AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

**WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI, AUTOMATYKI,
INFORMATYKI I INŻYNIERII BIOMEDYCZNEJ**

KATEDRA AUTOMATYKI I INŻYNIERII BIOMEDYCZNEJ

Praca dyplomowa magisterska

Dwuczęściowa aplikacja sterowania czasooptymalnego w systemie zbiorników
A two-part application of time-optimal control in a system of tanks

Autor: *Łukasz Dudek*
Kierunek studiów: *Automatyka i Robotyka*
Opiekun pracy: *dr hab. inż. Adam Piłat*

Kraków, 2017

Uprzedzony o odpowiedzialności karnej na podstawie art. 115 ust. 1 i 2 ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (t.j. Dz.U. z 2006 r. Nr 90, poz. 631 z późn. zm.): „Kto przywłaszcza sobie autorstwo albo wprowadza w błąd co do autorstwa całości lub części cudzego utworu albo artystycznego wykonania, podlega grzywnie, karze ograniczenia wolności albo pozbawienia wolności do lat 3. Tej samej karze podlega, kto rozpowszechnia bez podania nazwiska lub pseudonimu twórcy cudzy utwór w wersji oryginalnej albo w postaci opracowania, artystycznego wykonania albo publicznie zniekształca taki utwór, artystyczne wykonanie, fonogram, wideogram lub nadanie.", a także uprzedzony o odpowiedzialności dyscyplinarnej na podstawie art. 211 ust. 1 ustawy z dnia 27 lipca 2005 r. Prawo o szkolnictwie wyższym (t.j. Dz. U. z 2012 r. poz. 572, z późn. zm.): „Za naruszenie przepisów obowiązujących w uczelni oraz za czyny uchybiające godności studenta student ponosi odpowiedzialność dyscyplinarną przed komisją dyscyplinarną albo przed sądem koleżeńskim samorządu studenckiego, zwanym dalej «sądem koleżeńskim».", oświadczam, że niniejszą pracę dyplomową wykonałem(-am) osobiście i samodzielnie i że nie korzystałem(-am) ze źródeł innych niż wymienione w pracy.

Serdecznie dziękuję mojemu promotorowi, dr hab. inż. Adamowi Piłatowi za cierpliwość.

Spis treści

Wstęp

Wstęp!

1. Matematyczny opis zagadnienia

Rozważany układ składa się z trzech zbiorników połączonych szeregowo, czy też kaskadowo. W związku z tym płyn, którym jest napełniony pierwszy zbiornik - woda - przepływa przez otwór o zadanym oporze wypływu do drugiego zbiornika. Stamtąd znowu wypływa do przez otwór o zadanym oporze do trzeciego zbiornika, skąd przez kolejny taki otwór wypływa do zewnętrznego naczynia. Stamtąd woda jest pompowana z powrotem do pierwszego zbiornika. Całość układu jest przedstawiona schematycznie na rys. 1.1.

1.1. Wprowadzenie z zakresu dynamiki płynów

W niniejszym podrozdziale zostaną przypomniane podstawowe prawa fizyki związane z przepływem cieczy oraz jego związkiem z jej poziomem w zbiorniku.

1.1.1. Równanie Bernoulliego i prawo Torricellego

Równanie Bernoulliego jest jednym z podstawowych praw termodynamiki płynów idealnych. Mówi ono, że wzrost prędkości przepływu cieczy musi wiązać się ze spadkiem ciśnienia lub energii potencjalnej. Ma kilka postaci; najpopularniejszą jest tzw. szczególne równanie Bernoulliego, które wiąże energię mechaniczną płynu z jego prędkością w danym miejscu, wysokością w układzie odniesienia służącym do wyznaczania energii potencjalnej, ciśnieniem i gęstością. W takiej formie można je stosować tylko do cieczy nieściśliwych i nielepkich, jednocześnie zakładając stacjonarność i bezwirowość przepływu.

Ta szczególna postać równania Bernoulliego jest przedstawiona jako równanie 1.1.

$$e_m = \frac{v^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} = const \tag{1.1}$$

Oznaczenia:

– e_m - energia jednostki masy cieczy,

– v - prędkość cieczy w danym miejscu,

– g - przyspieszenie grawitacyjne,

– h - wysokość w układzie odniesienia, w którym jest wyznaczana energia potencjalna,

– p - ciśnienie cieczy w danym miejscu,

– ρ - gęstość cieczy.

