Operations Research

Wolfram Hirsching

16. August 2022

Inhaltsverzeichnis

Algorithmenverzeichnis

Was ist Operations Research?

Unter Operations Research wird eine Sammlung von mathematischen Optimierungsmethoden verstanden, die bei quantifizierbaren Problemen eine Planungs- und Entscheidungsfindung erleichtern. Ein umfassenderes Versti¿œndnis des Begriffs bezieht auch die vorhergehende Analyse des Problems und die Datenbeschaffung mit ein. Im Rahmen dieser Mathematikvorlesung werden die verschiedenen mathematischen Methoden behandelt.

Vorbemerkung

Das Manuskript umreiï¿œt die Inhalte der Vorlesung, ersetzt aber nicht ein weit ausfï¿œhrlicheres Lehrbuch.

Speziell empfohlen wird hier das Buch von Prof. Gert Heinrich[?]. Es deckt den Inhalt dieser Vorlesung nahezu vollstï¿œndig ab und zeichnet sich durch anschauliche und vollstï¿œndig durchgerechnete Beispiele aus. Groï¿œe Teile dieses Manuskripts sind an [?] angelehnt, die Beispiele unterscheiden sich.

Lineare Optimierung

Eine Aufgabenstellung der linearen Optimierung kï¿œnnte sein: In einer Firma werden zwei Arten von Farbe hergestellt. Die *Herstellung* kostet 3 bzw. 2 GE (Geldeinheiten) pro Liter. Pro Tag stehen 28 GE zur Verfï¿œgung. Die *Arbeitszeit* betrï¿œgt 1 bzw. 2 Stunden pro Liter. Pro Tag arbeiten 2 Arbeitskrï¿œfte zu je 8 Stunden. Aufgrund von Kapazitï¿œtsbeschrï¿œnkungen kï¿œnnen von der *zweiten Farbe* nur 7 Liter pro Tag hergestellt werden. Der Erlï¿œs betrï¿œgt 3 bzw. 4 GE. Gesucht ist die Menge, die von jeder Farbe hergestellt werden muss, dass der Erlï¿œs maximiert wird.

Allgemein heiï¿œt dies: bei der linearen Optimierung wird eine Kombination von Variablen x_i gesucht, so dass eine lineare Funktion, die *Zielfunktion*, mï¿œglichst groï¿œ wird, z.B. $F = 5x_1 + 3x_2$. Fï¿œr die x_i gelten Einschrï¿œnkungen der Art $x_1 + 3x_2 \leqq 5$ sowie die *Nichtnegativitï¿œtsbedingung* $x_i \geqq 0$. Die Einschrï¿œnkungen („Nebenbedingungen“) kï¿œnnen sich z.B. aus Beschrï¿œnkungen von Ressourcen, Geldmitteln oder Arbeitszeit ergeben. Situationen dieser Art treten hï¿œufig auf, z.B. durch Lieferbedingungen, Maschinenauslastungen oder Arbeitszeitbeschrï¿œnkungen. Typischerweise kommt keine negative Anzahl von erzeugten Produkten oder geleisteten Arbeitsstunden vor.

Allgemein ist ein lineares Optimierungsproblem (oder „lineares Programmierungsproblem“) wie folgt definiert:

$$F = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3 + c_4 \cdot x_4 + \ldots + c_p \cdot x_p \rightarrow max$$

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p &\leqq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p &\leqq b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3p}x_p &\leqq b_3 \\
a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + \ldots + a_{4p}x_p &\leqq b_4 \\
&\vdots \\
x_i \geqq 0 \ \forall\, i & \qquad [„\forall“\, bedeutet\, „f\ddot{u}r\, alle“]
\end{aligned}$$

Formulierungen, die sich nicht an dieses Schema halten, werden in den Kapiteln **??**, **??** und Ergï¿œnzungen Kap.**??** behandelt. Wenn zusï¿œtzlich Ganzzahligkeit gefordert wird, ist das Problem komplizierter. Dies ist das Thema von Kapitel **??**.

1 Grafische Lï¿œsung von linearen Optimierungsproblemen

Im Fall von nur zwei Variablen x_1 und x_2 lï¿œsst sich ein lineares Optimierungsproblem grafisch lï¿œsen. Obwohl dieser einfache Fall in der Praxis kaum eine Rolle spielt, ist er sehr hilfreich fï¿œr das grundsï¿œtzliche Verstï¿œndnis der Problematik.

Beispiel: Das oben beschriebene Problem lï¿œsst sich mathematisch durch folgende Bedingungen formulieren:

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\leqq 16 \\
3x_1 + 2x_2 &\leqq 28 \\
x_2 &\leqq 7 \\
x_1,\, x_2 &\geqq 0
\end{aligned}$$

Die Zielfunktion $G(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$ soll maximiert werden.
x_1 und x_2 ist die Menge (Anzahl Liter) die von Farbe 1 und 2 pro Tag hergestellt wird.
Wenn statt der Ungleichheitszeichen zunï¿œchst Gleichheitszeichen verwendet werden, ergeben sich 5 Geradengleichungen. Auch die Zielfunktion lï¿œsst sich als Gerade formulieren: $3x_1 + 4x_2 = G$ mit der noch unbekannten (und zu maximierenden) Grï¿œï¿œe G.

