点灯

考虑将问题进行简单的转换，实际上题目所求内容等价于求有多少个位置满足，当前位置是亮着的，而下一个位置是灭的。

考虑对于每一个 $1 \le i < n$ ，将 a_i 和 a_{i+1} 连一条边，这样问题就转换成了有多少条边满足一边是 0 ，一边是 1 。

当修改一种颜色的时候，考虑暴力将所有出边都遍历一次，就可以更新答案，这样效率是 $O(mk)$ 的。

但是如果采用按照度数分块，将度数小于 $\sqrt{n}$ 的点暴力枚举所有出边更新答案，度数大于 $\sqrt{n}$ 的点就单独放着，并记录有多少个 0 和 1 连接着它，可以直接快速计算答案。对于每一次更新之后，都遍历一遍度数大于 $\sqrt{n}$ 的点更新信息，这样就可以做到 $O(m\sqrt{n})$ 的复杂度了。

重构

首先答案是显然的，在不改变奇数之间、偶数之间的相对顺序时，移动距离取到最小值。

关键是要求字典序最小的情况。我们考虑什么情况下交换两个数不会改变移动距离。

假设 $x_1 < x_2$ ，且 x_1 移动到 y_1，x_2 移动到 y_2 ，则根据上述条件有 $y_1 < y_2$ 。

可以发现，当 $y_1 \geq x_2$ 时，交换 y_1, y_2 对移动距离是没有影响的。

我们将所有奇数的始末位置全部记录下来后排序，将初始位置记为 0 ，末位置记为 1 ，则 0011 所对应的就是上述可以交换的情况，而我们所要求的就是将所有的 0 和 1 配对。不难发现，当移动距离取到最小值时，所有的配对的 0 一定在 1 前面。

因此我们可以按顺序遍历所有的位置并用堆维护。遇到 0 则加入堆，遇到 1 从堆中取出编号最小的数，直接维护即可，效率 $O(n\log n)$ 。

消失的序列·改

写在前面的话：

《消失的序列》是我在大概两年前出的一道题目，此次加强，算是弥补上多年前因为此题被爆破而产生的遗憾吧。希望这题不会再被爆破了。

算法 1（ $n \le 9$ ）

暴力枚举即可。

算法 2（$n \le 300$）

考虑转化问题模型。不难发现，最后问题等价为求有多少个满足字典序的排列，并且排列中不存在三个数 i,j,k ，满足 $i<j<k$ 且 $s_k<s_i<s_j$ 。

必要性显然，充分性可以考虑排序过程，能发现栈中的元素从栈顶到栈底一定是单调递增的，因此一定可以排序。

在《消失的序列》中介绍了一种倒序 DP 的做法，结合正序的枚举可以做到 $O(n^3)$ 。不过由于此做法过于复杂且没有意义，就不再这里明述了。

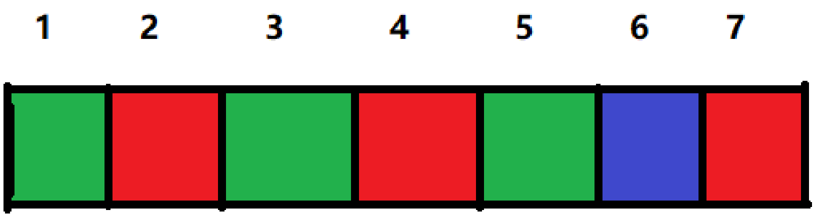
算法 3（$n \le 3000$）

考虑满足条件的排列有什么神奇的性质。

把算法 2 中的性质以另一种角度复述一遍，相当于：对于所有 j ，在 j 之前不存在一个数 i ，在 j 之后不存在一个数 k ，满足 s_i,s_k 都小于 s_j ，且 $s_i>s_k$ 。

考虑这样一个过程，对于一个已知排列 p ，我们从头开始往后扫，如果在 p 中存在不合法三元组 (i,j,k) ，那么我们在扫描到 j 时其实已经可以判断排列不合法了。

可以这样实现这个判断：准备一个长度为 n 的标记数组，扫描到 i 时就把 p_i 打上标记。如下图，绿色为已经标记，红色为还没标记，蓝色为正在标记，即现在在扫描 4 ，且 $p_4=6$ 。



这时，你能发现在 6 之前出现了红色在绿色之前的情况，那么就相当于找到了一组 i,j ，也知道存在 s_k 。此时尽管你不能确定 k 的具体位置，但是不论如何，这个排列都不可能合法了。

这启发我们思考一个问题：如果不是判断排列，而是确定排列，那么在已知 $p_1\sim p_i$ 的情况下， p_{i+1} 可能的取值是什么。

显然， p_{i+1} 可能的取值为从头开始第一个没有被选取的连续段中的所有数，即第一个红色连续段。

接下来思考另外一个问题：如果确定了 $p_1\sim p_i$ ，那么 $p_{i+1}\sim p_n$ 有多少种排放方式，使得排列满足条件。

不难发现，红色连续段一定要按顺序填，在前一个连续段被填满之前不能填下一个连续段。而长度为 l 的连续段能填的方案数为 C_l ，即 Catalan 数的第 l 项。

这样一来就可以得到一个 $O(n^2)$ 的做法。对于给定的排列 A ，从前往后扫描，类似数位 DP 的，把 p 的前 i 位取得和 A 一样，枚举合法的 p_{i+1} 且 $p_{i+1} > A_{i+1}$ ，这样第 $i+2$ 位后的数就没有字典序限制，可以直接计算了。

算法 4（$n \le 10^6$）

能做到算法 3，算法 4 也就呼之欲出了。

扫描的过程相当于每次插入一个数，删去一个红色连续段，再插入两个红色连续段。这部分很好维护。

接下来考虑枚举，不难发现， p_{i+1} 可以填的位置是一段区间，这段区间一定严格包含在一段红色连续段中，那么这部分的贡献就会是一个形如下面的式子：

$$\sum_{i=0}^{x} C_i \cdot C_{a-i}$$

如果每次都直接枚举，那么这样在最坏情况下还是可以达到 $O(n^2)$ 的。但是当 x 很大时，不妨计算下面这个式子：

$$\left(\sum_{i=0}^{a} C_i \cdot C_{a-i}\right) - \left(\sum_{i=0}^{a-x} C_i \cdot C_{a-i}\right)$$

前面那部分是 Catalan 数的卷积，后面的枚举只需要枚举到 $a-x$ 就好了。

~~关于 Catalan 数的卷积这部分，出题人开始傻傻的码了一个 NTT，结果发现答案是 C_{a+1} 。~~

这样一来效率分析同启发式分裂，时间复杂度 $O(n\log n)$ 。