

Liste der noch zu erledigenden Punkte

wie schreibt man Achsen-ausgerichtet? 7



WESTFÄLISCHE
WILHELMS-UNIVERSITÄT
MÜNSTER

ENTZERRUNG VON KEGELOBERFLÄCHEN AUS EINER EINKAMERAANSICHT BASIEREND AUF PROJEKTIVER GEOMETRIE

BACHELORARBEIT
zur Erlangung des akademischen Grades
BACHELOR OF SCIENCE

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Fachbereich Mathematik und Informatik
Institut für Informatik

Betreuung:
Dimitri Berh

Erstgutachten:
Prof. Dr. Xiaoyi Jiang

Zweitgutachten:
Prof. Dr. Klaus Hinrichs

Eingereicht von:
Lars Haalck

Münster, August 2016

Zusammenfassung

bla bla zusammenfassung

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theoretische Grundlagen	3
2.1	Kegel	3
2.2	Ellipsen	7
2.2.1	allgemein	7
2.2.2	Abstand: Punkt zu Ellipse	11
2.2.3	Schnittpunkt: Liniensegment und Ellipse	11
2.3	Parameterschätzung	12
2.4	Kamerakalibrierung	12
2.5	Deformable Templates	12
3	Methodik	13
3.1	Kalibrierungsmuster	13
4	Implementierung	15
5	Analyse	17
6	Fazit und Ausblick	19
	Abbildungsverzeichnis	21
	Tabellenverzeichnis	23

1 Einleitung

einleitung

2 Theoretische Grundlagen

Rechtshändiges Koordinatensystem...

2.1 Kegel

2.1.1 Definition (Kegel)

kegel S bezeichnet die Seitenhöhe und ist definiert durch $S = \sqrt{H^2 + R^2}$ $S \geq R$
Dreiecksungleichung

In der weiteren Arbeit betrachten wir nur gerade Kreiskegel

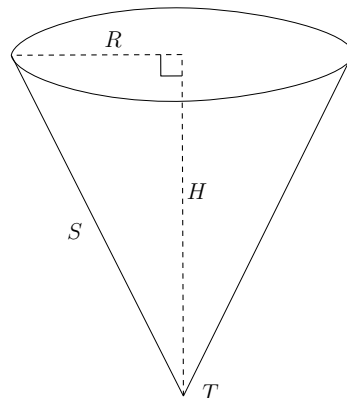


Abbildung 2.1: Gerader Kreiskegel

Ein Kegel mit Spitze $T(0, 0, 0)$, Radius R und Höhe H kann parametrisch beschrieben werden als:

$$\begin{aligned}x &= \frac{u}{h} R \cos \theta \\y &= u \\z &= \frac{u}{h} R \sin \theta\end{aligned}\tag{2.1}$$

mit $u \in [0, H]$ und $\theta \in [0, 2\pi)$

2.1.2 Definition (Kegelstumpf und Ergänzungskegel)

Ein Kegelstumpf entsteht als Schnitt eines geraden Kreiskegels mit einer zur Grundfläche parallelen Ebene (siehe Abbildung 2.2). Das Stück von Grundfläche zur Schnittflä-

che nennen wir Kegelstumpf. Die Differenz zum eigentlichen Kegel wird als Ergänzungskegel bezeichnet.

H, R, S bleiben die Angaben des gesamten Kegels. Hinzu kommen h, r, s als Angaben des Ergänzungskegels. Die Höhe, sowie die Seitenhöhe des Kegelstumpfs werden durch die Differenzen $\Delta S = S - s$, $\Delta H = H - h$ charakterisiert (siehe Abbildung 2.3).

