YnOIP 2020 模拟赛

rushcheyo

October 29, 2020

题目名称	小 h 的几何	小 w 的代数	小 y 的数论	小 j 的组合
源文件名	`geometry.cpp`	`algebra.cpp`	`number.cpp`	`combo.cpp`
题目类型	传统型	传统型	传统型	传统型
输入	`stdin`	`stdin`	`stdin`	`stdin`
输出	`stdout`	`stdout`	`stdout`	`stdout`
时间限制	1 s	1 s	4 s	1 s
内存限制	1 GiB	1 GiB	1 GiB	1 GiB
编译开关	`-DONLINE_JUDGE -mx32 -O2 -std=c++11`			

1. 代码长度应当小于 512 KiB。
2. 提交时**需要**建子文件夹。
3. 系统栈上限与题目的内存限制相同。
4. 输入输出中，同行整数间以单个空格隔开；每行以单个 `\n` 结尾。
5. 操作系统：Ubuntu，编译器：G++ 10.2.0。
6. 评测机位长 64 bits，但注意编译使用 x32 ABI，一个指针仅占 4 bytes 空间。
7. **题目难度与题目顺序无关**。
8. 希望大家认真完成，出题人实在是很辛苦 :D

1 小 h 的几何

我是小 h，我是世界级几何大师。

我希望你了解一些定义。我可以证明三角形的三条高交于一点，我把这点称作垂心；我还可以证明三角形三边的中点、三条高的垂足、三角形三个顶点与垂心连线的中点、共九个点在一个圆上。我把这个圆叫九点圆，并记 $\triangle ABC$ 的九点圆圆心为 $\Omega(A,B,C)$。

现在我在单位圆（即 $\{(x,y)|x\in\mathbb{R},y\in\mathbb{R},x^2+y^2=1\}$）上放置 n 个两两不同的点 $P_1,P_2,\ldots,P_n$，其中 $P_i(\cos\theta_i,\sin\theta_i)$。我还在这 n 个点中等概率随机三个不同点，你能求出它们九点圆圆心的期望吗？形式化的说，你需要输出 $\frac{6}{n(n-1)(n-2)}\sum\limits_{1\le i<j<k\le n}\Omega(P_i,P_j,P_k)$。

这里我定义两个点 $(a,b),(c,d)$ 的和为 $(a+c,b+d)$。

1.1 输入格式

第一行一个正整数 n；

下面 n 行，每行一个整数 q_i，$\theta_i=\dfrac{q_i}{10^9}\pi$。

1.2 输出格式

仅一行两个小数 x,y，表示你求出的答案点坐标为 (x,y)。若我的标准答案为 (x_0,y_0)，你的答案获得满分当且仅当 $\frac{|x-x_0|}{\max(|x_0|,1)}\le 10^{-9}$ 且 $\frac{|y-y_0|}{\max(|y_0|,1)}\le 10^{-9}$。

1.3 样例输入

```
3
100000000 200000000 300000000
```

1.4 样例输出

```
1.173929381481287 0.852909620521184
```

1.5 子任务

对所有数据，保证 $3\le n\le 5\times10^5, 1\le q_i\le 2\times10^9, q_i\ne q_j(\forall i\ne j)$。

1. $n\le 20$（20 分）
2. $n\le 200$（30 分）；
3. $n\le 2000$（20 分）；
4. $n=5\times10^5,\theta_k=\frac{2k\pi}{n}$（20 分）；
5. 没有特殊性质（10 分）。

2 小 w 的代数

我是小 w，我会个锤子代数。

我定义仙人掌是 n 个点 m 条边的简单无向连通图 $G(\{V_1, V_2, \ldots, V_n\}, E)$，满足任意两点间最多有两条边不相交的路径。那么我看出这里有一个不等式成立：$n-1 \le m \le n-1+\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$。

