微分幾何

LHY

December 30, 2023

Contents

1 Introduction to Topological Spaces

1.1 Introduction to Set Theory

Cartesian Product

$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$
由X中的一個元素於Y中的一個元素組成的有序對
可由此定義 $\mathbb{R}^2$ 以及 $\mathbb{R}^n$

Distance

For $x = (x^1, x^2, \cdots, x^n)$ and $y = (y^1, y^2, \cdots, y^n)$ in $\mathbb{R}^n$, the distance $|y - x|$ is $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y^i - x^i)^2}$

Map

Map $(f : X \to Y)$ 是一個法則, 給X的每一個元素指定Y的對應元素
♣ one-to-one: 任一 $y \in Y$ 有不多於一個逆像（可以沒有）
♣ onto: 任一 $y \in Y$ 都有逆像（可多餘一個）

1.2 Topological Spaces

$\Re$ 的子集分為開子集於非開子集（不是閉子集）
開子集具有三個性質：

- X本身與空集 $\varnothing$ 為開子集
- 有限個開子集之交為開子集
- 任一個（有限或無限）個開子集之並為開子集

Topology $\mathscr{T}$

非空集合X的一個拓撲$\mathscr{T}$是X的若干開子集的集合,滿足：

- $X, \varnothing \in \mathscr{T}$
- If $O_i \in \mathscr{T}, i = 1, 2, \cdots, n$, then $\bigcap_{i=1}^{n} O_i \in \mathscr{T}$
- If $\forall\ \alpha, O_\alpha \in \mathscr{T}$, then $\bigcup_\alpha O_\alpha \in \mathscr{T}$

離散拓撲 Discrete topology: $\mathscr{T}$是X全部開子集的集合

凝聚拓撲 Indiscrete topology: $\mathscr{T} = \{X, \emptyset\}$

通常拓撲 Usual topology: $\mathscr{T}$ 表示空集或X中表示開區間之並的子集

誘導拓撲 Induce Topology $\mathscr{S}$

設 $(X, \mathscr{T})$ 是拓撲空間, A是X的任一子集(可以是開子集·也可以是非開子集)。
指定拓撲 $\mathscr{S}$ 使A成為拓撲空間,記為 $(A, \mathscr{S})$, 則 $\mathscr{S}$ 定義為:

$$\mathscr{S} := V \subset A \mid \exists\ O \in \mathscr{T}, V = A \bigcap O$$

同胚 Homeomorphism

拓撲空間 $(X, \mathscr{T}_x)$ 與 $(Y, \mathscr{T}_y)$ 稱為互相同胚(homeomorphic to each other),若 $\exists$ 映射 $f := X \to Y$,滿足:

- f 是一一到上的
- f 與 f^{-1} 都連續

這樣的f稱為 $(X, \mathscr{T}_x)$ 到 $(Y, \mathscr{T}_y)$ 的同胚映射,簡稱同胚 (homeomorphism)

豪斯多夫空間 Hausdorff Space

$\forall\ x, y \in X,\ x \neq y$
$\exists\ O_1, O_2 \in \mathscr{T}$
$LET\ x \in O_1, y \in O_2,\ AND\ O_1 \bigcap O_2 = \varnothing$

2 Manifolds and Tensor Fields

2.1 Differentiable Manifold

開覆蓋 Open cover: X的開子集的集合 $\{O_\alpha\}$ 叫 $A \subset X$ 的一個開覆蓋,若 $A \subset \bigcup_\alpha O_\alpha$.也可以説$\{O_\alpha\}$ 覆蓋 A

n-Dimensional Differentiable Manifold

若M有開覆蓋$\{O_\alpha\}$, 即$M = \bigcup_\alpha O_\alpha$, 滿足:

- 對每一 $O_\alpha \exists$ 同胚 $\Psi_\alpha : O_\alpha \to V_\alpha$
- 若 $O_\alpha \bigcap O_\beta \neq \varnothing$,則複合映射 $\Psi_\alpha \circ \Psi_\beta$ 是 C^∞ 的 (相容性條件 Compatibility)

則拓撲空間M稱為n維微分流形, 簡稱n維流形.
1. M作為拓撲空間, 元素本身並沒有座標, 但作為流形, M中位於 O_α 内的元素可以通過映射 Ψ_α 獲得座標.
2. 若 $O_\alpha \bigcap O_\beta \neq \varnothing$ 則 O_α 內的點即可通過 Ψ_α, 也可以通過 Ψ_α 獲得兩個一般來説不同的座標, 這就是座標係變換.
3. (O_α, Ψ_α) 構成一個局域座標係, 其座標域為 O_α, (O_β, Ψ_β) 構成另一個局域座標係, 其座標域為 O_β.
4. $O_\alpha \cap O_\beta$ 内的點至少有兩組座標, 分別記做 x^μ 和 x'^ν $(\mu,\ \nu = 1, 2, \cdots n)$.
5. 由映射 $\Psi_\beta \circ \Psi_\alpha^{-1}$ 提供的體現兩組座標關係的n個n元函數

$$x'^1 = \phi(x^1, x^2, \cdots, x^n),\ \cdots,\ x'^n = \phi(x^1, x^2, \cdots, x^n)$$

稱為一個座標變換 (Coordinate tranformation).

