一 ① . C . ② . B . ③ D . ④ . C . ⑤ A .

二 . ⑥ . $x=0$. ⑦ . $2^{2016}e^{2x}$ ⑧ $\overset{107}{\cancel{108}}$. ⑨ . $a=0$. ⑩ . $2x+y-1=0$

一

得分	评卷人

三. 计算题 (5 小题, 每小题 6 分, 共 30 分)

11. (6 分) 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin(2x)}{x^2\ln(1+x)}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin(2x)}{x^2\ln(1+x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x-\sin(2x)}{x^3}$ (2 分)

$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos x-2\cos 2x}{3x^2}\overset{\frac{0}{0}}{=}2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x+2\sin 2x}{6x}$ (1+1 分)

$\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\cos x+4\cos 2x}{3}=1$. (1+1 分)

12. (6 分) 计算 $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1)^{\frac{2}{\ln\cos x}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}(x^2+1)^{\frac{2}{\ln\cos x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{2}{\ln\cos x}\ln(x^2+1)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ln(x^2+1)}{\ln\cos x}}$ (2 分)

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x^2)}{\ln(1+\cos x-1)}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2}{\cos x-1}}$ (2 分)

$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x^2}{-\frac{1}{2}x^2}}=e^{-4}$. (1+1 分)

13. (6 分) 设 $y=\operatorname{arccot}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$, 求 dy.

解 $y'=-\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)'=-\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}\cdot\dfrac{-4x}{(1+x^2)^2}=\dfrac{2x}{1+x^4}$

(2 分) (2 分) (1 分)

所以 $dy=\dfrac{2x}{1+x^4}dx$.(1 分)

14. (6 分) 设函数 $f(x)$ 有一阶连续导数，如果 $y=x^{f(x)}+\arcsin f(x)$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 $\left(x^{f(x)}\right)'=\left(\mathrm{e}^{f(x)\ln x}\right)'=\mathrm{e}^{f(x)\ln x}\left(f'(x)\ln x+\dfrac{f(x)}{x}\right)=x^{f(x)}\left(f'(x)\ln x+\dfrac{f(x)}{x}\right)$； (3 分)

$$\left(\arcsin f(x)\right)'=\frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}.$$ (2 分)

所以 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x^{f(x)}\left(f'(x)\ln x+\dfrac{f(x)}{x}\right)+\dfrac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}}$. (1 分)

15. (6 分) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x\mathrm{e}^{f(y)}=\mathrm{e}^y$ $(x>0)$ 所确定，其中 f 二阶可导，且 $f'\neq 1$，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解 由 $x\mathrm{e}^{f(y)}=\mathrm{e}^y$ $(x>0)$ 得 $\ln x+f(y)=y$； (1 分)

两边对 x 求导得 $\dfrac{1}{x}+f'(y)\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$， (2 分)

则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x[1-f'(y)]}$； (1 分)

所以 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\dfrac{-\left\{[1-f'(y)]+x\left[-f''(y)\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]\right\}}{x^2[1-f'(y)]^2}$ (1 分)

$=-\dfrac{[1-f'(y)]^2-f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3}$. (1 分)

得分	评卷人

四. 计算题 (3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分)

16. (6 分) 计算 $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解 $\int \frac{\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}\mathrm{d}x \xlongequal{x^{\frac{1}{4}}=t} \int \frac{t}{1-t^2}\cdot 4t^3\mathrm{d}t = 4\int\left(-t^2-1+\frac{1}{1-t^2}\right)\mathrm{d}t$ (2+1 分)

$= 4\left(-\frac{1}{3}t^3 - t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right)+C = 4\left(-\frac{1}{3}x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^{\frac{1}{4}}+1}{x^{\frac{1}{4}}-1}\right|\right)+C.$ (2+1 分)

17. (6 分)计算 $\int \frac{1}{\sqrt{(x^2+2x+2)^3}}\mathrm{d}x$.

解 设 $x+1=\tan t$,则$\sqrt{(x^2+2x+2)^3}=\sec^3 t, \mathrm{d}x=\sec^2 t\mathrm{d}t$ (2 分)

$\int \frac{1}{\sqrt{(x^2+2x+2)^3}}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{\sec^3 t}\sec^2 t\mathrm{d}t = \int \cos t\mathrm{d}t = \sin t + C$ (2 分)

$= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}+C$ (2 分)

18. (6 分) 计算 $\int x\tan^2 x\mathrm{d}x$.

