

Liste der noch zu erledigenden Punkte

stimmt das mit der ungleichung?	5
a,b, semi-major?	6
noch ohne rotation einfügen	8



ENTZERRUNG VON KEGELOBERFLÄCHEN AUS EINER EINKAMERAANSICHT BASIEREND AUF PROJEKTIVER GEOMETRIE

BACHELORARBEIT
zur Erlangung des akademischen Grades
BACHELOR OF SCIENCE

Westfälische Wilhelms-Universität Münster
Fachbereich Mathematik und Informatik
Institut für Informatik

Betreuung:
Dimitri Berh

Erstgutachten:
Prof. Dr. Xiaoyi Jiang

Zweitgutachten:
Prof. Dr. Klaus Hinrichs

Eingereicht von:
Lars Haalck

Münster, August 2016

Zusammenfassung

bla bla zusammenfassung

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Theoretische Grundlagen	3
2.1	Kegel	3
2.2	Ellipse	5
2.3	Parameterschätzung	9
2.4	Kamerakalibrierung	9
2.5	Deformable Templates	9
3	Methodik	11
3.1	Kalibrierungsmuster	11
4	Implementierung	13
5	Analyse	15
6	Fazit und Ausblick	17
	Abbildungsverzeichnis	19
	Tabellenverzeichnis	21

1 Einleitung

einleitung

2 Theoretische Grundlagen

Rechtshändiges Koordinatensystem...

2.1 Kegel

2.1.1 Definition (Kegel) kegel

In der weiteren Arbeit betrachten wir nur gerade Kreiskegel

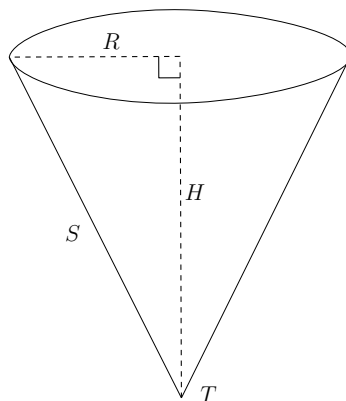


Abbildung 2.1: Gerader Kreiskegel

Ein Kegel mit Spitze $K(0, 0, 0)$, Radius R und Höhe H kann parametrisch beschrieben werden als:

$$\begin{aligned}x &= \frac{u}{h} R \cos \theta \\y &= u \\z &= \frac{u}{h} R \sin \theta\end{aligned}\tag{2.1}$$

