24 Spring Mid A

24 Spring Midterm Answer

- 主要参考2024春季线代期中手写答案.pdf
- 辅助材料原卷+答案线性代数2024春期中.pdf

快速对答案（详解在之后）

一、D D C C A

二、

(1)$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ -a & 1 & \\ (3a-b)/2 & -3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

(2)2

(3)$4^{2023}A = 4^{2023}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

(4)$\begin{bmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{10}{3} \end{bmatrix}$

三、$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ & -1 & -5 \\ & & 0 \end{bmatrix}$

四、(a)

$$(1)C(A)=span\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\4\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\1\\10\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\3\\2\\7\end{bmatrix}\right\}$$

$$(2)\,C\left(A^T\right)=\operatorname{Span}\left[\begin{bmatrix}0\\2\\4\\1\\6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\4\\10\\1\\2\end{bmatrix}\right]$$

$$(3)\,X=K_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+K_4\begin{bmatrix}0\\-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}\\1\\0\end{bmatrix}(k_1,k_2\in\mathbb{R})$$

$$(4)y=k_0\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{bmatrix},k_0\in R$$

(b)

$$x=x_p+x_n=\begin{bmatrix}1\\-5\\1\\3\\1\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+k_4\begin{bmatrix}0\\-3/2\\1/2\\1\\0\end{bmatrix}\quad k_1,k_4\in\mathbb{R}$$

五、略，解析部分有方法

六、证明略

七、

$$(AB)^2=\begin{bmatrix}72 & 0 & -36\\ -\frac{27}{2} & 81 & -54\\ -18 & 0 & 9\end{bmatrix}$$
$$BA=9I$$

填空及大题详解

二、(1)

$$[A \quad I]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & & & 1 & & \\ a & 1 & & & 1 & \\ b & 3 & 2 & & & 1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & & & 1 & & \\ 0 & 1 & & -a & 1 & \\ 0 & 3 & 2 & -b & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & & & 1 & & \\ 0 & 1 & & -a & 1 & \\ 0 & 0 & 2 & 3a-b & -3 & 1\end{array}\right]$$
$$\to\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & & & 1 & & \\ & 1 & & -a & 1 & \\ & & 1 & (3a-b)/2 & -3/2 & 1/2\end{array}\right]=[I \quad A^{-1}]$$

(2)法1令

$$A_{4\times 3}=\begin{bmatrix}1 & & \\ & & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}1 & & \\ & & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$
$$\to R(AB)=2$$

法2

$$\begin{aligned}&R(A)=2,R(B)=3\\&R(AB)\geq R(A)+R(B)-n=2+3-3=2\\&R(AB)\leq min\{R(A),R(B)\}=2\end{aligned}$$

$$\implies R(AB)=2$$

(3)剥蒜（爆算）法 直接计算A^2,A^3的得出规律

(4)$A=\begin{bmatrix}0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1\end{bmatrix},b=\begin{bmatrix}2 \\ 3 \\ 6\end{bmatrix}$

三、

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \\ 4 & -4 & -7\end{bmatrix}$$
$$E_{21}(-2)A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 1 & -4 & -7\end{bmatrix}$$
$$E_{31}(-1)E_{21}(-2)A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & -10\end{bmatrix}$$

$$E_{32}(-2)E_{31}(-1)E_{31}(-2)A=\begin{bmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & -1 & -5\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$A=E_{21}^{-1}(-2)E_{31}(-1)^{-1}E_{32}^{-1}(-2)\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & -1 & -5\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & & \\ 2 & 1 & \\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & -1 & -5\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=LU$$

四、(a)

$(1)C(A)$, 对A行变换

$$A\to\begin{bmatrix}0 & \boxed{2} & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & \boxed{2} & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{10}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow C(A)=span\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\4\\-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\1\\10\\-5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}6\\3\\2\\7\end{bmatrix}\right.$$

$(2)C(A^T)$ 对A^T行变换

$$A^T=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 4 & -1\\ 4 & 1 & 10 & -5\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 2 & 7\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 3\\ 0 & \cancel{3} & -\cancel{6} & \cancel{9}\\ 0 & 3 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\to\begin{bmatrix}\boxed{1} & 1 & 1 & 1\\ & \boxed{1} & -2 & 3\\ & & \boxed{10} & 10\\ & & & 0\\ & & & 0\end{bmatrix}\Rightarrow C(A^T)=Span\left\{\begin{bmatrix}0\\2\\4\\1\\6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\\3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\4\\10\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$$

(3)$N(A)$

$$Ax=0\Rightarrow\begin{bmatrix}0&2&0&3&0\\0&0&2&-1&0\\0&0&0&0&10\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_5\end{bmatrix}=0\Rightarrow\begin{cases}x_1,x_4\in\mathbb{R}\\x_2=-\frac{3}{2}x_4\\x_3=\frac{1}{2}x_4\\x_5=0\end{cases}\Rightarrow x=k$$

(4)$N(A^T)$

$$A^Ty=0\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1\\&1&-2&3\\&&10&-10\\&&&0\\&&&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y_1=-y_4\\y_2=-y_4\\y_3=y_4\\y_4\in R\end{cases}\Rightarrow y=k_0\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{bmatrix},k_0\in R$$

$(b)Ax=b$ 时 利用高斯消元化简增广矩阵(略)

令出一特解 $x_p=[1\ -5\ \ 1\ 3\ 1]^T$

$$x=x_p+x_n=\begin{bmatrix}1\\-5\\1\\3\\1\end{bmatrix}+k_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+k_4\begin{bmatrix}0\\-3/2\\1/2\\1\\0\end{bmatrix}\quad k_1,k_4\in\mathbb{R}$$

五、

$$
\begin{aligned}
&令\quad X=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix},\\
&则\ \mathrm{XA}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & a+2b\\ c & c+2a\end{bmatrix}\\
&AX=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+c & b+d\\ 2c & 2d\end{bmatrix}\\
&T(x)=XA+AX=\begin{bmatrix}2a+c & a+3b+d\\ 3c & c+4d\end{bmatrix}\\
&=(2a+c)V_1+(a+3b+d)V_2+(3c)V_3+(c+4d)V_4
\end{aligned}
$$

$$
T(\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix})=(V_1\ V_2\ V_3\ V_4)\begin{pmatrix}2a+c\\ a+3b+d\\ 3c\\ c+4d\end{pmatrix}
$$

六、

$$
\begin{aligned}
&(A+B)^2\\
&=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2=A+B\\
&\because A^2=A,B^2=B\\
&\therefore AB+BA=0\quad ....①\\
&B(AB+BA)=BAB+B^2A=(BA)B+B^2A=-AB^2+B^2A=0\\
&又\because B^2=B\\
&\therefore -AB^2+B^2A=-AB+BA=0\quad ....②\\
&联立①②\begin{cases}AB+BA=0\\ -AB+BA=0\end{cases}\Rightarrow AB=0,得证
\end{aligned}
$$

七、

$$(a)(AB)^2=(AB)(AB)=\begin{bmatrix}8&0&-4\\-\frac{3}{2}&9&-6\\-2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}8&0&-4\\-\frac{3}{2}&9&-6\\-2&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}72\\-\frac{27}{2}\\-18\end{bmatrix}$$

(b)

$(AB)^2=9(AB)$

$R(A)\geq R(AB)=2\Rightarrow R(A)=2,$同理$R(B)=2$

A行满秩, 令$XA=I_2, X$为A左逆

B列满秩, 令$BY=I_2, Y$为B右逆

$\therefore BA=(XA)(BA)(BY)=X(AB)^2Y=9XABY=9I$