



**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE**  
**WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI, AUTOMATYKI,**  
**INFORMATYKI I INŻYNIERII BIOMEDYCZNEJ**

KATEDRA AUTOMATYKI I INŻYNIERII BIOMEDYCZNEJ

Praca dyplomowa magisterska

*Dwuczęściowa aplikacja sterowania czaso optymalnego w systemie  
zbiorników*

*A two-part application of time-optimal control in a system of tanks*

Autor:	<i>Łukasz Dudek</i>
Kierunek studiów:	<i>Automatyka i Robotyka</i>
Opiekun pracy:	<i>dr hab. inż. Adam Piłat</i>

Kraków, 2017

*Uprzedzony o odpowiedzialności karnej na podstawie art. 115 ust. 1 i 2 ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (t.j. Dz.U. z 2006 r. Nr 90, poz. 631 z późn. zm.): „Kto przywłaszcza sobie autorstwo albo wprowadza w błąd co do autorstwa całości lub części cudzego utworu albo artystycznego wykonania, podlega grzywnie, karze ograniczenia wolności albo pozbawienia wolności do lat 3. Tej samej karze podlega, kto rozpowszechnia bez podania nazwiska lub pseudonimu twórcy cudzy utwór w wersji oryginalnej albo w postaci opracowania, artystycznego wykonania albo publicznie zniekształca taki utwór, artystyczne wykonanie, fonogram, wideogram lub nadanie.”, a także uprzedzony o odpowiedzialności dyscyplinarnej na podstawie art. 211 ust. 1 ustawy z dnia 27 lipca 2005 r. Prawo o szkolnictwie wyższym (t.j. Dz. U. z 2012 r. poz. 572, z późn. zm.): „Za naruszenie przepisów obowiązujących w uczelni oraz za czyny uchybiające godności studenta student ponosi odpowiedzialność dyscyplinarną przed komisją dyscyplinarną albo przed sądem koleżeńskim samorządu studenckiego, zwanym dalej «sądem koleżeńskim».”, oświadczam, że niniejszą pracę dyplomową wykonałem(-am) osobiście i samodzielnie i że nie korzystałem(-am) ze źródeł innych niż wymienione w pracy.*

*Serdecznie dziękuję mojemu promotorowi, dr hab.  
inż. Adamowi Piłatowi za cierpliwość.*



## Spis treści

<b>Wstęp.....</b>	<b>7</b>
<b>1. Matematyczny opis zagadnienia .....</b>	<b>9</b>
1.1. Wprowadzenie z zakresu dynamiki płynów .....	9
1.1.1. Równanie Bernoulliego i prawo Torricellego .....	9
1.1.2. Rodzaje przepływów .....	11
1.2. Model matematyczny zestawu zbiorników .....	12
1.3. Regulacja czasooptymalna .....	13
1.3.1. Ogólna definicja zagadnienia .....	13
1.3.2. Nieliniowość układu a sterowanie czasooptymalne .....	16
1.3.3. Wyznaczanie sterowania czasooptymalnego.....	16
1.3.4. Numeryczne metody wyznaczania sterowania czasooptymalnego.....	17
1.4. Regulacja liniowo - kwadratowa .....	17
1.4.1. Ogólna definicja zagadnienia .....	17
1.4.2. Linearyzacja modelu .....	17
1.4.3. Wyznaczanie regulatora liniowo - kwadratowego .....	17
1.4.4. Dobór wag w zagadnieniu liniowo - kwadratowym .....	17
<b>2. Architektura zaproponowanego rozwiązania.....</b>	<b>19</b>
2.1. Podział zadań między elementami oprogramowania .....	19
2.2. Część obliczeniowa („wyższego poziomu”) .....	19
2.2.1. Wybór pakietu do optymalizacji dynamicznej.....	19
2.2.2. Opis pakietu Modelica .....	19
2.2.3. Opis systemu Tango Controls .....	19
2.2.4. Architektura klasy urządzeń systemu Tango.....	19
2.2.5. Środowisko testowe części obliczeniowej .....	19
2.3. Część realizująca sterowanie („niższego poziomu”).....	19
2.3.1. Pakiet Simulink jako narzędzie realizujące sterowanie .....	19
2.3.2. Komunikacja z urządzeniem wykonawczym i czujnikami .....	19

