2022年春季学期平时作业汇总

姓名：李昀哲

学号：20123101

序号：49

每周每次作业已按序排列，图片大小已尽可能放大
如字体还是太小，可放大查看，给老师带来不便，请见谅。

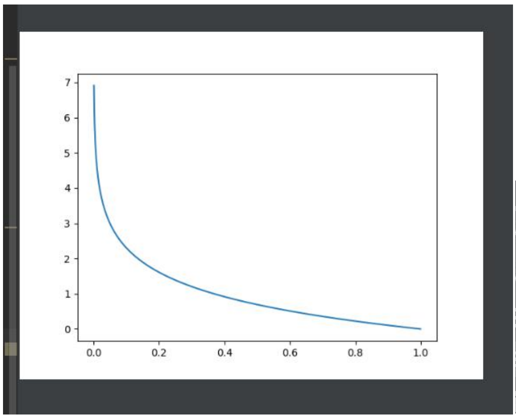
2022 年 3 月 9 日作业

1. 熟悉 python 可视化方法，绘制自信息与概率之间函数图像。
2. 设计一个掷骰子的 python 小程序；投掷 100 次，计算 1 和朝上的概率。

程序代码如下图所示：

```python
import random

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np



# 2022.3.9 自信息与概率关系
x = np.arange(0, 1, 0.001)
y = np.log(1/x)

plt.plot(x, y)

plt.show()

# 2022.3.9 投掷筛子小程序
cnt = 100
num_of_one = 0
num_of_six = 0
for i in range(cnt):
    num = random.randrange(1,7)
    if num == 1:
        num_of_one += 1
    if num == 6:
        num_of_six += 1
prob_one = num_of_one / cnt
prob_six = num_of_six / cnt
print(prob_one, ' ', prob_six)
```

运行结果：第一题如左下图所示；第二题如右下图所示

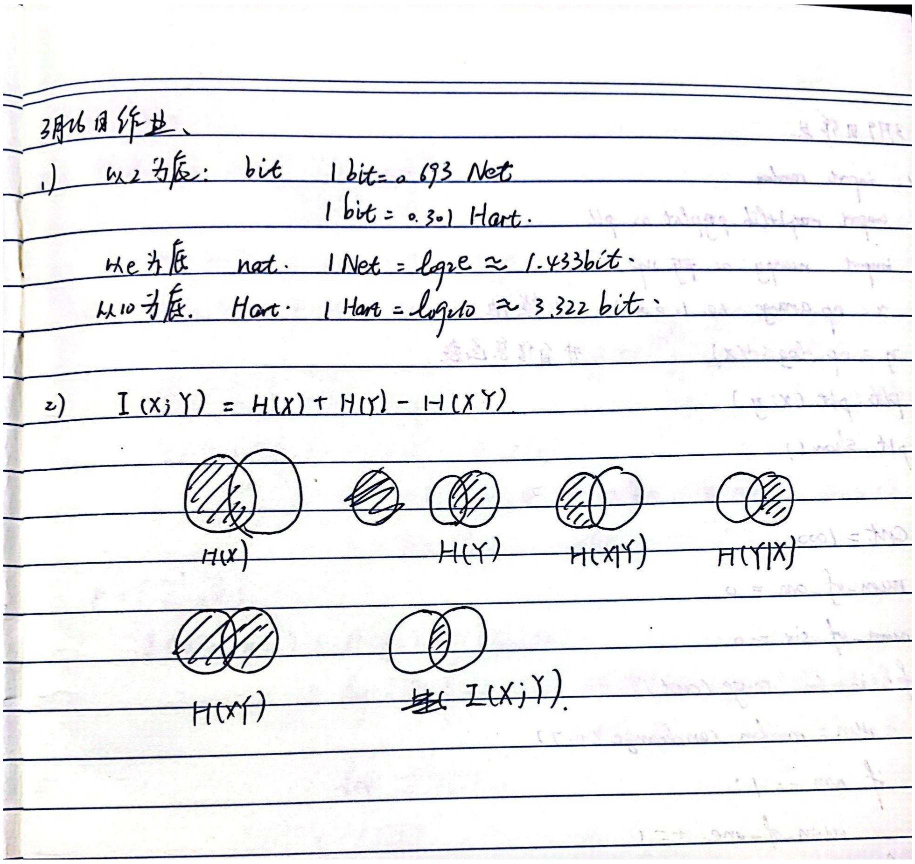



```
main
E:\Anaconda\envs\Jonas\python.exe E:/PycharmProj
E:/PycharmProjects/InformationTheory/main.py:11
  y = np.log(1/x)
0.17   0.12

Process finished with exit code 0
```