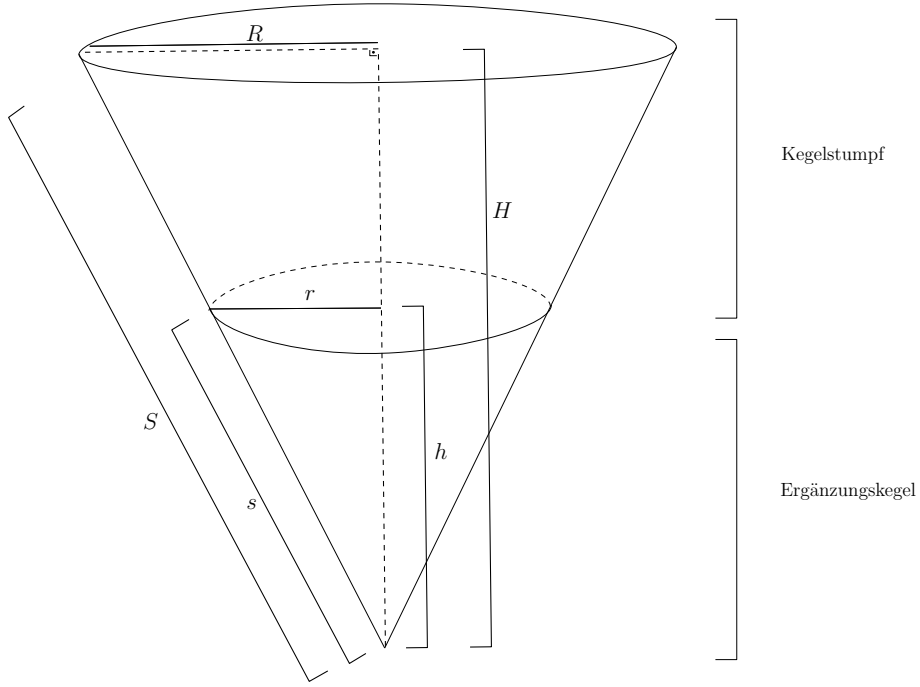


Abbildung 2.2: Kegelstumpf und Ergänzungskegel

Analog zum Kreiskegel definieren wir einen Kegelstumpf durch folgende Parametrisierung:

$$\begin{aligned} x &= \left(r + \frac{u}{\Delta H}(R - r)\right) \cos \theta \\ y &= u \\ z &= \left(r + \frac{u}{\Delta H}(R - r)\right) \sin \theta \end{aligned} \quad (2.2)$$

mit $u \in [0, \Delta H]$ und $\theta \in [0, 2\pi)$

Die Mantelfläche des Kegelstumpfes aus Abbildung 2.4 kann dann parametrisch beschrieben werden als:

$$\begin{aligned} x &= -\left(s + \frac{u}{\Delta H}(S - s)\right) \sin \phi \\ y &= \left(s + \frac{u}{\Delta H}(S - s)\right) \cos \phi \end{aligned} \quad (2.3)$$

mit $u \in [0, \Delta H]$ und $\phi \in [0, \alpha] \subseteq [0, 2\pi]$ mit $\alpha S = 2\pi R \implies \alpha = 2\pi \frac{R}{S}$

Ein Punkt auf der Oberfläche des Kegelstumpfs kann eindeutig einem Punkt auf der Mantelfläche (und umgekehrt) zugeordnet werden. Dazu konstruieren wir folgende Abbildung

