

# 23 Fall Midterm Question Release

线代23秋期中试题 发布版 中英分离

- 反馈意见:



---

1.(共 15 分, 每小题 3 分) 选择题, 只有一个选项是正确的.

(1) 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  为矩阵  $A$  的零空间  $N(A)$  的一组基. 下列哪一组向量也是矩阵  $A$  的零空间的一组基?

(A)  $\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3, 4\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3$ .

(B)  $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1 + \alpha_2$ ,

(C)  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ .

(D)  $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$ .

(2) 以下说法一定是正确的是?

(A) 如果矩阵  $A$  的列向量线性无关, 那么对任意的  $\mathbf{b}$ ,  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  有唯一的解.

(B) 任意  $5 \times 7$  矩阵的列向量一定是线性相关的.

(C) 如果矩阵  $A$  的列向量线性相关, 该矩阵的行向量也线性相关.

(D) 一个  $10 \times 12$  矩阵的行空间和列空间可能具有不同的维数

(3) 设  $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -16 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 2 \\ t \\ 3 \end{bmatrix}$

当  $t = ()$  时,  $\beta$  可用  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  线性表示

(A) 1.

(B) 3.

(C) 6.

(D) 9.

(4) 以下说法一定是正确的事?

(A) 设  $E$  为一个可逆矩阵. 如果  $A, B$  矩阵满足  $EA = B$ , 则  $A$  和  $B$  的列空间相同

(B) 设  $A$  为秩为 1 的  $n$  阶的方阵, 则  $A^n = cA$ , 其中  $n$  为正整数,  $c$  为实数.

(C) 如果  $A, B$  为对称矩阵, 则  $AB$  为对称矩阵. 如果矩阵  $A$  为一个行满秩矩阵, 那么  $Ax = 0$  只有零解.

(D) 如果矩阵  $A$  为一个列满秩矩阵, 那么  $Ax = 0$  只有零解。

设  $A$  与  $B$  都为  $n$  阶矩阵,  $A$  为非零矩阵, 且  $AB=0$ , 则

(1)  $BA = 0$

(2)  $B = 0$

(3)  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

(4)  $\text{rank } B < n$ .

2.(共 25 分, 每小题 5 分) 填空题.

(1) 记所有  $7 \times 7$  实矩阵构成的向量空间为  $M_{7 \times 7}(\mathbb{R})$ ,  $W$  为  $M_{7 \times 7}(\mathbb{R})$  中所有斜对称矩阵构成的子空间, 则  $\dim W = \underline{\hspace{2cm}}$ .

如果  $A^T = -A$ ,  $A$  就称之为斜对称的。

(2) 设  $A, B$  为两个可逆矩阵, 假设的逆矩阵为, 期中  $O$  为的零矩阵, 则  $D = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(3) 设  $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$  且  $\text{rank}(A) < 4$ , 则  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(4) 考虑一下线性方程组:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} : \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - y = 2 \\ y = -1. \end{cases}$$

该线性方程组的最小二乘解为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

(5) 设  $H$  为如下定义的一个  $R^3$  中的子空间

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

一个和子空间  $H$  正交的单位向量为  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

3.(24 points)考虑以下这个 $4 \times 5$ 矩阵 $A$ 以及他的简化阶梯形矩阵 $R$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & * & 1 & * \\ 0 & 1 & * & 1 & * \\ -1 & 1 & * & 3 & * \\ 2 & 0 & * & 1 & * \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(a)分别求矩阵  $A$  的四个基本子空间的一组基向量.

(b)求出矩阵  $A$  的第三个列向量.

4.(15 points) 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ -a-1 & -2 \end{bmatrix}.$$

当 $a$ 为何值时, 矩阵方程 $AX = B$ 无解、有唯一解、有无穷多解?  
在有解时, 求解此方程, 这里的 $X$ 为一个 $3 \times 2$ 矩阵

5. (15 points) 设  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  为所有  $2 \times 2$  实矩阵构成的向量空间, 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

考虑以下映射

$$T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3, T(X) = \begin{bmatrix} \text{tr}(A^T X) \\ \text{tr}(B^T X) \\ \text{tr}(C^T X) \end{bmatrix},$$

对任意的  $2 \times 2$  实矩阵, 其中  $\text{tr}(D)$  表示  $n$  阶矩阵  $D$  的迹.