Z równania Bernoulliego można wyprowadzić bezpośrednią zależność między prędkością cieczy a jej poziomem w zbiorniku. Jest ona znana pod nazwą prawa Torricellego i przedstawiona jako równanie 1.2 (przyjęto oznaczenia takie jak w przypadku równania 1.1).

$$v = \sqrt{2gh} \tag{1.2}$$

Można owo prawo zapisać w bardziej ogólnej formie słownej: prędkość wypływu cieczy jest proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z poziomu cieczy w zbiorniku. Takie jego sformułowanie będzie istotne przy wyznaczaniu modelu matematycznego rozważanego układu.

Na podstawie prawa Torricellego można wyznaczyć czas potrzebny na zmianę wysokości słupa cieczy w zamkniętym pojemniku. Niech:

– h będzie ową wysokością,

– x -

– v - prędkością wypływu, $v = \sqrt{2gh} = \frac{\partial x}{\partial t}$,

– A - polem przekroju poprzecznego zbiornika.

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial x}{\partial t} = v = \sqrt{2gh} \\ &A\partial h = \partial x \\ &\tfrac{\partial h}{\partial t} = \tfrac{\sqrt{2gh}}{A} \end{aligned} \tag{1.3}$$

1.1.2. Rodzaje przepływów

Przytoczona wcześniej szczególna postać równania Bernoulliego (równanie 1.1) jest obwarowana założeniem stacjonarności przepływu. Oznacza to dwie rzeczy:

1. Wartości wektorów prędkości cieczy są stałe w czasie.
2. Poszczególne „warstwy” cieczy nie wpływają na siebie.

Ten drugi warunek jest znany pod nazwą przepływu laminarnego, który zwykle ma miejsce przy niskich prędkościach cieczy. W takim typie przepływu nie występują żadne jego zaburzenia (ruchy wirowe, prądy przeciwne itp.), a poszczególne „warstwy” cieczy zachowują się jak karty do gry przy tasowaniu, przepływając obok siebie bez wpływania jedna na drugą. Jej cząstki będące blisko powierzchni przemieszczają się po liniach równoległych do tafli cieczy.

Niestety, w rzeczywistości ciężko jest spełnić założenie laminarności przepływu, nie mówiąc już o jego stacjonarności. W związku z tym można zastosować pewne uogólnienie prawa Torricellego na ciecze nielaminarne.

1.2. Model matematyczny zestawu zbiorników

Na podstawie podanych wcześniej zależności można zdefiniować model matematyczny rozważanego układu zbiorników. Jest on dany równaniem 1.4.

$$\begin{cases} \frac{\partial h_1}{\partial t} = \frac{u - C_1 {h_1}^{\alpha_1}}{aw} \\ \frac{\partial h_2}{\partial t} = \frac{C_1 {h_1}^{\alpha_1} - C_2 {h_2}^{\alpha_2}}{cw + \frac{h_2}{h_{max}} bw} \\ \frac{\partial h_3}{\partial t} = \frac{C_2 {h_2}^{\alpha_2} - C_3 {h_3}^{\alpha_3}}{w\sqrt{R^2 - (R - h_3)^2}} \end{cases} \tag{1.4}$$

Oznaczenia:

- $h_i(t)$ - poziom wody w i-tym zbiorniku ($i \in \{1, 2, 3\}$),
- $u(t)$ - sterowanie pompą,
- a - szerokość pierwszego zbiornika,
- b - szerokość trójkątnej części drugiego zbiornika,
- c - szerokość prostopadłościennej części drugiego zbiornika,
- R - promień trzeciego zbiornika,
- w - głębokość zbiorników,
- h_{max} maksymalna wysokość słupa wody w zbiornikach,
- C_i - opór wypływu z i-tego zbiornika,
- α_i - współczynnik wypływu z i-tego zbiornika.

Wszystkie wymiary w powyższym wzorze zostały przedstawione na rys. 1.1. Są na nim również oznaczone opory wypływów C_1 - C_3 przy odpowiednich zaworach.

