噪声标准差的数学推导过程

1 问题描述

在无线通信系统中，接收信号通常受到加性高斯白噪声 (AWGN) 的干扰。为了在高斯过程回归 (GPR) 去噪过程中准确设置噪声水平参数，需要根据已知的信噪比 (SNR) 和接收信号功率计算噪声的标准差。本文详细推导这一计算过程。

2 基本定义与假设

2.1 信号模型

设原始无噪基带信号为复数形式：

$$s[n] = s_I[n] + js_Q[n] \tag{1}$$

其中 $s_I[n]$ 和 $s_Q[n]$ 分别为同相和正交分量，j 为虚数单位。

接收信号受到加性复高斯白噪声的干扰：

$$r[n] = s[n] + w[n] \tag{2}$$

其中 $w[n] = w_I[n] + jw_Q[n]$ 为复高斯白噪声。

2.2 噪声特性假设

对于复高斯白噪声 $w[n]$，其同相分量 $w_I[n]$ 和正交分量 $w_Q[n]$ 具有以下特性：

- 相互独立：$w_I[n] \perp w_Q[n]$
- 零均值：$\mathbb{E}[w_I[n]] = \mathbb{E}[w_Q[n]] = 0$
- 等方差：$\mathrm{Var}(w_I[n]) = \mathrm{Var}(w_Q[n]) = \sigma_n^2$
- 高斯分布：$w_I[n], w_Q[n] \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$

因此，复高斯白噪声可表示为：

$$w[n] \sim \mathcal{CN}(0, \sigma_n^2) \tag{3}$$

3 功率关系推导

3.1 功率定义

原始信号功率定义为：

$$P_s = \mathbb{E}[|s[n]|^2] = \mathbb{E}[s_I[n]^2 + s_Q[n]^2] \tag{4}$$

噪声功率定义为：

$$P_w = \mathbb{E}[|w[n]|^2] = \mathbb{E}[w_I[n]^2 + w_Q[n]^2] \tag{5}$$

接收信号功率定义为：

$$P_r = \mathbb{E}[|r[n]|^2] = \mathbb{E}[r_I[n]^2 + r_Q[n]^2] \tag{6}$$

3.2 噪声功率与方差的关系推导

根据噪声的统计特性，噪声功率可以展开为：

$$\begin{aligned} P_w &= \mathbb{E}[|w[n]|^2] & (7)\\ &= \mathbb{E}[(w_I[n] + jw_Q[n])(w_I[n] - jw_Q[n])] & (8)\\ &= \mathbb{E}[w_I[n]^2 + w_Q[n]^2] & (9)\\ &= \mathbb{E}[w_I[n]^2] + \mathbb{E}[w_Q[n]^2] & (10) \end{aligned}$$

由于 $w_I[n] \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$，有：

$$\mathbb{E}[w_I[n]^2] = \mathrm{Var}(w_I[n]) + (\mathbb{E}[w_I[n]])^2 = \sigma_n^2 + 0^2 = \sigma_n^2 \tag{11}$$

同理，对于 $w_Q[n] \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$：

$$\mathbb{E}[w_Q[n]^2] = \sigma_n^2 \tag{12}$$

因此，噪声功率与分量方差的关系为：

$$P_w = \sigma_n^2 + \sigma_n^2 = 2\sigma_n^2 \tag{13}$$

由此可得单个分量的噪声方差：

$$\sigma_n^2 = \frac{P_w}{2} \tag{14}$$

噪声标准差为：

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{P_w}{2}} \tag{15}$$

4 基于 SNR 的噪声功率计算

4.1 信噪比定义

信噪比 (SNR) 定义为信号功率与噪声功率的比值：

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{linear}} = \frac{P_s}{P_w} \tag{16}$$

对应的分贝值为：

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{dB}} = 10\log_{10}(\mathrm{SNR}_{\mathrm{linear}}) = 10\log_{10}\left(\frac{P_s}{P_w}\right) \tag{17}$$

由分贝定义可得线性 SNR：

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{linear}} = 10^{\mathrm{SNR}_{\mathrm{dB}}/10} \tag{18}$$