方阵  $D$  的迹是指  $D$  的对角元之和, 也即

$$\text{tr}(D) = d_{11} + d_{22} + \cdots + d_{nn}$$

(a) 证明  $T$  是一个线性变换

(b) 求  $T$  在  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  的一组基

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

以及  $\mathbb{R}^3$  的标准基

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

下的矩阵表示.

(c) 是否可以找到一个矩阵  $X$  使得  $T(X) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ? 如果可以, 请求出一个符合要求的矩阵  $X$ . 如果不存在, 请说明理由.



6. (6 points) 设 $A$ 为 $m \times n$ 矩阵,  $B$ 为 $m \times p$ 矩阵,  $C$ 为 $q \times p$ 矩阵. 证明:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix} \geq \text{rank } A + \text{rank } C,$$

其中 $O$ 为 $q \times n$ 的零矩阵



---

1.(15 points, 3 points each) Multiple Choice. Only one choice is correct.

(1) Suppose that  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  are a basis for nullspace of a matrix  $A$ ,  $N(A)$ . Which of the following lists of vectors is also a basis for  $N(A)$ ?

(A)  $\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + 5\alpha_3, 4\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3$ .

(B)  $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3, 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3, \alpha_3 + \alpha_1 + \alpha_2$ ,

(C)  $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$ .

(D)  $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_3 - \alpha_1$ .

(2) Which of the following statements is correct?

(A) If the columns of  $A$  are linearly independent, then  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  has exactly one solution for every  $\mathbf{b}$ .

(B) Any  $5 \times 7$  matrix has linearly dependent columns.

(C) If the columns of a matrix  $A$  are linearly dependent, so are the rows.

(D) The column space and row space of a  $10 \times 12$  matrix may have different dimensions.

(3) Let

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}, \alpha_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -16 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} 2 \\ t \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$\beta$  can be written as a linear combination of  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  if  $t = ( )$

(A) 1.

(B) 3.

(C)6.

(D)9.

(4) Which of the following statements is correct?

(A) Suppose that  $EA = B$  and  $E$  is an invertible matrix, then the column space of  $A$  and the column space of  $B$  are the same.

(B) Let  $A$  be a  $n \times n$  matrix with rank 1, then  $A^n = cA$ , where  $n$  is a positive integer and  $c$  is a real number.

(C) Let  $A, B$  be symmetric matrices, then  $AB$  is symmetric.

(D) If  $A$  is of full row rank, then  $Ax = 0$  has only the zero solution.

(5) Let  $A$  and  $B$  be two  $n \times n$  matrices. If  $A$  is a non-zero matrix and  $AB = 0$ , then

(1)  $BA = 0$

(2)  $B = 0$

(3)  $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

(4)  $\text{rank } B < n$ .

2. (25 points, 5 points each) Fill in the blanks.

(1) Denote the vector space of  $7 \times 7$  real matrices by  $M_{7 \times 7}(\mathbb{R})$ , and let  $W$  be the subspace of  $M_{7 \times 7}(\mathbb{R})$  consisting of skew-symmetric real matrices, then  $\dim W = \underline{\hspace{2cm}}$ .

A matrix  $A$  is called skew symmetric if  $A^T = -A$ .

(2) Let  $A, B$  be two  $n \times n$  invertible matrices. Suppose the inverse of  $\begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$  is  $\begin{bmatrix} A^{-1} & D \\ O & B^{-1} \end{bmatrix}$ , where  $O$  is the  $n \times n$  zero matrix. Then  $D = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(3) Let  $A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix}$  with  $\text{rank}(A) < 4$ . Then  $a = \underline{\hspace{2cm}}$ .