2022 年 3 月 16 日作业：

1）请推导自信息量的各种单位之间换算公式？

2）请绘图说明 I(X;Y),H(X),H(X|Y),H(Y|X),H(Y)之间的关系。



3月16日作业、

1) 以2为底: bit　$1\ bit = 0.693\ Net$

$1\ bit = 0.301\ Hart.$

以e为底　nat.　$1\ Net = \log_2 e \approx 1.433 bit$.

以10为底.　Hart.　$1\ Hart = \log_2 10 \approx 3.322\ bit$.

2) $I(X;Y) = H(X) + H(Y) - H(XY)$.

H(X)　H(Y)　H(X|Y)　H(Y|X)

H(XY)　I(X;Y).

2022 年 3 月 23 日作业

1.习题 22.1，2.3、2.4、2.5

2.编程：建立一个简单的网络（多层线性网络），输入输出都是 2 维。输入每个维度都是标准高斯分布。假设输出为 X=[X1,X2]， 求 H(X)-(H(X1)+H(X2)

第二章 3月23日作业、

2.1 (A) $P(A) = \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\times 2 = \frac{10}{36}$ $I(A) = -\log_2 P(A) = 1.848$ bit

(B) $P(B) = 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$ $I(B) = -\log_2 P(B) = 1.710$ bit.

(C) $P(C) = 1/2$ $I(C) = -\log_2 2^{-1} = 1$ bit.

2.3. 信源 $\xrightarrow{x_3}$ 信宿. 0.9. ~~第一次~~收到：A. 发出B:

则 ① $P(x_3|A) = 0.9$ ② $P(x_3|A) = P(x_3) = 1$

$I(x_3|A) = -\log_2 P(x_3|A) = 0.15$ bit.

2.4. $H(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6}) = H(\frac{1}{3},\frac{2}{3}) + \frac{2}{3}\times H[\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4}]$

$= H(\frac{1}{3},\frac{2}{3}) + \frac{2}{3}\times H[\frac{1}{2},\frac{1}{2}] + \frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times H[\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

$= H[\frac{1}{3},\frac{2}{3}] + H[\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$

≈ 1.918 bit.

2.5. $H(X) = -\cancel{\log}\sum_{i=1}^{6} \log_2 p_i\, (p_i) = -(0.5\cdot\log_2\frac{1}{2} + 0.25\cdot\log_2\frac{1}{4} \cdots\cdots 0.025\log_2\frac{1}{40})$

≈ 1.94 bit.

$I_1 = 3I(A) + 3I(B) = 3[-\log_2 p(A) - \log_2 p(B)] \approx 9$ bit.

$I_2 = 3I(D) + 3I(F) = 3[-\log_2 p(D) - \log_2 p(F)] \approx 28.932$ bit

$\bar{I} = 6H(X) = 11.64$ bit.

$I_1 < \bar{I} < I_2$.

2) 建立一个简单的网络，输入输出都是 2 维. 输入每个维度都是标准高斯分布.

假设输出为 $X = [X_1, X_2 \cancel{\cdots X_6}]$. 求 $H(X) - [H(X_1) + H(X_2) \cancel{\cdots H(X_6)}]$.

已知：输入：$X = [X_1, X_2]$. X 满足标准高斯分布.

$\therefore x_1 \sim N(0,1)$ $x_2 \sim N(0,1)$

$H(X) = H(Y)$ $\therefore$ 求 $H(Y) - [H(y_1) + H(y_2)]$.

