

20pts:

先考虑 n 为偶数的情况，并令 $m = \frac{n}{2}$ 。

限制就是

$$a_1 > 0$$

$$a_1 + a_2 - a_n > 0$$

$$a_1 + a_2 + a_3 - a_{n-1} - a_n > 0$$

...

因为 $a_2 - a_n, a_3 - a_{n-1}$ 等都是负数或0，所以左边会越来越小，只需满足最紧的限制即可。

因为有一个 a_{m+1} 不在不等式中，所以先枚举它的值，假设为 x 。

将 x 和前面的 m 个数作差，要满足差不递减且每个差 $\in [0, x)$ 的条件。

同理，将后面的 $m - 1$ 个数和 x 作差，要满足差不递减且每个差 $\in [0, n - x]$ 的条件。

此外还要满足不等式限制，即 x 与前 m 个数的差+后 $m - 1$ 个数与 x 的差 $< x$ 。

前半部分设 $f_{i,j}$ 表示确定了 i 个数，总和为 j 的方案数。

如果从小到大枚举差，复杂度 $O(n^3)$ ，但是这样显然有很多冗余的转移，比如转移到某个 i', j' ，后面无论怎么填都会出现当 $i' = m$ 时 j 超过 n 的情况。

而倒着枚举差就可以避免，因为 $f_{i,j} > f_{i+1,j+k}$ 时，一定满足 $j \geq i * k$ ，即 $i * k \leq n$ 且 $j \leq n$ ，所以复杂度是 $O(n^2 \ln n)$ ，实际上达不到。

(当然，顺着枚举并手动判上界理论上也可行，两种做法本质一样)

后半部分如果也这么做会错，因为在枚举答案时差的总和 $< x$ 只满足了左边的差的范围限制，而右边的差的限制是 $n - x$ ，无法满足。

考虑另一种计数方法，因为 m 固定了，所以记不记确定了几个数都没关系，确定后面的差相当于每次选一个不超过 $m - 1$ 的后缀并整体+1，只要限制后缀的个数就可以限制差的范围。

因此设 $g_{i,j}$ 表示选了 i 个后缀（即 $a_{n-x} = i$ ），总和为 j 的方案数。

转移、复杂度分析和 f 类似。

最后合并两边即可。

对于 n 为奇数的情况，只需把第 $m + 1$ 个数看做偶数情况中的第 $m + 1$ 个数，转换成偶数情况中 m 和 $m + 1$ 重叠的情况，即偶数中为 $f_{\lceil \frac{n}{2} \rceil, i}$ ，奇数中变成 $f_{\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1, i}$ ，因为枚举的 x 和第 $\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1$ 个 a 重叠，所以这个差显然为0。

50pts:

上面的 dp 是没有前途的，考虑另一种 dp 。

将 a 差分成 b ，并令 $b_0 = 1, b_i \geq 0$ ，就可以去除单调限制，然后根据上文提到的最紧限制列出式子，将 a 表示成 b ，令 $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ ，合并同类项可以得到 $\sum_{i=1}^m (i - 2)b_i + \sum_{i=m+1}^n (n - i + 1)b_i \leq 0$ 。

在原题中， $\sum_{i=1}^n b_i \leq n - 1$ 和 $\sum_{i=1}^m (i - 2)b_i + \sum_{i=m+1}^n (n - i + 1)b_i \leq 0$ 两个条件都要满足，但如果直接记两个和会很慢，考虑确定了 $b_2 \sim b_n$ 后 b_1 的取值范围。

令上式中的 $i-2$ 和 $n-i+1$ 为 c_i 。

令 $S = \sum_{i=2}^n (c_i + 1)b_i$, $T = \sum_{i=2}^n b_i$ 。

显然 $0 \leq S - T \leq b_1 \leq n - 1 - T$ 。

所以 b_1 的取值范围就是 $0 \sim n - 1 - S$, 即有 $n - S$ 种取值。

只需对 $2 \sim n$ 做一个背包, 然后求 $\sum_{S=0}^n (n - S)f_S$ 即可。

时间复杂度 $O(n^2)$, 而且远远跑不满。

100pts:

上面的 dp 和上面的上面的 dp 是没有前途的, 考虑生成函数。

先考虑 n 为偶数的情况。

令 $m = \frac{n}{2}$, 根据上一个做法可以显然地写出 f 的生成函数 $F(x) = \frac{1}{(1-x)[(1-x^2)\dots(1-x^m)]^2}$ 。

答案显然是 $[x^n] \frac{x^F(x)}{(1-x)^2}$ 。

(以下的...表示无穷多项)

于是上式 $= [x^n] \frac{1}{(1-x)[(1-x)\dots(1-x^m)]^2} = [x^n] \frac{[(1-x^{m+1})\dots]^2}{(1-x)[(1-x)\dots]^2}$ 。

由于 $(m+1) * 2 > n$, 所以在模意义下 $(1 - x^{m+k})^2 = 1 - 2x^{m+k}$,

于是上式 $= [x^n] \frac{[(1-2x^{m+1})(1-2x^{m+2})\dots]^2}{(1-x)[(1-x)\dots]^2}$ 。

由于 $m + k_1 + m + k_2 > n$, 所以在模意义下 $(1 - 2x^{m+k_1})(1 - 2x^{m+k_2}) = 1 - 2x^{m+k_1} - 2x^{m+k_2}$

,
于是上式 $= [x^n] \frac{[1-2x^{m+1}-2x^{m+2}-\dots]}{(1-x)} * [\frac{1}{(1-x)\dots}]^2$ 。

左半部分相当于前缀和, 可以 $O(n)$ 计算, 令其为 D 。

右半部分令 $G = (1-x)\dots$,

然后由五边形数定理可知, 由于 G 中有无穷项, 所以 G 中前 n 项只有 $O(\sqrt{n})$ 个非零项, 而且它们的次数是有规律的, 形如 $\frac{i(3i+1)}{2}$, 即广义五边形数。

具体证明可以上网找, 这里不再赘述。

现在问题变成了求 $D * G^{-1} * G^{-1}$ 。

一种无脑做法就是用 MTT 实现求逆+多项式乘法, 复杂度 $O(n \log_2 n)$, 但代码复杂度和常数巨大, 不具有实际意义。

考虑另一种做法。

上述问题等价于求 $A * B^{-1}$ 。

若 b_0 可逆, 则令 $C = A * B^{-1}$ 。

首先确定 C 的零次项, 然后对于 $i \geq 1$ 显然有 $c_i = \frac{(a_i - \sum_{j>0} c_j b_{i-j})}{b_0}$ 。

注意到 G 只有 $O(\sqrt{n})$ 个位置有值, 所以计算一个 c_i 的复杂度是 $O(\sqrt{n})$, 总复杂度 $O(n\sqrt{n})$, n 为奇数的做法类似, 这里不再赘述。

虽然这个做法的理论复杂度不如 MTT 优, 但是常数和码量极其优秀。

