题目大意

现有一个无限二维平面，我们只考虑所有整点。给定其中 n 个互不相同的点为黑点，其余所有点为白点。

认为一个平面是好的，当且仅当所有黑点形成一个 $K\times K$ 的正方形网格，具体的，存在实数 a,b,c,d 使得

$\forall i,j<K\in N^*$ 有 $(a+ci+dj,b+di-cj)$ 为黑点。询问最少染多少个白点为黑点，可以形成一个好的平面。

数据范围

$n\le 10^5$ 所有点坐标为 $[1,10^9]$ 中的整数

解题过程

将限制转化后变为: 选定一对基底 $\vec{r_1},\vec{r_2}$ 和一个原点，使得所有黑点可以在这个原点下，被这个基底用整数系数线性组合

平凡的，$\vec{r_1}=(1,0),\vec{r_2}=(0,1)$ 一定是一个合法解，但是我们还需要加入的黑点最少

容易发现，对于所有合法方案，在基底模长最长的情况下，K 最小

设给定的所有点有 $\vec{v_i}=(a_i,b_i)$ ，则一个满足条件的基底，当且仅当 $\forall i\neq j$ 有 $\vec{v_i}-\vec{v_j}$ 可以被这个基底用整数系数线性组合。容易发现，我们只需要满足 $\forall i\in[1,n-1]$ 有 $\vec{v_i}-\vec{v_{i+1}}$ 可以被组合出来

所以问题转化为了给定 n 个向量 $\vec{w_i}$ （此处 n 为原题意中的 $n-1$ ），求一个模长最长的基底可以组合出所有 $\vec{w_i}$

如果我们求解出前 i 个向量的最长合法基底 $\vec{r_1},\vec{r_2}$ ，那么只要可以求解出 $\vec{w_{i+1}},\vec{r_1},\vec{r_2}$ 的最长合法基底。而且可发现，若一个基底可以组合出 (s,t) ，那么一定可以组合出 $(t,-s)$ ，所以问题再次化简为求解出 $\vec{w_{i+1}},\vec{r_1}$ 的最长合法基底

简化一下记号，即求 $\vec{a},\vec{b}$ 的最长合法基底。首先给出做法如下:

- 不妨认为两者中模长较长的为 $\vec{a}$ ，较短的为 $\vec{b}$ ，令 $\vec{c}$ 为 $\vec{b}$ 的四个方向向量中的任意一个
- 若 $\vec{a}-\vec{c}$ 的模长小于 $\vec{a}$ 的模长，$\vec{a}=\vec{a}-\vec{c}$
- 若 $\vec{a}$ 的模长等于 0 ，则 b 即为所求基底，否则回到第一步

现在需要说明的是，按照这个操作，每次一定可以使 $\vec{a}$ 的模长减小

考虑将 $\vec{b}$ 旋转后建立平面直角坐标系，令 $\vec{c}$ 在 x, y 轴上，假设当前 $\vec{c}$ 为 x 正半轴的基底

那么做 $\vec{c}$ 的垂直平分线，若 $\vec{a}$ 在垂直平分线的右侧，则 $\vec{a}-\vec{c}$ 的模长一定小于 $\vec{a}$ 的模长

发现，四条垂直平分线覆盖了包含原点的一个边长为 $|\vec{c}|$ 的小正方形外的所有向量，也就是说，我们每轮操作可以重复进行（因为这个过程中一直满足 $|\vec{a}|>|\vec{c}|$，所以可以在 $O(log)$ 时间内使用倍增算法重复进行多次），直到 $\vec{a}$ 的模长变为 $\leq \frac{|\vec{c}|}{2}$ 。因此，一定可以使 $\vec{a}$ 的模长减小，且该操作的运行次数为 $log 10^9$ 级别

当我们求得基底后，得到 $\forall i \in [2, n]$ 中，$\vec{a_i}-\vec{a_1}=x_i\vec{r_1}+y_i\vec{r_2}$，那么 $K=\max\{maxx_i-minx_i, maxy_i-miny_i\}+1$

复杂度为 $O(nlog^2)$。