

# Liste der noch zu erledigenden Punkte

wie schreibt man Achsen-ausgerichtet? . . . . .	7
wie viele punkte braucht man zum definieren von Ellipsen . . . . .	7
den zweiten teil überarbeiten hier . . . . .	12
eigentlich ziemlich überflüssig . . . . .	13
Modell wortwiederholungen . . . . .	14





# ENTZERRUNG VON KEGELOBERFLÄCHEN AUS EINER EINKAMERAANSICHT BASIEREND AUF PROJEKTIVER GEOMETRIE

BACHELORARBEIT  
zur Erlangung des akademischen Grades  
BACHELOR OF SCIENCE

Westfälische Wilhelms-Universität Münster  
Fachbereich Mathematik und Informatik  
Institut für Informatik

Betreuung:  
*Dimitri Berh*

Erstgutachten:  
*Prof. Dr. Xiaoyi Jiang*

Zweitgutachten:  
*Prof. Dr. Klaus Hinrichs*

Eingereicht von:  
*Lars Haalck*

Münster, August 2016



## **Zusammenfassung**

bla bla zusammenfassung



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1	Kegel . . . . .	3
2.2	Ellipsen . . . . .	7
2.2.1	allgemein . . . . .	7
2.2.2	Abstand: Punkt zu Ellipse . . . . .	11
2.2.3	Schnittpunkt: Liniensegment und Ellipse . . . . .	13
2.3	RANSAC . . . . .	14
2.4	Kamerakalibrierung . . . . .	14
2.5	Deformable Templates . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Methodik</b>	<b>15</b>
3.1	Kalibrierungsmuster . . . . .	15
<b>4</b>	<b>Implementierung</b>	<b>17</b>
<b>5</b>	<b>Analyse</b>	<b>19</b>
<b>6</b>	<b>Fazit und Ausblick</b>	<b>21</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>23</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>25</b>





# 1 Einleitung

einleitung



## 2 Theoretische Grundlagen

Rechtshändiges Koordinatensystem...

### 2.1 Kegel

#### 2.1.1 Definition (Kegel)

kegel  $S$  bezeichnet die Seitenhöhe und ist definiert durch  $S = \sqrt{H^2 + R^2}$   $S \geq R$   
Dreiecksungleichung

In der weiteren Arbeit betrachten wir nur gerade Kreiskegel

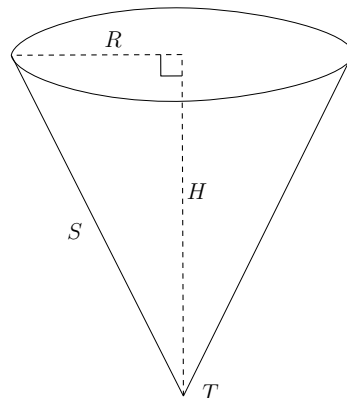


Abbildung 2.1: Gerader Kreiskegel

Ein Kegel mit Spitze  $T(0, 0, 0)$ , Radius  $R$  und Höhe  $H$  kann parametrisch beschrieben werden als:

$$\begin{aligned}x &= \frac{u}{h} R \cos \theta \\y &= u \\z &= \frac{u}{h} R \sin \theta\end{aligned}\tag{2.1}$$

mit  $u \in [0, H]$  und  $\theta \in [0, 2\pi)$

#### 2.1.2 Definition (Kegelstumpf und Ergänzungskegel)

Ein Kegelstumpf entsteht als Schnitt eines geraden Kreiskegels mit einer zur Grundfläche parallelen Ebene (siehe Abbildung 2.2). Das Stück von Grundfläche zur Schnittflä-

che nennen wir Kegelstumpf. Die Differenz zum eigentlichen Kegel wird als Ergänzungskegel bezeichnet.

$H, R, S$  bleiben die Angaben des gesamten Kegels. Hinzu kommen  $h, r, s$  als Angaben des Ergänzungskegels. Die Höhe, sowie die Seitenhöhe des Kegelstumpfs werden durch die Differenzen  $\Delta S = S - s$ ,  $\Delta H = H - h$  charakterisiert (siehe Abbildung 2.3).