(4) Consider the system of linear equations

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} : \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x - y = 2 \\ y = -1. \end{cases}$$

The least-squares solution for the system is  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

(5)

Let  $H$  be the subspace of  $R^3$  be defined as follows:

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mid x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \right\}.$$

A **unit** vector orthogonal to  $H$  is  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

3.(24 points) Consider the following  $4 \times 5$  matrix  $A$  with its reduced row echelon form  $R$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & * & 1 & * \\ 0 & 1 & * & 1 & * \\ -1 & 1 & * & 3 & * \\ 2 & 0 & * & 1 & * \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) Find a basis for each of the four fundamental subspaces of  $A$ .
- (b) Find the third column of matrix  $A$ .

4.(15points)Let

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ -a-1 & -2 \end{bmatrix}.$$

For which value(s) of  $a$ , the matrix equation  $AX = B$  has no solution, a unique solution, or infinitely many solutions? Where  $X$  is a  $3 \times 2$  matrix. Solve  $AX = B$  if it has at least one solution.

5.(15 points) Let  $M_2 \times 2(\mathbb{R})$  be the vector space of  $2 \times 2$  real matrices. Let

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Consider the map

$$T : M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^3, T(X) = \begin{bmatrix} \text{tr}(A^T X) \\ \text{tr}(B^T X) \\ \text{tr}(C^T X) \end{bmatrix},$$

for any  $2 \times 2$  real matrix  $X$ , where  $\text{tr}(D)$  denotes the trace of a matrix  $D$ .

The trace of an  $n \times n$  matrix  $D$  is defined to be the sum of all the diagonal entries of  $D$ , in other words,

$$\text{tr}(D) = d_{11} + d_{22} + \cdots + d_{nn}.$$

(a) Show that  $T$  is a linear transformation.

(b) Find the matrix representation of  $T$  with respect to the ordered basis

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

for  $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$  and the standard basis

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

for  $\mathbb{R}^3$ .

(c) Can we find a matrix  $X$  such that  $T(X) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ? If yes, please find one such matrix. Otherwise, give an explanation.

6.(6 points) Let  $A$  be an  $m \times n$  matrix,  $B$  be an  $m \times p$  matrix, and  $C$  be an  $q \times p$  matrix. Show that

$$\text{rank} \begin{bmatrix} A & B \\ O & C \end{bmatrix} \geq \text{rank } A + \text{rank } C,$$

where  $O$  is the  $q \times n$  zero matrix.



- 录入/排版/校对：刘华杰 [huajiebridge34@gmail.com](mailto:huajiebridge34@gmail.com)
- OCR协助：SimpleTex

感谢您使用本份文件。您可扫描下方二维码进行反馈，您的意见对我们改进服务和拓展其他科目的业务非常重要（此二维码与开头链接同）：



联系方式：

Email: (邮箱已更换) [huajiebridge34@gmail.com](mailto:huajiebridge34@gmail.com)

Github repo: [LIUBINfighter/Open\\_Notes\\_SUSTech](https://github.com/LIUBINfighter/Open_Notes_SUSTech): 南方科技大学一位23级本科生的学习笔记，论文和项目 ([github.com](https://github.com))

目前的工程文件以及草稿不定期上传到仓库线性代数栏目。你也可以下载往期结项的文件了解我的工作方式，欢迎来戳。

同时，本人以个人身份向各位同学和高年级助教征求如下表格中留空的材料，包括照片，扫描件，手写件，演示文稿等文件，二版时会将您加入贡献者栏并赠与免费样书，如果你是愿意帮助的热心人，助教或互助课堂的主讲人，能够予以OCR，排版，校对，答案审核一类的协助就更好了。

目前项目进度如下

	原卷	答案	完整度	发布时间
20Fall	可用	可用	✓	与印刷版同时
21Spring	可用	可用	✓	与印刷版同时

	原卷	答案	完整度	发布时间
21Fall	可用	无		
22Spring	无	无		
22Fall	相片质量	无		
23Spring	无选择题	手写答案		
23Fall	Released	Released	✓	9.14
24Spring	Released	Released	✓	9.10

# Support Now

推荐使用微信支付



格尔顿司马徽晟(\*\*杰)

 微信支付

支付宝

推荐使用支付宝



刘斌(\*\*杰)

打开支付宝[扫一扫]