卡特兰数

考虑到出入栈顺序会形成一棵树。一个节点如果有多个儿子，那么访问也是有序的。

而f比g出栈早，当且仅当f在g子树中，或f所在子树在$lca(f,g)$的子树访问顺序先于g所在子树。

令$f_{l,r}$表示$[l,r]$中的合法出栈顺序方案数，则只要枚举最后一个出栈的，假设是k。那么，编号小于k的都比编号大于k的早出栈。一个限制在这个过程中不合法，当且仅当$f=k$或$f>k\ \&\&\ g<k$，当然，$l\le f$、$g\le r$。于是可以得到一个$O(n^3m)$的做法。

考虑优化。实际上在k固定的情况下，一个限制影响的是l,r形成的平面上的一个矩形。那么可以二维前缀和判断是否违背了限制。

总复杂度$O(n^3+nm)$。

莫队

记nxt_i表示在i之后第一个与a_i相同的位置。则对于一个左端点l，那么合法的右端点应该满足$r\le\min_{i=l}^{r}nxt_i$。

考虑到对于一个区间$[L,R]$，它的答案就是：

$$\sum_{l=L}^{R}\min(\min_{i=l}^{R}nxt_i,R+1)-L$$

显然的是，$\min_{i=l}^{R}nxt_i$是递增的。我们只要在线段树上维护后缀min即可。

总复杂度$O(nlog^2n)$。

数论

考虑到如果$k\perp ij$，则$(ij-k)\perp ij$，那么容易得到：

$$\sum_{k=1}^{ij}[gcd(k,ij)==1]k=\frac{1}{2}(ij\varphi(ij)+[ij==1])$$

令$d=gcd(i,j)$，显然成立的是：

$$\varphi(ij)=\frac{\varphi(i)\varphi(j)d}{\varphi(d)}$$

则原式转化为：

$$\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{i\varphi(i)j\varphi(j)d^{n+1}}{\varphi(d)}+1)$$

相当于是对质因子指数取min的卷积，做一次高维前缀和、一次高维前缀减就好了。

总复杂度$\sum_i\frac{n}{p_i}=O(nloglogn)$。

异或

考虑新增一行一列，变为$2^N * 2^M$的矩阵。第一行第一列都是0。对其进行前缀和，记为b。

容易估出答案的上界。令$c_{jk} = b_j xor b_k$，则:

$$ans \le \sum_{j,k} [c_{jk}\text{中}0\text{的个数}][c_{jk}\text{中}1\text{的个数}] \le \sum_{j,k} \frac{2^{2M}}{4} = \frac{2^N(2^N-1)2^{2M}}{8}$$

考虑构造：$b_{j,k} = popcount[j\&k]\ mod\ 2$，并证明它取到上界。

首先考虑$N=M$的情况，枚举$i \le j, k \le l$。由于异或不改变$popcount$的奇偶性，则$i=j$或者$k=l$时一定不会有贡献。我们放宽对i,j,k,l之间偏序的限制，并使最后的答案除以4。我们按位考虑，一个位是1有四种可能，是0有十二种可能。枚举1的个数，则:

$$4*ans = \sum_{i=0}^{N} [i\ mod\ 2] C_N^i 4^i 12^{N-i} = \frac{2^{4N}-2^{3N}}{2}$$

恰为上界。接下来令$N<M$，那么则相当于在k,l后面再补上$M-N$位。由于i,j在这些位上是0，发现它不影响前面矩阵的奇偶性。则:

$$ans = \frac{2^{4N}-2^{3N}}{8} * 4^{M-N}$$

恰为上界。于是，我们构造出b后，差分即可。

总复杂度$O(2^N * 2^M)$。