小 A 与棋盘（chess）

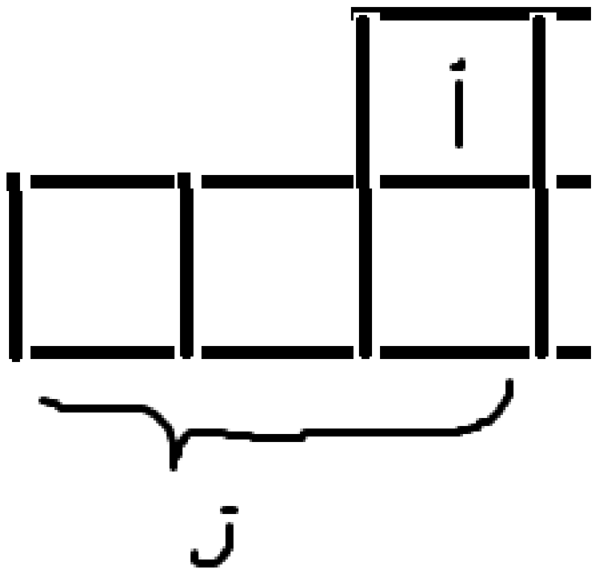
Subtask 1

直接爆搜即可。

期望得分 5 分。

Subtask 2

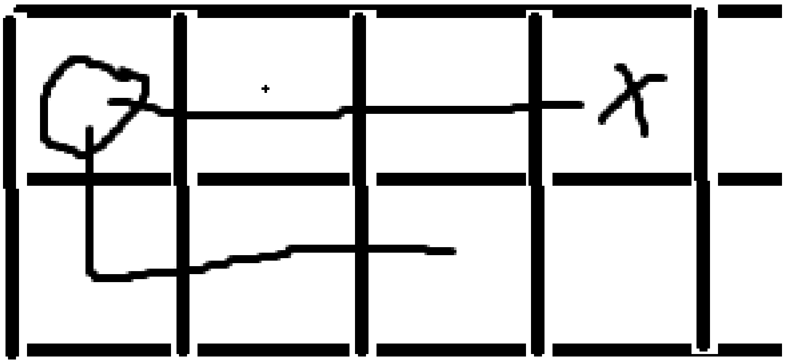
考虑动态规划，设 $f_{i,j}$ 表示以 i 为根的子树，i 在左上角，i 下面往左还空了 j 个格子。



首先若 i 有大于 2 个儿子就无解。

分情况转移：

- i 没有儿子 $f_i \leftarrow 1$。
- i 有两个儿子，那么一定是一个儿子放下面，一个儿子放右边。且放下面的必须是一条链，枚举下面的是向左边拐的还是向右边拐的，若想右边需保证右边的在这段区间内没有分叉。



$f_i \leftarrow f_i + f_{x,1}$（若不存在就加一）。

- i 有一个儿子，那么枚举放左边还是右边更新 DP，DP 状态里记录的 j 就是用来方便链向左拐的。

时间复杂度 $O(n^2)$ ，期望得分 20 分。

Subtask 3

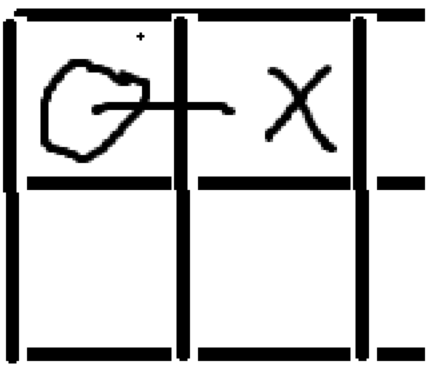
在上述基础上换根 DP，即可做 $q \neq 1$，或者可以用后面的 $O(n)$ DP。
时间复杂度 $O(n^2)$，期望得分 35 分。

