上海大学 2017 ~ 2018 学年秋季学期《微积分 1》(A 卷)答案

一、单项选择题 (5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1. 函数 $y=\dfrac{x}{(x-1)\sin(x-\pi)}|x-1|$ 的可去间断点是(C).

   A. $x=1$ B. $x=\pi$ C. $x=0$ D. $x=1,\pi,0$

2. 下面命题正确的是(B).

   A. 单调数列必收敛 B. 收敛数列必有界

   C. 有界数列必收敛 D. 收敛数列极限不唯一

3. 曲线 $y=\dfrac{x^3}{x^2+1}+\dfrac{1}{x}$ (D).

   A. 只有倾斜渐近线 B. 只有铅直渐近线

   C. 没有倾斜渐近线与垂直渐近线 D. 既有倾斜渐近线又有铅直渐近线

4. 设 n 为正整数，如果 $\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x=2$，则 $\int_0^{2\pi} f(|\sin nx|)\mathrm{d}x=$ (A).

   A. 4 B. $2n$

5. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x, & x<1\\ \ln x, & x\ge 1\end{cases}$，则 $f(x)$ 的一个原函数是（ D ）

   A. $F(x)=\begin{cases}x^2, x<1\\ x(\ln x-1), x\ge 1\end{cases}$ B. $F(x)=\begin{cases}x^2, x<1\\ x(\ln x-1)-1, x\ge 1\end{cases}$

   C. $F(x)=\begin{cases}x^2-1, x<1\\ x(\ln x-1), x\ge 1\end{cases}$ D. $F(x)=\begin{cases}x^2-1, x<1\\ x(\ln x-1)+1, x\ge 1\end{cases}$

二、填空题 (5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

6. 当 $x\to 0$ 时，$\sin x-x$ 与 x^{α} 是同阶无穷小，则常数 $\alpha=$ 3.

7.设函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导，且导函数恒大于零，则函数 $y=f(x^3-6x^2+9x)$ 单调递增区间是 $(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$

8. 函数 $y=x+2\cos x+1$ 在区间 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值是 $\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}+1$

9. $\int_{-1}^{1}(1+x^2\ln(x+\sqrt{1+x^2}))\mathrm{d}x=$ 2 .

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\arctan x-3x+x^3}{6\sin x-6x+x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3(x^2+1)^{-1}-3+3x^2}{6\cos x-6+3x^2}$ (2 分)

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4}{2\cos x-2+x^2}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{1+x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^4}{2\cos x-2+x^2}$ (2 分)

$=2\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{x-\sin x}=2\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{1-\cos x}=12$ (2 分)

12. (6 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(1,1)$ 处切线方程是 $y=x$，求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)^x-1}{\sin(2x-2)}$.

解 由条件有 $f'(1)=f(1)=1$，且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续 (1 分)

所以 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)^x-1}{\sin(2x-2)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^{x\ln f(x)}-1}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x\ln f(x)}{2(x-1)}$ (3 分)

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln(1+f(x)-1)}{2(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)-1}{2(x-1)}=\dfrac{f'(1)}{2}=\dfrac{1}{2}$ (2 分)

13. (6 分)设 $y=\dfrac{x^2}{x^2-6x+8}$， 求 $y^{(n)}(0)(n\geq2)$.

解 $y=\dfrac{x^2}{x^2-6x+8}=1+\dfrac{8}{x-4}-\dfrac{2}{x-2}$ （2 分）

由于 $(x^{-1})^{(n)}=(-1)^n n!\dfrac{1}{x^{n+1}}$ （1 分）

所以有 $y^{(n)}=(-1)^n n!(\dfrac{8}{(x-4)^{n+1}}-\dfrac{2}{(x-2)^{n+1}})$ （2 分）

所以 $y^{(n)}(0)=n!(\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{2}{4^n})$ （1 分）

14. (6 分) 设函数 $y=f(u)$，其中 $u=u(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=t^2-2t,\\u=t^3-3t.\end{cases}$ 所确定，如果

$f'(0)=f''(0)=1$. 求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=0}$.

解 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\dfrac{3t^2-3}{2t-2}=\dfrac{3}{2}(t+1)$; (2 分)

所以 $y'=f'(u)u'(x)=\dfrac{3}{2}(t+1)f'(u)$, (1 分)

$y''=\dfrac{3}{2}(t+1)f''(u)u'(x)+\dfrac{3}{2}\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}f'(u)$ (2 分)

$y''|_{t=0}=\left.\left(\dfrac{9}{4}(t+1)^2f''(u)+\dfrac{3}{4(t-1)}f'(u)\right)\right|_{t=0}=\dfrac{3}{2}$. (1 分)

15. (6 分) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\sin(xy)+y-x^2=1$ 所确定，求 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

解 由条件有 $x=0,y=1$。$\sin(xy)+y-x^2=1$ 两边对 x 求导得

$$(y+xy')\cos(xy)-2x+y'=0,$$ **(2 分)**

将 $x=0,y=1$ 代入得 $y'(0)=-1$. **(1 分)**

$(y+xy')\cos(xy)-2x+y'=0$ 两边对 x 求导得

$$(2y'+xy'')\cos(xy)-(y+xy')^2\sin(xy)+y''-2=0$$ **(2 分)**

将 $x=0,y=1$，$y'(0)=-1$ 代入得 $y''(0)=4$. **(1 分)**

四、计算题 (3 小题，每小题 6 分，共 18 分)

16. (6 分) 计算 $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{1}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$.

