

基础算法水题选讲

GongChen

雅礼中学

August 11, 2019

这份课件旨在以题目的形式回顾与贪心，倍增，二分，分治有关的知识点。

主要是普及组别的简单技巧巩固吧。

因为作者水平有限，接下来你会见到很多道千百年前切过的原题。

而且在不可抗因素的干扰下，即使最基础的东西，所述也远称不上完善。

不过如你所见，它已经是我能做到的最好了。

愿食用愉快！

贪心

- 经典问题
- 反悔型贪心
- 倒着考虑
- 涉及位运算
- 枚举一部分
- 对数列排序
- 其它

流水作业调度问题

有 n 个工件需要加工, 其中第 i 个工件需要先花费 $a(i)$ 的时间在机器 1 上加工, 再花费 $b(i)$ 的时间在机器 2 上加工. 你需要安排加工顺序使得从第 1 个工件开始加工到第 n 个工件结束加工的时间跨度最短.

流水作业调度问题

有 n 个工件需要加工, 其中第 i 个工件需要先花费 $a(i)$ 的时间在机器 1 上加工, 再花费 $b(i)$ 的时间在机器 2 上加工. 你需要安排加工顺序使得从第 1 个工件开始加工到第 n 个工件结束加工的时间跨度最短.

将 $a < b$ 的工件归为 $g1$ 类, $a \geq b$ 的工件归为 $g2$ 类. $g1$ 内按 a 非降排序, $g2$ 内按 b 非增排序. 最后把 $g2$ 接到 $g1$ 后面即可. 非常好感性理解, 理性证明见 *Johnson* 法则.

Huffman 树

构造一棵含 n 个叶子结点的 k 叉树, 其中第 i 个叶子结点权值 $w(i)$, 要求最小化 $\sum w(i) \times d(i)$, $d(i)$ 表示 i 结点的深度.

Huffman 树

构造一棵含 n 个叶子结点的 k 叉树, 其中第 i 个叶子结点权值 $w(i)$, 要求最小化 $\sum w(i) \times d(i)$, $d(i)$ 表示 i 结点的深度.

增加一些叶子结点为 0 的结点, 使得 $(k-1)|(n-1)$. 将 n 个 w 丢进小根堆, 每次取前 k 小的 w , 和为 s , 建立权值为 s 的树节点 p , 令 p 成为这 k 个结点的父亲, 并把 s 重新丢入堆.

CF867E Buy Low Sell High

你预言了每天的股票价格 v_i ，从第 1 天开始，你每天可以选择卖一支股票，买一支股票，或者什么也不做。问直到第 n 天结束你最多可以获得多少收益。

$$n \leq 3 \times 10^5$$

CF867E Buy Low Sell High

提示：

如何在从前往后扫的同时进行抉择？什么情况下会买股票？有没有可能不优？怎么反悔？

CF3D Least Cost Bracket Sequence

给出一个由 $() ?$ 组成的序列，第 i 个 $?$ 可以花费 a_i 的代价变成 $($ ，花费 b_i 的代价变成 $)$ ，问将其变为合法括号序列的最小代价。

$$n \leq 10^6$$

CF3D Least Cost Bracket Sequence

提示：

使得在某一位置放 $)$ 合法的条件是？

BZOJ2151 种树

你要在首尾相连的 n 个位置中选择 m 个互不相邻的位置, 其中选择第 i 个位置即可获得 v_i 的价值, 最大化价值之和.

$$n \leq 2 \times 10^5$$

BZOJ2151 种树

提示：

v 中间大两边小的三个相邻位置，它们所有可能的选择情况有？

51nod1053 最大 M 子段和 V2

你有一个长度为 n 的序列。你需要从中划分出 m 个互不相交的子段，使得它们的和最大。子段允许为空。

$$n, m \leq 5 \times 10^4$$

51nod1053 最大 M 子段和 V2

提示：

假设没有 m 的限制？在此基础上应如何操作使得 m 的限制得到满足？

NOI2017 蔬菜

你的仓库里有 n 种蔬菜，每天最多销售 m 个单位的蔬菜。

第 i 种蔬菜有 c_i 单位的库存，每天固定会有 x_i 个单位变质从而不能再用于销售。

这种蔬菜的单位收益为 a_i ，同时，对其进行的第一次销售会产生 s_i 的额外收益。

你想知道销售 p 天的最大收益。多组询问。

$$n \leq 10^5, m \leq 10, p \leq 10^5, a, c, x, s \leq 10^9$$

NOI2017 蔬菜

提示：

如果每种蔬菜仅有一个单位？尝试离线回答？

CF967E Big Secret

对 n 个数排序使得它们的前缀异或和从 1 到 n 递增.