$H(X) = -\sum_{i=1}^{2} p(x_i)\log p(x_i)$

$\therefore$ 需要先求 $p(Y)$, $p(y_1)$, $p(y_2)$

$-\sum p(Y_i)\log p(Y_i) - [-\sum p(y_1)\log p(y_1) - \sum p(y_2)\log p(y_2)]$.

2022 年 4 月 6 日作业

1）以前作业没完成，继续推进；

2）22 页 2.9 及 2.10.

4月6日作业.

2.9. ∵均匀分布 ∴ $\Omega(+) = \{0,1,2,3,4,5,6\}$.

$P(\Omega) = \{\frac{1}{16},\frac{2}{16},\frac{3}{16},\frac{4}{16},\frac{3}{16},\frac{2}{16},\frac{1}{16}\}$.

$\Omega(-) = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.

$P(\Omega) = \{\frac{1}{16},\frac{2}{16},\frac{3}{16},\frac{4}{16},\frac{3}{16},\frac{2}{16},\frac{1}{16}\}$

$\Omega(\times) = \{0,1,2,3,4,6,9\}$.

$P(\Omega) = \{\frac{7}{16},\frac{1}{16},\frac{2}{16},\frac{2}{16},\frac{1}{16},\frac{2}{16},\frac{1}{16}\}$.

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	4
2	2	3	4	5
3	3	4	5	6

−	0	1	2	3
0	0	-1	-2	-3
1	1	0	-1	-2
2	2	1	0	-1
3	3	2	1	0

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	4	6
3	0	3	6	9

$$H(X+Y) = -\frac{1}{16}\log_2\frac{1}{16} - \frac{2}{16}\log_2\frac{2}{16} - \frac{3}{16}\log_2\frac{3}{16} - \frac{4}{16}\log_2\frac{4}{16} - \frac{3}{16}\log_2\frac{3}{16} - \frac{2}{16}\log_2\frac{2}{16} - \frac{1}{16}\log_2\frac{1}{16}$$

$$= -\frac{2}{16}\log_2\frac{1}{16} - \frac{4}{16}\log_2\frac{2}{16} - \frac{6}{16}\log_2\frac{3}{16} - \frac{4}{16}\log_2\frac{4}{16}$$

$$= \frac{1}{8}\cdot 4 + \frac{1}{4}\cdot 3 + 0.906 + \frac{1}{4}\cdot 2$$

$$= 2.656 \text{ bit/符号}.$$

$H(X+Y) = H(X-Y)$

$\therefore H(X-Y) = 2.656$ bit/符号.

∵ X Y 相互独立. $H(X\cdot Y) = H(X) + H(Y)$

$$\therefore \quad = -\frac{7}{16}\log_2\frac{7}{16} - \frac{3}{16}\log_2\frac{1}{16} - \frac{6}{16}\log_2\frac{6}{16}$$

$$= 2.397 \text{ bit/符号}.$$

2)

+, −	0	1	2	3
0	0,0	1,-1	2,-2	3,-3
1	1,1	2,0	3,-1	4,-2
2	2,2	3,1	4,0	5,-1
3	3,3	4,2	5,1	6,0

$H(X+Y, X-Y) = 4$ bit/符号

同理. $H(X+Y, XY) = 3.25$ bit/符号.

2.10 (1) $P\{胜\} = \frac{22}{64}$ $P\{负\} = \frac{22}{64}$ $P\{平\} = \frac{20}{64}$.

$H(P(胜), P(负), P(平)) = 1.5835$ bit/符号

(2) 大卫全部获胜 $P = 1/8$.