mit $u \in [0, H]$ und $\theta \in [0, 2\pi)$

S bezeichnet die Seitenhöhe und ist definiert durch $S = \sqrt{R^2 + H^2}$

2.1.2 Definition (Kegelstumpf) entsteht wenn bla bla

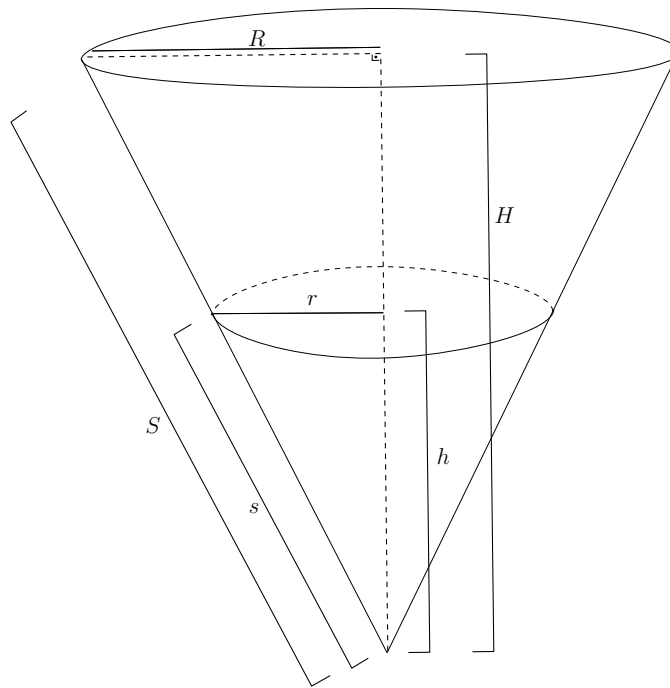


Abbildung 2.2: Kegelstumpfergänzung

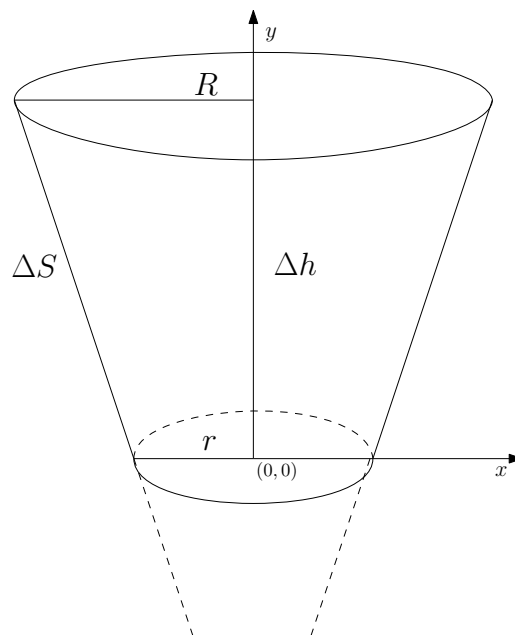


Abbildung 2.3: Kegelstumpf

$$\begin{aligned}
 x &= \left(r + \frac{u}{h}(R - r)\right) \cos\theta \\
 y &= u \\
 z &= \left(r + \frac{u}{h}(R - r)\right) \sin\theta
 \end{aligned}
 \tag{2.2}$$

mit $u \in [0, \Delta H]$ und $\theta \in [0, 2\pi)$

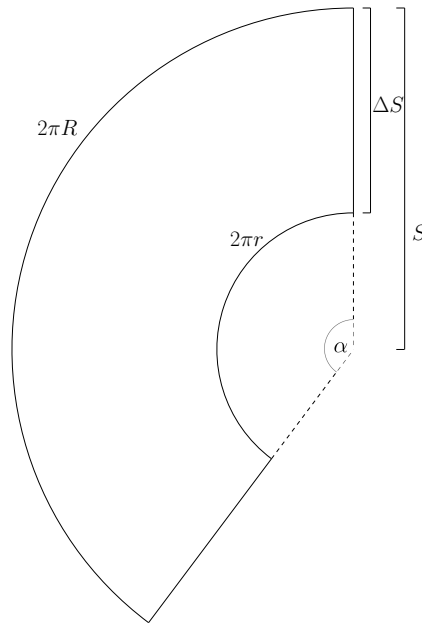


Abbildung 2.4: Kegelmantelfläche

$$\begin{aligned} x &= -(s + \lambda(S - s)) \sin \phi \\ y &= (s + \lambda(S - s)) \cos \phi \end{aligned} \quad (2.3)$$

mit $\lambda \in [0, 1]$ und $\phi \in [0, \alpha]$

Sei $\mathcal{R}(y) := r + \frac{y}{h}(R - r)$, $\Phi(x, y, z) := \text{atan2}\left(\frac{z}{d(y)}, \frac{x}{d(y)}\right)$, $\mathcal{S}(y) := s + \frac{y}{\Delta H}(S - s)$

$$\begin{aligned} \Psi: [r, R] \times [0, \Delta H] \times [r, R] &\rightarrow [s, S] \times [s, S] \\ (x, y, z) &\mapsto (-\mathcal{S}(y) \sin \Phi(x, y, z), \mathcal{S}(y) \cos \Phi(x, y, z)) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Sei $\mathcal{R}(y) := r + \frac{y}{h}(R - r)$, $\Phi(x, y, z) := \text{atan2}\left(\frac{z}{d(y)}, \frac{x}{d(y)}\right)$, $\mathcal{S}(y) := s + \frac{y}{\Delta H}(S - s)$

$$\begin{aligned} \Psi^{-1}: [s, S] &\rightarrow [r, R] \times [0, \Delta H] \times [r, R] \times [s, S] \\ (x, y, z) &\mapsto (-\mathcal{S}(y) \sin \Phi(x, y, z), \mathcal{S}(y) \cos \Phi(x, y, z)) \end{aligned} \quad (2.5)$$

2.2 Ellipse

2.2.1 Definition (Ellipse)
Kegelschnitt und so bla bla

stimmt das
mit der un-
gleichung?

