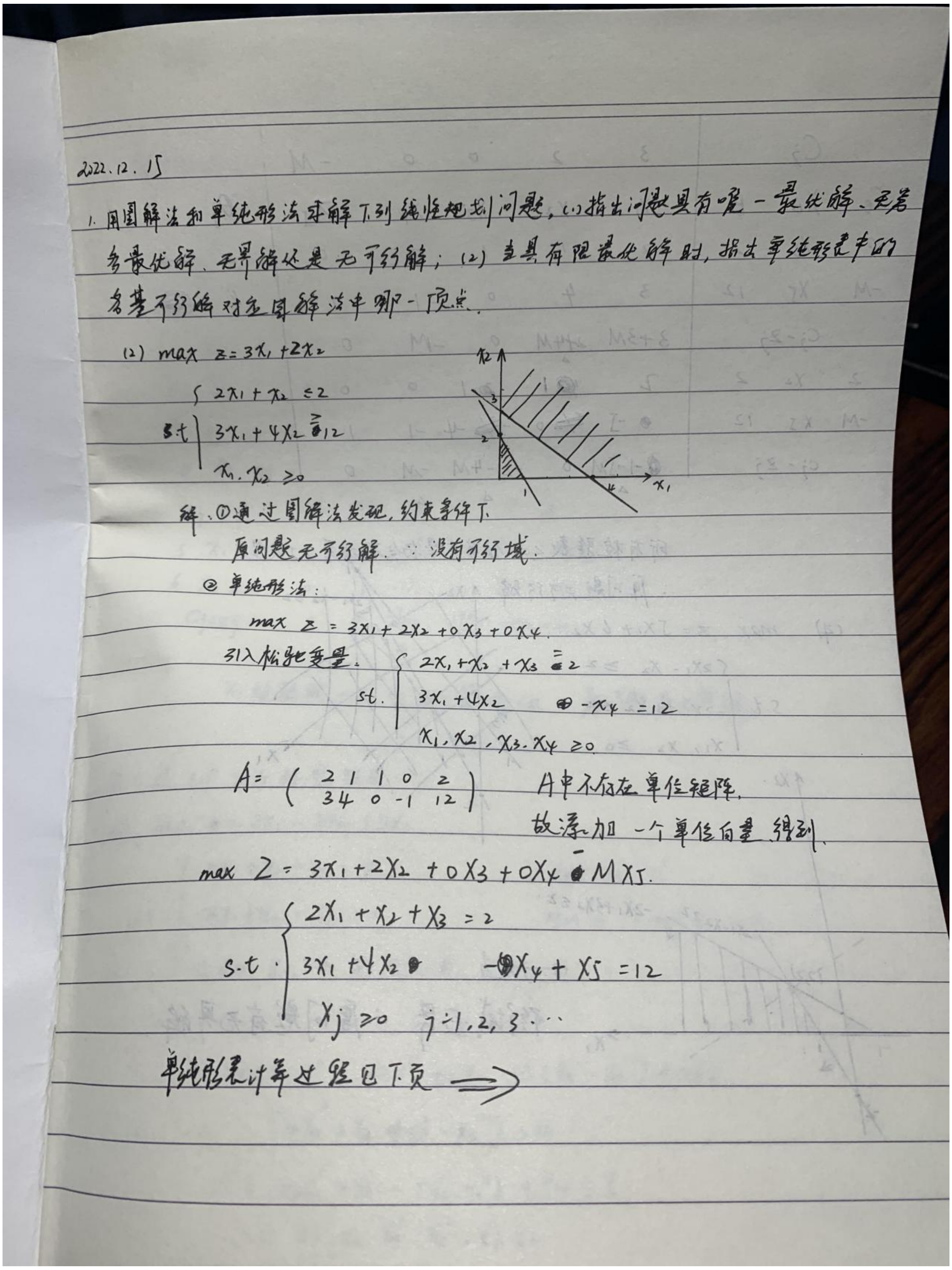
运筹学教程第一章作业

20123101 李昀哲

1.1（2）



2022.12.15

1. 用图解法和单纯形法求解下列线性规划问题，(1)指出问题具有唯一最优解、无穷多最优解、无界解还是无可行解；(2)当具有限最优解时，指出单纯形表中的各基可行解对应图解法中哪一顶点。

(2) $\max z = 3x_1 + 2x_2$

$$s.t. \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 2 \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

解. ①通过图解法发现，约束条件下原问题无可行解 ∵ 没有可行域.

