



**AGH**

**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE**

**WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI, AUTOMATYKI,  
INFORMATYKI I INŻYNIERII BIOMEDYCZNEJ**

KATEDRA AUTOMATYKI I INŻYNIERII BIOMEDYCZNEJ

Praca dyplomowa magisterska

*Hybrydowa aplikacja sterowania optymalnego dla systemu zbiorników*  
*Hybrid application of optimal control for a tanks system*

Autor:

*Łukasz Dudek*

Kierunek studiów:

*Automatyka i Robotyka*

Opiekun pracy:

*dr hab. inż. Adam Piłat*

Kraków, 2017

*Uprzedzony o odpowiedzialności karnej na podstawie art. 115 ust. 1 i 2 ustawy z dnia 4 lutego 1994 r. o prawie autorskim i prawach pokrewnych (t.j. Dz.U. z 2006 r. Nr 90, poz. 631 z późn. zm.): „Kto przywłaszcza sobie autorstwo albo wprowadza w błąd co do autorstwa całości lub części cudzego utworu albo artystycznego wykonania, podlega grzywnie, karze ograniczenia wolności albo pozbawienia wolności do lat 3. Tej samej karze podlega, kto rozpowszechnia bez podania nazwiska lub pseudonimu twórcy cudzy utwór w wersji oryginalnej albo w postaci opracowania, artystycznego wykonania albo publicznie zniekształca taki utwór, artystyczne wykonanie, fonogram, wideogram lub nadanie.”, a także uprzedzony o odpowiedzialności dyscyplinarnej na podstawie art. 211 ust. 1 ustawy z dnia 27 lipca 2005 r. Prawo o szkolnictwie wyższym (t.j. Dz. U. z 2012 r. poz. 572, z późn. zm.): „Za naruszenie przepisów obowiązujących w uczelni oraz za czyny uchybiające godności studenta student ponosi odpowiedzialność dyscyplinarną przed komisją dyscyplinarną albo przed sądem koleżeńskim samorządu studenckiego, zwanym dalej «sądem koleżeńskim».”, oświadczam, że niniejszą pracę dyplomową wykonałem(-am) osobiście i samodzielnie i że nie korzystałem(-am) ze źródeł innych niż wymienione w pracy.*

*Serdecznie dziękuję mojemu promotorowi, dr hab.  
inż. Adamowi Piłatowi za cierpliwość.*



## Spis treści

<b>Wstęp</b> .....	7
<b>1. Matematyczny opis zagadnienia</b> .....	9
1.1. Wprowadzenie z zakresu dynamiki płynów .....	9
1.1.1. Równanie Bernoulliego i prawo Torricellego .....	9
1.1.2. Bilans masy .....	11
1.1.3. Rodzaje przepływów .....	12
1.2. Model matematyczny zestawu zbiorników .....	13
1.3. Regulacja czasooptymalna .....	14
1.3.1. Ogólna definicja zagadnienia .....	15
1.3.2. Nieliniowość układu a sterowanie czasooptymalne .....	17
1.3.3. Analityczne metody wyznaczania sterowania czasooptymalnego .....	18
1.3.4. Numeryczne metody wyznaczania sterowania czasooptymalnego .....	19
1.4. Regulacja liniowo - kwadratowa .....	19
1.4.1. Ogólna definicja zagadnienia .....	19
1.4.2. Linearyzacja modelu .....	20
1.4.3. Dobór wag w zagadnieniu liniowo - kwadratowym .....	21
<b>2. Architektura zaproponowanego rozwiązania</b> .....	23
2.1. Podział zadań między elementami oprogramowania .....	23
2.2. Część obliczeniowa („wyższego poziomu”) .....	25
2.2.1. Wybór pakietu do optymalizacji dynamicznej .....	25
2.2.2. Opis pakietu Modelica .....	25
2.2.3. Opis systemu Tango Controls .....	25
2.2.4. Architektura klasy urządzeń systemu Tango .....	25
2.2.5. Środowisko testowe części obliczeniowej .....	25
2.3. Część realizująca sterowanie bezpośrednie („niższego poziomu”) .....	25
2.3.1. Pakiet Simulink jako narzędzie realizujące sterowanie .....	25
2.3.2. Komunikacja z urządzeniem wykonawczym i czujnikami .....	25

---

2.4. Komunikacja między elementami oprogramowania .....	25
<b>3. Badania symulacyjne .....</b>	<b>27</b>
3.1. Optymalizacja przy użyciu pakietu JModelica.org .....	27
3.1.1. Inicjalizacja optymalizacji dynamicznej.....	27
3.1.2. Dokładność wyznaczania rozwiązania.....	27
3.2. Symulacja i weryfikacja .....	27
3.2.1. Przy użyciu pakietu JModelica.org.....	27
3.2.2. Przy użyciu oprogramowania MATLAB/Simulink .....	27
<b>Zakończenie .....</b>	<b>29</b>
<b>Spis rysunków .....</b>	<b>30</b>

**Wstep**

Wstęp!





# 1. Matematyczny opis zagadnienia

Rozważany układ składa się z trzech zbiorników połączonych szeregowo, czy też kaskadowo. W związku z tym płyn (woda), którym jest napelniony pierwszy zbiornik, przepływa przez otwór o zadanym oporze wypływu do drugiego zbiornika. Stamtąd znowu wypływa do przez otwór o zadanym oporze do trzeciego zbiornika, skąd przez kolejny taki otwór wypływa do zewnętrznego naczynia. Stamtąd woda jest pompowana z powrotem do pierwszego zbiornika. Całość układu jest przedstawiona schematycznie na rys. 1.1.

## 1.1. Wprowadzenie z zakresu dynamiki płynów

W niniejszym podrozdziale zostały przypomniane podstawowe prawa fizyki związane z przepływem cieczy oraz jego związkiem z jej poziomem w zbiorniku.

