极其基础的模拟赛题解

Problem A. 基础卷积练习题

这是一道送分题，用高位前缀和维护每种值的数量即可。对应点值相乘变成计算更新每个位置的每种值的数量。

时间复杂度 $O(n^2 2^n)$

Problem B. 基础 fake 练习题

~~欢迎各路乱搞打爆 gen.cpp~~

一句话题解

考虑每个子树内跨过根的候选路径。如果当前候选路径数量大于 s_{rt}，那么删除较浅点最浅的候选路径。证明见下文。

算法1

暴力即可。

期望得分 5 分。

算法2

用 dp_p 表示以 p 为根的子树内最多选多少个。转移考虑这个点有没被覆盖，如果有覆盖，那么枚举最后一条路径，把这条路径外的子树的 dp 值加上。

可以用堆维护 $O(n\log n)$。结合算法1可以获得 15 分。

算法3

讲一种链上做法。

从左到右扫描这条链，考虑维护覆盖当前的点的路径的集合。当集合大小超过当前容量的时候删除右端点最靠右的路径。注意在当前点右移的时候，如果集合中某一条路径没有覆盖当前点，那么应该删除当前点。

时间复杂度 $O(n\log n)$，期望得分 20 分。

算法4

考虑把链上做法直接搬到树上，用可并堆维护覆盖当前点的路径集合。每次删掉较浅点较浅的路径。

时间复杂度 $O(n\log n)$，期望得分 100 分。

因为这是 ~~noip~~ CSP-S 模拟赛，所以大胆猜想不用证明就可以获得 100 分的好成绩。~~Let's set up a greedy problem without proof!~~

但是这是题解，所以要写一下贪心正确性的证明。

考虑这样一个问题，有两种删路径操作：

1. 删掉一条路径，代价为1。
2. 删掉覆盖第 i 个点的所有的路径，代价为 c_i

问删去 m 条给定路径的最小代价。

不难证明，这样一个问题的最小代价大于等于原问题的最大数量。考虑原问题所有选择的路径，删掉其中一条给定路径平均至少需要 1 的代价。第一类操作显然，第二类操作是因为覆盖一个点的路径不超过 c_i。

考虑这个问题怎么做，用 $f_{i,j}$ 表示考虑第 i 个点，子树内还未删除的路径中较浅点都小于等于 j 的最小代价。显然这个函数是一个常值分段函数，并且单调不下降。考虑用一个堆来维护所有分割点的位置，当堆大小大于 c_i 的时候，显然选择删掉覆盖 i 号点覆盖的路径更优。

这样两个问题的做法完全相同，又因为新问题的答案大于等于原问题，这个做法求出了新问题的最小答案，所以求出了原问题的最大答案。

Problem C. 基础图论练习题

算法1

每次修改后暴力 tarjan 求出桥的个数。

期望得分 22 分。

算法2

把删边倒过来就变成了加边，建出边双树，每次加边相当于连接两个连通块或者把边双树上一条链缩起来。

可以使用并查集实现，期望得分 13 分，结合算法1可以得到 35 分。

算法3

大力分块/线段树分治 + LCT，由于和标算关系不大而且出题人也没实现过，在此不作赘述。

期望得分 49 分，结合算法2可以得到 62 分。

算法4

离线之后，每条边存在的时间可以被看作一个区间 $[l_i, r_i]$。

把每个区间插入线段树中，可以发现一个子树需要用到的点只有在插入的时候经过这个节点的边的端点，其他点都可以缩起来。

时间复杂度就是每条边插入时经过的线段树节点个数的总和，即 $O((m+q)\log q)$（乘上一个大常数）。

期望得分 100 分，需要优秀的实现。