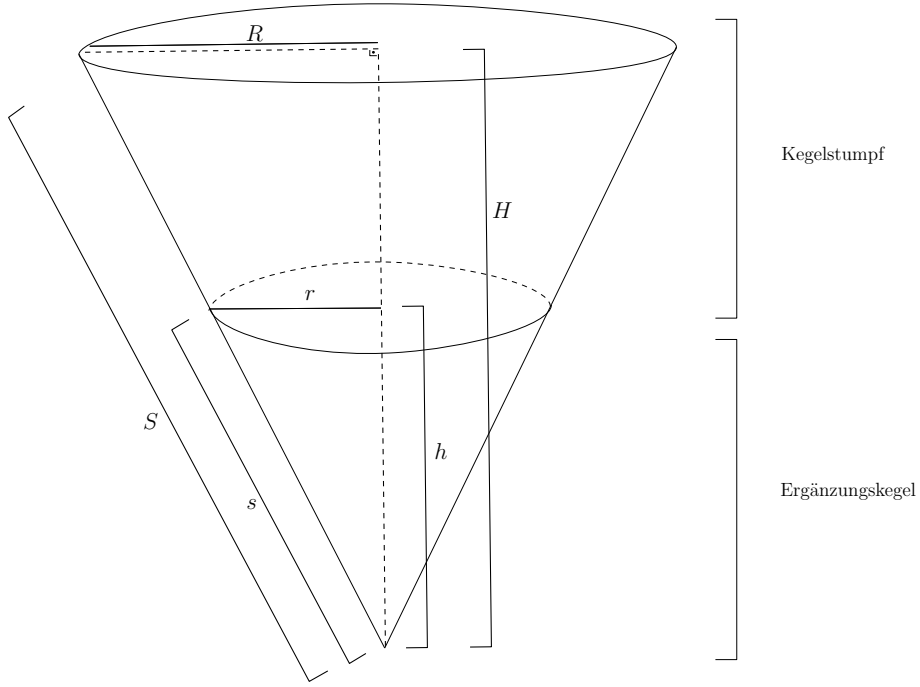


Abbildung 2.2: Kegelstumpf und Ergänzungskegel

Analog zum Kreiskegel definieren wir einen Kegelstumpf durch folgende Parametrisierung:

$$\begin{aligned} x &= \left(r + \frac{u}{\Delta H}(R - r)\right) \cos \theta \\ y &= u \\ z &= \left(r + \frac{u}{\Delta H}(R - r)\right) \sin \theta \end{aligned} \quad (2.2)$$

mit  $u \in [0, \Delta H]$  und  $\theta \in [0, 2\pi)$

Die Mantelfläche des Kegelstumpfes aus Abbildung 2.4 kann dann parametrisch beschrieben werden als:

$$\begin{aligned} x &= -\left(s + \frac{u}{\Delta H}(S - s)\right) \sin \phi \\ y &= \left(s + \frac{u}{\Delta H}(S - s)\right) \cos \phi \end{aligned} \quad (2.3)$$

mit  $u \in [0, \Delta H]$  und  $\phi \in [0, \alpha] \subseteq [0, 2\pi]$  mit  $\alpha S = 2\pi R \implies \alpha = 2\pi \frac{R}{S}$

Ein Punkt auf der Oberfläche des Kegelstumpfs kann eindeutig einem Punkt auf der Mantelfläche (und umgekehrt) zugeordnet werden. Dazu konstruieren wir folgende Abbildung

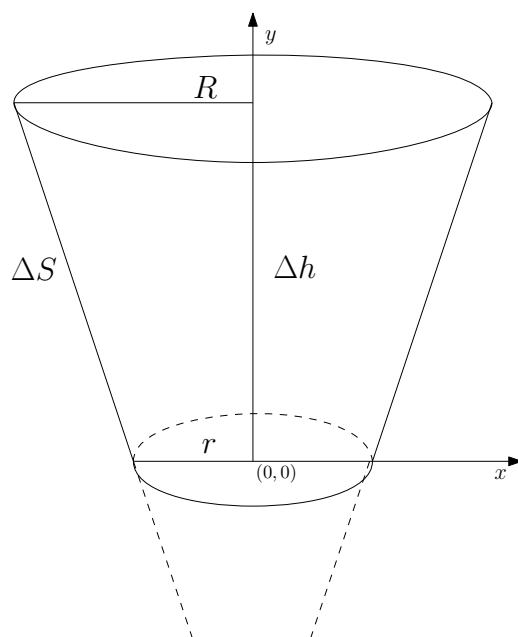


Abbildung 2.3: Kegelstumpf

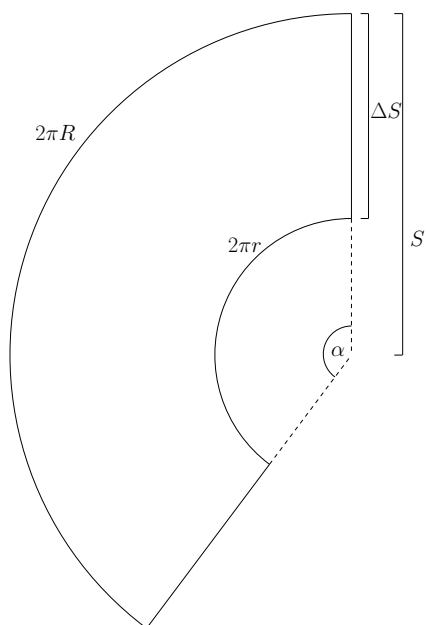


Abbildung 2.4: Kegelmantelfläche

und ihr Inverses:

Seien ein Punkt  $C(x, y, z)$  auf der Oberfläche des Kegelstumpfs gegeben. Wir wissen aus

der parametrischen Form 2.2, dass  $C$  die Form

$$C(x, y, z) = \left(r + \frac{u}{\Delta H}(R - r)\right) \cos \theta, u, \left(r + \frac{u}{\Delta H}(R - r)\right) \sin \theta$$

für ein  $u \in [0, \Delta H]$  und  $\theta \in [0, 2\pi)$  besitzt.

