

上海大学 2017~2018 学年秋季学期《微积分 1》(A 卷)答案

一、单项选择题 (5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

- 函数 $y = \frac{x}{(x-1)\sin(x-\pi)} |x-1|$ 的可去间断点是().
 A. $x=1$ B. $x=\pi$ C. $x=0$ D. $x=1, \pi, 0$
- 下面命题正确的是().
 A. 单调数列必收敛 B. 收敛数列必有界
 C. 有界数列必收敛 D. 收敛数列极限不唯一
- 曲线 $y = \frac{x^3}{x^2+1} + \frac{1}{x}$ ().
 A. 只有倾斜渐近线 B. 只有铅直渐近线
 C. 没有倾斜渐近线与垂直渐近线 D. 既有倾斜渐近线又有铅直渐近线
- 设 n 为正整数, 如果 $\int_0^\pi f(\sin x)dx = 2$, 则 $\int_0^{2\pi} f(|\sin nx|)dx = ()$.
 A. 4 B. $2n$
- 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ \ln x, & x \geq 1 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 的一个原函数是 ().
 A. $F(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ x(\ln x - 1), & x \geq 1 \end{cases}$ B. $F(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ x(\ln x - 1) - 1, & x \geq 1 \end{cases}$
 C. $F(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 1 \\ x(\ln x - 1), & x \geq 1 \end{cases}$ D. $F(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 1 \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geq 1 \end{cases}$

二、填空题 (5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

- 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x - x$ 与 x^α 是同阶无穷小, 则常数 $\alpha = \underline{3}$
- 设函数 $f(x)$ 在 \mathbb{R}^+ 上可导, 且导函数恒大于零, 则函数 $y = f(x^3 - 6x^2 + 9x)$ 单调递增区间是 $[-1, 2]$
- 函数 $y = x + 2\cos x + 1$ 在区间 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值是 3
- $\int_{-1}^1 (1+x^2 \ln(x+\sqrt{1+x^2}))dx = \underline{0}$

12. (6 分) 设函数 $f(x)$ 在 $(1,1)$ 处切线方程是 $y=x$ ，求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)^x - 1}{\sin(2x-2)}$ 。

13. (6 分) 设 $y = \frac{x^2}{x^2 - 6x + 8}$ ，求 $y^{(n)}(0) (n \geq 2)$ 。

14. (6 分) 设函数 $y = f(u)$ ，其中 $u = u(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = t^2 - 2t, \\ u = t^3 - 3t. \end{cases}$ 所确定，如果

$$f'(0) = f''(0) = 1. \text{ 求 } \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0}.$$

$$15. (6 \text{ 分}) \text{ 设函数 } y = y(x) \text{ 由方程 } \sin(xy) + y - x^2 = 1 \text{ 所确定, 求 } \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=0}.$$

四、计算题 (3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分)

$$16. (6 \text{ 分}) \text{ 计算 } \int_{-1}^0 \frac{1}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx.$$

$$17. (6 \text{ 分}) \text{ 计算 } \int \frac{xe^x + 2e^x + 2}{\sqrt{e^x + 1}} dx.$$

18. (6 分) 已知 $f(x) = \int_0^x \arctan(t-1)^2 dt$, 求 $I = \int_0^1 f(x) dx$.

五、计算题 (2 小题, 每小题 8 分, 共 16 分)

19. (8 分) 在曲线 $y = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$ ($x > 0$) 上任意点 P 作曲线的切线与法线, 切线与 x 轴交点是 M , 法线与 x 轴交点为 N . 试求三角形 PMN 面积的最小值.

20. (8 分) 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上具有连续导数, 且 $f(x-y) = f(x) + f(y) - 2xy$. 求 $f(x)$.

六、证明题 (1 小题, 共 6 分)

21. (6 分) 设 $f(x), g(x)$ 是区间 $[a, b] (b > a)$ 上连续函数, $g(x)$ 在 $[a, b]$ 取值非负且为非零函数. 证明存在 $\xi \in [a, b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

由此证明存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $3\int_a^b x^2 f(x)dx = f(\xi)(b^3 - a^3)$.