### 1.1.1. Równanie Bernoulliego i prawo Torricellego

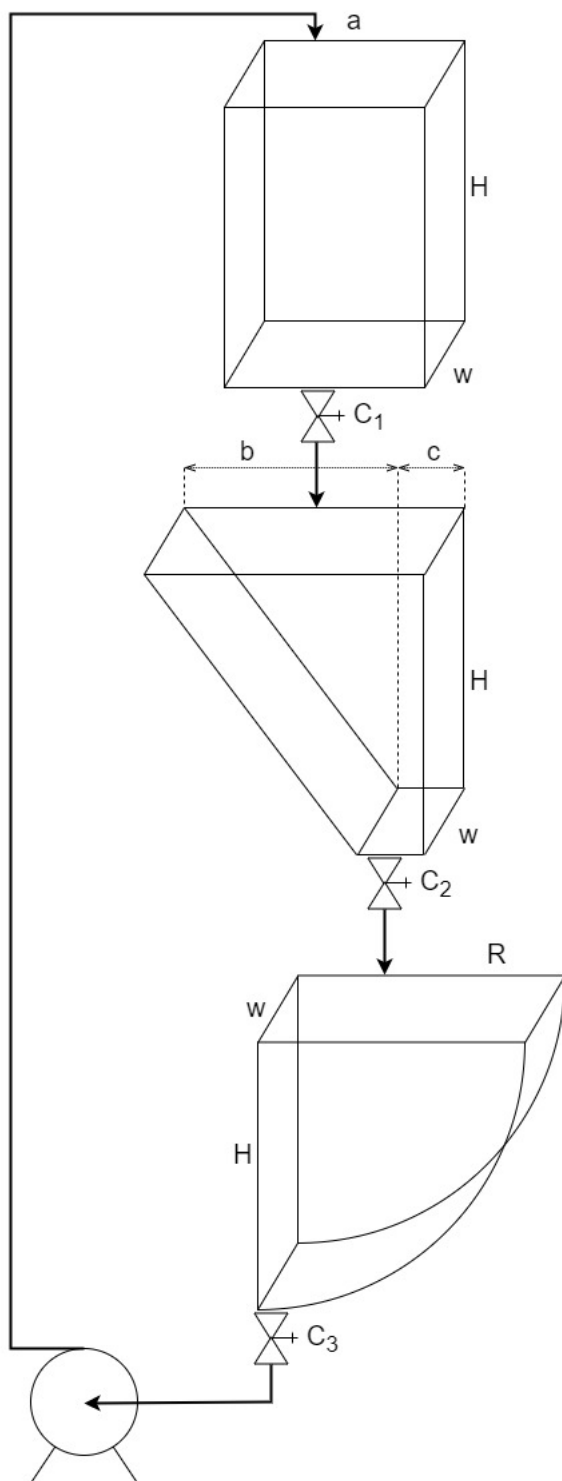
Równanie Bernoulliego jest jednym z podstawowych praw termodynamiki płynów idealnych. Mówi ono, że wzrost prędkości przepływu cieczy musi wiązać się ze spadkiem ciśnienia lub energii potencjalnej. Ma kilka postaci; najpopularniejszą jest tzw. szczególne równanie Bernoulliego, które wiąże energię mechaniczną płynu z jego prędkością w danym miejscu, wysokością w układzie odniesienia służącym do wyznaczania energii potencjalnej, ciśnieniem i gęstością. W takiej formie można je stosować tylko do cieczy nieściśliwych i nielepkich, jednocześnie zakładając stacjonarność i bezwirowość przepływu.

Ta szczególna postać równania Bernoulliego jest przedstawiona jako równanie 1.1.

$$e_m = \frac{v^2}{2} + gh + \frac{p}{\rho} = const \quad (1.1)$$

Oznaczenia:

- $e_m$  - energia jednostki masy cieczy,
- $v$  - prędkość cieczy w danym miejscu,
- $g$  - przyspieszenie grawitacyjne,
- $h$  - wysokość w układzie odniesienia, w którym jest wyznaczana energia potencjalna,



**Rys. 1.1.** Układ zbiorników z zaznaczonymi wymiarami

- $p$  - ciśnienie cieczy w danym miejscu,
- $\rho$  - gęstość cieczy.

Z równania Bernoulliego można wyprowadzić bezpośrednią zależność między prędkością cieczy a jej poziomem w zbiorniku. Jest ona znana pod nazwą prawa Torricellego i przedstawiona jako równanie 1.2 (przyjęto oznaczenia takie jak w przypadku równania 1.1). Można owo prawo zapisać w bardziej ogólnej formie słownej:

**Prawo Torricellego 1.1.** *Prędkość wypływu cieczy jest proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z poziomu cieczy w zbiorniku.*

$$v = \sqrt{2gh} \quad (1.2)$$

Takie jego sformułowanie będzie istotne w dalszych krokach wyznaczania modelu matematycznego rozważanego układu.

### 1.1.2. Bilans masy

Kolejnym zjawiskiem fizycznym, którego zrozumienie jest potrzebne, aby wyznaczyć model matematyczny rozważanego w niniejszej pracy układu zbiorników, jest bilans masy, czyli bezpośrednia konsekwencja prawa zachowania masy.

**Prawo zachowania masy 1.1.** *Masa układu ciał (suma mas wszystkich ciał wchodzących w skład tego układu) nie zmienia się podczas przemian i oddziaływań fizycznych w nim zachodzących.*

$$m_{uk} = const \quad (1.3)$$

Rozważając układ pojedynczego zbiornika z cieczą, do którego ta ciecz jest nalewana i z którego się ona wylewa, można sformułować następstwo tego prawa dane równaniem 1.4. Mówi ono, że zmiana masy w rozważanym zbiorniku -  $m_{zb}$  - jest równe zmianie masy do niego wpływającej -  $m_{we}$  - i wypływającej -  $m_{wy}$ .

$$\frac{\partial m_{we}}{\partial t} - \frac{\partial m_{wy}}{\partial t} = \frac{\partial m_{zb}}{\partial t} \quad (1.4)$$

Przyjmując założenie, że ciecz w zbiorniku i poza nim ma stałą gęstość  $\rho$  oraz stosując następujące podstawienia:

- $m_{zb} = V_{zb} \cdot \rho$ , gdzie  $V_{zb}$  to objętość cieczy w zbiorniku,
- $V_{zb} = A_{zb} \cdot h_{zb}$ , gdzie  $A_{zb}$  to pole przekroju poprzecznego zbiornika, a  $h_{zb}$  to wysokość słupa cieczy w tym zbiorniku

można przedstawić powyższą zależność w postaci opisanej zależnością 1.5 (za: [13]).

$$A_{zb} \cdot \frac{\partial h_{zb}}{\partial t} = \frac{\partial V_{we}}{\partial t} - \frac{\partial V_{wy}}{\partial t} \quad (1.5)$$

Strumień (zmiana objętości cieczy w czasie) wypływający z takiego zbiornika można otrzymać na podstawie prawa Torricellego - jest on dany zależnością 1.6, gdzie  $C$  to stała proporcjonalności wypływu. W rozważanym układzie będzie zależał od ustawienia zaworu wyjściowego z danego zbiornika, a więc można powiedzieć, że opisuje opór wypływu ze zbiornika (za: [12]).

$$\frac{\partial V_{wy}}{\partial t} = C \cdot \sqrt{h_{zb}} \quad (1.6)$$

Jeśli chodzi o strumień wpływający, to dla drugiego i trzeciego zbiornika jest on równy strumieniowi wypływającemu z poprzedniego zbiornika. Można przyjąć, że dla pierwszego zbiornika ten strumień to sterowanie pompą. Będzie ono oznaczone symbolem  $u$ .

