绿皮书
A Practical Guide to Quantitative Finance Interviews

LHY

2025 年 5 月 29 日

目录

Chapter 1

General Principles 一般原则

- Build a broad knowledge base
- Practice your interview skills
- Listen carefully
- Speak your mind
- Make reasonable assumptions

Chapter 2

Brain Teasers 脑筋急转弯

2.1 Problem Simplification 问题简化

2.1.1 Screwy pirates 疯狂的海盗

Question:

五个海盗有 100 个金币, 他们采用以下方式分配：最年长的海盗提出分配策略, 所有人进行投票, 如果超过 50% 的海盗赞同, 通过, 反之最年长的海盗喂鲨鱼. 然后次年长的海盗开始. 假设所有海盗都是完美理性：存活为主, 尽量获得更多金币, 如果两种策略差不多, 船上海盗越少越好.

Solution:

考虑两个海盗的简单情况, 海盗代号从 1 到 5, 1 大 5 小.

对于只有 4 和 5 的情况, 无论 4 提出什么策略都会通过, 所以 5 会避免出现此种情况.

对于 3、4 和 5, 3 知道如果 5 在这种策略下一无所获的话, 3 就会喂鲨鱼, 所以 3 给自己 99 个金币, 给 5 一个, 这会保障 3 的策略通过. 在这种情况下, 4 一无所获, 所以他要避免这种情况.

对于 2、3、4 和 5, 2 给自己 99 个, 给 4 一个, 会保证 2 的策略通过. 3 和 5 一无所获, 所以会避免这种情况.

对于 1、2、3、4 和 5, 1 给自己 98 个, 3 和 5 各一个, 1 的策略通过. 这也是实际会采取的策略.

2.1.2 Tiger and sheep 老虎和羊

Question:

一百只老虎和一只羊被放在一个只有草的神奇小岛上. 老虎可以吃草, 但它们更愿意吃羊. 假设 A. 每次只能有一只老虎吃一只羊, 而这只老虎吃完羊后自己也会变成一只羊. B. 所有的老虎都很聪明, 而且非常理性, 它们都想生存下去. 那么羊会被吃掉吗?

Solution:

两只老虎时不会, 三只老虎时会, 四只老虎时不会. 以此类推.

2.2 Logic Reasoning 逻辑推理

2.2.1 River crossing 过河问题

Question:

四个人, A、B、C 和 D 需要过河. 唯一的过河方式是通过一座旧桥, 最多只能容纳两人同时过桥. 由于天黑, 他们不能没有火炬过桥, 而他们只有一个火炬. 所以每对人只能以较慢的人的速度行走. 他们需要尽快地将所有人送到对岸. A 是最慢的, 需要 10 分钟过桥; B 需要 5 分钟; C 需要 2 分钟; D 需要 1 分钟. 那么将所有人送到对岸所需的最短时间是多少?

Solution:

关键是要认识到, 10 分钟的人应该和 5 分钟的人一起走, 这不应该发生在第一次穿越时, 否则其中一人就必须返回. 因此, C 和 D 应先过河（2 分钟）; 然后让 D 返回（分钟）; A 和 B 过河（10 分钟）; 让 C 返回（2 分钟）; C 和 D 再次过河（2 分钟）.

2.2.2 Horse race 赛马

Question:

这里有 25 匹马, 每匹马以恒定的速度跑步, 且每匹马的速度都不同于其他马. 由于跑道只有 5 条道, 每场比赛最多只能有 5 匹马. 如果你需要找到 3 匹最快的马, 需要举行的最少比赛次数是多少?

Solution:

首先举行 5 场比赛, 得出每场比赛的前三名. 第一比赛, 得出前三名. 第一的第二第三, 第二的第三, 第三进行比赛, 得出前两名.

2.3 Thinking Out of the Box 跳出去思考

2.3.1 Box packing 盒子包装

Question:

把 53 块 $1 \times 1 \times 4$ 的砖放进 $6 \times 6 \times 6$ 的盒子.

