价格移动平均的估计（空间受限）

时间为t

价格为$P(t)$

窗口大小为$W > 0$

当前时刻为t_0

历史信息容量为B

历史时刻集为$H_t = \{t_0, t_(-1), t_(-2), \ldots\}$，$0 \le i < B$，$t_{-i}$为当前时刻的前第$i$个时间点，且$i < j \Leftrightarrow t_i < t_j$

历史价格为$H_P = \{P(t_0), P(t_{-1}), P(t_{-2}), \ldots\}$

求P的移动平均$A(t_0)$

$$A(t_0) = \frac{1}{W}\int_{t_0-W}^{t_0} P(t)\,dt$$

下面对$P(t)$进行线性内插，得到其估计$\tilde{P}(t)$

$$\tilde{P}(t) = \big(P(t_i) - P(t_{i-1})\big)\frac{t - t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} + P(t_{i-1})$$

其中$t_{i-1} < t \le t_i$

用$\tilde{P}(t)$得到$A(t_0)$的估计$\tilde{A}(t_0)$

$$\begin{aligned}\tilde{A}(t_0) &= \frac{1}{W}\int_{t_0-W}^{t_0} \tilde{P}(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2W}\left(\Big(P(t_s) + \tilde{P}(t_0 - W)\Big)(t_s - t_0 + W)\right. \\ &\qquad \left. + \sum_{i=s+1}^{0}\big(P(t_i) + P(t_{i-1})\big)(t_i - t_{i-1})\right)\end{aligned}$$

其中s满足$t_{s-1} < t_0 - W \le t_s$

设$\tilde{A}(t_0)$误差为$E_A(t_0)$，即：

$$E_A(t_0) = \left|\tilde{A}(t_0) - A(t_0)\right| = \frac{1}{W}\left|\int_{t_0-W}^{t_0} \tilde{P}(t) - P(t)\,dt\right|$$

设$\tilde{P}(t)$的误差为$E_P(t)$，即：

$$E_P(t) = \left|\tilde{P}(t) - P(t)\right|$$

易得

$$E_A(t_0) \le \frac{1}{W}\int_{t_0-W}^{t_0} E_P(t)\,dt$$

为了得出$E_A(t_0)$的上界，设$P(t)$符合常数为L的利普希茨连续条件，即：

$$\forall t_i, t_j, \left|P(t_i) - P\big(t_j\big)\right| \le L\left|t_i - t_j\right|$$

经过计算，得到$E_A(t_0)$的上界$\overline{E_A}(t_0)$

$$\overline{E_A}(t_0)=\frac{L}{2W}\sum_{i=s}^{0}(t_i-t_{i-1})^2\geq E_A(t_0)$$

当历史信息数量达到$B+1$时，必须调整H_t与H_P，并且要求调整后误差的增量尽量小

方案 1:
根据$\overline{E_A}(t_0)$的表达式可知，相邻历史时刻间隔越小，误差上界越小。
因此，删除某个历史信息$\left(t_{k^*},P(t_{k^*})\right)$，使得剩下的历史时刻间隔的最大值尽量小，即满足

$$k^*=\arg\min_k t_{k+1}-t_{k-1}$$

空间复杂度$O(B)$，时间复杂度$O(\log B)$
优点：时间复杂度低
缺点：误差有改进的空间

方案 2:
利用$\tilde{P}$重新生成B个**伪历史信息**代替原历史信息，使得误差上界尽量小。
新生成的伪历史时刻记为$H_t^*=\{t_0^*,t_{-1}^*,\dots\}$，伪历史价格记为$H_P^*=\{\tilde{P}(t_0^*),\tilde{P}(t_{-1}^*),\dots\}$
伪历史信息的来源是的$B+1$个原历史信息插值得到。
但是生成的伪历史信息会引入额外误差，因为插值误差$E_P(t)>0$。
为了表示总误差$\widetilde{E_A}(t_0;H_t^*)$（额外误差+原有误差），引入历史信息的误差势$M_i^*$

$$M_i^*=\min_j\left(M_j+L\left|t_i^*-t_j\right|\right)$$

其中M_j为原历史信息的误差势。
易知，若某条伪历史时刻与（真）历史时刻重合，则$M_i^*=0$
总误差可以表示为

$$\widetilde{E_A}(t_0;H_t^*)=\frac{1}{W}\int_{t_0-W}^{t_0}\min_i(M_i^*+L|t-t_i^*|)\,dt=\frac{1}{W}\int_{t_0-W}^{t_0}\min_{i,j}\left(M_j+L\left|t_i^*-t_j\right|+L|t-t_i^*|\right)dt$$

因此最小化$\widetilde{E_A}(t_0;H_t^*)$，即

$$H_t^*=\arg\min_{H_t^*}\widetilde{E_A}(t_0;H_t^*)$$

空间复杂度$O(B)$，时间复杂度$O(?)$
优点：误差相比方案 1 可能更小，空间复杂度常数较小
缺点：时间复杂度较高，编码较复杂