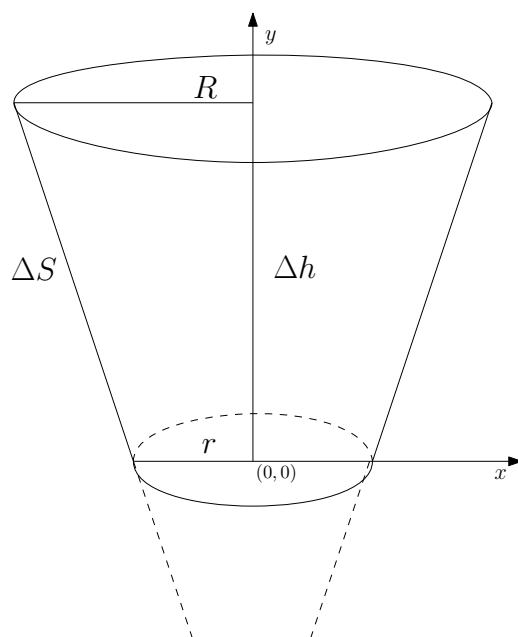


Abbildung 2.3: Kegelstumpf

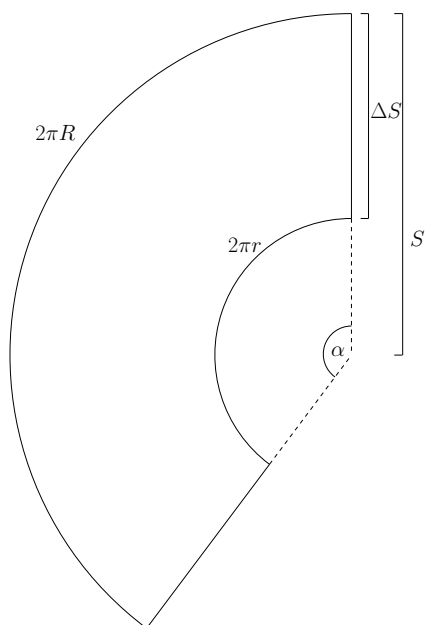


Abbildung 2.4: Kegelmantelfläche

und ihr Inverses:

Seien ein Punkt $C(x, y, z)$ auf der Oberfläche des Kegelstumpfs gegeben. Wir wissen aus

der parametrischen Form 2.2, dass C die Form

$$C(x, y, z) = \left(r + \frac{u}{\Delta H}(R - r)\right) \cos \theta, u, \left(r + \frac{u}{\Delta H}(R - r)\right) \sin \theta$$

für ein $u \in [0, \Delta H]$ und $\theta \in [0, 2\pi)$ besitzt.

Aus der y -Koordinate kann man als die Höhe ablesen und somit den Radius in der Mantelfläche als lineare Interpolation zwischen s und S bestimmen (siehe Abbildung 2.5). Wir definieren uns hierfür eine Hilfsfunktion

$$\Sigma(y) := s + \frac{y}{\Delta H}(S - s) \quad (2.4)$$

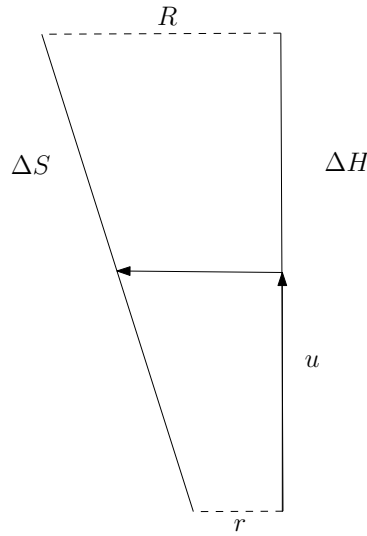


Abbildung 2.5: Abbildung der Kegelstumpfhöhe auf die Seitenhöhe

Da $R, r, \Delta H$ und nun auch die Höhe bekannt sind, kann man den Winkel θ im Kegelstumpf einfach ausrechnen. Anschließend muss dieser noch mit $\frac{R}{S}$ multipliziert werden um ihn auf $[0, \alpha]$ zu skalieren (siehe 2.3). Auch hierfür definieren wir eine Hilfsfunktion:

$$\Phi(x, y, z) := \frac{R}{S} \operatorname{atan2} \left(\frac{z}{r + \frac{y}{\Delta H}(R - r)}, \frac{x}{r + \frac{y}{\Delta H}(R - r)} \right)$$

, wobei wir $\operatorname{atan2}$ benutzen um den Winkel im richtigen Quadranten, also in $[0, 2\pi)$, bestimmen zu können.