Chart and Atlas

座標係 (O_α, Ψ_α) 在數學上叫做圖(Chart), 滿足定義的全體圖的集合 $\{(O_\alpha, \Psi_\alpha),\ \cdots, (O_\beta, \Psi_\beta)\}$ 叫圖冊.
由相容性條件, 一個圖冊的任意兩個圖都是相容的.

平凡流形 Trivial Manifold

能用一個座標域覆蓋的流形叫平凡流形
若 $M = (\mathbb{R}^2, \mathscr{T}_u)$. 選擇 $O_1 = \mathbb{R}^2, \Psi =$恆等映射, 則 $\{(O_1, \Psi_1)\}$ 便是只有一個圖的圖冊, M是平凡流形.
故 $\mathbb{R}^n$ 是n維平凡流形.

微分同胚 Diffeomorphism

微分流形 M 與 M' 稱為互相微分同胚(diffeomorphic to each other), 若 $\exists\ f : M \to M'$, 滿足:

- f是一一到上的
- f 與 f^{-1} 是 C^∞ 的

這樣的f稱為從 M 到 M' 的微分同胚映射, 簡稱微分同胚(diffeomorphism).

標量場 Scalar Field

$f : M \to \mathbb{R}$ 稱為M上的函數(function on M)或M上的標量場(scalar field on M).
若 $f\ is\ C^\infty$, 則稱為M上的光滑函數.

閉集合

閉集合是開集合的補集.
集合可開可不開可閉, 也可以既開又閉(如集合本身與空集).

2.2 Tangent and Tangent Fields

矢量空間 Vector Space

實數域的一個矢量空間是一個集合V配以兩個映射, 即 $V \times V \rightarrow V$ (Addition) 和 $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ (Scalar multiplication), 滿足:

- $v_1 + v_2 = v_2 + v_1,\ \forall\ v_1,\ v_2 \in V$
- $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3),\ \forall\ v_1,\ v_2,\ v_3 \in V$
- $\exists\ 0 \in V,\ s.t.\ 0 + v = v,\ \forall\ v \in V$
- $a_1(a_2 v) = a_1 a_2 v,\ \forall\ v \in V,\ a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}$
- $(a_1 + a_2)v = a_1 v + a_2 v,\ \forall\ v \in V,\ a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}$
- $a(v_1 + v_2) = av_1 + av_2,\ \forall\ v_1,\ v_2 \in V,\ a \in \mathbb{R}$
- $1 \cdot v = v,\ \forall\ v \in V$

由此可以推出:

- $0 \cdot v = 0,\ \forall\ v \in V$
- $\forall\ v \in V,\ \exists\ u \in V,\ s.t.\ v + u = 0$

對於流形M上的一點p, 存在一個映射 f 到標量場 $\mathbb{R}$ 產生一個函數 F, 也可以存在另一個映射 f' 到另一個標量場 $\mathbb{R}'$ 產生另一個 F'.
注意到p點存在的基本結構 (或者稱為矢量) 是不會改變的, 故可以把p點的矢量看作映射 f 到標量場 $\mathbb{R}$ 的一個新的映射 v.

矢量 Vector

以 $\mathscr{F}_M$ 代表流形M上所有光滑函數的集合, 則 $f \in \mathscr{F}_M$.
映射 $v:\ \mathscr{F}_M \rightarrow \mathbb{R}$ 稱為點 $p \in M$ 的一個矢量, 若 $\forall\ f,\ g\ \in \mathscr{F}_M,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, 有:

線性性: $v(\alpha f + \beta g) = \alpha\ v(f) + \beta\ v(g)$

萊布尼茲律: $v(fg) = f|_p\ v(g) + g|_p\ v(f)$

由以上定義可知, 給定一個映射與標量場就可以得到一個p點的矢量 (矢量就是對 F 或者記做 f 在某一個方向求導), 故理論上p點存在著無限多的矢量.
設 (O, Ψ) 是座標係, 其座標是 x^μ, 則M上任一光滑函數 $f \in \mathscr{F}_M$ 與 (O, Ψ) 結合得n元函數 $F(x^1, x^2, \cdots, x^n)$, 借此可給O中任一點p定義n個矢量, 記做 $X_\mu,\ (\mu = 1, 2, \cdots, n)$, 它作用於任一 $f \in \mathscr{F}_M$ 的結果 $X_\mu(f)$ 定義為如下實數:

$$X_\mu(f) := \frac{\partial F(x^1, x^2, \cdots, x^n)}{\partial x^\mu}|_p$$

其中 $\frac{\partial F(x^1, x^2, \cdots, x^n)}{\partial x^\mu}|_p$ 是 $\frac{\partial F(x^1, x^2, \cdots, x^n)}{\partial x^\mu}|_{(x^1(p), x^2(p), \cdots, x^n(p))}$ 的簡寫.
可用 f 代替 F, 故該式簡化為:

$$X_\mu(f) := \frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu}|_p,\ \forall\ f \in \mathscr{F}_M$$

定理: 以 V_p 代表M中p點的所有矢量的集合, 則 V_p 是n維矢量空間 (n是M的維數), 即:

$$dim\ V_p = dim\ M = n$$

座標基底 Coordinate Basis

座標域內任一點p的 $\{X_1, \cdots, X_n\}$ 稱為 V_p 的一個座標基底, 每個 X_μ 是一個座標基矢 (coordinate basis vector), $v = v^\mu\ X_\mu,\ v \in V_p$ 用 $\{X_\mu\}$ 線性表出的係數 v^μ 稱為 v 的一個座標分量 (coordinate components).