2.4. Komunikacja między elementami oprogramowania .....	19
<b>3. Badania symulacyjne .....</b>	<b>21</b>
3.1. Optymalizacja przy użyciu pakietu JModelica.org .....	21
3.1.1. Inicjalizacja optymalizacji dynamicznej .....	21
3.1.2. Dokładność wyznaczania rozwiązania .....	21
3.2. Symulacja i weryfikacja .....	21
3.2.1. Przy użyciu pakietu JModelica.org .....	21
3.2.2. Przy użyciu oprogramowania MATLAB/Simulink .....	21
<b>4. Badania eksperymentalne .....</b>	<b>23</b>
4.1. Porównanie wyników eksperymentalnych z symulacyjnymi .....	23
4.1.1. Ocena jakości rozwiązania .....	23
4.2. Badanie wpływu zakłóceń na sterowanie .....	23
4.2.1. Wpływ czasu dyskretyzacji .....	23
4.2.2. Wpływ zakłóceń w ruchu sieciowym .....	23
4.3. Możliwe kierunki dalszego rozwiązania zaproponowanego rozwiązania .....	23
<b>Zakończenie .....</b>	<b>25</b>
<b>List of Figures .....</b>	<b>26</b>

**Wstep**

Wstęp!





# 1. Matematyczny opis zagadnienia

Rozważany układ składa się z trzech zbiorników połączonych szeregowo, czy też kaskadowo. W związku z tym płyn, którym jest napełniony pierwszy zbiornik - woda - przepływa przez otwór o zadanym oporze wypływu do drugiego zbiornika. Stamtąd znowu wypływa do przez otwór o zadanym oporze do trzeciego zbiornika, skąd przez kolejny taki otwór wypływa do zewnętrznego naczynia. Stamtąd woda jest pompowana z powrotem do pierwszego zbiornika. Całość układu jest przedstawiona schematycznie na rys. 1.1.

## 1.1. Wprowadzenie z zakresu dynamiki płynów

W niniejszym podrozdziale zostaną przypomniane podstawowe prawa fizyki związane z przepływem cieczy oraz jego związkiem z jej poziomem w zbiorniku.

### 1.1.1. Równanie Bernoulliego i prawo Torricellego

Równanie Bernoulliego jest jednym z podstawowych praw termodynamiki płynów idealnych. Mówi ono, że wzrost prędkości przepływu cieczy musi wiązać się ze spadkiem ciśnienia lub energii potencjalnej. Ma kilka postaci; najpopularniejszą jest tzw. szczególne równanie Bernoulliego, które wiąże energię mechaniczną płynu z jego prędkością w danym miejscu, wysokością w układzie odniesienia służącym do wyznaczania energii potencjalnej, ciśnieniem i gęstością. W takiej formie można je stosować tylko do cieczy nieściśliwych i nielepkich, jednocześnie zakładając stacjonarność i bezwirowość przepływu.

Ta szczególna postać równania Bernoulliego jest przedstawiona jako równanie 1.1.

$$e_m = \frac{v^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} = const \quad (1.1)$$

Oznaczenia:

- $e_m$  - energia jednostki masy cieczy,
- $v$  - prędkość cieczy w danym miejscu,
- $g$  - przyspieszenie grawitacyjne,
- $h$  - wysokość w układzie odniesienia, w którym jest wyznaczana energia potencjalna,



Rys. 1.1. Układ zbiorników z zaznaczonymi wymiarami

- $p$  - ciśnienie cieczy w danym miejscu,
- $\rho$  - gęstość cieczy.