$$n \leq 10^5, v \leq 2^{60}$$

CF967E Big Secret

提示：

使得 $s \oplus k > s$ 的 k 会有什么性质？

CF1054D Changing Array

你有一个由 n 个 k 位二进制数组成的序列。允许多次对任意数异或上 $2^k - 1$ 。你要最大化异或和不为 0 的子串个数。

$$n \leq 2 \times 10^5, k \leq 30$$

CF1054D Changing Array

提示：

考虑将问题转化为前缀和相关？前缀和又会怎么变化？

51nod1302 矩形面积交

n 个矩形，你要把它们分成两组，使得两组最大重叠面积之和最大。矩形可旋转，可移动。

$$n \leq 10^5$$

51nod1302 矩形面积交

提示：

真正影响答案的变量是哪几个？其中的一些是否能被固定？

算法框架

这类题是让你对一个序列排序从而最大/最小化某个式子的值。值跟元素顺序有关。

算法框架

这类题是让你对一个序列排序从而最大/最小化某个式子的值。值跟元素顺序有关。

入手点是假设已经排好了前 $n - 2$ 个元素的位置，考虑如何安排 i 和 j 的相对顺序。

算法框架

这类题是让你对一个序列排序从而最大/最小化某个式子的值。值跟元素顺序有关。

入手点是假设已经排好了前 $n - 2$ 个元素的位置，考虑如何安排 i 和 j 的相对顺序。

直接令 i 放在 j 前更优然后推式子推出比较函数。

算法框架

这类题是让你对一个序列排序从而最大/最小化某个式子的值。值跟元素顺序有关。

入手点是假设已经排好了前 $n - 2$ 个元素的位置，考虑如何安排 i 和 j 的相对顺序。

直接令 i 放在 j 前更优然后推式子推出比较函数。

重点是比较函数必须具有传递性，也就是若 i 放在 j 前更优， j 放在 k 前更优， i 放在 k 前必然更优

luogu2123 皇后游戏

给定 n 个元素, 其中元素 i 有属性 $a(i), b(i)$. 你需要通过对元素排序最小化

$$\max_{i=1}^n c_i, c_i = \max(c_{i-1}, \sum_{j=1}^i a_j) + b_i)$$

$$n \leq 2 \times 10^4, a, b \leq 10^9$$

luogu2123 皇后游戏

提示：

化简式子时可能会需要以下几个手段：

1. 两个 \max 套在一起时，把里面那个 \max 拆开.
2. 尝试把 \max 内相同的元素提出来，移项相消.
3. $\max(a_j, b_i) - a_j - b_i$ 可以化简

51nod1164 最高的奖励 V2

你有 n 个任务可以接。每个任务需要 1 个单位的时间。第 i 个任务可产生 v_i 的价值, 但必须在 $[l_i, r_i]$ 的时间段里去做。你要最大化总价值。

$$n \leq 5000$$

51nod1164 最高的奖励 V2

提示：

强行为下午 EndSaH 的图论课堂做铺垫。

倍增

- 区间覆盖问题
- 预处理距离

SCOI2015 国旗计划

模板题。

给出一个大小为 m 的环和环上的 n 个区间。每个区间覆盖了序列的一部分，保证互不包含，首尾落在整点。对于每一个区间，你要求出在它必须被选中的前提下，至少需要多少个区间才能完全覆盖整个序列。考虑非整点。