定理: 設 $\{x^\mu\}$ 與 $\{x'^\nu\}$ 為兩個座標係, 其座標域的交集非空, p為交集內一點, $v \in V_p$, $\{v^\mu\}$ 與 $\{v'^\nu\}$ 是 v 在這兩個座標係的座標分量, 則:

$$v'^\nu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}|_p\ v^\mu$$

其中 x'^ν 是兩個座標係間座標變換函數 $x'^\nu(x^\sigma)$ 的縮寫.
這是矢量變換式, 常用做矢量定義.

曲線 Curve

設 I 是 $\mathbb{R}$ 的一個區間, 則 C^r 類映射 $C:\ I \to M$ 稱為M上的一條 C^r 類的曲線.
對任一 $t \in I$, 有唯一的點 $C(t) \in M$ 與之對應, t稱為曲線的參數 (parameter).
這裡的曲線不同於平常意義的曲線, 而是從 $\mathbb{R}$ 到M上的一個映射.

重參數化 Reparametrization

曲線 $C':\ I' \to M$ 稱為 $C:\ I \to M$ 的重參數化, 若 $\exists$ 到上映射 $\alpha:\ I \to I'$, 滿足:

- $C = C' \circ \alpha$
- 由 α 誘導的函數 $t' = \alpha(t)$ 有處處非零的導數

即: $C(t) = C'(\alpha(t)) = C'(t'),\ \forall\ t \in I$.
映射 α 的到上性保證 $C'[I'] = C[I]$, 即兩曲線映射有相同的像.
$C[I]$ 也常記做 $C[t]$, 以表明曲線的參數是t.
設 (O, Ψ) 是座標係, $C[I] \subset O$, 則 $\Psi \circ C$ 是從 $I \subset \mathbb{R}$ 到 $\mathbb{R}^n$ 的映射, 相當於n個一元函數 $x^\mu = x^\mu(t)$.
這n個等式稱為曲線的參數方程或參數表達式或參數式. 如圓的參數方程.

座標線 Coordinate Line

設 (O, Ψ) 為座標係, x^μ 為座標, 則O的子集 $\{p \in O \mid x^2(p) = Constant, \cdots, x^n(p) = Constant\}$ 可以看成以 x^1 為參數的一條曲線, 叫做 x^1 座標線 (Coordinate line).

切矢 Tangent Vector

設 $C(t)$ 是流形M上的 C^1 曲線, 則線上 $C(t_0)$ 點的切於 $C(t)$ 的切矢T是 $C(t_0)$ 點的矢量, 它對 $f \in \mathscr{F}_M$ 的作用定義為

$$T(f) := \frac{d(f \circ C)}{dt}|_{t_0} = \frac{df(C(t))}{dt}|_{t_0} = \frac{\partial}{\partial t}|_{C(t_0)}.\ \forall\ f \in \mathscr{F}_M$$

定理: 設曲線 $C(t)$ 在坐標系中的參數式為 $x^\mu = x^\mu(t)$, 則線上任一點的切矢 $\frac{\partial}{\partial t}$ 在該座標基底的展開式為:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{dx^\mu(t)}{dt}\frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

即曲線 $C(t)$ 的切矢 $\frac{\partial}{\partial t}$ 的座標分量是 $C(t)$ 在該系的參數式 $x^\mu(t)$ 對t的導數.
V_p 中任一元素可視為過p的某曲線的切矢, 因此p點的矢量亦稱為切矢量 (Tangent vector), ν 則稱為p點的切空間 (Tangent space).

矢量場 Vector Field

設A是M的子集, 若給A中每點指定一個矢量, 就得到一個定義在A上的矢量場.
如非自相交曲線C(t)上每點構成的切矢構成C(t)上的矢量場.
M上的矢量場 ν 稱為 C^∞ 類 (光滑)的, 若 ν 作用於 C^∞ 類函數的結果為 C^∞ 類函數, 即 $\nu(f) \in \mathscr{F}_M,\ \forall\ f \in \mathscr{F}_M$.

對易子 Commutator

兩個光滑矢量場 u 與 ν 的對易子是一個光滑矢量場 $[u,\nu]$, 定義為:

$$[u,\nu](f) := u(\nu(f)) - \nu(u(f))$$

在每點 $p \in M$ 的定義 $[u,\nu]\ |_p$:

$$[u,\nu]|_p(f) := u|_p(\nu(f)) - \nu|_p(u(f))$$

定理: 設 $\{x^\mu\}$ 為任一座標係, 則 $[\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}] = 0$.