1.3. Regulacja czasooptymalna

W niniejszym podrozdziale przedstawiona zostanie koncepcja regulacji czasooptymalnej. Zostaną podane założenia zagadnienia, twierdzenia, na których podstawie można wyliczyć rozwiązanie oraz jego proponowana forma analityczna. Zaznacza się, że mimo iż podane niżej definicje i założenia są wzięte z ogólnych zagadnień optymalizacji dynamicznej, to w podanym brzmieniu stosują się tylko do zagadnienia wyznaczania sterowania czasooptymalnego.

1.3.1. Ogólna definicja zagadnienia

1.3.1.1. Założenia wstępne

Przyjmijmy system dany stacjonarnym, zwyczajnym równaniem różniczkowym (pokazanym jako równanie 1.5), w którym:

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = f(x(t), u(t)),\ 0 \le t \le T \tag{1.5}$$

– wektor zmiennych stanu w chwili t - $x(t)$ spełnia następujące założenia:

  - $\forall_{t \ge 0} :\ x(t) \in \mathbb{R}^n$ - ma n składowych, a więc rozważany system ma n równań różniczkowych zwyczajnych,
  - $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ - spełnia warunek początkowy x_0;

– wektor sterowań w chwili t - $u(t)$:

  - $\forall_{t \ge 0} :\ u(t) \in D \subset \mathbb{R}^m$ - ma m składowych zawierającym się w zbiorze D ograniczającym wartości sterowań,
  - $u(0) = u_0$ - spełnia warunek początkowy u_0,
  - funkcja u jest przedziałami ciągła na przedziale $[0, T]$, czyli:
    * ma co najwyżej skończoną liczbę punktów nieciągłości,
    * w każdym z nich ma skończoną granicę lewostronną,
    * jest prawostronnie ciągła,
    * w lewym końcu przedziału jest lewostronnie ciągła;

– funkcja $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longmapsto \mathbb{R}^n$:

  - $f \in C^1$ - jest ciągła i różniczkowalna ze względu na pierwszy argument,
  - $\frac{\partial f(t)}{\partial x} \in C^0$ - jej pochodna ze względu na pierwszy argument jest ciągła.

Rozwiązaniem takiego równania jest oczywiście funkcja $x : [0, T) \longmapsto \mathbb{R}^n$ nazywana *trajektorią układu*.

Trajektoria będąca rozwiązaniem zagadnienia minimalnoczasowego musi spełniać następujący warunek końcowy (nazywany również stanem docelowym):

$$x(T) = x_f \in \mathbb{R}^n \tag{1.6}$$

Ów czas T, po którym przy danym sterowaniu stan systemu osiągnie warunek końcowy, będzie wskaźnikiem jakości:

$$Q(u) = q(x_f) = T \tag{1.7}$$

Na tej podstawie można określić *sterowanie optymalne* $\hat{u}(t)$, które spełnia wszystkie wspominane wcześniej warunki oraz zależność 1.8. Trajektoria układu wygenerowana przez zastosowanie sterowania optymalnego nazwana jest *trajektorią optymalną* i opisana symbolem $\hat{x}(t)$.

$$\forall_u : \ Q(u) \leq Q(\hat{u}) \tag{1.8}$$

W opisie zagadnienia czasooptymalnego potrzebne są jeszcze dwa pojęcia. Pierwsze to *funkcja sprzężona* $\psi : [0, T] \longmapsto \mathbb{R}^n$ będąca rozwiązaniem tzw. równania sprzężonego 1.9 z warunkiem końcowym $\psi(T) = -\frac{\partial q(x_f)}{\partial x_f} = 0$.

$$\frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = -\frac{\partial f(x(t), u(t)}{\partial x} \tag{1.9}$$

Tak, jak w przypadku trajektorii optymalnej układu, trajektoria $\psi(t)$ wyznaczona w układzie, w którym zastosowane zostało sterowanie optymalne $\hat{u}(t)$, nosi nazwę *trajektorii sprzężonej optymalnej* i oznaczona jest symbolem $\hat{\psi}(t)$.

