博弈论

ljfcnyali

2020 年 10 月 26 日

纳什均衡

纳什均衡

考虑一组双人博弈游戏，给定矩阵 $A_{i,j}, B_{i,j}$ 分别表示 Alice 选择 i 而 Bob 选择 j 时的收益，同时保证总收益为 0。

纳什均衡

考虑一组双人博弈游戏，给定矩阵 $A_{i,j}, B_{i,j}$ 分别表示 Alice 选择 i 而 Bob 选择 j 时的收益，同时保证总收益为 0。

而纳什均衡点指在 Alice 决定策略的情况下，Bob 不可以通过改变策略增加自己的期望收益。

纳什均衡

考虑一组双人博弈游戏，给定矩阵 $A_{i,j}, B_{i,j}$ 分别表示 Alice 选择 i 而 Bob 选择 j 时的收益，同时保证总收益为 0。

而纳什均衡点指在 Alice 决定策略的情况下，Bob 不可以通过改变策略增加自己的期望收益。

即假设一组向量 x, y 分别表示 Alice 和 Bob 的决策概率，那么对于任意 u, v 有 $u^T Ay \leq x^T Ay, x^T Bv \leq x^T By$。

纳什均衡

给出一个例子：Alice 与 Bob 分别选取一个硬币的正反面，我们规定：Alice 正 Bob 正收益 a，Alice 反 Bob 反收益 b，Alice 反 Bob 正收益 $-c$，否则收益 $-d$，求解纳什均衡策略。

纳什均衡

给出一个例子：Alice 与 Bob 分别选取一个硬币的正反面，我们规定：Alice 正 Bob 正收益 a，Alice 反 Bob 反收益 b，Alice 反 Bob 正收益 $-c$，否则收益 $-d$，求解纳什均衡策略。

考虑设 Alice 有 x 概率选择正，$1-x$ 概率选择反，由定义有 Bob 无论怎么选都不会对 Alice 期望收益造成影响，故：

纳什均衡

给出一个例子：Alice 与 Bob 分别选取一个硬币的正反面，我们规定：Alice 正 Bob 正收益 a，Alice 反 Bob 反收益 b，Alice 反 Bob 正收益 $-c$，否则收益 $-d$，求解纳什均衡策略。

考虑设 Alice 有 x 概率选择正，$1-x$ 概率选择反，由定义有 Bob 无论怎么选都不会对 Alice 期望收益造成影响，故：

$$xa-(1-x)c=-xd+(1-x)b$$

纳什均衡

给出一个例子：Alice 与 Bob 分别选取一个硬币的正反面，我们规定：Alice 正 Bob 正收益 a，Alice 反 Bob 反收益 b，Alice 反 Bob 正收益 $-c$，否则收益 $-d$，求解纳什均衡策略。

考虑设 Alice 有 x 概率选择正，$1-x$ 概率选择反，由定义有 Bob 无论怎么选都不会对 Alice 期望收益造成影响，故：

$$xa-(1-x)c=-xd+(1-x)b$$

求解出 x 即可。

纳什均衡

给出一个例子：Alice 与 Bob 分别选取一个硬币的正反面，我们规定：Alice 正 Bob 正收益 a，Alice 反 Bob 反收益 b，Alice 反 Bob 正收益 $-c$，否则收益 $-d$，求解纳什均衡策略。