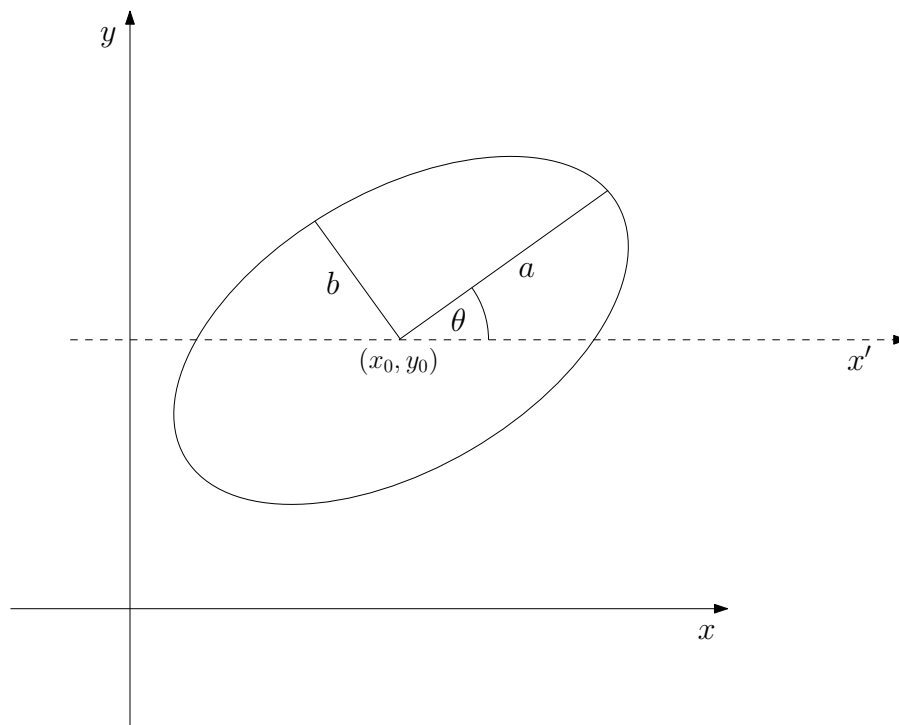


Abbildung 2.5: Ellipse

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0 \quad \text{mit} \quad b^2 - 4ac < 0 \quad (2.6)$$

mit $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ oder

$$\frac{((x - x_0) \cos \theta + (y - y_0) \sin \theta)^2}{a^2} + \frac{((x - x_0) \sin \theta - (y - y_0) \cos \theta)^2}{b^2} = 1 \quad (2.7)$$

a,b, semi-major?

beziehungsweise als parametrische Form:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 + a \cos \phi \cos \theta - b \sin \phi \sin \theta \\ y_0 + a \cos \phi \sin \theta + b \sin \phi \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

mit $\phi \in [0, 2\pi)$

Diese beiden Formen sind ineinander umformbar. Da wir die Umformung von 2.7 nach 2.8 später brauchen wird sie hier einmal exemplarisch vorgeführt.

Zunächst einmal fällt auf, dass der gemischten Term cxy genau dann null ist wenn, die Ellipse nicht rotiert wurde. Im ersten Schritt versuchen wir also die Rotation der Ellipse rückgängig zu machen, um den Rotationswinkel zu bestimmen und anschließend den Ellipsenmittelpunkt ermitteln zu können.

Die Gleichung 2.7 kann umgeformt werden zu:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}}_{=:u^T} \begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{=u} + \underbrace{\begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}}_{=u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0$$

$$\Leftrightarrow u^T M u + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} u + f = 0$$

Der gemischte Term wird alleine durch $M = \begin{pmatrix} a & \frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} & b \end{pmatrix}$ bestimmt. Da die Matrix M symmetrisch ist, ist sie orthogonal diagonalisierbar. Insbesondere sind die Eigenvektoren zueinander orthogonal.

Es gilt $M = S^T D S$, wobei $S \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ eine orthogonale Matrix mit den normierten Eigenvektoren als Zeilen und $D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ eine Diagonalmatrix mit den beiden Eigenwerten von M auf der Diagonalen ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $\lambda_1 < \lambda_2$, andernfalls vertausche die Eigenvektoren in S .

Sei nun $v := S u$ Insgesamt gilt also:

$$u^T (S^T D S) u + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} \underbrace{(S^T S)}_{=1} u + f = 0$$

$$\Leftrightarrow (u^T S^T) D (S u) + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} S^T (S u) + f = 0$$

$$\Leftrightarrow v^T D v + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix} S^T v + f = 0$$

Man kann leicht nachrechnen, dass der gemischte Teil somit eliminiert wurde. Durch Anwenden der Transformation S wurde u also in das Koordinatensystem der Ellipse transformiert.

Eine Rotationsmatrix mit Rotationswinkel θ in 2D ist definiert durch:

$$R = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Es gilt offenbar $S = R$ für ein geeignetes θ , da die Eigenvektoren zueinander orthogonal sind. θ kann also einfach ausgerechnet werden, denn es gilt:

$$\theta = \text{atan2}(\sin \theta, \cos \theta) = \text{atan2}(S_{2,1}, S_{1,1})$$

