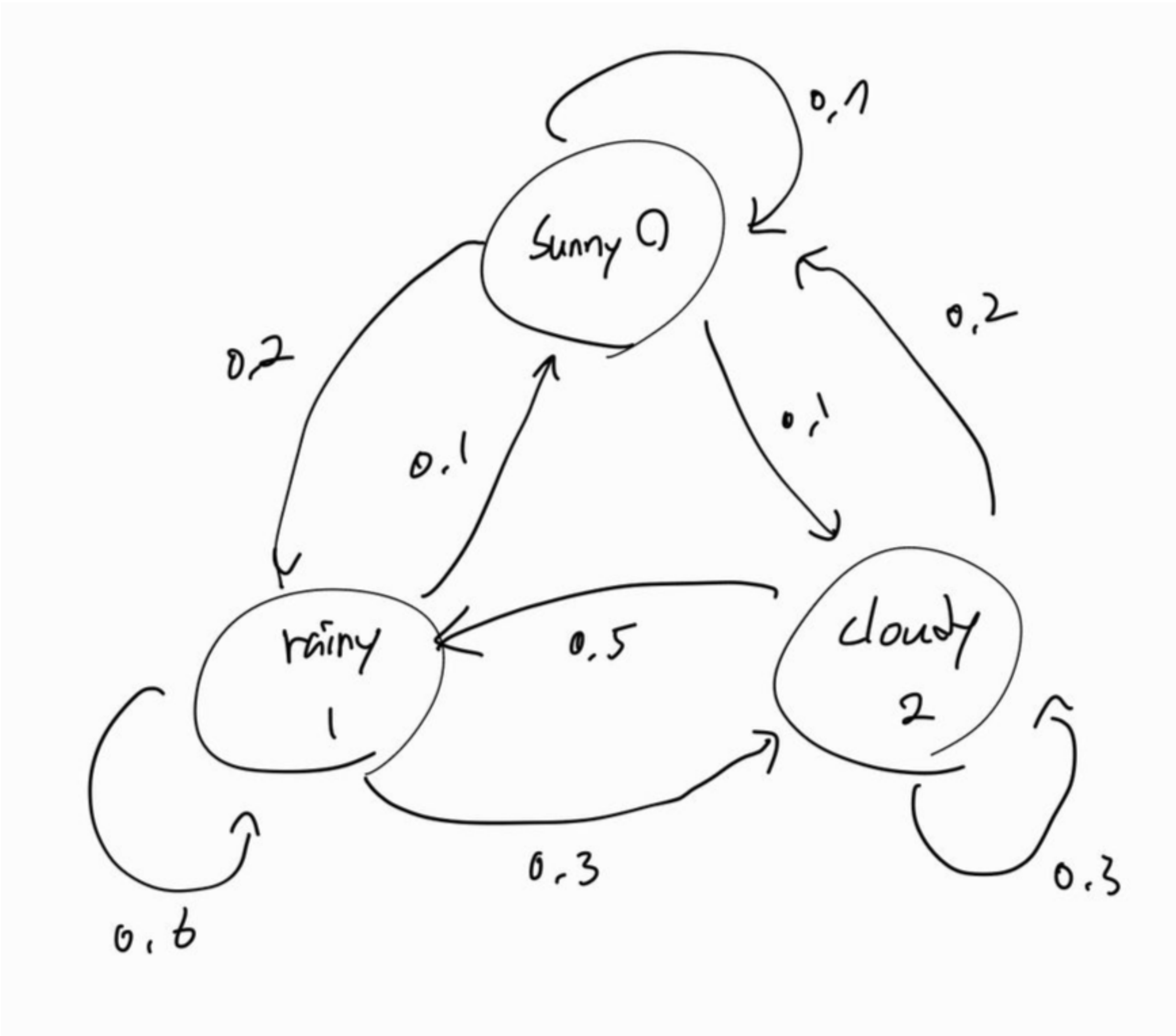
# State Transition Probability

Transition(전이) : 어떤 상태에서 다음 단계의 상태로 변화하는 것

State Transition Probability(상태 전이 확률) : 전이에 대한 확률을 정의한 것

---

다음과 같은 State Transition Diagram(상태 전이도)가 있다고 가정해보겠다.




이때, 오늘 rainy인데, 내일은 sunny이며, 모레는 rainy일 전이확률을 구해보겠다.

이를 구하기 위해선 먼저 Markov Chain이 필요하다.

Markov Chain(마르코프 체인)이란, 마르코프 성질을 가진 이산 시간 확률 가정이다.

마르코프 성질은 특정 상태의 확률은 오직 과거의 상태에 의존한다는 것이다.

워딩만 봤을 때는 감이 잘 오지 않는데, 식을 통해 설명하겠다.

$$P(X_{n+1} = j | X_0 = i_0, X_1 = i_1, ..., X_n = i_n) = P(X_{n+1} = j | X_n = i)$$

즉, n+1 시점의 확률변수 $X_{n+1}$는 바로 직전인 $X_n$에만 영향을 받는다.

