24 Spring Midterm Answer

线性代数2023-2024学年春季学期期中考试

快速对答案（详解在之后）

一、D D C C A

二、

$$(1)A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & & \\ -a & 1 & \\ (3a-b)/2 & -3/2 & 1/2\end{bmatrix} \qquad (2)2$$

$$(3)4^{2023}A=4^{2023}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 2 & -2 & 2\end{bmatrix} \qquad (4)\begin{bmatrix}\frac{7}{3}\\ \frac{10}{3}\end{bmatrix}$$

三、$A=LU=\begin{bmatrix}1 & & \\ 2 & 1 & \\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ & -1 & -5\\ & & 0\end{bmatrix}$

四、(a)

$$(1)C(A)=span\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\4\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\1\\10\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\3\\2\\7\end{bmatrix}\right\}$$

$$(2)\, C\left(A^T\right)=\operatorname{Span}\left[\begin{bmatrix}0\\2\\4\\1\\6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\4\\10\\1\\2\end{bmatrix}\right]$$

$$(3)\, X=K_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+K_4\begin{bmatrix}0\\-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}\\1\\0\end{bmatrix}(k_1,k_2\in\mathbb{R})$$

$$(4) y=k_0\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{bmatrix},k_0\in R$$

(b)

$$x=x_p+x_n=\begin{bmatrix}1\\-5\\1\\3\\1\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+k_4\begin{bmatrix}0\\-3/2\\1/2\\1\\0\end{bmatrix}\quad k_1,k_4\in\mathbb{R}$$

五、略，解析部分有方法

六、证明略

七、

$$(AB)^2=\begin{bmatrix}72&0&-36\\-\frac{27}{2}&81&-54\\-18&0&9\end{bmatrix}$$
$$BA=9I$$

填空及大题详解

二、(1)

$$[A \quad I]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&&&1&&\\a&1&&&1&\\b&3&2&&&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&&&1&&\\0&1&&-a&1&\\0&3&2&-b&0&1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&&&1&&\\0&1&&-a&1&\\0&0&2&3a-b&-3&1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&&&1&&\\&1&&-a&1&\\&&1&(3a-b)/2&-3/2&1/2\end{array}\right]=[I \quad A^{-1}]$$

(2)法1令

$$A_{4\times 3}=\begin{bmatrix}1&&\\&&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}1&&\\&&1\\\cdots&\cdots&\cdots\\\cdots&\cdots&\cdots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&2&0\\-1&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&2\\-1&0&3\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$
$$\to R(AB)=2$$

法2

$$
\begin{aligned}
&R(A)=2,R(B)=3\\
&R(AB)\geq R(A)+R(B)-n=2+3-3=2\\
&R(AB)\leq min\{R(A),R(B)\}=2
\end{aligned}
$$

$$\implies R(AB)=2$$

(3)剥蒜（爆算）法 直接计算A^2,A^3的得出规律

(4)$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&1\\1&1\end{bmatrix},b=\begin{bmatrix}2\\3\\6\end{bmatrix}$

三、

$$A=\begin{bmatrix}1&-2&3\\2&-5&1\\4&-4&-7\end{bmatrix}$$

$$E_{21}(-2)A=\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&-1&-5\\1&-4&-7\end{bmatrix}$$

$$E_{31}(-1)E_{21}(-2)A=\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&-1&-5\\0&-2&-10\end{bmatrix}$$

$$E_{32}(-2)E_{31}(-1)E_{31}(-2)A=\begin{bmatrix}1&-2&-3\\0&-1&-5\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$A=E_{21}^{-1}(-2)E_{31}(-1)^{-1}E_{32}^{-1}(-2)\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&-1&-5\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&&\\2&1&\\1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&3\\0&-1&-5\\0&0&0\end{bmatrix}=LU$$

四、(a) (1)C(A),对A行变换

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & \boxed{2} & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{10} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow C(A) = span\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 10 \\ -5 \end{bmatrix}, \right.$$

(2)$C(A^T)$ 对A^T行变换

$$A^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \\ 4 & 1 & 10 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & \cancel{3} & -\cancel{6} & \cancel{9} \\ 0 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 & 1 \\ & \boxed{1} & -2 & 3 \\ & & \boxed{10} & 10 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow C(A^T) = Span\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 10 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

(3)$N(A)$

$$Ax = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1, x_4 \in \mathbb{R} \\ x_2 = -\frac{3}{2} x_4 \\ x_3 = \frac{1}{2} x_4 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 0 \\ -3/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} (k_1, k_2 \in \mathbb{R})$$

$(4) N(A^T)$

$$A^T y = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ & 1 & -2 & 3 \\ & & 10 & -10 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = -y_4 \\ y_2 = -y_4 \\ y_3 = y_4 \\ y_4 \in R \end{cases} \Rightarrow y = k_0 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, k_0 \in R$$

$(b) Ax = b$ 时 利用高斯消元化简增广矩阵(略)

令出一特解 $x_p = [1 \ -5 \ 1\ 3\ 1]^T$

$$x = x_p + x_n = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} + k_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_4 \begin{bmatrix} 0 \\ -3/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad k_1, k_4 \in \mathbb{R}$$

五、令 $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$,

则 $\mathrm{XA} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a+2b \\ c & c+2a \end{bmatrix}$

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b+d \\ 2c & 2d \end{bmatrix}$$

$$T(x) = XA + AX = \begin{bmatrix} 2a+c & a+3b+d \\ 3c & c+4d \end{bmatrix}$$

$$= (2a+c)V_1 + (a+3b+d)V_2 + (3c)V_3 + (c+4d)V_4$$

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (V_1\ V_2\ V_3\ V_4)\begin{pmatrix} 2a+c \\ a+3b+d \\ 3c \\ c+4d \end{pmatrix}$$

六、$(A+B)^2$

$= (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2 = A + B$

$\because A^2 = A, B^2 = B$

$\therefore AB + BA = 0 \quad \ldots\ldots\ldots$①

$B(AB+BA) = BAB + B^2A = (BA)B + B^2A = -AB^2 + B^2A$

又$\because B^2 = B$

$\therefore -AB^2 + B^2A = -AB + BA = 0 \quad \ldots\ldots\ldots$②

联立①②$\begin{cases} AB + BA = 0 \\ -AB + BA = 0 \end{cases} \Rightarrow AB = 0,$得证

七、

$$(a)(AB)^2 = (AB)(AB) = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -4 \\ -\frac{3}{2} & 9 & -6 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & 0 & -4 \\ -\frac{3}{2} & 9 & -6 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 72 & 0 & -36 \\ -\frac{27}{2} & 81 & -54 \\ -18 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

(b)

$(AB)^2 = 9(AB)$

$R(A) \geq R(AB) = 2 \Rightarrow R(A) = 2,$同理$R(B) = 2$

A行满秩, 令$XA = I_2, X$为A左逆

B列满秩, 令$BY = I_2, Y$为B右逆

$\therefore BA = (XA)(BA)(BY) = X(AB)^2Y = 9XABY = 9I$