Solution:

思考 $6 \times 6 \times 6$ 分成 27 个 $2 \times 2 \times 2$ 的小盒子, 14 个涂成黑色, 13 个涂成白色, 交替涂. 一黑一白最多可以放 4 个砖, 所以最多可以放 $13 \times 4 = 52$ 个砖.

2.3.2 Calendar cubes 日历方块

Question:

两个定制骰子, 印上 0-9 数字, 来显示每个月的日期, 应该怎么安排?

Solution:

- **第一个**: 0 1 2 3 4 5
- **第二个**: 0 1 2 6 7 8

2.3.3 Door to offer 幸运门

Question:

有两扇门, 一扇幸运一扇不幸. 门前有守卫, 一个讲真话, 一个说假话. 只能问一个守卫一个是或者否的问题, 怎么知道幸运门?

Solution:

问一个守卫"对面那个守卫会告诉我这个门是幸运门吗".

2.3.4 Message delivery 信件传输

Question:

你需要使用一个盒子给同事传信, 你们各有一把锁, 锁不一样, 只有本人可以打开, 没有上锁的盒子里面的东西会被偷走. 怎么给同事信件?

Solution:

你先上锁, 给同事后同事上锁, 寄回来你开锁再给同事, 同事开锁.

2.3.5 Last ball 最后的球

Question:

包中有 20 个蓝球和 14 个红球, 不放回的拿两个球. 如果同色, 放一个蓝球, 异色, 放一个红球, 你有无限的球. 包中最后的球是什么颜色?

Solution:

- 拿出两个蓝球: 蓝球-1
- 拿出两个红球: 红球-2, 蓝球 +1
- 拿出异色: 蓝球-1

如果是 14 个红球, 红球一定成对拿走, 最后一个是蓝球. 如果是 13 个红球, 最后一个是蓝球.

2.3.6 Quant salary 薪水问题

Question:

如何在不知道其他人工资的情况下计算平均工资?

Solution:

第一个人的工资加随机数, 如何传给其他人, 最后第一个人减去随机数得到平均工资.

2.4 Application of Symmetry 对称性的使用

2.4.1 Coin piles 硬币堆

Question:

在一个黑暗的房间里面, 有 1000 枚硬币, 980 枚朝上, 20 枚朝下. 你可以无数次反转硬币, 可以把硬币分成两堆, 朝下的个数一样吗?

Solution:

随机找到 20 个分成一堆, 全部反转, 即可达成目标.

2.4.2 Mislabeled bags 错误标签的书包

Question:

有三个书包, 一个全是苹果, 一个全是橘子, 一个是苹果和橘子的混合, 但是标签全部错误. 最少拿多少个水果, 可以分辨出来.

Solution:

因为标签全部错误, 所以只需要看混合书包. 混合书包一定的纯的, 拿出一个水果, 就可以判断全部.

2.4.3 Wise men 智者

Question:

国王抓了 50 个智者, 他有一个反着的杯子, 每分钟他可以随机叫一个智者来反转或不动杯子. 当有人正确地说他已经叫了全部智者, 那么所有智者得救. 所有智者只能交流一次. 有什么策略可以使所有人得救?

Solution:

选出一个传话者, 他每次见到正的杯子会倒过来, 剩下的人第一次看见倒着的杯子要正过来. 传话者进行计数, 49 次时即可.

2.5 Series Summation 级数相加

$$\sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{N} n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} = \frac{N^3}{3} + \frac{N^2}{2} + \frac{N}{6}$$

2.5.1 Missing integers 丢失的整数

Question:

在 1-100 的范围里面, 有 98 个不一样的数字, 怎么找到两个失去的数字?

Solution:

计算 98 个数字的和和平方和, 与 1-100 的结果做差, 解方程组可得.

