

热噪声与散粒噪声实验

李昊润*

北京大学物理学院 学号: 2200011477

(实验日期: 2025 年 5 月 29 日)

平时看起来的没有规律的噪声涨落, 实际上可以反应一定的统计规律, 因此“噪声”也可以是信号. 本实验通过 cross-correlation 测量方法测量了电阻上的热噪声来估算玻尔兹曼常数, 并熟悉理解了测量光电二极管上的散粒噪声来估算电子的电荷的原理和方法. 本实验通过对于不同阻值电阻对应的电压涨落的功率谱密度进行拟合, 估算得到玻尔兹曼常数约为 $k_B = 1.193 \times 10^{-23} \text{ J/K}$. 了解到了一些典型的输运测量中的噪声对应于哪些物理规律, 同时也对小信号测量以及相关的数据采集分析等有了一些切身体会.

关键词: 热噪声, 散粒噪声, cross-correlation 测量

I. 引言

在测量过程中, 几乎不可避免地会产生噪声. 为了获取更多的有效信息, 人们通常会采用各种方法降低噪声, 提高信噪比. 然而, 噪声本身也包含了一定的物理信息, 对于噪声的分析不仅可以指导人们寻找有效地降低噪声的方法, 还可以反应一定的统计规律. 在本实验中, 主要涉及到了两种噪声: 热噪声 (thermal noise) 和散粒噪声 (shot noise).

热噪声又称为 Johnson–Nyquist 噪声, 无论电压高低, 电路中总会存在热噪声. 由于热噪声的起因是导体中载流子的无规则热运动, 因此随温度升高而增大. 热噪声于 1926 年首次被贝尔实验室的 John B. Johnson 发现 [1], 并由 Harry Nyquist 给出了理论解释 [2]. 按照能量均分定理, 在各个谐振子上面有 $k_B T/2$ 的能量, 这里 T 是温度, k_B 是玻尔兹曼常数. 对于电磁学来说, 可以说是功率谱密度, 就是在单位频率里面的功率是 $k_B T/2$. 然后考虑到样品和探测线路之间的平衡是在两者阻抗一致的时候, 满足

$$\frac{V_n^2}{R} \times 2 = \frac{k_B T}{2},$$

因此对于电阻为 R 的导体, 电压涨落为

$$V_n^2 = 4k_B T R. \quad (1)$$

散粒噪声的发现实际上早于热噪声 [3]. 1918 年, Walter Schottky 在研究真空管中的电流波动时引入了散粒噪声 [4]. 在电子学中, 散粒噪声源于电荷的离散特性, 从微观上来看, 电流是由带电粒子的定向运动形成的, 在不同时刻单位时间内流经电子器件的电流份数是不同的, 它们在一个范围内波动. 我们通常用不同时刻电流的平均值

* lhr@stu.pku.edu.cn; (86)15645049990

来衡量直流分量的大小，那么不同时刻电流相对于这个平均值的偏差就是我们所说的散粒噪声。考虑如果没有非弹性碰撞，散粒噪声一般只取决于结电压。真空管发射电子为一随机过程，满足泊松分布，因此电压涨落为

$$V_n^2 = I_N^2 R_{ac}^2,$$

得到

$$S_I = I_n^2 = 2eI \coth\left(\frac{eV}{2k_{BT}}\right). \quad (2)$$

在室温下，当 $eV \gg k_{BT}$ 时，近似有

$$S_I = 2eI, \quad (3)$$

称为 full shot noise.