Z równania Bernoulliego można wyprowadzić bezpośrednią zależność między prędkością cieczy a jej poziomem w zbiorniku. Jest ona znana pod nazwą prawa Torricellego i przedstawiona jako równanie 1.2 (przyjęto oznaczenia takie jak w przypadku równania 1.1).

Można owo prawo zapisać w bardziej ogólnej formie słownej:

**Prawo Torricellego 1.1.** *Prędkość wypływu cieczy jest proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z poziomu cieczy w zbiorniku.*

$$v = \sqrt{2gh} \quad (1.2)$$

Takie jego sformułowanie będzie istotne przy wyznaczaniu modelu matematycznego rozważanego układu.

Na podstawie prawa Torricellego można wyznaczyć czas potrzebny na zmianę wysokości słupa cieczy w zamkniętym pojemniku. Niech:

- $h$  będzie ową wysokością,
- $x$  -
- $v$  - prędkością wypływu,  $v = \sqrt{2gh} = \frac{\partial x}{\partial t}$ ,
- $A$  - polem przekroju poprzecznego zbiornika.

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= v = \sqrt{2gh} \\ A \partial h &= \partial x \\ \frac{\partial h}{\partial t} &= \frac{\sqrt{2gh}}{A} \end{aligned} \quad (1.3)$$

### 1.1.2. Rodzaje przepływów

Przytoczona wcześniej szczególna postać równania Bernoulliego (równanie 1.1) jest obwarowana założeniem stacjonarności przepływu. Oznacza to dwie rzeczy:

1. Wartości wektorów prędkości cieczy są stałe w czasie.
2. Poszczególne „warstwy” cieczy nie wpływają na siebie.

Ten drugi warunek jest znany pod nazwą przepływu laminarnego, który zwykle ma miejsce przy niskich prędkościach cieczy. W takim typie przepływu nie występują żadne jego zaburzenia (ruchy wirowe, prądy przeciwnie itp.), a poszczególne „warstwy” cieczy zachowują się jak karty do gry przy tasowaniu, przepływając obok siebie bez wpływania jedna na drugą. Jej cząstki będące blisko powierzchni przemieszczają się po liniach równoległych do tafli cieczy.

Niestety, w rzeczywistości ciężko jest spełnić założenie laminarności przepływu, nie mówiąc już o jego stacjonarności. W związku z tym można zastosować pewne uogólnienie prawa Torricellego na ciecze nielaminarne.

## 1.2. Model matematyczny zestawu zbiorników

Na podstawie podanych wcześniej zależności można zdefiniować model matematyczny rozważanego układu zbiorników. Jest on dany równaniem 1.4.

$$\begin{cases} \frac{\partial h_1}{\partial t} = \frac{u - C_1 h_1^{\alpha_1}}{aw} \\ \frac{\partial h_2}{\partial t} = \frac{C_1 h_1^{\alpha_1} - C_2 h_2^{\alpha_2}}{cw + \frac{h_2}{h_{max}} bw} \\ \frac{\partial h_3}{\partial t} = \frac{C_2 h_2^{\alpha_2} - C_3 h_3^{\alpha_3}}{w \sqrt{R^2 - (R - h_3)^2}} \end{cases} \quad (1.4)$$

Oznaczenia:

- $h_i(t)$  - poziom wody w  $i$ -tym zbiorniku ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ),
- $u(t)$  - sterowanie pompą,
- $a$  - szerokość pierwszego zbiornika,
- $b$  - szerokość trójkątnej części drugiego zbiornika,
- $c$  - szerokość prostopadłościowej części drugiego zbiornika,
- $R$  - promień trzeciego zbiornika,
- $w$  - głębokość zbiorników,
- $h_{max}$  maksymalna wysokość słupa wody w zbiornikach,
- $C_i$  - opór wypływu z  $i$ -tego zbiornika,
- $\alpha_i$  - współczynnik wypływu z  $i$ -tego zbiornika.

