第三题

$n \le 3000$

n^2 建图，当 i 能影响到 j 时则连一条 (i,j) 的边，缩点后求零入度点数量。

$n \le 300000$

考虑优化建图，树分治后处理出每个点的深度，排序，则每个点将向一个前缀区间连边，前缀合优化连边。

复杂度 $O(n\log_2(n))$ 。

第二题

很显然我们只关心子树里面合并出来的最大值和最小值。

我们用P_v 表示v节点合并出来的区间集合是什么。

- 区间集合里面不存在相互包含的区间。
- Pv 可以在$O\left((|P_{c_1}|+|P_{c_2}|+...+|P_{c_k}|)\cdot\left(2^k+\log n\right)\right)$ 的时间复杂度里求出来（$c_1,c_2,...,c_k$ ）是v 的儿子。
  - 将所有儿子区间集合打散进s数组并排序。
  - 设$dp_{i,S}$ 表示选择的区间左端点全部大于等于s_i, 已经选了S状态的儿子，最近的右端点是多少。
  - $dp_{i,S}=min(dp_{i+1,S},dp_{j,S-k},j)$
  - j 是与i 配对的点，虽然打散排序，但还是要记录配对的在哪个位置。k 是这一对点在儿子。如果S只有一个儿子，那么直接从j 转移.
  - 那么$P_v=\{(s_i,s_{dp_{i,C}})|1\le i\le m\}$
- 上面这样做的时间复杂度只有$O(n\log n\cdot(2^k+\log n))$ ，证明:
  - 首先：$|P_v|\le 2\cdot(\sum a_i-\max a_i)$。
  - a_i 是指v的子树中的叶子可以选择的权值数量和。
    - 显然，考虑只有两个儿子的情况，从小儿子角度来看，每一个权值x，都只能产生两个新的区间[a,x]或者[x,b]。
    - 多个儿子也是类似的，我们可以不考虑最大的那个儿子的数量。
  - 上面这个过程其实类似于启发式合并的过程，所以时间复杂度就是$O(n\log n\cdot(2^k+\log n))$

第一题

首先$\sum a_i$ 要是偶数。

将操作序列(x_i,y_i)列出来,首先x_i,y_i 顺序可以调换。可以让 i 在前面出现 $\lfloor a_i/2\rfloor$ 或者 $\lceil a_i/2\rceil$.

证明：把(x_i,y_i) 看成无向边，那么图的奇度数的点应该是偶数个，两两配对进行连边，那么所有点都是偶度数，跑一个欧拉回路，给边定向，再去掉新加的边，那么每个点入度和出度最多相差1.

2^k 枚举左边是取下整还是取上整，然后就是二分图连边了。