不仅待测元件会产生噪声，测量电路、测量仪器也会带来噪声。利用交叉关联 (cross-correlation) 测量方法，取多次测量的平均值，可以得到元件上的噪声。本实验即利用这一种方法，分别测量了不同阻值的定值电阻的电压噪声功率密度谱，根据对于电阻值的拟合结果，估算了玻尔兹曼常数 k_B 的值，同时熟悉理解了测量光电二极管上的散粒噪声来估算电子的电荷的原理和方法。了解到了电流和热电子输运测量中的噪声对应的能均分定理和泊松分布等规律，同时也对小信号测量以及相关的数据采集分析等有了一些切身体会。

II. 实验装置

理论上，对热噪声与散粒噪声的测量只需要对电阻通电并测量信号的涨落就可以。但在实际的对噪声的测量中存在两个问题：

1. 热噪声及散粒噪声都会湮没在背景（实验室环境）噪声中。
2. 我们在测量某个器件上的噪声时，测量电路中的其它电子器件也会引入噪声。

对于第一个问题，我们只需要通过放大电路进行一定程度的放大就可以将我们所需要的噪声信号从背景噪声中突显出来。对于第二个问题，我们用的低噪声放大器的电压噪声与要测量的噪声在同一个数量级，这就需要我们引入 cross-correlation 测量，并且是数字化的方式。

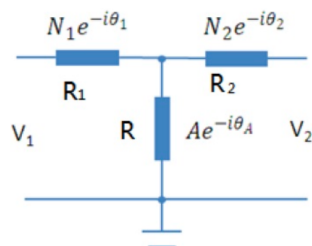


图 1. cross-correlation 电路模型

Cross-correlation 测量的电路模型如 图 1 所示. 我们测量中间电阻 R 的热噪声, 首先利用采数卡把两个通道的模拟信号转换成数字信号, 然后用傅立叶变换得到频域上的分量. 在某个频率傅立叶变换得到的矢量对两个通道分别是:

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= Ae^{i\theta_A} + N_1 e^{i\theta_1}, \\ \vec{v}_2 &= Ae^{i\theta_A} + N_2 e^{i\theta_2}.\end{aligned}$$

其中 A 是样品上面待测量的 (噪声) 信号, 而 N_1, N_2 分别是两个通道上测量系统附加的噪声. 这里, 我们暂且不考虑放大器电流噪声的影响, 而只考虑放大器电压噪声, 因此两个通道的噪声是不相关的, 可以通过某种方式去掉. 我们把这其中一个矢量取复共轭, 乘以另外一个矢量, 得到

$$\vec{v} = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2^* = A^2 + N_1 N_2 e^{i(\theta_2 - \theta_1)} + AN_1 e^{i(\theta_A - \theta_1)} + AN_2 e^{i(\theta_2 - \theta_A)}.$$

其中后面三项的相角是随机的, 因为不相关, 所以如果做多次平均的话, 理论上是可以逐渐消去的, 于是剩下的实部就是样品上面噪声的大小 A . 我们假设最后三项的值的分布均符合 iid (independent identical distributed) 随机分布, 那么就有 n 次平均后 $\sigma_{\sqrt{\mathcal{R}\vec{v}}} \propto n^{-1/4}$. 也就是说要把其他器件的噪声减小 10 倍, 需要平均 10000 次. 对于我们要测量的热噪声和散粒噪声, 由于都是白噪声, 所以待测量的 A 对于各个频率是一样的, 这种情况下我们可以把不同频率的 cross-correlation 结果当作不同采样同一频率的结果来处理. 如果每次测量利用 1000 个频率点, 那么取样 10 次就可以达到平均 10000 个点的效果, 可以大大提高效率 [3].

在实验过程中, 我们首先要记录实验室的温度 $T = 302\text{ K}$, 作为元器件的温度. 然后用两对 BNC 线分别连接两只信号放大器和电阻盒的两端, 每对 BNC 线都是双绞的, 以减小切割地磁场产生的感应电动势. 最后打开信号发生器电源, 启动 LabVIEW 测量程序, 按照电阻从大到小的顺序, 设置测量参数, 进行测量. 测量程序可以分为数据存储模块、参数设置模块、显示模块等, 通过这些模块我们可以得到测量噪声的大小. 显示的数值为信号放大 1000 倍的结果.

III. 结果与讨论

通过选择频谱中比较平坦的一部分白噪声区域, 实验中对 $100\text{ Hz} - 400\text{ Hz}$ 频率范围进行研究, 对 2^{18} 个频率点进行采样, 每组数据进行 10 轮平均. 得到的功率谱密度与电阻阻值的关系如 表 I 所示. 当选取的电阻阻值低于 1 kOhm 时, 此时热噪声较小, 进行 10 次平均不足以使其他电子器件带来的噪声减小至可以忽略不计.