$$n \leq 2 \times 10^5, m \leq 10^9$$

SCOI2015 国旗计划

先把环拆成序列，坐标轴长度翻倍，士兵数量翻倍。

SCOI2015 国旗计划

先把环拆成序列，坐标轴长度翻倍，士兵数量翻倍。

从区间没有交集可以推出，一个士兵的起点坐标越大，终点坐标也就越大。

SCOI2015 国旗计划

先把环拆成序列，坐标轴长度翻倍，士兵数量翻倍。

从区间没有交集可以推出，一个士兵的起点坐标越大，终点坐标也就越大。

于是可以把所有士兵按起点坐标排序，再一遍 $O(n)$ 对每个士兵求出与其区间交最小的士兵，也即它的最优后继。

SCOI2015 国旗计划

先把环拆成序列，坐标轴长度翻倍，士兵数量翻倍。

从区间没有交集可以推出，一个士兵的起点坐标越大，终点坐标也就越大。

于是可以把所有士兵按起点坐标排序，再一遍 $O(n)$ 对每个士兵求出与其区间交最小的士兵，也即它的最优后继。

用 $ne(i, j)$ 表示 i 的第 2^j 后继，每次 $O(\log n)$ 求走完一圈回到每个士兵的最小代价。

SCOI2016 萌萌哒

一个长度为 n 的大数, 每次告诉你两个长度相同的区间数字完全对应相同, 问可能的数的个数。

$$n \leq 10^5$$

SCOI2016 萌萌哒

提示：

暴力怎么做？如何用倍增优化？

PKUSC2018 星际穿越

坐标轴上有 n 个星球，第 i 个星球坐标为 i ，与星球 $[l_i, i - 1]$ 之间都有双向通道。
其中，经过每个通道都需要 1 的单位时间。

定义 $dist(x, y)$ 为从星球 x 出发到达星球 y 的最短时间。求 $\sum_{i=l}^r dist(x, i)$ 。

多组询问，保证 $l < r < x$ 。

$$n, q \leq 3 \times 10^5$$

PKUSC2018 星际穿越

提示：

$i \rightarrow j (j < i)$ 的最短路都有什么共性？要求的式子如何化成能够利用倍增的形式？

PKUSC2018 星际穿越

分析性质可以发现 $i \rightarrow j (j < i)$ 的最短路一定是一路向左跳或者向右跳 1 步再一路向左跳。

PKUSC2018 星际穿越

分析性质可以发现 $i \rightarrow j (j < i)$ 的最短路一定是一路向左跳或者向右跳 1 步再一路向左跳。

因为不可能向右跳多步，也不可能向左跳之后再向右跳。

PKUSC2018 星际穿越

我们把 $\sum_{y=l}^r dist(x, y)$ 拆成 $\sum_{y=l}^x dist(x, y) - \sum_{y=r+1}^x dist(x, y)$ 。

PKUSC2018 星际穿越

我们把 $\sum_{y=l}^r dist(x, y)$ 拆成 $\sum_{y=l}^x dist(x, y) - \sum_{y=r+1}^x dist(x, y)$ 。

$dist(x, y) = 1$, 当且仅当 $x \in [l_x, x]$ 。

PKUSC2018 星际穿越

我们把 $\sum_{y=l}^r \text{dist}(x, y)$ 拆成 $\sum_{y=l}^x \text{dist}(x, y) - \sum_{y=r+1}^x \text{dist}(x, y)$ 。

$\text{dist}(x, y) = 1$, 当且仅当 $x \in [l_x, x]$ 。

在考虑 $\text{dist}(x, y) \leq 2$, 这时它可以选择先往右跳一步再往左跳一步。

PKUSC2018 星际穿越

我们把 $\sum_{y=l}^r \text{dist}(x, y)$ 拆成 $\sum_{y=l}^x \text{dist}(x, y) - \sum_{y=r+1}^x \text{dist}(x, y)$ 。

$\text{dist}(x, y) = 1$, 当且仅当 $x \in [l_x, x]$ 。

在考虑 $\text{dist}(x, y) \leq 2$, 这时它可以选择先往右跳一步再往左跳一步。

于是必须存在一个 $[l_x, x]$ 中的点到 x 的 $\text{dist} \leq 1$ 。

PKUSC2018 星际穿越

我们把 $\sum_{y=l}^r \text{dist}(x, y)$ 拆成 $\sum_{y=l}^x \text{dist}(x, y) - \sum_{y=r+1}^x \text{dist}(x, y)$ 。

$\text{dist}(x, y) = 1$, 当且仅当 $x \in [l_x, x]$ 。

在考虑 $\text{dist}(x, y) \leq 2$, 这时它可以选择先往右跳一步再往左跳一步。

于是必须存在一个 $[l_x, x]$ 中的点到 x 的 $\text{dist} \leq 1$ 。

推广得到 , $\text{dist}(x, y) \leq k, k \geq 2$ 的条件是 , 存在 $i \in [l_x, n]$ 满足 $\text{dist}(y, i) \leq k - 1$ 。

PKUSC2018 星际穿越

我们把 $\sum_{y=l}^r \text{dist}(x, y)$ 拆成 $\sum_{y=l}^x \text{dist}(x, y) - \sum_{y=r+1}^x \text{dist}(x, y)$ 。