Aus der  $y$ -Koordinate kann man als die Höhe ablesen und somit den Radius in der Mantelfläche als lineare Interpolation zwischen  $s$  und  $S$  bestimmen (siehe Abbildung 2.5). Wir definieren uns hierfür eine Hilfsfunktion

$$\Sigma(y) := s + \frac{y}{\Delta H}(S - s) \quad (2.4)$$

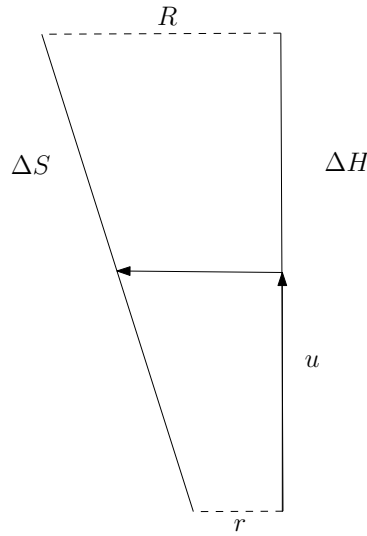


Abbildung 2.5: Abbildung der Kegelstumpfhöhe auf die Seitenhöhe

Da  $R, r, \Delta H$  und nun auch die Höhe bekannt sind, kann man den Winkel  $\theta$  im Kegelstumpf einfach ausrechnen. Anschließend muss dieser noch mit  $\frac{R}{S}$  multipliziert werden um ihn auf  $[0, \alpha]$  zu skalieren (siehe 2.3). Auch hierfür definieren wir eine Hilfsfunktion:

$$\Phi(x, y, z) := \frac{R}{S} \operatorname{atan2} \left( \frac{z}{r + \frac{y}{\Delta H}(R - r)}, \frac{x}{r + \frac{y}{\Delta H}(R - r)} \right)$$

, wobei wir  $\operatorname{atan2}$  benutzen um den Winkel im richtigen Quadranten, also in  $[0, 2\pi)$ , bestimmen zu können.

Mit diesen beiden Hilfsfunktionen und 2.3 ergibt sich insgesamt:

$$\begin{aligned} \Psi: [r, R] \times [0, \Delta H] \times [r, R] &\rightarrow [s, S] \times [s, S] \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} -\Sigma(y) \sin \Phi(x, y, z) \\ \Sigma(y) \cos \Phi(x, y, z) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Analog lässt die sich Umkehrabbildung konstruieren:

Sei ein Punkt  $L(x, y)$  auf der Mantelfläche des Kegelstumpfs gegeben. Aus der parametrischen Form 2.3 ergibt sich

$$L(x, y) = \left(-s + \frac{u}{\Delta H}(S - s)\right) \sin\phi, \left(s + \frac{u}{\Delta H}(S - s)\right) \cos\phi$$

für ein passendes  $u \in [0, \Delta H]$  und  $\phi \in [0, \alpha] \subseteq [0, 2\pi]$  Da  $L(x, y)$  in Polarkoordinaten gegeben ist, lässt sich der Radius durch  $\sqrt{x^2 + y^2}$  bestimmen. Wir können den Winkel  $\phi$  mit inverser Skalierung also analog durch folgende Hilfsfunktion bestimmen:

$$\Theta(x, y) := \frac{S}{R} \operatorname{atan2} \left( \frac{x}{-\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

Die Höhe im Kegel und somit der Radius lässt sich nun gewissermaßen als Umkehrabbildung zu 2.4 bestimmen:

$$H(x, y) := \frac{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) - s}{S - s} \Delta H$$

Insgesamt ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Psi^{-1}: [s, S] \times [s, S] &\rightarrow [r, R] \times [0, \Delta H] \times [r, R] \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \left(r + \frac{H(x, y)}{\Delta H}(R - r)\right) \cos(\Theta(x, y)) \\ H(x, y) \\ \left(r + \frac{H(x, y)}{\Delta H}(R - r)\right) \sin(\Theta(x, y)) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.6)$$

## 2.2 Ellipsen

### 2.2.1 allgemein

Ellipsen sind deshalb für diese Arbeit interessant, als dass sie als perspektivische Verzerrung von Kreisen entstehen. Nimmt man das Kalibrierungsmuster nicht perfekt im Lot auf, entstehen zwangsläufig Ellipsen.

#### 2.2.1 Definition (Ellipse)

Ellipsen entstehen durch Kegelschnitt und so bla bla. im weiteren bla bla meinen wir mit Hauptachsen immer die Semihauptachsen

In ihrer einfachsten Form liegt die Ellipse im Zentrum des Koordinatensystems und ihre Haupt- und Nebenachse  $a$  und  $b$  sind Achsen- ausgerichtet, das heißt ihre Hauptachse liegt auf der X-Achse und ihre Nebenachse auf der Y-Achse. Sie kann dann in der impliziten Form

wie schreibt man Achsen- ausgerichtet?

wie viele punkte braucht man zum definieren von Ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.7)$$

beschrieben werden.