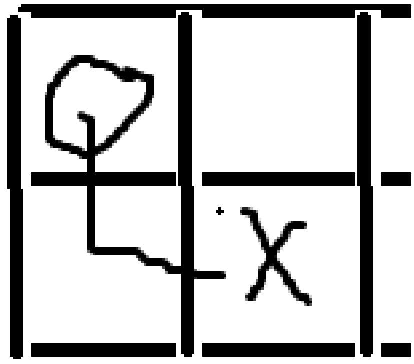
Subtask 4

留给常数稍大的同学，应该没人被卡。

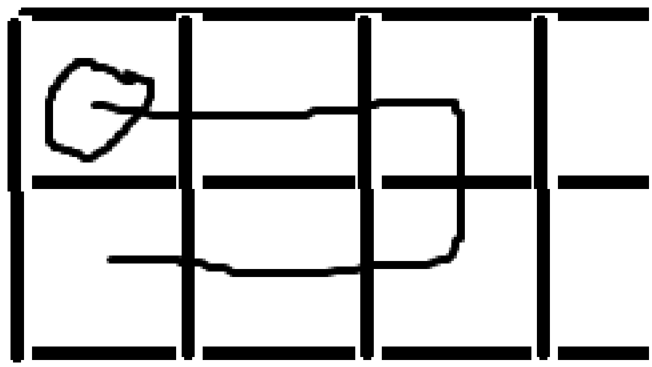
Subtask 5

现在我们不考虑会往回拐的情况了。
f_i 表示长度为 i 的链一个端点在左上角时子树的方案数。
有两种情况 $f_i \leftarrow f_i + f_x$。





