Отчет по лабораторной работе №6

по дисциплине: Математическое моделирование

Го Чаопен

Содержание

# 1 Цель работы

Продолжить знакомство с функционалом языка программирования Julia, дополнительных библиотек (DifferentialEquations, Plots). Продолжить ознакомление с языком моделирования Modelica и программным обеспечением OpenModelica. Используя эти средства, описать задачу об эпидемии (используя измененную математическую модель SIR).

# 2 Задание

На одном острове вспыхнула эпидемия. Известно, что из всех проживающих на острове () в момент начала эпидемии () число заболевших людей (являющихся распространителями инфекции) , А число здоровых людей с иммунитетом к болезни . Таким образом, число людей восприимчивых к болезни, но пока здоровых, в начальный момент времени .

Постройте графики изменения числа особей в каждой из трех групп. Рассмотрите, как будет протекать эпидемия в случае:

1. Если
2. Если

# 3 Теоретическое введение

Задача текущей лабораторной работы сводится к построению математической модели, достаточно сильно похожей на модель SIR. Сначала будет дан материал о модели «Susceptible-Infectious-Recovered», а далее будут рассмотрены различия данной модели и модели, используемой при выполнении лабораторной работы.

## 3.1 Модель SIR

**Модель SIR** - это математическая модель, используемая для описания распространения инфекционных заболеваний в популяции. Аббревиатура SIR означает «Susceptible-Infectious-Recovered». Из расшифровки аббревиатуры следует, что модель разделяет популяцию на три группы: восприимчивые (susceptible), инфицированные (infectious) и выздоровевшие (recovered).

В модели SIR инфекционное заболевание передается от инфицированных к восприимчивым через непосредственный контакт. Когда восприимчивый контактирует с инфицированным, есть определенная вероятность заражения, которая зависит от свойств возбудителя и сопротивляемости организма. После того, как восприимчивый заразился, он становится инфицированным, и тем самым переходит в группу infectious.

Когда инфицированный выздоравливает, он переходит в группу recovered. В отличие от других моделей, таких как SEIR, модель SIR не учитывает длительности инкубационного периода или время восстановления, и считает, что инфицированные остаются в одном состоянии до тех пор, пока не выздоровеют [1].

Модель SIR представляется системой трех дифференциальных уравнений, которые описывают динамику численности каждой группы в зависимости от времени. Эти уравнения могут быть использованы для прогнозирования темпов распространения заболевания и оценки эффективности мер по его контролю.

1. Уравнение числа восприимчивых (S):

* где — коэффициент интенсивности контактов индивидов с последующим инфицированием; — численность восприимчивых индивидов в момент времени ; — численность инфицированных индивидов в момент времени ; — объем популяции.
* Первое уравнение описывает изменение численности восприимчивых с течением времени. Уравнение показывает, что изменение числа здоровых (и при этом восприимчивых к заболеванию) индивидуумов уменьшается со временем пропорционально числу контактов с инфицированными. После контакта происходит заражение, восприимчивый переходит в состояние инфицированного.

1. Уравнение числа инфицированных (I):

* где — коэффициент интенсивности выздоровления инфицированных индивидов.
* Второе уравнение описывает изменение числа инфицированных с течением времени. Уравнение показывает, что скорость увеличения числа заразившихся растет пропорционально числу контактов здоровых и инфицированных и уменьшается по мере выздоровления последних.

1. Уравнение числа выздоровевших (R):

* где — численность переболевших индивидов в момент времени .
* Третье уравнение демонстрирует, что число выздоровевших в единицу времени пропорционально числу инфицированных. Иначе говоря, каждый заболевший через некоторое время должен поправиться.

Стоит отметить, что сумма численностей трех групп всегда остается постоянной, т.е. . Коэффициент называется **«базовым коэффициентом воспроизведения»** [2]. Для каждой болезни есть собственный коэффициент .

Модель SIR может быть использована для прогнозирования темпов распространения заболевания и оценки эффективности мер по его контролю, таких как вакцинация, карантин, социальная дистанцирование и т.д. Также, в зависимости от начальных условий, коэффициента инфицирования, коэффициента выздоровления и других коэффициентов, модель может быть использована для исследования различных вариантов эпидемических сценариев.

