

# 徒

---

首先奇数度数的点个数  $< 2$  是肯定不行的

然后有一个结论：对于所有点度数都是偶数的图，若存在一个点被所有环经过，则可以，否则不行

对于有两个点是奇数的，若存在一个奇数度数点被所有环经过才可以

证明：对于所有点度数都是偶数的图，若存在一个点被所有环经过，我们以它为起点，假设我们走出了欧拉回路并且有一些边剩余未走，那么由于欧拉回路中所有点度数为偶数，那么我们可以发现剩余边组成的图的点的度数也是偶数，因此剩下的边组成的图一定是若干个欧拉图的集合，其中一定存在环，而起点在所有环上，矛盾

若不存在，则我们可以留下一个不包含起点的环，把它删去走欧拉回路，这样我们回到起点时环上的边就没有走过

奇数的情况是类似的

这样我们就可以  $O(n^2)$  判断，一个点在所有环上即删掉这个边图变成森林

我们发现点度数为偶数时，起点一定是度数最大的点，因此我们可以做到  $O(n)$

# 径

---

我们按照对角线依次填数

我们设  $mx_{i,j}$  和  $mn_{i,j}$  分别表示以  $(i, j)$  结尾的路径权值最大的和最小的分别是多少

我们每次填数，对于  $(i, j)$  结尾的路径，要求使得从  $(i-1, j)$  走到  $(i, j)$  的所有路径均小于从  $(i, j-1)$  走过来的，且所有路径权值组成的集合是连续的区间

这样我们可以根据求出的最大最小值来填数了

# 彩

---

我们要求每列每种颜色必须出现两次

这样算出来的列数最多有  $n \times (2n-1)$  列

然后我们这样染色：先找到 1 至  $2n$  的一组匹配，然后每组匹配点的颜色要求相同，我们先给第一组染一号色，第二组染二号.....然后我们环移一次后再染，一共能产生  $n$  组合法的对列的染色方案

接下来就是给一个  $2n$  个点的完全图划分为  $2n-1$  组不同的完美匹配了

我们考虑留下第  $2n-1$  号点（点从 0 编号），然后第  $i$  轮我们把编号  $j+k \equiv i \pmod{2n-1}$  的  $j$  与  $k$  分为一组匹配，最后会剩余一个点，和  $2n-1$  连，显然匹配是不重复的

# 方

---

我们考虑证明勾股定理的一张经典的图

我们像图中那样将正方形上方的两个三角形切下来，并且移动到下方，我们发现形成了两个正方形，但是这样做会多一些格子，这些格子就是正方形两条边所经过的格子，需要减去

我们先枚举正方形边长 $L$ ，再枚举 $BJ$ 的长度 $i$

则正方形边经过的格子数为 $\frac{i(L-i)-L+\gcd(i,L)}{2}$

则总格子数为 $f(L, i) = i^2 + (L - i)^2 + \frac{i(L-i)-L+\gcd(i,L)}{2}$

我们要计算 $(n - L + 1) \times (m - L + 1) \times \sum_{i=1}^L f(L, i)$

我们可以将式子展开，然后莫比乌斯反演即可

式子可以进行杜教筛，复杂度即 $O(n^{\frac{2}{3}})$