第 37 卷 第 2 期
2017 年 6 月
数学理论与应用
MATHEMATICAL THEORY AND APPLICATIONS
Vol.37 No.2
Jun. 2017

基于遗传算法和非线性规划的设备预防维修周期优化模型

黄健
（上海理工大学管理学院，上海，200093）

摘 要 本文通过建立预防性维修前后故障率的关系，给出了带约束的非线性设备预防性维修策略模型.该模型通过综合考虑故障维修成本、预防性维修成本、以及生产损失成本，在有限的生产运行时间内使得系统总成本最小化.模型利用遗传算法的全局搜索能力和非线性规划的局部搜索能力进行求解.计算结果表明，遗传算法结合非线性规划可以以较快的收敛速度达到全局最优.

关键词 预防性维修 可靠度 故障率 遗传算法 非线性规划

Solving the Optimization Model of Equipment Preventive Maintenance Period with the Genetic Algorithm and Nonlinear Programming

Huang Jian
(School of Business, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 20093, China)

Abstract By establishing the relationship between the failure rates before and after preventive maintenances, this paper gives a nonlinear constrained model of equipment preventive maintenance strategy. The model aims to minimize the total cost of the system in a finite production time interval by synthetically considering the repair cost, preventive maintenance cost and production loss cost. It is solved by making use of the global search ability of genetic algorithm and the local search ability of nonlinear programming. A numerical example shows that the combination of the genetic algorithm and the nonlinear programming gives faster convergence to the global optimal.

Key words Preventive maintenance Reliability Failure rate Genetic algorithm Nonlinear programming

1 引言

现代生产制造系统中的设备，由于长时间的运行，发生设备故障是不可避免的，而故障所导致的生产停机将会给生产系统带来重大的经济损失，并且会降低生产系统的效率.因此，20 世纪 50 年代以后，相关学者开始研究设备故障对生产系统所造成的影响，且有不少研究工作

收稿日期：2017 年 04 月 07 日

者获得了许多阶段性的成果[1－2].文献[3]构建了有限时间区间的设备预防性维修策略,提出并运用役龄回退因子,对预防维修活动前后系统性能的动态变化进行描述和研究.

文献[4]对串并联系统的预防维修周期进行了研究.文献[5]以故障时间服从威布尔分布为例,分析了通信设备预防性维修的特点.到目前为止,理想的故障处理措施是预防性维修(Preventive Maintenance,PM),在设备发生故障之前就采取相关措施,对设备进行预防维修,可降低故障发生的概率.文献[6]研究了预防性维修在航空装备中的应用.文献[7]研究了基于可靠度的寿命型设备预防维修策略问题.文献[8]提出了最小维修和零部件替换的维修策略,并建立了系统长期运行的预防性维修周期的优化模型,但该模型无法应用于特定时间段内的预防维修作业计划,且随着系统长期运行,模型复杂度会逐渐提高,缺少高效快速的求解算法.

本文基于有限的运行时间区间内,考虑到以前所存在模型的不足,建立一种基于可靠度约束的预防维修费用最小化的优化模型,该模型可应用到实际生产中,用于指导生产现场的维修调度以及维修计划的执行.

2 数学模型

2.1 相关记号

C_c:每次故障维修成本

C_p:每次预防维修成本

C_l:单位时间内的生产损失成本

C_t:系统维修最小总成本

T:设备运行时间,即设备在$[0,T]$时间区间内运行

θ_i:第 i 次预防维修所用时间

t_i:第 i 个预防维修周期

a_i:役龄回退因子

n_i:第 i 次预防性维修之前发生故障的次数

$C_p(a_i,t_i)$:第 i 个周期内的预防维修成本函数,是役龄回退因子a_i和预防维修周期t_i的函数

2.2 成本函数

假设生产系统的某台设备在有限的运行时间区间$[0,\mathrm{T}]$内共进行了 n 次预防维修.预防维修可以可以减少随机故障的发生次数,但预防性维修的次数要控制在合理的维修范围内,维修次数过多会导致总维修成本增加,造成过度维修;维修不足则会导致故障的发生率增高,增