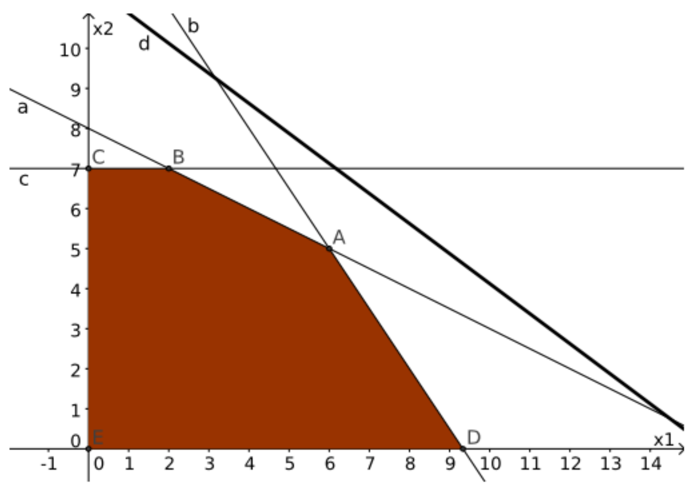


Abbildung 1:

Die 5 Bedingungen ergeben die drei Geraden a, b und c sowie die beiden Koordinatenachsen. Die Lï¿œsungsmenge liegt innerhalb des Fï¿œnfecks. Man spricht hier von "zulï¿œssigen Lï¿œsungen". Die Zielfunktion fï¿œhrt auf die Gerade d, die hier mit beliebigem G gezeichnet ist. Eine ï¿œnderung von G bedeutet eine Parallelverschiebung von d. Um eine Funktion einer zulï¿œssigen Lï¿œsung zu bekommen, muss d das Fï¿œnfeck schneiden oder zumindest berï¿œhren. Fï¿œr ein mï¿œglichst groï¿œes G muss die Gerade d so lange parallel verschoben werden, bis sie das Fï¿œnfeck berï¿œhrt. Hier ist das in Punkt $A\,(6|5)$ der Fall.

Normalerweise berï¿œhrt die optimale Zielfunktionsgerade die Flï¿œche der zulï¿œssigen Lï¿œsungen in einem Punkt. Im Spezialfall einer Zielfunktionsgeraden, die parallel zu einer Begrenzung liegt, wird die Flï¿œche auf einem endlichen Geradenstï¿œck berï¿œhrt. Damit gibt es unendlich viele optimale Lï¿œsungen.

Bei Problemen dieser Art ist die Flï¿œche der Lï¿œsungsmenge (das „Lï¿œsungspolyeder") immer „konvex", d.h. jede Verbindungsstrecke zweier Eckpunkte ist entweder eine Begrenzung der Flï¿œche oder sie liegt innerhalb der Flï¿œche.

2 Die Simplex Methode

Um eine rechnerische Methode zur Lï¿œsung von linearen Optimierungsproblemen zu bekommen, mï¿œssen zulï¿œssige Lï¿œsungen in die Zielfunktion eingesetzt werden, bis diese ein Maximum ergibt. Tatsï¿œchlich besteht die Menge der zulï¿œssigen Lï¿œsungen aus unendlich vielen Punkten. Allerdings kï¿œnnen wir den ï¿œberlegungen von Kapitel **??** entnehmen, dass es ausreicht, die Eckpunkte der Flï¿œche der zulï¿œssigen Lï¿œsungen zu untersuchen. Im allgemeinen Fall von n Variablen handelt es sich jedoch nicht um Schnittpunkte von zwei Geraden in einem zweidimensionalen Variablenraum, sondern um Schnittpunkte von m Hyperebenen in einem n-dimensionalen Raum.

2.1 Der primale Simplexalgorithmus

Hier besteht das System aus Bedingungen der Form $\leqq$ sowie den Nichtnegativitï¿œtsbedingungen fï¿œr die Variablen. Die rechten Seiten sind positive Zahlen. Dies entspricht dem Beispiel aus Kapitel **??**.

Um ein Gleichungssystem zu erstellen, das den Ungleichungen entspricht, werden "Schlupfvariablen" eingefï¿œhrt. Fï¿œr das Beispiel aus Kap. **??** ergibt sich:

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + y_1 &= 16 \\
3x_1 + 2x_2 + y_2 &= 28 \\
x_2 + y_3 &= 7 \\
x_1,\, x_2,\, y_1,\, y_2,\, y_3 &\geqq 0
\end{aligned}$$

Damit liegt ein unterbestimmtes Gleichungssystem vor mit 3 Gleichungen und den 5 Unbekannten x_1; x_2; y_1; y_2; y_3. Ein solches Gleichungssystem hat im allgemeinen unendlich viele Lï¿œsungen.