Ostatnim pojęciem potrzebnym w niniejszym zagadnieniu jest *hamiltonian*, zwany również *funkcją Hamiltona*, czyli funkcja $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longmapsto \mathbb{R}$ który dla trajektorii układu $x(t)$ wygenerowanej przy pomocy sterowania $u(t)$ i odpowiadającej im trajektorii sprzężonej $\psi(t)$ zdefiniowany jest zależnością 1.10.

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = \psi(t) \circ f(x(t), u(t)) = \psi(t)^T \cdot f(x(t), u(t)) \tag{1.10}$$

1.3.1.2. Zasada maksimum Pontriagina

Aby jednoznacznie opisać, a następnie wyznaczyć sterowanie czasooptymalne, potrzebne jest przytoczenie zasadniczego twierdzenia w optymalizacji dynamicznej. Jest ono znane pod nazwą *zasada maksimum Pontriagina*. Zostało opracowane w 1956 r. przez rosyjskiego matematyka Lwa Pontriagina.

Zasada maksimum Pontriagina 1.1. *Zakładając układ opisany równaniem 1.5 z warunkiem końcowym 1.6 i wskaźnikiem jakości 1.7 oraz równanie sprzężone 1.9:*
jeśli dla trajektorii układu $\hat{x}(t)$ wygenerowanej przy pomocy sterowania $\hat{u}(t)$ i odpowiadającej im trajektorii sprzężonej $\hat{\psi}(t)$ zachodzi:

$$\forall_{u(t) \in D} \ \forall_{t \in [0,T]} : \ H(\hat{\psi}(t), \hat{x}(t), \hat{u}(t)) \ \geq \ H(\hat{\psi}(t), \hat{x}(t), u(t)) \tag{1.11}$$

to sterowanie $\hat{u}(t)$ jest sterowaniem optymalnym.

1.3.2. Wyznaczanie sterowania czasooptymalnego

$$\begin{cases} \frac{\partial\psi_1}{\partial t} = \psi_1 \frac{C_1}{2aw\sqrt{h_1}} - \psi_2 \frac{C_1}{2\sqrt{h_1}(cw+\frac{h_2}{h_{max}}bw)} \\ \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial t} = -\psi_2 \frac{1}{cw+\frac{h_2}{h_{max}}bw}\left(\frac{b(C_1\sqrt{h_1}-C_2\sqrt{h_2})}{ch_{max}+bh_2} - \frac{C_2}{2\sqrt{h_2}}\right) - \psi_3 \frac{1}{w\sqrt{h_3(2R-h_3)}} \\ \\ \frac{\partial\psi_3}{\partial t} = \psi_3 \frac{-C_3(3R-2h_3)}{wh_3(2R-h_3)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \tag{1.12}$$

Równania sprzężone zestawu zbiorników (przy założeniu przepływu laminarnego) są dane wzorem 1.12.

