题解：??? 模拟赛

rushcheyo

October 16, 2020

1 小 h 的几何

熟知九点圆圆心是外心 O 和垂心 H 的中点，且 $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$；这里 O 就是原点，于是 $\Omega(A, B, C) = \frac{A+B+C}{2}$。剩下的部分显然，略去。

2 小 w 的代数

我们固定子链中某个点 x，考虑链中编号 $\leq x$ 的点构成的部分，这些点分布在若干个环上；我们考虑这个子链对应的简单路：除了 x 所在的环，其它环上的路径实际上与我们之后的决策无关。而 x 所在的环上如果有至少三个点，则路径已经确定，我们只关心进入环是在哪个点，因此我们只需要在 DP 状态中记录至多 1 个额外点，于是：

- 令 $f(x, y)$ 表示编号最大的点为 x，次大的点为 y，y 不存在或 y 和 x 不在同一个环；
- 令 $g(x, y, S)$ 表示编号最大的点为 x，y 是 x 所在环上的编号最小点，S 只有 3 种取值，描述了这两条路径中哪些可能是最终简单路的一部分。

状态数 $O(n^2)$，转移数 $O(n^3)$，通过预处理可将转移时间降到 $O(1)$，故总时间 $O(n^3)$。可以进一步优化到 $\tilde{O}(n^2)$。

Bonus：能否优化到 $\tilde{O}(n)$?

3 小 y 的数论

全局询问的 $O(n)$ 做法是熟知的，简介如下：

- 如果 k 至少是叶子个数，那么答案显然是全部边权和；
- 否则选择的所有 k 个点都应当是叶子。令 $u_W \rightsquigarrow v_W$ 表示 W 的任意一组直径，首先易证 u_V, v_V 必选，然后易证，k 的最优解包含 $k-1$ 的最优解。那么我们以 u 为根对树做长链剖分，答案就是前 $k-1$ 长的长链长度（包含顶部的轻边）之和。

令 $p_{u,S}$ 表示 S 中包含 u 的最优解（这里假设最优解唯一，不唯一时可以证明任取一组即可），我们还有：

Lemma 3.1 对于任意点 u 和任意点集 $u \in S \subseteq V$，令 u 在 S 中的最远点为 t，$p_{u,S} \cap p_{t,S} \geq k-1$.

证明并不难。

显然有推论为：

Lemma 3.2 对两个任意点集 S 和 T，$\forall x \in S \cup T, p_{x,S\cup T} \subseteq p_{u_S,S} \cup p_{v_S,S} \cup p_{u_T,T} \cup p_{v_T,T} = p_{u_S,S} \cup p_{u_T,T} \cup \{v_S, v_T\}$.

那么首先有一个显然的 $O((n+q)K\log n)$ 做法：对 $[1,n]$ 建线段树，线段树 $[l,r]$ 维护 $p_{u_{[l,r]},[l,r]}$；合并两个点集时我们只需对不超过 $2k$ 个点建立虚树并运行上文所述的全局算法，使用 $O(1)$ LCA 并按 DFS 序归并点集即可达到该复杂度；稍后发现，我们可以将 $[1,n]$ 对 K 分块，对 $O(n/K)$ 个结点建 sparse table，这样预处理时间降到 $O(n\log n)$；询问时将零散块与 sparse table 上两个完整区间的最优解合并即可，单次时间 $O(K)$。

由于线性部分常数实在太大，std 选择了带 log⋯⋯

Bonus：$K \leq n$

4 小 j 的组合

我们先考虑存在哈密顿圈才停止怎么做，记这个时候答案是 g'。事实上，题目中的操作可看做将 v 的经过次数 +1。我们设最后每个点要求的经过次数为 e_i，那么 $g' = \sum_i e_i - 1$. 显然 $e_i \geq d_i$，其中 d_i 是 i 的度数，那么 $g' \geq \sum_i d_i - 1 = n-2$. 另一方面若 $e = d$，取树的 Euler tour representation 即满足要求。故 $g' = n-2$.

那么原题做法就很明显了，g 就是 n 减去树直径的顶点数，证明留作习题。

Bonus：每次选一个点 $\to$ 每次选原树上的一条路径