Санкт-Петербургский политехнический университет

Институт прикладной математики и механики

Кафедра прикладной математики и информатики

**Отчет 7**

**«Математическая статистика»**

Группа 3630102/70301

Выполнил студент Ли Жуйци

Преподаватель Баженов А.Н.

Санкт-Петербург

2020

Оглавление

[Постановка задачи 2](#_Toc38231920)

[теория ..](#теория)...........................................................................................................................................................4

# [Результат.....](#result)...................................................................... .........................................................6

[обсуждение](#обсуждение) ....................................................................................................................................6

[Список литературы ........................................................................................................................................7](#список)

# 

# Постановка задачи

# Сгенерировать выборку объёмом 100 элементов для нормального распределения N(x;0;1) . По сгенерированной выборке оценить параметры μ и σ нормального закона методом максимального правдоподобия. В качестве основной гипотезы H0 будем считать, что сгенерированное распределение имеет вид 𝑁(𝑥, ) . Проверить основную гипотезу, используя критерий согласия 𝜒 2. В качестве уровня значимости взять α = 0,05 . Привести таблицу вычислений 𝜒 2 .

### 2 [Теория](#теория)

### 2.1 Метод максимального правдоподобия

Пусть есть выборка X1, ... , Xn {\displaystyle X\_{1},\ldots ,X\_{n}} из распределения{\displaystyle \mathbb {P} \_{\theta }} P0 , где {\displaystyle \theta \in \Theta } — неизвестные параметры. Пусть {\displaystyle L(\mathbf {x} \mid \theta )\colon \Theta \to \mathbb {R} }L(x | ) : —> R функция правдоподобия, где x Точечная оценка

 {\displaystyle {\hat {\theta }}\_{\mathrm {M\Pi } }={\hat {\theta }}\_{\mathrm {M\Pi } }(X\_{1},\ldots ,X\_{n})=\mathop {\rm {argmax}} \limits \_{\theta \in \Theta }L(X\_{1},\ldots ,X\_{n}\mid \theta )}

называется оце́нкой максима́льного правдоподо́бия параметра  {\displaystyle \theta }. Таким образом оценка максимального правдоподобия — это такая оценка, которая максимизирует функцию правдоподобия при фиксированной реализации выборки.

Часто вместо функции логарифимическую L правдоподобия {\displaystyle L}L используют функциюправдоподобия l = lnL  {\displaystyle l=\ln L}Так как функция x->lnx,x>0 монотонно возрастает{\displaystyle x\to \ln x,\;x>0}  на всей области определения,максимум  любой функции {\displaystyle L(\theta )}L()является максимумом функции {\displaystyle \ln L(\theta )}lnL(), и наоборот. Таким образом,

{\displaystyle {\hat {\theta }}\_{\mathrm {M\Pi } }=\mathop {\rm {argmax}} \limits \_{\theta \in \Theta }l(X\_{1},\ldots ,X\_{n}\mid \theta )} 

Если функция правдоподобия дифференцируема, то необходимое условие экстремума — равенство нулю её градиента

{\displaystyle g(\theta )={\frac {\partial l(\mathbf {x} ,\theta \_{0})}{\partial \theta }}=0}

Достаточное условие экстремума может быть сформулировано как отрицательная определённость гессиана — матрицы вторых производных:



{\displaystyle H={\frac {\partial ^{2}l(\mathbf {x} ,\theta \_{0})}{\partial \theta \partial \theta ^{T}}}}

Важное значение для оценки свойств оценок метода максимального правдоподобия играет так называемая информационная матрица , равная по определению:



{\displaystyle I(\theta )=E[g(\theta )g(\theta )^{T}]}

В оптимальной точке информационная матрица совпадает с математическим ожиданием гессиана, взятым со знаком минус:

{\displaystyle I=-E(H\_{0})}  *I=-E(H0)*

i

**2.2 Проверка гипотезы о законе распределения генеральной совокупности. Метод хи-квадрат**

# Теорема К.Пирсона. Статистика критерия 𝜒 2 асимптотически распределена по закону 𝜒 2 с 𝑘 − 1 степенями свободы. Это означает, что независимо от вида проверяемого распределения, т.е. функции 𝐹(𝑥), выборочная функция распределения статистики 𝜒 2 при 15 𝑛 → ∞ стремится к функции распределения случайной величины с плотностью вероятности

# 0 𝑥 ≤ 0;

# 𝑓𝑘−1(𝑥) =

# 

# x>0

# Правило проверки гипотезы о законе распределения по методу 𝜒 2 .

# 1. Выбираем уровень значимости 𝛼.

# 2. По таблице находим квантиль (𝑘 − 1) распределения хи-квадрат с 𝑘 − 1 степенями свободы порядка 1 − 𝛼.

# 3. С помощью гипотетической функции распределения 𝐹(𝑥) вычисляем вероятности 𝑝𝑖 = 𝑃 (𝑋 ∈ ∆𝑖), 𝑖 = 1, ... , 𝑘.

# 4. Находим частоты 𝑛𝑖 попадания элементов выборки в подмножества ∆𝑖 , 𝑖 = 1, ... , 𝑘.

# 5. Вычисляем выборочное значение статистики критерия 𝜒 2 :

# = .

# 6. Сравниваем и квантиль (𝑘 − 1).

# а) Если < (𝑘 − 1), то гипотеза 𝐻0 на данном этапе проверки принимается.

# б) Если ≥ (𝑘 − 1), то гипотеза 𝐻0 отвергается, выбирается одно из альтернативных распределений, и процедура проверки повторяется.

# Результат

# 0.1256 0.9645

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | Границы |  |  |  |  |  |
| 1 | −∞ -1.1560 | 8 | 0.0920 | 9.1964 | -1.1964 | 0.1557 |
| 2 | -1.1560-0.3104 | 27 | 0.2336 | 23.3640 | 3.6360 | 0.5659 |
| 3 | -0.31040.5351 | 27 | 0.3388 | 33.8827 | -6.8827 | 1.3981 |
| 4 | 0.53511.3807 | 27 | 0.2390 | 23.8984 | 3.1016 | 0.4025 |
| 5 | 1.3807∞ | 11 | 0.0966 | 9.6585 | 1.3415 | 0.1863 |
|  |  | 100 | 1.0000 | 100.0000 | 0.0000 |  |

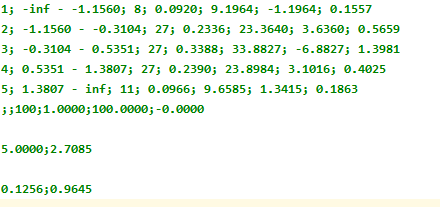
# Количество промежутков k=5

# Уровень значимости 𝛼 =0.05

# Тогда квантиль

# Из таблицы 9.49

**Сравнивая**   **2.7085**  9.49



# [Обсуждение](#обсуждение)

# Заключаем, что гипотеза о нормальном законе распределения 𝑁(𝑥, ), на уровне значимости 𝛼 = 0.05, согласуется с выборкой

# Список литературы

### 1: Метод максимального правдоподобия

<https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4_%D0%BC%D0%B0%D0%BA%D1%81%D0%B8%D0%BC%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%BE%D0%B3%D0%BE_%D0%BF%D1%80%D0%B0%D0%B2%D0%B4%D0%BE%D0%BF%D0%BE%D0%B4%D0%BE%D0%B1%D0%B8%D1%8F>

# 2：таблица хи-квадрат

# <https://www.cnblogs.com/emanlee/archive/2008/10/25/1319557.html>