杂题选讲

slz

厦门双十中学

2020 年 11 月 4 日

Dwu-Double-row

有一个2行n列的矩阵，每个位置有一个整数。
定义一次操作为交换某一列上的两个数字，求最小的交换次数使得每一行上的数字互不相同。
数据保证有解，$n \leq 10^5$。

BZOJ1539 Dwu-Double-row

显然在矩阵中相同的数字最多出现两次。

BZOJ1539 Dwu-Double-row

显然在矩阵中相同的数字最多出现两次。
不妨设有n个点，每个点的取值为$0/1$。
第i个点的取值为0表示第i列的两个数不交换，取值为1表示交换。

BZOJ1539 Dwu-Double-row

显然在矩阵中相同的数字最多出现两次。
不妨设有n个点，每个点的取值为$0/1$。
第i个点的取值为0表示第i列的两个数不交换，取值为1表示交换。
如果对于i,j，满足$a_{1,i}=a_{1,j}$或$a_{2,i}=a_{2,j}$，那么i,j中有且仅有一列需要交换。
这相当于i,j两个点的取值不同。

BZOJ1539 Dwu-Double-row

显然在矩阵中相同的数字最多出现两次。
不妨设有n个点，每个点的取值为$0/1$。
第i个点的取值为0表示第i列的两个数不交换，取值为1表示交换。
如果对于i,j，满足$a_{1,i}=a_{1,j}$或$a_{2,i}=a_{2,j}$，那么i,j中有且仅有一列需要交换。
这相当于i,j两个点的取值不同。
那么对于这样的i,j，就把i号点和j号点连一条边。最后可以得到一张二分图。

BZOJ1539 Dwu-Double-row

显然在矩阵中相同的数字最多出现两次。
不妨设有n个点，每个点的取值为$0/1$。
第i个点的取值为0表示第i列的两个数不交换，取值为1表示交换。
如果对于i,j，满足$a_{1,i}=a_{1,j}$或$a_{2,i}=a_{2,j}$，那么i,j中有且仅有一列需要交换。
这相当于i,j两个点的取值不同。
那么对于这样的i,j，就把i号点和j号点连一条边。最后可以得到一张二分图。
对于每一个连通块，二分图染色，让少的那部分取1即可。

Divide Points

平面上有n个点，第i个点的坐标为(x_i, y_i)。
现在需要把n个点划分成两个集合A, B，集合内的点用用黄色笔连边(A与A，B与B)，两个集合之间用蓝色笔连边(A与B)。
求一组构造方案，使得不存在一条黄色线段和一条蓝色线段长度相等。
$n \leq 10^3$

CF1270E Divide Points

首先把每个坐标的横坐标和纵坐标对2取余，那么所有点可以分成4类。
然后进行分讨：

CF1270E Divide Points

首先把每个坐标的横坐标和纵坐标对2取余，那么所有点可以分成4类。
然后进行分讨：
1.如果所有点都属于同一类，那么把横纵坐标全部除以2，再进行分讨。

CF1270E Divide Points

首先把每个坐标的横坐标和纵坐标对2取余，那么所有点可以分成4类。
然后进行分讨：
1.如果所有点都属于同一类，那么把横纵坐标全部除以2，再进行分讨。
2.如果只有两类，那么直接输出即可。
根据公式$dist^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$，每一类内部的边对4取余都等于0，跨组的边对4取余都不为0。

CF1270E Divide Points

首先把每个坐标的横坐标和纵坐标对2取余，那么所有点可以分成4类。
然后进行分讨：
1.如果所有点都属于同一类，那么把横纵坐标全部除以2，再进行分讨。
2.如果只有两类，那么直接输出即可。
根据公式$dist^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2$，每一类内部的边对4取余都等于0，跨组的边对4取余都不为0。
3.如果有三类以上，那么$(0,0),(1,1)$分一组，$(0,1),(1,0)$分一组即可。

行列式

给定$n \times n$的矩阵和Q次操作。
每次操作为修改某一个点的数值。
求每次修改后的行列式（对998244353取模）。
保证每时每刻行列式的值不为0，$n, Q \le 500$。

行列式

记原矩阵为A，高斯消元后得到的矩阵为B。

行列式

记原矩阵为A，高斯消元后得到的矩阵为B。
在高斯消元的过程中，可以顺便求出一个矩阵I，满足

$$B_i = \sum_{i=1}^{n} I_{i,j} \cdot A_j$$

换句话说，I矩阵表示当前矩阵是由原矩阵的每行做什么变化得来的。

行列式

记原矩阵为A，高斯消元后得到的矩阵为B。
在高斯消元的过程中，可以顺便求出一个矩阵I，满足

$$B_i = \sum_{i=1}^{n} I_{i,j} \cdot A_j$$

换句话说，I矩阵表示当前矩阵是由原矩阵的每行做什么变化得来的。
那么每一次对原矩阵的修改相当于对当前矩阵某一列的修改。

行列式

记原矩阵为A，高斯消元后得到的矩阵为B。
在高斯消元的过程中，可以顺便求出一个矩阵I，满足

$$B_i = \sum_{i=1}^{n} I_{i,j} \cdot A_j$$

换句话说，I矩阵表示当前矩阵是由原矩阵的每行做什么变化得来的。
那么每一次对原矩阵的修改相当于对当前矩阵某一列的修改。
观察修改后的矩阵，除了某一列外，其他的数被消成了倒三角。
现在只需要把那一列多出的数消去即可。
时间复杂度$O(n^3 + Qn^2)$。

