水题选讲

ljfcnyali

September 29, 2020

有一棵 n 个节点的树，节点编号为 $1 \sim n$，记录这棵树的方式是记录下每条边连接的两点的编号。现在，你不知道这些编号具体是多少，你只知道它们在十进制下的位数。请你构造出一棵满足要求的树并输出方案，或判断没有满足要求的树。

$n \leq 2 \times 10^5$

首先发现我们只关心两个编号之间的边的数量，所以记 $a_{i,j}$ 表示 i 个问号的边与 j 个问号的边的数量，令 m 表示 n 的位数。

首先发现我们只关心两个编号之间的边的数量，所以记 $a_{i,j}$ 表示 i 个问号的边与 j 个问号的边的数量，令 m 表示 n 的位数。

下面给出一种构造方案，先钦定 m 个黑点，并且这些黑点所代表的问号数不同，再将这 m 个黑点间连 $m-1$ 条边组成一棵树，剩下的所有点均只往黑点连边

首先发现我们只关心两个编号之间的边的数量，所以记 $a_{i,j}$ 表示 i 个问号的边与 j 个问号的边的数量，令 m 表示 n 的位数。

下面给出一种构造方案，先钦定 m 个黑点，并且这些黑点所代表的问号数不同，再将这 m 个黑点间连 $m-1$ 条边组成一棵树，剩下的所有点均只往黑点连边

这里给出一个简要证明，即证明任意一棵树一定可以转化成这样的形式

首先发现我们只关心两个编号之间的边的数量，所以记 $a_{i,j}$ 表示 i 个问号的边与 j 个问号的边的数量，令 m 表示 n 的位数。

下面给出一种构造方案，先钦定 m 个黑点，并且这些黑点所代表的问号数不同，再将这 m 个黑点间连 $m-1$ 条边组成一棵树，剩下的所有点均只往黑点连边

这里给出一个简要证明，即证明任意一棵树一定可以转化成这样的形式

首先钦定一个问号数为 1 的黑点作为根，那么所有与其相连的问号数为 1 的点可以缩成当前黑点，接下来在所有与当前黑点有边的点中任意挑选一个问号数为 2 的点，并重复缩点的过程

首先发现我们只关心两个编号之间的边的数量，所以记 $a_{i,j}$ 表示 i 个问号的边与 j 个问号的边的数量，令 m 表示 n 的位数。

下面给出一种构造方案，先钦定 m 个黑点，并且这些黑点所代表的问号数不同，再将这 m 个黑点间连 $m-1$ 条边组成一棵树，剩下的所有点均只往黑点连边

这里给出一个简要证明，即证明任意一棵树一定可以转化成这样的形式

首先钦定一个问号数为 1 的黑点作为根，那么所有与其相连的问号数为 1 的点可以缩成当前黑点，接下来在所有与当前黑点有边的点中任意挑选一个问号数为 2 的点，并重复缩点的过程

那么最后你一定可以找到一个包含所有问号的黑点连通块，这样将所有剩下的白点与白点间连边断掉，一定可以找到一个黑点接上

这样，问题就变成了枚举一个 m 个黑点的树，再将剩下的所有边往黑点上连

这样，问题就变成了枚举一个 m 个黑点的树，再将剩下的所有边往黑点上连

考虑如何验证一个树是否合法，首先将树边和相同问号的边减去得到一个 $a_{i,j}$ 矩阵，然后我们有一些限制条件：

这样，问题就变成了枚举一个 m 个黑点的树，再将剩下的所有边往黑点上连

考虑如何验证一个树是否合法，首先将树边和相同问号的边减去得到一个 $a_{i,j}$ 矩阵，然后我们有一些限制条件：

对于两种问号数的点 x, y ，一定有 x 向 y 的黑点数加 y 向 x 的黑点数等于 $a_{x,y}$

这样，问题就变成了枚举一个 m 个黑点的树，再将剩下的所有边往黑点上连

考虑如何验证一个树是否合法，首先将树边和相同问号的边减去得到一个 $a_{i,j}$ 矩阵，然后我们有一些限制条件：

对于两种问号数的点 x, y ，一定有 x 向 y 的黑点数加 y 向 x 的黑点数等于 $a_{x,y}$

还有每个问号的点数有一个限制，所以可以做一个二分图多重匹配验证是否有解

这样，问题就变成了枚举一个 m 个黑点的树，再将剩下的所有边往黑点上连

考虑如何验证一个树是否合法，首先将树边和相同问号的边减去得到一个 $a_{i,j}$ 矩阵，然后我们有一些限制条件：

对于两种问号数的点 x, y ，一定有 x 向 y 的黑点数加 y 向 x 的黑点数等于 $a_{x,y}$

还有每个问号的点数有一个限制，所以可以做一个二分图多重匹配验证是否有解

二分图左侧 $\frac{m\times(m-1)}{2}$ 个点，表示每种边个数，右侧为 m 个点，表示每种点个数，左侧 x, y 所对应的边向右边 x, y 分别连 INF ，判断是否满流并输出方案

给定一个无向图，无向图上再连接 n 条边，即 $i \to i\%n+1$，边权为 10^9

设 $f(u,v)$ 表示源点为 u 汇点为 v 的图的最小割，求 $\sum_u \sum_v f(u,v)$

满足 $n \le 7 \times 10^3, m \le 10^5, w \le 10^4$

首先介绍一个算法：最小割树，即建出一棵带边权的树满足 $f(u,v)$ 等于 $u \to v$ 路径上边权最小值

PKUWC2020D2T3 火山哥与最小割

首先介绍一个算法：最小割树，即建出一棵带边权的树满足 $f(u,v)$ 等于 $u \to v$ 路径上边权最小值

建立最小割树流程为从 n 个点的点集中随机两个点 u,v ，求出 $f(u,v)$ 并在最小割树上连一条 u 到 v 的边，边权为 $f(u,v)$ ，接下来点集由这个最小割被划分成了两个没有连边的子集，递归建边

