Linear Algebra Basic Ideas

Caroline 2023

Basic definition	Vector 向量	$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times 1}$ column vector (列向量) $\boldsymbol{R^{4\times 1}}$**也可以直接写为**$\boldsymbol{R^4}$
	Matrix 矩阵	$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{m\times n}$ F 实数域，C 复数域
Basic special matrix	Square Matrix 方阵	行数 = 列数
	Zero matrix	$O_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
	Identity matrix	$I_3 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}} \end{pmatrix}$ e_1 e_2 e_3 the i-th unit vector $A + O = O + A = A$ $AI = IA = A$

	Diagonal matrix 对角矩阵	$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & -1\end{pmatrix}}_{\substack{\text{diagonal matrix} \\ \text{(对角矩阵)}}}$
	Upper triangular matrix 上三角（对角线以下都是 0）	$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 \\ & 2 & 3 \\ & & -1\end{pmatrix}}_{\substack{\text{upper triangular matrix} \\ \text{(上三角矩阵)}}}$
	Lower triangular matrix 下三角（对角线以上都是 0）	$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & & \\ 0 & 2 & \\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}}_{\substack{\text{lower triangular matrix} \\ \text{(下三角矩阵)}}}$
Matrix Transpose	Transpose 转置 A^T, A'	$\mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{n\times m}: \quad A^T, A'$ $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$ $A^T = \begin{pmatrix}1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6\end{pmatrix}$ $(A^T)^T = A$ $(\alpha A)^T = \alpha A^T$ $(A+B)^T = A^T + B^T$ $(AB)^T = B^T A^T$
	Conjugated transpose 共轭转置 A^H, A^*	$\mathbb{C}^{m\times n} \to \mathbb{C}^{n\times m}: \quad A^H, A^*$ $A = \begin{pmatrix}1 & 2+\mathrm{i} & 3 \\ 4 & 5 & 6-2\mathrm{i}\end{pmatrix}$ $A^* = \begin{pmatrix}1 & 4 \\ 2-\mathrm{i} & 5 \\ 3 & 6+2\mathrm{i}\end{pmatrix}$ conjugate transpose (共轭转置)

		$(A^H)^H = A$ $(\alpha A)^H = \overline{\alpha} A^H$ $(A+B)^H = A^H + B^H$ $(AB)^H = B^H A^H$ 注意第二条 alpha 也要取共轭
Vector Inner Product	Inner product 内积 $x \cdot y$ $< x, y >$ $x^T y$	$x^T y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n, \quad x, y \in \mathbb{R}^n$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + -1 \cdot 3 + 0 \cdot 1$ $= 3$ 注意在复数域中，X^T 也会相应变为变为 X^H，共轭转置
	Orthogonal 正交	两个向量点乘为零 $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\textbf{orthogonal} \\ \textbf{(正交)}}} = 0$
	Orthonormal 标准正交/单位正交	两个向量点乘为零，且每个向量长度为 1 $\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}}_{\substack{\textbf{orthonormal} \\ \textbf{(标准正交)}}} = 0$
Matrix multiplication		$\mathbb{R}^{m \times r} \times \mathbb{R}^{r \times n} \to \mathbb{R}^{m \times n}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 9 & 12 & 15 \\ 13 & 17 & 21 \\ 17 & 22 & 27 \end{pmatrix}$ $O(n^3) \to \underbrace{O(n^{2.8074})}_{\textbf{Strassen 算法}} \to \underbrace{O(n^{2.3728596})}_{\textbf{2020 最新进展}}$
	Orthogonal	$A\,A^T = I$

	matrix 正交矩阵	
	Unitary matrix 酉矩阵	$A\,A^H = I$
	Involutory matrix 乘方矩阵	$A^2 = I$
	Idempotent matrix 幂等矩阵	$A^2 = A$
	Nipotent matrix 幂零矩阵	$A^k = 0, k \in N^*$ 这个矩阵的某次方等于 0 矩阵
对称矩阵	Symmetric matrix 对称 矩阵	$A^I = A$ 转置等于自身。简单看来，按对角线对称
	Hermitian matrix 在复数域上 对称的矩阵	共轭转置等于自身。 $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1+\mathrm{i} & 2 \\ 1-\mathrm{i} & 3 & 5 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}}_{\text{Hermitian matrix}}$ (埃尔米特矩阵)
	Positive definite	对任何非零向量 x, $x^T A\,x > 0$， 则矩阵 A 正定
	Positive semi- definite	对任何向量 x, $x^T A\,x\ \geq 0$，则矩阵 A 半正定 （不要求非零，因为零向量也满足这个等式）
	Negative definite	
	Negative semi	
	Indefinite matrix	存在 $x, y \in \mathbb{R}^n$ $\underbrace{(x^T Ax)(y^T Ay) < 0}$ indefinite（不定）
Elementary row operation	row switching	row switching (交换两行) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

	Row multiplication	row multiplication (乘非 0 数) $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{2r_3}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\2&2&2\end{pmatrix}$
	Row addition	row addition (倍加) $\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\1&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&1\\0&1&0\end{pmatrix}$
Vector Linear Combination	Vector Linear combination	$c = -0.50\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1.20\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$
	Span 张成	向量 a,b 的线性组合构成的线性空间 $\{c\} = span(a.b)$
	Linearly independent	几个向量线性组合的结果是 0 向量，参数只能是 0，则线性无关。 $\underbrace{0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}}_{\substack{\text{linearly independent}\\\text{(线性无关)}}}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$
	Linearly dependent	此时必有一个向量是其他向量的线性组合。
	Rank 秩	$rank(A) = 2$ 一个矩阵的列向量中（或行向量中），最多有几个线性无关的向量。
	Range 值域	一个矩阵，乘以任意向量，得到的结果的集合就是值域。 $\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}}_{\substack{\text{所有向量构成了}\\\text{range}(A)}}$ 也就是列向量的张成的集合。$range(A) = span(a1, a2, a3)$ $\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$ $\text{range}(A) = \text{span}(a_1, a_2, a_3)$ $\dim(\text{range}(A)) = \text{rank}(A)$

	Null space 零空间	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underbrace{\text{秩} + \text{基础解系个数} = \text{列数}}_{\textbf{rank-nullity theorem（秩-零化度定理）}}$
Determinant	$\lvert A\rvert, \det(A)$	$C^{n\times n} \to C$ $\det(a) = a$ $\quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
Inverse 逆 （满足交换律）	A^{-1}	$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，那么以下命题等价. **nonsingular（非奇异）** $\begin{cases} 1.\ \det(A) \neq 0 \\ 2.\ A^{-1}\ \text{存在.} \\ 3.\ \operatorname{rank}(A) = n \\ 4.\ \operatorname{null}(A) = \{0\} \\ 5.\ A\ \text{的特征值都不为}\ 0. \end{cases}$
Eigen $Ax = \lambda x$	Eigenvalue 特征值 λ	
	Eigenvector 特征向量 x	