

NOIp2020模拟题 题解

T1 染色(color)

题解

考虑质数可以分为 2 和奇质数。

我们考虑奇偶性染色，便可以满足所有的奇质数。因为有 2 的存在，我们必须按照 mod 4 的方式染色。

那答案有没有可能小于 4 呢？考虑 1, 3, 6, 8，任意两个数的差都是质数。所以答案不能为 3。

当 n 小于 8 的时候爆搜。

时间复杂度 $O(n)$ ($n \geq 8$) , $O(4^n)$ ($n < 8$) 。

T2 序列(array)

题解

首先我们有贪心策略：若 $a_i \leq a_j$ ，则 $b_i \geq b_j$ 。

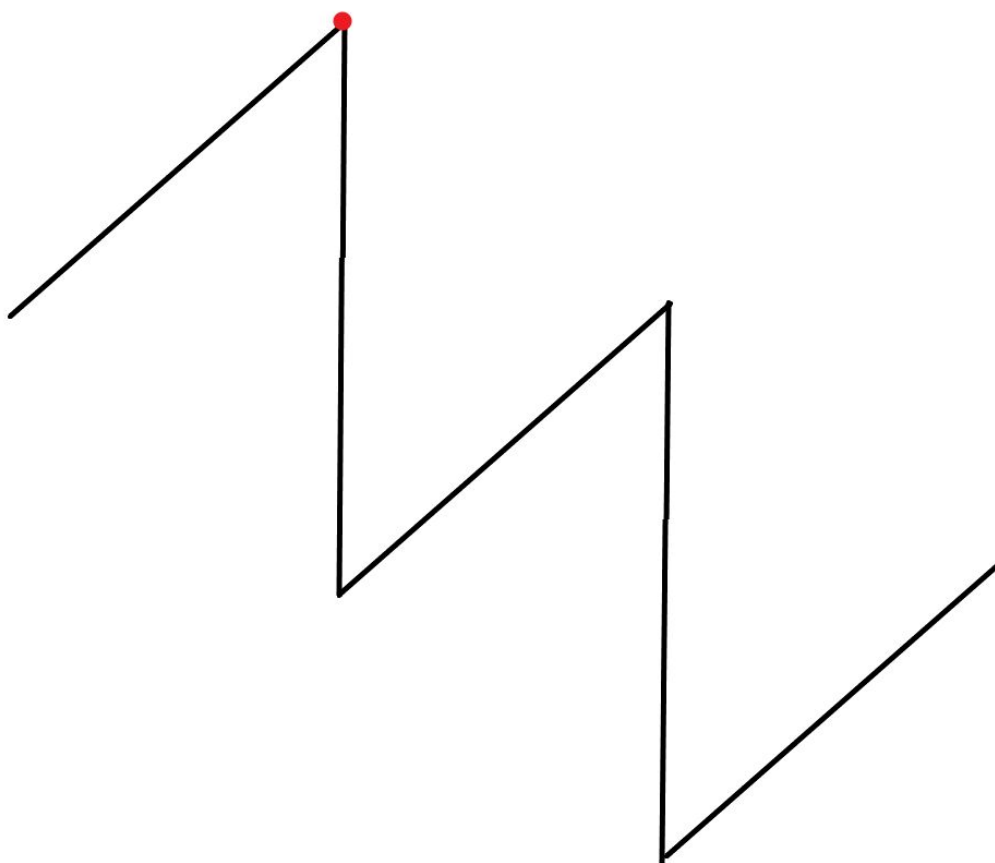
我们将 a 排序，枚举有多少个 b 达到了上界 n 。

若 s 个达到了上界。我们设 $b_{s+1} = x$ ，则答案为

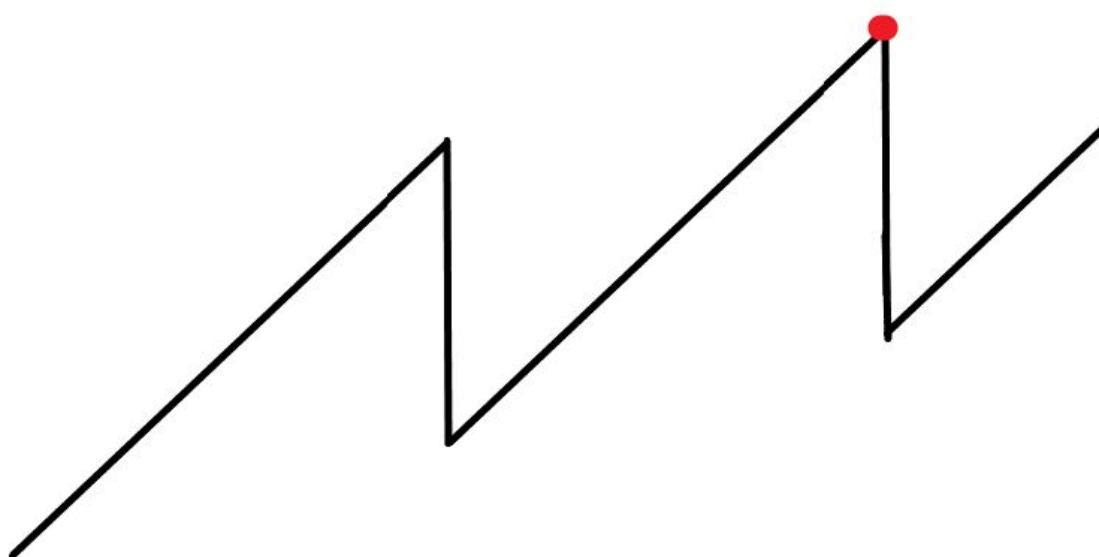
$$in + x + \left\lfloor \frac{D-n \sum_{i=1}^s a_i - a_{s+1}x}{\sum_{i=s+2}^n a_i} \right\rfloor (k + m - i - 1)$$

