NOI 模拟赛题解

cz_xuyixuan

July 16, 2020

1 黑白沙漠

首先考虑如何对确定的点 M ，找到存活到最后的建筑。

若建筑 i 在安全区中的时间是 b_i 秒，那么该建筑将存活到时刻 a_i+b_i 。因此，a_i+b_i 最大的建筑便是存活到最后的建筑。考虑安全区的收缩，画出折线 $(L,0),(M,R-L),(R,0)$ ，则 b_i 即为 x_i 处折线的高度。

分别考虑 M 左右两侧的 a_i+b_i 的最大值。

在 M 从左到右移动的过程中，考虑 M 左侧 a_i+b_i 的最大值。则可以发现，对于 M 左侧的两个建筑 i,j $(x_i<x_j<M)$ ，一旦 $a_i+b_i>a_j+b_j$ ，则 i 将始终优于 j ，从而可以将 j 删去。从右往左进行对称的考虑，我们可以将 $[L,R]$ 分为若干个区间，保证 M 在每个区间内时，M 左右两侧的 a_i+b_i 的最大值均不变。

不难证明，这样的区间的个数是 $O(N)$ 的。

那么，我们只需要分别处理每个区间即可，用二分或解二次方程的方式找到最大值在左边或是右边的分界点即可。标准程序实现的是二分的解法。同时，需要注意的是，实数二分可以考虑直接规定二分的次数，避免因为精度问题死循环。

时间复杂度 $O(NLogV)$ 。

2 荒野聚餐

考虑写出问题对应的线性规划。

令雄性鸟人的开销为 x_i ，雌性鸟人的开销为 y_i ，音乐设备的开销为 z 。

最小化

$$\sum_{i=1}^{N}x_i+\sum_{i=1}^{N}y_i+z$$

满足约束

$$x_i+y_i+\frac{z}{C}\geq a_{i,j}\ (1\leq i,j\leq N)$$

令 $z'=\frac{z}{C}$ ，则以上线性规划可以写为

最小化

$$\sum_{i=1}^{N} x_i + \sum_{i=1}^{N} y_i + z' \times C$$

满足约束

$$x_i + y_i + z' \geq a_{i,j}\ (1 \leq i, j \leq N)$$

考虑其对偶线性规划，即

最大化

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{i,j} x_{i,j}$$

满足约束

$$\sum_{j=1}^{N} x_{i,j} \leq 1\ (1 \leq i \leq N)$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_{i,j} \leq 1\ (1 \leq j \leq N)$$

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_{i,j} \leq C$$

可以发现，这恰好是二分图限制匹配总数为 C 的最权匹配问题。

直接采用 SPFA 费用流求解，时间复杂度 $O(N^4+Q)$ 。

若采用 Dijkstra 费用流求解，时间复杂度为 $O(N^3+Q)$ ，但常数较大。

标准程序采用的是 KM 算法。时间复杂度 $O(N^3+Q)$ 。

3 火星在住

问题可以转化为二分图最大权匹配的问题，由此，不难得出一个费用流的解法。

一个可行的解题思路是通过动态 DP 的方式维护最长增广路，但实际上最长增广路很难维护，笔者不能想到合适的维护方式，因此，我们需要考虑另外的做法。

注意到费用流的建模保证了如下性质：

令 $f(x)$ 表示对于树上任意区域，选择 x 条边时的最优解。

引理： $f(x)$ 在其定义域上是凸函数。

那么，考虑传统的 DP 方式，记 $dp_{i,0/1,j}$ 表示在节点 i 的子树中匹配 j 条边，并且节点 i 被 / 不被覆盖到时的最优解，可以利用凸包的闵可夫斯基和转移。

考虑对树进行树链剖分，记 S 表示重链顶部的节点构成的集合，则有

$$\sum_{x \in S} size_x \leq O(NLogN)$$

那么，在每条重链上分治合并，计算重链顶部的 DP 数组即可。

时间复杂度 $O(NLog^2N)$ 。

4 后记

题目的背景是一款日式 RPG 游戏，《Yume Nikki》。