一、(共 30 分,每题 5 分)

1、设事件 A 与 B 相互独立，$P(A)=0.5, P(A\cup B)=0.8$，

求 $P(A\overline{B})$.

解：因为事件 A 与 B 相互独立，所以

$P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$ ……2 分

由 $P(A)=0.5, P(A\cup B)=0.8$，得 $P(B)=0.6$ ……2 分

$P(A\overline{B})=P(A)P(\overline{B})=0.2$ ……1 分

2、三人独立地去破译一份密码，他们译出的概率分别为 $\frac{1}{5},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$.

求能将此密码译出的概率.

解： $P=1-(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{4})=\frac{3}{5}$ ……5 分

3、设随机变量 X 的分布律为

X	−1	0	1	2
p	0.125	0.25	0.25	0.375

求 $Y=X^2+1$ 的分布律，并计算 $P(1\le X<3)$.

解：

Y	1	2	5
p	0.25	0.375	0.375

………3 分

$P(1\le X<3)=0.625$ ………2 分

4、设随机变量X服从参数为λ的泊松分布，且已知$E[(X-1)(X-2)]=1$求λ.

解：$E(X)=D(X)=\lambda$， …….2 分

$$E[(X-1)(X-2)]=E(X^2-3X+2) \\ =D(X)+[E(X)]^2-3E(X)+2=1$$ …….2 分

所以$\lambda^2-2\lambda+1=0$，得$\lambda=1$. …….1 分

5、为检查某食用动物含某种重金属的水平，假设重金属的水平服从正态分布$X\sim N(\mu,\sigma^2),\mu,\sigma$均未知，现抽取容量为 25 的一个样本，测得样本均值为 186，样本标准差为 10，求μ的置信度为 0.95 的置信区间.

解：总体均值 μ 的置信度为 0.95 的置信区间为

$$(\overline{X}\pm\frac{s}{\sqrt{n}}t_{0.025}(n-1))$$ ……….2 分

即 $(186\pm\frac{10}{5}\times 2.0639)$ …….2 分

所求置信区间为（181.8722，190.1278） …….1 分

6、某车间用一台包装机包装葡萄糖.包得的袋装糖重量$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，当机器正常时，其均值$\mu=0.5$公斤，标准差$\sigma=0.015$公斤.某日开工后为检验包装机是否正常，随机地抽取它所包装的糖 9 袋，称得平均重量为 0.511 公斤，问这天包装机工作是否正常？（取显著水平$\alpha=0.05$）

解：由题意设 $H_0:\mu=0.5;H_1:\mu\neq 0.5$ ……….1 分

拒绝域为 $|\frac{\overline{X}-0.5}{\sigma/\sqrt{n}}|\geq z_{0.025}$ ……….1 分

由于$|\frac{\overline{X}-0.5}{\sigma/\sqrt{n}}|=|\frac{0.511-0.5}{0.015/\sqrt{9}}|=2.2$ ，$z_{0.025}=1.96$, ……….2 分

即 2.2>1.96,拒绝原假设，认为这天包装机工作不正常. ……….1 分

二、(共 18 分,每题 6 分)

1、设随机变量 X 和 Y 相互独立，概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}3e^{-3y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

求：（1）$E(2X-3Y)$；（2）$D(2X-3Y)$；（3）ρ_{XY}.

解：（1）$E(2X-3Y)=2E(X)-3E(Y)=2\times\frac{1}{2}-3\times\frac{1}{3}=0$; ….2 分

（2）$D(2X-3Y)=4D(X)+9D(Y)=4\times\frac{1}{4}+9\times\frac{1}{9}=2$; ….2 分

（3）因为量 X 和 Y 相互独立，所以 $\rho_{XY}=0$. ….2 分

2、已知随机变量 $X\sim N(1,25), Y\sim N(2,36)$，$\rho_{XY}=0.4$，

求：$U=3X+2Y$ 与 $V=X-3Y$ 的协方差.

解：

$$Cov(U,V)=Cov(3X+2Y,X-3Y)$$

$$=3D(X)-9Cov(X,Y)+2Cov(X,Y)-6D(Y)\quad \text{….3 分}$$

$$=3D(X)-7\rho_{XY}\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}-6D(Y)$$

$$=3\times25-7\times0.4\times5\times6-6\times36=-225\quad \text{….3 分}$$

3、设 $X_1,X_2,\cdots,X_{13}$ 是来自正态总体 $N(0,1)$ 的一个样本，且已知随机变量 $Y=a(\sum_{i=1}^{4}X_i)^2+b(\sum_{i=5}^{13}X_i)^2$ 服从自由度为 2 的 χ^2 分布，

求 a,b 的值.

解：因为 $X_i\sim N(0,1)$ 且相互独立，$i=1,2,\cdots,13$.

所以，$\sum_{i=1}^{4}X_i\sim N(0,4)$，$\sum_{i=5}^{13}X_i\sim N(0,9)$，….2 分

$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}X_i\sim N(0,1)$，$\frac{1}{3}\sum_{i=5}^{13}X_i\sim N(0,1)$，且相互独立. ….2 分

由 χ^2 分布的定义，得 $(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}X_i)^2+(\frac{1}{3}\sum_{i=5}^{13}X_i)^2\sim\chi^2(2)$，

所以，$a=\frac{1}{\ }, b=\frac{1}{\ }$; ….2 分

三、(共 18 分,每题 6 分)

1、设总体 $X \sim N(52, 6^2)$,现随机抽取容量为 36 的一个样本,求样本均值 $\overline{X}$ 落入(50.8,53.8)之间的概率.

