24 Spring Midterm Answer

线性代数2023-2024学年春季学期期中考试

- 主要参考2024春季线代期中手写答案.pdf
- 辅助材料原卷+答案线性代数2024春期中.pdf
- 录入，排版，校对：刘华杰 liuhj10860@gmail.com
- OCR协助：SimpleTex

快速对答案（详解在之后）

一、D D C C A

二、

$$(1)A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & & \\ -a & 1 & \\ (3a-b)/2 & -3/2 & 1/2\end{bmatrix} \qquad (2)2$$

$$(3)4^{2023}A=4^{2023}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 2 & -2 & 2\end{bmatrix} \qquad (4)\begin{bmatrix}\frac{7}{3}\\ \frac{10}{3}\end{bmatrix}$$

三、$A=LU=\begin{bmatrix}1 & & \\ 2 & 1 & \\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ & -1 & -5\\ & & 0\end{bmatrix}$

四、(a)

$$(1) C(A)=span\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\4\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\1\\10\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\3\\2\\7\end{bmatrix}\right\}$$

$$(2)\, C\left(A^T\right)=\operatorname{Span}\left[\begin{bmatrix}0\\2\\4\\1\\6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\4\\10\\1\\2\end{bmatrix}\right]$$

$$(3)\, X=K_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+K_4\begin{bmatrix}0\\-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}\\1\\0\end{bmatrix}(k_1,k_2\in\mathbb{R})$$

$$(4) y=k_0\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{bmatrix},k_0\in R$$

(b)

$$x=x_p+x_n=\begin{bmatrix}1\\-5\\1\\3\\1\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+k_4\begin{bmatrix}0\\-3/2\\1/2\\1\\0\end{bmatrix}\quad k_1,k_4\in\mathbb{R}$$

五、略，解析部分有方法

六、证明略

七、

$$
(AB)^2 = \begin{bmatrix} 72 & 0 & -36 \\ -\frac{27}{2} & 81 & -54 \\ -18 & 0 & 9 \end{bmatrix}
$$

$$
BA = 9I
$$

填空及大题详解

二、(1)

$$
[A \quad I] = \begin{bmatrix} 1 & & & \vdots & 1 & & \\ a & 1 & & \vdots & & 1 & \\ b & 3 & 2 & \vdots & & & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & & & \vdots & 1 & & \\ 0 & 1 & & \vdots & -a & 1 & \\ 0 & 3 & 2 & \vdots & -b & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\to \begin{bmatrix} 1 & & & \vdots & 1 & & \\ 0 & 1 & & \vdots & -a & 1 & \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 3a-b & -3 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
\to \begin{bmatrix} 1 & & & \vdots & 1 & & \\ & 1 & & \vdots & -a & 1 & \\ & & 1 & \vdots & (3a-b)/2 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix} = [I \quad A^{-1}]
$$

(2)法1令

$$
A_{4\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

$$AB=\begin{bmatrix}1 & & \\ & & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \cdots & \cdots & \cdots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$
$$\to R(AB)=2$$

法2

$$\begin{aligned}&R(A)=2,R(B)=3\\&R(AB)\geq R(A)+R(B)-n=2+3-3=2\\&R(AB)\leq min\{R(A),R(B)\}=2\\&\\&\implies R(AB)=2\end{aligned}$$

(3)剥蒜（爆算）法 直接计算A^2,A^3的得出规律

(4)$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},b=\begin{bmatrix}2\\ 3\\ 6\end{bmatrix}$

三、

$$\begin{aligned}A&=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -5 & 1\\ 4 & -4 & -7\end{bmatrix}\\E_{21}(-2)A&=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & -1 & -5\\ 1 & -4 & -7\end{bmatrix}\\E_{31}(-1)E_{21}(-2)A&=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & -1 & -5\\ 0 & -2 & -10\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$E_{32}(-2)E_{31}(-1)E_{31}(-2)A=\begin{bmatrix}1&-2&-3\\0&-1&-5\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$A=E_{21}^{-1}(-2)E_{31}(-1)^{-1}E_{32}^{-1}(-2)\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&-1&-5\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&&\\2&1&\\1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&-1&-5\\0&0&0\end{bmatrix}=LU$$

四、(a)

$(1)C(A),$ 对A行变换

$$A\to\begin{bmatrix}0&\boxed{2}&0&3&0\\0&0&\boxed{2}&-1&0\\0&0&0&0&\boxed{10}\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\Rightarrow C(A)=span\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\4\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\1\\10\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\3\\2\\7\end{bmatrix}\right.$$