## 3.2 Задача об эпидемии

Отличия модели, предлагаемой для описания в лабораторной работы, от вышеуказанной модели SIR таковы:

1. Введен дополнительный параметр: — критическое значение , после превышения которого инфицированные способны заражать восприимчивых. До этого критического значения инфицированные не заражают восприимчивых.
2. Изменены стандартные символы, отождествляющие коэффициенты: (коэффициент заболеваемости), (коэффициент выздоровления).
3. В соответствии с предыдущими пунктами изменена система уравнений [3]:

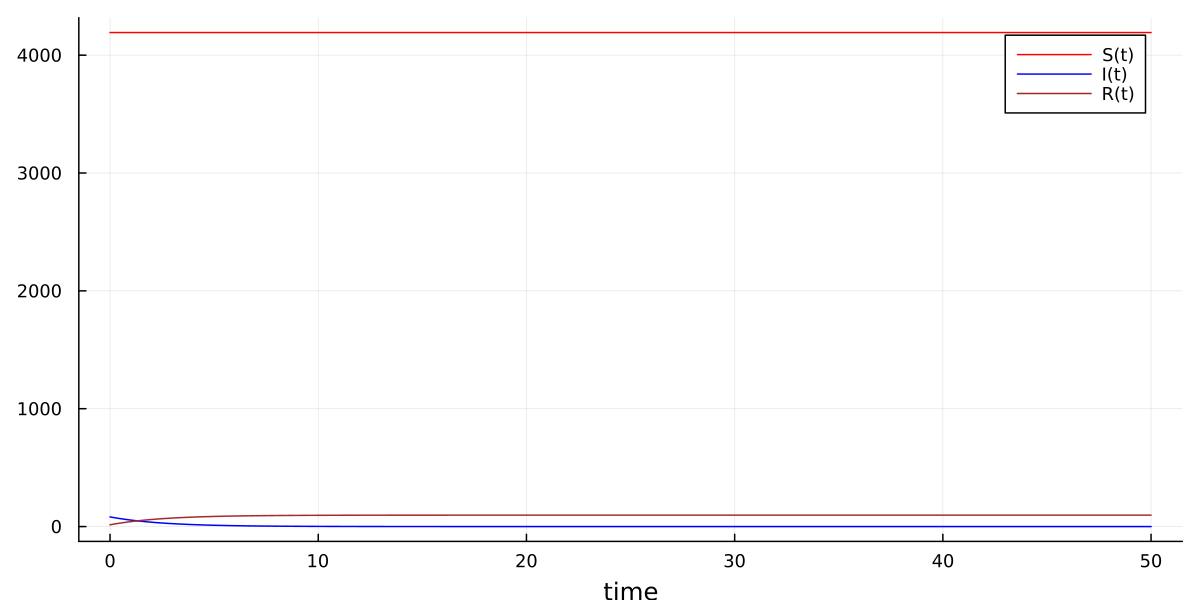
# 4 Выполнение лабораторной работы

## 4.1 Julia

### 4.1.1 Задание №1

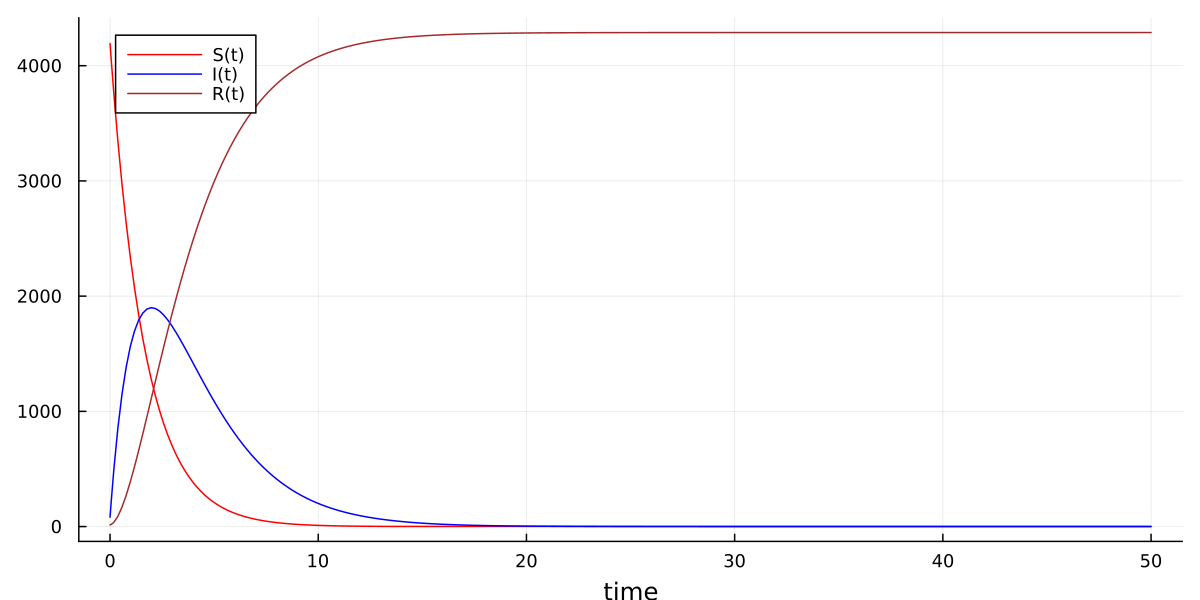
1. Пишем программу, воспроизводящую модель на языке программирования Julia. (рис. [1](#fig:01))

* using Plots  
  using DifferentialEquations  
    
  N = 4289  
  I0 = 82  
  R0 = 15  
  S0 = N - I0 - R0  
  Ip = 300  
    
  a = 0.6  