解：$\overline{X} \sim N(52,1)$， ……….2 分

$P\{50.8 < \overline{X} < 53.8\} = \Phi(53.8-52) - \Phi(50.8-52)$

$= \Phi(1.8) - \Phi(-1.2) = 0.9641 - 1 + 0.8849$ ….3 分

$= 0.849$ ……….1 分

2、设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} Ae^{x}, & x \le 0, \\ B, & 0 < x \le 1, \\ 1 - Ae^{-(x-1)}, & x > 1. \end{cases}$

求：(1) A，B 的值；(2) $P\{X > \frac{1}{3}\}$.

解：(1) 由连续型随机变量分布函数的连续性，得

$\lim\limits_{x \to 0^-} F(x) = F(0)$，$\lim\limits_{x \to 1^-} F(x) = F(1)$，

即 $\begin{cases} A = B \\ B = 1 - A \end{cases}$ 解得 $A = B = 0.5$ ……….3 分

(2) $P\{X > \frac{1}{3}\} = 1 - F(\frac{1}{3}) = 1 - 0.5 = 0.5$ ……….3 分

3、箱子中有一号袋 1 个，二号袋 2 个.一号袋中装 1 个红球，2 个黄球，二号袋中装 2 个红球，1 个黄球，今从箱子中任取一袋，从中任取一球，结果为红球，求这个红球是从一号袋中取得的概率.

解：设 A_i={从箱子中取到 i 号袋}，$i=1,2$

B={抽出的是红球}

$$P(B)=P(A_1)P(B\mid A_1)+P(A_2)P(B\mid A_2)$$ **……….2 分**

$$=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{9}$$ **……….1 分**

$$P(A_1\mid B)=\frac{P(A_1)P(B\mid A_1)}{\sum_{i=1}^{2}P(A_i)P(B\mid A_i)}=\frac{1}{5}$$ **……….3 分**

四、(8 分)　设随机变量 X 具有密度函数 $f(x)=\begin{cases} Ax, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$

求（1）常数 A；（2）X 的分布函数.

（1）因为 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ **……….2 分**

所以 $A\int_0^1 xdx=1$　得 $A=2$ **……….2 分**

（2） $$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0, \\ \int_0^x 2xdx, & 0\le x<1, \\ 1, & x\ge 1. \end{cases}$$

$$=\begin{cases} 0, & x<0, \\ x^2, & 0\le x<1, \\ 1, & x\ge 1. \end{cases}$$ **……….4 分**

五、(8分)某箱装有100件产品，其中一、二、三等品分别为60、30、10件，现从中随机抽取一件，记

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{若抽到}i\text{等品},\\ 0, & \text{没有抽到}i\text{等品}.\end{cases}$$ **求X_1，X_2的联合分布律.**

解：设A_1,A_2,A_3分别表示抽到一、二、三等品，

$P(X_1=0,X_2=0)=P(A_3)=0.1$，$P(X_1=1,X_2=0)=P(A_1)=0.6$

$P(X_1=0,X_2=1)=P(A_2)=0.3$，$P(X_1=1,X_2=1)=0$

X_1，X_2的联合分布律为

X_1 \ X_2	0	1
0	0.1	0.3
1	0.6	0.0

……….8分（每个2分）

六、(10分)设随机变量X和Y的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}15x^2y, & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(1) 求边缘概率密度；(2) 判断随机变量X和Y是否独立.

解：(1) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$ **……….1分**

$$=\begin{cases}\dfrac{15}{2}x^2(1-x^2), & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$ **……….2分**

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$ **……….1分**

$$=\begin{cases}5y^4, & 0<y<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$ **……….2分**

(2) 因为$f(x,y)\neq f_X(x)f_Y(y)$，所以随机变量X和Y不独立.

……..…4分

七、(8分)设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是总体X的一个样本，$x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n$为一相对应的样本观测值，总体X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求参数θ的矩估计和极大似然估计.

解：（1）矩估计 $E(X)=\int_0^1 x\theta x^{\theta-1}dx=\dfrac{\theta}{\theta+1}$， …….2 分

由 $A_1=\mu_1$ **得** $\dfrac{\theta}{\theta+1}=\overline{X}\Rightarrow\hat{\theta}=\dfrac{\overline{X}}{1-\overline{X}}$ …….2 分

（2）似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta x_i^{\theta-1}=\theta^n(\prod_{i=1}^{n}x_i)^{\theta-1}$

对数似然函数 $LnL(\theta)=nLn\theta+(\theta-1)\sum_{i=1}^{n}Lnx_i$ …….2 分

令 $\dfrac{dLnL(\theta)}{d\theta}=0$，**得** $\dfrac{n}{\theta}+\sum_{i=1}^{n}Lnx_i=0\Rightarrow\hat{\theta}=-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}Lnx_i}$

参数θ的极大似然估计量为 $\hat{\theta}=-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n}LnX_i}$ …….2 分

附 $\Phi(1.8)=0.9641$，$\Phi(1.2)=0.8849$，$\Phi(1.5)=0.9332$，$\Phi(2.2)=0.0.9861$，

$Z_{0.025}=1.96$，$Z_{0.05}=1.645$，$t_{0.025}(24)=2.0639$，$t_{0.025}(25)=2.0595$