南方科技大学
SOUTHERN UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

考试科目: 高等数学(上)　　开课单位: 数 学 系

考试时长: 120 分钟　　命题教师: 高等数学命题组

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8
分 值	20 分	20 分	10 分	10 分	10 分	10 分	10 分	10 分

本试卷共 9 道大题, 满分 100 分. (考试结束后请将试卷、答题本、草稿纸一起交给监考老师)

注意：本试卷里的中文为直译（即完全按英文字面意思直接翻译），所有数学词汇的定义请参照教材（Thomas' Calculus，13th Edition）中的定义。如果其中有些数学词汇的定义不同于中文书籍（比方说同济大学的高等数学教材）里的定义，以教材（Thomas' Calculus，13th Edition）中的定义为准。

1. (20pts) **Multiple Choice Questions:** (only one correct answer for each of the following questions.)

(1) Suppose that
$$\int_1^5 f(x)\,dx = 3,\quad \int_5^6 f(x)\,dx = 2,\quad \int_1^6 g(x)\,dx = 2.$$
Then $\displaystyle\int_1^6 (f(x) - 2g(x))\,dx =$

(A) -1.　　(B) 1.

(C) 3.　　(D) None of (A), (B) and (C) is correct.

(2) How many real roots does the equation $x^3 = 2x^2 + 3x - 3$ have ?

(A) 0.　　(B) 1.

(C) 2.　　(D) 3.

(3) If $f(x)$ is twice differentiable on $[0,1]$ and $f''(x) > 0$, then which of the following statements is **correct** ?

(A) $f'(1) > f'(0) > f(1) - f(0)$.　　(B) $f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$.

(C) $f(1) - f(0) > f'(1) > f'(0)$.　　(D) $f'(0) > f(1) - f(0) > f'(1)$.

(4) Let $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Which of the following statements is **correct**?

(A) $f''(0) = 0$ and $(0,0)$ is a point of inflection.

(B) $f''(0) = 0$ and $(0,0)$ is not a point of inflection.

(C) $f''(0)$ does not exist and $(0,0)$ is a point of inflection.

(D) $f''(0)$ does not exist and $(0,0)$ is not a point of inflection.

(5) Which of the following statements **must** be **correct**?

(A) If $f(x)$ is differentiable at $x=a$, then $|f(x)|$ is differentiable at $x=a$.

(B) If $|f(x)|$ is differentiable at $x=a$, then $f(x)$ is differentiable at $x=a$.

(C) If $f(x)$ is differentiable at $x=a$ and $f(a)=0, f'(a)=0$, then $|f(x)|$ is differentiable at $x=a$.

(D) If $f(x)$ is differentiable at $x=a$ and $f(a)=0, f'(a)\neq 0$, then $|f(x)|$ is differentiable at $x=a$.

2. (20 pts) Fill in the blanks.

(1) Let

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-(x-1)^2}, & \text{if } 0\le x\le 2,\\ -\sqrt{4-(x-4)^2}, & \text{if } 2\le x\le 6.\end{cases}$$

According to the relationship between definite integral and area, $\int_0^6 f(x)\,dx=$ _______.

(2) The linearization of $f(x)=\sqrt[3]{1+5x^4}$ at $x=0$ is $L(x)=$ _______.

(3) Let $f(x)=x^3+3x+1$. Use Newton's method to find the root of $f(x)=0$. Start with $x_0=1$, then $x_2=$ _______.

(4) If $f(x)+x\sin(f(x))=x^2+1$, then $f'(0)=$ _______.

(5) If $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=10$, then $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x+10)-f(x))=$ _______.

3. (10 pts) A rectangle is to be inscribed in the ellipse

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1.$$

What should the dimensions of the rectangle be to maximize its area? What is the maximum area?

4. (10 pts) Let

$$\frac{d}{dx}f(\sin x)\Big|_{x=0}=\frac{d}{dx}f^2(\sin x)\Big|_{x=0},$$

and $f'(0)\neq 0$. Find $f(0)$.

5. (10 pts) Determine if the following limits exist or not. If so, find the limit. If not, explain why. (**L'Hopital's Rule is not allowed to be used**.)

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{\sqrt{3+x}-2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{2x}}{\sqrt{x^2+2024x+1}}$.

6. (10 pts) Let $f(x)=x^{\frac{2}{3}}(6-x)^{\frac{1}{3}}$.

(1) Identify where the local extrema of f occur. Find the function's local extreme values.

(2) Find the open intervals where the graph of f is concave up and where it is concave down.

(3) Sketch the graph.