Wszystkie wymiary w powyższym wzorze zostały przedstawione na rys. 1.1. Są na nim również oznaczone opory wypływów  $C_1 - C_3$  przy odpowiednich zaworach.

Przyjmując  $\alpha_i = \frac{1}{2}, \forall i \in \{1, 2, 3\}$ , można uszczegółowić powyższy model, zakładając tylko przepływ laminarny. Taka właśnie jego postać będzie wykorzystywana przy analitycznym wyznaczeniu współczynników równania sprzężonego (definicja znajduje się w sekcji 1.3.1.1), które jest przeprowadzone w podrozdziale 1.3.3. W rzeczywistości, jak zostało wspomniane w podrozdziale 1.1.2, wartości tych współczynników będą musiały być trochę mniejsze, aby oddać faktyczny sposób przepływu wody między zbiornikami.

W rozważanym układzie zbiorników przyjmuje się następujące ograniczenia (pomijając oczywiste  $t \geq 0$ ):

- ograniczenia równościowe:

$$\begin{aligned} h_1(0) &= h_{10} \\ h_2(0) &= h_{20} \\ h_3(0) &= h_{30} \end{aligned} \quad (1.5)$$

- ograniczenia nierównościowe:

$$\begin{aligned} \forall_{t \in [0, T]} : 0 &\leq h_1(t) \leq h_{max} \\ \forall_{t \in [0, T]} : 0 &\leq h_2(t) \leq h_{max} \\ \forall_{t \in [0, T]} : 0 &\leq h_3(t) \leq h_{max} \\ \forall_{t \in [0, T]} : 0 &\leq u(t) \leq u_{max} \end{aligned} \quad (1.6)$$

### 1.3. Regulacja czasooptymalna

W niniejszym podrozdziale przedstawiona zostanie koncepcja regulacji czasooptymalnej. Zostaną podane założenia zagadnienia, twierdzenia, na których podstawie można wyliczyć rozwiązanie oraz jego proponowana forma analityczna.

Zaznacza się, że mimo iż podane niżej definicje i założenia są wzięte z ogólnych zagadnień optymalizacji dynamicznej, to w podanym brzmieniu stosują się tylko do zagadnienia wyznaczania sterowania czasooptymalnego.

#### 1.3.1. Ogólna definicja zagadnienia

##### 1.3.1.1. Założenia wstępne

Przyjmijmy system dany stacjonarnym, zwyczajnym równaniem różniczkowym (pokazanym jako równanie 1.7), w którym:

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = f(x(t), u(t)), \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.7)$$

- wektor zmiennych stanu w chwili  $t$  -  $x(t)$  spełnia następujące założenia:
  - $\forall_{t \geq 0} : x(t) \in \mathbb{R}^n$  - ma  $n$  składowych, a więc rozważany system ma  $n$  równań różniczkowych zwyczajnych,
  - $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$  - spełnia warunek początkowy  $x_0$ ;
- wektor sterowań w chwili  $t$  -  $u(t)$ :
  - $\forall_{t \geq 0} : u(t) \in D \subset \mathbb{R}^m$  - ma  $m$  składowych zawierającym się w zbiorze  $D$  ograniczającym wartości sterowań,

- $u(0) = u_0$  - spełnia warunek początkowy  $u_0$ ,
- funkcja  $u$  jest przedziałami ciągła na przedziale  $[0, T]$  (dokładny opis w [1]), czyli:
  - \* ma co najwyżej skończoną liczbę punktów nieciągłości,
  - \* w każdym z nich ma skończoną granicę lewostronną,
  - \* jest prawostronnie ciągła,
  - \* w lewym końcu przedziału jest lewostronnie ciągła;
- funkcja  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ :
  - $f \in C^1$  - jest ciągła i różniczkowalna ze względu na pierwszy argument,
  - $\frac{\partial f(t)}{\partial x} \in C^0$  - jej pochodna ze względu na pierwszy argument jest ciągła.

