23 Spring Midterm Question Release

线性代数 23春季 期中试题 发布版

- 您可扫描下方二维码反馈意见与建议。

Q1.(20 points, 4 points each)
暂无选择题。

Q2.(25 points, 5 points each) Fill in the blanks

(1)Let $u, v \in \mathbb{R}^n$ with $\|u\| = 2$, $\|v\| = 4$ and $u^T v = 6$. Then $\|3u - v\| =$ ______.

(2) Let A be an $n \times n$ matrix with $A^2 = -A$ and let I be the $n \times n$ identity matrix. Then $(A - I)^{-1} =$ ______.

(3)Let$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a & a \\ a & 1 & a & a \\ a & a & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{bmatrix}$ with $rank\,(A) = 1$. Then $a =$ ______.

(4)Let α be a nonzero 3-dimensional real column vector in $\mathbb{R}^3$with $\alpha^T \alpha \neq 1$, and I_3 be the 3×3 identity matrix. Then rank $\left(I_3 - \alpha\alpha^T\right) =$ ______.

(5) Let$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$

Then the least squares solution to $Ax = b$ is $\widehat{x} =$ ______.

Q3 (15 points) Let $\alpha \in R$, and

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & 1+\alpha \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha \\ -\alpha & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a) By applying row operations, determine for which values of α is the matrix A_α invertible?

(b) Find the values of α such that the nullspace of $A_\alpha, N(A_\alpha)$, has dimension 1?

(c) Let $\alpha = 2$.Write down the matrix inverse of A_α.

Q4.(10points)

Let

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Find an LU factorization of A.

Q5.(10 points)

Consider the following system ofline are quations:

$$(I):\begin{cases}x_1+x_2=0,\\ x_2-x_4=0.\end{cases}$$

Note that the above system (I) has four variables x_1, x_2, x_3, x_4.
Suppose another homogeneous
system of linear equations (II) has special solutions

$$u=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}, v=\begin{bmatrix}-1\\2\\2\\1\end{bmatrix}.$$

Find the common nonzero solutions of systems (I) and (II).

Q6.(8 points)

Let $R^{2\times 2}$ be the vector space consisting of all 2×2 real matrices.

Let $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

$$E=\left\{E_{11}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

(a) Show that E is a basis for $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(b) Show that T:$\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R}^{2\times 2}$, $X\mapsto XA$ is a linear transformation.

(c)Find the matrix representation of T with respect to the ordered basis $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$.

Q7.(6 points) Let A,B be two $m \times n$ matrices. Prove

(a)$rank\,(A+B) \leq rankA + rankB$

(b)$rank\,(A+B) \geq rankA - rankB$

Q8.(6 points)

Let A be an $m \times n$ matrix with rank r. Show that there exist an $m \times r$ matrix B and an $r \times n$ matrix C such that $A = BC$ and both B and C have rank r.

(共25分，每小题5分)填空题。

(1)设$u, v \in \mathbb{R}^n$且$\| u \| = 2, \| v \| = 4$以及$u^T v = 6$.则
$\|3u - v\| = $______.

(2)设A为一个n阶矩阵，且$A^2 = -A, I$表示n阶单位矩阵。则
$(A - I)^{-1} = $______.

(3)设$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a & a \\ a & 1 & a & a \\ a & a & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{bmatrix}$且 $rank\,(A) = 1$. 则 $a = $______.

(4)设 $\alpha \in \mathbb{R}^3$为一个非零列向量且 $\alpha^T \alpha \neq 1$, I_3 为3×3 单位矩阵.则
$\operatorname{rank}\left(I_3 - \alpha\alpha^T\right) = $______

(5)
令$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
则 $Ax = b$ 的最小二乘解 $\widehat{x} = $______.

Q3 (15 points)设α为实数，A_α为

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & 1+\alpha \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha \\ -\alpha & 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

(a)对矩阵A_α做初等行变换，α为何时时，A_α为可逆矩阵?
(b)α取何值时，矩阵A_α的零空间的维数等于1?
(c)设 $\alpha = 2$ ，求矩阵A_α的逆矩阵.

Q4.(10 points)设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

求A的一个LU分解

Q5.(10 points) 考虑以下线性方程组:

$$(I):\begin{cases}x_1+x_2=0,\\ x_2-x_4=0.\end{cases}$$

注意上述方程组(I)有四个变量x_1, x_2, x_3, x_4。假设另一个齐次线性方程组(II)有特殊解

$$u=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix}, v=\begin{bmatrix}-1\\2\\2\\1\end{bmatrix}.$$

找出方程组(I)和(II)的共同非零解。

Q6.(8 points)

设$R^{2\times 2}$为所有2×2实矩阵构成的向量空间. 设$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, 且

$$E=\left\{E_{11}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{12}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_{21}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_{22}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

(a)证明：E为$R^{2\times 2}$的一组基。

(b)证明：$T:\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R}^{2\times 2}, X\mapsto XA$为线性变换

(c)求 T 在有序基$E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$下的矩阵表示

Q7.(6 points)设A, B都为$m \times n$矩阵，证明:

(a)$rank\left(A+B\right) \leq rankA + rankB$

(b)$rank\left(A+B\right) \geq rankA - rankB$

Q8.(6 points)

设 A 为一个秩为r的$m \times n$矩阵. 证明：存在一个$m \times r$矩阵B和一个$\tau \times n$矩阵C,使得 $A = BC$,其中B, C的秩都为r.

- 录入/排版/校对：刘华杰 huajiebridge34@gmail.com
- OCR协助：SimpleTex

感谢您使用本份文件。您可扫描下方二维码进行反馈，您的意见对我们改进服务和拓展其他科目的业务非常重要（此二维码与开头链接同）：

Email: （邮箱已更换）huajiebridge34@gmail.com
Github repo: Open_Notes_SUSTech: 南方科技大学一位23级本科生的学习笔记，论文和项目 (github.com)
目前的工程文件以及草稿不定期上传到仓库线性代数栏目。你也可以下载往期结项的文件了解我的工作方式，欢迎来戳。

同时，本人以个人身份向各位同学和高年级助教征求如下表格中留空的材料，包括照片，扫描件，手写件，演示文稿等文件，二版时会将您加入贡献者栏并赠与免费样书，如果你是愿意帮助的热心人，助教或互助课堂的主讲人，能够予以OCR，排版，校对，答案审核一类的协助就更好了。

项目进度

	原卷	答案	完整度	发布时间
20Fall	可用	可用	✅	与印刷版同时
21Spring	可用	可用	✅	与印刷版同时
21Fall	可用	无	❌	与印刷版同时
22Spring	无	无	❌	
22Fall	相片质量	无	❌	
23Spring	无选择题	Released	❌	9.14
23Fall	Released	Released	✅	9.14
24Spring	Released	Released	✅	9.10

Buy me a cup of tea

推荐使用微信支付

格尔顿司马徽晟(**杰)

微信支付

支付宝

推荐使用支付宝

刘斌(**杰)

打开支付宝[扫一扫]