上海大学 2018 ~ 2019 学年秋季学期《微积分 1》(A 卷)答案

一、单项选择题 (5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

1. 设数列通项 $x_n=\dfrac{\sqrt{n}+\left[1-(-1)^n\right]n^2}{n}$，则当 $n\to\infty$ 时，x_n 是(D)

A. 无穷大量　　　　B. 无穷小量

C. 有界变量，但不是无穷小量　　　　D. 无界变量，但不是无穷大量

2. 设 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=A$，则下面命题正确的是(A).

A. 如果 $A>0$，则在 $x=0$ 处存在去心邻域使得函数 $f(x)$ 在此去心邻域中恒大于零;

B. 如果 $f(x)$ 在 $x=0$ 某去心邻域中恒大于零，则 $A>0$;

C. 如果 $f(x)$ 在 $x=0$ 某去心邻域中恒小于零，则 $A<0$;

D. 如果 $A=0$，则在 $x=0$ 处存在去心邻域使得函数 $f(x)$ 在此去心邻域中恒等于零.

3. 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则(C).

A. 曲线 $y=f(x)$ 只有一条水平渐近线　　　　B. 曲线 $y=f(x)$ 没有铅直渐近线

C. 曲线 $y=f(x)$ 至少有一条水平渐近线　　　　D. 曲线 $y=f(x)$ 有铅直渐近线

4. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}1+\sin x, & x<0\\ \cos x, x\ge 0\end{cases}$，则 $\int f(x)\mathrm{d}x=$ (D)

A. $\begin{cases}x-\cos x+c_1, x<0\\ \sin x+c_2, x\ge 0\end{cases}$　　　　B. $\begin{cases}x+\cos x+c_1, x<0\\ \sin x+c_2, x\ge 0\end{cases}$

C. $\begin{cases}x-\cos x+c_1, x<0\\ -\sin x+c_2, x\ge 0\end{cases}$　　　　D. $\begin{cases}x-\cos x+1+c, x<0\\ \sin x+c, x\ge 0\end{cases}$

5. 设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=0, f'(0)=1$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x^3}=$ (B)

A. 0　　　　B. $\dfrac{1}{6}$　　　　C. $\dfrac{1}{2}$　　　　D. 3

二、填空题 (5 小题, 每小题 3 分, 共 15 分)

6. 在 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x^2)(\sqrt{1+x}-1)$ 与 x^α 是同阶无穷小，则 $\alpha=$ <u>3</u>.

7. 设函数 $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x+1}}, & x>0,\\ \ln|1+x|, & x\le 0.\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的间断点个数为 <u>2</u>.

8. 已知曲线L的参数方程为$\begin{cases} x=(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$，则曲线 L 在$t=\dfrac{\pi}{2}$处切线斜率为$\underline{2}$.

9. 函数$y=x^3-3x$单调递减区间是$\underline{(-1,1)}$.

10. $\int_{-1}^{1}(x^{2019}\cos(x^2)+3x^2)\mathrm{d}x=\underline{2}$.

三、计算题 (5 小题, 每小题 6 分, 共 30 分)

11. (6 分) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x-\sin x)^{\frac{1}{x^3}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x-\sin x)^{\frac{1}{x^3}}=\exp(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x-\sin x)}{x^3})$ **(2 分)**

$=\exp(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3})=\exp(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2})$ **(1 分+2 分)**

$=\mathrm{e}^{\frac{1}{6}}$ **(1 分)**

12. (6 分) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1})}{x^2+2x-1}$.

解 因为$\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2}{x^2+2x-1}=1$， **(2 分)**

所以

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x^2(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1})}{x^2+2x-1}=\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1}) \quad \textbf{(1 分)}$$

$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}} \quad \textbf{(1 分)}$$

$$=\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{-\sqrt{1+x^{-1}+x^{-2}}-\sqrt{1+x^{-2}}}=-\frac{1}{2} \quad \textbf{(1 分)}$$

所以原式为$-\dfrac{1}{2}$. **(1 分)**

13. (6 分)设$y=\dfrac{x^2-4x+2}{x^2-5x+6}$， 求$y^{(n)}(0)(n\geq 2)$.

解 $y=\dfrac{x^2-4x+2}{x^2-5x+6}=1+\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{1}{x-3}$ **(2 分)**

由于$(x^{-1})^{(n)}=(-1)^n n!\dfrac{1}{x^{n+1}}$ **(1 分)**

所以有 $y^{(n)}=(-1)^n n!(\frac{2}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-3)^{n+1}})$ （2 分）

所以 $y^{(n)}(0)=n!(\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{2^n})$ （1 分）

14.(6 分) 设函数 $f(x)$ 为可导函数，且 $y=f(2x)+f(\frac{2x}{x^2-1})$ 求 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}$.

解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2f'(2x)+f'(\frac{2x}{x^2-1})\cdot\left(\frac{2x}{x^2-1}\right)'$; （2 分）

$$=2f'(2x)-f'(\frac{2x}{x^2-1})\cdot\frac{2(1+x^2)}{(x^2-1)^2}$$ （3 分）

所以 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}=(2f'(0)-2f'(0))\mathrm{d}x=0$. （1 分）

15.(6 分) 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\cos(x^2y)+y+x^2=1$ 所确定，求 $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}$.