我定义一个非空点集 S 是「**子链**」，当且仅当存在一条不经过重复点的路径 P 包含 S 的所有点；令 S 中点被 P 经过的顺序依次为 $V_{s_1}, V_{s_2}, \ldots, V_{s_{|S|}}$，若 $\forall 1 \le i < |S|, s_i < s_{i+1}$ 成立，我称 S 是「**好链**」。

现在我给你一棵仙人掌，请你计算**好链**的数量对 998244353 取余的结果。

2.1 输入格式

第一行两个正整数 n, m；

下面 m 行，每行两个整数 (a, b)，表示 $(V_a, V_b) \in E$，保证 $a \ne b$，无序对 (a, b) 最多出现一次。

2.2 输出格式

仅一行一个整数表示答案。

2.3 样例输入

```
6 6
1 5
1 6
3 5
1 3
4 6
2 5
```

2.4 样例输出

```
26
```

2.5 样例解释

所有的好链列举如下：

$$\{V_1\}, \{V_1, V_2\}, \{V_1, V_3\}, \{V_1, V_3, V_5\}, \{V_1, V_4\}, \{V_1, V_5\}, \{V_1, V_6\},$$

$$\{V_2\}, \{V_2, V_3\}, \{V_2, V_3, V_4\}, \{V_2, V_3, V_6\}, \{V_2, V_4\}, \{V_2, V_5\}, \{V_2, V_5, V_6\}, \{V_2, V_6\},$$

$$\{V_3\}, \{V_3, V_4\}, \{V_3, V_5\}, \{V_3, V_5, V_6\}, \{V_3, V_6\},$$

$$\{V_4\}, \{V_4, V_5\}, \{V_4, V_6\}, \{V_5\}, \{V_5, V_6\}, \{V_6\}.$$

2.6 子任务

对所有数据，保证 $1 \leq n \leq 500$，$m = O(n)$ 的事实已在题目中说明。

1. $n \leq 10$（10 分）；
2. $n \leq 20$（10 分）；
3. $m = n - 1$，第 $i(1 \leq i < n)$ 条边连接 V_i 和 V_{i+1}（10 分）；
4. $m = n - 1$，第 $i(1 \leq i < n)$ 条边连接 V_1 和 V_{i+1}（10 分）；
5. $m = n - 1$（15 分）；
6. $m = n$（15 分）；
7. $n \leq 50$（15 分）；
8. $n \leq 150$（10 分）；
9. 没有特殊性质（5 分）。

3 小 y 的数论

我是小 y，数论太难了，我只会树论。树是指 $n(n \ge 1)$ 个点 $n-1$ 条边的连通无向图。

我有一棵树 $T(V=\{V_1,V_2,\dots,V_n\},E)$，树有边权 $\omega : E \mapsto \mathbb{Z}^+$. 定义 $S \subseteq E$ 的权值为 $\omega(S)=\sum_{e\in S}\omega(e)$. 定义 $R(V',E')$ 是 T 的**连通子树**，当且仅当 R 是树，$V' \subseteq V$，$E' \subseteq E$，定义 R 的权值 $\omega(R)=\omega(E')$。定义 $S \subseteq V$ 的 Steiner 树为 $f(S)=\min\{\omega(R)|S\subseteq V'\}$，其中 $R(V',E')$ 是连通子树.

我有 q 次询问，第 i 次给出 L_i,R_i,k_i，请你给出 $\max\{f(S)|S\subseteq\{V_{L_i},V_{L_i+1},\dots,V_{R_i}\},|S|=k_i\}$.

3.1 输入格式

第一行一个整数 n。

下面 $n-1$ 行，每行三个整数 a,b,z，表示 $(V_a,V_b)\in E$，且 $\omega[(V_a,V_b)]=z$。保证 $1\le z\le 10^9$.

下面一行一个整数 q。

下面 q 行，第 i 行三个整数 L_i,R_i,k_i. 保证 $1\le L_i\le L_i+k_i-1\le R_i\le n$.