$\text{dist}(x, y) = 1$, 当且仅当 $x \in [l_x, x]$ 。

在考虑 $\text{dist}(x, y) \leq 2$, 这时它可以选择先往右跳一步再往左跳一步。

于是必须存在一个 $[l_x, x]$ 中的点到 x 的 $\text{dist} \leq 1$ 。

推广得到 , $\text{dist}(x, y) \leq k, k \geq 2$ 的条件是 , 存在 $i \in [l_x, n]$ 满足 $\text{dist}(y, i) \leq k - 1$ 。

PKUSC2018 星际穿越

推广得到, $\text{dist}(x, y) \leq k, k \geq 2$ 的条件是, 存在 $i \in [l_x, n]$ 满足 $\text{dist}(y, i) \leq k - 1$ 。

PKUSC2018 星际穿越

推广得到, $\text{dist}(x, y) \leq k, k \geq 2$ 的条件是, 存在 $i \in [l_x, n]$ 满足 $\text{dist}(y, i) \leq k - 1$ 。

我们维护一个 $t(i, j)$ 数组, 记录从 $[i, n]$ 出发跳 j 步所能到达的最左点。

PKUSC2018 星际穿越

推广得到, $dist(x, y) \leq k, k \geq 2$ 的条件是, 存在 $i \in [l_x, n]$ 满足 $dist(y, i) \leq k - 1$ 。

我们维护一个 $t(i, j)$ 数组, 记录从 $[i, n]$ 出发跳 j 步所能到达的最左点。

那么, 求 $\sum_{y=l}^x dis(x, y)$ 的时候先特判一下 $dist = 1$ 的情况, 再一步跳到 l_x , 就能通过 $t(i, j)$ 求出答案了。

PKUSC2018 星际穿越

然而不幸的是，预处理 t 数组需要 $O(n^2)$ 的时间复杂度。

PKUSC2018 星际穿越

然而不幸的是，预处理 t 数组需要 $O(n^2)$ 的时间复杂度。

所以考虑对 j 倍增化，得到： $t(i, j) = t(t(i, j - 2), j - 1)$

PKUSC2018 星际穿越

然而不幸的是，预处理 t 数组需要 $O(n^2)$ 的时间复杂度。

所以考虑对 j 倍增化，得到： $t(i, j) = t(t(i, j-2), j-1)$

同时因为做了倍增处理，我们还要预处理出 $s(i, j)$ ，表示 $\sum_{k=t(i,j)}^i dist(i, k)$ 。

PKUSC2018 星际穿越

然而不幸的是，预处理 t 数组需要 $O(n^2)$ 的时间复杂度。

所以考虑对 j 倍增化，得到： $t(i, j) = t(t(i, j-2), j-1)$

同时因为做了倍增处理，我们还要预处理出 $s(i, j)$ ，表示 $\sum_{k=t(i, j)}^i dist(i, k)$ 。

$$s(i, j) = s(i, j-1) + s(t(i, j-1), j-1) + (t(i, j-1) - t(i, j)) \times 2^{j-1}$$

PKUSC2018 星际穿越

然而不幸的是，预处理 t 数组需要 $O(n^2)$ 的时间复杂度。

所以考虑对 j 倍增化，得到： $t(i, j) = t(t(i, j-2), j-1)$

同时因为做了倍增处理，我们还要预处理出 $s(i, j)$ ，表示 $\sum_{k=t(i, j)}^i dist(i, k)$ 。

$$s(i, j) = s(i, j-1) + s(t(i, j-1), j-1) + (t(i, j-1) - t(i, j)) \times 2^{j-1}$$

每次询问先大步再小步地往前跳即可。

二分

- 查找第 k 大
- 最大化最小
- 三分找单峰

BZOJ2653 Middle

模板题。

给定一个长为 n 的序列，每次限制合法区间左端点落在 $[a, b]$ ，右端点落在 $[c, d]$ ，问合法区间排序后的最大中位数。

强制在线。

$$n \leq 2 \times 10^4$$

BZOJ2653 Middle

二分中位数，把大于它的赋值为 1，小则 -1 ，判定是否存在合法区间和大于 0。

BZOJ2653 Middle

二分中位数，把大于它的赋值为 1，小则 -1 ，判定是否存在合法区间和大于 0。
不能对每个询问都暴力赋值一次，所以用主席树辅助。

51nod1671 货物运输

在坐标轴上有 n 个城市，第 i 个城市坐标为 i ，从 i 到 $i+1$ 需要耗费 1 点时间，反之亦然。

现在有 m 个计划，第 i 个计划要从城市 x_i 走到 y_i 。

你可以选择任意两个城市建立双向传送门，使得在它们之间的移动耗时为 0。

所有计划同时开始，你要最小化它们的最晚结束时间。

$$n \leq 5 \times 10^5$$

51nod1671 货物运输

提示：

拆式子。

AHOI2014 宅男计划

外卖店有 n 种食物，第 i 种食物价格为 p_i ，保质期 s_i 天。点一次外卖要付 F 元的配送费，一次外卖可以点无限多份食物。保质期从点外卖的那天起开始生效。

