算法 1

记 $f_i = s[i]$, 所求为 F_n, 则

$$F_n = f_n + \sum_{1\le k\le n} \frac{(n-k)(k-1)}{\binom{n}{3}} (F_{k-1} + F_{n-k}). \tag{1}$$

直接计算, 时间复杂度为 $O(QL^2)$.

算法 2

对 (1) 式进一步化简, 有

$$\binom{n}{3} F_n = \binom{n}{3} f_n + 2 \sum_{m<k<n} (n-k-1)kF_k. \tag{2}$$

处理一些前缀和, 即可实现 $O(L)$ 回答单个询问. 总时间复杂度为 $O(QL)$.

算法 3

定义记号 $\nabla F_n = F_n - F_{n-1}$. 类似地, $\nabla^k F_n = \nabla(\nabla^{k-1} F_n)$.

定义生成函数 $F(x) = \sum_{i>m} F_i x^i$, $f(x) = \sum_{i>m} f_i x^i$, 则有

$$F'''(x) = f'''(x) + \frac{12F'(x)}{(1-x)^2}. \tag{3}$$

考虑这一微分方程的解. 定义算子

$$\theta F(x) \triangleq -(1-x)F'(x), \tag{4}$$

则 (3) 式可化为

$$-\theta(-2-\theta)(5-\theta)F(x) = (1-x)^3 f'''(x). \tag{5}$$

进而, 上述方程的解等价于以下方程组的解:

$$\begin{cases} -\theta U(x) = (1-x)^3 f'''(x) \\ (-2-\theta)T(x) = U(x) \\ (5-\theta)F(x) = T(x) \end{cases}. \tag{6}$$

比较每个方程两端的系数, 同时令 $U(x) = \sum_{i>m} U_i x^i$, $T(x) = \sum_{i>m} T_i x^i$, 则

$$\begin{cases} (n+1)U_{n+1} = nU_n + 6\nabla^3 f_{n+3} \binom{n+3}{3} \\ (n+1)T_{n+1} = (n+2)T_n + U_n \\ (n+1)F_{n+1} = (n-5)F_n + T_n \end{cases}, \qquad n > m. \tag{7}$$

由 (7) 可以解出

$$nU_n = 6\nabla^2 f_{n+2} \binom{n+2}{3}. \tag{8}$$

将 (8) 代入 (7), 并求和, 又有

$$\frac{T_n}{n+1} = \frac{T_{m+1}}{m+2} + \sum_{m+3\le k\le n+1} \frac{\nabla^2 f_k \binom{k}{3}}{\binom{k}{3}}. \tag{9}$$

类似地, 可以得到

$$\begin{aligned} \binom{n}{6} F_n &= \binom{m+1}{6} F_{m+1} + \frac{T_{m+1}}{m+2} \sum_{m+2\le j\le n} \binom{j}{6} \\ &+ \sum_{m+2\le j\le n} \binom{j}{6} \sum_{m+3\le k\le j} \frac{\nabla^2 f_k \binom{k}{3}}{\binom{k}{3}} \end{aligned}. \tag{10}$$

考虑化简 (10) 式. 首先, 由 (2) 式我们有

$$F_{m+1} = f_{m+1}, \qquad F_{m+2} = f_{m+2}.$$

再由 (7) 式, 有

$$T_{m+1} = (m+2)f_{m+2} - (m-4)f_{m+1}.$$

将以上结果代入 (10), 则

$$\begin{aligned}\binom{n}{6}F_n = \binom{m+1}{6}f_{m+1} + \left(\nabla f_{m+2} + \frac{6}{m+2}f_{m+1}\right)\left(\binom{n+1}{7} - \binom{m+2}{7}\right) \\ + \sum_{m+3\le k\le n} \frac{\nabla^2 f_k \binom{k}{3}}{\binom{k}{3}}\left(\binom{n+1}{7} - \binom{k}{7}\right), \qquad n > \max(m,5)\,.\end{aligned} \tag{11}$$

再进行一些化简, 我们可以得到

$$F_n = f_n + \frac{1}{\binom{n}{6}} \sum_{m<k<n} \frac{12 f_k}{(k+2)(k+1)}\left(\binom{n+1}{7} - \binom{k+2}{7}\right), \qquad n > \max(m,5)\,. \tag{12}$$

这是我们最终的结果. 使用线段树维护与 f_k 有关的项的和, 即可快速求解 F_n.

时间复杂度 $O\big((L+Q)\log L\big)$.

补充算法:

对于 n 都相同的数据, 可以先算出 s_i 对答案的贡献, 由于 n 不变, 贡献也不变.

对于给定 m, 只是相当于把 $0 \sim m$ 的贡献变成 0.

对于 m 相同并且每次修改都是全局加的情况, 可以先处理一个初始情况, 再处理一个 $s_i = 1$ 的情况, 修改操作仅相当于两个答案的叠加.