$(2)C(A^T)\quad$ 对A^T行变换

$$A^T=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\2&1&4&-1\\4&1&10&-5\\1&1&1&1\\0&3&2&7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&-2&3\\0&\cancel{3}&-\cancel{6}&\cancel{9}\\0&3&4&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}\boxed{1}&1&1&1\\&\boxed{1}&-2&3\\&&\boxed{10}&10\\&&&0\\&&&0\end{bmatrix}\Rightarrow C(A^T)=Span\left\{\begin{bmatrix}0\\2\\4\\1\\6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\4\\10\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$$

$(3) N(A)$

$$Ax=0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1, x_4 \in \mathbb{R} \\ x_2 = -\frac{3}{2} x_4 \\ x_3 = \frac{1}{2} x_4 \\ x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = k$$

$(4) N(A^T)$

$$A^T y = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & -2 & 3 \\ & & 10 & -10 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = -y_4 \\ y_2 = -y_4 \\ y_3 = y_4 \\ y_4 \in R \end{cases} \Rightarrow y = k_0 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, k_0 \in R$$

$(b) Ax = b$ 时 利用高斯消元化简增广矩阵(略)

令出一特解 $x_p = [1\ -5\ \ 1\ 3\ 1]^T$

$$x = x_p + x_n = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -3/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad k_1, k_4 \in \mathbb{R}$$

五、

$$
\begin{aligned}
&令\quad X=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \\
&则\ \mathrm{XA}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & a+2b \\ c & c+2a \end{bmatrix} \\
&AX=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2c & 2d \end{bmatrix} \\
&T(x)=XA+AX=\begin{bmatrix} 2a+c & a+3b+d \\ 3c & c+4d \end{bmatrix} \\
&=(2a+c)V_1+(a+3b+d)V_2+(3c)V_3+(c+4d)V_4
\end{aligned}
$$

$$
T(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix})=(V_1\ V_2\ V_3\ V_4)\begin{pmatrix} 2a+c \\ a+3b+d \\ 3c \\ c+4d \end{pmatrix}
$$

六、

$$
\begin{aligned}
&(A+B)^2 \\
&=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2=A+B \\
&\because A^2=A, B^2=B \\
&\therefore AB+BA=0 \quad \ldots\ldots\ldots ① \\
&B(AB+BA)=BAB+B^2A=(BA)B+B^2A=-AB^2+B^2A=0 \\
&又\because B^2=B \\
&\therefore -AB^2+B^2A=-AB+BA=0 \quad \ldots\ldots\ldots ② \\
&联立①②\begin{cases} AB+BA=0 \\ -AB+BA=0 \end{cases}\Rightarrow AB=0, 得证
\end{aligned}
$$

七、

$$(a)(AB)^2=(AB)(AB)=\begin{bmatrix}8&0&-4\\-\frac{3}{2}&9&-6\\-2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8&0&-4\\-\frac{3}{2}&9&-6\\-2&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}72&0&-36\\-\frac{27}{2}&81&-54\\-18&0&9\end{bmatrix}$$

(b)

$$\begin{aligned}&(AB)^2=9(AB)\\&R(A)\geq R(AB)=2\Rightarrow R(A)=2,\text{同理}R(B)=2\\&A\text{行满秩},\text{令}XA=I_2,X\text{为A左逆}\\&B\text{列满秩},\text{令}BY=I_2,Y\text{为B右逆}\\&\therefore BA=(XA)(BA)(BY)=X(AB)^2Y=9XABY=9I\end{aligned}$$

感谢你使用我排版制作的试题和答案，一定要代替我薄纱线代啊（雾）。

typo报告勘误；新方法；想对学线代的人说句话等，请看联系方式：Email: liuhj10860@gmail.com

需要其他类似文件可查看（pdf可点直接击链接）：Github repoOpen_Notes_SUSTech: 南方科技大学一位23级本科生的学习笔记，论文和项目

目前的工程文件以及草稿不定期上传到仓库线性代数栏目。你也可以下载往期结项的文件了解我的工作方式，欢迎来戳。

同时，本人以个人身份向各位同学和高年级助教征求如下表格中留空的材料，包括照片，扫描件，手写件，演示文稿等文件，二版时会将您加入贡献者栏并赠与免费样书，如果您是愿意帮助的热心人，助教或互助课堂的主讲人，能够予以OCR，排版，校对，手

稿提供，答案审核一类的协助就更好了，以下是目前（2024-09-10）的项目进度：

	原卷	**答案**	**完整度**
20Fall	可用20 Fall Mid.pdf	可用20 Fall Mid Answer.pdf	☑
21Spring	可用21 Spring Midterm.pdf	可用21 Spring Midterm Answer电子版可用.pdf	☑
21Fall	可用21 Fall Mid.pdf	暂无答案	
22Spring	无	无	
22Fall	相片质量 22 Fall Midterm相片.pdf	无	
23Spring	无选择题	手写答案	
23Fall	相片质量	手写答案23 Fall Midterm.pdf	
24Spring	OCR完成	手写答案	☑