積分曲線 Intergral curve

曲線C(t)叫矢量場 ν 的積分曲線, 若其上每點的切矢等於該點的 ν 值.

群 Group

一個群是一個集合G配以滿足以下條件的映射 $G \times G \to G$ (叫群乘法, 元素 g_1 和 g_2 的乘積記做 $g_1 g_2$):

- $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3),\ \forall\ g_1,\ g_2,\ g_3 \in G$
- $\exists$ 恆等元 (Identity element) $e \in G$, s.t. $eg = ge = g,\ \forall\ g \in G$
- $\forall\ g \in G,\ \exists$ 逆元 (Inverse element) $g^{-1} \in G$, s.t. $g^{-1}g = gg^{-1} = e$

單參微分同胚群 One-parameter Group of Diffeomorphisms

C^∞ 映射 $\phi:\ \mathbb{R} \times M \to M$ 稱為M上的一個單參微分同胚群, 若:

- $\phi_t : M \to M$ 是微分同胚 $\forall\ t \in \mathbb{R}$
- $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s},\ \forall\ t, s \in \mathbb{R}$

2.3 Dual Vector Fields

設 V 是 $\mathbb{R}$ 上的有限維矢量空間. 線性映射 $\omega:\ V \to \mathbb{R}$ 稱為 V 上的對偶矢量 (Dual vector). V 上全體對偶矢量的集合稱為 V 的對偶空間, 記做 V^*.
由於 V 上有加法與數乘, 對映射 ω 的線性要求有確切含義:

- $\omega(\alpha\nu + \beta u) = \alpha\omega(\nu) + \beta\omega(u),\ \forall\ \nu,\ u \in V,\ \alpha,\ \beta \in\ \mathbb{R}$

定理: V^* 是矢量空間, 且 $dim\ V^* = dim\ V$.
設 $\{e_\mu\}$ 是 V 的一組基矢, 則 V^* 的基矢定義為 $e^{\mu *}(e_\nu) = \delta^\mu_\nu$, $\{e^{\mu *}\}$ 叫做 V^* 的對偶基底.

兩個矢量空間是同構的 (Isomorphic), 若二者存在一一到上的線性映射 (同構映射), 且維數相同.

定理: 若矢量空間 V 中有一基底變換 $e_\mu = A^\nu_\mu e_\nu$, 以 A^ν_μ 為元素排成的方陣記做A, 則對應的矢量變換是

$$e^{'\mu *} = (\tilde{A}^{-1})^\mu_\nu e^{\nu *}$$

其中 $\tilde{A}$ 是 A 的轉置矩陣, $\tilde{A}^{-1}$ 是 $\tilde{A}$ 的逆.
因 $p \in M$ 有矢量空間 V_p, 故也有 V^*_p.
若在M上或 $(A \subset M)$ 上每點指定一個對偶矢量, 就得到M或A上的一個對偶矢量場.
M上的對偶矢量場 ω 是光滑的, 若 $\omega(\nu) \in \mathscr{F}_M\ \forall$ 光滑矢量場 ν.
若 $f \in \mathscr{F}_M$, 則 f 自然的誘導出M上的一個對偶矢量場, 記做 df. 定義為:

$$df|_p := v(f),\ \forall\ v \in V_p$$

且滿足萊布尼茲律 $d(fg)|_p = f|_p(dg) + g|_p(df)$.
設 (O, Ψ) 是一座標係, 則第 μ 個座標 x^μ 可以看作O上的函數, 於是 dx^μ (可以看作特殊的 df) 是定義在 O 上的對偶矢量場.
設 $p \in O$, $\frac{\partial}{\partial x^\nu}$ 是 V_p 的第 ν 個座標基矢, 則在p點有 $dx^\mu(\frac{\partial}{\partial x^\nu}) = \frac{\partial}{\partial x^\nu}(x^\mu) = \delta^\mu_\nu$, 由此可見 $\{dx^\mu\}$ 正是與座標基底 $\{\frac{\partial}{\partial x^\nu}\}$ 對應的對偶座標基底.

定理: 設 (O, Ψ) 是一座標係, f 是 O 上的光滑函數, $f(x)$ 是 $f \circ \Psi^{-1}$ 對應的n元函數 $f(x^1, x^2, \cdots, c^n)$ 的簡寫, 則 df 可用對偶座標基底 $\{dx^\mu\}$ 展開為:

$$df = \frac{\partial f(x)}{\partial x^\mu} dx^\mu, \ \forall\ f \in \mathscr{F}_O$$

.

定理: 設座標係 $\{x^\mu\}$ 與 $\{x'^\nu\}$ 的座標域有交, 則交域中任一點p的對偶矢量 ω 在兩座標係中的分量 ω_μ 與 ω'_ν 的變換關係是:

$$\omega'_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}|_p \omega_\mu$$

2.4 Tensor Fields

矢量空間 V 上的一個 (k, l) 型張量 (Tensor of type(k,l)), 是一個多重線性映射:

$$T : V^* \times V^* \times \cdots \times V^* \times V \times V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$$

輸入k個對偶矢量與l個矢量, 便產生一個實數, 且此實數對於每一個輸入值都線性依賴.