解 设 $x+1=\tan t$, **(2 分)**

则有 $\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{1}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sec^4 t}\sec^2 t\mathrm{d}t$ **(2 分)**

$\displaystyle=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2t)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$。 **(2 分)**

17. (6 分) 计算 $\displaystyle\int\frac{xe^x+2e^x+2}{\sqrt{e^x+1}}\mathrm{d}x.$

解 $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x+1}}dx = \int \frac{x}{\sqrt{e^x+1}}d(e^x+1)$ (1 分)

$= 2\int xd(\sqrt{e^x+1})$ (2 分)

$= 2x\sqrt{e^x+1} - 2\int \sqrt{e^x+1}dx$ (1 分)

所以 $\int \frac{xe^x+2e^x+2}{\sqrt{e^x+1}}dx = 2x\sqrt{e^x+1} - 2\int \sqrt{e^x+1}dx + 2\int \sqrt{e^x+1}dx$

$= 2x\sqrt{e^x+1} + C$ (2 分)

18. (6 分) 已知 $f(x) = \int_0^x \arctan(t-1)^2 dt$，求 $I = \int_0^1 f(x)dx$.

解 $I = f(x)x\Big|_0^1 - \int_0^1 xf'(x)dx$ **(2 分)**

$= \int_0^1 \arctan(t-1)^2 dt - \int_0^1 x\arctan(x-1)^2 dx$ **(1 分)**

$\overset{u=(t-1)^2}{=\!=\!=} -\frac{1}{2}\int_1^0 \arctan u du = \frac{1}{2}u\arctan u\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{u}{1+u^2}du$ **(2 分)**

$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2$. **(1 分)**

五、计算题 (2 小题, 每小题 8 分, 共 16 分)

19. (8 分)在曲线 $y = \frac{1}{2}(x^2+1)$ $(x>0)$ 上任意点 P 作曲线的切线与法线，切线与 x 轴交点是 M，法线与 x 轴交点为 N. 试求三角形 PMN 面积的最小值.

解 因为 $y' = x$，所以在曲线上点 $P(x_0, y_0)$ 处切线方程为:

$$y - y_0 = x_0(x - x_0),\ \text{其中}\ y_0 = \frac{1}{2}(x_0^2+1).$$

与 x 轴交点是 $M\left(x_0 - \frac{y_0}{x_0}, 0\right)$; **(1 分)**

曲线上点 $P(x_0, y_0)$ 处法线方程为: $y - y_0 = -\frac{1}{x_0}(x - x_0)$, 与 x 轴交点是 $N(x_0y_0 + x_0, 0)$. **(1 分)**

则三角形 PMN 的面积为 $S_{\Delta PMN} = \frac{1}{2}|MN| \cdot y_0 = \frac{1}{8} \cdot \frac{(x_0^2+1)^3}{x_0}$. **(2 分)**

由

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x_0}=\frac{1}{8}\cdot\frac{(x_0^2+1)^2(5x_0^2-1)}{x_0^2}=0, (2 分)$$

得 $x_0=\frac{1}{\sqrt{5}}$. 且 $0<x_0<\frac{1}{\sqrt{5}}$ 时，S 单调减；$x_0>\frac{1}{\sqrt{5}}$ 时 S 单调增，于是三角形 PMN 面积的最小值为

$$S\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\frac{27\sqrt{5}}{125} \qquad (1 分)$$

20. (8 分)设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有连续导数，且 $f(x-y)=f(x)+f(y)-2xy$. 求 $f(x)$.

解 由条件有 $f(0)=0$ (1 分)

所以

$$f'(x)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x-y)-f(x)}{-y}=2x-\lim_{y\to 0}\frac{f(y)-f(0)}{y}=2x-f'(0)$$

(2 分) **(2 分)**

将 $x=0$ 代入得 $f'(0)=0$ **(1 分)**.

积分得 $f(x)=x^2+c$，由 $f(0)=0$，得 $f(x)=x^2$. **(2 分)**

六、证明题 (1 小题，共 6 分)

21. (6 分) 设 $f(x),g(x)$ 是区间 $[a,b](b>a)$ 上连续函数，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 取值非负且为非零函数. 证明存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

由此证明存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $3\int_a^b x^2 f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b^3-a^3)$.

证 因为 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上连续函数，所以存在最大值 M 与最小值 m，即有

$$m\le f(x)\le M, x\in[a,b] \qquad (1 分)$$

由于 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 取值非负，所以有

$$mg(x)\le f(x)g(x)\le Mg(x), x\in[a,b]$$

得

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\le M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

由于$g(x)$在$[a,b]$取值非负且为非零函数，所以$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \neq 0$，则

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} \leq M \qquad \textbf{(2 分)}$$

根据介值定理有$\xi \in [a,b]$使得 $\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x} = f(\xi)$,即有

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \qquad \textbf{(1 分).}$$

令$g(x)=x^2$，则得存在$\xi \in [a,b]$，使得$3\int_a^b x^2 f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b^3-a^3)$ **(2 分)**