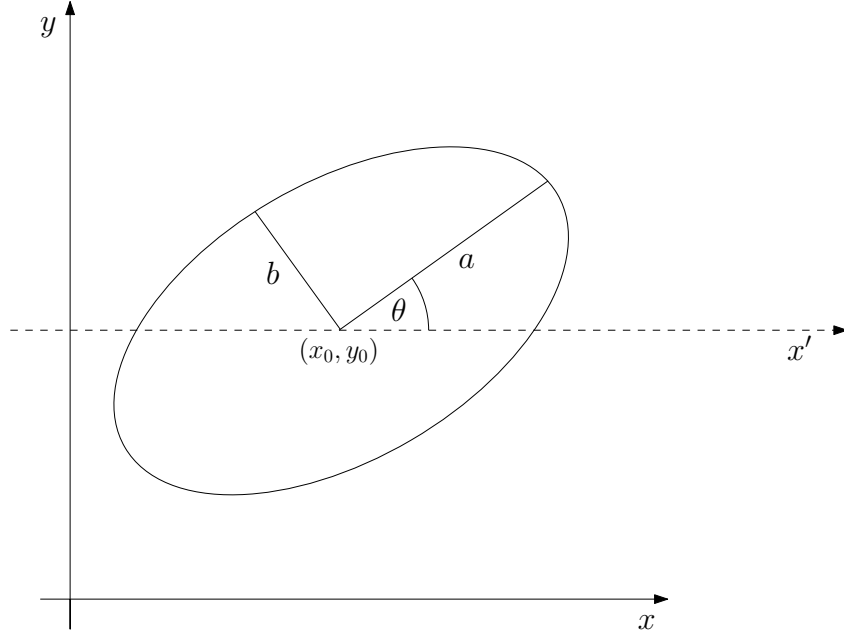


Abbildung 2.6: Ellipse mit Zentrum  $(x_0, y_0)$ , Hauptachse  $a$ , Nebenachse  $b$ , sowie Drehwinkel  $\theta$

Befindet sich die Ellipse nicht im Ursprung so muss eine Verschiebung beziehungsweise bei einer Rotation ein Drehwinkel (siehe Abbildung 2.6) ergänzt werden.

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (2.8)$$

$$\frac{((x - x_0) \cos \theta + (y - y_0) \sin \theta)^2}{a^2} + \frac{((x - x_0) \sin \theta - (y - y_0) \cos \theta)^2}{b^2} = 1 \quad (2.9)$$

mit Ellipsenzentrum  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ , Hauptachsen  $a, b \in \mathbb{R}^+$ , sowie Drehwinkel  $\theta \in [0, 2\pi)$  oder parametrisiert

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + a \cos \phi \cos \theta - b \sin \phi \sin \theta \\ y_0 + a \cos \phi \sin \theta + b \sin \phi \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

mit  $\phi \in [0, 2\pi)$ ,  $x_0, y_0, a, b, \theta$  wie oben.

In ihrer allgemeinsten Form lässt sich eine Ellipse durch ein implizites Polynom zweiten Grades charakterisieren

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \quad \text{mit} \quad c^2 - 4ab < 0 \quad (2.11)$$



mit  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ . Eine Ellipse lässt sich also durch sechs Punkte eindeutig beschreiben (fünf, wenn man  $f$  auf eins skaliert).

Die beiden Formen 2.9 und 2.11 sind äquivalent, falls die Ellipse nicht degeneriert ist (ohne Beweis). Da wir die Umformung von 2.9 nach 2.11 später brauchen, wird sie hier einmal exemplarisch vorgeführt.

Zunächst einmal fällt auf, dass der gemischte Term  $cxy$  genau dann null ist wenn, die Ellipse nicht rotiert wurde. Im ersten Schritt versuchen wir also die Rotation der Ellipse rückgängig zu machen, um den Rotationswinkel bestimmen zu können..

Die Gleichung 2.11 kann umgeformt werden zu:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}}_{=:u^T} \underbrace{\begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{pmatrix}}_{=:M} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{=:u} + \underbrace{\begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}}_{=:u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0$$

$$\Leftrightarrow u^T M u + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} u + f = 0$$

Der gemischte Term wird alleine durch  $M = \begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{pmatrix}$  bestimmt. Da die Matrix  $M$  symmetrisch ist, ist sie orthogonal diagonalisierbar. Des Weiteren hat  $M$  zwei von null verschiedene Eigenwerte, denn

$$\det M = ab - \frac{c^2}{4}$$

ist nur dann gleich null, wenn  $c^2 - 4ab = 0$ , was ein Widerspruch zur Annahme in 2.11 ist.  $M$  ist somit eine von null verschiedene Determinante und somit vollen Rang, hat also zwei von null verschiedene Eigenwerte. Insbesondere gibt es also zwei Eigenvektoren von  $M$ , die zueinander orthogonal sind.

Es gilt  $M = S^T D S$ , wobei  $S \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  eine orthogonale Matrix mit den normierten Eigenvektoren als Zeilen und  $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  eine Diagonalmatrix mit den beiden Eigenwerten von  $M$  auf der Diagonalen ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte  $\lambda_1 \leq \lambda_2$ , andernfalls vertausche die Eigenvektoren in  $S$ .

