得分	评卷人

二. 填空题 (5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

6. 当 $x\to 0$ 时, $ax+bx^2$ 与 $\sqrt{1+x^2}-1$ 是等价无穷小,则 $(a,b)=$ $\underline{(0,\frac{1}{2})}$.

7.设 $f(x)$ 是可导函数, 且 $y=f(x)+f(\frac{1}{x})$, 则 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}=$ $\underline{\quad 0 \quad}$.

8. 函数 $y=e^{\frac{1}{1-x}}$ 单调递增区间是 $\underline{(-\infty,1)\cup(1,+\infty)}$.

9. $\int\frac{x^2-1}{1+x^2}dx=$ $\underline{x-2\arctan x+c}$.

10. $\int_{-1}^{1}(x+1)\sqrt{(1-x^2)^5}dx=$ $\underline{\frac{16}{15} \quad \frac{5}{16}\pi}$.

得分	评卷人

三. 计算题 (3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分)

11. $\lim_{x\to\infty}x^3\left(\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\sin\frac{2}{x}\right)$

解 原式

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin t-\frac{1}{2}\sin 2t}{t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-\cos 2t}{3t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin 2t-\sin t}{6t}=\lim_{t\to 0}\frac{4\cos 2t-\cos t}{6}=\frac{1}{2}.$$

(1 分) (1 分) (1 分) (1 分) (1 分)

12. 求 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3+3^n}$.

解 法一 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3+3^n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\ln(n^3+3^n)}$. (2 分)

由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(n^3+3^n)=\lim_{x\to 0}\frac{3n^2+3^n\ln 3}{n^3+3^n}$ (1 分)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{n^2}{3^{n-1}}+\ln 3}{\frac{n^3}{3^n}+1}=\ln 3$$ (1 分)

所以 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3+3^n}=e^{\ln 3}=3$.. (1 分)

法二 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^3+3^n}=3\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^3}{3^n}+1}=3\lim_{n\to\infty}e^{\frac{n^3}{n3^n}}=3.$

(2 分) (2 分) (1 分)

13. 设 $f(x)$ 是连续函数, 且 $f(0)=2$, 求 $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(x-t)f(t)dt}{\arctan(x^2)}$.

解 $\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x(x-t)f(t)dt}{\arctan(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt}{x^2}$ (2 分)

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2}=1.$$

(2 分) (1 分)

草 稿 纸

得分	评卷人

四. 计算题（3 小题，每小题 5 分，共 15 分）

14.设 $y=\arctan\dfrac{x-1}{x+1}$，求 $\mathrm{d}y$.

解 $y'=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)'=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2}\cdot\dfrac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}$ （1 分+1 分）

$=\dfrac{2}{(x+1)^2+(x-1)^2}=\dfrac{1}{1+x^2}$ （1 分+1 分）

所以 $\mathrm{d}y=\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ （1 分）

15.用对数求导法计算 $y=\dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt[3]{1+x^3}}$ 的导数.

解 函数两边取对数，得 $\ln y=\ln x+\dfrac{1}{2}\ln(1-x^2)-\dfrac{1}{3}\ln(1+x^3)$， （1 分）

上式两边分别对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot(-2x)-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+x^3}\cdot 3x^2,$$ （1 分+2 分）

于是 $y'=y\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{x}{1-x^2}-\dfrac{x^2}{1+x^3}\right)$ （1 分）

16. 设函数 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[1+\dfrac{x}{n(x+3)}\right]^n$，求 $y^{(n)}(n>1)$.

解 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left[1+\dfrac{x}{n(x+3)}\right]^n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nx}{n(x+3)}=\dfrac{x}{x+3}$ （2 分）

所以 $y^{(n)}=\left(1-\dfrac{3}{x+3}\right)^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}3\cdot n!}{(x+3)^{n+1}}$ （3 分）

草　稿　纸

得分	评卷人

五. 计算题 (3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分)

17. 求 $\int \sec^4 x\mathrm{d}x$。

解 $\int \sec^4 x\mathrm{d}x = \int \sec^2 x \cdot \sec^2 x\mathrm{d}x$ (1 分)

$= \int (1+\tan^2 x)\sec^2 x\mathrm{d}x$ (2 分)

$= \int (1+\tan^2 x)\mathrm{d}(\tan x)$ (1 分)

$= \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + c.$ (2 分)

18. 求 $\int \frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{\arctan x}{x^2}\mathrm{d}x = -\int \arctan x\mathrm{d}(x^{-1})$ (2 分)

$= -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$ (1 分)

$= -\frac{\arctan x}{x} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$ (1 分)

$= -\frac{\arctan x}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$ (2 分)

19. 设 $I = \int_0^3 \frac{\sqrt{6-x}}{\sqrt{6-x}+\sqrt{x+3}}\mathrm{d}x$，求 I.