- V 上的對偶矢量是 V 上的 (0,1)型張量
- V 的元素 ν 可以看作 V 上的(1,0)型張量
- 用 $\mathscr{F}_V$ 表示 V 上全體(k,l)型張量的集合, 故 $V \in \mathscr{F}_V(1,0)$, $V^* \in \mathscr{F}_V(0,1)$.

設 $T \in \mathscr{F}_V(1,1)$, 則 $T : V^* \times V \to \mathbb{R}$. 但是T也可以看成另一種映射. 因為 $\forall\ \omega \in V^*$, $\nu \in V$ 有 $T(\omega; \nu) \in \mathbb{R}$, 故 $T(\omega;\ \bullet)$ 可以把一個矢量線性的變為實數, 故 $T(\omega;\ \bullet) \in V^*$. 同理, $T(\bullet;\ \nu)$ 可以把一個對偶矢量線性的變為實數, $T(\bullet;\ \nu) \in V$.

張量積 Tensor Product

V 上的 $(k,\ l)$ 與 $(k';\ l')$ 型張量 T 與 T' 的張量積 $T \otimes T'$ 是一個 $(k + k';\ l + l')$ 型張量, 定義為:

$$T \otimes T'(\omega^1, \cdots, \omega^k, \omega^{k+1}, \cdots, \omega^{k+k'};\ \nu_1, \cdots, \nu_l, \nu_{l+1}, \cdots, \nu_{l+l'}) :=$$

$$T(\omega^1, \cdots, \omega^k;\ \nu_1, \cdots, \nu_l)\ T'(\omega^{k+1}, \cdots, \omega^{k+k'};\ \nu_{l+1}, \cdots, \nu_{l+l'})$$

定理: $\mathscr{F}_V(k,l)$ 是矢量空間, 且 $dim\ \mathscr{F}_V(k,l) = n^{k+l}$

$$T = T^{\mu\nu}{}_\sigma e_\mu \otimes e_\nu \otimes e^{\sigma *},\ T^{\mu\nu}{}_\sigma = T(e^{\mu *}, e^{\nu *}; e_\sigma)$$

縮並 Contraction

(1,1)型張量 T 可以看成從 V 到 V 的線性映射, 即線性代數中的線性變換.
T 在任一兩個基底的分量互為相似矩陣 $T'^\mu{}_\nu = (A^{-1}TA)^\mu{}_\nu$.
則它們的跡 (Trace) $T'^\mu{}_\mu$ 是相同的. $T'^\mu_\mu = (A^{-1})^\mu{}_\rho T^\rho{}_\sigma A^\sigma{}_\mu = \delta^\sigma{}_\rho T^\rho{}_\sigma = T^\rho{}_\rho$.
則 $T \in \mathscr{F}_V(k,l)$ 的第 i 個上標與第 j 個下標的縮並 (CT) 定義為:

$$C^i_j T := T(\cdot, \cdots, e^{\mu *}, \cdot, \cdots;\ \cdot, \cdots, e_\mu, \cdot, \cdots) \in \mathscr{F}_M(k-1, l-1)$$

- $C(\mu \otimes \omega) = \omega_\mu \nu^\mu = \omega(\mu) = \mu(\omega)$

- $C_2^1(T \otimes \nu) = T(\bullet, \nu),\ \forall\ \nu \in V,\ T \in \mathscr{F}_V(0,2)$
- $C_2^2(T \otimes \omega) = T(\bullet, \omega;\ \bullet),\ \forall\ \omega \in V^*,\ T \in \mathscr{F}_V(2,1)$

在流形中, 由於座標的出現, 可將(2,1)型張量改寫為:

$$T = T^{\mu\nu}{}_{\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \otimes \frac{\partial}{\partial x^\nu} \otimes dx^\sigma,\ T^{\mu\nu}{}_{\sigma} = T(dx^\mu, dx^\nu, \frac{\partial}{\partial x^\sigma})$$

自然的, 在流形M上每一點指定一個(k,l)型張量, 就會得到M上的一個張量場.

定理: (k,l)型張量在兩個座標係中的分量的變換關係 (張量變換律):

$$T'^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\rho_1}} \cdots \frac{\partial x^{\sigma_l}}{\partial x'^{\nu_l}} T^{\rho_1\cdots\rho_k}{}_{\sigma_1\cdots\sigma_l}$$

2.5 Metric Tensor Fields

矢量空間 V 上的一個度規 (Matric) g 是 V 上的一個對稱的非退化的(0,2)型張量.

對稱: $g(\nu, u) = g(u, \nu),\ \forall\ \nu, u \in V$

非退化: $g(\nu, u) = 0,\ \forall\ u \in V \Rightarrow \nu = 0 \in V$

正定性: $\forall\ v \in V,\ g(v, v) \geqslant 0$

$\nu \in V$ 的長度 (Length)或大小 (Magnitude)定義為 $|\nu| := \sqrt{|g(\nu, u)|}$.
矢量 $n, \nu \in V$ 是互相正交的 (Orthogonal), 若 $g(\nu, u) = 0$.
V 的基底 $\{e_\mu\}$ 是正交歸一的 (Orthonormal), 若任二矢量正交且每一個基矢 e_μ 滿足 $g(e_\mu, e_\mu) = \pm 1$.

