

# Numerical Computing Methods

## 数值计算方法

**LI, Xiao Peng**

李晓鹏

(Email: x.p.li@szu.edu.cn)

Shenzhen University

04 Sep. 2023

- ① 研究对象与特点
- ② 数值方法的基本内容
- ③ 数值算法及其设计
- ④ 误差分析

## ① 研究对象与特点

## ② 数值方法的基本内容

## ③ 数值算法及其设计

## ④ 误差分析

# 研究对象与特点

## 什么是计算机数值方法？

数值计算方法（或数值分析）主要是研究如何运用计算机去获得数学问题的数值解的理论和方法。

# 研究对象与特点

## 什么是计算机数值方法？

数值计算方法（或数值分析）主要是研究如何运用计算机去获得数学问题的数值解的理论和方法。

## 牛顿-拉夫逊（Newton-Raphson）迭代法计算开平方：

```
function y = mysqrt(x)
    guess = x;
    threshold = 1e-9;
    while abs(guess * guess - x) > threshold
        guess = 0.5 * (guess + x / guess);
    end
    y = guess;
end
```

## 现代科学研究的三个重要组成部分

1. 理论计算
2. 科学实验
3. 科学计算

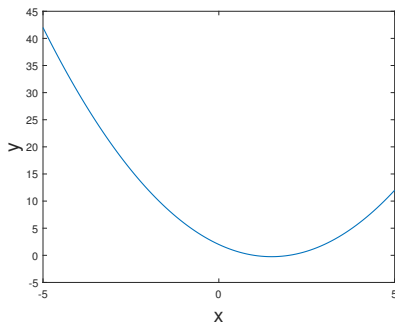
## 重要性

1. 仅靠数学理论的演绎和推导不能解决实际中的数值问题，只有与计算机科学相结合，才能研制出实用的好算法
2. 好的算法变成数值软件以后才可能为社会创造更大的财富

# 研究对象与特点

利用数学和计算机知识解决实际问题可分为两步

1. **建立数学模型：** 需要利用有关专业知识和数学理论，这属于应用数学范围
2. **提出数值问题与数值方法：** 将数学模型变成数值问题，进而研究该数值问题的数值方法，并设计有效的数值算法的过程，这属于计算方法的范围



## 现代计算方法的一个显著特点

已产生大量实用的“综合数学软件库”，并逐步形成了数值软件产业,如：

- Mathematica: 综合数学软件包，集符号演算、数值计算和图形演示等
- Maple: 系统内置高级技术解决建模和仿真中的数学问题，符号计算、无限精度数值计算等
- MATLAB: 集数值计算、图形演示等一体的综合数值软件库



```
(* Define variables *)  
a = 1;  
b = -3;  
c = 2;  
  
(* Solve the equation using the solve function *)  
solutions = Solve[a x^2 + b x + c == 0, x];  
Print["The solutions are: ", solutions];
```

```
# Define variables
a := 1;
b := -3;
c := 2;

# Defining quadratic equations
equation := a*x^2 + b*x + c = 0;

# Solve the equation using the solve function
solutions := solve(equation, x);

print("The solutions are:", solutions);
```

```
% Define variables
```

```
a = 1;
```

```
b = -3;
```

```
c = 2;
```

```
% solution calculation of quadratic equations
```

```
solutions = roots([a, b, c]);
```

```
disp([ 'The solutions are: - ', num2str(solutions ')]);
```

本课程包含的主要内容:

1. 数值方法
2. 算法及其设计
3. 误差分析

“数值方法”（Numerical Methods）和“数值算法”（Numerical Algorithm）两个术语在实际应用中常常互相替换使用，但从严格的定义和应用角度来看，它们之间还是存在一些微妙的差异。

# 研究对象与特点

## 数值方法 (Numerical Method)

数值方法通常是指用于解决数学问题的一套完整的数学框架或理论，这些数学问题通常无法通过精确的、封闭形式的解来解决。例如，微分方程、线性方程组、积分等问题在某些情况下难以得到精确解，因此需要使用数值方法来近似求解。

数值方法往往包括了对问题的建模、理解其数学性质（如稳定性、精度等）、选择适当的近似手段等。

## 数值算法 (Numerical Algorithm)

数值算法则更侧重于实现的细节，它是一种具体的、可以通过计算机编程来实现的操作步骤，用于执行某一数值方法。数值算法考虑了如何高效、准确地进行数值计算，包括迭代次数、计算复杂性、误差累积等因素。