2.5.2 Counterfeit coins 找出假币

Question:

10 个袋子, 每个袋子有 100 个硬币, 所有硬币重 10 克, 只有一个袋子有假币, 假币重 9 或者 11 克. 怎么使用一个显示精确重量的电子秤一次称出那个袋子有假币?

Solution:

每一个袋子各自取不同数量的硬币, 一起称量. 看理论值与实际值的差, 即可猜出哪个袋子有假币.

2.5.3 Glass balls 玻璃球

Question:

你在 100 层楼上, 有两个玻璃球. 你可以往下扔球, 超过 X 层时, 球会破. 考虑最坏的情况, 为了得到 X, 最少要扔多少次球?

Solution:

假设在 N 层扔球, 球破了, 最坏要 N 次才可以得出. 球没有破, 尝试在 N+N-1 层扔球, 球破, 最坏要 N 次确定. 球没有破, 尝试 N+N-1+N-2 层, 以此类推最多层数为 N(N+1)/2, 对于 100, N=14.

2.6 The Pigeon Hole Principle 鸽巢原理

如果鸽巢数量比鸽子少, 那么在将所有鸽子放到鸽巢后, 一定有至少一个鸽巢容纳多只鸽子.

2.6.1 Matching socks 分袜子

Question:

你抽屉里面有 2 只红外子, 20 只黄袜子, 31 只蓝袜子. 你要随机在抽屉拿多少只袜子, 才可以保证有成对的袜子?

Solution:

一共 3 个颜色, 4 只就可以.

2.6.2 Have we met before 拉姆齐理论

Question:

6 个人的聚会中, 一定有三个人互相不认识或者互相认识.

Solution:

对 A 来说, 至少 3 人认识或者不认识 A. 这三个人中或者最少两个人认识, 或者都不认识.

2.6.3 Ants on a square

Question:

有 51 个蚂蚁在长度为 1 的广场上, 是否可以拿一个直径 1/7 的圆盘盖住至少三个蚂蚁?

Solution:

将广场分成 25 部分, 其中至少有一个区域最少有三只蚂蚁.

2.7 Modular Arithmetic 模运算

2.7.1 Prisoner problem 囚犯问题

Question:

明天, 一百名囚犯将获得自由的机会. 他们都被告知, 每人将被分配戴红色或蓝色的帽子. 每名囚犯都能看到其他人的帽子, 但看不到自己的帽子. 帽子的颜色是随机分配的, 一旦帽子被戴到头上, 他们就不能以任何形式与他人交流, 否则他们将被立即处决. 囚犯将被随机叫出, 叫出的囚犯将猜测自己的帽子的颜色. 每名囚犯都会公开宣布自己的帽子的颜色, 以便其他人都能听到. 如果囚犯正确猜测了自己的帽子的颜色, 他将被立即释放；否则他将被处决. 他们被给予一夜来制定策略, 以拯救尽可能多的囚犯. 他们可以采取什么样的策略, 并且可以保证拯救多少囚犯?

Solution:

最少 99 个. 第一个犯人看红色帽子个数, 奇数就是红色, 反之蓝色. 其他人根据他的回答判断自己的颜色.

2.7.2 Division by 9 9 的倍数

Question:

证明任意一个数, 若所有整数位相加是 9 的倍数, 则该数是 9 的倍数.

Solution:

$a = a_n 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + ... + a_1 10 + a_0$, 若 $a_n + ... + a_1 + a_0 = 9x$, 则 $a - 9x = a_n(10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 1) + ... + a_1(10 - 1)\%9 = 0$

2.8 Math Induction 数学归纳法

2.8.1 Chocolate bar problem 巧克力棒问题

Question:

一个巧克力有 6×8 样子, 可以把巧克力分成两份 $6 \times 3, 6 \times 5$. 多少次可以把巧克力分成 48 份?

Solution:

每次断裂都可以使巧克力数量 +1, 所以有 48-1=47 次.