1.3.3. Nieliniowość układu a sterowanie czasooptymalne

1.3.4. Numeryczne metody wyznaczania sterowania czasooptymalnego

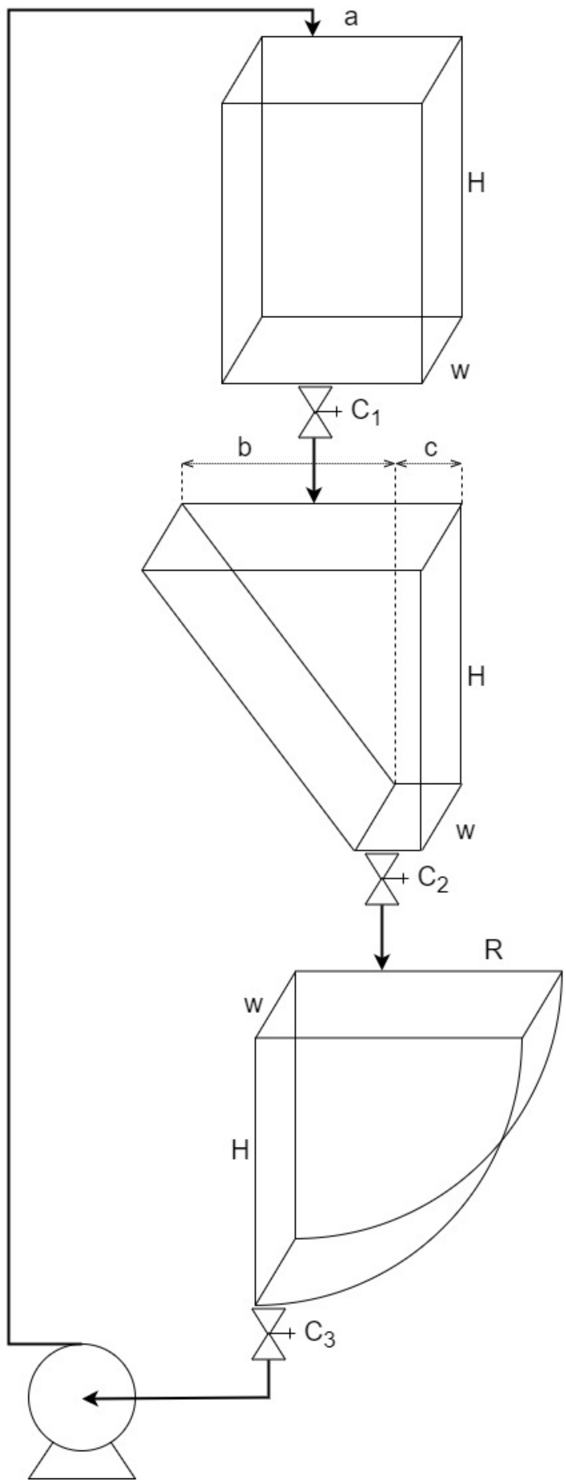
1.4. Regulacja liniowo - kwadratowa

1.4.1. Ogólna definicja zagadnienia

1.4.2. Linearyzacja modelu

1.4.3. Wyznaczanie regulatora liniowo - kwadratowego

1.4.4. Dobór wag w zagadnieniu liniowo - kwadratowym



Rys. 1.1. Układ zbiorników z zaznaczonymi wymiarami

2. Architektura zaproponowanego rozwiązania

2.1. Podział zadań między elementami oprogramowania

2.2. Część obliczeniowa („wyższego poziomu”)

2.2.1. Wybór pakietu do optymalizacji dynamicznej

2.2.2. Opis pakietu Modelica

2.2.3. Opis systemu Tango Controls

2.2.4. Architektura klasy urządzeń systemu Tango

2.2.4.1. Interfejs dla systemu Tango

2.2.4.2. Problem dostępności interfejsu

2.2.5. Środowisko testowe części obliczeniowej

2.3. Część realizująca sterowanie („niższego poziomu”)

2.3.1. Pakiet Simulink jako narzędzie realizujące sterowanie

2.3.2. Komunikacja z urządzeniem wykonawczym i czujnikami

2.4. Komunikacja między elementami oprogramowania

3. Badania symulacyjne

3.1. Optymalizacja przy użyciu pakietu `JModelica.org`

3.1.1. Inicjalizacja optymalizacji dynamicznej

3.1.2. Dokładność wyznaczania rozwiązania

3.2. Symulacja i weryfikacja

3.2.1. Przy użyciu pakietu `JModelica.org`

3.2.2. Przy użyciu oprogramowania MATLAB/Simulink

4. Badania eksperymentalne

4.1. Porównanie wyników eksperymentalnych z symulacyjnymi

4.1.1. Ocena jakości rozwiązania

4.2. Badanie wpływu zakłóceń na sterowanie

4.2.1. Wpływ czasu dyskretyzacji

4.2.2. Wpływ zakłóceń w ruchu sieciowym

4.3. Możliwe kierunki dalszego rozwiązania zaproponowanego rozwiązania

Zakończenie

Zakończenie!

Spis rysunków

Bibliografia

[1] A. Diller. *LaTeX wiersz po wierszu*. Gliwice: Wydawnictwo Helion, 2000.

[2] L. Lamport. *LaTeX system przygotowywania dokumentów*. Kraków: Wydawnictwo Ariel, 1992.

[3] M. Szpyrka. *On Line Alvis Manual*. `http://fm.ia.agh.edu.pl/alvis:manual`. AGH University of Science and Technology. 2011.