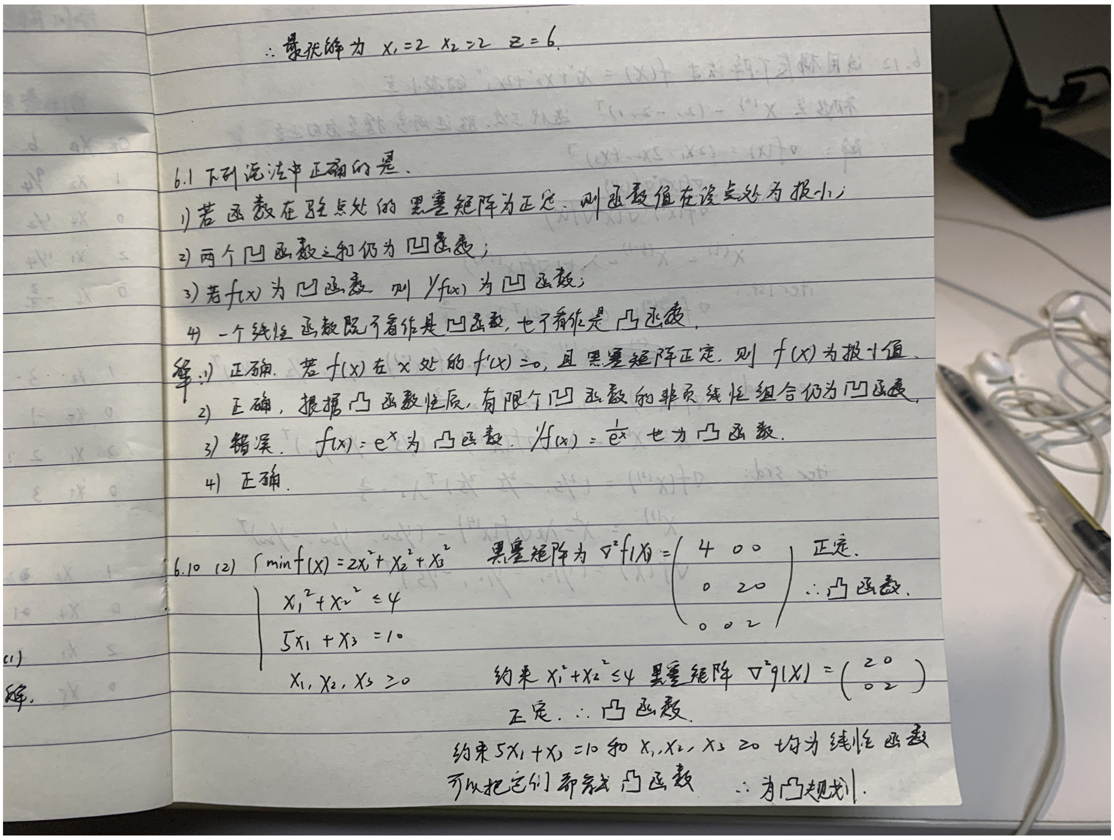
运筹学教程第六章作业

20123101 李昀哲

6.1，6.10（2）



$\therefore$ 最优解为 $x_1=2$ $x_2=2$ $z=6$.

6.1 下列说法中正确的是.

1) 若函数在驻点处的黑塞矩阵为正定. 则函数值在该点处为极小;

2) 两个凹函数之和仍为凹函数;

3) 若 $f(x)$ 为凹函数 则 $1/f(x)$ 为凹函数;

4) 一个线性函数既可看作是凹函数, 也可看作是凸函数.

解: 1) 正确. 若 $f(x)$ 在 x 处的 $f'(x)=0$, 且黑塞矩阵正定. 则 $f(x)$ 为极小值.

2) 正确, 根据凸函数性质, 有限个凹函数的非负线性组合仍为凹函数.

3) 错误. $f(x)=e^x$ 为凸函数. $1/f(x)=\frac{1}{e^x}$ 也为凸函数.

4) 正确.

6.10 (2)

$$\begin{cases} \min f(X)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2 \\ x_1^2+x_2^2\le 4 \\ 5x_1+x_3=10 \\ x_1,x_2,x_3\ge 0 \end{cases}$$

黑塞矩阵为 $\nabla^2 f(X)=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ 正定. $\therefore$ 凸函数.

约束 $x_1^2+x_2^2\le 4$ 黑塞矩阵 $\nabla^2 g(X)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ 正定. $\therefore$ 凸函数.

约束 $5x_1+x_3=10$ 和 $x_1,x_2,x_3\ge 0$ 均为线性函数 可以把它们都看成凸函数 $\therefore$ 为凸规划.

6.11，6.12，6.16

6.11 用 0.618 法求 $f(t)=t^2-6t+2$ 在 $[0,10]$ 上极小点，要求缩短后的区间长度不大于原区间长度的 3%.

$n=9$, $[a_7, b_7] = (2.918, 3.131)$ $(3.131-2.918) < 10.3\%$.

$t=3.05$ $f(3.05) = -6.998$

$t^* = 3.0$ $f(t^*) = -7$

6.12 试用梯度下降法求 $f(X) = x_1^2+x_2^2+2x_3^2$ 的极小点.

初始点 $X^{(0)} = (2,-2,1)^T$，迭代三次，验证两步搜索方向正交.

解： $\nabla f(x) = (2x_1, 2x_2, 4x_3)^T$

$$\lambda_a = \frac{\nabla f(x^{(t)})^T \nabla f(x^{(t)})}{\nabla f(x^{(t)})^T \nabla^2 (x^{(t)}) \nabla f(x^{(t)})}$$

$$X^{(t)} = X^{(t-1)} - \lambda_{t-1} \nabla f(X^{(t-1)})$$

iter 1st： $\nabla f(x^{(0)}) = (4, -4, 4)^T$ $\lambda_0 = \frac{3}{8}$

$X^{(1)} = X^0 - \lambda_0 \nabla f(X^{(0)}) = (1/2, -1/2, -1/2)^T$

iter 2nd： $\nabla f(X^{(1)}) = (1, -1, -2)^T$ $\lambda_2 = \frac{3}{10}$

$X^2 = X^{(1)} - \lambda_{(1)} \nabla f(X^{(1)}) = (1/5, -1/5, 1/10)^T$

iter 3rd： $\nabla f(X^{(2)}) = (2/5, -2/5, 2/5)^T$ $\lambda_2 = \frac{3}{8}$.

$X^{(3)} = X^2 - \lambda_2 \nabla f(X^{(2)}) = (1/20, -1/20, -1/20)^T$

$\nabla f(X^3) = (1/10, -1/10, -1/5)^T$

6.16 $\begin{cases} \max f(x) = x_1 \\ (1-x_1)^3 - x_2 \geq 0 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$ 的极大点为 $(1,0)$，试检验它是否满足库恩-塔克条件，并说明其原因.

$$\begin{cases} \min \bar{f}(x) = -x_2 \\ g_1(x) = (1-x_2)^3 - x_2 \geq 0 \\ g(x) = x_2 \geq 0 \\ g_2(x) = x_2 \geq 0. \end{cases}$$

其库恩-塔克条件为.

$$\begin{cases} -1 - u_2(-3-3x_2-1) - u_2(1,0) - u_3(0,1) = 0 \\ u_2(1-x_2)^3 - x_2 = 0 \\ u_2 x_2 = 0 \\ u_3 x_2 = 0. \\ u_1, u_2, u_3 \geq 0. \end{cases}$$

不满足 K-T 条件，该点起作用约束条件的梯度线性相关