이제, 오늘 rainy인데, 내일은 sunny이며, 모레는 rainy일 전이확률을 구해보겠다.

$$P(X_1=0, X_2=1 | X_0=1)$$

$$= P(X_2=1 | X_1=0, X_0=1) \cdot P(X_1=0 | X_0=1)$$

이때 마르코프 체인에 의해 $X_2$는 $X_1$에만 영향을 받는다.

$$P(X_2=1 | X_1=0, X_0=1) = P(X_2=1 | X_1=0)$$

$$= P(X_2=1 | X_1=0) \cdot P(X_1=0 | X_0=1)$$

$$= 0.2 \cdot 0.1 = 0.02$$

---

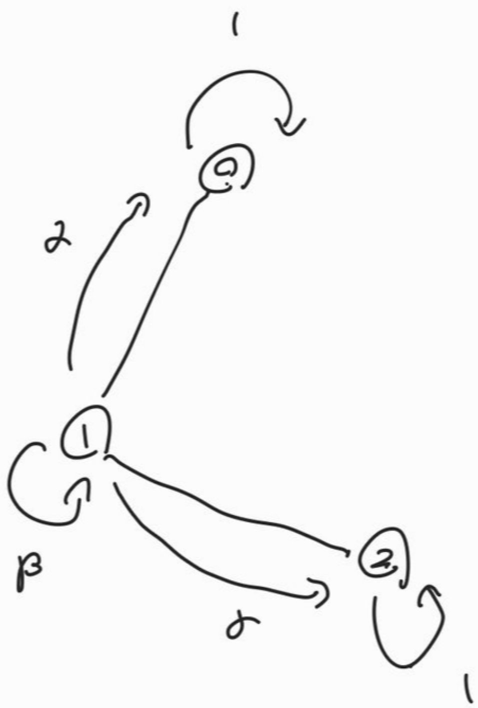
First Step Analysis를 통해 absorption되었을 확률을 구해보겠다.

absorption이란, 시간이 지나도 상태가 변하지 않는 것이다.

T는 absorption 되기까지의 시간이다.

다음과 같은 State Transition Diagram(상태 전이도)가 있다고 가정해보겠다.

$$P = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$




이제 상태 0에서 absorption 되었을 확률 $a_1$과 상태 1에서 absorption 되었을 확률 $b_1$를 구해보겠다.

$$a_0 = P(X_T = 0 \mid X_0 = 0) = 1$$

$$a_2 = P(X_T = 0 \mid X_0 = 2) = 0$$

$$a_1 = P(X_T = 0 \mid X_0 = 1) = \alpha a_0 + \beta a_1 + \gamma a_2$$

$$= \alpha \cdot 1 + (1 - (\alpha + \gamma)) a_1 + \gamma \cdot 0$$

$$= \alpha + a_1 - a_1(\alpha + \gamma) = a_1$$

$$a_1(\alpha + \gamma) = \alpha$$

$$a_1 = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}$$

$$b_0 = P(X_T = 2 \mid X_0 = 0) = 0$$

$$b_2 = P(X_T = 2 \mid X_0 = 2) = 1$$

$$b_1 = P(X_T = 2 \mid X_0 = 1) = \alpha b_0 + \beta b_1 + \gamma b_2$$

$$= \alpha \cdot 0 + (1 - (\alpha + \gamma)) b_1 + \gamma \cdot 1$$

$$= \gamma + b_1 - b_1(\alpha + \gamma) = b_1$$

$$b_1(\alpha + \gamma) = \gamma$$

$$b_1 = \frac{\gamma}{\alpha + \gamma}$$

그리고 absorption 되는데 걸리는 시간의 기댓값을 구해보겠다.

$$t_1 = E[T|X_n = 1]$$

$$t_0 = 0$$

$$t_2 = 0$$

$$t_1 = \alpha \cdot t_0 + \beta t_1 + \gamma t_2 + 1$$

$$= (1-(\alpha+\gamma))t_1 + 1$$

$$= t_1 - t_1(\alpha+\gamma) + 1 = t_1$$

$$t_1(\alpha+\gamma) = 1$$

$$t_1 = \frac{1}{\alpha+\gamma}$$

여기서 특이한 점은 시간의 기댓값을 계산할 때는 확률 계산과 다르게 “+1”을 하는데, 이유는 다음과 같다.

현재 상태에서 다음 상태로 전환하는 데 실제로 1단계(또는 1시간, 1회 등의 단위)가 소요된다는 것을 반영하기 위해서 이다.

"+1"은 그 전환을 수행하는 데 실제로 소요되는 한 단계를 의미한다.

그렇기 때문에, 이 "+1"은 현재 상태에서 다음 상태로 넘어가는 과정을 나타내며, 이러한 전환 과정이 기대 시간에 기여한다는 것을 반영한다.

반면에 확률 계산에는 "+1"을 더할 필요가 없다.

왜냐하면, 확률 계산의 목적은 사건이 발생할 확률 자체를 찾는 것이지, 사건이 발생하기까지 걸리는 시간이나 단계 수를 계산하는 것이 아니기 때문이다.

확률 계산에서는 사건의 발생 여부만 중요하며, 이를 위해 특정 단계를 추가로 고려할 필요가 없다.