Sei nun  $v := S u$ . So gilt:

$$u^T (S^T D S) u + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \underbrace{(S^T S)}_{=: \mathbb{1}} u + f = 0$$

$$\Leftrightarrow (S u)^T D (S u) + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} S^T (S u) + f = 0 \tag{2.12}$$

$$\Leftrightarrow v^T D v + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} S^T v + f = 0$$

Man kann leicht nachrechnen, dass der gemischte Teil somit eliminiert wurde. Durch Anwenden der Transformation  $S$  wurde  $u$  also in das Koordinatensystem, in dem die Ellipse Achsen-ausgerichtet ist, transformiert.

Eine Rotationsmatrix mit Rotationswinkel  $\theta$  ist definiert durch:

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

Es gilt offenbar  $S = R$  für ein geeignetes  $\theta$ , da die Eigenvektoren normiert und orthogonal zueinander sind.  $\theta$  kann also einfach ausgerechnet werden, denn es gilt:

$$\theta = \text{atan2}(\sin \theta, \cos \theta) = \text{atan2}(S_{2,1}, S_{1,1})$$

Multipliziert man nun 2.12 aus ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \underbrace{(d \ e)}_{=:(d', e')} S^T v + f = 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + d' v_1 + e' v_2 + f = 0 \\ \Leftrightarrow & (\lambda_1 v_1^2 + d' v_1) + (\lambda_2 v_2^2 + e' v_2) + f = 0 \\ \Leftrightarrow & (\lambda_1 v_1^2 + d' v_1) + \left( \frac{d'^2}{4\lambda_1} - \frac{d'^2}{4\lambda_1} \right) + (\lambda_2 v_2^2 + e' v_2) + \left( \frac{e'^2}{4\lambda_2} - \frac{e'^2}{4\lambda_2} \right) + f = 0 \quad (2.14) \\ \Leftrightarrow & \left[ \lambda_1 \left( v_1^2 + \frac{2d'}{2\lambda_1} v_1 + \frac{d'^2}{4\lambda_1^2} \right) - \frac{d'^2}{4\lambda_1} \right] + \left[ \lambda_2 \left( v_2^2 + \frac{2e'}{2\lambda_2} v_2 + \frac{e'^2}{4\lambda_2^2} \right) - \frac{e'^2}{4\lambda_2} \right] + f = 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda_1 \underbrace{\left( v_1 + \frac{d'}{2\lambda_1} v_1 \right)^2}_{=-x'_0} + \lambda_2 \underbrace{\left( v_2 + \frac{e'}{2\lambda_2} v_2 \right)^2}_{=-y'_0} - \underbrace{\left( \frac{d'^2}{4\lambda_1} + \frac{e'^2}{4\lambda_2} - f \right)}_{=:\sigma} = 0, \end{aligned}$$

da  $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ .

Das Zentrum der transformierten Ellipse kann nun aus 2.14 einfach abgelesen werden. Um das Zentrum der eigentlichen Ellipse zu bestimmen, muss mit der inversen Rotation  $S^T$  multipliziert werden:

$$(x_0, y_0)^T = S^T (x'_0, y'_0)^T$$

Obige Gleichung lässt sich anschließend weiter vereinfachen:

$$\begin{aligned} & \lambda_1 (v_1 - x'_0)^2 + \lambda_2 (v_2 - y'_0)^2 = \sigma \\ \Leftrightarrow & \frac{\lambda_1}{\sigma} (v_1 - x'_0)^2 + \frac{\lambda_2}{\sigma} (v_2 - y'_0)^2 = 1 \end{aligned} \quad (2.15)$$

wobei  $\sigma \neq 0$ , wenn die Ellipse nicht zum Punkt entartet ist [Law72]. Vergleicht man nun 2.15 mit 2.8 so sieht man das

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1}{\sigma} &= \frac{1}{a^2} \quad \text{und} \quad \frac{\lambda_2}{\sigma} = \frac{1}{b^2} \\ \Leftrightarrow \sqrt{\frac{\sigma}{\lambda_1}} &= a \quad \text{und} \quad \sqrt{\frac{\sigma}{\lambda_2}} = b \end{aligned} \quad (2.16)$$

Es gilt wie erwartet  $a \geq b$ , da  $\lambda_1 \leq \lambda_2$

### 2.2.2 Abstand: Punkt zu Ellipse

Das hier beschriebene Verfahren zur Bestimmung der kürzesten euklidischen Distanz eines Punktes zu einer Ellipse stammt aus der Arbeit von David Eberly [Ebe13]. Wir betrachten nur Ellipsen im Ursprung, die Achsen-ausgerichtet sind und darüber hinaus nur Punkte im ersten Quadranten. Ansonsten wird die Ellipse in den Ursprung verschoben und um ihren entgegengesetzten Drehwinkel rotiert. Da die Ellipse dann bezüglich der  $X$ - und  $Y$ -Achse symmetrisch ist, kann der Punkt einfach durch Spiegelung in den richtigen Quadranten transformiert werden. Der Abstand ändert sich dadurch nicht.

Wir bezeichnen von nun an  $Q = (y_0, y_1)$  als einen Punkt, dessen Distanz zur Ellipse uns interessiert und  $E = (x_0, x_1)$  als denjenigen eindeutigen Punkt, welcher auf der Ellipse liegt und die kürzeste euklidische Distanz vom Punkt  $Q$  hat.