Rozwiązaniem takiego równania jest oczywiście funkcja  $x : [0, T] \mapsto \mathbb{R}^n$  nazywana *trajektorią układu*.

Trajektoria będąca rozwiązaniem zagadnienia minimalnoczasowego musi spełniać następujący warunek końcowy (nazywany również stanem docelowym):

$$x(T) = x_f \in \mathbb{R}^n \quad (1.8)$$

Ów czas  $T$ , po którym przy danym sterowaniu stan systemu osiągnie warunek końcowy, będzie wskaźnikiem jakości:

$$Q(u(t)) = q(x_f) = T \quad (1.9)$$

Na tej podstawie można określić *sterowanie optymalne*  $\hat{u}(t)$ , które spełnia wszystkie wspomniane przy opisie równania 1.7 warunki oraz zależność 1.10. Trajektoria układu wygenerowana przez zastosowanie sterowania optymalnego nazwana jest *trajektorią optymalną* i opisana symbolem  $\hat{x}(t)$ .

$$\forall_{u(t)} : Q(u(t)) \leq Q(\hat{u}(t)) \quad (1.10)$$

W opisie zagadnienia czasooptymalnego potrzebne są jeszcze dwa pojęcia. Pierwsze to *funkcja sprzężona*  $\psi : [0, T] \mapsto \mathbb{R}^n$  będąca rozwiązaniem tzw. równania sprzężonego 1.11.

$$\frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = - \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} \quad (1.11)$$

Tak, jak w przypadku trajektorii optymalnej układu, trajektoria  $\psi(t)$  wyznaczona w układzie, w którym zastosowane zostało sterowanie optymalne  $\hat{u}(t)$ , nosi nazwę *trajektorii sprzężonej optymalnej* i oznaczona jest symbolem  $\hat{\psi}(t)$ .

Ostatnim pojęciem potrzebnym w niniejszym zagadnieniu jest *hamiltonian*, zwany również *funkcją Hamiltona*, czyli funkcja  $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$  który dla trajektorii układu  $x(t)$  wygenerowanej przy pomocy sterowania  $u(t)$  i odpowiadającej im trajektorii sprzężonej  $\psi(t)$  zdefiniowany jest zależnością 1.12.

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = \psi(t) \circ f(x(t), u(t)) = \psi(t)^T \cdot f(x(t), u(t)) \quad (1.12)$$

### 1.3.1.2. Zasada maksimum Pontriagina

Aby jednoznacznie opisać, a następnie wyznaczyć sterowanie czasooptymalne, potrzebne jest przytoczenie zasadniczego twierdzenia w optymalizacji dynamicznej. Jest ono znane pod nazwą *zasada maksimum Pontriagina*. Zostało opracowane w 1956 r. przez rosyjskiego matematyka Lwa Pontriagina. Twierdzenie podaje się w brzmieniu z [1].

**Zasada maksimum Pontriagina 1.1.** *Zakładając układ opisany równaniem 1.7 z warunkiem końcowym 1.8 i wskaźnikiem jakości 1.9 oraz równanie sprzężone 1.11: jeśli dla trajektorii układu  $\hat{x}(t)$  wygenerowanej przy pomocy sterowania  $\hat{u}(t)$  i odpowiadającej im trajektorii sprzężonej  $\hat{\psi}(t)$  zachodzi:*

$$\forall_{u(t) \in D} \forall_{t \in [0, T]} : H(\hat{\psi}(t), \hat{x}(t), \hat{u}(t)) \geq H(\hat{\psi}(t), \hat{x}(t), u(t)) \quad (1.13)$$

*to sterowanie  $\hat{u}(t)$  jest sterowaniem optymalnym.*

Powyższe twierdzenie należy obwarować dodatkowymi warunkami koniecznymi optymalności. Niech funkcja  $g : \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}^l$  opisuje zestaw ograniczeń nierównościowych, a funkcja  $h : \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}^k$  - ograniczeń równościowych. Obie dane są wzorem 1.14. Dodatkowo zakłada się, że  $g, h \in C^1$ .