解 $\int x\tan^2 x\mathrm{d}x = \int x\sec^2 x\mathrm{d}x - \int x\mathrm{d}x = \int x\sec^2 x\mathrm{d}x - \frac{1}{2}x^2$ (2 分)

$\int x\sec^2 x\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}\tan x = x\tan x - \int \tan x\mathrm{d}x$ (2 分)

$= x\tan x + \ln|\cos x| + C$ (1 分)

所以 $\int x\tan^2 x\mathrm{d}x = x\tan x + \ln|\cos x| - \frac{1}{2}x^2 + C$ (1 分)

得分	评卷人

五. 综合题 (2 小题, 每小题 8 分, 共 16 分)

19. 设 $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$. 试在由 $y=f(x)(x>0)$ 的切线与两坐标轴所围成的一切三角形中, 求出面积最小时切点的坐标.

解 过曲线 $y=f(x)$ 上点 (x,y) 的切线方程为 $Y-e^{\frac{1}{x}}=-x^{-2}e^{\frac{1}{x}}(X-x)$, (2 分)

则切线在 x 轴和 y 轴上的截距分别为 $x^2+x,(x^{-1}+1)e^{\frac{1}{x}}$, (1 分)

于是曲线 $y=f(x)$ 的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积为 $S=\frac{1}{2}(x+1)^2e^{\frac{1}{x}}$. (1 分)

于是 $\frac{dS}{dx}=(x+1)e^{\frac{1}{x}}+\frac{1}{2}(x+1)^2(e^{\frac{1}{x}})'=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{2x^2}(x+1)(2x+1)(x-1)$, (2 分)

令 $\frac{dS}{dx}=0$, 得唯一驻点 $x=1$, (1 分)

所以当 $x=1$ 时, 三角形面积取得极小值, 即取得最小值, 此时切点坐标为 $(1,e)$. (1 分)

20. 设 $f(x)=\begin{cases} e^{ax}, & x\le 0, \\ b+\sin 3x, & x>0. \end{cases}$ 问 a,b 取何值时, $f(x)$ 为可导函数, 并求 $f'(x)$.

解 要使 $f(x)$ 为可导函数, 只需 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导. 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续. (1 分)

故 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^{ax}=1=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(b+\sin 3x)=b$, 得 $b=1$ (2 分)

又因为 $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^{ax}-1}{x}=a$, $f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(1+\sin 3x)-1}{x}=3$, (2 分)

由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 所以 $f'_-(0)=f'_+(0)$, 得 $a=3$, 且 $f'(0)=3$. (1 分)

此时 $f(x)=\begin{cases} e^{3x}, & x\le 0, \\ 1+\sin 3x, & x>0. \end{cases}$ 所以

$$f'(x)=\begin{cases} 3e^{3x}, & x<0, \\ 3, & x=0, \\ 3\cos 3x, & x>0. \end{cases} \quad (2 分)$$

得分	评卷人

六. 证明题 (1 小题, 共 6 分)

21. (6 分) 设 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上有二阶导数, 且 $f(0)>0, f(1)<0, f(2)=0$. 又 $F(x)=(x-1)f(x)$, 求证: 在 $(0,2)$ 内至少有一个 ξ, 使得 $F''(\xi)=0$.

证: 由 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上有二阶导数知 $F(x)$ 在 $[0,2]$ 上有二阶导数, (1 分)

因为 $f(0)\cdot f(1)<0$, 所以由零点定理知存在 $\xi_1\in(0,1)$, 使得 $f(\xi_1)=0$, 得 $F(\xi_1)=0$, (1 分)

由此有 $F(\xi_1)=F(1)=F(2)=0$, 且 $\xi_1<1<2$, 显然 $F(x)$ $[\xi_1,1],[1,2]$ 满足罗尔定理条件 (1 分)

所以存在 $\xi_2\in(\xi_1,1),\xi_3\in(1,2)$ 使得 $F'(\xi_2)=0,F'(\xi_3)=0$ (2 分)

显然 $F'(x)$ 在 $[\xi_2,\xi_3]$ 上连续, 在 (ξ_2,ξ_3) 内可导, 且 $F'(\xi_2)=F'(\xi_3)=0$, 则再由罗尔定理可知, 存在 $\xi\in(\xi_2,\xi_3)\subset(0,2)$, 使得 $F''(\xi)=0$.