Pola powierzchni przekrojów poprzecznych wszystkich trzech zbiorników przedstawiono jako równanie 1.7. Zastosowano oznaczenia z 1.1.

$$\begin{aligned} A_1 &= w \cdot a \\ A_2 &= c \cdot w + \frac{h_2}{h_{max}} \cdot b \cdot w \\ A_3 &= w \cdot \sqrt{R^2 - (R - h_3)^2} \end{aligned} \quad (1.7)$$

### 1.1.3. Rodzaje przepływów

Przytoczona wcześniej szczególna postać równania Bernoulliego (równanie 1.1) jest obwarowana założeniem stacjonarności przepływu. Oznacza to dwie rzeczy:

1. Wartości wektorów prędkości cieczy są stałe w czasie.
2. Poszczególne „warstwy” cieczy nie wpływają na siebie.

Ten drugi warunek jest znany pod nazwą przepływu laminarnego, który zwykle ma miejsce przy niskich prędkościach cieczy. W takim typie przepływu nie występują żadne jego zaburzenia (ruchy wirowe, prądy przeciwne itp.), a poszczególne „warstwy” cieczy zachowują się jak karty do gry przy tasowaniu, przepływając obok siebie bez wpływania jedna na drugą. Jej cząstki będące blisko powierzchni przemieszczają się po liniach równoległych do tafli cieczy.

Niestety, w rzeczywistości ciężko jest spełnić założenie laminarności przepływu, nie mówiąc już o jego stacjonarności. W związku z tym można zastosować pewne praktyczne uogólnienie zależności danej równaniem 1.6 na cieczy wypływające w sposób nielaminarny. Polega ono na zastąpieniu pierwiastka we wspomnianym wzorze parametrem  $\alpha$ , którego wartość można dobrać na podstawie pomiarów w rzeczywistym układzie (przykład podany w [12]). Uwzględniając to uogólnienie, można zapisać nowe sformułowanie zależności 1.6 jako równanie 1.8.

$$\frac{\partial V_{wy}}{\partial t} = C \cdot h_{zb}^\alpha \quad (1.8)$$

## 1.2. Model matematyczny zestawu zbiorników

Na podstawie podanych wcześniej zależności można zdefiniować model matematyczny rozważanego układu zbiorników. Jest on dany równaniem 1.9 (za: [12]).

$$\begin{cases} \frac{\partial h_1}{\partial t} = \frac{u - C_1 h_1^{\alpha_1}}{aw} \\ \frac{\partial h_2}{\partial t} = \frac{C_1 h_1^{\alpha_1} - C_2 h_2^{\alpha_2}}{cw + \frac{h_2}{h_{max}} bw} \\ \frac{\partial h_3}{\partial t} = \frac{C_2 h_2^{\alpha_2} - C_3 h_3^{\alpha_3}}{w \sqrt{R^2 - (R - h_3)^2}} \end{cases} \quad (1.9)$$

Oznaczenia:

- $h(t) = [h_1(t) \ h_2(t) \ h_3(t)]^T$  - poziomy wody w zbiornikach,
- $u(t)$  - sterowanie pompą,
- $a$  - szerokość pierwszego zbiornika,
- $b$  - szerokość trójkątnej części drugiego zbiornika,
- $c$  - szerokość prostopadłościowej części drugiego zbiornika,
- $R$  - promień trzeciego zbiornika,
- $w$  - głębokość zbiorników,
- $h_{max}$  maksymalna wysokość słupa wody w zbiornikach,
- $C_i$  - opór wypływu z  $i$ -tego zbiornika,
- $\alpha_i$  - współczynnik wypływu z  $i$ -tego zbiornika.

Wszystkie wymiary w powyższym wzorze zostały przedstawione na rys. 1.1. Są na nim również oznaczone opory wypływów  $C_1 - C_3$  przy odpowiednich zaworach.

Przyjmując  $\alpha_i = \frac{1}{2}, \forall i \in \{1, 2, 3\}$ , można uszczegółowić powyższy model, zakładając tylko przepływ laminarny. Taka właśnie jego postać będzie wykorzystywana przy analitycznym wyznaczeniu współczynników równania sprzężonego (definicja znajduje się w sekcji 1.3.1.1), które jest przeprowadzone w podrozdziale 1.3.3. W rzeczywistości, jak zostało wspomniane w podrozdziale 1.1.3, wartości tych współczynników będą musiały być trochę mniejsze, aby oddać faktyczny sposób przepływu wody między zbiornikami.

W rozważanym układzie zbiorników przyjmuje się następujące ograniczenia (pomijając oczywiste  $t \geq 0$ ):

- ograniczenia równościowe:

$$\begin{aligned} h_1(0) &= h_{10} \\ h_2(0) &= h_{20} \\ h_3(0) &= h_{30} \end{aligned} \quad (1.10)$$

– ograniczenia nierównościowe:

$$\begin{aligned}\forall_{t \in [0, T]} : 0 \leq h_1(t) &\leq h_{max} \\ \forall_{t \in [0, T]} : 0 \leq h_2(t) &\leq h_{max} \\ \forall_{t \in [0, T]} : 0 \leq h_3(t) &\leq h_{max} \\ \forall_{t \in [0, T]} : 0 \leq u(t) &\leq u_{max}\end{aligned}\tag{1.11}$$

Parametry  $h_{10}$ ,  $h_{20}$  i  $h_{30}$  oraz  $h_{max}$  traktuje się jako zadane.

Punkty równowagi (nazywane również stanami ustalonymi) takiego systemu będą opisane przez zależność 1.12 i wyznaczone przez parę wektora wartości zmiennych stanu  $h_r$  oraz sterowania  $u_r$ . Brak zależności od czasu owej pary został odpowiednio odnotowany.

$$\frac{\partial h(t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial h_1}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial h_2}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial h_3}{\partial t} = 0 \end{cases}\tag{1.12}$$

Dla rozważanego układu zbiorników będą miały postać daną zależnością 1.13.

$$\begin{aligned}u_r &= C_1 h_1^{\alpha_1} = C_2 h_2^{\alpha_2} = C_3 h_3^{\alpha_3} \\ h_r &= \begin{bmatrix} h_{1r} \\ h_{2r} \\ h_{3r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{u_r}{C_1}\right)^{\frac{1}{\alpha_1}} \\ \left(\frac{u_r}{C_2}\right)^{\frac{1}{\alpha_2}} \\ \left(\frac{u_r}{C_3}\right)^{\frac{1}{\alpha_3}} \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{1.13}$$

Wynika z tego, że układ otwarty jest asymptotycznie stabilny, gdyż posiada tylko jeden, zerowy punkt równowagi (pokazany jako wzór 1.14). Jest to również zgodne z fizyczną naturą tego systemu zbiorników: przy braku zasilania go pompą, cała woda wycieknie ze wszystkich trzech zbiorników.

$$h_r^0 = \begin{bmatrix} h_{1r}^0 \\ h_{2r}^0 \\ h_{3r}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\tag{1.14}$$

### 1.3. Regulacja czasooptymalna

W niniejszym podrozdziale przedstawiona została koncepcja regulacji czasooptymalnej. Zostaną podane założenia zagadnienia, twierdzenia, na których podstawie można wyliczyć rozwiązanie oraz jego proponowana forma analityczna.