数值算法可以看作是数值方法的一种实现方式，但一个数值方法可以有多种不同的数值算法。

以求解线性方程组  $Ax = b$  为例：

- **数值方法：**可能会涉及使用高斯消元法、矩阵分解（如 LU 分解、QR 分解等）或迭代法（如雅可比迭代、Gauss-Seidel 迭代等）。
- **数值算法：**对于高斯消元法，具体的算法可能会涉及到如何进行行交换以避免除以零，或者如何优化存储以减少计算量。

简而言之，数值方法通常更注重理论和数学框架，而数值算法则更侧重于实现和计算效率。两者是密切相关的，但侧重点不同。在解决实际问题时，通常需要考虑数值方法和数值算法。

① 研究对象与特点

② 数值方法的基本内容

③ 数值算法及其设计

④ 误差分析

# 数值方法的基本内容

利用数学和计算机知识解决实际问题可分为两步:

1. **建立数学模型:** 需要利用有关专业知识和数学理论, 这属于应用数学范围
2. **提出数值问题与数值方法:** 将数学模型变成数值问题, 进而研究该数值问题的数值方法, 并设计有效的数值算法的过程, 这属于计算方法的范围

数值问题:

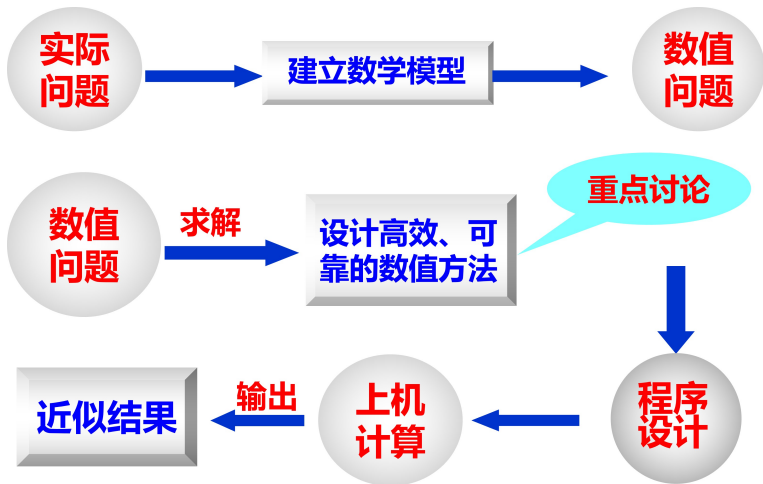
有限个输入数据(问题的自变量、原始数据)与有限个输出数据(待求解数据)之间函数关系的一个明确无歧义的描述。

数值问题的分类:

1. 分析问题(连续问题)
2. 代数问题(离散问题)
3. 概率与统计问题(随机问题)



# 数值方法的基本内容



# 数值方法的基本内容

什么“数学模型”是“数值问题”

1. 求方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的解。

输入 $a, b, c$ ，则输出数据是根 $x_1$ 和 $x_2$ ，故是“数值问题”

2. 求常微分方程

$$\begin{cases} y' = 2x + 3, & x \in [0, a] \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

因输入数据为 2 和 3， $x = 0$ 和 $y = 0$ 等，输出是函数解析表达式 $y = x^2 + 3x$ ，所以，不是“数值问题”。

# 数值方法的基本内容

如何将数学模型变成“数值问题”

将非“数值问题”转化为“数值问题”的方法：离散化。

例如：将求解 $y = x^2 + 3x$ 的问题变成求

$$\begin{aligned} & y(x_1), y(x_2), y(x_3), \dots, y(x_n) \\ & 0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n = a \end{aligned}$$

的问题。即将连续的情况变成在某些点上的值。

**Remark:** 求函数 $y = x^2 + 3x$  在某些点的近似函数值是数值问题

# 数值方法的基本内容

## 数值方法:

将求解“数值问题”的一系列计算公式称为数值方法。也称为计算方法。

## 计算机数值方法 (数值方法):

指它的一系列计算公式中的运算和数据，必须是可以在计算机上执行。

计算机上可执的运算：四则运算和逻辑运算（与、或、非等）。

**Remark:** 计算公式不一定都属于计算机数值方法

# 例题

下面哪些是数值方法？

$$y = 54 \times 2.5 + 100 \quad (1)$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2)$$

$$y = \sin(60^\circ) \quad (3)$$

$$y = \log(5) \quad (4)$$

# 例题

下面哪些是数值方法？

$$y = 54 \times 2.5 + 100 \quad \checkmark \quad (1)$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \times \quad (2)$$

$$y = \sin(60^\circ) \quad \times \quad (3)$$

$$y = \log(5) \quad \times \quad (4)$$

# 数值方法的基本内容

计算机上不能直接执行的运算:

开方、超越函数、极限、微分、积分等

超越函数: 三角函数、对数函数, 反三角函数, 指数函数

几个转化例子

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

$$y' \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

本课程重点是介绍常见的行之有效的计算机数值方法。

① 研究对象与特点

② 数值方法的基本内容

③ 数值算法及其设计

④ 误差分析



数值算法:

有步骤地完成求解数值问题的过程

数值算法特性:

1. **目的性:** 算法目的明确, 条件和结论均应明确;
2. **确定性:** 算法必须精确地给出每一步的操作;
3. **可执行性:** 算法中的每个操作都是可执行的;
4. **有穷性:** 算法必须在有限步内结束解题过程。
5. **通用性:** 算法是针对某一类问题的计算, 而不是只适用于解决某个具体例题的计算;

# 例题

牛顿-拉夫逊（Newton-Raphson）迭代法计算开平方：

```
function y = mysqrt(x)
    guess = x;
    threshold = 1e-9;
    while abs(guess * guess - x) > threshold
        guess = 0.5 * (guess + x / guess);
    end
    y = guess;
end
```

目的性？确定性？可执行性？有穷性？通用性？

# 例题

例：等差数列 $1, 2, 3, \dots, 10000$ 的求和算法：

- (1) 取  $N = 0, S = 0$ ;
- (2)  $N + 1 \Rightarrow N, S + N \Rightarrow S$ ;
- (3) 若  $N < 10000$  转 (2)，否则，转 (4)；
- (4) 输出  $N$  和  $S$

目的性？确定性？可执行性？有穷性？通用性？

## 计算机上的算法分类:

- 按求解问题的不同,可分为:
  1. 数值算法: 用于求解数值问题的算法
  2. 非数值算法: 用于求解非数值问题（公式推导等）的算法
- 按面向计算机的不同, 可分为:
  1. 面向串行计算机的串行算法, 只有一个进程;
  2. 面向并行计算机的并行算法, 含两个以上的进程
- 根据算法内部的特点,可分为:
  1. 确定性算法, 每完成一步确切知道下一步该做什么
  2. 非确定性算法（智能算法）

**Remark:** 非确定性算法是一种可能产生不同输出（即使输入相同）的算法，或者其内部操作的顺序可能会随机变化。这些算法通常依赖于概率或随机数生成。

# 例题

MATLAB program

```
syms x  
f = sin(x);  
df = diff(f, x)
```

数值算法？非数值算法？

# 例题

MATLAB program

```
% Initialize the vector  
original_array = [1, 2, 3, 4, 5];  
% Create an empty vector to store the results  
squared_array = zeros(1, length(original_array));  
  
% Use a for-loop for serial computing  
for i = 1:length(original_array)  
    squared_array(i) = original_array(i)^2;  
end  
  
disp( 'Result from serial computing: ' );  
disp(squared_array);
```

串行算法？并行算法？

# 例题

MATLAB program

```
% Initialize the vector
original_array = [1, 2, 3, 4, 5];
% Create an empty vector to store the results
squared_array = zeros(1, length(original_array));

% Use parfor for parallel computing
parfor i = 1:length(original_array)
    squared_array(i) = original_array(i)^2;
end

disp('Result from parallel computing: ');
disp(squared_array);
```

串行算法？ 并行算法？

# 例题

MATLAB program

```
% This function takes a solution vector x
```

```
% and returns a scalar value
```

```
fitnessFunction = @(x) x(1)^2;
```

```
% Set algorithm parameters
```

```
% In this case 1, as we have only one variable x
```

```
nVars = 1;
```

```
% Set options to plot the best fitness function
```

```
options = gaoptimset('PlotFcns', @gaplotbestf);
```

```
% Execute the genetic algorithm
```

```
[x, fval] = ga(fitnessFunction, nVars, ...
```