解 令 $6-x=u+3$ 即 $u=3-x$，且 $\mathrm{d}u=-\mathrm{d}x$ (2 分)

有 $I = \int_3^0 \frac{\sqrt{u+3}}{\sqrt{u+3}+\sqrt{6-u}}(-\mathrm{d}u) = \int_0^3 \frac{\sqrt{u+3}}{\sqrt{u+3}+\sqrt{6-u}}\mathrm{d}u$ (2 分)

故 $2I = \int_0^3 \frac{\sqrt{6-x}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{6-x}+\sqrt{x+3}}\mathrm{d}x = \int_0^3 \mathrm{d}x = 3$, (1 分)

所以 $I = \frac{3}{2}$. (1 分)

草　稿　纸

得分	评卷人

六. 应用题 (2 小题, 每小题 8 分, 共 16 分)

20. 已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = t^2 - 4t, \end{cases} \quad (t > 0).$

(1) (4 分)讨论曲线 L 的凹凸性； (2) (4 分) 过点 $P(0,-1)$ 引 L 的切线，写出切线方程.

解 (1) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{2t-4}{2t} = 1 - \dfrac{2}{t}$， $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \dfrac{\frac{2}{t^2}}{2t} = \dfrac{1}{t^3}$；

(2分) (1分)

因为 $t > 0$，所以 $\dfrac{d^2y}{dx^2} > 0$，则曲线 L 是上凹的. (1 分)

(2) 设切点 $(x_0, y_0) = (t_0^2 + 1, t_0^2 - 4t_0)$，则切线方程为

$$y - (t_0^2 - 4t_0) = \left(1 - \frac{2}{t_0}\right)(x - t_0^2 - 1), \qquad (2\text{ 分})$$

将 P 点的坐标代入并整理得 $t_0^2 = 1$，解得 $t_0 = 1$， $t_0 = -1$，(舍去). (1 分)

则切线方程为 $y = -x - 1$. 2 (1 分)

21. 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $x^3 + y^3 - 3x + y = 0$ 确定，求 $f(x)$ 的极值.

解 对方程两边直接求导：$3x^2 - 3 + 3y^2y' + y' = 0$ ①

得
$$y' = \frac{3(1-x)(1+x)}{3y^2+1} \qquad (2\text{ 分})$$

令 $y' = 0$，得 $x = \pm 1$，代入原方程得 $y = \pm 1$ (2 分)

（法一） 对①式两边再求导： $6x + 6y(y')^2 + 3y^2y'' + y'' = 0$. (1 分)

得：$y''(1) = -\dfrac{3}{2} < 0, y''(-1) = \dfrac{3}{2} > 0$. (2 分)

$\therefore y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处取极大值 1，在 $x = -1$ 处取极小值 -1. (1 分)

（法二）根据 y'，当 $|x| > 1$ 时有 $y' < 0$；当 $|x| < 1$ 时有 $y' > 0$ (2 分)

所以 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处取极大值 1，在 $x = -1$ 处取极小值 -1. (2 分)

得分	评卷人

七. 证明题 (1 小题, 共 6 分)

22. 设 $a > 0$，连续函数 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上单调递减，证明

$$a\int_0^x f(t)dt \ge x\int_0^a f(x)dx, x \in [0,a].$$

证 根据积分中值定理有 $\xi \in [0,a]$ 使得 $\int_0^a f(x)dx = f(\xi)a$ (1 分)

设 $F(x) = a\int_0^x f(t)dt - x\int_0^a f(x)dx$，得 +1

$F'(x) = af(x) - \int_0^a f(x)dx = a(f(x) - f(\xi))$， 求导+1. 求对+1 (2 分)

根据单调性，得 +1

当 $x < \xi$ 时，有 $F'(x) \ge 0$ 是，所以有 $F(x) \ge F(0) = 0, x \in [0,\xi]$； (1 分)

当 $x > \xi$ 时，有 $F'(x) \le 0$ 是，所以有 $F(x) \ge F(a) = 0, x \in [\xi,a]$； (1 分)

得 $F(x) \ge 0, x \in [0,a]$，即得结论. (1 分)

上海大学 2015 ～ 2016 学年秋季学期试卷 A 卷

成绩	

课程名：微积分 1 参考答案　课程号：01014125　学分：6

应试人声明：

我保证遵守《上海大学学生手册》中的《上海大学考场规则》，如有考试违纪、作弊行为，愿意接受《上海大学学生考试违纪、作弊行为界定及处分规定》的纪律处分。

应试人 ____________ 应试人学号____________应试人所在院系____________

题号	一	二	三	四	五	六	七
得分	15	15	15	15	18	16	6

得分	评卷人

一．单项选择题 (5 小题，每小题 3 分，共 15 分)

1. 下面结论正确的是(C).

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=1$　　B. $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=1$

C. $\lim\limits_{x\to0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$　　D. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}$ 极限不存在

2. 设 $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x-1}}, & x>0, \\ \ln|1+x|, & x\le 0. \end{cases}$ 则 $f(x)$ 的间断点个数为(D).

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

3. 若 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $|f(x)|$ 在点 x_0 处(B).

A 必可导　　B 连续但不一定可导

C 一定不可导　　D 不连续

4. 设 $f(x)$ 为连续函数,且 $\int_0^1 f(x^2)x\mathrm{d}x=1$，则 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=$ (A)

A. 2　　B. 1　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D.以上都不正确.

5. 设 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $f(x)=x^2+o(x^2)$，则(B).

A. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值；

B. $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值;

C. $(0,f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点;

D. $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

草　稿　纸