考试

Solution

Shinetism & thkkk & 514flowey

2020 年 5 月 24 日

a

($\boldsymbol{a.cpp/c/pas}$)

题目背景

话说出题人某天在和室友们玩三国杀。

然后看到了周泰的不屈牌堆了很多。

这个题目就诞生了。

解法

整体来说这是一道高考难度的概率题，非常适合放在第一题。

设最终桌面上的牌数为随机变量 X。

则有 $P(X=k)=1\times\frac{n-1}{n}\times\frac{n-2}{n}\times\cdots\times\frac{n-(k-2)}{n}\times\frac{k-1}{n}$

根据定义，有：

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{(n-1)!\times k(k-1)}{n^{k-1}(n-k+1)!}$$

每次 $O(n)$ 计算即可。

时间复杂度 $O(\sum n)$。

b

($\boldsymbol{b.cpp/c/pas}$)

解法

设从 1 到 i 路径上的权值和为 $dis[i]$，1 到 i 的路径长 (步数) 为 $dep[i]$。

7 ∼ 9 号测试点

相当于对于每一个节点 x，找出其子树中 $dis[i]$ 最大的 i 中 $dep[i]$ 最小的那个，直接求即可。

10 ∼ 12 号测试点

将所有询问按 k 排序，将所有点按 dis 排序，用两个指针扫一遍，扫的过程中记下满足 $dis[i] \geq k$ 的 i 中 $dep[i]$ 的最小值即可

之后的测试点

原问题可以转化为在 x 的子树中找一个满足 $dis[i]-dis[x] \geq k$ 且 $dep[i]$ 尽量小的 i，答案为 $dep[i]-dep[x]$。令 $K = dis[x] + k$, 则需 $dis[i] \geq K$。由于子树在 dfs 序上是连续的一段，考虑将 dfs 序求出来，然后离线处理，对 dfs 序分治，将每个询问拆到 $O(\log n)$ 个区间上分开算，分治处理每个区间时，将区间内的点按 dis 排序，并求 dep 的后缀 min，对于挂在上面的询问就可以二分求解，这样的复杂度是 $O(n \log n + q \log^2 n)$(要归并地排序)。既然离线处理了，就让问题变得更方便一点吧。将询问按 K 值排序，处理每个区间时用两个指针分别在区间元素及询问元素上扫即可做到 $O(n \log n + q \log n)$。

C

(***c.cpp/c/pas***)

16 分做法

枚举哪条边被分解了。

32 分做法

设 $dp[i][j]$ 代表以 i 为根的子树中，i 所在连通块大小为 j 时的答案。暴力合并转移复杂度 $O(n^3)$

48 分做法

与 32 分做法相似，但是在转移的过程中 j 只枚举 1 到以 i 为根的子树大小。

这时候我们发现合并转移时每个点对在它们的 LCA 处造成一次运算。复杂度 $O(n)$。

72 分做法

我觉得肯定有这样的做法，NTT 啊什么的。但我不会。

100 分做法

考虑联通块之积的组合意义。相当于把树划分成几个连通块，每个连通块里选一个点的方案数。那么，记 $g[i]$ 代表以 i 为根，i 所在连通块还没有被选择的点的方案数，$f[i]$ 代表以 i 为根，i 所在的连通块已经选了一个点的方案数。复杂度 $O(n)$。