还有放右边时，下面被占据的情况。



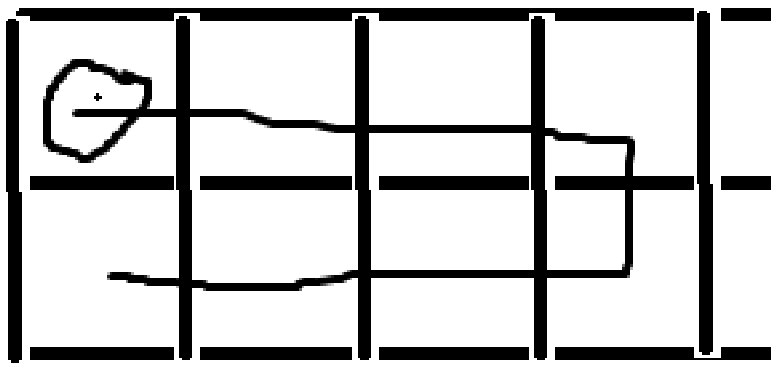
Subtask 6

我们考虑拓展 Subtask 5 的 DP，f_i 表示 i 在左上角，子树的方案数。i 有两个儿子的情况与 Subtask 2 向右拐的情况类似。

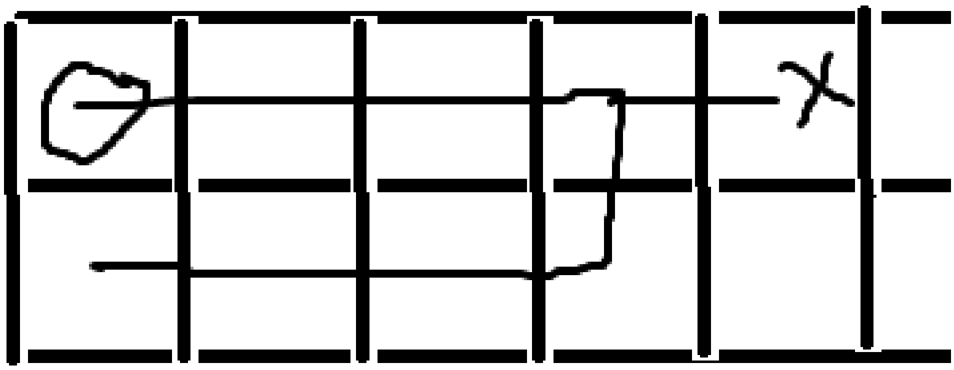
现在只用考虑只有一个儿子 v 的情况了。

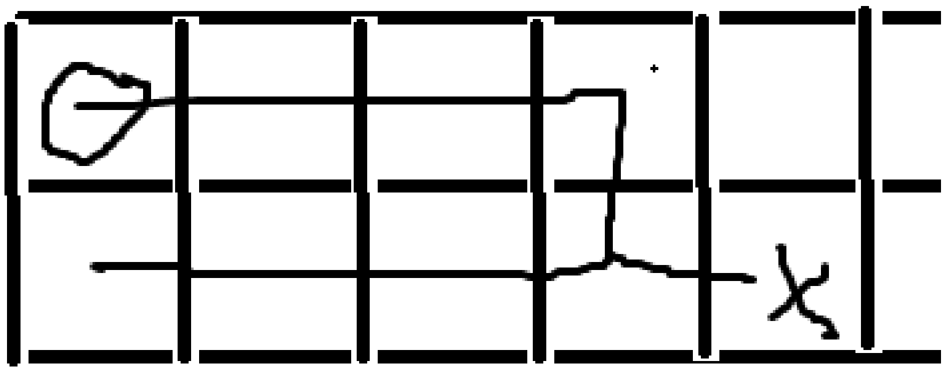
- 若 v 在 x 下，那么要求 v 只有一个儿子。$f_x \leftarrow f_x + f_{son_v}$。
- 若 v 在 x 右，$f_x \leftarrow f_x + f_v$ 还要考虑 x 下面有点的情况。

$f_i \leftarrow f_i + 1$

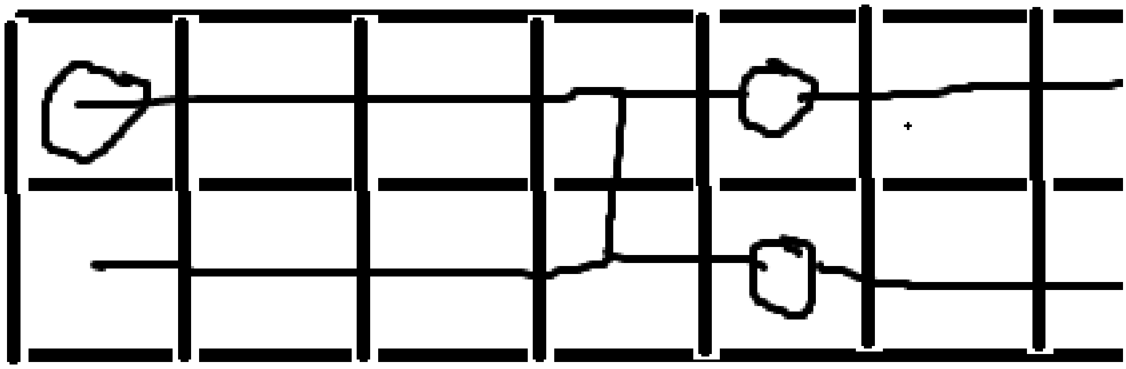


$f_i \leftarrow f_i + f_x$





这种情况与有两个儿子类似。



需要处理是否是链，链的长度，向下的第一个分叉点，到第一个分叉点的长度。还需要快速往下跳 k 级。都是可以做到线性的。时间复杂度 $O(n)$。

Subtask 7

在之前的基础上加上换根预处理答案一下。

时间复杂度 $O(n)$，期望得分 100。

遗忘的记忆（forget）

子任务提示性不大，这里直接讲 100% 的数据范围。

首先将题意转化为保留最多的边。

令 A 表示一个合法边集（不要求最大），我们现在构造一个算法求出另一个合法边集 A' 满足 $|A'| = |A| + 1$，或者指出不存在这样的 A'：

将原图 $G = \langle V, E\rangle$ 的边看作点构造一张有向图 H。属于 A 的边 a 对应的点在 H 中向属于 $B = E - A$ 的边 b 对应的点连有向边，当且仅当 $A - a + b$ 满足无环的限制；b 在 H 中向 a 连有向边，当且仅当 $A - a + b$ 满足颜色的限制。令 $X, Y \subseteq B$ 为两组边集，边 $x \in X$ 当且仅当 $A + x$ 满足无环的限制；边 $y \in Y$ 当且仅当 $A + y$ 满足颜色的限制。若存在一条由 X 到 Y 在 H 中的最短路 $b_1, a_1, b_2, a_2, b_3, a_3, \ldots, b_l, a_l, b_{l+1}$，则令 $A' \leftarrow A - \{a_i\} + \{b_i\}$，否则这样的 A' 不存在。