定理: 任何帶度規的矢量空間都有正交歸一基底. 度規寫為對角矩陣時 $+1$ 與 -1 的個數與所選正交歸一基底無關.

號差 Signature

度規用正交歸一基底寫成對角矩陣後, 根據對角元分為:

正定的 (Positive Definite)或 黎曼的 (Riemannian)： 對角元全為 $+1$.

負定的 (Negative Definite)： 對角元全為 -1.

不定的 (Indefinite)： 其餘度規.

洛倫茲的 (Lorentzian)： 只有一個對角元為 -1 的不定度規.

對角元之和叫度規的號差. 帶洛倫茲度規 g 的矢量空間 V 的元素 ν 分為:

類空矢量 (Spacelike vector)： $g(\nu, \nu) > 0$

類時矢量 (Timelike vector)： $g(\nu, \nu) < 0$

類光矢量 (Lightlike vector or Null vector)： $g(\nu, \nu) = 0$

流形M上對稱的, 處處非退化的(0,2)型張量場叫度規張量場.
可以用度規場定義曲線長度. 如在二維歐式空間, 曲線 $C(t)$ 在自然座標係 $\{x, y\}$ 的參數式為 $x = x(t),\ y = y(t)$, 則曲線元段線長的平方 $(dl)^2$ 為

$$dl^2 = dx^2 + dy^2 = [(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2]dt^2 = |T|^2 dt^2$$

其中 T 是 $C(t)$ 的切矢.

故 $dl = |T|dt$, $C(t)$ 的線長為 $l = \int |T|dt$.
設流形 M 上有洛倫茲度規場 g, 則 M 上的類空, 類光與類時曲線 $C(t)$ 的線長的定義為:

$$l := \int \sqrt{|g(T,T)|}dt$$

由於線長的定義不涉及座標係, 故線長與座標係無關. 但是可以借助座標係計算, 因為

$$g(T,T) = g(T^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, T^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}) = T^\mu T^\nu g(\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \frac{\partial}{\partial x^\nu}) = \frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt} g_{\mu\nu}$$

引入線元 (Line element) $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, 則元線長 $dl = \sqrt{|g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu|} = |ds|$, 線長 $l = \int \sqrt{ds^2}$ (類空曲線), $\int \sqrt{-ds^2}$ (類時曲線).

時空 Spacetime

設流形 M 上給定度規場 g, 則 (M, g) 叫廣義黎曼空間 「若 g 為正定, 叫黎曼空間 (Riemannian space); 若 g 為洛倫茲, 叫偽黎曼空間 (pseudo-Riemannian space) 或者時空 (Spacetime)」.

歐式空間 Euclidean Spacetime

設 $\{x\mu\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的自然座標係, 在 $\mathbb{R}^n$ 上定義度規張量場 δ 為:

$$\delta := \delta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu, \ \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \nu \neq \mu \\ +1 & \mu = \nu \end{cases}$$

則 $(\mathbb{R}^n, \delta)$ 稱為n維歐式空間, δ 稱為歐式度規.
n 維歐式空間滿足的座標係叫笛卡兒 (Cartesian) 座標係或直角座標係.

閔氏空間 Minkowski Spacetime

設 $\{x\mu\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的自然座標係, 在 $\mathbb{R}^n$ 上定義度規張量場 η 為:

$$\eta := \eta_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu, \ \eta_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \nu \neq \mu \\ +1 & \mu = \nu \neq 0 \\ -1 & \mu = \nu = 0 \end{cases}$$

則 $(\mathbb{R}^n, \eta)$ 稱為n維閔式空間, η 稱為閔式度規.
n 維閔式空間滿足的座標係叫偽笛卡兒 (Pseudo-Cartesian) 座標係或洛倫茲 (Lorenzian) 座標係.

2.6 The Abstract Index Notation

應當注意, 抽象指標記號在目前的廣義相對論研究中並不常用.
抽象指標記號用**英文字母**代表矢量張量等, 不可求和, 與座標係無關. 具體指標用**希臘字母**代表對分量使用愛因斯坦求和, 於座標係的選擇有關.
將矢量記為 ν^a, 對偶矢量記為 ν_b, (k,l) 型張量記為 $T^a{}_b$.
上指標叫逆變指標 (Contravariant index), 下指標叫協變指標 (Conariant index). 矢量叫逆變矢量, 對偶矢量叫協變矢量.
$T \in \mathscr{F}_V(0,2)$ 稱為對稱的 (Symmetic), 若 $T(\nu, u) = T(u, \nu)$, $\forall\ u, \nu \in V$.
(0,2)型張量 T_{ab} 的對稱部分 $(T_{(ab)})$ 於反稱部分 $(T_{[ab]})$ 分別定義為:

$$T_{(ad)} := \frac{1}{2}(T_{ab} + T_{ba}), \ T_{[ab]} := \frac{1}{2}(T_{ab} - T_{ba})$$

$T \in \mathscr{F}_V(0,l)$ 稱為全對稱的若 $T_{a_1 \cdots a_l} = T_{(a_1 \cdots a_l)}$, T 稱為全反稱的若 $T_{a_1 \cdots a_l} = T_{[a_1 \cdots a_l]}$.
任一(0,2)型張量可以看為對稱於反稱部分的和, 但對 $(0,l)$ $(l > 2)$ 型張量不成立.