7. (10 pts) Find $a \neq 0$ such that the curves $y = \frac{1}{2}x^2$ and $y^2 + xy = a$ are tangent to each other, and find the equation of the tangent line at the point of tangency.

8. (10 pts) Assume that f is continuous on $[0, \infty)$, differentiable on $(0, \infty)$, $f(0) = 0$ and f' is increasing on $(0, \infty)$. Prove that $\frac{f(x)}{x}$ is also increasing on $(0, \infty)$.

一、 （20分）**单项选择题:**

(1) 设

$$\int_1^5 f(x)\,dx = 3, \quad \int_5^6 f(x)\,dx = 2, \quad \int_1^6 g(x)\,dx = 2.$$

那么 $\int_1^6 (f(x) - 2g(x))\,dx =$

(A) -1. (B) 1.

(C) 3. (D) 前面的 (A)、(B) 和 (C)都不对.

(2) 方程 $x^3 = 2x^2 + 3x - 3$ 有多少个实根?

(A) 0. (B) 1.

(C) 2. (D) 3.

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$上存在二阶导数, 且 $f''(x) > 0$, 则下列结论中**正确**的是

(A) $f'(1) > f'(0) > f(1) - f(0)$. (B) $f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$.

(C) $f(1) - f(0) > f'(1) > f'(0)$. (D) $f'(0) > f(1) - f(0) > f'(1)$.

(4) 设$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. 则下列说法中哪一个是**正确**的?

(A) $f''(0) = 0$，并且$(0,0)$ 是拐点.

(B) $f''(0) = 0$，并且$(0,0)$ 不是拐点.

(C) $f''(0)$ 不存在，并且$(0,0)$ 是拐点.

(D) $f''(0)$ 不存在，并且$(0,0)$ 不是拐点.

(5) 下列说法中哪一个**一定是正确**的?

(A) 若 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导, 则 $|f(x)|$ 在 $x = a$ 处可导.

(B) 若 $|f(x)|$ 在 $x = a$ 处可导, 则 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导.

(C) 若 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导且 $f(a) = 0, f'(a) = 0$, 则 $|f(x)|$ 在 $x = a$ 处可导.

(D) 若 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导且 $f(a) = 0, f'(a) \neq 0$, 则 $|f(x)|$ 在 $x = a$ 处可导.

二、 （20分）**填空题:**

(1) 设

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-(x-1)^2}, & \text{if } 0 \le x \le 2, \\ -\sqrt{4-(x-4)^2}, & \text{if } 2 \le x \le 6. \end{cases}$$

根据定积分和面积之间的关系，我们可以得到$\int_0^6 f(x)\,dx =$ _______.

(2) $f(x) = \sqrt[3]{1+5x^4}$ 在 $x = 0$ 处的线性化是 $L(x) =$ _______.

(3) 设 $f(x) = x^3 + 3x + 1$, 采用 Newton 法求 $f(x) = 0$ 的近似解. 若令 $x_0 = 1$，则 $x_2 =$ _______.

(4) 若 $f(x) + x\sin(f(x)) = x^2 + 1$, 则 $f'(0) =$ _______.

(5) 若 $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 10$, 则 $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x+10) - f(x)) =$ _______.

三、 （10分）一个长方形内接于椭圆

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1.$$

当长方形的长和宽取何值时此长方形的面积最大? 面积的最大值是多少?

四、 （10分）设

$$\frac{d}{dx}f(\sin x)\Big|_{x=0}=\frac{d}{dx}f^2(\sin x)\Big|_{x=0},$$

且 $f'(0)\neq 0$. 求 $f(0)$.

五、 （10分）判别下列极限存在与否. 若存在，求出极限值; 若不存在，说明理由. (**不允许使用洛必达法则**.)

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{\sqrt{3+x}-2}$.

(2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{2x}}{\sqrt{x^2+2024x+1}}$.

六、 （10分）考虑函数 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}(6-x)^{\frac{1}{3}}$.

(a) 求f在哪些点取局部极值，并求函数的局部极值.

(b) 求f上凹和下凹的开区间.

(c) 做出 $f(x)$的简略图.

七、 （10分）求 $a\neq 0$ 使得曲线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 和曲线 $y^2+xy=a$ 相切，并且求过切点的切线方程.

八、 （10分）设函数 f 在 $[0,\infty)$ 上连续, 在 $(0,\infty)$ 上可导, $f(0)=0$, 且 f' 在 $(0,\infty)$ 上单调增, 证明: $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(0,\infty)$ 也单调增.