

A.使命

算法零

为什么树会转, 欧几里得距离是什么?

期望得分 0。

算法一

既然是树形结构转来转去和齿轮没什么关系那就去掉齿轮只留下连边关系吧。

直接假设根的坐标为 $(0, 0)$ 。

维护每个节点连向父亲边的绝对角度。

旋转之后可以由父节点坐标得到当前点坐标, 从而维护整棵树每个节点的坐标。

查询时直接应用两点间距离公式计算即可。

时间复杂度 $O(Qn)$, 期望得分 20。

算法三

针对 $\theta = 180$, 有如下做法:

仍然假设根的坐标为 $(0, 0)$ 。

考虑每个节点到根路径上的边只有向正上方和向正下方, 那么该节点的坐标为 $(0, \# \text{ 到根路径上向上的边} - \# \text{ 到根路径上向下的边})$ 。

一个旋转操作会改变子树内所有点连向父亲的边的方向

上述操作相当于一个子树取负, 到根路径和的问题, 可以用树剖+线段树维护。

时间复杂度 $O(Q \log^2 n)$, 期望得分 35。

算法四

以上所有算法都基于坐标考虑, 接下来我们引入另一个重要的数学工具: 向量和复数。

考虑维护每个齿轮到父亲节点的连线向量, 对于旋转操作, 即将子树内所有连线旋转 θ , 结合复数乘法运算的几何意义幅角相加模长相乘, 旋转 θ 即乘 $(\cos \theta, \sin \theta)$, 对应子树乘操作。而每个齿轮圆心的坐标, 即到根路径上的向量和, 对应链上求和。因此只要用树剖和线段树维护复数, 时间复杂度 $O(Q \log^2 n)$ 。

B.安静

观察到 T 比较小, 只有 120, 考虑将质因子以 \sqrt{n} 分界。

可以知道, 两互质数之间的选择是任意的, 而对于 ≥ 11 的质因子, 最多只可能出现一次, 对于含这些因子的数 $x = a * p (p \geq 11)$, 将 p 相同的放在一起讨论, 剩下的 a 中最多含有 $(2^3, 3^2, 5, 7)$ 分开讨论最终选择的时间点对于 p 和 2520 的模数就可以

对于第一类只含 2, 3, 5, 7, 这些数最大能出现的幂次分别是 $2^5, 3^4, 5^2, 7^2$, 我们希望能将幂次尽量降下来, 对于幂次较高的几个数, 可以分类讨论一下。

2^5 只有 64 一个数, 可以将它和 32 合并, 只剩下 2^4

3^4 只含有 81 一个数, 将它和 27 合并, 然后对于含 3^3 的数 27, 54, 108, 还要考虑他们除 27 外的数将他们与 $3^2 * [1, 2, 4] = 36$ 。 3^4 由此将至 3^2

对于 $5^2, 7^2$, 也可以将他们与 $5 * [1, 2, 3, 4] = 60, 7 * [1, 2] = 14$ 合并。

至此只剩下 $2^3 * 3^2 * 5 * 7 = 5040$, 枚举模 5040 的余数, 再逐一加入每个大质数即可。

C.拉格朗日插值

算法零

我会C++!

不CE即可。

期望得分 5。

算法一

$n \leq 16$ 时可以暴力建图状压!

$f_{i,j,k}$ 表示从 i 出发目前到 j , 经过的点集为 k 的方案数。

转移显然, 枚举一果边。算完可以将 $f_{i,j,k}$ 加到 $g_{i,j}$, 输出只要输出 $g_{i,j}$ 即可

复杂度 $O(n^3 2^n + Q)$

也许会有更好的做法。

期望得分 40。

算法二

考虑 $n = 1$ 的情况。

发现在一个完全图内, 有两种情况, 即点是否相同。相同的话答案显然为 1, 不同的话, 我们枚举中间经过的不是两个点的点数, 答案为:

$$\sum_{i=0}^{n-2} (n-2) \times (n-3) \times \cdots \times (n-i-1) = \sum_{i=0}^{n-2} (n-2)^i$$

其中 $n = 1$ 的时候是平凡情况。我们记

$$f(n) = \sum_{i=0}^n n^i$$

实际上就是在求 $f(n-2)$ 。

考虑递推, 发现 $f(n)$ 对于 $f(n-1)$ 在和式里每一项, 都多乘了一个 n , 同时多出来一项 1, 所以得出

$$f(n) = f(n-1) \times n + 1$$

于是做完了。复杂度 $O(n + Q)$

期望得分 20, 结合算法1 可得 60。

算法三

对于算法2, 发现就是对经过的每一个团的大小进行计算。 (因为在每一个团中的路径都是一个子问题, 也就是算法2)

根据乘法原理 $Ans = \prod_B f(|B| - 2)$

此时为了判断是否经过某个团, 可以使用圆方树, 强行建图缩圆方树, 然后树上链积。

树上链积可以使用倍增等算法, 因为数据范围内 f 非 0, 所以随意怎么搞。

期望得分 50, 结合算法2 可得 70.

算法四

进向归属的团连边。

改进一下算法3, 发现很多点没用, 所以不用跑双联通分量, 直接建出圆方树。对于所有读进来的点建一个权值为 1 的点, 对每个团建一个权值为 $f(|B| - 2)$ 的点, 同时每个读进向归属的团连边。

此时就建出了圆方树。如果使用暴力 LCA, 可以获得 15,16 的分, 如果暴力预处理所有情况, 可以获得 17 的分。

如果使用算法3 中的求答案方法, 就是正解。

期望得分 100。