加设备的故障维修成本.该模型的成本函数由三部分组成:故障维修成本、预防性维修成本、生产损失成本,根据以上符号定义,目标函数如下:

$$C_t=\sum_{i=1}^{n}C_r n_i+\sum_{i=1}^{n}C_p(a_i,t_i)+\sum_{i=1}^{n}C_l\theta_i.$$

2.3 故障次数 n_i 的确定

设备出现故障的次数是和具体的故障分析形式是密切相关的,本文假设故障次数服从威布尔分布,威布尔分布常用来描述电子与机械产品的故障规律.威布尔分布为两参数的分布,其概率密度为:

$$f(t)=\frac{m}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{m-1}exp\left\{-(\frac{t^m}{\eta})\right\},$$

其中 η 为尺度参数,m 为形状参数.

当 $m=1$ 时,威布尔分布即为指数分布,当 $m=2$ 时,威布尔分布为瑞利分布.设备故障规律符合威布尔分布时,其故障率 $\lambda(t)$ 可表达为:

$$\lambda(t)=\frac{m}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{m-1}.$$

第 i 个预防维修周期内设备发生故障的次数为:

$$n_i=\int_0^{t_i}\lambda_i(t)dt,$$

其中 $\lambda_i(t)$ 为第 i 个预防性维修周期内设备的故障率,是役龄回退因子 a_i 的函数,其表达式可以由以下递推关系给出:

$$\lambda_1(t)=\lambda(t),$$

$$\lambda_2(t)=\lambda(t+t_1-a_1t_1),$$

$$\lambda_3(t)=\lambda(t+t_2-a_2t_2),$$

$$\cdots$$

$$\lambda_i(t)=\lambda(t+t_{i-1}-a_{i-1}t_{i-1})=\lambda\left(t+\sum_{k=1}^{i-1}t_k-\sum_{k=1}^{i-1}a_kt_k\right)$$

$$=\lambda\left(t+\sum_{k=1}^{i-1}(1-a_k)t_k\right),i=1,2,3,\cdots,n.$$

故故障次数 n_i 为:

$$n_i=\int_0^{t_i}\lambda_i(t)dt=\int_0^{t_i}\lambda(t+\sum_{k=1}^{i-1}(1-a_k)t_k)dt,i=1,2,\cdots,n.$$

2.4 可靠度约束

本文的目标函数是使系统总维修费用最小化.但除此之外,基于一定可靠度的预防维修周期模型对生产系统的顺利进行有着不可忽略的作用.可靠度和故障率的一般关系为:

$$R(t)=exp\left[-\int_0^t\lambda(t)dt\right].$$

由上式可得出设备在各个预防维修周期内运行的可靠度表达式为:

$$R_i(t_i)=\exp\left[-\int_0^{t_i}\lambda_i(t)dt\right]=exp(-n_i). \tag{1}$$

第 n 次预防性维修后到 T 运行时间内,可靠度的表达式为:

$$R\left(T-\sum_{i=1}^n t_i-\sum_{i=1}^n\theta_i\right)=\int_0^{T-\sum_{i=1}^n t_i-\sum_{i=1}^n\theta_i}\lambda(t)dt. \tag{2}$$

2.5 优化模型

根据以上的分析,得出如下带有约束的优化模型

$$\min C_t=C_r\sum_{i=1}^n\int_0^{t_i}\lambda\left(t+\sum_{k=1}^{i-1}(1-a_k)t_k\right)dt+\sum_{i=1}^n C_p(a_i,t_i)+\sum_{i=1}^n C_l\theta_i, \tag{3}$$

式中,t_i,θ_i,n 为决策变量,并且满足以下的约束关系:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^n t_i+\sum_{i=1}^n\theta_i\leqslant T,\\&\theta_i\geqslant T_l,\\&R_i\geqslant limR,\\&R\left(T-\sum_{i=1}^n t_i-\sum_{i=1}^n\theta_i\right)\geqslant limR,\end{aligned} \tag{4}$$

其中,$\lim R$ 为可靠度的下限,T_l 为预防性维修的维修时间下限,均为已知量.

