38-44

上海大学 2018 ~ 2019 学年秋季学期《微积分 1》(A 卷)答案

一、单项选择题 (5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1. 设数列通项 $x_n = \dfrac{\sqrt{n} + \left[1-(-1)^n\right]n^2}{n}$，则当 $n \to \infty$ 时，x_n 是(　　)

A. 无穷大量　　　　B. 无穷小量

C. 有界变量，但不是无穷小量　　　　D. 无界变量，但不是无穷大量

2. 设 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = A$，则下面命题正确的是(　　).

A. 如果 $A>0$，则在 $x=0$ 处存在去心邻域使得函数 $f(x)$ 在此去心邻域中恒大于零;

B. 如果 $f(x)$ 在 $x=0$ 某去心邻域中恒大于零，则 $A>0$;

C. 如果 $f(x)$ 在 $x=0$ 某去心邻域中恒小于零，则 $A<0$;

D. 如果 $A=0$，则在 $x=0$ 处存在去心邻域使得函数 $f(x)$ 在此去心邻域中恒等于零.

3. 设 $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = A$，则(　　).

A. 曲线 $y=f(x)$ 只有一条水平渐近线　　　　B. 曲线 $y=f(x)$ 没有铅直渐近线

C. 曲线 $y=f(x)$ 至少有一条水平渐近线　　　　D. 曲线 $y=f(x)$ 有铅直渐近线

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}1+\sin x, & x<0\\ \cos x, x\ge 0\end{cases}$，则 $\int f(x)\mathrm{d}x=$（　　）

A. $\begin{cases}x-\cos x+c_1, x<0\\ \sin x+c_2, x\ge 0\end{cases}$　　　　B. $\begin{cases}x+\cos x+c_1, x<0\\ \sin x+c_2, x\ge 0\end{cases}$

C. $\begin{cases}x-\cos x+c_1, x<0\\ -\sin x+c_2, x\ge 0\end{cases}$　　　　D. $\begin{cases}x-\cos x+1+c, x<0\\ \sin x+c, x\ge 0\end{cases}$

5. 设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=0, f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x^3}=$（　　）

A. 0　　　　B. $\dfrac{1}{6}$　　　　C. $\dfrac{1}{2}$　　　　D. 3

二、填空题 (5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

6. 在 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x^2)(\sqrt{1+x}-1)$ 与 x^α 是同阶无穷小，则 $\alpha=$ ______.

7. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}}, & x>0,\\ \ln|1+x|, & x\le 0.\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的间断点个数为______.

8. 已知曲线L的参数方程为$\begin{cases} x=(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$，则曲线 L 在$t=\dfrac{\pi}{2}$处切线斜率为__.

9. 函数 $y=x^3-3x$ 单调递减区间是____.

10. $\int_{-1}^{1}(x^{2019}\cos(x^2)+3x^2)\mathrm{d}x=$__.

三、计算题 (5 小题, 每小题 6 分, 共 30 分)

11. (6 分) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x-\sin x)^{\frac{1}{x^3}}$.

12. (6 分) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1})}{x^2+2x-1}$.

13. (6 分)设 $y=\dfrac{x^2-4x+2}{x^2-5x+6}$， 求 $y^{(n)}(0)(n\geq 2)$.

14. (6 分) 设函数 $f(x)$ 为可导函数，且 $y=f(2x)+f(\frac{2x}{x^2-1})$ 求 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}$.

15. (6 分) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\cos(x^2y)+y+x^2=1$ 所确定，求 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

四、计算题 (3 小题，每小题 6 分，共 18 分)

16.(6 分)计算 $\int\frac{\ln(\mathrm{e}^x-1)}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

17. (6 分) 计算 $\int_5^{2\sqrt{2}+1}\frac{2x-4}{\sqrt{(x^2-2x-3)^3}}\mathrm{d}x$.

18. (6 分) 已知 $f(x)=\int_{-1}^{x-1}\sin(t^2)\mathrm{d}t$，求 $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

五、计算题 (2 小题, 每小题 8 分, 共 16 分)

19. (8 分)在曲线 $y=\mathrm{e}^x(x<0)$ 上任意点 P 作曲线的切线, 切线与 y 轴交点是 M，假设 O 为坐标系原点 试求三角形 PMO 面积的最大值.

20. (8 分)设函数 $f(x), g(x)$ 满足

$$f(x)=\frac{16}{\pi}\sqrt{(1-x^2)^3}+2\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x\,;$$

$$g(x)=6x^2-3\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\,.$$

求 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x, \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$.

六、证明题 (1 小题, 共 6 分)

21. (6 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可导, 且 $f(0)f(1)<0$，证明存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$2f(\xi)=(1-\xi)f'(\xi)\,.$$