2.9 Proof by Contradiction 反证法

2.9.1 Irrational number 无理数

Question:

有理数可以使用分数表示, 证明 $\sqrt{2}$ 是无理数.

Solution:

假设 $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, 其中 mn 不可约分. 可得 $2n^2 = m^2$, m 是偶数, $m = 2x, m^2 = 4x^2, n^2 = 2x^2$, 得出 n 是偶数, mn 可以约分.

Chapter 3

Probability Theory 概率论

3.1 Basic Probability Definitions and Set Operations 基本概念

Outcome (ω): The outcome of an experiment or trial

Sample space OR Probability space Ω: The set of all possible outcomes of an experiment.

3.1.1 Coin toss game 抛硬币游戏

Question:

A 有 n+1 个硬币, B 有 n 个硬币. 抛完所有硬币后, A 朝上的数量比 B 多的概率是?

Solution:

考虑 A 有 n 个硬币, 这时候有对称性. 一共三种可能, 一方多或者一样多. 可得式子 $2x + y = 1$. 考虑 A 多出的一个硬币, A 比 B 多的概率变成 $x + 0.5y = x + 0.5(1 - 2x) = 0.5$

3.1.2 Drunk passenger 喝醉的乘客

Question:

有 100 个人坐飞机, 每个人都有自己的座位. 第一个乘客喝醉了, 随机坐了一个座位. 如果其他乘客发现自己的座位被占, 会随机挑选一个座位. 第一百个

乘客正确做到自己座位的概率?

Solution:

只考虑第一个座位和第一百个座位, 只有两种可能. 第一个座位在第一百个之前坐, 或在之后坐. 两个事件概率相同. 对于第一种情况, 会成功做到自己座位上面, 概率是 0.5.

3.1.3 N points on a circle 圆上的点

Question:

N 个点随机分布在圆上, 它们都在一个半圆的概率是多少?

Solution:

若选出任意一点为起始点, 则所有点都在半圆的概率是 $\frac{1}{2}^{N-1}$, 因为所有点等价, 所以最终答案是 $N \times \frac{1}{2}^{N-1}$.

3.2 Combinatorial Analysis 组合分析

Permutation: A rearrangement of objects into distinct sequence.

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_r!}$$

Combination: An unordered collection of objects.

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

Binomial theorem: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

3.2.1 Hopping rabbit 跳跃的兔子

Question:

兔子在 n 层台阶上, 可以一次跳下一层或者两层. 有多少种方式跳到地面?

Solution:

跳下一层时, 问题变成 n-1 层, 跳下两层时, 问题变成 n-2 层. 所以可以写出 $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$. 根据 n=1 和 n=2 的情况, 可以得出解是斐波那契数列.

3.2.2 Screwy pirates 疯狂的海盗

Question:

11 个海盗把宝藏放在一个保险箱里面, 保险箱有很多锁, 每个人有很多钥匙. 只有在最少 6 个人拥有相同锁的钥匙时, 保险箱才可以打开. 为了保证随机挑选的 6 个海盗都可以打开箱子, 需要多少锁, 每个海盗要带多少钥匙?

Solution:

需要 $\binom{11}{6} = 462$ 把锁, 那么一共 462×6 把钥匙, 每个人要带 $462 \times 6/11 = 252$ 把钥匙.

3.2.3 Derangement 完全错位排列

Question:

在排列中没有任何一个元素保持在原来的位置上的概率.

Solution:

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

$$D_n = \left\lfloor \frac{n!}{e} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

3.2.4 Birthday problem 生日问题

Question:

一年有 365 天, 为了让两个同学有相同生日的概率大于 0.5, 班里要有多少同学.

Solution:

可以转换为班里没有同学有相同生日的概率小于 0.5. 即 $\frac{365 \times 364 \times \cdots \times (365-n+1)}{365^n} < 1/2$. n=23.