解 由条件有 $x=0,y=0$ （1 分）

$\cos(x^2y)+y+x^2=1$ 两边对 x 求导得

$$-(2xy+x^2y')\sin(x^2y)+2x+y'=0,$$ （2 分）

将 $x=0,y=0$ 代入得 $y'(0)=0$. （1 分）

$-(2xy+x^2y')\sin(x^2y)+2x+y'=0$ 两边对 x 求导得

$-(2y+4xy'+x^2y'')\sin(x^2y)-(2xy+x^2y')^2\cos(x^2y)+y''+2=0$ （2 分）

将 $x=0,y=0$，$y'(0)=0$ 代入得 $y''(0)=-2$. （1 分）

四、计算题 (3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分)

16.(6 分)计算 $\int\frac{\ln(\mathrm{e}^x-1)}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

解 $\int\frac{\ln(\mathrm{e}^x-1)}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=-\int\ln(\mathrm{e}^x-1)\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})$ （1 分）

$$=-\mathrm{e}^{-x}\ln(\mathrm{e}^x-1)+\int\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x-1}\cdot\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$ （2 分）

$$=-\mathrm{e}^{-x}\ln(\mathrm{e}^x-1)+\int\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$$ （1 分）

$$=-\mathrm{e}^{-x}\ln(\mathrm{e}^x-1)+\ln(1-\mathrm{e}^{-x})+C$$ （2 分）

17.(6 分) 计算 $\int_5^{2\sqrt{2}+1}\frac{2x-4}{\sqrt{(x^2-2x-3)^3}}\mathrm{d}x$.

解 设 $x-1=2\sec t$，　(2 分)

有 $\int_5^{2\sqrt{2}+1}\frac{2x-4}{\sqrt{(x^2-2x-3)^3}}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{4\sec t-2}{8\tan^3 t}\cdot 2\sec t\tan t\mathrm{d}t$　(1 分)

$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}(\csc^2 t-\frac{1}{2}\csc t\cot t)\mathrm{d}t=(\frac{1}{2}\csc t-\cot t)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}-1$　(3 分)

18. (6 分) 已知 $f(x)=\int_{-1}^{x-1}\sin(t^2)\mathrm{d}t$，求 $I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

解　首先有 $f(0)=\int_{-1}^{-1}\sin(t^2)\mathrm{d}t=0$　(1 分)

$I=(x-1)f(x)\Big|_0^1-\int_0^1(x-1)\sin((x-1)^2)\mathrm{d}x$　(2 分)

$=-\frac{1}{2}\int_0^1\sin(x-1)^2\mathrm{d}(x-1)^2$　(2 分)

$=\frac{1}{2}\cos(x-1)^2\Big|_0^1=\frac{1}{2}(1-\cos 1)$　(1 分)

五、计算题 (2 小题, 每小题 8 分, 共 16 分)

19. (8 分)在曲线 $y=\mathrm{e}^x(x<0)$ 上任意点 P 作曲线的切线，切线与 y 轴交点是 M，假设 O 为坐标系原点 试求三角形 PMO 面积的最大值.

解　因为 $y'=\mathrm{e}^x$，所以在曲线上点 $P(x_0,y_0)$ 处切线方程为:

$y-y_0=\mathrm{e}^{x_0}(x-x_0)$，其中 $y_0=\mathrm{e}^{x_0}$.　(1 分)

与 y 轴交点是 $M\left(0,\mathrm{e}^{x_0}(1-x_0)\right)$.　则三角形 PMO 的面积为

$$S_{\Delta PMN}=\frac{1}{2}|x_0\cdot\mathrm{e}^{x_0}(1-x_0)|=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{e}^{x_0}(x_0-1)x_0.$$ (2 分)

由

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x_0}=\frac{\mathrm{e}^{x_0}}{2}(x_0-1)x_0+\frac{\mathrm{e}^{x_0}}{2}(2x_0-1)=\frac{\mathrm{e}^{x_0}}{2}(x_0^2+x_0-1)$$ (2 分)

由于 $x_0<0$，得唯一驻点 $x_0=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. 且 $x_0<\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ 时，S 单调增，$x_0>\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ 时 S 单调减，　(2 分)

于是三角形 PMO 面积的最大值为

$$S\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{(3+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{8}\mathrm{e}^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}$$ (1 分)

20. (8 分)设函数 $f(x),g(x)$ 满足

$$f(x)=\frac{16}{\pi}\sqrt{(1-x^2)^3}+2\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x;$$

$$g(x)=6x^2-3\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

求 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x,\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x$.

解 设 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A,\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=B$ 则

$$A=\frac{16}{\pi}\int_0^1\sqrt{(1-x^2)^3}\mathrm{d}x+2B\text{(设 }x=\sin t\text{)} \qquad \textbf{(2 分)}$$

$$=\frac{16}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\mathrm{d}t+2B=3+2B \qquad \textbf{(2 分)}$$

$$B=\int_0^1 6x^2\mathrm{d}x-3A=2-3A \qquad \textbf{(2 分)}$$

解得 $A=1,B=-1$ **(2 分)**

六、证明题 (1 小题, 共 6 分)

21. (6 分) 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上可导, 且 $f(0)f(1)<0$，证明存在 $\xi\in(0,1)$ 使得

$$2f(\xi)=(1-\xi)f'(\xi).$$

证 因为 $f(x)$ 是区间 $[0,1]$ 上可导, 且 $f(0)f(1)<0$，所以由零点定理知，存在 $\eta\in(0,1)$，

使得 $f(\eta)=0$ **(2 分)**

作函数 $g(x)=(x-1)^2f(x)$，则 $g(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导, **(1 分)**

且有 $g(1)=g(\eta)=0$， **(2 分)**

于是由[0,1]上罗尔定理知，存在 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$，使得

$$g'(\xi)=2(\xi-1)f(\xi)+(\xi-1)^2f'(\xi)=0$$

得 $2f(\xi)=(1-\xi)f'(\xi)$， **(1 分)**