Mit diesen beiden Hilfsfunktionen und 2.3 ergibt sich insgesamt:

$$\begin{aligned} \Psi: [r, R] \times [0, \Delta H] \times [r, R] &\rightarrow [s, S] \times [s, S] \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} -\Sigma(y) \sin \Phi(x, y, z) \\ \Sigma(y) \cos \Phi(x, y, z) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Analog lässt die sich Umkehrabbildung konstruieren:

Sei ein Punkt $L(x, y)$ auf der Mantelfläche des Kegelstumpfs gegeben. Aus der parametrischen Form 2.3 ergibt sich

$$L(x, y) = \left(-\left(s + \frac{u}{\Delta H}(S - s)\right) \sin \phi, \left(s + \frac{u}{\Delta H}(S - s)\right) \cos \phi\right)$$

für ein passendes $u \in [0, \Delta H]$ und $\phi \in [0, \alpha] \subseteq [0, 2\pi]$ Da $L(x, y)$ in Polarkoordinaten gegeben ist, lässt sich der Radius durch $\sqrt{x^2 + y^2}$ bestimmen. Wir können den Winkel ϕ mit inverser Skalierung also analog durch folgende Hilfsfunktion bestimmen:

$$\Theta(x, y) := \frac{S}{R} \operatorname{atan2} \left(\frac{x}{-\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

Die Höhe im Kegel und somit der Radius lässt sich nun gewissermaßen als Umkehrabbildung zu 2.4 bestimmen:

$$H(x, y) := \frac{(\sqrt{x^2 + y^2}) - s}{S - s} \Delta H$$

Insgesamt ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Psi^{-1}: [s, S] \times [s, S] &\rightarrow [r, R] \times [0, \Delta H] \times [r, R] \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \left(r + \frac{H(x, y)}{\Delta H}(R - r)\right) \cos(\Theta(x, y)) \\ H(x, y) \\ \left(r + \frac{H(x, y)}{\Delta H}(R - r)\right) \sin(\Theta(x, y)) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.2 Ellipsen

2.2.1 allgemein

Ellipsen sind deshalb für diese Arbeit interessant, als dass sie als perspektivische Verzerrung von Kreisen entstehen. Nimmt man das Kalibrierungsmuster nicht perfekt im Lot auf, entstehen zwangsläufig Ellipsen.

wie schreibt man Achsen-ausgerichtet?

2.2.1 Definition (Ellipse)

Ellipsen entstehen durch Kegelschnitt und so bla bla. im weiteren bla bla meinen wir mit Hauptachsen immer die Semihauptachsen

In ihrer einfachsten Form liegt die Ellipse im Zentrum des Koordinatensystems und ihre Haupt- und Nebenachse a und b sind Achsen-ausgerichtet, das heißt ihre Hauptachse liegt auf der X-Achse und ihre Nebenachse auf der Y-Achse. Sie kann dann in der impliziten Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.7)$$

beschrieben werden.