$\therefore H(1/8) = -\frac{7}{8}\log_2\frac{7}{8} = 0.5436$ bit/符号

2022 年 5 月 4 日作业

1）以前作业没完成，继续推进；

2）43 页 3.7 题。

3.7 1) 根据状态线图，

转移概率矩阵 $\cancel{P = \begin{bmatrix} 1-p & p/2 & p/2 \\ p/2 & 1-p & p/2 \\ p/2 & p/2 & 1-p \end{bmatrix}}$

$$P = \begin{bmatrix} \bar{p} & 0 & p \\ p & \bar{p} & 0 \\ 0 & p & \bar{p} \end{bmatrix}$$

$$p(s) = \sum_{i=1}^{3} \left(p(s_i)\, p(s_j/s_i)\right)$$

$\therefore p(s_1) = p(s_1)\bar{p} + p(s_3)p$

$p(s_2) = p(s_1)p + p(s_2)\bar{p}$

$p(s_3) = p(s_2)p + p(s_3)\bar{p}$ 解得：$p(s_1) = p(s_2) = p(s_3)$，

又 $\because p(s_1) + p(s_2) + p(s_3) = 1$ $\therefore p(0) = p(1) = p(2) = 1/3$.

(2) $H_\infty = H_{3+1} = -\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} p(s_i)\, p(s_j/s_i) \log_2 p(s_j/s_i)$

$= -(p\log_2 p + \bar{p}\log_2 \bar{p})$ bit/符号.

(3) $H_0 = H_1 = \sum_{i=1}^{3} p(0)\, p(0/i) = \log 3 = 1.58$ bit/符号.

函数对 H_∞ 求导，$\frac{\partial H_a(x)}{\partial p} = -\log \frac{p}{2\bar{p}}$

存在极大值.

2022 年 5 月 11 日作业

1）以前作业没完成，继续推进；

2）72 页 4.1 和 4.3。

5月11日作业（4.1 4.3）

4.1 信道矩阵 $P = \cancel{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$

$p(y_1|x_1) = p(0|0) = 1-p = \bar{p} = 0.7$

$p(y_2|x_1) = p(1|0) = 0.3$

$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$

$\cancel{p(x) = \sum_{i=1}^{2} \frac{p(x_i)\,p(y_i|x_i)}{p(y_i)\,p(x_i|y_i)}}$

$p(y) = 0.2\times 0.3 + 0.8\times 0.9$

$I(x=0;y=1) = H(1) - H(1|0)$

$= -p(1)\cdot \log p(1) - \cancel{0.3}\ 0.2\cdot 0.7\cdot 0.3\cdot \log_2 0.3$

$= -0.32 \cdot \log_2 0.32 - \cancel{0.3}$

$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$.

$I(x=0;y=1) = H(y_i) - H(y_i|x_i)$

$= \log \frac{p(y_i|x_i)}{p(y_i)}$ 由全概率公式 $p(y_i=1) = 0.2\cdot 0.3 + 0.8\times 0.9$

由条件概率：$p(y_i|x_i) = 0.3$.

$= \log_2 \frac{0.3}{0.2\cdot 0.3 + 0.8\cdot 0.9}$

$= -1.3785$.

$I(x=1;Y) = \sum_{i=1} p(Y|x=1)\cdot \log_2 \frac{p(y|x=1)}{p(y)}$ P13. 定义2.5.

$= 0.1\cdot \log_2 \frac{0.1}{0.2\cdot 0.7 + 0.8\times 0.1} + 0.9 \log_2 \frac{0.9}{0.2\cdot 0.3 + 0.8\cdot 0.9}$

$= 0.072$ bit/符号

$\cancel{I(X;Y) = \sum_{i=1}^{2} p(x_i) H(Y|x_i)}$

$\cancel{= 0.2(0.7\cdot\log_2\frac{1}{0.7} + 0.3\log_2\frac{1}{0.3}) + 0.8(0.7\cdot\log_2\frac{1}{0.7}}$

$= \sum p(xy)\, I(x;y)$

$= \sum p(x_i)p(y_i|x_i)\cdot \log_2 \frac{p(y|x)}{p(y)}$

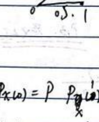
$= \underbrace{0.2\cdot 0.7}_{x=0,\ y=0}\cdot \log \frac{0.7}{0.2\times 0.7 + 0.8\times 0.1} + \underbrace{0.2\cdot 0.3}_{x=0,\ y=1}\cdot \log_2 \frac{0.3}{0.2\cdot 0.3 + 0.8\cdot 0.9}$

$+ \underbrace{0.8\cdot 0.1}_{x=1,\ y=0}\cdot \log_2 \frac{0.1}{0.8\cdot 0.1 + 0.2\cdot 0.7} + \underbrace{0.8\cdot 0.9}_{x=1,\ y=0}\cdot \log_2 \frac{0.9}{0.2\times 0.3 + 0.8\cdot 0.9}$.