② 单纯形法：

$\max z = 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4$.

引入松弛变量.

$$s.t. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_4 = 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & -1 & 12 \end{pmatrix}$$

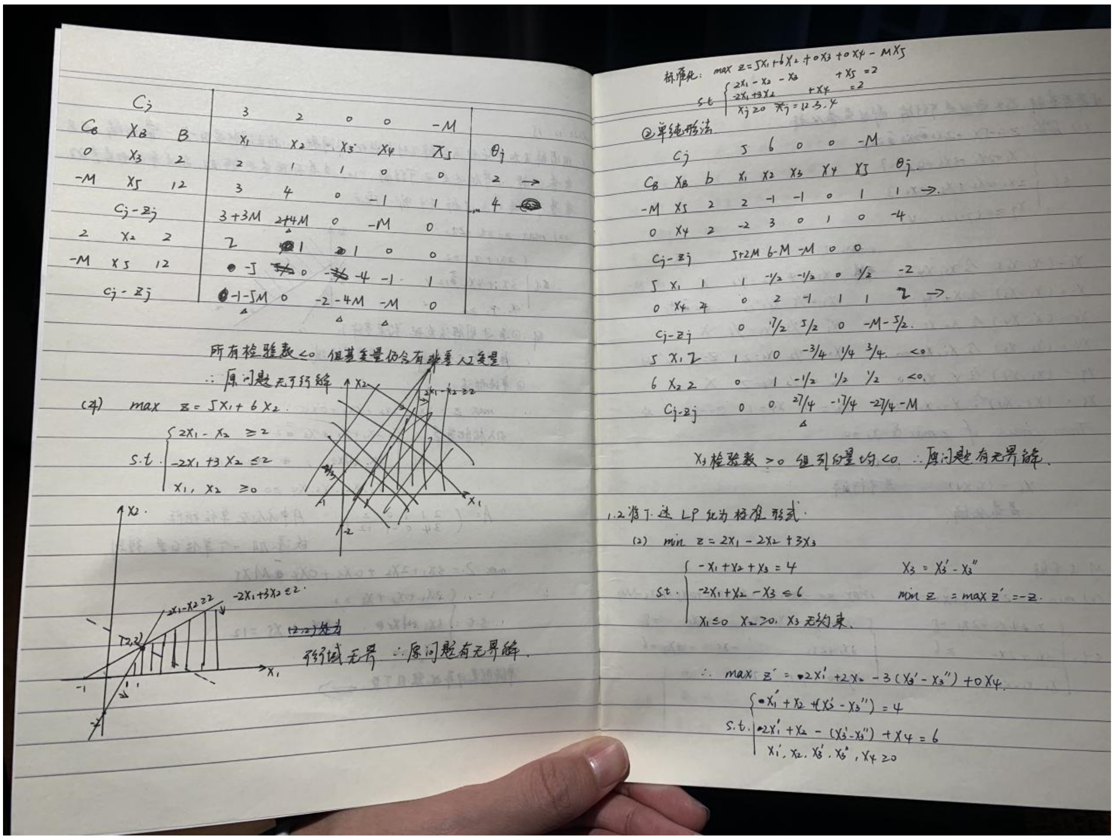
A中不存在单位矩阵，故添加一个单位向量得到.

$\max z = 3x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 - Mx_5$.

$$s.t. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_4 + x_5 = 12 \\ x_j \ge 0 \quad j = 1, 2, 3 \cdots \end{cases}$$

单纯形表计算过程见下页 ⟹

1.1（4）、1.2



	C_j		3	2	0	0	-M	
C_B	X_B	B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_j
0	x_3	2	2	1	1	0	0	2 →
-M	x_5	12	3	4	0	-1	1	4
	c_j-z_j		3+3M	2+4M	0	-M	0	
2	x_2	2	2	1	1	0	0	
-M	x_5	12	-5	0	-4	-1	1	
	c_j-z_j		-1-5M	0	-2-4M	-M	0	

所有检验数<0 但基变量仍含有非零人工变量

∴原问题无可行解

(4) $\max\ z=5x_1+6x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1-x_2\ge 2\\ -2x_1+3x_2\le 2\\ x_1,\ x_2\ge 0\end{cases}$$

$2x_1-x_2\ge 2$ $-2x_1+3x_2\le 2$ (2,2)

~~(2,2)处为~~

可行域无界 ∴原问题有无界解.