根据上述得知,可知模型中包含有有 $2n+1$ 个决策变量,决策变量的寻优过程是动态变化的,模型的求解非常复杂,为了提高工程应用的时效性,本文采用遗传算法和非线性规划联合求解的方法求解本模型.

3 算法

3.1 遗传算法

遗传算法[9](Genetic Algorithm,GA)是一种进化算法,其基本原理是仿效生物界中的"物

竞天择、适者生存”的演化法则，遗传算法是把问题参数编码为染色体，再利用迭代的方式进行选择、交叉以及变异等运算来交换种群中染色体的信息，最终生成符合优化目标的染色体.

遗传算法非常适用于传统搜索算法难以解决的复杂和非线性优化问题.与传统搜索算法不同，遗传算法从随机产生的初始解开始搜索，通过一定的选择、交叉、变异操作逐步迭代以产生新的解.群体中的每个个体代表问题的一个解，称为染色体，染色体好坏用适应度值衡量，根据适应度的好坏从上一代中选择一定数量的优秀个体，通过交叉变异形成下一代群体，经过若干代的进化之后，算法收敛于最好的染色体，它即是问题的最优解或次优解.

遗传算法提供了求解非线性规划的通用框架，它不依赖于问题的具体领域.遗传算法的优点是将问题参数编码为染色体后进行优化，而不针对参数本身，从而不受函数约束条件的限制.搜索过程从问题解的一个集合开始，而不是单个个体，具有隐含并行搜索特性，可大大减少陷入局部最小的可能性.而且优化计算时算法不依赖于梯度信息，且不要求目标函数连续可导，使其适于求解传统搜索方法难以解决的大规模、非线性组合优化问题.

3.2 非线性规划

非线性规划研究一个 n 元实函数在一组等式或不等式的约束条件下的极值问题，非线性规划的理论来源为库恩·塔克条件.20 世纪 50 年代，非线性规划主要侧重于对梯度法和牛顿法的研究，以 DFP 法为代表；60 年代侧重于对牛顿法和共轭梯度法的研究，以 BFGS 方法为代表.非线性规划的飞速发展时期是在 20 世纪 70 年代，主要方法为约束变尺度法和拉格朗日乘子法.80 年代以来，随着计算机的飞速发展，非线性规划取得了很大的进步.

在 MATLAB 中，fmincon 是最优化工具箱中用于求解非线性规划问题的函数，它从一个预估值出发，搜索约束条件下非线性多元函数的最小值.

3.3 非线性规划遗传算法

经典非线性规划算法多采用梯度下降法的方法求解，局部搜索能力较强，但是全局搜索能力较弱.遗传算法通过采用选择、交叉、和变异算子进行搜索，全局搜索能力较强，但局部搜索能力较弱，一般只能得到问题的次优解，而不是最优解.在本文中，结合两种算法的优点，一方面采用遗传算法进行全局搜索，另一方面采用非线性规划算法进行局部搜索，以得到问题的全局最优解[10].

非线性规划遗传算法[11]的流程如下图所示.