Zaznacza się, że mimo iż podane niżej definicje i założenia są wzięte z ogólnych zagadnień optymalizacji dynamicznej, to w podanym brzmieniu stosują się tylko do zagadnienia wyznaczania sterowania czasooptymalnego.

### 1.3.1. Ogólna definicja zagadnienia

#### 1.3.1.1. Założenia wstępne

Dany jest układ opisany stacjonarnym, zwyczajnym równaniem różniczkowym (pokazanym jako równanie 1.15), w którym:

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = f(x(t), u(t)), \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.15)$$

- wektor zmiennych stanu w chwili  $t$  -  $x(t)$  spełnia następujące założenia:
  - $\forall_{t \geq 0} : x(t) \in \mathbb{R}^n$  - ma  $n$  składowych, a więc rozważany system ma  $n$  równań różniczkowych zwyczajnych,
  - $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$  - spełnia warunek początkowy  $x_0$ ;
- wektor sterowań w chwili  $t$  -  $u(t)$ :
  - $\forall_{t \geq 0} : u(t) \in D \subset \mathbb{R}^m$  - ma  $m$  składowych zawierającym się w zbiorze  $D$  ograniczającym wartości sterowań,
  - $u(0) = u_0$  - spełnia warunek początkowy  $u_0$ ,
  - funkcja  $u$  jest przedziałami ciągła na przedziale  $[0, T]$  (dokładny opis w [9]), czyli:
    - \* ma co najwyżej skończoną liczbę punktów nieciągłości,
    - \* w każdym z nich ma skończoną granicę lewostronną,
    - \* jest prawostronnie ciągła,
    - \* w lewym końcu przedziału jest lewostronnie ciągła;
- funkcja  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^n$ :
  - $f \in C^1$  - jest ciągła i różniczkowalna ze względu na pierwszy argument,
  - $\frac{\partial f(t)}{\partial x} \in C^0$  - jej pochodna ze względu na pierwszy argument jest ciągła.

Rozwiązaniem takiego równania jest oczywiście funkcja  $x : [0, T) \mapsto \mathbb{R}^n$  nazywana *trajektorią układu*.

Trajektoria będąca rozwiązaniem zagadnienia minimalnoczasowego musi spełniać następujący warunek końcowy (nazywany również stanem docelowym):

$$x(T) = x_f \in \mathbb{R}^n \quad (1.16)$$

Ów czas  $T$ , po którym przy danym sterowaniu stan systemu osiągnie warunek końcowy, będzie wskaźnikiem jakości:

$$Q(u(t)) = q(x_f) = T \quad (1.17)$$

Na tej podstawie można określić *sterowanie optymalne*  $\hat{u}(t)$ , które spełnia wszystkie wspomniane przy opisie równania 1.15 warunki oraz zależność 1.18. Trajektoria układu wygenerowana przez zastosowanie sterowania optymalnego nazwana jest *trajektorią optymalną* i opisana symbolem  $\hat{x}(t)$ .

$$\forall_{u(t)} : Q(u(t)) \leq Q(\hat{u}(t)) \quad (1.18)$$

W opisie zagadnienia czasooptymalnego potrzebne są jeszcze dwa pojęcia. Pierwsze to *funkcja sprzężona*  $\psi : [0, T] \mapsto \mathbb{R}^n$  będąca rozwiązaniem tzw. równania sprzężonego 1.19.

$$\frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = - \frac{\partial f(x(t), u(t))}{\partial x} \quad (1.19)$$

Tak, jak w przypadku trajektorii optymalnej układu, trajektoria  $\psi(t)$  wyznaczona w układzie, w którym zastosowane zostało sterowanie optymalne  $\hat{u}(t)$ , nosi nazwę *trajektorii sprzężonej optymalnej* i oznaczona jest symbolem  $\hat{\psi}(t)$ .

Ostatnim pojęciem potrzebnym w niniejszym zagadnieniu jest *hamiltonian*, zwany również *funkcją Hamiltona*, czyli funkcja  $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$  który dla trajektorii układu  $x(t)$  wygenerowanej przy pomocy sterowania  $u(t)$  i odpowiadającej im trajektorii sprzężonej  $\psi(t)$  zdefiniowany jest zależnością 1.20.

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = \psi(t) \circ f(x(t), u(t)) = \psi(t)^T \cdot f(x(t), u(t)) \quad (1.20)$$

### 1.3.1.2. Zasada maksimum Pontriagina

Aby jednoznacznie opisać, a następnie wyznaczyć sterowanie czasooptymalne, potrzebne jest przytoczenie zasadniczego twierdzenia w optymalizacji dynamicznej. Jest ono znane pod nazwą *zasada maksimum Pontriagina*. Zostało opracowane w 1956 r. przez rosyjskiego matematyka Lwa Pontriagina. Twierdzenie podaje się w brzmieniu z [9].

**Zasada maksimum Pontriagina 1.1.** Zakładając układ opisany równaniem 1.15 z warunkiem końcowym 1.16 i wskaźnikiem jakości 1.17 oraz równanie sprzężone 1.19: jeśli dla trajektorii układu  $\hat{x}(t)$  wygenerowanej przy pomocy sterowania  $\hat{u}(t)$  i odpowiadającej im trajektorii sprzężonej  $\hat{\psi}(t)$  zachodzi:

$$\forall_{u(t) \in D} \forall_{t \in [0, T]} : H(\hat{\psi}(t), \hat{x}(t), u(t)) \geq H(\hat{\psi}(t), \hat{x}(t), \hat{u}(t)) \quad (1.21)$$

to sterowanie  $\hat{u}(t)$  jest sterowaniem optymalnym.

Dowód zasady maksimum nie został uwzględniony w tej pracy. Można go znaleźć w [9] oraz w [11].

Powyższe twierdzenie należy obwarować dodatkowymi warunkami koniecznymi optymalności. Niech funkcja  $g : \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}^l$  opisuje zestaw ograniczeń nierównościowych, a funkcja  $h : \mathbb{R}^{2n} \mapsto \mathbb{R}^k$  - ograniczeń równościowych. Obie dane są wzorem 1.22. Dodatkowo zakłada się, że  $g, h \in C^1$ .

$$\begin{aligned} g(x_0, x_f) &\leq 0 \\ h(x_0, x_f) &= 0 \end{aligned} \quad (1.22)$$

Ponadto, zakłada się, że istnieją  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\mu \in \mathbb{R}^l$  oraz  $\rho \in \mathbb{R}^k$ , które wraz z uprzednio zdefiniowanymi wielkościami i funkcjami spełniają następujące *warunki konieczne optymalności*:



– warunek nieujemności:

$$\lambda \geq 0 \wedge \|\mu\| \geq 0 \quad (1.23)$$

– warunek nietrywialności:

$$\lambda + \|\mu\| + \|\rho\| > 0 \quad (1.24)$$

– warunek komplementarności:

$$\mu \circ g(x_0, x_f) = 0 \quad (1.25)$$

– warunki transwersalności:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(0) &= \frac{\partial(\mu \circ g + \rho \circ h)}{\partial x_0} \\ \hat{\psi}(T) &= -\frac{\partial(\mu \circ g + \rho \circ h)}{\partial x_f} \\ \forall_{t \in [0, T]} : H(\psi(t), x(t), u(t)) &= \frac{\partial(\lambda T + \mu \circ g + \rho \circ h)}{\partial T} = \lambda \end{aligned} \quad (1.26)$$

– równanie sprzężone dane wzorem 1.19,

– warunek maksimum hamiltonianu dany nierównością 1.21.