Aufgrund dieser Forderungen können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit folgende Aussagen treffen:

- Die Ellipse kann stets durch die implizite Gleichung

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{x_1^2}{b^2} = 1$$

mit  $a \geq b \geq 0$  beziehungsweise in der parametrischen Form

$$\mathcal{E}(\theta) = (a \cos \phi, b \sin \phi) \quad \phi \in [0, 2\pi)$$

beschrieben werden.

- Es gilt  $y_0, y_1, x_0, x_1 \geq 0$

Für die quadrierte Distanz von einem beliebigen Punkt  $Q$  zu einem Punkt  $\mathcal{E}(\theta)$  auf der Ellipse gilt dann

$$F(\theta) = |\mathcal{E}(\theta) - Q|^2. \quad (2.17)$$

Die Ableitung von  $F$

$$F'(\theta) = 2(\mathcal{E}(\theta) - Q) \cdot \mathcal{E}'(\theta). \quad (2.18)$$

wird null, wenn  $(\mathcal{E}(\theta) - Q)$  und  $\mathcal{E}'(\theta)$  zu einander orthogonal sind. Daraus folgt, dass der Vektor von  $Q$  zu  $E$  senkrecht zur Ellipse stehen muss. (siehe Abbildung 2.7).

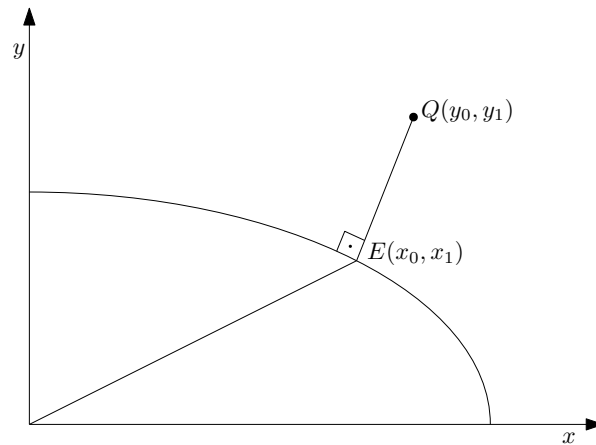


Abbildung 2.7: Ellipsenausschnitt im ersten Quadranten mit Abfragepunkt  $Q$  und eingezeichneter kürzester Distanz zur Ellipse

Betrachten wir also die Funktion:

$$G(x_0, x_1) = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{x_1^2}{b^2} - 1. \quad (2.19)$$

$(x_0, x_1)$  ist genau dann ein Punkt auf der Ellipse, wenn  $G(x_0, x_1) = 0$ . Der Gradient von  $G$  in  $(x_0, x_1)$  ist ein Normalenvektor auf der Ellipse, somit auch der halbe Gradient  $\nabla G(x_0, x_1)/2$ . Der Vektor von  $E$  zu  $Q$  muss dieselbe Richtung haben. Es gilt somit:

$$(y_0, y_1) - (x_0, x_1) = t \frac{\nabla G(x_0, x_1)}{2} = t \left( \frac{x_0}{a^2}, \frac{x_1}{b^2} \right) \quad (2.20)$$

für ein  $t \in \mathbb{R}$ .

Umgestellt nach  $y_0$  und  $y_1$ , beziehungsweise nach  $x_0$  und  $x_1$  ergibt sich:

$$y_0 = x_0 \left( 1 + \frac{t}{a^2} \right), \quad y_1 = x_1 \left( 1 + \frac{t}{b^2} \right) \quad (2.21)$$

$$x_0 = \frac{a^2 y_0}{t + a^2}, \quad x_1 = \frac{b^2 y_1}{t + b^2} \quad (2.22)$$

Man macht nun eine Fallunterscheidung:

1. Der einfachste Fall ist, wenn sich der Punkt  $Q$  auf der  $Y$ -Achse (außer  $(0, 0)$ ) befindet, wenn also gilt  $y_0 = 0, y_1 > 0$ . Da die Hauptachse nach der  $X$ -Achse ausgerichtet ist und  $a \geq b$  gilt, ist der Punkt auf der Ellipse mit der kürzesten Distanz zu  $Q$  offenbar  $E = (0, b)$  und für die Distanz gilt  $d = |y_1 - b|$ .
2. Als nächstes betrachten wir ein  $Q$  auf der  $X$ -Achse (einschließlich  $(0, 0)$ ), wenn also gilt  $y_0 \geq 0, y_1 = 0$ .

Es kann gezeigt werden, dass der Punkt auf der Ellipse mit der kürzesten Distanz zu

den zweiten  
teil überar-  
beiten hier

$(y_0, 0)$  für  $0 < y_0 < (a^2 - b^2)/a^2$ ,  $E = (x_0, x_1)$  ist mit

Wenn  $x_1 = 0$  gilt, muss  $x_0 = a$  gelten, damit  $E(x_0, x_1)$  auf der Ellipse ist. Es gilt analog zum ersten Fall  $E = (a, 0)$  mit  $d = |y_0 - a|$  Einfach nur es kann gezeigt werden, dass bla?