3.2 输出格式

q 行，每行一个整数表示答案。

3.3 样例输入

```
10
1 2 2
2 3 3
3 4 2
1 5 7
2 6 7
4 7 1
1 8 3
4 9 6
7 10 4
10
5 10 5
4 9 6
10 10 1
2 6 3
6 9 3
6 9 4
7 9 2
1 3 2
1 7 3
3 8 3
```

3.4 样例输出

```
35
31
0
21
23
24
16
5
22
22
```

3.5 子任务

设 $K = \max\{k_i\}$。

对所有数据，保证 $1 \le n \le 3 \times 10^5, 1 \le q \le 10^4, K \le 100$.

1. $n, q \le 10$（15 分）；
2. $n, q \le 100$（15 分）；
3. $n, q \le 1000$（10 分）；
4. $n, q \le 5000$（10 分）；
5. $K = 2$（15 分）；
6. $K = 3$（15 分）；
7. $K \le 10$（10 分）；
8. 没有特殊性质（10 分）。

4 小 j 的组合

我是小 j，我有一道组合题，和一棵树 $G(V,E)$。

你要在图 G 上玩一个操作游戏，每次操作你先置 $G'=G$，然后选择一个顶点 $v\in V$，给 G' 加入一个顶点 v'；之后你要对于 $\forall u\in V,(u,v)\in E$，给 G' 加入一条边 (u,v')；最后把 G 替换为 G'，开始下一轮操作。

当然你一直这样操作下去也没有意思。所以某次操作开始前，若 G 存在一条**哈密顿路**，我就会把游戏终止。哈密顿路呢就是说从任意点出发、不重复地经过所有点、以任意点结束的一条简单路径。

现在我要你求出最少的操作次数及对应的步骤，使得游戏终止。众所周知判断图是否存在哈密顿路是 NPC 问题，所以你得报告一条哈密顿路。

4.1 输入格式

第一行一个整数 n，那么 G 的顶点集初始为 $\{V_1,V_2,\ldots,V_n\}$.

下面 $n-1$ 行，每行两个整数 (a,b)，表示 $(V_a,V_b)\in E$.

4.2 输出格式

第一行一个整数，表示所求的最少操作次数 g。g 是一个有限的数，我可以明确地告诉你这一点。

第二行 g 个整数 $u_1,u_2,\ldots,u_g$，那么第 i 次操作是选择 $v=V_{u_i},v'=V_{n+i}$，容易看出 $1\le u_i\le n+i-1$。

最后一行 $n+g$ 个整数 $p_1,p_2,\ldots,p_{n+g}$，表示终止时发现了一条哈密顿路 $V_{p_1}\to V_{p_2}\to\ldots\to V_{p_{n+g}}$。

4.3 样例输入

```
7
3 5
6 1
7 5
5 1
5 2
2 4
```

4.4 样例输出

```
2
5 5
4 2 9 3 8 7 5 1 6
```

4.5 子任务

对所有数据，保证 $3\le n\le 100$。

对于每个数据点，如果你的答案只有 g 正确，那么你可以获得 60% 的分数，但注意这种情况下你需要输出一个**格式正确**的答案，即输出了数量正确的数且满足 $1\le u_i\le n+i-1, 1\le p_i\le n+g$，否则**会被判为 0 分**；如果你的答案 g 不正确，但你的操作方案合法且 $g\le 10^4$，你同样可以获得 60% 的分数；你在每个子任务的得分是每个数据点得分的最小值。

1. $n\le 5$（15 分）；

2. $n \leq 10$（15 分）；

3. 第 $i(1 \leq i < n)$ 条边连接 V_i 和 V_{i+1}（15 分）；

4. 第 $i(1 \leq i < n)$ 条边连接 V_1 和 V_{i+1}（15 分）；

5. 第 $i(1 \leq i < n)$ 条边连接 $V_{\lceil \frac{i}{2} \rceil}$ 和 V_{i+1}（10 分）；

6. 每个点最多和 3 个其他顶点相连（10 分）；

7. $n \leq 20$（10 分）；

8. 没有特殊性质（10 分）。