$|A'| = |A| + 1$ 是显然的。下面证明 A' 满足无环的限制，颜色的限制同理。对于 $1 \le i \le l$，只向 A 加入 b_{i+1} 会生成简单环，否则最短路会以 b_{i+1} 开始而非 b_1。因为存在边 $a_i \to b_{i+1}$，所以 a_i 在 $A + b_{i+1}$ 的简单环上，因此在 A 中去掉 a_i 并加入 b_{i+1} 不会使图的连通性改变。又因为 $b_0 \in X$，所以加入 b_0 只会连接两个不同的连通块，因此 A' 一定无环。

现在还需要证明如果不存在这样的路径，那么一定不存在更大的 A'。对于任意边集 $F \subseteq E$，令 $a(F)$ 表示 F 最大的满足无环限制的边集的子集的大小，令 $b(F)$ 表示 F 最大的满足颜色限制的边集的子集的大小，那么有 $|A| = |A \cap F| + |A - F| \le a(F) + b(E - F)$。

令 D 表示所有在 H 中可以到达 Y 的点，那么有 $|X \cap D| = 0$。这里只说明 $|A \cup D| \ge a(D)$，我们可以类似地说明 $|A - D| \ge a(E - D)$。

考虑反证，假设 $|A \cap D| < a(D)$。那么 $D - (A \cap D)$ 中一定存在一条边 z 使得 $(A \cap D) + z$ 无环。观察到 $z \in D$ 且 X 与 D 不交，所以 $A + z$ 存在简单环。结合上面两点可以得到在 $A - D$ 中在一条边 y 使得 $A - y + z$ 无环，那么在 H 中一定存在一条边 $y \to z$，因此有 $y \in D$。与假设矛盾，所以 $|A \cap D| \ge a(D)$。

那么我们有 $a(D) + b(E - D) \le |A| \le a(F) + b(E - F)$ 对于任意 $F \subseteq E$ 成立，而 $D \subseteq E$，所以 $|A|$ 一定最大。

证明完毕后剩下需要做的就简单了，我们从 $A = \varnothing$ 开始不断建图找最短路，用并查集或者搜索判断简单环即可。

时间复杂度 $O(nm^2)$，空间复杂度 $O(n + m)$。

板凳（seat）

算法一

对于 $n = m$，即所有人的位置都是钦定好了的，使用数组这一数据结构，期望得分 1 分。

算法二

对于 $b_i \le 10^6$，使用优先队列模拟前 10^6 个人，期望得分 10 分。

算法三

对于满足初始区间长度 $= 2^k - 1$，不难发现，在坐座位的过程中，总共出现过的不同长度的区间只有 $\log m$ 种。模拟找座位的过程，是先找最长的区间，再找从左到右地找次长的区间。发现很好做。期望得分 30 分。

算法四

对于一个区间，把它不断地分成两半，一直到最后底层。不难发现，在这个过程中，分出的所有不同长度的区间不超过 $O(\log m)$ 个。有 $O(n)$ 个初始区间，因此最多只有 $O(n \log m)$ 种区间。我们可以计算出每种长度区间的个数，然后排一遍序。每次二分找到答案的当前所在的区间，记长度为 l。现在需要解决的就是找到答案属于哪一个长度为 l 的区间。考虑二分，每次计算出左边区间分下去能够得到多少长度为 l 的区间，然后决定往左走还是往右走，一直分到区间长度为 l 便找到了答案。

如果代码实现得不好，时间复杂度 $O(n \log^3 m)$，期望得分 46 分，结合算法二、三，期望得分 76 分。

如果代码实现得好，可以做到时间复杂度 $O(n \log^2 m)$，期望得分 100 分。