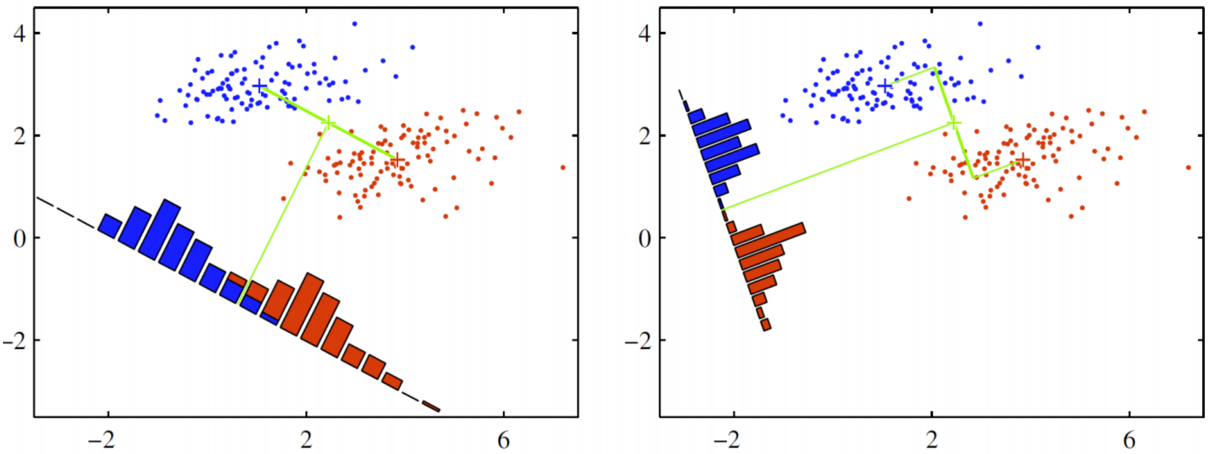
LDA-Bayesian Perspective



LDA는 위 그림처럼 두 데이터를 잘 구분할 수 있는 **직선**을 찾는 걸 목표로 한다.

그러기 위해선 두 클래스의 평균이 서로 멀도록 해야되며, 클래스 간 분산은 크도록, 클래스 내 분산은 작도록 하는 방향으로 직선을 찾아야 한다.

이 직선을 선형 결정 경계라 칭한다.

PRML 4.2 에 따르면, 확률적 관점으로 전환하여 데이터의 분포에 대한 간단한 가정에서 선형 결정 경계가 어떻게 생기는지 보여준다.

이를 위해서 k개의 클래스를 가진 C_k 가 있다고 가정한다. x는 새로운 데이터라 가정한다.

클래스 조건부 밀도 $P(x|C_k)$와 클래스 사전 확률 $P(C_k)$을 모델링하고, 베이즈 정리를 통해 사후 확률 $P(C_k|x)$을 계산한다.

여기서 사후확률 $P(C_k|x)$는 ‘새로운 데이터 x가 주어졌을 때, 이 데이터가 C_k클래스에 속할 확률이다.’

클래스가 2개 즉, k = 2일때를 예시로 들어보자, 클래스가 2개이기 때문에 $p(C_1|x)$ 또는 $p(C_2|x)$ 하나 구하면 된다.

그렇다면 $P(C_1|x)$를 구해보자

$$P(C_1|x) = \frac{P(x|C_1)P(C_1)}{P(x)}$$
$$= \frac{P(x|C_1)P(C_1)}{P(x|C_1)P(C_1) + P(x|C_2)P(C_2)}$$

여기서 로짓변환을 사용한다.

$p(C_1|x)$의 분자와 분모에 로그를 취하고 이를 비율로 나타내면, 로그 오즈(log odds) 또는 로짓(logit) 변환이라고 하는 것을 얻을 수 있다.

$$a = \ln\left(\frac{p(x|C_1)p(C_1)}{p(x|C_2)p(C_2)}\right)$$

여기서 a가 0보다 크다면 $P(C_1|x)$가 $P(C_2|x)$ 보다 크다. 따라서 새로운 데이터 x는 C_1 클래스에 속하게 된다. 그 증명과정을 아래에 서술하겠다.

즉, a는 베이지안 관점에서 결정경계가 된다.

$$a > 0$$
$$\ln\left(\frac{P(x|C_1)P(C_1)}{P(x|C_2)P(C_2)}\right) > 0$$
$$\text{로그 함수의 성질에 의해}$$
$$\frac{P(x|C_1)P(C_1)}{P(x|C_2)P(C_2)} > 1$$
$$P(x|C_1)P(C_1) > P(x|C_2)P(C_2)$$
$$\text{여기서 양변에 } P(x)\text{를 나누어 준다면}$$
$$P(C_1|x) > P(C_2|x)$$
$$\text{가 된다.}$$

a가 0이라면 $P(C_1|x) = P(C_2|x)$가 되므로 임의로 설정을 해줘야 한다.

이제 조금 더 일반화 하기 위해 $a = \ln\left(\frac{p(x|C_1)p(C_1)}{p(x|C_2)p(C_2)}\right)$식을 변형해 보겠다.

$$a = \ln\left(\frac{p(x|C_1)\,p(C_1)}{p(x|C_2)\,p(C_2)}\right)$$

$$e^{a} = \frac{p(x|C_1)\,p(C_1)}{p(x|C_2)\,p(C_2)}$$

$$e^{-a} = \frac{p(x|C_2)\,p(C_2)}{p(x|C_1)\,p(C_1)}$$

$$1+e^{-a} = \frac{p(x|C_1)\,p(C_1) + p(x|C_2)\,p(C_2)}{p(x|C_1)\,p(C_1)}$$

$$\frac{1}{1+e^{-a}} = \frac{p(x|C_1)\,p(C_1)}{p(x|C_1)\,p(C_1) + p(x|C_2)\,p(C_2)}$$

$$= \frac{p(x|C_1)\,p(C_1)}{p(x)} = p(C_1|x)$$

$$a = \ln\left(\frac{P(x|C_1)P(C_1)}{P(x|C_2)P(C_2)}\right)$$

$$e^a = \frac{P(x|C_1)P(C_1)}{P(x|C_2)P(C_2)}$$

여기서 분자와 분모를 뒤집어준다면

$$e^{-a} = \frac{P(x|C_2)P(C_2)}{P(x|C_1)P(C_1)}$$

$$1 + e^{-a} = \frac{P(x|C_2)P(C_2) + P(x|C_1)P(C_1)}{P(x|C_1)P(C_1)}$$

$$\frac{1}{1+e^{-a}} = \frac{P(x|C_1)P(C_1)}{P(x|C_1)P(C_1) + P(x|C_2)P(C_2)}$$
$$= P(C_1|x)$$

$\frac{1}{1+e^{-a}}$는 시그모이드 함수 $\sigma(a)$가 된다. 시그모이드 함수는 입력 a가 0보다 크면 함수값이 0.5보다 크고 0보다 작으면 0.5보다 작아진다. 그리고 함수값의 범위는 0부터 1까지 이다.

즉, 새로운 데이터 x가 클래스 C_1에 속할 사확률인 $P(C_1|x)$가 시그모이드 함수의 형태로 바꿔지며, 새로운 데이터 x를 넣었을때 그 함수값이 0.5보다 크다면 그 새로운 데이터 x는 클래스 C_1에 속하게 된다. 즉, 확률의 형태로 바뀐다.