$= 0.209$.

4.3 ~~TODO~~.

1)



$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$.

$I(X;Y) = \sum p(xy) \log_2 \frac{p(y|x)}{p(y)}$

$= p_X(0)\cdot p_{Y|X}(0|0)\cdot \log_2 \frac{p_{Y|X}(0|0)}{p_Y(0)} + \cdots\cdots$

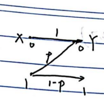
设 $p_X(0) = p$，$p_X(1) = 1-p$.

$p_Y(0) = p + \frac{1}{2}(1-p) = \frac{1}{2}(1+p)$

$p_Y(1) = (1-p)\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1-p)$.

代入即可. $= p - p\log_2(1+p) - \frac{1}{2}(1-p)\log_2(1-p^2)$

$\frac{dI(X,Y)}{dp}$



$= 1 - \log_2(1+p) - p(\log_2 e)\frac{1}{1+p} + \frac{1}{2}\log_2(1-p^2) - \frac{1}{2}(1-p)(\log_2 e)\frac{-2p}{1-p^2}$.

$= 1 - \log_2(1+p) - \frac{p}{1+p}\log_2 e + \frac{1}{2}\log_2(1-p^2) + \frac{p}{1+p}\log_2 e$.

$= 1 + \frac{\sqrt{1-p^2}}{1+p}$ 令 $= 0$.