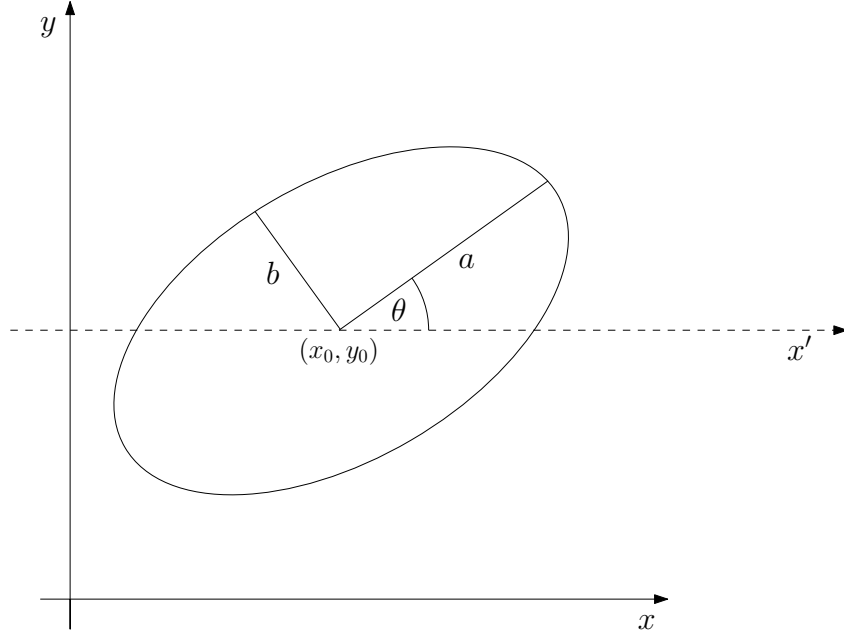


Abbildung 2.6: Ellipse mit Zentrum (x_0, y_0) , Hauptachse a , Nebenachse b , sowie Drehwinkel θ

Befindet sich die Ellipse nicht im Ursprung so muss eine Verschiebung beziehungsweise bei einer Rotation ein Drehwinkel (siehe Abbildung 2.6) ergänzt werden.

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (2.8)$$

$$\frac{((x - x_0) \cos \theta + (y - y_0) \sin \theta)^2}{a^2} + \frac{((x - x_0) \sin \theta - (y - y_0) \cos \theta)^2}{b^2} = 1 \quad (2.9)$$

mit Ellipsenzentrum $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, Hauptachsen $a, b \in \mathbb{R}^+$, sowie Drehwinkel $\theta \in [0, 2\pi)$ oder parametrisiert

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + a \cos \phi \cos \theta - b \sin \phi \sin \theta \\ y_0 + a \cos \phi \sin \theta + b \sin \phi \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

mit $\phi \in [0, 2\pi)$, x_0, y_0, a, b, θ wie oben.

In ihrer allgemeinsten Form lässt sich eine Ellipse durch ein implizites Polynom zweiten Grades charakterisieren

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \quad \text{mit} \quad c^2 - 4ab < 0 \quad (2.11)$$

mit $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ oder

Die beiden Formen 2.9 und 2.11 sind äquivalent, falls die Ellipse nicht degeneriert ist (ohne Beweis). Da wir die Umformung von 2.9 nach 2.11 später brauchen, wird sie hier einmal exemplarisch vorgeführt.

Zunächst einmal fällt auf, dass der gemischte Term cxy genau dann null ist wenn, die Ellipse nicht rotiert wurde. Im ersten Schritt versuchen wir also die Rotation der Ellipse rückgängig zu machen, um den Rotationswinkel bestimmen zu können..

Die Gleichung 2.11 kann umgeformt werden zu:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}}_{=:u^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{pmatrix}}_{=:M} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{=:u} + \underbrace{\begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}}_{=:u} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{=:u} + f = 0$$

$$\Leftrightarrow u^T M u + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} u + f = 0$$

Der gemischte Term wird alleine durch $M = \begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{pmatrix}$ bestimmt. Da die Matrix M symmetrisch ist, ist sie orthogonal diagonalisierbar. Des Weiteren hat M zwei von null verschiedene Eigenwerte, denn

$$\det M = ab - \frac{c^2}{4}$$

ist nur dann gleich null, wenn $c^2 - 4ab = 0$, was ein Widerspruch zur Annahme in 2.11 ist. M ist somit eine von null verschiedene Determinante und somit vollen Rang, hat also zwei von null verschiedene Eigenwerte. Insbesondere gibt es also zwei Eigenvektoren von M , die zueinander orthogonal sind.

Es gilt $M = S^T D S$, wobei $S \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ eine orthogonale Matrix mit den normierten Eigenvektoren als Zeilen und $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ eine Diagonalmatrix mit den beiden Eigenwerten von M auf der Diagonalen ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $\lambda_1 \leq \lambda_2$, andernfalls vertausche die Eigenvektoren in S .

Sei nun $v := Su$. So gilt:

$$u^T (S^T D S) u + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \underbrace{(S^T S)}_{=: \mathbb{1}} u + f = 0$$

$$\Leftrightarrow (Su)^T D (Su) + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} S^T (Su) + f = 0 \tag{2.12}$$

$$\Leftrightarrow v^T D v + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} S^T v + f = 0$$

Man kann leicht nachrechnen, dass der gemischte Teil somit eliminiert wurde. Durch Anwenden der Transformation S wurde u also in das Koordinatensystem, in dem die Ellipse Achsen-ausgerichtet ist, transformiert.