归并

初始给出长度为n的排列a，给定Q次操作。
操作分两类：
1.修改操作：给定l, r，把区间$[1, r]$替换成对区间$[1, l]$和$[l+1, r]$归并合并的结果。
2.询问操作：查询第x个数。
对区间进行归并合并指把两个区间的数按顺序分别压入两个队列中，每次将两个队列队头元素较小的取出。
$n, Q \leq 10^5$。

归并

考虑一种分组方式，对于一个位置i，贪心的往后找到第一个j满足$a_i < a_j$，然后把$[i, j-1]$分成一组。(不妨设a_{n+1}无穷大)

归并

考虑一种分组方式，对于一个位置i，贪心的往后找到第一个j满足$a_i < a_j$，然后把$[i, j-1]$分成一组。(不妨设a_{n+1}无穷大)
对于一段序列$[l, r]$，可以先把l作为开头，找到b_1，并把$[l, b_1 - 1]$分成一组，然后以b_1作为开头，然后找到b_2，直到找到的数超过r。
上述操作可以把$[l, r]$分成若干组，我们称这样的操作为区间的分裂。

归并

考虑一种分组方式，对于一个位置i，贪心的往后找到第一个j满足$a_i < a_j$，然后把$[i, j-1]$分成一组。(不妨设a_{n+1}无穷大)
对于一段序列$[l, r]$，可以先把l作为开头，找到b_1，并把$[l, b_1 - 1]$分成一组，然后以b_1作为开头，然后找到b_2，直到找到的数超过r。
上述操作可以把$[l, r]$分成若干组，我们称这样的操作为区间的分裂。
初始时可以先对区间$[1, n]$进行一次分裂，把序列分成若干组。

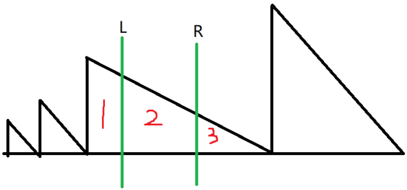
归并

考虑归并排序的过程，对于一组数字，如果它们在同一段区间中，如果那一组的开头数字被取出，由于其他数字都小于开头数字，那么接下来一定直接取组中的其他数字，也就是说组内的顺序是不会被打乱的。

归并

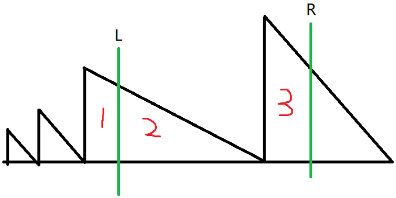
考虑归并排序的过程，对于一组数字，如果它们在同一段区间中，如果那一组的开头数字被取出，由于其他数字都小于开头数字，那么接下来一定直接取组中的其他数字，也就是说组内的顺序是不会被打乱的。
知道上述结论，只需要对修改操作进行分讨就好了。

归并



如果修改操作的L, R在同一组中，那么图中2号区间就会进行一次分裂，分裂成若干组。
而1号区间及以前的每一组内是不会有变化的。
那么需要把新分出的区间插入到以前的排好序的区间中。
而区间1和3会合并。

归并



如果修改操作的L, R不在同一组中，那么图中2号区间就会进行一次分裂，分裂成若干组。
而1号区间及以前和3号区间及以后的每一组内是不会有变化的。
那么需要把新分出的区间插入到以前的排好序的区间中。

归并

综上所述，只需要维护一个数据结构，能支持查找下一个大于某个数的值和区间移动。

归并

综上所述，只需要维护一个数据结构，能支持查找下一个大于某个数的值和区间移动。
前者不需要数据结构，只需要预处理。
后者只需要维护一棵平衡树。

圈

给定一张n个点，m条边的无向图，这张图满足以下性质：
1.对于所有$(i, i+1)$都存在边，$(1, n)$也存在边。（因此$m \geq n$）
2.每个点度数至少为3。
定义图中的一个环为一个封闭的，无重复的边集（端点可以重复）。
定义无向图的双圈覆盖为若干个环，使得图中每一条边恰好出现在两个环中。
求这张图的双圈覆盖（保证有解）。
$4 \leq n \leq 50, n \leq m \leq 500$

圈

首先可以把原图G变成所有度数都为3图G'。

圈

首先可以把原图G变成所有度数都为3图G'。

设所有$(i, i+1)$和$(1, n)$为一类边，其他的为二类边。

考虑点x，与之用二类边相连的点有$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m$，用一类边相连点有$l, r$。

那么可以把x拆成$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$，然后让$(l, x_1)$连边，让$(x_m, r)$连边，在让$(x_i, x_{i+1})$连边，让$(x_i, y_i)$连边。

圈

首先可以把原图G变成所有度数都为3图G'。
设所有$(i, i+1)$和$(1, n)$为一类边，其他的为二类边。
考虑点x，与之用二类边相连的点有$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_m$，用一类边相连点有$l, r$。
那么可以把x拆成$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$，然后让$(l, x_1)$连边，让$(x_m, r)$连边，在让$(x_i, x_{i+1})$连边，让$(x_i, y_i)$连边。
如果能求出新图的双圈覆盖，然后对于每个环中连续的同一种的点都缩成一个点，就是最终答案。

圈

不难发现新图一定有偶数个点。
那么只需要三种环就可以构造出原图的双圈覆盖。

不难发现新图一定有偶数个点。
那么只需要三种环就可以构造出原图的双圈覆盖。
1. 所有的一类边。
2. 一类边中的$(2i, 2i+1)$和所有的二类边。
3. 一类边中的$(2i, 2i-1)$和所有的二类边。

谢谢大家。