你每天需要至少吃一份食物，但你只有 m 元。你想知道自己最多能活到第几天。

$$n \leq 200, p, s, f, m \leq 10^{18}$$

AHOI2014 宅男计划

提示：

感性认识一下什么变量关于什么变量的图象有可能会呈单峰？

分治

- CDQ 分治
- 整体二分
- 线段树分治 (不归我
- 分治优化 DP (也不归我

算法基本框架

以三维偏序问题为例。

算法基本框架

以三维偏序问题为例。

将元素按第一维排序，需要保证位于 i 的元素不会对 $[1, i - 1]$ 造成影响。

算法基本框架

以三维偏序问题为例。

将元素按第一维排序，需要保证位于 i 的元素不会对 $[1, i - 1]$ 造成影响。

进行分治，中心思想是在每一层只计算左区间对右区间的影响。

算法基本框架

以三维偏序问题为例。

将元素按第一维排序，需要保证位于 i 的元素不会对 $[1, i - 1]$ 造成影响。

进行分治，中心思想是在每一层只计算左区间对右区间的影响。

递归处理 $[l, mid]$ 和 $[mid + 1, r]$ 。

算法基本框架

以三维偏序问题为例。

将元素按第一维排序，需要保证位于 i 的元素不会对 $[1, i - 1]$ 造成影响。

进行分治，中心思想是在每一层只计算左区间对右区间的影响。

递归处理 $[l, mid]$ 和 $[mid + 1, r]$ 。

在每一层左右区间第一维的大小关系恒定，问题简化为二维偏序。

算法基本框架

以三维偏序问题为例。

将元素按第一维排序，需要保证位于 i 的元素不会对 $[1, i - 1]$ 造成影响。

进行分治，中心思想是在每一层只计算左区间对右区间的影响。

递归处理 $[l, mid]$ 和 $[mid + 1, r]$ 。

在每一层左右区间第一维的大小关系恒定，问题简化为二维偏序。

于是对其中一维排序，再用数据结构维护第三维的信息，完成计算。

算法基本框架

经典的三维偏序组合是时间，位置，大小。

算法基本框架

经典的三维偏序组合是时间，位置，大小。

因此，CDQ 分治也常用于将动态问题转化为静态问题。

算法基本框架

经典的三维偏序组合是时间，位置，大小。

因此，CDQ 分治也常用于将动态问题转化为静态问题。

具体而言就是以时间为第一维进行分治，在每一层仅计算左区间的修改操作对右区间的询问操作造成的影响。

算法基本框架

经典的三维偏序组合是时间，位置，大小。

因此，CDQ 分治也常用于将动态问题转化为静态问题。

具体而言就是以时间为第一维进行分治，在每一层仅计算左区间的修改操作对右区间的询问操作造成的影响。

因为每次计算时整个左区间的修改可以视作静态，所以会方便处理很多。

CDQ 分治复杂度的计算

介绍一些无脑手段。

CDQ 分治复杂度的计算

介绍一些无脑手段。

可以把分治的过程表现为线段树的形式，称每一个结点所表示的区间为一层，所有长度相同的区间位于一级上，一级总长 n ，总共有 $\log n$ 级。

CDQ 分治复杂度的计算

介绍一些无脑手段。

可以把分治的过程表现为线段树的形式，称每一个结点所表示的区间为一层，所有长度相同的区间位于一级上，一级总长 n ，总共有 $\log n$ 级。

如果每一层的时间复杂度是 $O(\text{区间长度})$ 的，每一级就是 $O(n)$ ，总复杂度就是 $O(n \log n)$ 。

CDQ 分治复杂度的计算

介绍一些无脑手段。

可以把分治的过程表现为线段树的形式，称每一个结点所表示的区间为一层，所有长度相同的区间位于一级上，一级总长 n ，总共有 $\log n$ 级。

如果每一层的时间复杂度是 $O(\text{区间长度})$ 的，每一级就是 $O(n)$ ，总复杂度就是 $O(n \log n)$ 。

如果每一层 $O(\log \text{区间长度})$ ，总复杂度为 $O(n \log^2 n)$ 。

CDQ 分治复杂度的计算

介绍一些无脑手段。

可以把分治的过程表现为线段树的形式，称每一个结点所表示的区间为一层，所有长度相同的区间位于一级上，一级总长 n ，总共有 $\log n$ 级。