Eine Rotationsmatrix mit Rotationswinkel θ ist definiert durch:

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

Es gilt offenbar $S = R$ für ein geeignetes θ , da die Eigenvektoren normiert und orthogonal zueinander sind. θ kann also einfach ausgerechnet werden, denn es gilt:

$$\theta = \text{atan2}(\sin \theta, \cos \theta) = \text{atan2}(S_{2,1}, S_{1,1})$$

Multipliziert man nun 2.12 aus ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \underbrace{(d \ e) S^T}_{=:(d', e')} v + f = 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + d' v_1 + e' v_2 + f = 0 \\ \Leftrightarrow & (\lambda_1 v_1^2 + d' v_1) + (\lambda_2 v_2^2 + e' v_2) + f = 0 \\ \Leftrightarrow & (\lambda_1 v_1^2 + d' v_1) + \left(\frac{d'^2}{4\lambda_1} - \frac{d'^2}{4\lambda_1} \right) + (\lambda_2 v_2^2 + e' v_2) + \left(\frac{e'^2}{4\lambda_2} - \frac{e'^2}{4\lambda_2} \right) + f = 0 \quad (2.14) \\ \Leftrightarrow & \left[\lambda_1 \left(v_1^2 + \frac{2d'}{2\lambda_1} v_1 + \frac{d'^2}{4\lambda_1^2} \right) - \frac{d'^2}{4\lambda_1} \right] + \left[\lambda_2 \left(v_2^2 + \frac{2e'}{2\lambda_2} v_2 + \frac{e'^2}{4\lambda_2^2} \right) - \frac{e'^2}{4\lambda_2} \right] + f = 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda_1 \underbrace{\left(v_1 + \frac{d'}{2\lambda_1} v_1 \right)^2}_{=-x'_0} + \lambda_2 \underbrace{\left(v_2 + \frac{e'}{2\lambda_2} v_2 \right)^2}_{=-y'_0} - \underbrace{\left(\frac{d'^2}{4\lambda_1} + \frac{e'^2}{4\lambda_2} - f \right)}_{=: \sigma} = 0 \end{aligned}$$

, da $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$.

Das Zentrum der transformierten Ellipse kann nun aus 2.14 einfach abgelesen werden. Um das Zentrum der eigentlichen Ellipse zu bestimmen, muss mit der inversen Rotation S^T multipliziert werden:

$$(x_0, y_0)^T = S^T (x'_0, y'_0)^T$$

Obige Gleichung lässt sich anschließend weiter vereinfachen:

$$\begin{aligned} & \lambda_1 (v_1 - x'_0)^2 + \lambda_2 (v_2 - y'_0)^2 = \sigma \\ \Leftrightarrow & \frac{\lambda_1}{\sigma} (v_1 - x'_0)^2 + \frac{\lambda_2}{\sigma} (v_2 - y'_0)^2 = 1 \end{aligned} \quad (2.15)$$

wobei $\sigma \neq 0$, wenn die Ellipse nicht zum Punkt entartet ist [Law72]. Vergleicht man nun 2.15 mit 2.8 so sieht man das

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda_1}{\sigma} = \frac{1}{a^2} \quad \text{und} \quad \frac{\lambda_2}{\sigma} = \frac{1}{b^2} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{\frac{\sigma}{\lambda_1}} = a \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{\sigma}{\lambda_2}} = b \end{aligned} \quad (2.16)$$

Es gilt wie erwartet $a \geq b$, da $\lambda_1 \leq \lambda_2$

2.2.2 Abstand: Punkt zu Ellipse

Das hier beschriebene Verfahren zur Bestimmung der kürzesten euklidischen Distanz eines Punktes zu einer Ellipse stammt aus der Arbeit von David Eberly [Ebe13]. Wir betrachten nur Ellipsen im Ursprung, die Achsen-ausgerichtet sind und darüber hinaus nur Punkte im ersten Quadranten. Ansonsten wird die Ellipse in den Ursprung verschoben und um ihren entgegengesetzten Drehwinkel rotiert. Da die Ellipse dann bezüglich der X - und Y -Achse symmetrisch ist, kann der Punkt einfach durch Spiegelung in den richtigen Quadranten transformiert werden. Der Abstand ändert sich dadurch nicht.

