第一部分（$type = 0$）

不难发现这题是一个假期望，只需要求出所有高度和除以合法方案数即可。

可以使用 DP 进行路径统计，但是这样是 $O(n^3)$，似乎没有分。

求恰好高度为 h 有点困难，那就求高度 $\leq h$，这样相邻两项的差分就是高度为 h 的答案了。

枚举最高高度不超过 h，再枚举终点，这样就变成一个经典的路径统计问题了，时间复杂度 $O(n^2)$。

把式子写出来，所有高度小等于 h 的恰好有 x 个向下的路径个数为 $C_n^x - C_n^{n-h-x-1}$。那么所有高度小等于 h 的路径为：

$$\sum_{x=\lceil\frac{n-h}{2}\rceil}^{n}\binom{n}{x}-\binom{n}{h+x+1}$$

其中当 $b > a$ 时 $C_a^b = 0$。

所有高度恰好为 h 的路径为：

$$\sum_{x=\lceil\frac{n-h}{2}\rceil}^{n}\left(\binom{n}{x}-\binom{n}{h+x+1}\right)-\sum_{\left(x=\lceil\frac{n-h+1}{2}\rceil\right)}^{n}\left(\binom{n}{x}-\binom{n}{h+x}\right)$$

$$=\begin{cases}\left(\begin{matrix}n\\ \lceil\frac{n-h}{2}\rceil\end{matrix}\right), & \left\lceil\frac{n-h}{2}\right\rceil \neq \left\lceil\frac{n-h+1}{2}\right\rceil \\ \left(\begin{matrix}n\\ \lceil\frac{n+h}{2}\rceil\end{matrix}\right), & \left\lceil\frac{n-h}{2}\right\rceil = \left\lceil\frac{n-h+1}{2}\right\rceil\end{cases}$$

又因为组合数具有对称性，所以最后高度为 h 的路径数从 n 到 0 可以表示为：

$$\binom{n}{0},\binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{1},\binom{n}{2},\binom{n}{2},\dots$$

~~不过这好像可以通过打表找规律得出。~~

这样可以直接做到 $O(n)$ 的复杂度。式子如下：

$$\sum_{i=0}^{n-k}(n-i)\cdot\left(\begin{matrix}n\\ \lfloor\frac{i}{2}\rfloor\end{matrix}\right)$$

$k = 0$ 的部分可以通过推式子或者找规律得到答案。

对于多组询问，首先先把上述式子的边角处理好，使得组合数一定是两个两个算。

然后就变成一个形式如下的式子：

$$\sum_{i=0}^{m}(2n-1-4i)\cdot\binom{n}{i}$$

前面那部分为 $(2n-1)\sum_{i=0}^{m}\binom{n}{i}$，后面那部分为$-4\sum_{i=0}^{m} i\cdot\binom{n}{i} = -4n\sum_{i=0}^{m}\binom{n-1}{i-1}$

设 $F(n,m) = \sum_{i=0}^{m} C_n^i$，现在的问题为求 $3T$ 个 $F(x,y)$（包含合法方案数）

不难发现：$F(n,m)$ 可以 O(1) 变成 $F(n\pm 1, m\pm 1)$，那么只需要写一个莫队就解决了。

时间复杂度：$O(T\sqrt{n})$。

第二部分（$type = 1$）

这一部分还是一个假期望。

仍然转换为求高度 $\le h$ 的方案数再差分。如果确定了 h ，那么可以使用 DP 进行路径统计，时间复杂度 $O(n^3)$ 。

不难发现，由于终点确定，确定了高度 h 后的路径计数相当于求不经过 $y = -1$ 和 $y = h + 1$ 两条直线的起点为 $(0,0)$ ，终点为 $(n, 0)$ 的路径数。这是一个经典问题，可以使用容斥解决。因此时间复杂度变成了 $O(n \ln n)$ 。

令 $m = \frac{n}{2}$，试图将高度为 $\le h$ 的式子写出来，式子如下：

$$\binom{2m}{m} - \binom{2m}{m+1} - \binom{2m}{m+h+1} + 2\binom{2m}{m+h+2} - \binom{2m}{m+h+3} - \binom{2m}{m+2h+3} + \cdots$$

通过观察，把 $\binom{2m}{m} - \binom{2m}{m+1}$ 忽略，那么所有能被表示成 $m + k(h+2)$ 是数 x（其中 k 为正整数），都会出现 $2\binom{2m}{x} - \binom{2m}{x-1} - \binom{2m}{x+1}$ 。

先定一个枚举高度的上界 mx ， 显然 $h \in [0, mx]$ ，那么 $mx \ge m$ 。

如果即 $\le i$ 的答案为 g_i，那么最终答案为：

$$ans = \sum_{i=1}^{mx} i(g_i - g_{i-1}) = mx \cdot g_{mx} - \sum_{i=0}^{mx-1} g_i$$

不难发现，$g_{mx} = \binom{2m}{m} - \binom{2m}{m+1}$，所以可以把 $mx \cdot g_{mx}$ 和 g_i 中的 $\binom{2m}{m} - \binom{2m}{m+1}$ 抵消。

不难发现，对于所有的 $\binom{2m}{m+x}$，在满足 $(i+2)|x$ 的 i 中都会被计算 2 次，所有 $\binom{2m}{m+x+1}$ 和 $\binom{2m}{m+x-1}$ 在所有的 $(i+2)|x$ 的 i 中都会被计算 -1 次，这些相当于算 x 的因数个数 $d(x)$ 。

由于 $d(x)$ 是积性函数，所以可以用线性筛计算。

时间复杂度：$O(Tn)$ 。

后记

第二部分输入只有一个数，在算期望值会先算一个方案数的高度和。那么就打个表吧！

$$n = 2 \to ans = 1$$

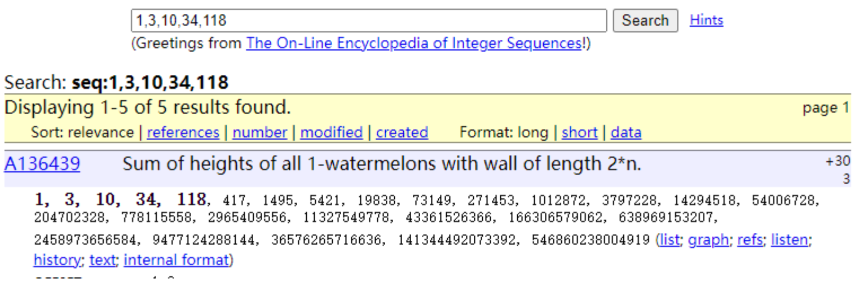
$$n = 4 \to ans = 3$$

$$n = 6 \to ans = 10$$

$$n = 8 \to ans = 34$$

$$n = 10 \to ans = 118$$

……


1,3,10,34,118 Search Hints
(Greetings from The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences!)

Search: **seq:1,3,10,34,118**

Displaying 1-5 of 5 results found. page 1

Sort: relevance | references | number | modified | created Format: long | short | data

A136439 Sum of heights of all 1-watermelons with wall of length 2*n. +30 3

1, 3, 10, 34, 118, 417, 1495, 5421, 19838, 73149, 271453, 1012872, 3797228, 14294518, 54006728, 204702328, 778115558, 2965409556, 11327549778, 43361526366, 166306579062, 638969153207, 2458973656584, 9477124288144, 36576265716636, 141344492073392, 546860238004919 (list; graph; refs; listen; history; text; internal format)

相信大家都是诚实守信的 OIer，不会在测试时上 OEIS 的。