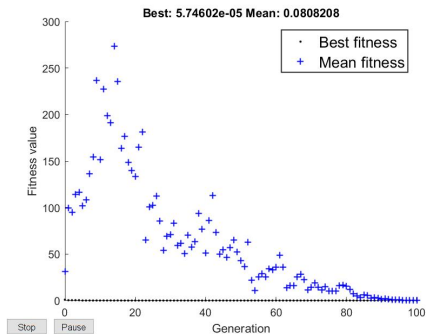
```
    [], [], [], [], [], [], [], options);
```

```
% Display the result
```

```
fprintf('The optimal solution is -x=-%.4f-with a-function-v
```



# 例题



## 不同算法及其计算复杂性有很大差异

例如: (对于大型数值问题): 求解20阶线性方程组

- 利用Gramer法则: 需要乘、除法运算次数  $9.7 \times 10^{20}$
- 利用Gauss消去法求解, 只需2670次乘、除法

例如: 排序算法的计算复杂度

- 冒泡排序:  $\mathcal{O}(n^2)$
- 快速排序:  $\mathcal{O}(n \log n)$

# 数值算法及其设计

## 算法设计的主要目的:

1. 研制可靠性好的数值方法（精度要求）
2. 选择计算复杂性好的数值方法（速度快、存贮少）
3. 方便编码和软件维护

## 目前流行的软件开发方法:

1. 面向过程的“自顶向下、逐步细化”的结构化方法；
2. 面向对象的“自下而上”的组装开发方法，其主要工具是“类”（特殊模块），利用它可组装数值算法和求解程序。

**Remark:** 本课程只介绍前者

## “自顶向下，逐步细化”法，其关键有三个方面:

- 划分模块，主要原则是模块功能要单一，即独立性好
- 设计或选择模块算法，先总体，后具体
- 充实细节，考虑计算公式的效率和具体要求

例：求解二次方程为例说明算法设计

$$ax^2 + bx + c = 0$$

解上述方程需要考虑三个细节：

1. 判别式：  $d = b^2 - 4ac$  大于零或小于零；
2. 当  $d > 0$  且  $\sqrt{d} \approx b$  时，会出现两个近似数相减而影响有效数字的位数；
3. 若  $|a|$  较  $|b|$  和  $|c|$  相对小很多时，可能出现舍入误差增大的问题。

在数值软件中，算法常用的表达方法

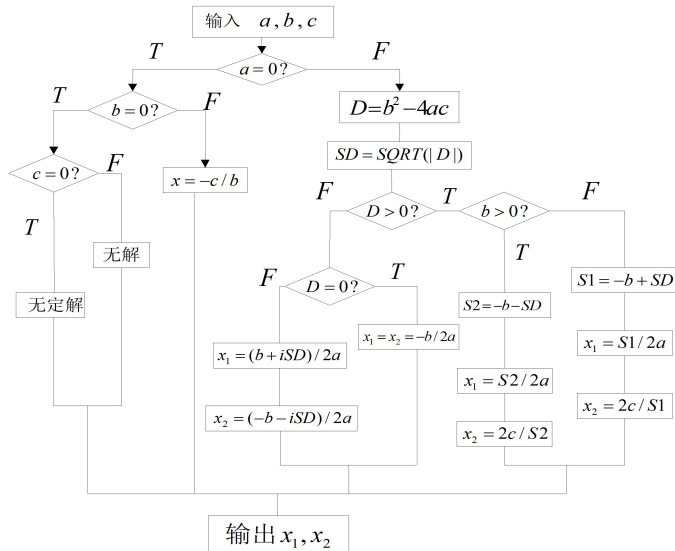
- 自然语言法；用文字有步骤的表示算法
- 图示法：又分为“流程图”和“结构化框图”

$$ax^2 + bx + c = 0$$

- (1) 输入数据  $a, b, c$
- (2) 如果  $a = 0$ , 转 (3), 否则转 (4)
- (3) 如果  $b \neq 0$ , 则  $x_1 = -c/b$ , 转 (7); 否则, 无解停止
- (4) 设  $D = b^2 - 4ac$ ,  $SD = \text{SQRT}(|D|)$   
如果  $D = 0$ ,  $x_1 = x_2 = -b/2a$ , 转(7)  
如果  $D < 0$ ,  $x_1 = (-b + iSD)/2a$ ,  $x_2 = (-b - iSD)/2a$ , 转(7)
- (5) 如果  $b \leq 0$ ,  $S_1 = -b + SD$ ,  $x_1 = S_1/2a$ ,  $x_2 = 2c/S_1$ , 转(7)
- (6)  $S_2 = -b - SD$ ,  $x_1 = S_2/2a$ ,  $x_2 = 2c/S_2$
- (7) 输出  $x_1$  和  $x_2$