### 1.3.2. Nieliniowość układu a sterowanie czasooptymalne

Poszukiwanie sterowania czasooptymalnego w systemach nieliniowych jest w ogólności bardzo skomplikowane, przede wszystkim ze względu na trudność rozwiązania analitycznego nieliniowych (lub nawet niestacjonarnych) równań różniczkowych. Układ zbiorników omawiany w niniejszej pracy również takie posiada: zarówno równania dynamiki układu 1.9, jak i równania sprzężone 1.29 są nieliniowe.

Aby uprościć analizę problemu oraz fizyczne zastosowanie wyznaczonego sterowania, zakłada się, że poszukiwane jego postaci będą klasy „bang - bang”. To znaczy, że będą przyjmowały tylko wartości z brzegów jednowymiarowego zbioru dopuszczalnego  $D \in \mathbb{R} \wedge D = [0, u_{max}] \Rightarrow \forall_{t \in [0, T]} : u(t) \in [0, u_{max}]$ .

$$\frac{\partial x}{\partial t} = f(x(t)) + \sum_{i=1}^m g_i(x(t)) \cdot u_i(t) \quad (1.27)$$

Można przyjąć takie założenie, ze względu na to, iż (jak pokazano w [7] oraz w rozdziale 7.10 [1]) dla systemów, których równania mają postać opisaną równaniem 1.27 (a taką dokładnie ma omawiany układ z  $m = 1$ ), funkcja przełączająca ma wtedy postać:  $\phi(t) = \hat{\psi}(t) \circ g(\hat{x}(t))$ . Owa funkcja opisuje momenty, w których sterowanie zmienia swoją wartość z jednego krańca zbioru  $D$  na drugi. W przypadku rozważanego układu zbiorników sterowanie optymalne będzie dane wzorem 1.28.

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) &= \frac{\text{sgn}(\phi(t)) + \text{sgn}(\phi(t))^2}{2} \cdot u_{max} \wedge \phi(t) = \frac{\hat{\psi}_1(t)}{aw} \Rightarrow \\ \hat{u}(t) &= \frac{\text{sgn}(\hat{\psi}_1(t)) + \text{sgn}(\hat{\psi}_1(t))^2}{2} \cdot u_{max} \end{aligned} \quad (1.28)$$

Dodatkowo, jak wspomniano w podrozdziale 1.2, układ otwarty jest stabilny, a ograniczone sterowanie nie może tego zmienić.

Podobne założenia są częstą praktyką w analizie stabilnych systemów nieliniowych ze względu na prostotę fizycznej aplikacji sterowania „bang - bang”. Przykłady znajdują się m.in. w [2], [3] oraz [10].

### 1.3.3. Analityczne metody wyznaczania sterowania czasooptymalnego

Analityczne rozwiązania poszukiwania sterowania czasooptymalnego zwykle opierają się bezpośrednio na przytoczonej powyżej zasadzie maksimum i warunkach koniecznych optymalności. W niniejszym podrozdziale zostanie pokrótce przedstawiona droga mogąca zmierzać do wyznaczenia analitycznego czasooptymalnego sterowania w rozważanym układzie zbiorników. Całe rozwiązanie nie jest przeprowadzone ze względu na fakt, iż równania sprzężone są niestacjonarne, a więc ich rozwiązanie analityczne byłoby bardzo trudne lub wręcz niemożliwe.

Pierwszym krokiem ku wyliczeniu analitycznego rozwiązania jest wyznaczenie równań sprzężonych za pomocą wzoru 1.19. Przyjmując współczynniki  $\alpha_i = \frac{1}{2} \forall i \in \{1,2,3\}$  w modelu matematycznym zestawu zbiorników danym równaniem 1.9, można wyznaczyć równania sprzężone rozważanego układu. Są one dane wzorem 1.29. Pominęto w nim zależności wszystkich funkcji  $\psi$  oraz  $h$  od czasu, aby uprościć zapis.

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \psi_1 \frac{C_1}{2aw\sqrt{h_1}} - \psi_2 \frac{C_1}{2\sqrt{h_1}(cw + \frac{h_2}{h_{max}}bw)} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = -\psi_2 \frac{1}{cw + \frac{h_2}{h_{max}}bw} \left( \frac{b(C_1\sqrt{h_1} - C_2\sqrt{h_2})}{ch_{max} + bh_2} - \frac{C_2}{2\sqrt{h_2}} \right) - \psi_3 \frac{1}{w\sqrt{h_3(2R-h_3)}} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial t} = \psi_3 \frac{-C_3(3R-2h_3)}{wh_3(2R-h_3)^{\frac{3}{2}}} \end{cases} \quad (1.29)$$

Następnie trzeba by zdefiniować ograniczenia równościowe (dane wzorem 1.10) i nierównościowe (1.11) tak, aby spełniały założenia funkcji  $g$  i  $h$  opisane zależnościami 1.22. Dodatkowo należy dopisać od ograniczeń równościowych to wynikające z faktu poszukiwania sterowania czasooptymalnego, czyli 1.16, które w tym przypadku będzie miało postać opisaną przez 1.30, gdzie  $h_{1f}$ ,  $h_{2f}$  i  $h_{3f}$  są dane.

$$\begin{aligned} h_1(T) &= h_{1f} \\ h_2(T) &= h_{2f} \\ h_3(T) &= h_{3f} \end{aligned} \quad (1.30)$$

Korzystając z warunków komplementarności (1.25) oraz nieujemności (1.23), powinno się wyznaczyć składowe wektora  $\mu$  oraz założyć pewną postać wektora  $\rho$  (bazując takie założenie na 1.24).

Na podstawie tych danych należałoby wyznaczyć warunki początkowy i końcowy danym wzorem 1.26 dla powyższych równań sprzężonych, co pozwoliłoby wyznaczyć analityczne wzory opisujące wszystkie składowe trajektorii sprzężonych systemu.

Na koniec, korzystając z zależności 1.28, można by wyznaczyć analityczny wzór sterowania optymalnego.

### 1.3.4. Numeryczne metody wyznaczania sterowania czasooptymalnego

W niniejszej sekcji zostały przekrojowo zaprezentowane numeryczne metody poszukiwania sterowania czasooptymalnego dla układów nieliniowych. Nie jest jej celem przedstawiać dokładne działanie wszystkich istniejących algorytmów, ale raczej dokonać klasyfikacji i naświetlić interesujące metody oraz odesłać do odpowiedniej literatury przedmiotu (przede wszystkim [4]).