首先介绍一个算法：最小割树，即建出一棵带边权的树满足 $f(u,v)$ 等于 $u \to v$ 路径上边权最小值

建立最小割树流程为从 n 个点的点集中随机两个点 u,v ，求出 $f(u,v)$ 并在最小割树上连一条 u 到 v 的边，边权为 $f(u,v)$ ，接下来点集由这个最小割被划分成了两个没有连边的子集，递归建边

定理一：对于最小割树上一条 u,v 的连边，记 p 为 u 子树中的一个点，q 为 v 子树中一个点，有 $f(u,v) \geq f(p,q)$

首先介绍一个算法：最小割树，即建出一棵带边权的树满足 $f(u, v)$ 等于 $u \to v$ 路径上边权最小值

建立最小割树流程为从 n 个点的点集中随机两个点 u, v ，求出 $f(u, v)$ 并在最小割树上连一条 u 到 v 的边，边权为 $f(u, v)$ ，接下来点集由这个最小割被划分成了两个没有连边的子集，递归建边

定理一：对于最小割树上一条 u, v 的连边，记 p 为 u 子树中的一个点，q 为 v 子树中一个点，有 $f(u, v) \geq f(p, q)$

考虑反证法，设 $f(u, v) < f(p, q)$ 表示当 u, v 两个点无法联通时，p, q 用 $f(u, v)$ 的代价不能割开，很明显与已知条件矛盾

定理二：对于任意三个点 x, y, z 有 $f(x, y) \geq min(f(y, z), f(x, z))$

定理二：对于任意三个点 x, y, z 有 $f(x, y) \geq min(f(y, z), f(x, z))$

画图不易，手绘证明

定理二：对于任意三个点 x, y, z 有 $f(x, y) \geq min(f(y, z), f(x, z))$

画图不易，手绘证明

推论一：对于两点 u, v 有 $f(u, v) \geq min(f(u, w_1), f(w_1, w_2) \ldots f(w_k, v))$ 其中 w_i 组成 $u \to v$ 的一条路径

定理二：对于任意三个点 x, y, z 有 $f(x, y) \geq min(f(y, z), f(x, z))$

画图不易，手绘证明

推论一：对于两点 u, v 有 $f(u, v) \geq min(f(u, w_1), f(w_1, w_2) \dots f(w_k, v))$ 其中 w_i 组成 $u \to v$ 的一条路径

由定理二易证

定理二：对于任意三个点 x, y, z 有 $f(x, y) \geq min(f(y, z), f(x, z))$

画图不易，手绘证明

推论一：对于两点 u, v 有 $f(u, v) \geq min(f(u, w_1), f(w_1, w_2) \dots f(w_k, v))$ 其中 w_i 组成 $u \to v$ 的一条路径

由定理二易证

推论二：对于两点 u, v 设 $f(x, y) = min(f(u, w_1), f(w_1, w_2) \dots f(w_k, v))$，有 $f(u, v) = f(x, y)$

PKUWC2020D2T3 火山哥与最小割

定理二：对于任意三个点 x, y, z 有 $f(x,y) \geq min(f(y,z), f(x,z))$

画图不易，手绘证明

推论一：对于两点 u, v 有 $f(u,v) \geq min(f(u,w_1), f(w_1,w_2)\ldots f(w_k,v))$ 其中 w_i 组成 $u \rightarrow v$ 的一条路径

由定理二易证

推论二：对于两点 u, v 设 $f(x,y) = min(f(u,w_1), f(w_1,w_2)\ldots f(w_k,v))$，有 $f(u,v) = f(x,y)$

因为由推论一有 $f(u,v) \geq f(x,y)$ 再因为定理一有 $f(u,v) \leq (x,y)$ 所以 $f(u,v) = f(X,y)$，这就是最小割树的性质

PKUWC2020D2T3 火山哥与最小割

观察这道题，如果我们建出一棵最小割树，就可以解决该题，而最小割树需要做 n 次最小割，则问题转化为 $O(n)$ 的求出这个图的最小割

观察这道题，如果我们建出一棵最小割树，就可以解决该题，而最小割树需要做 n 次最小割，则问题转化为 $O(n)$ 的求出这个图的最小割

首先我们钦定随机出来的 u, v 两点编号为 $i, i+1$ ，则一定要断掉环上 $i, i+1$ 的一条边和某条 $j, j+1$

PKUWC2020D2T3 火山哥与最小割

观察这道题，如果我们建出一棵最小割树，就可以解决该题，而最小割树需要做 n 次最小割，则问题转化为 $O(n)$ 的求出这个图的最小割

首先我们钦定随机出来的 u, v 两点编号为 $i, i+1$ ，则一定要断掉环上 $i, i+1$ 的一条边和某条 $j, j+1$

因为环的限制保证了 $i+1 \to j$ 都属于一个连通块，剩下的属于另一个连通块，那么我们就只需要断掉这两个连通块两两之间的连边即可

观察这道题，如果我们建出一棵最小割树，就可以解决该题，而最小割树需要做 n 次最小割，则问题转化为 $O(n)$ 的求出这个图的最小割

首先我们钦定随机出来的 u, v 两点编号为 $i, i+1$ ，则一定要断掉环上 $i, i+1$ 的一条边和某条 $j, j+1$

因为环的限制保证了 $i+1 \to j$ 都属于一个连通块，剩下的属于另一个连通块，那么我们就只需要断掉这两个连通块两两之间的连边即可

具体的把边丢到邻接矩阵上，做一个前缀和就可以矩阵求和了

Thanks