后面是形如 $x + a \left\lfloor \frac{bx+c}{d} \right\rfloor$ ($a \geq 0$) 的形式。这个函数形如锯齿状，有三种可能达到最大值。

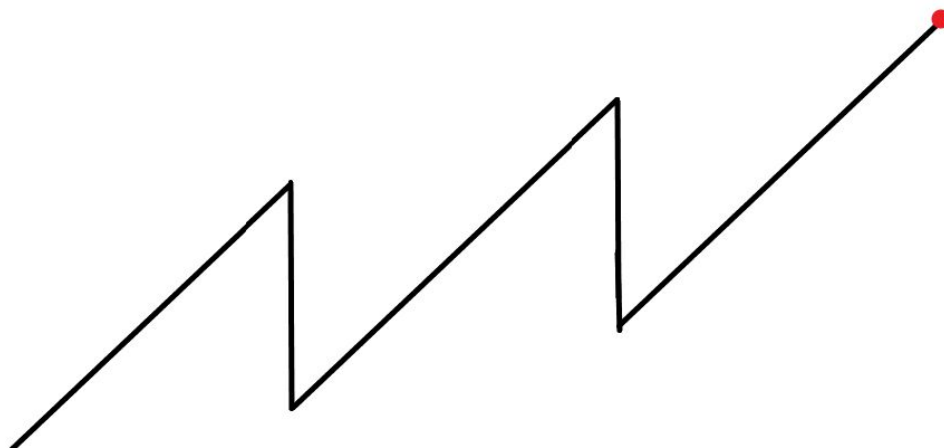
1. 开始的第一个峰。



2. 结束的最后一个峰。



3. 结束点。



放在题中就是

1. 尽可能提高 $\min b_i$, 零头去提高 b_s 。
2. 尽可能提高 b_s , 零头去提高 $\min b_i$ (虽然零头显然不足以提高)。
3. 让 $\min b_i$ 增加 1, 剩下全部去提高 b_s 。

时间复杂度 $O(Tn \log n)$ 。

T3 树上询问(query)

题解

考虑将链拆为两端 a 到 $lca(a, b)$ 与 $lca(a, b)$ 到 b 。

记 $dep(x)$ 表示 x 的深度。

a 到 $lca(a, b)$ 上的答案就是 $dep(x) - dep(a) = x$ 的 x 个数, 也就是说 $dep(x) - x = dep(a)$ 的 x 个数, 另一段的类似, 这里只讨论这一段。

注意到前面这个是一个常数, 令 $b_x = dep(x) - x$, 所以就是查链上有多少点 x 满足 b_x 为常数 $dep(a)$, 这个差分一下, 可以变成查点到根路径上有多少个点满足 b_x 为常数。

将询问离线, 做一个树上前缀和, 维护一个数组, 表示每个 b_x 的出现次数, 然后 DFS, DFS 到 x 时将 b_x 插入到这个数组中, DFS 出 x 的时候将 b_x 给删去, DFS 到一个点的时候处理所有被离线到这个点的询问即可。

总时间复杂度 $O(n + m)$ 。

T4 网络(network)

题解

大胆猜想答案一定是 YES 。

看到 $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ 容易想到两两分组。刚开始时我们令 $(1, 2)$ 一组, $(3, 4)$ 一组, ..., 如果 n 为奇数则 n 单独一组。一组 (x, y) 表示经过前若干个导线后电流可以在 x 或 y 中, 组与组之间互不影响。

经过一个导线 (x, y) 后, 如果之前分组为 $(x), (y, z)$ 合并则调整为 $(x, y), (z)$, 如果是 $(x, u), (y, v)$ 则调整为 $(x, y), (u, v)$ 。考虑所有情况容易发现这样不会出错。构造只需要反推即可。

总复杂度 $O(n + m)$ 。