表 I. 热噪声与电阻阻值关系

R/Ohm	1k	10k	20k	50k	100k
$V_n^2/V^2/\text{Hz}$	6.61×10^{-18}	1.05×10^{-16}	2.24×10^{-16}	6.47×10^{-16}	1.42×10^{-15}

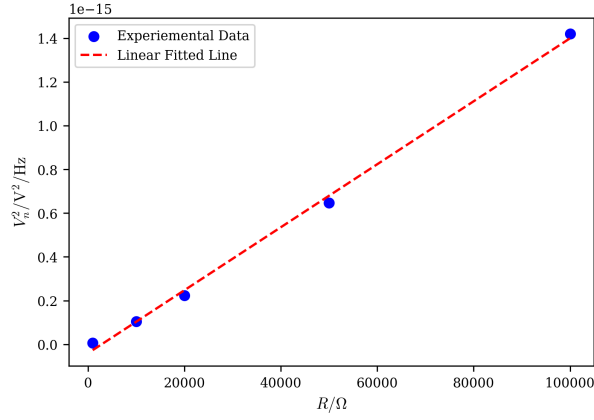


图 2. 热噪声与电阻阻值关系

图 2 给出了热噪声与电阻阻值的线性拟合结果：

$$k = 1.441 \times 10^{-20} \text{ J} \quad r = 0.9988. \quad (4)$$

计算得到

$$k_B = k/4T = 1.193 \times 10^{-23} \text{ J/K}. \quad (5)$$

下面计算不确定度. 温度计允差为 $e = 0.1 \text{ K}$, 不确定度估计为 $\sigma_T = e/\sqrt{3} = 0.06 \text{ K}$. 斜率的不确定度为

$$\sigma_k = k \sqrt{\frac{1/r^2 - 1}{5 - 2}} = 4.079 \times 10^{-22} \text{ J/K}. \quad (6)$$

则玻尔兹曼常数的不确定度为

$$\sigma = k_B \sqrt{\left(\frac{\sigma_k}{k}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_T}{T}\right)^2} = 3.377 \times 10^{-25} \text{ J/K}. \quad (7)$$

综上, 玻尔兹曼常数的测量值为

$$k_B \pm \sigma = (1.19 \pm 0.03) \times 10^{-23} \text{ J/K}, \quad (8)$$

与标准值的相对误差约为 13%, 数量级正确.

IV. 结论

本实验我们通过 cross-correlation 测量, 用 LabVIEW 读取、分析数据, 测量了不同阻值的定值电阻的电压噪声功率密度谱, 根据对于电阻值的拟合结果, 估算了玻尔兹曼常数, 得到了数量级相同的结果并计算了不确定度: $k_B \pm \sigma = (1.19 \pm 0.03) \times 10^{-23} \text{ J/K}$, 同时熟悉理解了测量光电二极管上的散粒噪声来估算电子的电荷的原理和方法. 了解到了电流和热电子输运测量中的噪声对应于的能均分定理和泊松分布等规律, 同时也对小信号测量以及相关的数据采集分析等有了一些切身体会. 但是, 由于时间有限, 本报告未能对不同的 correlation ratio 的数据对于拟合的影响作更进一步的定量分析. 将来的实验还可以选择更多更小间距的大阻值电阻进行测量, 利用 correlation ratio 均比较大的数据进行更高质量的拟合.

致谢

感谢田春迅同学协力完成了本实验，感谢路建明老师在实验中的讲解和指导.

- [1] J. B. Johnson, *Phys. Rev.* **32**, 97 (1928).
- [2] H. Nyquist, *Phys. Rev.* **32**, 110 (1928).
- [3] 危健, 利用噪声测量来估算基本物理常量 (实验指南), 北京大学物理学院量子材料科学中心 (2015).
- [4] W. Schottky, *Annalen der Physik* **362**, 541 (1918), <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1002/andp.19183622304>.