(-\frac{n_I^2+n_Q^2}{2\sigma_n^2})=\frac{r_n}{2\pi\sigma_n^2}exp(-\frac{r_n^2}{2\sigma_n^2})$$

其中 $r_n\geq 0$，$\varphi_n=0\sim 2\pi$

中国科学院大学 University of Chinese Academy of Sciences

窄带高斯信号

包络$r_n(t)$的一维概率密度（边缘）分布

$$f(r_n)=\int_0^{2\pi} f(r_n,\varphi_n)d\varphi_n=\frac{r_n}{\sigma_n^2}\exp(-\frac{r_n}{2\sigma_n^2})$$

Rayleigh分布

相位$\varphi_n(t)$的一维概率密度（边缘）分布

$$f(\varphi_n)=\int_0^{\infty} f(r_n,\varphi_n)dr_n=\frac{1}{2\pi}$$

均匀分布

$f(r_n，\varphi_n)=f(r_n)f(\varphi_n)$，故$r_n(t),\varphi_n(t)$两者也统计独立

$$R_n(\tau)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_n(\omega)e^{j\omega t}d\omega=Bn_0Sa(\pi B\tau)\cos\omega_0\tau$$

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

目录
Contents

瞬时输出信噪比(白噪声&确知信号)

$$\left(\frac{S}{N}\right)_0 = \frac{\left|s_o(t_0)\right|^2}{E\left\{n_0^2(t)\right\}} = \frac{\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)S(\omega)e^{j\omega t_0}d\omega\right|^2}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N_0}{2}\left|H(\omega)\right|^2 d\omega}$$

$$\le \frac{\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\left|S(\omega)\right|^2 d\omega\int_{-\infty}^{\infty}\left|H(\omega)\right|^2 d\omega}{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{N_0}{2}\left|H(\omega)\right|^2 d\omega} = \frac{E_s}{N_0/2}$$

中国科学院大学 University of Chinese Academy of Sciences

系统

- 传递函数 $H(\omega)=CS^*(\omega)e^{-j\omega t_0}=CS(-\omega)e^{-j\omega t_0}$

  不等式中等号成立，瞬时输出SNR最大
- 冲激响应

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)e^{j\omega t}d\omega=s\left[-\left(t-t_0\right)\right]$$

- 为保证其物理可实现性：当$t>t_0$时，$s_i(t)=0$
- 为实现迅速判决：$t_0=T$

LTI系统

$$s_o(t)=\int_{-\infty}^{\infty}s_i(\tau)ks_i(t_0-t+\tau)d\tau$$

$$=k\int_{-\infty}^{\infty}s_i(\tau)s_i\left[\tau-\left(t-t_0\right)\right]d\tau$$

$$=kR_s(t-t_0)$$

当$t=t_0$时，输出信号的幅度为

$s_o(t_0)=kR(0)=kE$

LTI系统

- 所有线性滤波器中，匹配滤波器输出信噪比最大
- 匹配滤波器传输函数的幅频特性与输入信号相同，相频与输入信号相反且有附加项
- 匹配滤波器若对$s(t)$匹配，对时移信号亦匹配
- 匹配滤波器若对频移信号不匹配
- 匹配滤波器的输出是输入信号的自相关函数
- $s(t)$的匹配滤波器输入$y(t)$在T时刻的值等于$s(t)$和$y(t)$的相关

中国科学院大学
University of Chinese Academy of Sciences

FIN