  b = 0.4   
    
  u0 = [S0, I0, R0]  
  T = (0.0, 50.0)  
    
  function F!(du, u, p, t)  
   if u[2] > Ip  
   du[1] = -a\*u[1]  
   du[2] = a\*u[1] - b\*u[2]  
   else   
   du[1] = 0  
   du[2] = -b\*u[2]  
   end   
   du[3] = b \* u[2]  
  end   
    
  prob = ODEProblem(F!, u0, T)  
  sol = solve(prob, dtmax=0.2)  
    
  S = []  
  I = []  
  R = []  
    
  TT = sol.t  
    
  for u in sol.u  
   s, i, r = u  
   push!(S, s)  
   push!(I, i)  
   push!(R, r)  
  end  
    
  plt = plot(dpi = 150, size = (800, 400))  
    
  plot!(plt, TT, [S, I, R], color = [:red :blue :brown], xlabel = "time", label = ["S(t)" "I(t)" "R(t)"])  
  savefig(plt, "img\_lab6\_jl\_1.png")

* 
* Figure 1: График модели SIR Julia (при )

### 4.1.2 Задание №2

1. Изменено значение , которое теперь меньше . Получаем новый график. (рис. [2](#fig:02))

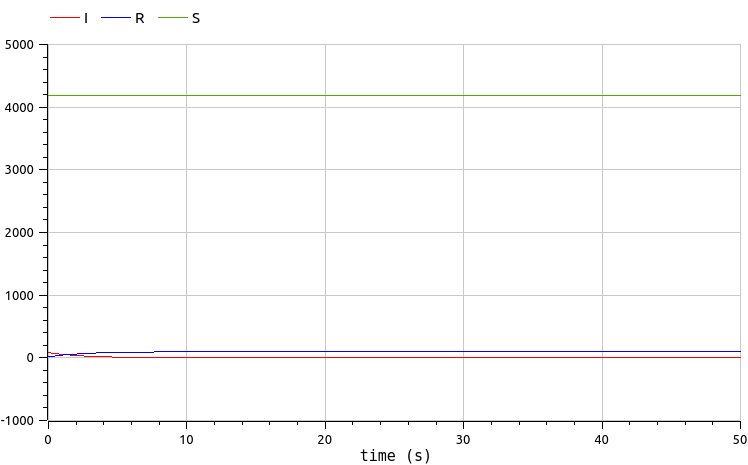
* 
* Figure 2: График модели SIR Julia (при )

