Gambler’s Ruin

파산 확률이란, 플레이어가 상태 0이 될 확률을 뜻한다.

상태 전이도는 아래와 같다.

1	0	0	0	⋯	0	0
q	0	p	0	⋯	0	0
0	q	0	p	⋯	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋮
0	0	0	0	⋯	0	p
0	0	0	0	⋯	0	1

$$\text{플레이어가 승리할 확률} = P(X_{n+1} = i+1 | W_n = i) = p$$

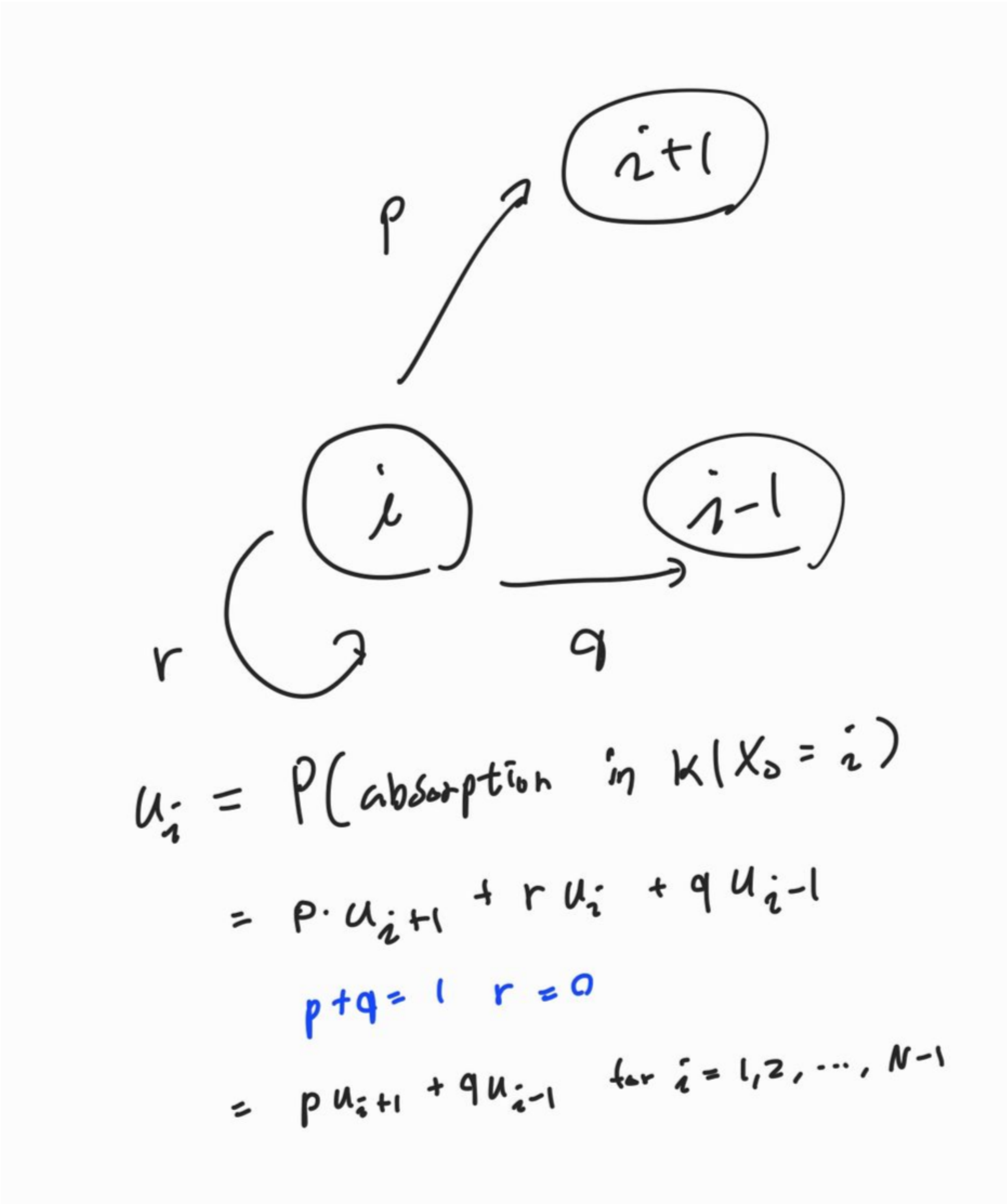
$$\text{딜러가 승리할 확률} = P(X_{n+1} | X_n) = q$$

$$\text{무승부 확률} = P(X_{n+1} | X_n = i) = r$$

플레이어가 승리할 확률과 딜러가 승리할 확률의 합을 1로 두고, 무승부 확률을 0으로 두었다.

이때, 파산 확률을 구하면 된다.

$$u_i = P(absorption\ in\ k | X_0 = i)$$



$$u_i = pu_{i+1} + qu_{i-1}$$

이 식에 i를 1부터 넣어보겠다.

$i=1$ 인 경우

$$u_1 = pu_2 + qu_0$$

$$pu_2 - u_1 + qu_0 = 0$$

$p+q=1$

$$pu_2 - (p+q)u_1 + qu_0 = 0$$

$$p(u_2 - u_1) - q(u_1 - u_0) = 0$$

$$p(u_2 - u_1) = q(u_1 - u_0)$$

$x_i = u_i - u_{i-1}$ 라고 설정

$$x_2 = \frac{q}{p} x_1$$

$i=2$ 인 경우

$$x_3 = \frac{q}{p} x_2 = \left(\frac{q}{p}\right)^2 x_1$$

$i=k$ 인 경우

$$x_{k+1} = \left(\frac{q}{p}\right)^k x_1$$

$i=N-1$ 인 경우

$$x_N = \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1} x_1$$

$$x_1 = u_1 - u_0$$

$$x_2 = u_2 - u_1$$

$$\vdots$$

$$x_k = u_k - u_{k-1}$$

$$x_N = u_N - u_{N-1}$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = u_k - u_0$$

$$u_0 = 1$$

$$u_N = 0$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = u_k - u_0 = u_k - 1$$

$$u_k = 1 + \sum_{i=1}^{k} x_i$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i = u_N - u_0 = -1$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i + 1 = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i + 1$$

$$= 1 + x_1\left(1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1}\right) = 0$$

$$x_1 = -\frac{1}{\left(1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1}\right)}$$

$$u_k = 1 + \sum_{i=1}^{k} x_i$$

$$= 1 + x_1\left(1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1}\right)$$

$$= 1 + \frac{\left(1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{k-1}\right)}{\left(1 + \frac{q}{p} + \left(\frac{q}{p}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{q}{p}\right)^{N-1}\right)}$$

$$u_k = \begin{cases} 1 - \frac{k}{N} & \left(\text{if } p = q = \frac{1}{2}\right) \\ 1 - \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^k}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N} & (\text{if } p \neq q) \end{cases}$$