Multipliziert man nun 2.2 aus ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + \underbrace{(d \ e) S^T}_{=:(d', e')} v + f = 0 \\
\Leftrightarrow & \lambda_1 v_1^2 + \lambda_2 v_2^2 + d' v_1 + e' v_2 + f = 0 \\
\Leftrightarrow & (\lambda_1 v_1^2 + d' v_1) + (\lambda_2 v_2^2 + e' v_2) + f = 0 \\
\Leftrightarrow & (\lambda_1 v_1^2 + d' v_1) + \left(\frac{d'^2}{4\lambda_1} - \frac{d'^2}{4\lambda_1} \right) + (\lambda_2 v_2^2 + e' v_2) + \left(\frac{e'^2}{4\lambda_2} - \frac{e'^2}{4\lambda_2} \right) + f = 0 \\
\Leftrightarrow & \left[\lambda_1 \left(v_1^2 + \frac{2d'}{2\lambda_1} v_1 + \frac{d'^2}{4\lambda_1^2} \right) - \frac{d'^2}{4\lambda_1} \right] + \left[\lambda_2 \left(v_2^2 + \frac{2e'}{2\lambda_2} v_2 + \frac{e'^2}{4\lambda_2^2} \right) - \frac{e'^2}{4\lambda_2} \right] + f = 0 \\
\Leftrightarrow & \lambda_1 \underbrace{\left(v_1 + \frac{d'}{2\lambda_1} v_1 \right)^2}_{=-x'_0} + \lambda_2 \underbrace{\left(v_2 + \frac{e'}{2\lambda_2} v_2 \right)^2}_{=-y'_0} - \underbrace{\left(\frac{d'^2}{4\lambda_1} + \frac{e'^2}{4\lambda_2} - f \right)}_{=:\sigma} = 0
\end{aligned}$$

, da $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, da symmetrisch und so. Das Zentrum der transformierten Ellipse kann einfach abgelesen werden. Um das Zentrum der eigentlichen Ellipse zu bestimmen, muss mit der inversen Rotation also S^T multipliziert werden. Obige Gleichung lässt sich weiter vereinfachen:

$$\begin{aligned}
& \lambda_1 (v_1 - x'_0)^2 + \lambda_2 (v_2 - y'_0)^2 = \sigma \\
\Leftrightarrow & \frac{\lambda_1}{\sigma} (v_1 - x'_0)^2 + \frac{\lambda_2}{\sigma} (v_2 - y'_0)^2 = 1
\end{aligned} \tag{2.10}$$

noch ohne
rotation
einfügen

Vergleicht man nun 2.10 mit so sieht man das: bla bla gelten muss

ellipse distanz mit transformationen die nötig sind
Hauptachsentransformation
schnittpunkt linie ellipse

2.3 Parameterschätzung

Hough? Parameterschätzung Ransac. anzahl iterationen

2.4 Kamerakalibrierung

kamerakalibrierung
projektionsmatrix (homogene Koordinaten????) SVD, QR, LSQ?
Kantendetektion (canny sobel)

2.5 Deformable Templates

deformable templates
evtl noch am ende delaunay

3 Methodik

3.1 Kalibrierungsmuster

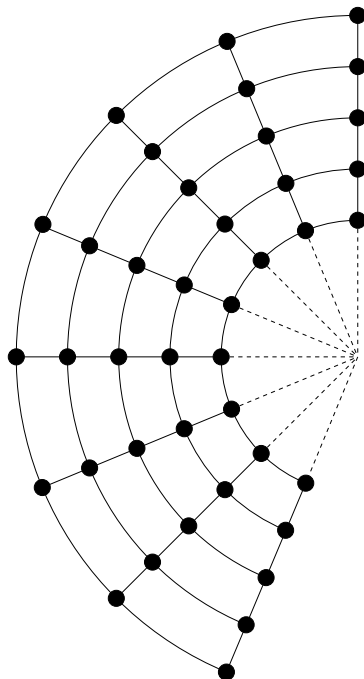


Abbildung 3.1: Kalibrierungsmuster mit $n = 5, m = 7$

4 Implementierung

implementierung

5 Analyse

analyse?

6 Fazit und Ausblick

fazit

Abbildungsverzeichnis

2.1	Gerader Kreiskegel	3
2.2	Kegelstumpfergänzung	4
2.3	Kegelstumpf	4
2.4	Kegelmantelfläche	5
2.5	Ellipse	6
3.1	Kalibrierungsmuster mit $n = 5, m = 7$	11

Tabellenverzeichnis

Plagiatserklärung

Hiermit versichere ich, dass die vorliegende Arbeit über

Entzerrung von Kegeloberflächen aus einer Einkameraansicht basierend auf projektiver Geometrie

selbstständig verfasst worden ist, dass keine anderen Quellen und Hilfsmittel als die angegebenen benutzt worden sind und dass die Stellen der Arbeit, die anderen Werken – auch elektronischen Medien – dem Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, auf jeden Fall unter Angabe der Quelle als Entlehnung kenntlich gemacht worden sind.

Lars Haalck, Münster, 28. August 2016

Ich erkläre mich mit einem Abgleich der Arbeit mit anderen Texten zwecks Auffindung von Übereinstimmungen sowie mit einer zu diesem Zweck vorzunehmenden Speicherung der Arbeit in eine Datenbank einverstanden.

Lars Haalck, Münster, 28. August 2016