2.2.3 Schnittpunkt: Liniensegment und Ellipse

ellipse distanz mit transformationen die nötig sind
schnittpunkt linie ellipse

2.3 Parameterschätzung

Hough? Parameterschätzung Ransac. anzahl iterationen

2.4 Kamerakalibrierung

kamerakalibrierung

projektionsmatrix (homogene Koordinaten???) SVD, QR, LSQ?

Kantendetektion (canny sobel)

2.5 Deformable Templates

deformable templates

evtl noch am ende delaunay

3 Methodik

3.1 Kalibrierungsmuster

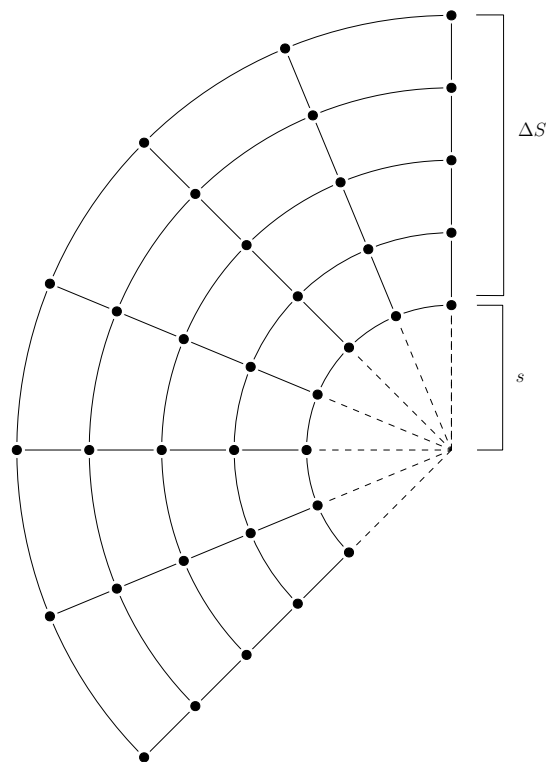


Abbildung 3.1: Kalibrierungsmuster mit $n = xxx$, $m = xxx$

4 Implementierung

implementierung

5 Analyse

analyse?

datenerhebung oder so was? laufzeit?

6 Fazit und Ausblick

fazit

Abbildungsverzeichnis

2.1	Gerader Kreiskegel	3
2.2	Kegelstumpf und Ergänzungskegel	4
2.3	Kegelstumpf	5
2.4	Kegelmantelfläche	5
2.5	Abbildung der Kegelstumpfhöhe auf die Seitenhöhe	6
2.6	Ellipse mit Zentrum (x_0, y_0) , Hauptachse a , Nebenachse b , sowie Drehwinkel θ	8
3.1	Kalibrierungsmuster mit $n = xxx, m = xxx$	13

Tabellenverzeichnis

Literatur

- [Ebe13] David Eberly. „Distance from a Point to an Ellipse, an Ellipsoid, or a Hyperellipsoid“. In: (2013) (siehe S. 11).
- [Law72] J D Lawrence. *A Catalog of Special Plane Curves*. Dover Publications, 1972, S. 62–63 (siehe S. 10).

Plagiatserklärung

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit über

Entzerrung von Kegeloberflächen aus einer Einkameraansicht basierend auf projektiver Geometrie

selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken – auch elektronischen Medien – dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

Lars Haalck, Münster, 29. August 2016

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in eine Datenbank einverstanden.

Lars Haalck, Münster, 29. August 2016