**Remark:**  $x_2 = \frac{2c}{S_1} = \frac{2c}{-b+SD} = \frac{2c(-b-SD)}{(-b+SD)(-b-SD)} = \frac{2c(-b-SD)}{4ac} = \frac{(-b-SD)}{2a}$

# 图示法-流程图法



# 图示法-结构化框图法

## 1. 顶层设计:

|                             |
|-----------------------------|
| (I) 输入 $a, b, c$            |
| (II) 求解 $ax^2 + bx + c = 0$ |
| (III) 输出根 $x_1, x_2$        |

## 2. 第1层设计: 细化 (II)

|                        |                                |
|------------------------|--------------------------------|
| $a = 0$                |                                |
| (I) 求解<br>$bx + c = 0$ | (II) 求解<br>$ax^2 + bx + c = 0$ |

## 3. 第2层设计: a) 细化 (I)

|         |                    |
|---------|--------------------|
| $b = 0$ |                    |
| $T$     | $F$                |
| $c = 0$ | $x = -\frac{c}{b}$ |
| $T$     |                    |
| 无定解     |                    |
| $F$     | 无解                 |



# 图示法-结构化框图法

## 3. 第2层设计： b) 细化 (II)

|                                  |   |  |
|----------------------------------|---|--|
| $D = b^2 - 4ac$                  |   |  |
| $SD = \text{SQRT}( D )$          |   |  |
| $T$                              | $D = 0$                                 | $F$  |
| $x_1 = x_2$<br>$= -\frac{b}{2a}$ | $T$                                     | $F$  |
|                                  | $D > 0$                                 |  |
|                                  | $(I) \text{ 求解}$<br>$ax^2 + bx + c = 0$ | $x_1 = \frac{-b + iSD}{2a}$<br>$x_2 = \frac{-b - iSD}{2a}$ |

## 4. 第3层设计：细化

|                 |         |                 |
|-----------------|---------|-----------------|
| $T$             | $b > 0$ | $F$             |
| $S2 = -b - SD$  |         | $S1 = -b + SD$  |
| $x_1 = S2 / 2a$ |         | $x_1 = S1 / 2a$ |
| $x_2 = 2c / S2$ |         | $x_2 = 2c / S1$ |

① 研究对象与特点

② 数值方法的基本内容

③ 数值算法及其设计

④ 误差分析

## 数值计算中的误差来源

1. **模型误差**: 从实际问题中抽象出数学模型
2. **观测误差**: 通过观测得到模型中某些参数（或物理量）的值
3. **舍入误差**: 由于计算机的字长有限，原始数据在计算机中的表示、运算产生的误差
4. **截断误差**: 由数学问题化成数值问题产生的误差

# 例题

例: 若计算机仅能表示 6 位十进制数, 则将表示为

$$\pi^* = 3.14159$$

$$R_1 = \pi - \pi^* = 0.0000026\dots$$

若将其与数9.21000进行加法运算, 得

$$s = 3.14159 + 9.21000 \approx 1.23516 \times 10$$

$$R_2 = 12.3516 - 12.35159 = 0.00001$$

$R_1$  和  $R_2$  都是舍入误差。

# 例题

计算 $e^x$ 的数值时

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

由算法的有限性，故利用截断部分和

$$p(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

来近似代替，由此产生的误差即为截断误差，估计为

$$R_n(x) = e^x - p(x) = \frac{e^\zeta}{(n+1)!} x^{n+1}$$

# 例题

MATLAB 实验：取  $x = 2, n = 10$

```
1 - clear
2 - close all
3
4 - x = 2;
5 - S = 1;
6 - for n = 1:10
7 -     S = S + 1/ factorial(n)*x^n;
8 - end
9 - R1 = exp - S;
```

运行结果： 7.3890，而  $e^2 = 7.3891$

若取  $n = 5$ , 运行结果： 7.2667

## 误差的量度

1. 绝对误差
2. 相对误差
3. 有效数字

# 绝对误差

绝对误差定义:

设  $x$  为准确值,  $x^*$  为  $x$  的一个近似值, 称

$$E(x^*) = x^* - x$$

为近似值  $x^*$  的 (绝对) 误差, 简记为  $E$ .