标准化: $\max\ z=5x_1+6x_2+0x_3+0x_4-Mx_5$

$$\text{s.t}\begin{cases}2x_1-x_2-x_3+x_5=2\\ -2x_1+3x_2+x_4=2\\ x_j\ge 0\quad j=1,2,3,4\end{cases}$$

②单纯形法

	C_j		5	6	0	0	-M	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ_j
-M	x_5	2	2	-1	-1	0	1	1 →
0	x_4	2	-2	3	0	1	0	-4
	c_j-z_j		5+2M	6-M	-M	0	0	
5	x_1	1	1	-1/2	-1/2	0	1/2	-2
0	x_4	4	0	2	-1	1	1	2 →
	c_j-z_j		0	17/2	5/2	0	-M-5/2	
5	x_1	2	1	0	-3/4	1/4	3/4	<0
6	x_2	2	0	1	-1/2	1/2	1/2	<0
	c_j-z_j		0	0	27/4	-17/4	-27/4-M	

x_3检验数>0 但列向量均<0 ∴原问题有无界解.

1.2 将下述LP化为标准形式.

(2) $\min\ z=2x_1-2x_2+3x_3$

$$\text{s.t.}\begin{cases}-x_1+x_2+x_3=4\\ -2x_1+x_2-x_3\le 6\\ x_1\le 0\quad x_2\ge 0,\ x_3\text{无约束.}\end{cases}$$

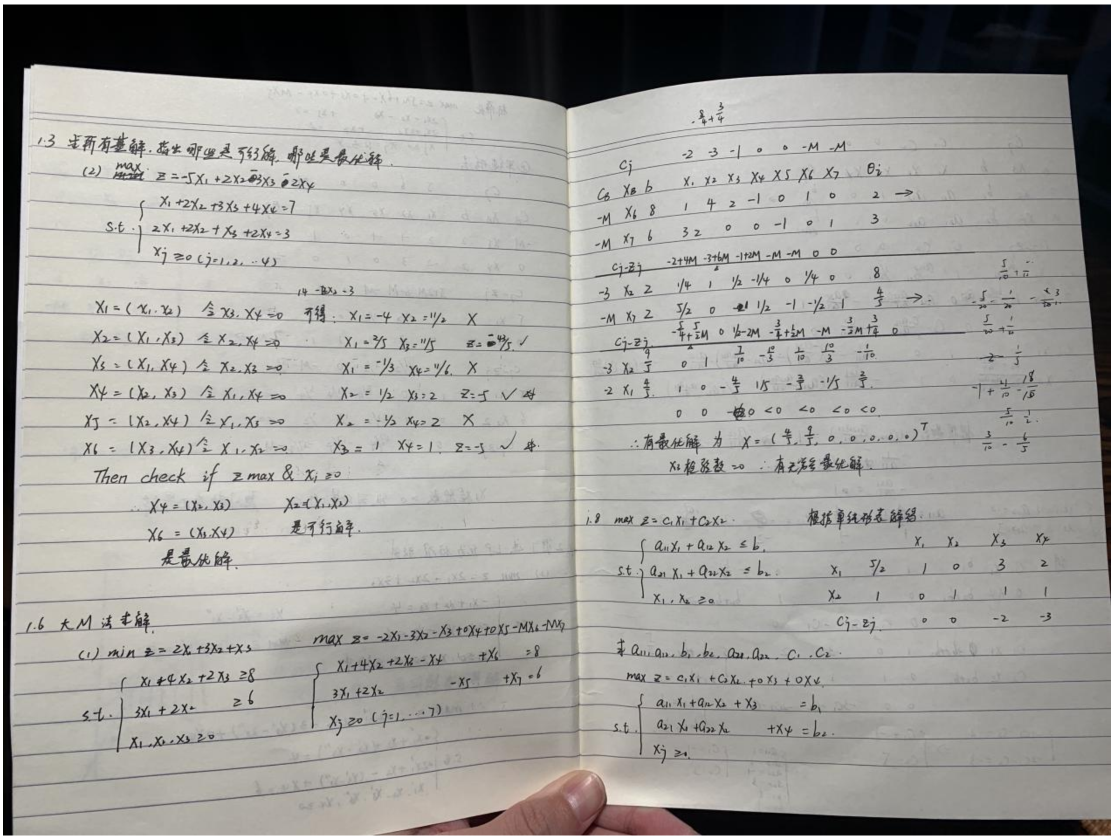
$x_3=x_3'-x_3''$

$\min z=\max z'=-z.$

∴ $\max\ z'=2x_1'+2x_2-3(x_3'-x_3'')+0x_4$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1'+x_2+(x_3'-x_3'')=4\\ 2x_1'+x_2-(x_3'-x_3'')+x_4=6\\ x_1',x_2,x_3',x_3'',x_4\ge 0\end{cases}$$

1.4、1.6、1.8



1.3 求所有基解. 指出哪些是可行解. 哪些是最优解.