$$\begin{aligned} g(x_0, x_f) &\leq 0 \\ h(x_0, x_f) &= 0 \end{aligned} \quad (1.14)$$

Ponadto, zakłada się, że istnieją  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^l$  oraz  $\rho \in \mathbb{R}^k$ , które wraz z uprzednio zdefiniowanymi wielkościami i funkcjami spełniają następujące *warunki konieczne optymalności*:

– warunek nieujemności:

$$\lambda \geq 0 \wedge \|\mu\| \geq 0 \quad (1.15)$$

– warunek nietrywialności:

$$\lambda + \|\mu\| + \|\rho\| > 0 \quad (1.16)$$

– warunek komplementarności:

$$\mu \circ g(x_0, x_f) = 0 \quad (1.17)$$

– warunki transwersalności:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(0) &= \frac{\partial(\mu \circ g + \rho \circ h)}{\partial x_0} \\ \hat{\psi}(T) &= -\frac{\partial(\mu \circ g + \rho \circ h)}{\partial x_f} \\ \forall_{t \in [0, T]} : H(\hat{\psi}(t), \hat{x}(t), \hat{u}(t)) &= \frac{\partial(\lambda T + \mu \circ g + \rho \circ h)}{\partial T} = \lambda \end{aligned} \quad (1.18)$$

– równanie sprzężone dane wzorem 1.11,

– warunek maksimum hamiltonianu dany wzorem 1.13.

### 1.3.2. Nieliniowość układu a sterowanie czasooptymalne

Poszukiwanie sterowania czasooptymalnego w systemach nieliniowych jest w ogólności bardzo skomplikowane, przede wszystkim ze względu na trudność rozwiązania analitycznego nieliniowych (lub nawet niestacjonarnych) równań różniczkowych. Układ zbiorników omawiany w niniejszej pracy również takie posiada: zarówno równania dynamiki układu 1.4, jak i równania sprzężone 1.21 są nieliniowe.

Aby uprościć analizę problemu oraz fizyczne zastosowanie wyznaczonego sterowania, zakłada się, że poszukiwane jego postaci będą klasy „bang - bang”. To znaczy, że będą przyjmowały tylko wartości z brzegów jednowymiarowego zbioru dopuszczalnego  $D \in \mathbb{R} \wedge D = [0, u_{max}] \Rightarrow \forall_{t \in [0, T]} : u(t) \in [0, u_{max}]$ .

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(x(t)) + \sum_{i=1}^m g_i(x(t)) \cdot u_i(t) \quad (1.19)$$

Można przyjąć takie założenie, ze względu na to, iż (jak pokazano w [2] oraz w rozdziale 7.10 [3]) dla systemów, których równania mają postać opisaną równaniem 1.19 (a taką dokładnie ma omawiany układ z  $m = 1$ ), funkcja przełączająca ma wtedy postać:  $\phi(t) = \hat{\psi}(t) \circ g(\hat{x}(t))$ . Owa funkcja opisuje momenty, w których sterowanie zmienia swoją wartość z jednego krańca zbioru  $D$  na drugi. W przypadku rozważanego układu zbiorników sterowanie optymalne będzie dane wzorem 1.20.

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) &= \frac{\text{sgn}(\phi(t)) + \text{sgn}(\phi(t))^2}{2} \cdot u_{max} \quad \wedge \quad \phi(t) = \frac{\hat{\psi}_1(t)}{aw} \Rightarrow \\ \hat{u}(t) &= \frac{\text{sgn}(\hat{\psi}_1(t)) + \text{sgn}(\hat{\psi}_1(t))^2}{2} \cdot u_{max} \end{aligned} \quad (1.20)$$

Podobne założenia są częstą praktyką w analizie stabilnych systemów nieliniowych ze względu na prostotę fizycznej aplikacji sterowania „bang - bang”. Przykłady zastosowań znajdują się m.in. w [4], [5] oraz [6].

