

本人第一次出题，缺乏经验，请多多包涵。  
今天的题应该是这几天来最简单的了。  
对于 T3 是道模板题，我出题之前并不知道。(出题人太菜了)

## 序列 (sequence)

这是今天的签到题。  
( CF1138B 的加强版，原题数据范围  $n \leq 5000$  。 )

### subtask1:

直接枚举前半部分的所有可能情况，复杂度  $O(2^{\frac{n}{2}})$ 。

### subtask1-2:

由于 A 只由 (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) 组成。  
设这样的二元组的个数为  $n_1, n_2, n_3, n_4$ 。  
枚举构造的序列前半 (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1) 的个数 a, b, c, d 有：

$$\begin{aligned}a + b + c + d &= \frac{n}{2} \\c + d &= n_4 - d + n_2 - b\end{aligned}$$

有四个未知数，两个方程，枚举两个未知数，确定另外两个，再 check 是否满足题意即可。  
时间复杂度  $O(n^2)$ 。

### subtask1-3:

令  $sum = \sum_{i=1}^n y_i$ ，那么有：

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} x_i &= sum - \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} y_i \\ \sum_{i=1}^{\frac{n}{2}} (x_i + y_i) &= sum\end{aligned}$$

考虑  $x_i + y_i$  的取值，显然只有 0, 1, 2 三种可能，设  $1, \dots, \frac{n}{2}$  这样的  $i$  的个数分别为  $cnt0, cnt1, cnt2$ 。

那么有：

$$0 \times cnt0 + 1 \times cnt1 + 2 \times cnt2 = sum$$

$$cnt0 + cnt1 + cnt2 = \frac{n}{2}$$

这是一个三元一次方程，由于都是整数，所以枚举其中一个，就可以确定其它两个，只要满足构造的序列满足这两个方程即可，复杂度  $O(n)$ 。

## 箱子 (case)

出题人过于良心，出了道裸的数据结构优化 dp。

### subtask1

$n \leq 10$ ，随便你怎么搞。

### subtask1-2

设状态  $F[i][x]$  表示前  $i$  个物品用  $x$  个箱子装起来的最小费用。

$$F[i][x] = \min_{1 \leq j \leq i, \sum_{k=j}^i w_k \leq W} \{F[j-1][x-1] + x \cdot (\sum_{k=j}^i w_k) + \max_{j \leq l \leq i} \{h_l\}\}$$

时间复杂度  $O(n^3)$ 。

### subtask1-3

设  $F[i]$  为前  $i$  个物品分到若干个箱子中的最小费用。

$$F[i] = \min_{1 \leq j \leq i, \sum_{k=j}^i w_k \leq W} \{F[j-1] + \max_{j \leq l \leq i} \{h_l\} + (\sum_{l=j}^i w_l)\}$$

$\sum_{l=j}^i w_l$  是用这个箱子对后面费用的贡献。

时间复杂度  $O(n^2)$

### subtask1-4

还是上面的  $dp$ ，直接写个区间  $\text{checkmax}$  线段树维护决策集合。时间复杂度  $O(n \log(n))$

## 旅行 (travel)

Uva 上搬的题。

考试的时候听说是模板题，然而我事先并不知道  
当时无意看到这题觉得想法挺妙的，所以出了这个题。

### subtask1

暴搜。

### subtask2

对于无向图来说，每一个点的度数为偶数，则存在欧拉回路。

对于有向图来说，每一个点的入度等于出度，则存在欧拉回路。

### subtask1-3

考虑将混合图变成有向图来处理。

对于原图  $G$  中的一条无向边  $u-v$ ，先在图  $G'$  中加一条有向边  $u \rightarrow v$  ( $v \rightarrow u$  也行)。

如果这时已经满足每点的出度  $out[i]$  等于入度  $in[i]$ ，那么就是 YES。

否则若  $out[i] > in[i]$  考虑将  $G'$  中从  $i$  出发的有向边  $i \rightarrow v$  反向，那么  $out[i]$  会减 1， $in[v]$  会加 1。

所以对于一条边  $i \rightarrow v$  的反向操作，可以看做是水流从  $i$  流向了  $v$ ，于是我们只要保证整个图的水流分配平衡即可。

对于  $G$  中的无向边  $u-v$ ， $G'$  中连一条  $u \rightarrow v$ ，在  $G''$  上连一条  $u \rightarrow v$  流量为 1 的边，根据  $G'$  算出  $out[i], in[i]$

对于每一个点  $i$  若  $out[i] > in[i]$  那么从源点向  $i$  连一条流量为  $\frac{out[i] - in[i]}{2}$  的边，否则向汇点连一条流量为  $\frac{in[i] - out[i]}{2}$  的边。

跑最大流，如果满流，就说明度数 (水流) 分配平衡，有欧拉回路，否则没有。

注意若  $|out[i] - in[i]|$  为奇数，则必定无解。