(2) $\max\ z=-5x_1+2x_2-3x_3-2x_4$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+4x_4=7\\ 2x_1+2x_2+x_3+2x_4=3\\ x_j\ge 0\ (j=1,2,\dots 4)\end{cases}$$

$X_1=(x_1,x_2)$ 令$x_3,x_4=0$ 可得: $x_1=-4$ $x_2=11/2$ X

$X_2=(x_1,x_3)$ 令$x_2,x_4=0$ $x_1=2/5$ $x_3=11/5$ $z=-43/5$ ✓

$X_3=(x_1,x_4)$ 令$x_2,x_3=0$ $x_1=-1/3$ $x_4=11/6$ X

$X_4=(x_2,x_3)$ 令$x_1,x_4=0$ $x_2=1/2$ $x_3=2$ $z=-5$ ✓

$X_5=(x_2,x_4)$ 令$x_1,x_3=0$ $x_2=-1/2$ $x_4=2$ X

$X_6=(x_3,x_4)$ 令$x_1,x_2=0$ $x_3=1$ $x_4=1$ $z=-5$ ✓

Then check if $z\max$ & $x_i\ge 0$

∴ $X_4=(x_2,x_3)$ $X_2=(x_1,x_3)$

$X_6=(x_3,x_4)$ 是可行解.

是最优解.

1.6 大M法求解.

(1) $\min\ z=2x_1+3x_2+x_3$

$$\text{s.t.}\begin{cases}x_1+4x_2+2x_3\ge 8\\ 3x_1+2x_2\ge 6\\ x_1,x_2,x_3\ge 0\end{cases}$$

$\max\ z=-2x_1-3x_2-x_3+0x_4+0x_5-Mx_6-Mx_7$

$$\begin{cases}x_1+4x_2+2x_3-x_4+x_6=8\\ 3x_1+2x_2-x_5+x_7=6\\ x_j\ge 0\ (j=1,\dots,7)\end{cases}$$

	C_j		-2	-3	-1	0	0	-M	-M	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ_i
-M	x_6	8	1	4	2	-1	0	1	0	2 →
-M	x_7	6	3	2	0	0	-1	0	1	3
	c_j-z_j		-2+4M	-3+6M	-1+2M	-M	-M	0	0	
-3	x_2	2	1/4	1	1/2	-1/4	0	1/4	0	8
-M	x_7	2	5/2	0	-1	1/2	-1	-1/2	1	4/5 →
	c_j-z_j		$-\frac{5}{4}+\frac{5}{2}M$	0	1/2-2M	$-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}M$	-M	$-\frac{3}{2}M+\frac{3}{4}$	0	
-3	x_2	$\frac{9}{5}$	0	1	$\frac{7}{10}$	$-\frac{10}{3}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{10}{3}$	$-\frac{1}{10}$	
-2	x_1	$\frac{4}{5}$	1	0	$-\frac{4}{5}$	1/5	$-\frac{2}{5}$	-1/5	$\frac{2}{5}$	
			0	0	0	<0	<0	<0	<0	

∴有最优解为 $X=(\frac{4}{5},\frac{9}{5},0,0,0,0,0)^T$

x_3检验数=0 ∴有无穷多最优解.

1.8 $\max\ z=c_1x_1+c_2x_2$

$$\text{s.t.}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2\le b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2\le b_2\\ x_1,x_2\ge 0\end{cases}$$

根据单纯形表解得.