### 1.3.3. Wyznaczanie sterowania czasooptymalnego

Analityczne rozwiązania poszukiwania sterowania czasooptymalnego zwykle opierają się bezpośrednio na przytoczonej powyżej zasadzie maksimum i warunkach koniecznych optymalności. W niniejszym podrozdziale zostanie pokrótce przedstawiona droga mogąca zmierzać do wyznaczenia analitycznego czasooptymalnego sterowania w rozważanym układzie zbiorników. Całe rozwiązanie nie jest przeprowadzone ze względu na fakt, iż równania sprzężone są niestacjonarne, a więc ich rozwiązanie analityczne byłoby bardzo trudne lub wręcz niemożliwe.

Pierwszym krokiem ku wyliczeniu analitycznego rozwiązania jest wyznaczenie równań sprzężonych za pomocą wzoru 1.11. Przyjmując współczynniki  $\alpha_i = \frac{1}{2} \forall_{i \in \{1,2,3\}}$  w modelu matematycznym zestawu zbiorników danym równaniem 1.4, można wyznaczyć równania sprzężone rozważanego układu. Są one dane wzorem 1.21. Pominęto w nim zależności wszystkich funkcji  $\psi$  oraz  $h$  od czasu, aby uprościć zapis.



$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \psi_1 \frac{C_1}{2aw\sqrt{h_1}} - \psi_2 \frac{C_1}{2\sqrt{h_1}(cw + \frac{h_2}{h_{max}}bw)} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = -\psi_2 \frac{1}{cw + \frac{h_2}{h_{max}}bw} \left( \frac{b(C_1\sqrt{h_1} - C_2\sqrt{h_2})}{ch_{max} + bh_2} - \frac{C_2}{2\sqrt{h_2}} \right) - \psi_3 \frac{1}{w\sqrt{h_3(2R-h_3)}} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial t} = \psi_3 \frac{-C_3(3R-2h_3)}{wh_3(2R-h_3)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad (1.21)$$

Następnie trzeba by przeddefiniować ograniczenia równościowe (dane wzorem 1.5) i nierównościowe (1.6) tak, aby spełniały założenia funkcji  $g$  i  $h$  opisane zależnościami 1.14. Korzystając z warunków komplementarności (1.17) oraz nieujemności (1.15), powinno się wyznaczyć składowe wektora  $\mu$  oraz założyć pewną postać wektora  $\rho$  (bazując takie założenie na 1.16).

Na podstawie tych danych należałoby wyznaczyć warunki początkowy i końcowy danym wzorem 1.18 dla powyższych równań sprzężonych, co pozwoliłoby wyznaczyć analityczne wzory opisujące wszystkie składowe trajektorii sprzężonych systemu.

Na koniec, korzystając z zależności 1.20, można by wyznaczyć analityczny wzór sterowania optymalnego.

#### 1.3.4. Numeryczne metody wyznaczania sterowania czasoptymalnego

### 1.4. Regulacja liniowo - kwadratowa

W niniejszym podrozdziale zostanie przedstawione zagadnienie szukania sterowania w układach liniowych z tzw. liniowo-kwadratowym wskaźnikiem jakości. Pokazana zostanie również metoda zastosowania takiego typu regulacji dla układów nieliniowych przy użyciu linearyzacji w punkcie pracy.