3 Intrinsic Curvature Tensors

3.1 Derivative Operator

以 $\mathscr{F}_M$ 代表流形 M 上全體 C^∞ 的 (k,l) 型張量場的集合「函數 f 可以看作 $(0,0)$ 型張量場(標量場), 故 $\mathscr{F}_M(0,0) \equiv \mathscr{F}_M$.」.映射 ∇ : $\mathscr{F}_M(k,l) \to \mathscr{F}_M(k,l+1)$ 稱為 M 上的導數算符, 若滿足:

- 線性性:

$$\nabla_a(\alpha T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l} + \beta S^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}) = \alpha\nabla_a T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l} + \beta\nabla_a S^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}$$
$$\forall\ T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}, S^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l} \in \mathscr{F}_M(k,l),\ \alpha,\beta \in \mathscr{R}$$

- 萊布尼茲律:

$$\nabla_a(T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l} S^{b'_1\cdots b'_k}{}_{c'_1\cdots c'_l}) = T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}\nabla_a S^{b'_1\cdots b'_k}{}_{c'_1\cdots c'_l} + S^{b'_1\cdots b'_k}{}_{c'_1\cdots c'_l}\nabla_a T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l}$$

$$\forall\ T^{b_1\cdots b_k}{}_{c_1\cdots c_l} \in \mathscr{F}_M(k,l),\ S^{b'_1\cdots b'_k}{}_{c'_1\cdots c'_l} \in \mathscr{F}_M(k',l')$$

- 與縮並可以交換順序: $\nabla \circ C = C \circ \nabla$ or $\nabla_a(\nu^b\omega_b) = \nu^b\nabla_a\omega_b + \omega_b\nabla_a\nu^b$.
- $\nu(f) = \nu^a\nabla_a f,\ \forall\ f \in \mathscr{F}_M,\ \nu \in \mathscr{F}_M(k,l)$
- **無撓 (Torsion free) 性**: $\nabla_a\nabla_b f = \nabla_b\nabla_a f$. 若滿足此條件則叫做無撓導數算符, 否則叫有撓導數算符.

定理: 設 $p \in M,\ \omega_b, \omega'_b \in \mathscr{F}_M(0,1)$ 滿足 $\omega_b|_p = \omega'_b|_p$, 則

$$[(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\omega'_b]_p = [(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\omega_b]_p$$

$(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)$ 把 p 點的對偶矢量 ω_b 變為 p 點的(0,2)型張量 $[(\tilde{\nabla}_a - \nabla_a)\omega_b]_p$.

定理: $\nabla_a\omega_b = \tilde{\nabla}_a\omega_b - C^c{}_{ab}\omega_b$
由無撓性得 $C^c{}_{ab} = C^c{}_{ba}$

定理: $\nabla_a\nu^b = \tilde{\nabla}_a\nu^b + C^b{}_{ac}\nu^c$
與之類似, ∇_a 作用到(1,1)型張量可表示為 $\nabla_a T^b{}_c = \tilde{\nabla}_a T^b{}_c + C^b{}_{ad}T^d{}_c - C^d{}_{ac}T^b{}_d$.

普通導數算符 Ordinary Derivative

選定導數算符 ∇_a 後得流形 M 可記為 (M, ∇_a).
設 $\{x^\mu\}$ 是 M 上的一個座標係, 座標基底是 $\{(\frac{\partial}{\partial x^\mu})^a\}$, 對偶基底是 $\{(dx^\mu)_a\}$).
在座標域 O 上定義映射 $\partial_a : \mathscr{F}_O(k,l) \to \mathscr{F}_O(k,l+1)$ 滿足: $\partial_a T^b{}_c := (dx^\mu)_a(\frac{\partial}{\partial x^\nu})^b(dx^\sigma)_c\partial_\mu T^\nu{}_\sigma$ 「以(0,1)型張量 $T^b{}_c \in \mathscr{F}_O(1,1)$ 為例」.
∂_a 是一個依賴座標係的導數算符, 稱為該座標係的普通導數算符, 可以看作 ∇_a 的特例, 而不依賴座標係的 ∇_a 叫做協變導數 (Covariant derivative) 算符.
顯然, ∂_a 具有以下性質:

- 任一座標係的 ∂_a 作用於該係的任一座標基矢和任一對偶座標基矢的結果是零:

$$\partial_a(\frac{\partial}{\partial x^\nu})^b = 0,\ \partial_a(dx^\nu)_b = 0$$

- $\partial_a\partial_b T = \partial_b\partial_a T$ 或 $\partial_{[a}\partial_{b]}T = 0$

