

Solution

huangkui

2019 年 8 月 1 日

1 物理

1.1 题意

给你一张 n 个点, m 条边的无向图, 边权为 2^k , 求 S 到 T 的最短路

1.2 题解

先考虑 k 互不相等的情况:

每经过一条边, dis 只会增加 2^k . 当 k 互不相等时, 不会发生进位, 于是可以在做最短路时, 用主席树来储存答案, 每次把一个 0 修改成 1 即可. 至于比较大小, 可以通过 hash 来找出第一个不相同的位置

没有 k 互不相等的条件时, 就有可能发生进位. 当发生进位时, 暴力地找出连续的一段 1 变成 0, 然后将一个 0 变成 1 即可

复杂度证明:

设势能函数为当前状态下 1 的个数. 一次操作要么最多增加 1 个 1, 要么消耗当前的若干个 1, 所以总复杂度是关于操作次数线性的

线段树模拟即可, 时间复杂度 $O(n \log^2 n)$

2 化学

2.1 题意

给一棵 n 个点的树, 有 m 次询问. 每次询问给出 x , 求一个最小的 k 使得把树上 k 条边断掉然后重新连 k 条边形成一棵新的树之后, 树的重心为 x

2.2 题解

重心的一个性质:

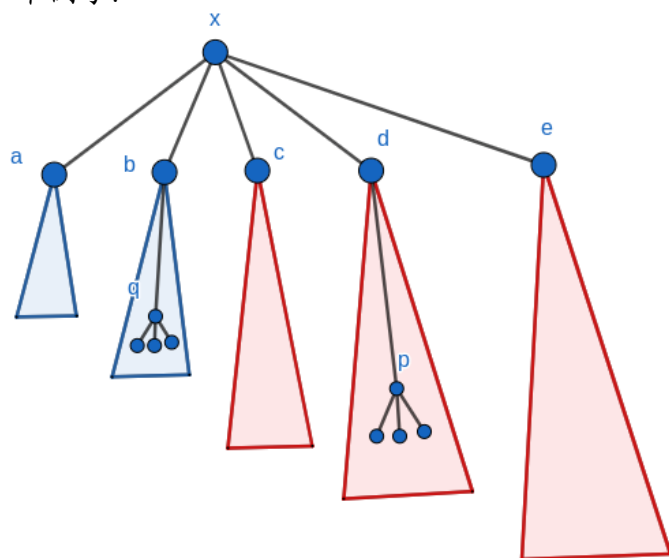
- 以 x 为根时每棵子树的 $size$ 都 $\leq \frac{n}{2}$, 是 x 为重心的充要条件

充分性: 走到 x 的某一个儿子节点, 那么 x 所在子树的 $size$ 就 $> \frac{n}{2}$

首先, 重心的答案为 0, 然后考虑求出以重心为根时, 至少要删掉多少个儿子才能使得剩下的节点数 $\leq \frac{n}{2}$

那么答案要么是这个值, 要么是它减一

举个例子:



假设至少需要删掉 c, d, e 三个儿子才能使得剩下节点数 $\leq \frac{n}{2}$

- 考虑一个在 d 子树中的点 p 的答案, 首先至少要删掉 c, e 两棵子树, 然后通过计算剩下部分 (全集去掉 p, c, e 的子树) 的大小是否 $\leq \frac{n}{2}$ 来判断是否需要 +1
- 考虑一个在 b 子树中的点 q 的答案, 首先至少要删掉 d, e 两棵子树, 然后通过计算剩下部分 (全集去掉 q, d, e 的子树) 的大小是否 $\leq \frac{n}{2}$ 来判断是否需要 +1

模拟即可, 时间复杂度 $O(n)$

3 生物

3.1 写在前面

<https://loj.ac/article/567>

官方认证, 思维难度提高 +, 实现难度提高

3.2 题意

你有一个长为 n 的序列, 每个位置是 $*$ 或者 $+$, $*$ 表示让变量加上自身, $+$ 表示让变量 $+1$

你要选出它的一个子序列, 使得一个初始为 0 的变量在对子序列中的字符依次执行对应操作后对 2^k 取模所得结果尽可能大. 求出最大可能的结果.

3.3 题解

不难发现, 在最终的答案序列中, 每个 $+$ 对答案的贡献为 2^d (d 表示这个 $+$ 后面的 $*$ 数量). 贪心地考虑, 如果能想办法使得 $+$ 后面的 $*$ 更多, 那么答案会更优.

注意到 $*+++$ 与 $+*+$ 是等价的, 我们只需要不断进行这样的变换操作, 即能把原串变成一个新串, 满足相邻两个 $*$ 之间没有两个以上的 $+$

记 $a[i]$ 表示有多少个 $+$ 号满足它后面有 i 个 $*$, 从答案的高位往低位考虑, 找到第一个满足 $a[i] = 0$ 的位 p (若找不到则答案为 $2^k - 1$), 那么高于 p 的位都能为 1, 低于 p 的位剩下的 $+$ 和 $*$ 都能选 (因为即使全选也不会在 p 这一位产生进位, 所以都能选)

模拟即可, 时间复杂度 $O(n)$