## 4.2 Modelica

### 4.2.1 Задание №1

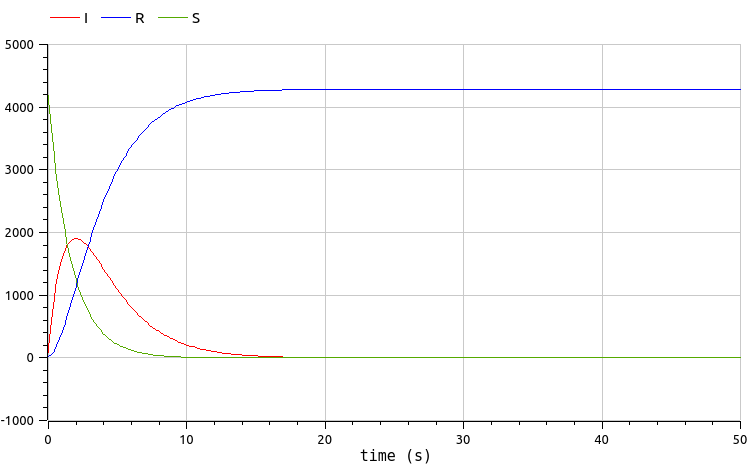
1. По аналогии с Julia пишем программу, воспроизводящую измененную модель SIR на языке моделирования Modelica с использованием ПО OpenModelica. Получаем график. (рис. [3](#fig:03))

* model lab6\_1  
  constant Real a = 0.6;  
  constant Real b = 0.4;  
  constant Integer Ip = 300;  
  constant Integer N = 4289;  
  Real S(time);  
  Real I(time);  
  Real R(time);  
  initial equation  
   I = 82;  
   R = 15;  
   S = N - R - I;  
  equation  
   if I > Ip then  
   der(S) = -a\*S;  
   der(I) = a\*S - b\*I;  
   else   
   der(S) = 0;  
   der(I) = -b\*I;  
   end if;  
    
   der(R) = b\*I;  
    
  end lab6\_1;

* 
* Figure 3: График модели SIR Modelica (при )

### 4.2.2 Задание №2

1. По аналогии с Julia пишем программу для второго случая. Получаем новый график. (рис. [4](#fig:04))

* 
* Figure 4: График модели SIR Modelica (при )

# 5 Анализ результатов

На текущем примере построения математической модели, схожей с моделью SIR, мы можем продолжить сравнивать язык программирования Julia и язык моделирования Modelica. Говоря честно, по сравнению с анализом результатов при выполнении предыдущей лабораторной работы мало что изменилось: тенденция к сглаживанию негативных моментов при выполнении лабораторной работы на языке программирования Julia продолжается. Со временем и с новыми заданиями, решаемыми при помощи библиотеки DifferentialEquations, скорость написания программ на Julia почти сравнялась с таковой скоростью при использовании Modelica.

На обоих языках одинаково просто добавляются условия в уравнения, как в текущем случае. Однако, хочется заметить, что в Modelica в разы удобнее составлять уравнения, т.к. все переменные, зависящие от времени, подписываются заданными ранее символами в отличие от Julia, где каждой переменной соответствует элемент массива. Такая реализация может запутать, особенно при условии наличие трех и более переменных, зависящих от времени и используемых в системе. Это может привести к ошибкам, связанными с усидчивостью, при написании системы.

# 6 Выводы

Продолжил знакомство с функционалом языка программирования Julia, дополнительных библиотек (DifferentialEquations, Plots), интерактивного блокнота Pluto, а также интерактивной командной строкой REPL. Продолжил ознакомление с языком моделирования Modelica и программным обеспечением OpenModelica. Используя эти средства, описал математическую модель, схожую с моделью SIR.

# Список литературы

1. SIR и разновидности: модели COVID-эпидемии в России [Электронный ресурс]. The AnyLogic Company, 2020. URL: <https://www.anylogic.ru/blog/sir-i-raznovidnosti-modeli-covid-epidemii-v-rossii/>.

2. Как математика помогает бороться с эпидемиями [Электронный ресурс]. N + 1 Интернет-издание, 2019. URL: <https://nplus1.ru/material/2019/12/26/epidemic-math>.

3. Задача об эпидемии [Электронный ресурс]. RUDN, 2023. URL: <https://esystem.rudn.ru/mod/resource/view.php?id=967249>.