Wenn  $x_1 \neq 0$  kann gezeigt werden, dass für die Distanz gilt:

$$d^2 = b^2 \left( 1 - \frac{y_0^2}{a^2 - b^2} \right)$$

3. Der letzte Fall, den wir betrachten müssen, ist der allgemeinste Fall. Es gilt  $y_0 > 0$ , sowie  $y_1 > 0$ . Da wir uns nur im ersten Quadranten bewegen, gilt darüber hinaus  $x_0, x_1 \geq 0$ . Mit diesen Eigenschaften und 2.21 lässt sich folgende Einschränkung für  $t$  herleiten:

$$\begin{aligned} 0 < y_0 &= x_0 \left( 1 + \frac{t}{a^2} \right) \\ \Leftrightarrow -1 \cdot a^2 &< t. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Analog ergibt sich mit  $y_1$ :  $-b^2 < t$ . Da  $a \geq b$  gilt, reicht es, sich nur die zweite Ungleichung anzuschauen, dass sie die erste impliziert. Setzt man nun 2.22 in 2.19 ein, erhält man:

$$F(t) = \left( \frac{ay_0}{t + a^2} \right)^2 + \left( \frac{by_1}{t + b^2} \right)^2 - 1 \quad (2.24)$$

Man kann nun zeigen, dass diese Funktion auf dem gesamten Intervall  $[-b^2, \infty)$  monoton fällt und links gekrümmt ist. Darüber hinaus gilt:

$$\lim_{t \searrow -b^2} F(t) = +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1.$$

Da  $F$  stetig ist, muss es also eine Nullstelle geben, die aufgrund des Monotonie- und Krümmungsverhaltens sogar eindeutig ist. Die Nullstelle lässt sich beispielsweise durch Intervallschachtelung oder Newton-Verfahren bestimmen.

### 2.2.3 Schnittpunkt: Liniensegment und Ellipse

#### 2.2.2 Definition (Liniensegment)

Ein Liniensegment ist definiert als die kürzeste Verbindungslinie zwischen zwei Punkte

eigentlich  
ziemlich  
überflüssig

$(x_0, x_1), (y_0, y_1)$  und kann parametrisch beschrieben werden durch:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} + t \left( \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \right) \quad t \in [0, 1]$$

## 2.3 RANSAC

*Random Sample Consensus* (RANSAC) [FB81] ist ein nicht-deterministisches robustes Verfahren zur Parameterschätzung eines Modells bei einer, möglicherweise durch starke Ausreißer, gestörten Messreihe. Im Gegensatz zu Verfahren, wie der Methode der kleinsten Quadrate, die versuchen eine optimale Lösung für alle Messdaten zu bestimmen, nutzt RANSAC nur eine Teilmenge der Messreihe.

RANSAC wählt aus der Menge der Messdaten wiederholt zufällig die minimale Anzahl Messdaten aus, die nötig sind um das Modell eindeutig zu beschreiben und prüft dann, wie gut das geschätzte Modell die restlichen Messdaten beschreibt. Die Güte des Modells wird im Allgemeinen durch ein Distanzmaß charakterisiert. Hat ein Messdatum eine vorher definierte Maximaldistanz zum geschätzten Modell nicht überschritten, wird es ins sogenannte Consensus Set des Modells aufgenommen. Das Modell mit dem größten Consensus Set wird schließlich ausgewählt.

Die Anzahl der Iterationen, die mindestens notwendig sind, um mit einer Wahrscheinlichkeit von  $p \in [0, 1)$ , bei einem relativen Ausreißeranteil von  $\epsilon \in [0, 1)$  und einer Anzahl von  $k$  Daten, um das Modell eindeutig zu beschreiben, lässt sich berechnen mit:

$$\frac{\log(1-p)}{\log(1-(1-\epsilon)^k)} \quad (2.25)$$

## 2.4 Hough-Transformation

## 2.5 Kamerakalibrierung

Lochkamera

kamerakalibrierung

projektionsmatrix (homogene Koordinaten????) SVD, QR, LSQ?

## 2.6 Canny

Kantendetektion (canny sobel)

## 3 Methodik

### 3.1 Kalibrierungsmuster

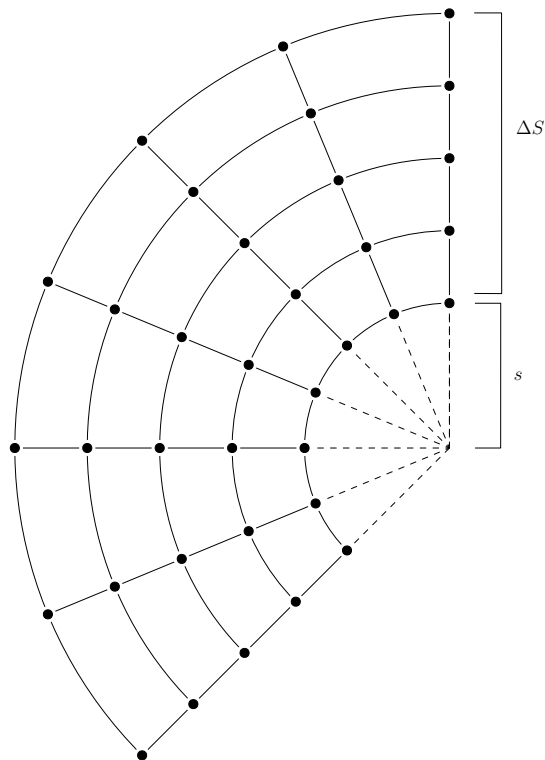


Abbildung 3.1: Kalibrierungsmuster mit  $n = xxx$ ,  $m = xxx$

warum gerade dieses muster? warum ist das so gut? wie berechnet man das muster?  
welche eigenschaften hat es?