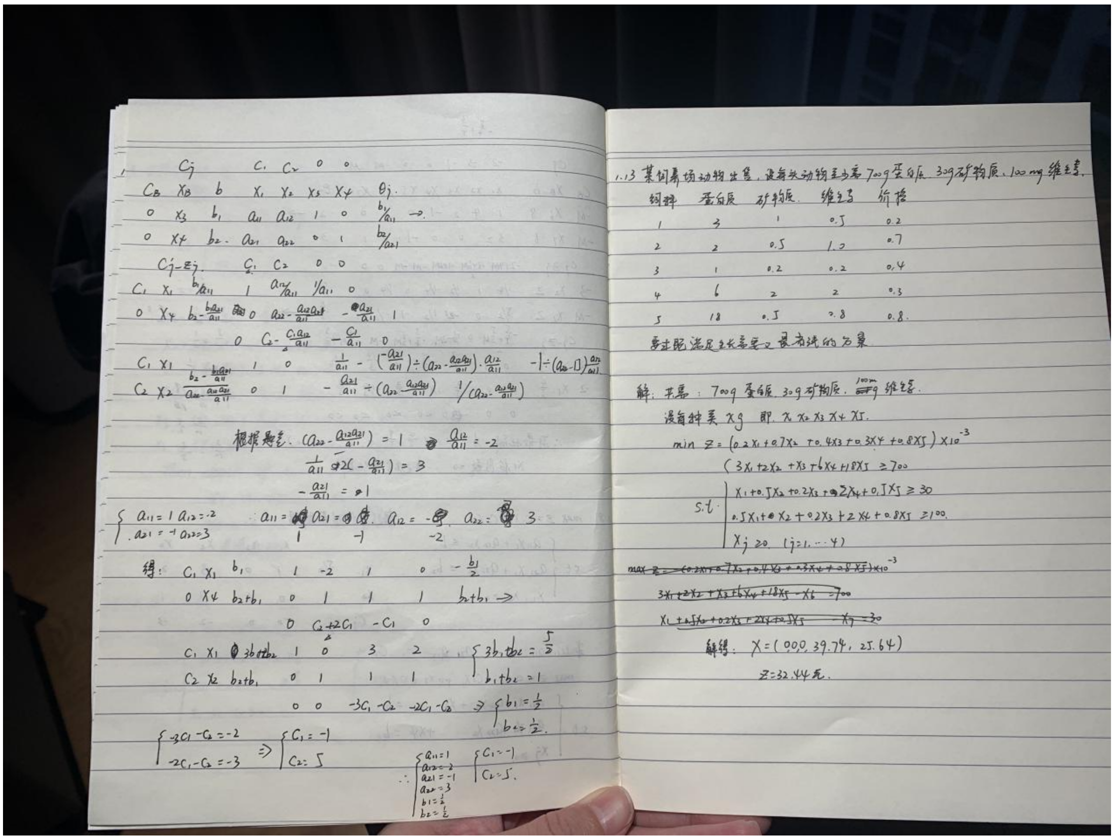
		x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	5/2	1	0	3	2
x_2	1	0	1	1	1
c_j-z_j		0	0	-2	-3

求 $a_{11},a_{12},b_1,b_2,a_{21},a_{22},c_1,c_2$.

$\max\ z=c_1x_1+c_2x_2+0x_3+0x_4$

$$\text{s.t.}\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+x_4=b_2\\ x_j\ge 0\end{cases}$$

1.13 （模型的求解使用 matlab 进行）



1.13 某饲养场动物出售，设每头动物至少需 700g 蛋白质、30g 矿物质、100mg 维生素。

饲料	蛋白质	矿物质	维生素	价格
1	3	1	0.5	0.2
2	2	0.5	1.0	0.7
3	1	0.2	0.2	0.4
4	6	2	2	0.3
5	18	0.5	0.8	0.8

要求既满足生长需要又最节约的方案

解：共需：700g 蛋白质，30g 矿物质，100mg 维生素。

设每种买 xg 即 $x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_5$.

$$\min z = (0.2x_1 + 0.7x_2 + 0.4x_3 + 0.3x_4 + 0.8x_5) \times 10^{-3}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 + 18x_5 \geq 700 \\ x_1 + 0.5x_2 + 0.2x_3 + 2x_4 + 0.5x_5 \geq 30 \\ 0.5x_1 + x_2 + 0.2x_3 + 2x_4 + 0.8x_5 \geq 100 \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, \cdots 4) \end{cases}$$

~~$\max z = (0.2x_1 + 0.7x_2 + 0.4x_3 + 0.3x_4 + 0.8x_5) \times 10^{-3}$~~

~~$3x_1 + 2x_2 + x_3 + 6x_4 + 18x_5 - x_6 = 700$~~

~~$x_1 + 0.5x_2 + 0.2x_3 + 2x_4 + 0.5x_5 - x_7 = 30$~~

解得：$X = (0, 0, 0, 39.74, 25.64)$

$z = 32.44$ 元.