#### 1.4.1. Ogólna definicja zagadnienia

#### 1.4.2. Linearyzacja modelu

#### 1.4.3. Wyznaczanie regulatora liniowo - kwadratowego

#### 1.4.4. Dobór wag w zagadnieniu liniowo - kwadratowym



## **2. Architektura zaproponowanego rozwiązania**

### **2.1. Podział zadań między elementami oprogramowania**

### **2.2. Część obliczeniowa („wyższego poziomu”)**

#### **2.2.1. Wybór pakietu do optymalizacji dynamicznej**

#### **2.2.2. Opis pakietu Modelica**

#### **2.2.3. Opis systemu Tango Controls**

#### **2.2.4. Architektura klasy urządzeń systemu Tango**

##### **2.2.4.1. Interfejs dla systemu Tango**

##### **2.2.4.2. Problem dostępności interfejsu**

#### **2.2.5. Środowisko testowe części obliczeniowej**

### **2.3. Część realizująca sterowanie („niższego poziomu”)**

#### **2.3.1. Pakiet Simulink jako narzędzie realizujące sterowanie**

#### **2.3.2. Komunikacja z urządzeniem wykonawczym i czujnikami**

### **2.4. Komunikacja między elementami oprogramowania**



### **3. Badania symulacyjne**

#### **3.1. Optimalizacja przy użyciu pakietu `JModelica.org`**

##### **3.1.1. Inicjalizacja optymalizacji dynamicznej**

##### **3.1.2. Dokładność wyznaczania rozwiązania**

#### **3.2. Symulacja i weryfikacja**

##### **3.2.1. Przy użyciu pakietu `JModelica.org`**

##### **3.2.2. Przy użyciu oprogramowania MATLAB/Simulink**



## **4. Badania eksperymentalne**

### **4.1. Porównanie wyników eksperymentalnych z symulacyjnymi**

#### **4.1.1. Ocena jakości rozwiązania**

### **4.2. Badanie wpływu zakłóceń na sterowanie**

#### **4.2.1. Wpływ czasu dyskretyzacji**

#### **4.2.2. Wpływ zakłóceń w ruchu sieciowym**

### **4.3. Możliwe kierunki dalszego rozwiązania zaproponowanego rozwiązania**





## **Zakończenie**

Zakończenie!

# Spis rysunków

1.1	Układ zbiorników z zaznaczonymi wymiarami . . . . .	10
-----	---	----

## Bibliografia

- [1] Adam Korytowski. *Notatki z wykładów na przedmiot: Optymalizacja w Systemach Sterowania*. Kraków, Polska: Akademia Górniczo-Hutnicza im. S. Staszica, 2015.
- [2] Yi Ma. *Lecture notes for course ECE553: Optimum Control Systems*. Dostęp on-line: <http://yima.csl.illinois.edu/ECE553.html>  
Stan na: 15.08.2017 r. Champaign, Illinois, Stany Zjednoczone Ameryki: Uniwersytet Illinois w Urbana-Champaign, 2008.
- [3] Michael Athans i Peter L. Falb. *Optimal Control: An Introduction to the Theory and its Applications*. Dostęp on-line: <https://archive.org/details/OptimalControlAnIntroductionToTheTheoryAndItsApplications>  
Stan na: 15.08.2017 r. Nowy Jork, Stany Zjednoczone Ameryki: McGraw-Hill Book Company, 1966.
- [4] I. Vakilzadeh i Keshavarz A. A. „Bang-Bang Control of a Second-Order Non-Linear Stable Plant with Second-Order Nonlinearity”. W: *Kybernetika* 18.1 (1982). Dostęp on-line: <http://www.kybernetika.cz/content/1982/1/66/paper.pdf>.  
Stan na: 15.08.2017 r.
- [5] K. Balachandran i D. Somasundaram. „Bang-Bang Control of a Second-Order Non-Linear Stable Plant with Fourth-Order Nonlinearity”. W: *Kybernetika* 19.2 (1983). Dostęp on-line: <http://www.kybernetika.cz/content/1983/2/158/paper.pdf>  
Stan na: 15.08.2017 r.
- [6] Mehmet Itik. „Optimal control of nonlinear systems with input constraints using linear time varying approximations”. W: *Nonlinear Analysis: Modelling and Control* 21.3 (2016). Dostęp on-line: [https://www.mii.lt/na/issues/NA\\_2103/NA2137.pdf](https://www.mii.lt/na/issues/NA_2103/NA2137.pdf)  
Stan na: 15.08.2017 r.