Podstawowy podział metod obliczeniowych to metody pośrednie oraz bezpośrednie.

## 1.4. Regulacja liniowo - kwadratowa

W niniejszym podrozdziale zostanie przedstawione zagadnienie szukania sterowania w układach liniowych z tzw. liniowo-kwadratowym wskaźnikiem jakości oraz nieskończonym horyzontem czasowym. Pokazana zostanie również metoda zastosowania takiego typu regulacji dla układów nieliniowych przy użyciu linearyzacji w punkcie pracy. Zostanie również pokrótce omówione zagadnienie doboru wag w wyznaczaniu regulatora liniowo-kwadratowego.

### 1.4.1. Ogólna definicja zagadnienia

Dany jest układ opisany liniowym równaniem różniczkowym 1.31 z wektorem zmiennych stanu  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  i warunkiem początkowym dla nich  $x(0) = x_0$ . Sterowaniem w tym układzie jest  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ . Jak zostało wspomniane wyżej, horyzont czasowy jest nieskończony. Cały układ jest analogiczny do opisanego w sekcji 1.3.1.

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = Ax(t) + Bu(t), \quad 0 \leq t < \infty \quad (1.31)$$

Przyjmuje się również wskaźnik jakości w tym układzie dany wzorem 1.32.

$$Q(u(t)) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left( x(t)^T W x(t) + u(t)^T R u(t) \right) dt \quad (1.32)$$

Dodatkowo zakłada się następujące właściwości macierzy wymienionych w powyższym wzorze:

- macierz  $W = W^T \geq 0$  - jest symetryczna i nieujemnie określona,
- macierz  $R = R^T > 0$  - jest symetryczna i dodatnio określona (jest również czasem w literaturze oznaczana symbolem  $Q$ , gdy wskaźnik jakości jest oznaczony symbolem  $J$ ).

Oczywiście, aby istniało sterowanie optymalne, musi istnieć również całka będąca wskaźnikiem jakości - jest to warunek konieczny i wystarczający. Sterowalność pary  $A$  i  $B$  lub asymptotyczna stabilność macierzy  $A$  jest warunkiem wystarczającym. Oba są podane w [9] oraz w [1].

Wyznaczenie sterowania optymalnego w tak zdefiniowanym problemie opiera się na rozwiązaniu algebraicznego równania Ricattiego (danego zależnością 1.33) przy założeniu, że macierz  $K$  jest symetryczna i nieujemnie określona. Jest ono opisane szerzej w [1], [9] i [5].

$$KBR^{-1}B^TK - A^TK - KA - W = 0 \quad (1.33)$$

Sterowanie optymalne  $\hat{u}(t)$  ma wówczas postać daną wzorem 1.34.

$$\hat{u}(t) = -R^{-1}B^TKx(t), \quad t \geq 0 \quad (1.34)$$

Aby taki regulator zapewnił asymptotyczną stabilność kontrolowanego układu, para  $(W, A)$  musi być wykrywalna, a para  $(A, B)$  - stabilizowalna (za: [9]).

### 1.4.2. Linearyzacja modelu

Mimo iż podstawowa definicja zagadnienia liniowo kwadratowego zakłada liniowość sterowanego układu (jak we wzorze 1.31), to można rozszerzyć jego zastosowanie również na układy nieliniowe przez użycie linearyzacji w otoczeniu punktu pracy.

Niech będzie dany układ opisany przez 1.15 wraz ze wszystkimi założeniami opisanymi w sekcji 1.3.1.1. Można go stabilizować tylko w jednym z jego punktów równowagi  $(x_r, u_r)$  (definiowanych równaniem 1.35) ze względu na to, iż tylko do takich punktów układ może dążyć w nieskończoność, która jest horyzontem czasowym analizowanego zagadnienia.

$$\frac{\partial x(t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow f(x_r(t), u_r(t)) = 0 \quad (1.35)$$

Na podstawie takiego punktu równowagi definiuje się odchyłki od stanu i sterowania ustalonego dane zależnością 1.36.

$$\begin{aligned} \Delta x(t) &= x(t) - x_r \\ \Delta u(t) &= u(t) - u_r \end{aligned} \quad (1.36)$$

Przy użyciu tak zdefiniowanych odchyłek wyjściowy nieliniowy układ można aproksymować układem liniowym (dany wzorem 1.37) w pewnym otoczeniu owych odchyłek.

$$\frac{\partial \Delta x(t)}{\partial t} = \bar{A}\Delta x(t) + \bar{B}\Delta u(t) \quad (1.37)$$

Macierze  $A$  i  $B$  zostały uzyskane w procesie linearyzacji funkcji  $f(x(t), u(t))$  w punkcie  $(x_r, u_r)$  - wzór 1.38 pokazuje sposób, w jaki są zdefiniowane.

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \left( \frac{\partial f(x(t), u_r)}{\partial x(t)} \Big|_{x(t)=x_r} \right)^T \\ \bar{B} &= \left( \frac{\partial f(x_r, u(t))}{\partial u(t)} \Big|_{u(t)=u_r} \right)^T \end{aligned} \quad (1.38)$$

Wskaźnik jakości dla takiego systemu również przyjmuje postać odchyłkową zaprezentowaną jako równanie 1.39. Założenia co do macierzy  $W$  i  $R$  są dalej takie same.

$$Q(\Delta u(t)) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left( \Delta x(t)^T W \Delta x(t) + \Delta u(t)^T R \Delta u(t) \right) dt \quad (1.39)$$

Aby stabilizować układ w punkcie  $x_r$ , potrzebna jest definicja regulatora bazującego na odchyłkach. Jego wzór jest analogiczny do 1.34 i ma postać daną zależnością 1.40 (znaleźć ją można m.in. w [6] i w [9]). Tak definiuje się regulator optymalny dla zagadnienia liniowo-kwadratowego w układach nieliniowych.

$$\Delta \hat{u}(t) = -R^{-1} \bar{B}^T K \Delta x(t), t \geq 0 \quad (1.40)$$

Tak jak w przypadku układów liniowych, aby system z zamkniętą pętlą sprzężenia zwrotnego był asymptotycznie stabilny, para  $(W, \bar{A})$  musi być wykrywalna, a para  $(\bar{A}, \bar{B})$  - stabilizowalna (znów za: [9]).

### 1.4.3. Dobór wag w zagadnieniu liniowo - kwadratowym

Kluczowym aspektem rzeczywistego zastosowania regulatorów liniowo-kwadratowych jest dobór wag, które wpływają na jego funkcjonowanie. Wagi zawierają się we współczynnikach dwóch macierzy obecnych we wskaźniku jakości (wzór 1.32):  $W$  i  $R$ .