此外, 圆周率的近似值  $\pi^* = 3.15$ , 绝对误差  $E = 0.0084 \dots$

一般来说,  $E$  的准确值很难求出, 只能估计出  $|E|$  的某个上界  $\epsilon(x^*)$ , 即

$$|E(x^*)| = |x^* - x| \leq \epsilon(x^*)$$

$\epsilon(x^*)$  称为近似值  $x^*$  的 (绝对) 误差限, 简记为  $\epsilon$

$$x^* - \epsilon \leq x \leq x^* + \epsilon(x^*)$$

这个不等式有时可以表示为

$$x = x^* \pm \epsilon(x^*)$$



# 相对误差

相对误差定义:

近似值  $x^*$  的误差  $E$  与准确值  $x$  之比

$$E_r(x^*) = \frac{E(x^*)}{x} = \frac{x^* - x}{x}$$

为近似值  $x^*$  的**相对误差**，简记为  $E_r$ .

$E_r$  绝对值的任一上界  $\epsilon_r(x^*)$ ，称为**相对误差限**，简记为  $\epsilon_r$ .

$$|E_r(x^*)| = \left| \frac{E(x^*)}{x} \right| = \left| \frac{x^* - x}{x} \right| \leq \epsilon_r(x^*)$$

由于  $x$  的准确值难以确定，通常利用

$$E_r^* = E_r^*(x^*) = \frac{E_r(x^*)}{x^*}$$

**Remark:** 绝对误差限与相对误差限不唯一；它们越小越好。

# 例题

绝对误差：必须为正？

相对误差：必须为正？

# 例题

绝对误差：误差可正可负，常常是无限位的

相对误差：相对误差也可正可负

# 有效数字

对于准确值  $x$  取近似值最常用的方法是采用“四舍五入”的原则。由此产生了一个专有名词—**有效数字**。

有效数字定义:

如果近似值  $x^*$  的误差的绝对值不超过某一位数字的半个单位, 且该位数字到的第一位非零数字共有  $n$  位, 则称用  $x^*$  近似  $x$  时具有  $n$  位有效数字。

如果使

$$|e^*| = |x^* - x| \leq \frac{1}{2} \times 10^{1-n}$$

成立的最大整数为  $n$ , 则称  $x^*$  为  $x$  的具有  $n$  位有效数字

# 例题

$\pi_1^* = 3.1416$ ,  $\pi_2^* = 3.14$  和  $\pi_3^* = 3.1415$  分别有几位有效数字

# 例题

$$|3.1416 - \pi| = 0.0000074 \dots \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} = \frac{1}{2} \times 10^{1-5}$$

$$|3.14 - \pi| = 0.0015 \dots \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2} = \frac{1}{2} \times 10^{1-3}$$

$$|3.1415 - \pi| = 0.0000926 \dots \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3} = \frac{1}{2} \times 10^{1-4}$$

# 例题

小数点后位数越多，有效数字位数越多？

小数点后位数越多，有效数字位数越多？

$$|3.142 - \pi| = 0.0004\ldots \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3} = \frac{1}{2} \times 10^{1-4}$$

$$|3.1415 - \pi| = 0.0000926\ldots \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3} = \frac{1}{2} \times 10^{1-4}$$



# 有效数字

在计算机中,  $x$  往往表示为如下标准形式

$$x = \pm 10^m \times 0.x_1x_2 \cdots x_nx_{n+1} \cdots x_p,$$

其中,  $m$  为整数,  $\{x_i\} \in 0, 1, 2, \dots, 9$  且  $x_1 \neq 0$ ,  $p \geq n$ .

如果

$$x^* = \pm 10^m \times 0.x_1x_2 \cdots x_n$$

是对  $x$  的第  $n+1$  位数字进行四舍五入后得到的近似值, 则  $x^*$  具有  $n$  位有效数字, 且误差的绝对值不超过

$$\frac{1}{2} \times 10^{m-n}$$

$$\pi_1^* = 3.1416 = 10^1 \times 0.31416$$

$$\pi_2^* = 3.14 = 10^1 \times 0.314$$

$$\pi_3^* = 3.1415 = 10^1 \times 0.31415$$

$$|3.1416 - \pi| = 0.0000074 \dots \leq \frac{1}{2} \times 10^{-4} = \frac{1}{2} \times 10^{1-5}$$

$$|3.14 - \pi| = 0.0015 \dots \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2} = \frac{1}{2} \times 10^{1-3}$$

$$|3.1415 - \pi| = 0.0000926 \dots \leq \frac{1}{2} \times 10^{-3} = \frac{1}{2} \times 10^{1-4}$$

