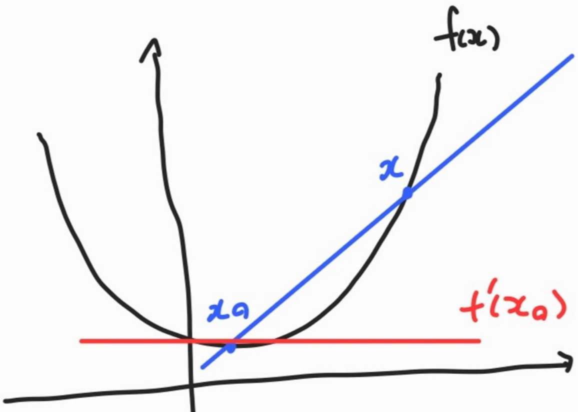
Jensen`s Inequality - Probability Perspective

젠슨 부등식 $E(f(x)) \ge f(E(x))$ 증명



convex한 함수 $f(x)$

$x_0 < x$ 만족하는 점 x_0가 있을 때,

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = b$$

$f(x)$는 convex하기 때문에 f의 변화율은

x_0의 접선의 기울기 보다 크거나 같다.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge b$$

$$f(x) - f(x_0) \geq b(x - x_0)$$

$$f(x) \geq b(x - x_0) + f(x_0)$$

이제 확률론적 관점으로 $x = X$, $x_0 = E(X)$라고 한다.

$$f(X) \geq b(X - E(X)) + f(E(X))$$

양변에 평균을 씌우겠다.

$$\begin{aligned} E(f(X)) &\geq E[b(X - E(X)) + f(E(X))] \\ &= E[b(X - E(X))] + E[f(E(X))] \\ &= bE[X - E(X)] + f(E(X)) \end{aligned}$$

$E[f(E(X))] = f(E(X))$ 이다.

$f(E(X))$는 고정된 상수이다. 왜냐하면 $E(X)$는 고정된 값이고,

이를 함수 f에 넣었기 때문이다.

$E[c] = c$ 이듯이, 상수의 기댓값은 상수이다.

$$bE[X - E(X)] = b\{E(X) - E[E(X)]\} = b(E(X) - E(X)) = 0$$

$$\therefore E(f(X)) \geq f(E(X))$$