Ze względu na to, iż macierz odwrotna do macierzy  $R$  występuje bezpośrednio we wzorach 1.34 oraz 1.40, można założyć, że im mniejsza norma macierzy  $R$  (a więc również im mniejsze jej poszczególne współczynniki), tym regulator będzie generował mocniejszy sygnał. Wpływa to oczywiście na szybkość zmian w układzie oraz na ewentualne przeregulowania (efekt opisany w [6] i w [9]).

Jeśli chodzi o macierz  $W$ , to jej współczynniki odpowiadają za sterowanie poszczególnymi zmiennymi stanu oraz na wzajemne zależności między nimi. Najprostsza metoda doboru wag, opisana w [5], polega na założeniu, że macierz  $W$  jest diagonalna i wyznaczeniu maksymalnych dopuszczalnych błędów dla każdej zmiennej stanu. Jako wartość danej wagi należy przyjąć kwadrat odwrotności owego błędu. Przykład takiego postępowania jest podany poniżej:

- zakłada się, że istnieje zmienna stanu  $x_1(t)$ , dla której dopuszczalny jest błąd  $\delta_{x_1} = 0.01$ ,
- wartość odpowiadającego jej współczynnika macierzy  $W$  -  $w_1$  - powinna wynosić  $\delta_{x_1}^{-2} = 100^2 = 10000$ ,
- wtedy przy wyliczaniu wskaźnika jakości pod całką znajdzie się wyrażenie  $\Delta x_1^2 w_1$ , które da wartość 1, gdy odchyłka między wartością zadaną  $x_{r1}$  a aktualną wartością  $x_1(t)$  będzie wynosiła  $\delta_{x_1}$ .

Ogólna zasada może więc być podsumowana następująco: największe współczynniki w macierzy  $W$  i najmniejsze w macierzy  $R$  przyporządkowuje się tym zmiennym stanu, których minimalizacja ma priorytet (za: [6]).



## 2. Architektura zaproponowanego rozwiązania

W niniejszej pracy została zaproponowana hybrydowa struktura aplikacji realizującej zadania wyliczania i aplikowania sterowania czasooptymalnego, jak i minimalnego w sensie liniowo-kwadratowego wskaźnika jakości. Taka jej architektura jest odbiciem faktycznej tendencji w automatyce ostatnich lat: aby skomplikowane zadania obliczeniowe zadawać nie tym elementom, które realizują bezpośrednie sterowanie, ale zlecać je innym urządzeniom o architekturze sprzętu odpowiedniejszej do radzenia sobie z takimi problemami.

Dokładnie takie podejście zostało również zaprezentowane w niniejszej pracy. Hybrydowa (z łaciny: *hybrida*: mieszaniec, krzyżówka) struktura polega na zastosowaniu dwóch poziomów: obliczeniowego i realizującego sterowanie bezpośrednie. Zostały one szerzej opisane w tym rozdziale.

### 2.1. Podział zadań między elementami oprogramowania

W związku z zaproponowaną w niniejszej pracy architekturą oprogramowania, opierającą się na dwóch poziomach, kluczowym aspektem tego opracowania jest odpowiedni podział zadań między tymi poziomami.

Pierwszy z nich to część „wyższego poziomu” - została tak określona ze względu na to, iż nie ma bezpośredniego wpływu na kontrolowany fizyczny obiekt, a zajmuje się tylko modelem matematycznym. Jej zadania są przedstawione na poniższej liście.

1. Symulacja modelu nieliniowego w pętli otwartej, aby zainicjować algorytm optymalizacji dynamicznej.
2. Wyznaczanie sterowania czasooptymalnego dla zadanych wartości początkowych i końcowych.
3. Symulacja modelu nieliniowego w pętli zamkniętej, aby zweryfikować wyliczone sterowanie czasooptymalne.
4. Linearyzacja modelu w punkcie pracy.
5. Wyznaczanie sterowania optymalnego w sensie liniowo-kwadratowego wskaźnika jakości (dla modelu linearyzowanego w punkcie pracy).

Dodatkowo przyjęto następujące założenia w związku z tymi zadaniami (podzielone ze względu na to, którego zagadnienia optymalizacji dotyczą):

1. Założenia związane ze sterowaniem czasooptymalnym:

- (a) Sterowanie czasooptymalne jest postaci „bang-bang” (wyjaśnienie w sekcji 1.3.2).
- (b) W związku z tym wystarczy wyznaczyć czasy przełączeń między konkretnymi sterowaniami maksymalnym i minimalnym oraz to, które z nich ma być aplikowane jako pierwsze.

2. Założenia związane ze sterowaniem liniowo-kwadratowym:

- (a) Punkt pracy (w którym jest dokonywana linearyzacja) jest stanem docelowym zagadnienia czasooptymalnego, jeśli ten jest punktem równowagi systemu (definicja dana w podrozdziale 1.2).
- (b) Jeśli stan docelowy zagadnienia czasooptymalnego nie jest stanem ustalonym rozważanego układu, stosuje się przybliżenie go do pewnego punktu równowagi i tam dokonuje się linearyzacji modelu matematycznego.
- (c) Sterowanie liniowo-kwadratowe jest wyliczane jako odchyłka od sterowania ustalonego dla punktu równowagi.

Na podstawie powyższych zadań oraz założeń sformułowano poniższą listę parametrów, które musi przyjmować część optymalizacyjna od użytkownika:

- parametry statyczne modelu matematycznego:
  - fizyczne rozmiary zbiorników (parametry  $a, b, c, R, w$  i  $h_{max}$ ),
  - opory wypływu ze zbiorników (parametry  $C_1, C_2$  oraz  $C_3$ ),
  - współczynniki wypływu ze zbiorników (parametry  $\alpha_1, \alpha_2$  i  $\alpha_3$ );
- wielkości związane z ograniczeniami w zagadnieniu czasooptymalnym:
  - maksymalne sterowanie ( $u_{max}$ ),
  - wartości początkowe poziomów wody w zbiornikach (parametry  $h_{10}, h_{20}$  oraz  $h_{30}$ ),
  - wartości końcowe poziomów wody w zbiornikach (parametry  $h_{1f}, h_{2f}$  i  $h_{3f}$ );
- wagi w zagadnieniu liniowo-kwadratowym:
  - wartość wagi sterowania  $R \in \mathbb{R}$ ,
  - wartości wag stanów dane jako macierz  $Q \in \mathbb{R}^3$ .

Drugi poziom zaproponowanego w niniejszej pracy rozwiązania to część „niższego poziomu” - jej nazwa jest związana z tym, że bezpośrednio wpływa na sterowany układ. Nie zawiera tak skomplikowanych narzędzi obliczeniowych, ale za to powinna cechować się dużą niezawodnością. Jej zadania są przedstawione na poniższej liście.



1. Aplikacja sterowania czasooptymalnego przez czas, który jest wyliczony przez część „wyższego poziomu” oraz w odpowiedniej postaci („bang-bang”).
2. Po upływie tego czasu aplikacja sterowania optymalnego w sensie liniowo-kwadratowego wskaźnika jakości aż do czasu otrzymania kolejnego sterowania czasooptymalnego.
3. Symulacja układu modelu matematycznego w celach testowych i weryfikacyjnych.

