solution

skydogli

T1

费用提前计算后不难发现长度大的区间尽量在前面铺最优，这样的话定位当前最小值所在区间并递归往下做即可。

尝试把区间提出来，我们可以直接遍历区间，找到当前区间的最小值的位置，暴力拆开区间之后递归处理，由于数据随机，所以期望下每次都会使问题规模减半，可以认为复杂度是 $O(n\log n)$ 的。实际效率快得离谱。

考虑线性做法，无脑做法是建笛卡尔树，实际上可以直接对每个 h_i 维护以它为最低点会铺设多少次，也即找到它两边的第一个比它低的位置，直接单调栈即可。时间复杂度 $O(n)$。

把区间提出来后怎么做？我们发现有用的信息只有区间长度，且按长度递减处理最优，且长度是小于等于 n 的，因此只需长度存入桶中，$O(n)$ 扫一遍，计算等差数列就好了。

T2

Author:cnyali_zjc

Tester:skydogli

一位熟练的P社玩家在半小时内写出了std~~并与验题人在接下来一天的时间里互相Debug，提交记录一度十分壮观。~~

鉴于NOIP出过《斗地主》、《时间复杂度》(以及今年CSP的儒略日)这样的模拟题，就决定放道小模拟在T2，机房正好有个钢4玩家，于是这道题就被造了出来。希望大家不要因为这题痛骂出题人/dk。

solution:依题意模拟即可，时间复杂度 $O(qn^2)$ 或 $O(qn)$ 。

T3

一道脑洞题。

首先，可以把每个值映射到桶上，$O(n^2)$ 匹配即可获得暴力分。

如何优化？

首先 $a\times b \pmod n$ 比较难办，但是如果我们把它们取离散对数就可以使相乘变成相加，值域就到了 $O(n)$ 级别。同时也可以解释 $O(n^2)$ 匹配的正确性：$a,b\in[0,n-1)$，对于一个 a，等式 $a+b=c \pmod{(n-1)}$ 中 b 的解只有一个。

同时，取对数后对于两个序列都是排列的情况也很好构造众数出现次数为 $n-1$ 的排列方法。

但是目前的复杂度仍然是$O(n^2)$，我们考虑能否使用NTT解决。先信仰写出式子（下面用T表示桶）：

$$Tc_i=\sum_{j+k=i} min(Ta_j,Tb_j)$$

正常的NTT看起来无法解决这一问题，我们尝试枚举这个最小值：令$T'_{k,i}=[T_i\geq k]$，这样进行卷积就能求出某一位置 min 大于等于 k 的匹配数有多少个了，与 $k-1$ 相减就能求出 min 正好为 k 的匹配数了。至此，我们将复杂度**劣化**到了$O(n^2\log n)$。~~niiice!~~

当然，熟练的选手可以很快发现由于我们转化到了桶上，所以对于 Ta,Tb 都有$\sum\limits_{i=1}^{n}T_i=n$，因此桶里最多只有 $O(\sqrt{n})$ 种不同的取值，所以我们离散化再差分，复杂度就优化到了 $O(n\sqrt{n}\log n)$。

然而，我们发现对于出现次数大于等于 k 的桶的位置本来就不超过 $\frac{n}{k}$ 个，暴力求的复杂度就是$O(\frac{n^2}{k^2})$的，而且可以一次求出大于等于 k 的桶的具体答案，比NTT高得不知道哪里去了。所以对于前面一部分我们NTT，后面直接跑一次暴力，如果阈值是 t，复杂度就是 $O(tn\log n+\frac{n^2}{t^2})$，忽略常数的最优阈值是 $t=\sqrt[3]{\frac{n^2}{\log n}}$,时间复杂度为$O(n^{\frac{4}{3}}\log^{\frac{2}{3}}n)$，实际上取 8～10 比较优。

T4

~~Huhao捧杯，谁赞成，谁反对~~

小蒟蒻显然出不出T4，所以请 Huhao 帮忙，他甩了一道IMO题过来/px（原题叫银矩阵，问题不大）

令 n 为矩阵边长，可以证明 n 为奇数时只有 $n=1$ 时存在皇后矩阵：称第 i 行和第 i 列为一个"十字"，那么每个数字都会在每个十字中出现各一次。将一个数字放在一个格子中，如果放在主对角线上，那么它出现在了 1 个十字上；否则它就出现在了 2 个十字上。如果 n 为奇数，那么每个数字就必须出现在奇数个十字上，也即至少在主对角线上出现 1 次。而主对角线的长度为 n，数字集合大小为 $2n-1$，也就是要求 $n\geq 2n-1$，推出 $n\leq 1$。

可以证明对于偶数始终有解，但是我不会，为了给部分分而给了个小问题，希望大佬们不要喷我/kel。

接下来考虑如何构造较大的皇后矩阵。

考虑归纳法，$\begin{pmatrix}1&3\\2&1\end{pmatrix}$是皇后矩阵，$\begin{pmatrix}1&3&5&7\\2&1&6&5\\4&7&1&3\\6&4&2&1\end{pmatrix}$也是皇后矩阵，假设存在 n 阶皇后矩阵 A，则可以构造出形如 $\begin{pmatrix}A&B\\C&A\end{pmatrix}$的 $2n$ 阶皇后矩阵，其中 B 矩阵为 A 矩阵全部加 $2n$的结果，C 矩阵为将 B 矩阵的主对角线上的数变为 $2n$ 的结果。这个构造比较直观，不妨设 $i\leq n$，由于 A 矩阵第 i 行第i列包含$\{1\ldots 2n-1\}$，又因为 B、C 矩阵统一加了 $2n$，所以第 i 行和第 i 列包含了$\{1\ldots 2n-1,2n+1\ldots 4n\}$，多了个 $a_{i,i}$，少了个 $2n$，这就是我们将 C 矩阵主对角线的数改为 $2n$ 的原因。于是我们获得了一个构造 2^k 阶皇后矩阵的方法。