

合并集合

考虑问题的弱化版，假设不是环，而是一条链

令 $f[i][j]$ 表示将 $S_{i..j}$ 合并成一个后最大的收益之和

令 $g[i][j] = |S_{i..j}|$ ，也就是将 $S_{i..j}$ 合并后的集合大小

考虑转移，考虑合并 $S_{i..j}$ 的最后一步，肯定是合并两个集合，因为每次合并的都是相邻的，所以合并的是两个区间的并集

$$f[i][j] = \max_{k=i..j-1} f[i][k] + f[k+1][j] + g[i][k] * g[k+1][j]$$

那么我们考虑环怎么做，将长度倍长，然后考虑每个长度为 n 的区间的答案即可

2 Climb

2.1 $O(n^2)$

显然，除了最后一天外，药丸按照 $A_i - B_i$ 降序排列使用最优，那么我们不妨枚举哪一颗药丸最后一天吃，把剩下的按照 $A_i - B_i$ 降序排列，枚举使用前几个即可。

2.2 Solution

我们不妨还是枚举每个药 k ，假设 k 最后一天喝，那么我们可以在剩下的药丸里二分得到我们还需要吃哪些药丸。通过 RMQ 区间最小值我们可以方便的判断拿掉 k 之后 $A_i - B_i$ 的前缀和是否会在某个时刻小于等于 C_i ，细节见代码。

3 Coin

3.1 10 分

也就是假设无解，那么两个人会把所有的行列取完。

如果 $h + w$ 为奇数，那么先手必胜，否则后手必胜。

3.2 30 分

只要判断是不是有解即可。

记 r_i 表示 i 这行是否取过，1 表示取，0 表示不取。 c_i 表示这列是否取过。

也就是对于一个非空的格子 (i, j) ，就能得到方程 $r_i \oplus c_j = b_{i,j}$ ，可以把行和列看成图中的点然后 $b_{i,j}$ 看成边，做一个类似于二分图判定的染色即可。

时间复杂度 $O(hw)$ 。

3.3 60 分

现在只考虑有解的情况，判定是否先手必胜。

根据前面的建模，我们可以得到一个图论模型。

对于每个连通块，我们首先可以得到一种染色方案，也就是 a 个位置取 0， b 个位置取 1。注意将这个连通块的所有变量都取反也可以得到一种合法解，也就是 a 个位置取 1， b 个位置取 0。

我们记这样的为 $a - b$ 连通块。

然后我们观察题目中给出的条件，每列至少有一个硬币，每行至少有一个反面朝上的硬币，也就是说每个点都有边连出去，并且每个连通块的 a 和 b 都大于 0，否则只有 0 个位置取 1，也就是这个连通块不需要操作，与每行至少有一个反面朝上硬币的硬币矛盾。

而对于一个连通块，我们走完第一步就能确定一个位置的取值必须是 1，也就是确定我们要这个翻 a 个位置还是 b 个位置。

又由于每个连通块的点数至少为 2，所以至多 15 个连通块。于是我们可以状压 dp，记录我们翻了哪些连通块和当前剩多少个位置的胜负状况。

时间复杂度为 $O(2^h h)$ ，期望得分 60 分。

3.4 100 分

考虑每个连通块，都是一个独立的平等游戏，所以可以考虑求它的 sg 值。

如果偶-偶连通块，那么走一步变成奇数，sg 值为 1，所以本身的 sg 值为 0。

如果奇-偶/偶-奇连通块，那么走一步变成奇数或者偶数，sg 值为 0, 1，所以本身的 sg 值为 2。

如果奇-奇连通块，那么走一步变成偶数，sg 值为 0，所以本身的 sg 值为 1。

然后把每个联通的 sg 值算出来异或看是否为 0 即可。