由于某种奇怪的原因，题目顺序变得如此奇怪，我也没什么办法

球 (/problem/407)

算法一

暴力枚举所有排列，判断是否可行。

时间复杂度 $O\left(n^{2m}\right)$，期望得分 5 分。

算法二

加一点合理的剪枝，或将小范围的答案打表，就可以搜过前 3 个点了。

时间复杂度 $O\left(???\right)$，期望得分 15 分.

算法三

考虑 DP，用 $f_{i,j}$ 表示 i 个桶，j 个球的方案数。

如果第 i 个桶没放球，则有 $f_{i-1,j}$ 种方案。

如果第 i 个桶放球了，我们先考虑前 $i-1$ 个桶，共有 $f_{i-1,j-1}$ 种方案，第 i 个桶的球只能在剩下的 $(2i-1)-(j-1)=2i-j$ 个球中选择，因此一共有 $(2i-j)\cdot f_{i-1,j}$ 种方案。

综上，$f_{i,j}=f_{i-1,j}+(2i-j)\cdot f_{i-1,j}$。

时间复杂度 $O\left(nm\right)$，期望得分 60，~~实际得分 70，这是因为数据范围写错了~~。

算法四

如果你的数感比较强，将小范围的数据打表后，可以找到规律：$f_{n,r}=\binom{n}{r}^2\cdot r!$。

时间复杂度 $O\left(n\right)$，期望得分 100 分。

算法五

接下来我们来讲讲道理——为什么上述公式是成立的。

观察这个式子，可以发现 $\binom{n}{r}^2\cdot r!$ 等于在 $n\times n$ 个棋盘上放 r 个 (互不攻击的) 车的方法数，将这个值记作 $R_{n,r}$。

我们使用归纳法证明 $f_{n,r}=R_{n,r}$。

设命题对 $n<n_0$ 成立，考虑 $n=n_0$。

将 $n_0\times n_0$ 棋盘的最后一列和最后一行拿出来，共 $2n_0-1$ 个格子。将这些格子的集合记为 S。

若 S 中无车，则方案数就是 $R_{n_0-1,r}$。

若 S 中有一辆车，则考虑将前面 $(n_0-1)\times(n_0-1)$ 的棋盘中放入 r_0-1 辆车的方案数就应该等于 R_{n_0-1,r_0-1}，然后 S 中**可放车的位置**数量就是 $(2n_0-1)-2\left(r_0-1\right)$。因此，这一部分的方案数是 $(2n_0-2r_0+1)\cdot R_{n_0-1,r_0-1}$。

若 S 中有两辆车，设它们的坐标为 (n_0,c) 和 (r,n_0)。则此时 (r,c) 位置以及它所在行列均无车，因此我们将这两辆车去掉，换成 (r,c)，就得到一个 $(n_0-1)\times(n_0-1)$ 的棋盘中放 r_0-1 辆车的方案，且其中一辆车是由两辆车合成的。因此，这部分的方案数等于 $(r_0-1)\cdot R_{n_0-1,r_0-1}$。

综上，$R_{n_0,r_0}=R_{n_0-1,r_0}+(2n_0-r_0)\cdot R_{n_0-1,r_0-1}=f_{n_0-1,r_0}+(2n_0-r_0)\cdot f_{n_0-1,r_0-1}=f_{n_0,r_0}$，证毕。

树堆 (/problem/408)

算法一

暴力。

时间复杂度 $O\left(n! \cdot n^2\right)$，期望得分 10 分。

算法二

状态压缩 DP。

时间复杂度 $O\left(2^n \cdot \mathrm{poly}(n)\right)$，期望得分 20 分。

算法三

考虑固定根的情形。由 [CTS2019]氪金手游 的经验，可以得到：每个点是否满足堆性质这个事件，是**互相独立**的。且概率等于以它为根的子树的倒数。

于是就可以进行 DP 了：$E_x = \prod_{c \in child(x)} \cdot \left(\frac{1}{size\left(x\right)} \cdot p + \frac{size\left(x\right) - 1}{size\left(x\right)} \cdot 1\right)$。

因此答案 $E_{root} = \prod_x \left(\frac{p-1}{size\left(x\right)} + 1\right)$。

对于根可变的情形，相当于对所有根求出期望后然后取平均值。因此，我们只需枚举所有可能的根分别 DP，最后取平均值即可。

时间复杂度 $O\left(n^2\right)$，期望得分 60 分，实际得分 50 分。

算法四

注意到式子的形式，是较为容易进行**换根 DP** 的，因此只需再次 dfs 来实现一个简单的换根 DP 即可。

时间复杂度 $O\left(n\right)$，期望得分 100 分，实际得分 70 分。

算法五

诶为啥我用算法四只拿了 70 分？

这是因为 $\frac{p-1}{size\left(x\right)} + 1$ 在模意义下可以等于 0。

因此我们需要实现一些珂技，比如前缀后缀积神马的。

不过这里并不需要这么麻烦。由于全都是乘积式，因此只需要维护零因子的个数 (即标准分解式中 mod 的指数) 以及剩下部分的值就可以了。~~(相当于一个 `modint` 类)~~

时间复杂度 $O\left(n\right)$，期望得分 100 分。

考试 (/problem/409)

按照题意进行 DP 和状态压缩 DP 即可，时间复杂度分别是 $O\left(k\right)$ 和 $O\left(k^2 \cdot 3^n\right)$。