

## 《微积分 1》16 秋

### 一、单项选择题 (5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1. 函数  $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 3x + 2}}$  的连续区间是( ).  
A.  $(1, 2)$       B.  $(-\infty, 1)$       C.  $(-\infty, 1), (2, +\infty)$       D.  $(-\infty, 1), (1, 2), (2, +\infty)$
2. 设  $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$  在  $x=0$  处连续但不可导, 则常数  $\alpha$  的取值范围是( ).  
A.  $\alpha > 0$       B.  $0 < \alpha \leq 1$       C.  $\alpha > 1$       D.  $\alpha < 1$
3. 设  $f(x)$  在闭区间  $[0, 1]$  上满足  $f'''(x) < 0$ , 且  $f''(0) = 0$ , 则  $f'(0), f'(1), f(1) - f(0), f(0) - f(1)$  的大小关系是( ).  
A.  $f'(0) > f(1) - f(0) > f'(1)$       B.  $f'(1) > f(1) - f(0) > f'(0)$   
C.  $f(1) - f(0) > f'(1) > f'(0)$       D.  $f'(1) > f(0) - f(1) > f'(0)$
4. 当  $x > 0$  时, 曲线  $y = x \sin \frac{1}{x}$  ( ).  
A. 既无水平渐近线又无铅直渐近线      B. 仅有铅直渐近线  
C. 仅有水平渐近线      D. 既有水平渐近线又有铅直渐近线
5.  $\int_{-1}^1 (x + \sqrt{1-x^2})^2 dx =$  ( ).  
A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

### 二、填空题 (5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

6. 设  $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$   $g(x) = \begin{cases} x+1, & x < 1, \\ x, & x \geq 1, \end{cases}$  则  $f(x) + g(x)$  的间断点为\_\_\_\_\_.
7. 当  $x \rightarrow 0$  时,  $\sqrt[4]{1-ax^2} - 1$  与  $x \sin x$  是等价无穷小, 则常数  $a =$ \_\_\_\_\_.
8. 设函数  $f(u)$  可导, 且  $y = f^2(\cos^2 x)$ , 则  $\frac{dy}{dx} =$ \_\_\_\_\_.

9. 若  $f(x)$  的导函数为  $\sin x$ , 则  $\int f(x)dx = \underline{-\sin x + C_1x + C_2}$ .

10. 设  $f(x)$  是连续函数, 且  $\int_0^{x^3-1} f(t)dt = x$ , 则  $f(7) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

### 三、计算题 (5 小题, 每小题 6 分, 共 30 分)

11. (6 分) 计算  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left( \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \sin \frac{2}{x} \right)$ .

12. (6 分) 计算  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$ .

13. (6 分) 设  $y = 3^{\sqrt{x}} + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} + \ln 2$  ( $0 < x < 1$ ), 求  $dy$ .

14. (6 分) 设函数  $y = y(x)$  由参数方程  $\begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ y = \ln(1 + 2t) \end{cases}$  所确定, 求  $\frac{d^2x}{dy^2}$ .

15. (6 分) 设函数  $y = y(x)$  由方程  $xe^{f(y)} = e^y$  ( $x > 0$ ) 所确定, 其中  $f$  二阶可导, 且  $f' \neq 1$ , 求  $\frac{d^2y}{dx^2}$ .

### 四、计算题 (3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分)

16. (6 分) 计算  $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1+\sqrt{x}} dx$ .

17. (6 分) 设  $f(x)$  连续, 且  $\int_0^x tf(x-t)dt = e^{-x^2}$ , 求  $\int_0^1 f(x)dx$ .

18. (6 分) 计算  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{1+\cos 2x} dx$ .

### 五、计算题 (2 小题, 每小题 8 分, 共 16 分)

19. (1) (2 分) 设  $f(x)$  连续, 证明  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$ ;

(2) (6 分) 计算  $I = \int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \frac{\sin^2 x}{x(\pi-2x)} dx$ .

20. (8 分) 设  $x > 0$ , 求满足不等式  $\ln x \leq A\sqrt{x}$  的最小正数  $A$ .

## 六、证明题 (1 小题, 共 6 分)

21. (6 分) 设连续函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上单调减少, 证明

$$(b-a) \int_a^x f(t)dt \geq (x-a) \int_a^b f(t)dt, \quad x \in [a, b].$$