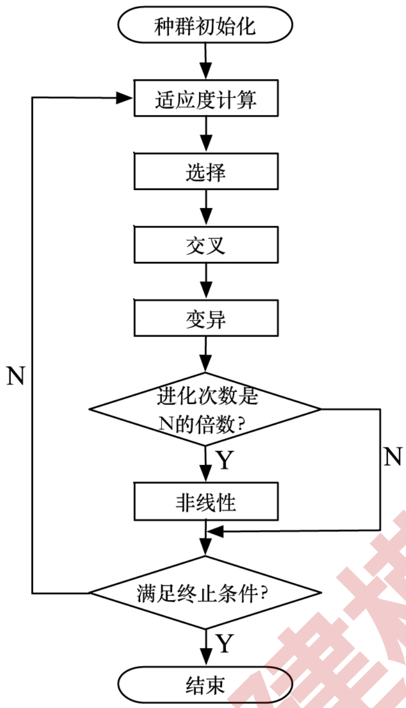

图 1 非线性规划遗传算法流程图

其中,种群初始化模块根据求解问题初始化种群,适应度计算模块是根据适应度函数计算种群中染色体的适应度值,选择、交叉、和变异为遗传算法的搜索算子,N 为固定值,当进化次数为 N 的倍数时,则采用非线性寻优的方法加快进化,非线形寻优利用当前染色体值采用函数 fmincon 寻找问题的局部最优值.

4 算例

现给出以下算例来验证本文的数学模型. 假设设备的故障时间符合参数为 $m=2$, $\eta=40$ 的威布尔分布,其它参数设置如下:

(1)运行时间 $T=500\text{h}$,

(2)由预防维修所导致的单位时间内的生产损失成本为 $C_l=1000$,

(3)每次故障的小修成本为 $C_r=600$,

(4)每次预防性维修的时间下限为 $T_l=2h$,

(5)预防性维修的成本函数为 $C_p(a_i,t_i)=150+20\,a_i\,t_i$,

(6)役龄回退因子 $a_1=a_2=\cdots=a_n=0.95$.

所使用的遗传算法参数设置如下:采用浮点数编码,变异率为 0.01,种群大小为 20,计算

精度为 10^{-6}，遗传终止条件为 300 代.非线性规划部分使用 Matlab 自带的最优化工具箱编程实现.把以上参数代入式(1)～(4)的优化模型中，在 Matlab 环境下通过编程实现.计算结果如表 1 所示.

表 1 Matlab 计算结果

PM 次数 n	总成本 C_t	预防维修时间 θ
3	39218.7	2
4	36979.7	2
5	32843.3	2
6	35858.2	2
7	36249.0	2
8	37192.5	2
9	37714.2	2
10	38758.9	2

从上面的表格可以看出，在有效的设备运行时间 500 h 内，设备进行预防性维修的最佳次数为 5 次，此时的总成本最小，之后成本会随着预防维修次数的增加而增加.若预防维修的次数小于 5 次，我们称之为“欠维修”；若预防维修次数大于 5 次，我们称之为“过维修”.这两种情况都是我们在实际的生产过程中所不愿意看到的情况.

在模型求解方面，若只采用传统的遗传算法，算法的求解迭代过程如图 2 所示，从图中可以看出，算法在进行到大约 200 代左右，基本达到稳定状态，求解出目标函数的最优解.而采用非线性规划结合遗传算法的求解方式，迭代过程如图 3 所示，从图中可以看出采用这种求解算法，算法在大约 80 代左右就可以求得最优解，大大提高了算法的求解效率.