# 有效数字

**Remark:** 有效数字位数与小数点的位置无关，一个数精确到小数点后几位，不能反应它的有效位数的多少，只有它是经四舍五入得到的数且写成如下的规格化形式后，小数点后的位数才能反应出其有效位数的多少。

$$x^* = \pm 10^m \times 0.x_1x_2 \cdots x_nx_{n+1} \cdots x_p$$

**Remark:** 从实验仪器所读的近似数（最后一位是估计位）不是有效数，估计最后一位是为了确保对最后一位进行四舍五入得到有效数。

例：从最小刻度为厘米的标尺读得的数据

123.4cm 是为了得到有效数 123cm,

156.7cm 是为了得到有效数 157cm

# 近似值的有效数字与相对误差之间的关系

设  $x^*$  是  $x$  的近似值, 它的表达式为

$$x^* = \pm 10^m \times 0.x_1x_2 \cdots x_n$$

则  $x^*$  的有效位数和  $x^*$  的相对误差之间的关系如下:

1. 若  $x^*$  具有  $n$  位有效数字, 则  $x^*$  的相对误差  $E_r^*$  满足

$$|E_r^*| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-n+1}$$

2. 若  $x^*$  的相对误差  $E_r^*$  满足

$$|E_r^*| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-n}$$

则  $x^*$  **至少** 具有  $n$  位有效数字。(证明P19)

**Remark:** 近似值的有效位数越多, 即  $n$  越大, 相对误差 (或限) 就越小。反之, 相对误差 (或限) 就越小,  $n$  就**可能**越大, 有效数字位数就可能越多。

# 例题

例：设  $x = 1.986$ ,  $x^* = 1.98$ , 则

$$|1.986 - 1.98| = 0.006 \leq \frac{1}{2} \times 10^{-1}$$

$x^*$  有 2 位有效数字。

$$|E_r^*(x^*)| = \left| \frac{x^* - x}{x^*} \right| = \frac{|1.986 - 1.98|}{1.98} \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2} < \frac{1}{2} \times 10^{-2+1}$$

另一方面：

$$|E_r^*(x^*)| \leq \frac{1}{2} \times 10^{-2}$$

$x^*$  至少有 2 位有效数字。

**Remark:** 相对误差的上界  $\frac{1}{2} \times 10^{-2+1}$  并不是最小的。

## 数值方法的稳定性与算法设计原则

1. 设计和选择算法**首要关心**的问题是**精度**要求，要建立一些定性分析准则用于判断结果的可靠性，这是**数值稳定性问题**。
2. 对于一个数值方法，若对原始数据或某一步有舍入误差，在执行过程中，这些误差能得到控制，则称**该数值方法稳定**。否则，称为不稳定的。
3. 利用两种数值方法 A 和 B 解输入和舍入误差规则相同的同一问题，若用 A 法比 B 法得到的计算解精度更高，则称 **A 法比 B 法具有较大的稳定性**。

# 例题

例：计算积分  $I_n = \frac{1}{e} \int_0^1 x^n e^x dx$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots, 15$

解：由于

$$e = \int_0^1 (x^n e^x)' dx = \int_0^1 x^n e^x dx + n \int_0^1 x^{n-1} e^x dx$$

所以

$$I_n = 1 - nI_{n-1} \quad (1)$$

$$I_0?$$

# 例题

方法一： 使用公式 (1) 先计算  $I_0$ , 然后依次计算  $I_1, I_2, \dots, I_{15}$

$$I_0 = \frac{1}{e} \int_0^1 e^x dx = 1 - \frac{1}{e} \approx 0.63212056$$

$$I_1 = 1 - I_0 = 0.36787944$$

$$\vdots$$

$$I_{10} = 1 - 10I_9 = 0.08812800$$

$$I_{11} = 1 - 11I_{10} = 0.03059200$$

$$I_{12} = 1 - 12I_{11} = 0.63289600 \text{ ?}$$

$$I_{13} = 1 - 13I_{12} = -7.2276480 \text{ ? ?}$$

$$I_{14} = 1 - 14I_{13} = 94.959424 \text{ ? ? ?}$$

$$I_{15} = 1 - 15I_{14} = -1423.3914 \text{ ? ? ? ?}$$

Remark: 初始误差  $|E_0| < 0.5 \times 10^{-8}$ , 然而  $|E_n| = n!|E_0|$



**方法二：** 使用公式  $I_{n-1} = \frac{1-I_n}{n}$ , 先计算  $I_{15}$ , 然后依次计算  $I_{14}, \dots, I_1, I_0$

$$I_{15} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{16e} - \frac{1}{16} \right) \approx 0.042746233$$