Bilder von kegel mit muster drin?

wichtig das oben und unten etwas rand

warum ist das wichtig dass das ellipsenschätzen robust ist? anzahl iterationen ransac

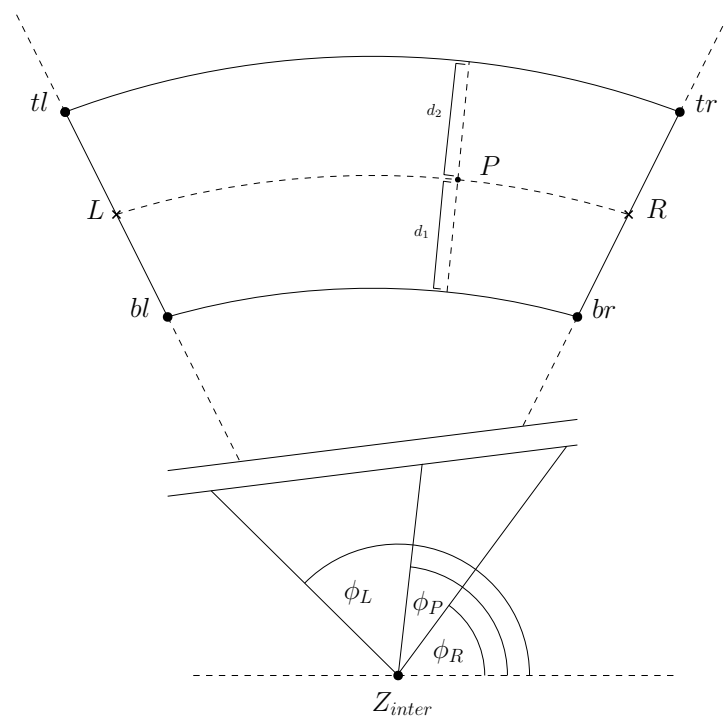


Abbildung 3.2: Interpolation



# 4 Implementierung

GUI mit bildern



# 5 Analyse

analyse?

datenerhebung oder so was? laufzeit?

vergleich: reprojection error beider Verfahren

robustheit ransac ellipse?

robustheit reverse warping? bestimmung der keypoints?

laufzeitdurchschnitt pro bild auf raspberry von 1000 bildern bei verschiedenen auflösungen

Raspberry Pi 2 Model B:

- 900MHz ARM Cortex-A7 CPU
- 1GB RAM
- GCC-4.??? Release
- Opencv???, Qt????



## 6 Fazit und Ausblick

Parallelisierung?

delaunay? lohnt sich eigentlich nicht, weil reverse sehr gute ergebnisse

deformable templates als alternative zu ransac für ellipsen? probleme mit lokalen minima

deformable templates

evtl noch am ende delaunay



# Abbildungsverzeichnis

2.1	Gerader Kreiskegel . . . . .	3
2.2	Kegelstumpf und Ergänzungskegel . . . . .	4
2.3	Kegelstumpf . . . . .	5
2.4	Kegelmantelfläche . . . . .	5
2.5	Abbildung der Kegelstumpfhöhe auf die Seitenhöhe . . . . .	6
2.6	Ellipse mit Zentrum $(x_0, y_0)$ , Hauptachse $a$ , Nebenachse $b$ , sowie Drehwinkel $\theta$ . . . . .	8
2.7	Ellipsenausschnitt im ersten Quadranten mit Abfragepunkt $Q$ und eingezeichneter kürzester Distanz zur Ellipse . . . . .	12
3.1	Kalibrierungsmuster mit $n = xxx, m = xxx$ . . . . .	15
3.2	Interpolation . . . . .	16





# **Tabellenverzeichnis**



# Literatur

- [Ebe13] David Eberly. „Distance from a Point to an Ellipse, an Ellipsoid, or a Hyperellipsoid“. In: (2013), S. 1–13 (siehe S. 11).
- [FB81] Martin a Fischler und Robert C Bolles. „Random Sample Consensus: A Paradigm for Model Fitting with Applicatlons to Image Analysis and Automated Cartography“. In: *Communications of the ACM* 24.6 (1981), S. 381–395. ISSN: 0001-0782. DOI: 10.1145/358669.358692. URL: <http://dx.doi.org/10.1145/358669.358692> (siehe S. 14).
- [Law72] J D Lawrence. *A Catalog of Special Plane Curves*. Dover Publications, 1972, S. 62–63 (siehe S. 10).



# Plagiatserklärung

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit über

*Entzerrung von Kegeloberflächen aus einer Einkameraansicht basierend auf projektiver Geometrie*

selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken – auch elektronischen Medien – dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

---

Lars Haalck, Münster, 30. August 2016

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in eine Datenbank einverstanden.

---

Lars Haalck, Münster, 30. August 2016