4.2 总功率关系

假设信号与噪声不相关，即 $\mathbb{E}[s[n]w^*[n]] = 0$，则接收信号的总功率为：

$$\begin{aligned}
P_r &= \mathbb{E}[|r[n]|^2] && (19)\\
&= \mathbb{E}[|s[n] + w[n]|^2] && (20)\\
&= \mathbb{E}[(s[n] + w[n])(s[n] + w[n])^*] && (21)\\
&= \mathbb{E}[s[n]s^*[n] + s[n]w^*[n] + w[n]s^*[n] + w[n]w^*[n]] && (22)\\
&= \mathbb{E}[|s[n]|^2] + \mathbb{E}[s[n]w^*[n]] + \mathbb{E}[w[n]s^*[n]] + \mathbb{E}[|w[n]|^2] && (23)\\
&= P_s + 0 + 0 + P_w && (24)\\
&= P_s + P_w && (25)
\end{aligned}$$

4.3 噪声功率的显式表达

从 SNR 定义可得：

$$P_s = \mathrm{SNR}_{\mathrm{linear}} \cdot P_w \tag{26}$$

将此关系代入总功率方程：

$$\begin{aligned}
P_r &= P_s + P_w && (27)\\
&= \mathrm{SNR}_{\mathrm{linear}} \cdot P_w + P_w && (28)\\
&= P_w(\mathrm{SNR}_{\mathrm{linear}} + 1) && (29)
\end{aligned}$$

解出噪声功率：

$$P_w = \frac{P_r}{\mathrm{SNR}_{\mathrm{linear}} + 1} \tag{30}$$

将线性 SNR 表达式代入：

$$P_w = \frac{P_r}{10^{\mathrm{SNR}_{\mathrm{dB}}/10} + 1} \tag{31}$$

5 最终的噪声标准差公式

将噪声功率表达式代入噪声标准差公式：

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{P_w}{2}} = \sqrt{\frac{P_r}{2(10^{\mathrm{SNR}_{\mathrm{dB}}/10} + 1)}} \tag{32}$$

5.1 实际计算中的接收功率估计

在实际应用中，接收信号功率 P_r 通过有限样本估计：

$$\hat{P}_r = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}|r[k]|^2 = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}(r_I[k]^2 + r_Q[k]^2) \tag{33}$$

其中 M 为样本数量，$r[k] = r_I[k] + jr_Q[k]$ 为第 k 个接收样本。
因此，实际使用的噪声标准差估计为：

$$\hat{\sigma}_n = \sqrt{\frac{\hat{P}_r}{2(10^{\mathrm{SNR}_{\mathrm{dB}}/10} + 1)}} \tag{34}$$

6 应用于高斯过程回归

在 GPR 模型中，噪声水平参数 α 设置为单个分量的噪声方差：

$$\alpha = \sigma_n^2 = \frac{P_w}{2} = \frac{P_r}{2(10^{\mathrm{SNR}_{\mathrm{dB}}/10} + 1)} \tag{35}$$

这个参数被加入到 GPR 的协方差矩阵对角线上，用于建模观测噪声：

$$K_{noise} = K(X, X) + \alpha I \tag{36}$$

其中 $K(X, X)$ 为核函数矩阵，I 为单位矩阵。

7 数值验证示例

假设已知条件：

- 接收信号功率：$P_r = 1.0$
- 信噪比：$\mathrm{SNR}_{\mathrm{dB}} = 0$ dB

计算过程：

$$\mathrm{SNR}_{\mathrm{linear}} = 10^{0/10} = 1 \tag{37}$$

$$P_w = \frac{1.0}{1+1} = 0.5 \tag{38}$$

$$\sigma_n^2 = \frac{0.5}{2} = 0.25 \tag{39}$$

$$\sigma_n = \sqrt{0.25} = 0.5 \tag{40}$$

验证：原始信号功率 $P_s = \mathrm{SNR}_{\mathrm{linear}} \times P_w = 1 \times 0.5 = 0.5$，总功率 $P_s + P_w = 0.5 + 0.5 = 1.0 = P_r$

8 结论

通过严格的数学推导，我们得到了噪声标准差的完整计算公式：

$$\boxed{\sigma_n = \sqrt{\frac{P_r}{2(10^{\mathrm{SNR}_{\mathrm{dB}}/10} + 1)}}} \tag{41}$$

这个公式在 GPR 去噪算法中用于准确估计噪声水平，是整个自适应去噪方法的理论基础。