考虑设 Alice 有 x 概率选择正，$1-x$ 概率选择反，由定义有 Bob 无论怎么选都不会对 Alice 期望收益造成影响，故：

$$xa-(1-x)c=-xd+(1-x)b$$

求解出 x 即可。

稍微解释一下，纳什均衡不是说要让我的收益最大化，而是说期望意义下收益最大。即双方的决策概率都是互相已知的。

纳什均衡

通常来说，我们使用线性规划来求解纳什均衡点。

纳什均衡

通常来说，我们使用线性规划来求解纳什均衡点。

由前文可知，我们只需要设 x_i 表示 Alice 选择 i 的概率，ans 表示最优策略下的期望收益，最大化 ans，限制如下：

纳什均衡

通常来说，我们使用线性规划来求解纳什均衡点。

由前文可知，我们只需要设 x_i 表示 Alice 选择 i 的概率，ans 表示最优策略下的期望收益，最大化 ans，限制如下：

$$\sum x_i \leq 1$$

$$\sum_j v_{i,j} x_i \geq ans$$

$$x_i \geq 0$$

纳什均衡

通常来说，我们使用线性规划来求解纳什均衡点。

由前文可知，我们只需要设 x_i 表示 Alice 选择 i 的概率，ans 表示最优策略下的期望收益，最大化 ans，限制如下：

$$\sum x_i \le 1$$

$$\sum_j v_{i,j} x_i \ge ans$$

$$x_i \ge 0$$

其它情况下特殊考虑即可，同时注意在最终答案下，$\sum_j v_{i,j} x_i = ans$ ，容易证明。

纳什均衡

通常来说，我们使用线性规划来求解纳什均衡点。

由前文可知，我们只需要设 x_i 表示 `Alice` 选择 i 的概率，ans 表示最优策略下的期望收益，最大化 ans，限制如下：

$$\sum x_i \le 1$$

$$\sum_j v_{i,j} x_i \ge ans$$

$$x_i \ge 0$$

其它情况下特殊考虑即可，同时注意在最终答案下，$\sum_j v_{i,j} x_i = ans$ ，容易证明。

当然还有很多其他方法求解纳什均衡，但是因为讲课人水平有限，故不再探究。

杂题选讲

来源不明的签到题

给定一个字符串 s，`Alice` 和 `Bob` 分别同时独立选择一个后缀，并且计算两个后缀的最长公共前缀。`Alice` 希望它尽量大，`Bob` 希望尽量小，询问期望长度。

$|s| \leq 10^5$

来源不明的签到题

很明显，来一手 SA 后问题转化为了选择的两个后缀 $[l, r]$ 的 $min_{i=l}^{r}\{height_i\}$ 的期望。

来源不明的签到题

很明显，来一手 SA 后问题转化为了选择的两个后缀 $[l, r]$ 的 $min_{i=l}^{r}\{height_i\}$ 的期望。

考虑按照最小值分治，假设当前只处理后缀在区间 $[l, r]$ 内的期望，val_l 表示左区间答案，val_r 表示右区间答案，Min 表示 $height$ 最小值，x 表示 Alice 选择左区间的概率，列出方程有：

来源不明的签到题

很明显，来一手 SA 后问题转化为了选择的两个后缀 $[l, r]$ 的 $min_{i=l}^{r}\{height_i\}$ 的期望。

考虑按照最小值分治，假设当前只处理后缀在区间 $[l, r]$ 内的期望，val_l 表示左区间答案，val_r 表示右区间答案，Min 表示 $height$ 最小值，x 表示 Alice 选择左区间的概率，列出方程有：

$$x \times val_l + (1 - x) \times Min = (1 - x) \times val_r + x \times Min$$

来源不明的签到题

很明显，来一手 SA 后问题转化为了选择的两个后缀 $[l,r]$ 的 $min_{i=l}^{r}\{height_i\}$ 的期望。

考虑按照最小值分治，假设当前只处理后缀在区间 $[l,r]$ 内的期望，val_l 表示左区间答案，val_r 表示右区间答案，Min 表示 $height$ 最小值，x 表示 Alice 选择左区间的概率，列出方程有：

$$x \times val_l + (1-x) \times Min = (1-x) \times val_r + x \times Min$$

求解出 x 后再算出等式取值，然后就做完了

有一个 n 行无限列的棋盘，每一行都有三个棋子，从左到右依次为蓝白红，位置为 b_i, w_i, r_i 。现在有 Alice 和 Bob 依次操作，每次 Alice 可以将某一行的蓝或蓝白棋同时右移 k ，而 Bob 可以将某一行的红或白红棋同时左移 k。

需要满足 k 是质数或为两个质数的乘积，且每一行棋子相对顺序不变，求先手是否必胜。

$n \le 10^5, -10^5 \le b_i, w_i, r_i \le 10^5$

有一个 n 行无限列的棋盘，每一行都有三个棋子，从左到右依次为蓝白红，位置为 b_i, w_i, r_i 。现在有 Alice 和 Bob 依次操作，每次 Alice 可以将某一行的蓝或蓝白棋同时右移 k ，而 Bob 可以将某一行的红或白红棋同时左移 k。

需要满足 k 是质数或为两个质数的乘积，且每一行棋子相对顺序不变，求先手是否必胜。

$n \le 10^5, -10^5 \le b_i, w_i, r_i \le 10^5$

Hint: 这题是不平等博弈吗？

首先考虑一行的情况，因为列数无穷，所以只需要考虑棋子的相对顺序。

首先考虑一行的情况，因为列数无穷，所以只需要考虑棋子的相对顺序。

而我们发现，Alice 的操作本质上是将两个相对位置中缩小其中一个，Bob 同理，故两人操作本质相同，该题为平等博弈。

CF1091H

首先考虑一行的情况，因为列数无穷，所以只需要考虑棋子的相对顺序。

而我们发现，`Alice` 的操作本质上是将两个相对位置中缩小其中一个，`Bob` 同理，故两人操作本质相同，该题为平等博弈。

CF1091H

首先考虑一行的情况，因为列数无穷，所以只需要考虑棋子的相对顺序。

而我们发现，`Alice` 的操作本质上是将两个相对位置中缩小其中一个，`Bob` 同理，故两人操作本质相同，该题为平等博弈。

最后各行因为互不干扰，异或判断答案即可。

Thanks