W związku z tym, że jest to element realizujący bezpośrednie sterowanie, użytkownik nie powinien mieć wpływu na jego funkcjonowanie. Cały interfejs między nim a programem sterującym powinien dotyczyć tylko i wyłącznie części „wyższego poziomu”.

## **2.2. Część obliczeniowa („wyższego poziomu”)**

Aby zapewnić jak najlepszą realizację zadań postawionych przed częścią obliczeniową, należało wybrać odpowiednie oprogramowanie stanowiące podstawę oprogramowania tego poziomu.

### **2.2.1. Wybór pakietu do optymalizacji dynamicznej**

### **2.2.2. Opis pakietu Modelica**

### **2.2.3. Opis systemu Tango Controls**

### **2.2.4. Architektura klasy urządzeń systemu Tango**

#### **2.2.4.1. Interfejs dla systemu Tango**

#### **2.2.4.2. Problem dostępności interfejsu**

### **2.2.5. Środowisko testowe części obliczeniowej**

## **2.3. Część realizująca sterowanie bezpośrednie („niższego poziomu”)**

### **2.3.1. Pakiet Simulink jako narzędzie realizujące sterowanie**

[8]

### **2.3.2. Komunikacja z urządzeniem wykonawczym i czujnikami**

## **2.4. Komunikacja między elementami oprogramowania**

– Część obliczeniowa wysyła:

1. wartości końcowe poziomów w zbiornikach (będące stanem docelowym w zadaniu czasooptymalnym oraz punktem linearyzacji modelu służącym do wyliczenia nastaw regulatora liniowo-kwadratowego),

2. dla regulatora czasooptymalnego:
    - (a) czasy przełączeń (założono postać sterowania typu „bang-bang”),
    - (b) wartość początkową sterowania czasooptymalnego,
    - (c) wartość „drugorzędną” tego sterowania (założono, że część „niższa” nie musi znać ograniczeń nałożonych na sterowanie),
    - (d) czas aplikacji sterowania czasooptymalnego (będący wartością wskaźnika jakości w tym zadaniu),
  3. dla regulatora liniowo-kwadratowego:
    - (a) wektor  $K$  współczynników regulatora,
    - (b) sterowanie ustalone, od którego są liczone odchyłki.
- Część sterowania bezpośredniego wysyła:
- aktualne poziomy wody w zbiornikach,
  - aktualną wartość sterowania.

### **3. Badania symulacyjne**

#### **3.1. Optimalizacja przy użyciu pakietu `JModelica.org`**

##### **3.1.1. Inicjalizacja optymalizacji dynamicznej**

##### **3.1.2. Dokładność wyznaczania rozwiązania**

#### **3.2. Symulacja i weryfikacja**

##### **3.2.1. Przy użyciu pakietu `JModelica.org`**

##### **3.2.2. Przy użyciu oprogramowania MATLAB/Simulink**



## **Zakończenie**

Zakończenie!

# Spis rysunków

1.1	Układ zbiorników z zaznaczonymi wymiarami . . . . .	10
-----	---	----

## Bibliografia

- [1] M. Athans i P. L. Falb. *Optimal Control: An Introduction to the Theory and its Applications*. Dostęp on-line: [https : / / archive . org / details / OptimalControlAnIntroductionToTheTheoryAndItsApplications](https://archive.org/details/OptimalControlAnIntroductionToTheTheoryAndItsApplications) Stan na: 15.08.2017 r. Nowy Jork, Stany Zjednoczone Ameryki: McGraw-Hill Book Company, 1966.
- [2] I. Vakilzadeh i Keshavarz A. A. „Bang-Bang Control of a Second-Order Non-Linear Stable Plant with Second-Order Nonlinearity”. W: *Kybernetika* 18.1 (1982). Dostęp on-line: [http : // www . kybernetika.cz/content/1982/1/66/paper.pdf](http://www.kybernetika.cz/content/1982/1/66/paper.pdf) Stan na: 15.08.2017 r.
- [3] K. Balachandran i D. Somasundaram. „Bang-Bang Control of a Second-Order Non-Linear Stable Plant with Fourth-Order Nonlinearity”. W: *Kybernetika* 19.2 (1983). Dostęp on-line: <http://www.kybernetika.cz/content/1983/2/158/paper.pdf> Stan na: 15.08.2017 r.
- [4] J. T. Betts. „Survey of numerical methods for trajectory optimization.” W: *Journal of Guidance, Control and Dynamics* 21.2 (1998), s. 193–207.
- [5] R. M. Murray. *Lecture notes for course CDS 110b: Introduction to Control Theory*. Dostęp on-line: <https://www.cds.caltech.edu/~murray/courses/cds110/wi06/lqr.pdf>. Stan na: 15.08.2017 r. Sty. 2006.
- [6] W. Mitkowski et al. *Teoria Sterowania. Materiały pomocnicze do ćwiczeń laboratoryjnych*. Kraków, Polska: Akademia Górniczo-Hutnicza im. S. Staszica, 2007.
- [7] Y. Ma. *Lecture notes for course ECE553: Optimum Control Systems*. Dostęp on-line: <http://yima.csl.illinois.edu/ECE553.html> Stan na: 15.08.2017 r. Champaign, Illinois, Stany Zjednoczone Ameryki: Uniwersytet Illinois w Urbana-Champaign, 2008.
- [8] T. Trawiński. „Sterowanie czasoptymalne systemem pozycjonowania głowic dysków twardych”. W: *Modelowanie Inżynierskie* 42 (2011), s. 433–440.
- [9] A. Korytowski. *Notatki z wykładów na przedmiot: Optymalizacja w Systemach Sterowania*. Kraków, Polska: Akademia Górniczo-Hutnicza im. S. Staszica, 2015.
- [10] M. Itik. „Optimal control of nonlinear systems with input constraints using linear time varying approximations”. W: *Nonlinear Analysis: Modelling and Control* 21.3 (2016). Dostęp on-line: [https://www.mii.lt/na/issues/NA\\_2103/NA2137.pdf](https://www.mii.lt/na/issues/NA_2103/NA2137.pdf) Stan na: 15.08.2017 r.

- [11] C. Evans. *An Introduction to Mathematical Optimal Control Theory. Lecture notes version 0.2.* Dostęp on-line: <https://math.berkeley.edu/~evans/control.course.pdf> Stan na: 15.08.2017 r. Berkeley, Kalifornia, Stany Zjednoczone Ameryki: Uniwersytet Kalifornijski.
- [12] *Multitank System - User's Manual.* Inteco sp. z o.o. Kraków, Polska.
- [13] B. Postlethwaite. *Introduction to Process Control - Online Course.* Dostęp on-line: <http://www.online-courses.vissim.us/Strathclyde/> Stan na: 15.08.2017 r. Uniwersytet Strathclyde.