前言

在不久前的集训队互测中，我提供了一道题 [【集训队互测 2021】快递公司] 。我的本意是使用构造的方法来解决所有测试点，但是当时选手给出的几乎所有做法都基于搜索，而且可以做出远大于题目中范围的方案。因此，在总结了所有满分做法后，我对本题进行了一个加强，因此出现了现在这道题（~~虽然还是一道论文原题~~）。

测试点 1,2,3,4,5,8

这部分可以直接去原题中看题解。

测试点 6,9

考虑各种搜索剪枝。

方法一：先给每条边随机染色，然后随机选择边，把这条边的颜色换成使得整张图同色三元环数目最少的边，直到整张图没有同色三元环。据说这种方法可以在 5s 内跑出 $n=85,m=5$ 的方案（~~为啥我自己实现时需要跑1 min~~），对 $n=44,m=4$ 和 $n=101,m=5$ 的情况不是很了解（~~因为我自己跑不出来，是我太菜了~~）。

方法二：考虑构造，构造一个长度大于等于 $n-1$ 的数列 s ，满足 $s_i\in[1,m]$ ，并且对于任意 i,j ，如果 $s_i=s_j$ ，那么 $s_i\neq s_{i+j}$ 。这样最后只需要让 i,j 两个点连 $s_{|i-j|}$ 即可，显然这样不会有同色三元环。据说结合算法一可以做到 $n=130,m=5$ 了。

测试点 7,10

观察一下 $n=16$ 的构造，如果把“领队”放在 16 的位置，前面三组的编号分别为 $1\sim5,6\sim10,11\sim15$ ，可以把矩阵每 5 行每 5 列分组，总共可以分成 9 个完整组和 7 个不完整组。

```
0 2 3 3 2  3 2 1 1 2  2 1 3 3 1  1
2 0 2 3 3  2 3 2 1 1  1 2 1 3 3  1
3 2 0 2 3  1 2 3 2 1  3 1 2 1 3  1
3 3 2 0 2  1 1 2 3 2  3 3 1 2 1  1
2 3 3 2 0  2 1 1 2 3  1 3 3 1 2  1

3 2 1 1 2  0 3 1 1 3  1 3 2 2 3  2
2 3 2 1 1  3 0 3 1 1  3 1 3 2 2  2
1 2 3 2 1  1 3 0 3 1  2 3 1 3 2  2
1 1 2 3 2  1 1 3 0 3  2 2 3 1 3  2
2 1 1 2 3  3 1 1 3 0  3 2 2 3 1  2

2 1 3 3 1  1 3 2 2 3  0 1 2 2 1  3
1 2 1 3 3  3 1 3 2 2  1 0 1 2 2  3
3 1 2 1 3  2 3 1 3 2  2 1 0 1 2  3
3 3 1 2 1  2 2 3 1 3  2 2 1 0 1  3
1 3 3 1 2  3 2 2 3 1  1 2 2 1 0  3

1 1 1 1 1  2 2 2 2 2  3 3 3 3 3  0
```

仔细观察这些矩阵的特征，不难发现前 9 个矩阵除了数字不一样，数字之间的相对位置一模一样。就拿第一行第一列的矩阵和第一行第二列的矩阵举例，数字之间存在一种 $0 \to 3, 2 \to 2, 3 \to 1$ 的变换关系。如果记第一行第一列的矩阵为 $T(0,2,3)$，那么第一行第二列可以用 $T(3,2,1)$ 表示。这样整张图可以表示为：

$$\begin{pmatrix} T(0,2,3) & T(3,2,1) & T(2,1,3) & 1 \\ T(3,2,1) & T(0,3,1) & T(1,3,2) & 2 \\ T(2,1,3) & T(1,3,2) & T(0,1,2) & 3 \\ 1 & 2 & 3 & A \end{pmatrix}$$

不难发现，这个矩阵是没有同色三元环的。

如果把整个矩阵记做 $T(0,1,2,3)$，那么在构造 4 种颜色时又可以采取类似的做法。

怎么做？只需要把矩阵中的所有 $T(a,b,c)$ 换成 $T(a,b,c,4)$ 就可以了。

A 是什么？在 $n=16$ 时 A 是一个数 0，而此时，由于 A 和前面的点只会连 1,2,3 三种颜色，那么还剩下一种颜色，所有 A 可以是用第四种颜色构造的两个点。

为什么这样是对的？可以采用反证法证明：

假设存在一个同色三元环，考虑分类其存在的位置。首先这个三元环中的点不可能出现在 A 中。

① 若三元环的三个点都在同一组中，这显然不可能，因为 $n=16$ 保证了三色没有同色三元环。

② 若三元环的两个点在一组中，另一个点在另外一组中。以 $T(0,2,3,x) \xleftrightarrow{T(3,2,1,x)} T(0,3,1,x)$ 举例，其中两个点在 $T(0,2,3,x)$ 中。如果同色三元环的颜色为 x，这是不可能的，因为对于 $T(0,2,3,x)$ 和 $T(3,2,1,x)$，x 都在第四位，所以如果出现 x 的三元环，那么相当于在 $T(a,b,c,x)$ 中出现了 x 的三元环，这是不可能的。如果是颜色 3，那也不可能，因为跨组之间的边中不会出现两条 3 连在同一个点上。接下来只可能是 2 了，然而 $T(0,2,3,x)$ 和 $T(3,2,1,x)$ 的 2 都在第二位，所以也不可能。

③ 若三元环的三个点分立三组中。假设某一条边是连 $T(a,b,c,x)$ 中的 a，那么相当于那两个点在那两组中的相对位置相同，对于另外的一个点，是不可能和这两个点连同一种颜色的。如果三个点中没有两个点在组内相对位置相同，那么找不到一种颜色，使得在三组之间的 $T(a,b,c,x)$ 中的 b,c 中都出现。而如果这种三元环的颜色是 x，又因为对于所有的边，x 都在第四位，所以这也不可能出现。

这样就讨论完所有情况了。综上所述，不存在一个同色三元环。

如果把 $m=4, n=50$ 的当成 $T(0,1,2,3,4)$，那么对于 $m=5$ 的，就是把矩阵中的数换成 $T(a,b,c,4,5)$，证明同理。

这样就得到 $f_i \geq 3f_{i-1} + f_{i-3}$。

参考资料：

Chung, Fan Rong K. "On the ramsey numbers N (3, 3,… 3; 2)." Discrete Mathematics 5.4 (1973): 317-321.