1 歪比歪比

不妨只考虑一个序列 A、有 n 个 $-m$、序列总和为 r 的情况。此时序列总长度一定为 $len = n(m+1)+r$，有 $nm+r$ 个位置是 $+1$。可以观察到，对于任意一个排列，它的所有 len 个循环左移同构序列中，一定有恰好 r 个是满足“所有前缀和都 >0”的条件的。证明如下：

我们将序列 A 进行无限循环延拓：

$$A\ = \{a_1, a_2, ..., a_{len}, a_1, a_2, ...\}$$

，并记

$$pre[n] = \sum_{i=1}^{n} a'[i]$$

记 $last_i = max\{j|pre[j] = i\}, i \in [1, r]$，也就是对于前缀和值 $1, 2, ..., r$，我们都记下它最后出现的位置。因为 $\lim_{i\to+\infty} pre[i] = +\infty$，所以 last 值一定存在。

可以看到，以 $last_i$ 为起点的 A’ 的子区间：$A\ [last_1, last_1 + len), ..., A\ [last_r, last_r + len)$，都是前缀和都 >0 的区间，且都对应原序列 A 的某个循环左移区间。另一方面 $\forall i \neq j\ , last_i, last_j$ 对应的区间也不可能相同 (不然他们对应位置前缀和就会相差 r 的倍数, $pre[last_i] == pre[last_j] + c \times r, pre[last_i + 1] == pre[last_j + 1] + c \times r, ...$)。所以对于一个序列，满足“所有前缀和都 >0“的序列个数，就为 $\binom{len}{n} \times \frac{r}{len}$。

对于两个序列的情况，可以考虑枚举分 A 序列有 x 个 $-m$,B 序列有 $n-x$ 个 $-m$, 用前述公式求卷积即可。

但其实两个序列的情况完全可以拼成一个新的大序列，其中 $-m$ 的位置有 n 个，序列总和为 $S_A + S_B$。对于某个合法的大序列 C，找到其前缀和 $pre[]$ 值为 r 的最后的位置 x 并从此处断开：$A = C[1, r], B = C[r + 1, len]$

这个大序列的方案和原来的 AB 有序对一一对应。所以答案也就是这个大序列的合法方案数 $\binom{n(m+1)+S_A+S_B}{n} \times \frac{S_A+S_B}{n(m+1)+S_A+S_B}$。

预处理阶乘之后每个询问就可以 $O(\log P)$ 回答了。时间复杂度 $O(max\{nm + S_A + S_B\} + T \log P)$。

2 歪比巴卜

发现 $\binom{12}{6} = 924 > 920$，因此可以通过从 $1...12$ 中选 6 个的方案来唯一表示 $1...920$ 中的每一个数。

对于每次 $helpAlice()$，记表示 x 的集合为 X，表示 y 的集合为 Y，找到任意一个在 X 中而不在 Y 中的元素，并将其返回。由于 x, y 互不相同，这样的元素一定存在。

对于每次 $helpBob()$，记表示 z 的集合为 Z，若 $k \in Z$，则说明 $z = x$，否则说明 $z = y$。

时间复杂度 $O(2^{12} + T)$。

3 乌拉乌拉

显然 $f(a,b)$ 必不可能等于 0，因为 $i=p-1$ 时一定有 $a^i\equiv 1\equiv b^{p-1}(\%p)$。

定义小于质数 p 的正整数 a 关于 p 的阶为使得 $a^k\equiv 1(\%p)$ 的最小的正整数 a，记作 $ord(a)$。考虑如何求一个数 a 的阶。显然 $\%p$ 意义下的阶一定是 $p-1$ 的约数，所以我们可以对 $p-1$ 质因数分解，然后求阶关于 $p-1$ 的每个质因子的幂次。具体就是枚举 $p-1$ 的每个质因子 q_i，不妨设其对应的指数为 u_i，然后从小到大枚举 q_i 的指数 t_i，如果到了某个 t_i 满足 $a^{\frac{p-1}{q_i^{u_i-t_i}}}\equiv 1(\%p)$，则表明 a 的阶在 q_i 下的指数就是 t_i。

记 $c(p-1)$ 为 $p-1$ 的不同质因子个数，那么求一次阶要枚举 $c(p-1)$ 个质因子，对于每个质因子 q_i，都要用 $O(\log p)$ 的时间求出 $a^{\frac{p-1}{q_i^{u_i}}}$ 的值，而每次枚举指数可以 $O(\log q_i)$ 转移，所以转移一个质因子的复杂度是 $O(\log q_i^{u_i}+\log p)$ 的，这样暴力求一次阶的总复杂度是 $O(c(p-1)\log p)$。当然预处理 $a^{\frac{p-1}{q_i^{u_i}}}$ 时可以用分治来优化，复杂度可以降到 $O(\log c(p-1)\log p)$。具体分治方法如下：每次分治会求一个区间 $[l,r]$ 内每个 i 对应的 $a^{\frac{p-1}{q_i^{u_i}}}$，分治进这个区间前已经求得了 $now=a^{\prod_{i\notin[l,r]}q_i^{u_i}}$, 分治进左右区间时左边代入 $now=now^{\prod_{i\in[mid+1,r]}q_i^{u_i}}$, 右边代入 $now=now^{\prod_{i\in[l,mid]}q_i^{u_i}}$，这样分治过程中每层都是 $O(\log P)$ 的，一共 $O(\log c(p-1))$ 层。

令 r 为 p 的任一原根，$a\equiv r^x(\%p), 1<X<p-1$, 则有 $ord(a)=\frac{p-1}{gcd(x,p-1)}$。令 $a\equiv r^x(\%p), b\equiv r^y(\%p), 1<x,y<p-1$，则由裴蜀定理可得 $\exists j>0$ 满足 $a^i\equiv b^j(\%p)$ 当且仅当 $gcd(y,p-1)|xi$。那么就有

$$f(a,b)=\frac{gcd(lcm(x,y),p-1)}{gcd(x,p-1)}$$

$$=\frac{\frac{p-1}{gcd(x,p-1)}}{\frac{p-1}{lcm(gcd(x,p-1),gcd(y,p-1))}}$$

$$=\frac{\frac{p-1}{gcd(x,p-1)}}{gcd(\frac{p-1}{gcd(x,p-1)},\frac{p-1}{gcd(y,p-1)})}$$

$$=\frac{ord(a)}{gcd(ord(a),ord(b))}$$

那么对于一对 a,b,

$$f(a,b)\times f(b,a)=\frac{ord(a)ord(b)}{gcd^2(ord(a),ord(b))}$$

，总答案就是

$$\sum_d\sum_a\sum_b[gcd(ord(a),ord(b))=d]\frac{ord(a)ord(b)}{d^2}$$

注意到这个过程本质上就是对每个质因子次数取 min 的卷积，因此可以通过类似 FWT 和高位前缀和的方法来实现。

使用 Pollard_Rho 算法分解质因数，总复杂度为 $O(p^{\frac{1}{4}}+n\log c(p-1)\log p+d(p-1)c(p-1))$，其中 $c(p-1)$ 为 $p-1$ 质因子数量，$d(p-1)$ 为 $p-1$ 因子个数，可以验证在 10^{18} 范围内它们分别不超过 15 和 105000。