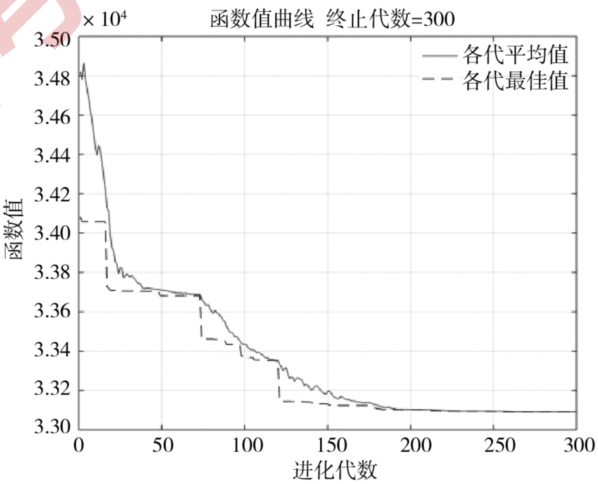

图 2 遗传算法迭代过程示意图

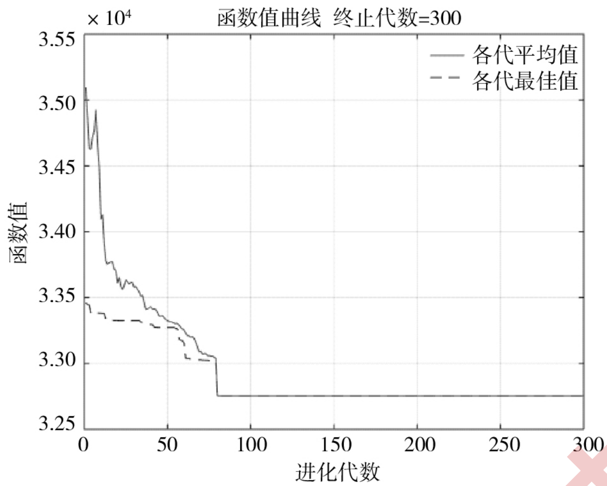

图 3 非线性规划—遗传算法迭代过程示意图

$n=5$ 时，预防维修周期与各周期内的可靠度结果如表 2 所示.

表 2 预防维修次数为 5 次时的优化结果

第 i 周期	运行时间 t_i	维修时间 θ_i	设备可靠度 R
1	81.5	2	0.865
2	81.1	2	0.829
3	80.6	2	0.814
4	79.8	2	0.809
5	78.5	2	0.809

从表中可以看出，各个预防维修周期不是等周期，而是随着预防维修次数的增加，预防维修周期越来越短，符合实际生产情况.设备的可靠度也满足假设的可靠度，验证了模型的正确性.

5 结论

本文所建立的优化模型，将系统的可靠度作为优化模型的约束条件，并利用役龄回退因子对预防性维修的效果进行表述.优化模型是有限时间区间内的预防性维修策略，从而克服了无限时间区间分析方法所存在的不足之处.

传统的遗传算法全局搜索能力较强，局部搜索能力较差，而非线性规划具有较强的局部搜索能力，因此本文采用了遗传算法联合非线性规划的求解方法对模型进行求解，通过实例也验

证了该求解方法具有较快的收敛能力，提高了模型求解效率.

参考文献

[1] Dedopoulos I T, Smeers Y. An age reduction approach for finite horizon optimization of preventive maintenance for single units subject to random failure[J]. Computers & Industrial Engineering, 1998, 34(3): 643－654.

[2] Chao Ton Su, Sung Chi Wu. Multi－action maintenance subject to action－dependent risk and stochastic failure[J]. European Journal of Operational Research, 2000, 125(1): 133－148.

[3] 韩帮军，范秀敏，马登哲. 基于可靠度约束的预防性维修策略的优化研究[J]. 机械工程学报，2003，6(39)：102－105.

[4] 沙治邦，于洁. 基于优化策略的串并联系统预防维修周期研究[J]. 计算机仿真，2009，26(3)：191－194.

[5] 李志，吴俊. 通信设备最佳维修周期预测系统研究[J]. 舰船电子工程，2009，1(29)：154－156.

[6] 毕建新，张志春，李小波. 基于遗传算法的航空装备预防性维修优化研究[J]. 长春理工大学学报，2011，34(3)：62－65.

[7] 盛天文，陈晓慧，易树平. 寿命型设备的预防维修策略研究[J]. 计算机集成制造系统，2009，15(3)：598－603.

[8] Yong Liang, Leung Kwong－Sak. Genetic Algorithm with adaptive elitist－population strategies for muhimodal function optimization[J]. Applied Soft Computing, 2011, 11(2): 2017－2034.

[9] Barlow R, Hunter L. Optimum preventive maintenance policies[J]. European Journal of Operational Research, 1960, 8: 90－100.

[10] 覃柏英. 非线性规划的遗传算法在多峰函数优化中的应用[J]. 广西科技大学学报，2013，24(2)：25－31.

[11] 郁磊，史峰，王辉，胡斐. MATLAB 智能算法 30 个案例分析[M]. 北京航空航天大学出版社，2015.