如果每一层的时间复杂度是 $O(\text{区间长度})$ 的，每一级就是 $O(n)$ ，总复杂度就是 $O(n \log n)$ 。

如果每一层 $O(\log \text{区间长度})$ ，总复杂度为 $O(n \log^2 n)$ 。

如果每一层 $O(n)$ ，总复杂度为 $O(n \sum_{i=1}^{\log n} \frac{n}{2^i})$ ，约为 $O(n^2)$ 。

TJOI2016 序列

模板题。

给定一个长为 n 的序列，序列上某些值会发生改变，求最长子序列的长度，满足在任何一种改变的情况下它都不降。改变不同时发生。

$$n \leq 10^5$$

TJOI2016 序列

提示：

j 能转移到 i 的前提是？

JOISC2014 稻草人

平面上有 n 个点，你要求出有多少个平行与坐标轴的矩形满足左下角和右上角各有一个点，并且内部没有点。

$$n \leq 2 \times 10^5$$

JOISC2014 稻草人

提示：

什么情况下两点形成的矩形合法？计算时最好能让什么静态？

算法基本框架

其实就是一次性对所有询问进行二分。

算法基本框架

其实就是一次性对所有询问进行二分。

将多组询问放在一起，每次查询每个询问的答案与 mid 的关系，并以此为界将它们划分为两类，进行递归分治。

算法基本框架

其实就是一次性对所有询问进行二分。

将多组询问放在一起，每次查询每个询问的答案与 mid 的关系，并以此为界将它们划分为两类，进行递归分治。

值域缩小到单点时记录询问答案并返回。

算法基本框架

其实就是一次性对所有询问进行二分。

将多组询问放在一起，每次查询每个询问的答案与 mid 的关系，并以此为界将它们划分为两类，进行递归分治。

值域缩小到单点时记录询问答案并返回。

如果有修改操作，同样以 mid 为界跟询问一起分类。

算法基本框架

其实就是一次性对所有询问进行二分。

将多组询问放在一起，每次查询每个询问的答案与 mid 的关系，并以此为界将它们划分为两类，进行递归分治。

值域缩小到单点时记录询问答案并返回。

如果有修改操作，同样以 mid 为界跟询问一起分类。

比较经典的问题就是区间带修第 k 大。

网格图分治

多组询问，求点对在网格图上的最短路。

$$n \times m \leq 10^4, q \leq 10^5$$

网格图分治

多组询问，求点对在网格图上的最短路。

$$n \times m \leq 10^4, q \leq 10^5$$

分治矩形区域，每次对区域较长的边划一条中线，以中线上的每个点为起点做一次最短路，更新矩形内的所有询问。

网格图分治

多组询问，求点对在网格图上的最短路。

$$n \times m \leq 10^4, q \leq 10^5$$

分治矩形区域，每次对区域较长的边划一条中线，以中线上的每个点为起点做一次最短路，更新矩形内的所有询问。

端点分别落在中线两侧的询问必然会被更新到最优解，而落在同侧的询问可能不会。于是把这样的询问以中线为界分治下去。

网格图分治

多组询问，求点对在网格图上的最短路。

$$n \times m \leq 10^4, q \leq 10^5$$

分治矩形区域，每次对区域较长的边划一条中线，以中线上的每个点为起点做一次最短路，更新矩形内的所有询问。

端点分别落在中线两侧的询问必然会被更新到最优解，而落在同侧的询问可能不会。于是把这样的询问以中线为界分治下去。

复杂度 $O((nm)^{1.5})$ 。

HNOI2015 接水果

模板题。

给定一棵大小为 n 的树，树上有 p 条带权路径，它们中的一些完全覆盖了从 x 到 y 的唯一路径，而你要求出这些路径中权值第 k 大的权值。 q 组询问，每次给定 x, y, k 。

$$n, p, q \leq 4 \times 10^4$$

写在最后

本来是有想着挑几道毒题好好讲一讲的，但是做题量太少，就连放上来的这些水题都基本是上个月临时做的。

题目谈的比较浅，尤其是分治，建议课后再仔细研究一下，它们都特别有趣。

Thanks