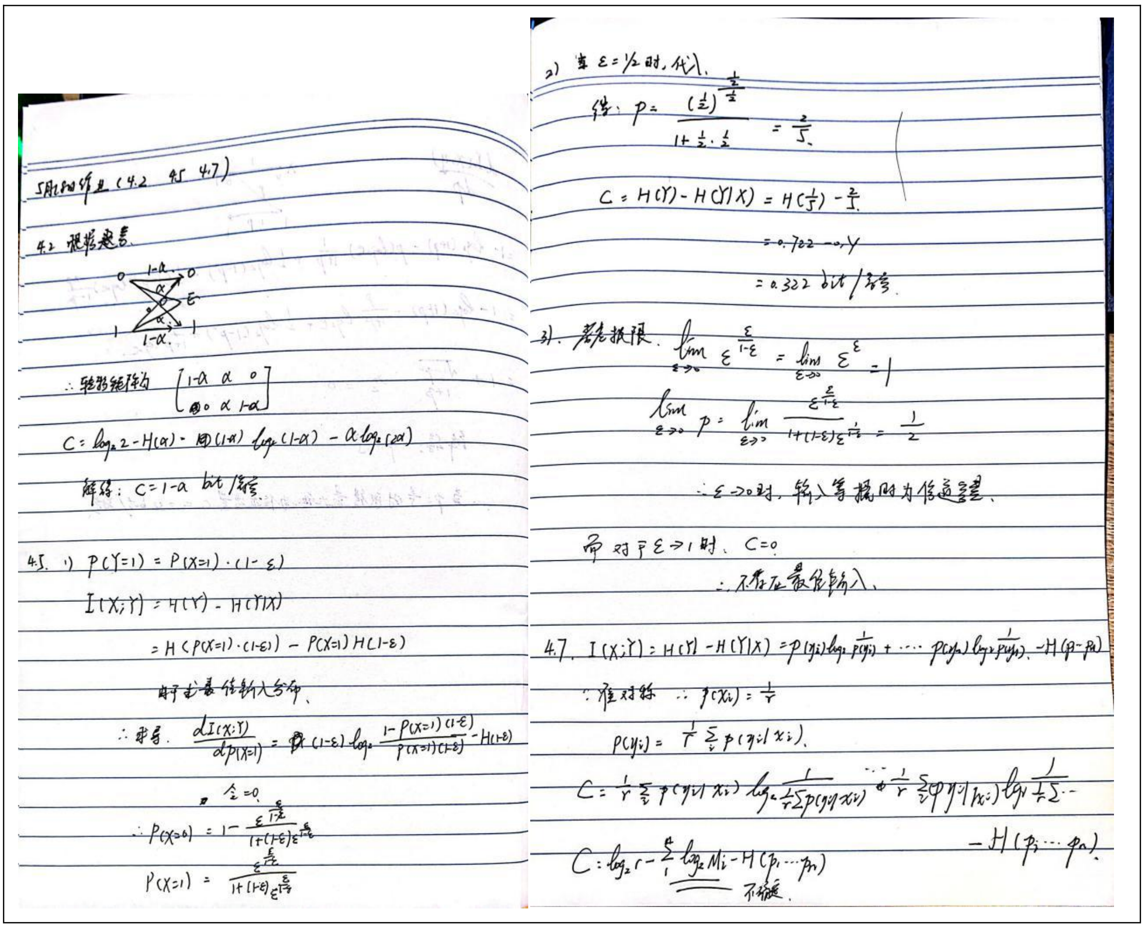
解得：$p = \frac{3}{5}$

∴ 当 $p = \frac{3}{5}$ 时取得最大值，为信道容量 $C = 0.32$ bit/符号.

2022 年 5 月 18 日作业

1）以前作业没完成，继续推进；

2）72 页 4.2、4.5 和 4.7。



5月18日作业（4.2 4.5 4.7）

4.2 根据题意

$$\therefore \text{转移矩阵为} \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 1-\alpha \end{bmatrix}$$

$$C = \log_2 2 - H(\alpha) - (1-\alpha)\log_2(1-\alpha) - \alpha\log_2(2\alpha)$$

解得：$C = 1-\alpha$ bit/符号

4.5. 1) $P(Y=1) = P(X=1)\cdot(1-\varepsilon)$

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$$

$$= H(P(X=1)\cdot(1-\varepsilon)) - P(X=1)H(1-\varepsilon)$$

由于求最佳输入分布，

$$\therefore \text{求导}\ \frac{dI(X;Y)}{dp(X=1)} = (1-\varepsilon)\log_2\frac{1-P(X=1)(1-\varepsilon)}{P(X=1)(1-\varepsilon)} - H(1-\varepsilon)$$

令 $=0$，

$$\therefore P(X=0) = 1 - \frac{\varepsilon^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}}{1+(1-\varepsilon)\varepsilon^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}}$$

$$P(X=1) = \frac{\varepsilon^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}}{1+(1-\varepsilon)\varepsilon^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}}$$

2) 当 $\varepsilon = 1/2$ 时，代入，

$$\text{得：} p = \frac{(\frac{1}{2})^{\frac{1/2}{1/2}}}{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}.$$

$$C = H(Y) - H(Y|X) = H(\tfrac{1}{5}) - \tfrac{2}{5}$$

$$= 0.722 - 0.4$$

$$= 0.322 \text{ bit/符号}$$

3). 考虑极限 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{\varepsilon} = 1$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} p = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}}{1+(1-\varepsilon)\varepsilon^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \varepsilon \to 0$ 时，输入等概时为信道容量，

而对于 $\varepsilon \to 1$ 时，$C=0$

$\therefore$ 不存在最佳输入，

4.7. $I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) = p(y_1)\log_2\frac{1}{p(y_1)} + \cdots p(y_n)\log_2\frac{1}{p(y_n)} - H(p_1 \cdots p_n)$

$\because$ 准对称 $\therefore p(x_i) = \frac{1}{r}$

$$p(y_i) = \frac{1}{r}\sum_i p(y_i|x_i).$$

$$C = \frac{1}{r}\sum_i p(y_i|x_i)\log_2\frac{1}{\frac{1}{r}\sum p(y_i|x_i)} + \cdots + \frac{1}{r}\sum_i p(y_i|x_i)\log_2\frac{1}{\frac{1}{r}\sum\cdots} - H(p_1 \cdots p_n).$$

$$C = \log_2 r - \sum_1^n \log_2 M_i - H(p_1 \cdots p_n)$$

不确定.