$$I_{14} = \frac{1}{15} (1 - I_{15}) = 0.063816918$$

$$I_{13} = \frac{1}{14} (1 - I_{14}) = 0.066870220$$

$\vdots$

$$I_1 = \frac{1}{2} (1 - I_2) = 0.036787944$$

$$I_0 = \frac{1}{1} (1 - I_1) = 0.63212056$$

因此，方法一为不稳定算法，而方法二为稳定算法。

在我们今后的讨论中，误差将不可避免，算法的稳定性将会是一个非常重要的话题。

# 蝴蝶效应

**蝴蝶效应**是气象学家洛伦兹1963年提出来的。其大意为：一只南美洲亚马孙河流域热带雨林中的蝴蝶，偶尔扇动几下翅膀，可能在两周后引起美国德克萨斯一场龙卷风。

蝴蝶效应在社会学界用来说明：一个坏的微小的机制，如果不加以及时地引导、调节，会给社会带来非常大的危害，戏称为“龙卷风”或“风暴”

# 例题

例: 求线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 = \frac{11}{6} \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 = \frac{13}{12} \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = \frac{47}{60} \end{cases}$$

其精确解为

$$x_1 = x_2 = x_3 = 1$$

但是, 若对数据取3位有效数字, 利用 Gauss 消去法求解, 则计算解:

$$x_1 \approx 1.09, x_2 \approx 0.0488, x_3 \approx 0.491$$

# 例题

同样对方程

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

利用 Gauss 消去法，取 3 位有效数字，则得到准确解：

$$x_1 = 9, x_2 = -1, x_3 = 6$$

1. “数值问题”计算解的精度，不但与数值方法的稳定有关，而且还与数值问题的性态好坏有关。
2. 在数值问题中，若输出数据对输入数据的扰动（误差）很敏感（小的变化会引起较大的变化），称这类数值问题为病态问题；否则称为良态问题。

# 选用计算公式和设计算法时的普遍原则

## 一. 四则运算中的稳定性问题

### 1. 防止大数吃小数

$$0.3684676 + 10^7 \times 0.6327544 + 0.4932001 + 0.4800100 = 10^7 \times 0.6327544$$

预防方法：先加小数，由小到大逐次相加

$$0.3684676 + 0.4800100 + 0.4932001 + 10^7 \times 0.6327544 = 10^7 \times 0.6327545$$

### 2. 要避免两个相近数相减

相近数相减会严重损失有效数值的位数  $1 - \cos(x)$  可改为  $2 \sin^2(x/2)$

### 3. 避免小数作除数和大数作乘法

这样可避免误差放大

## 二. 提高算法效率问题

### 1. 尽量减少运算次数:

$$x^{255} = x \times x^2 \times x^4 \times x^8 \times x^{16} \times x^{32} \times x^{64} \times x^{128}$$

254次乘法  $\Rightarrow$  14次乘法

# 例题

例：计算  $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$

直接计算需要  $n(n+1)/2$  次乘法和  $n$  次加法

若将公式变成递推公式：

$$\begin{cases} s_n = a_n \\ s_k = x s_{k+1} + a_k, k = n-1, n-2, \dots, 1, 0 \\ p_n(x) = s_0 \end{cases}$$

后，再计算  $p_n(x)$ ，只需做  $n$  次乘法和  $n$  次加法。  
充分利用递推公式，可提高算法效率。



# 选用计算公式和设计算法时的普遍原则

## 2. 充分利用耗时少的运算

例:  $k + k$  比  $2k$ ,  $a * a$  比  $a^2$ ,  $b * 0.25$  比  $b/4$  等节省时间。

## 3. 充分利用存贮空间

- 节省原始数据的存贮单元;
- 节省工作单元。

例:  $S = \text{SPARSE}(X)$  converts a sparse or full matrix to sparse form by squeezing out any zero elements.

# 选用计算公式和设计算法时的普遍原则