克氏符 Christoffel Symbol

設 ∂_a 是 (M, ∇_a) 上任意座標系的普通導數算符, 則體現 ∇_a 與 ∂_a 的關係的差別的張量場 $C^c{}_{ab}$ 「把 ∂_a 記做之前的 $\tilde{\nabla}_a$ 」叫做 ∇_a 在該座標係的克氏符嗎, 記做 $\Gamma^c{}_{ab}$.
克氏符類似張量, 但在座標變換下不服從張量變換律, 故克氏符是依賴座標係的張量, 不是嚴格意義上的張量.
類似的, 設 ν^b 是矢量場, 則 $\partial_a \nu^b$ 也是座標依賴的張量, 把 $\partial_a \nu^b$ 在 ∂_a 所在的座標係展開:

$$\partial_a v^b = (dx^\mu)_a (\frac{\partial}{\partial x^\nu})^b v^\nu_{,\mu}, \ v^\nu_{,\mu} \equiv \partial_\mu v^\nu \equiv \frac{\partial v^\nu}{\partial x^\mu}$$

一般强調 $v^\nu_{,\mu}$ 不構成張量, 也可以説 $\partial_a v^b$ 是座標依賴的張量, 不滿足張量變換律. 而 $\nabla_a v^b = v^\nu_{;\mu} (dx^\mu)_a (\frac{\partial}{\partial x^\nu})^b$ 與座標係無關, 是張量.

定理: $v^\nu_{;\mu} = v^\nu_{,\mu} + \Gamma^\nu{}_{\mu\sigma} v^\sigma, \ \omega_{\nu\ ;\mu} = \omega_{\nu\ ,\mu} - \Gamma^\sigma{}_{\mu\nu} \omega_\sigma$

定理: 於縮並可以交換位置等價於

$$\nabla_a \delta^b{}_c = 0$$

其中 $\delta^b{}_c$ 是(1,1)型張量場, 其在每一點 $p \in M$ 的定義為: $\delta^b{}_c v^c = v^b, \forall\ v^c \in V_p$.

定理: $[u, v]^a = u(v(f)) - v(u(f)) = u^b \nabla_b (v^a \nabla_a f) - v^b \nabla_b (u^a \nabla_a f) = (u^b \nabla_b v^b - v^b \nabla_b u^a) \nabla_a f$, 其中 ∇_b 是任一無撓導數算符.

3.2 Parallel Transport of a Vector along a Curve

在流形 M 上選定一個導數算符 ∇_a 後, 就有矢量沿曲線平移的概念.
設 v^a 是沿曲線 $C(t)$ 的矢量場. v^a 稱為沿 $C(t)$ 平移的 「Parallelly transport along C(t)」, 若 $T^b \nabla_b v^a = 0$, 其中 $T^a \equiv (\frac{\partial}{\partial t})^a$ 是曲線的切矢.

定理: 設曲線 $C(t)$ 位於座標係 $\{x^\mu\}$ 的座標域内, 曲線的參數式是 $x^\mu(t)$. 令 $T^a \equiv (\frac{\partial}{\partial t})^a$, 則沿 $C(t)$的矢量場 v^a 滿足:

$$T^b \nabla_b v^a = (\frac{\partial}{\partial x^\mu})^a (\frac{dv^\mu}{dt} + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} T^\nu v^\sigma)$$

定理: 曲線上一點 $C(t_0)$ 及該點的一個矢量決定唯一的沿曲線平移的矢量場.
可知平移的定義 $T^b \nabla_b v^a = 0$ 等價於 $\frac{dv^\mu}{dt} + \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} T^\nu v^\sigma = 0$, 這是n個一階微分方程, 給定初始條件便可以解出.
設 $p, q \in M$, 則 V_p 與 V_q 是兩個矢量空間, 二者的元素無法比較, 但若有一個曲線 $C(t)$ 聯接 p, q, 則可以定義一個由 V_p 到 V_q 的映射: $\forall\ v^a \in V_p$ 在 $C(t)$ 上存在唯一的平移矢量場, 它在q點的值定義為 v^a 的像. 當然, 這是一個曲線依賴的映射, 但是 $C(t)$ 的存在使得還無關係的 V_p 與 V_q 發生了某種關係, 這叫聯絡 (Connection).

3.3 Derivative Operator Associated with a Metric

若 M 上還指定度規 g_{ab}, 矢量之間就可以談論内積, 故補充以下要求: 設 u^a, v^a 為沿 $C(t)$ 平移的矢量場, 則 $u^a v_a \equiv g_{ab} u^a v^b$ 在 $C(t)$ 上是常數. 設 T^a 為曲線 $C(t)$ 的切矢, 則這一要求等價於:

$$0 = T^c \nabla_c (g_{ab} u^a v^b) = g_{ab} u^a T^c \nabla_c v^b + g_{ab} v^b T^c \nabla_c u^a + u^a v^b T^c \nabla_v g_{ab} = u^a v^b T^c \nabla_c g_{ab}$$

由於對任意曲線與矢量場成立, 故 $\nabla_c g_{ab} = 0$.

定理: 流形M上選定度規場 g_{ab} 後, 存在唯一的 ∇_a 使 $\nabla_a g_{ab} = 0$. 滿足 $\nabla_a g_{ab} = 0$ 的 ∇_a 稱為與 g_{ab} 適配或相容的導數算符.

3.4 Geodesic

uhguhu