Die gegebene Form wird auch als "reduziertes lineares Gleichungssystem" bezeichnet. Sie zeichnet sich dadurch aus, dass jede Gleichung eine Variable enthï¿œlt, die in den anderen Gleichungen nicht vorkommt und den Vorfaktor 1 hat. Dies sind hier die Variablen y_1, y_2 und y_3. Diese Variablen sind zu Beginn die "Basisvariablen", im Folgenden BV. Die anderen heiï¿œen "Nichtbasisvariablen", im Folgenden NBV. Allgemein gibt es immer so viele BV, wie unabhï¿œngige Bedingungen befriedigt werden mï¿œssen - auï¿œer den Nichtnegativitï¿œtsbedingungen. Eine Lï¿œsung des Gleichungssystems erhï¿œlt man sehr einfach durch Nullsetzen der NBV. Die BV mï¿œssen dann den Wert der rechten Seite der zugehï¿œrigen Gleichung annehmen. Damit ist bereits ein Eckpunkt des

Lï¿œsungspolyeders gefunden: der Ursprung. Das Simplexverfahren stellt eine Methode zur Verfï¿œgung, mit der ausgehend von einer solchen zulï¿œssigen Lï¿œsung ein weiterer Eckpunkt bestimmt wird, fï¿œr den der Wert der Zielfunktion grï¿œï¿œer wird. In einer endlichen Anzahl von Schritten kommt man so zu einem optimalen Eckpunkt.

Allgemein gilt, dass so viele Variablen bestimmt werden mï¿œssen, wie Gleichungen vorliegen. Alle anderen Variablen sind in den Eckpunkten des Polyeders immer Null.

Die Variablen die in der Zielfunktion vorkommen, heiï¿œen "Strukturvariablen". In Kapitel **??** war die Zielfunktion $G(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$. Anfangs sind die Strukturvariablen also die NBV. Letztere werden im Lauf der Rechnungen (teilweise) gegen BV getauscht.

Beispiel: Aus 3 Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 sollen drei Endprodukte E_1, E_2 und E_3 hergestellt werden. Die folgende Tabelle gibt an, wie viele Rohstoffe (in ME) jeweils fï¿œr ein Endprodukt gebraucht werden und wie viele Rohstoffe vorhanden sind, sowie den Erlï¿œs fï¿œr jedes einzelne Endprodukt (in GE):

Rohstoff	gebrauchte	Menge		vorhandene Menge
	E_1	E_2	E_3	
R_1	2	1	6	300
R_2	6	5	2	540
R_3	4	2	4	320
Erlï¿œs	10	6	4	

Der Erlï¿œs soll maximiert werden, wobei die einzelnen Rohstoffe nicht vollstï¿œndig aufgebraucht werden mï¿œssen. Damit ergibt sich zunï¿œchst ein Ungleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 6x_3 &\leqq 300 \\ 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 &\leqq 540 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leqq 320 \end{aligned}$$

sowie die zu maximierende Zielfunktion $G = 10x_1 + 6x_2 + 4x_3$.
x_i sind die Mengen der hergestellten Endprodukte E_i. Fï¿œr eine grafische Darstellung brï¿œuchte man ein dreidimensionales Koordinatensystem. Die Bedingungen kann man sich hier noch als Ebenen vorstellen. Je drei Ebenen schneiden sich in einem (Eck-) Punkt. Bei mehr als 3 Dimensionen versagt die Vorstellung.
Das Ungleichungssystem wird mit Hilfe von Schlupfvariablen in ein Gleichungs-

system umgewandelt:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 6x_3 + y_1 &= 300 \\ 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 + y_2 &= 540 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + y_3 &= 320 \end{aligned}$$

x_1, x_2, x_3 sind die Strukturvariablen. y_1, y_2, y_3 sind die Schlupfvariablen. Jede Gleichung bekommt also ihre eigene Schlupfvariable. Sie reprï¿œsentieren in unserem Beispiel ungenutzte Ressourcen. Zu Beginn sind sie immer die Basisvariablen. Damit sind zunï¿œchst alle Ressourcen ungenutzt. Dies ï¿œndert sich bei jeder Iteration.
Gesamtsituation in Tabellenform (Simplextableau):

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	rechte Seite
y_1	2	1	6	1	0	0	300
y_2	6	5	2	0	1	0	540
y_3	4	2	4	0	0	1	320
G	-10	-6	-4	0	0	0	0

Die letzte Zeile entspricht der Zielfunktion, wobei die Vorzeichen der Koeffizienten umgedreht sind. Dies ist mathematisch nicht zwingend erforderlich, entspricht aber einem ï¿œblichen Vorgehen beim Simplexalgorithmus. Die erste Spalte enthï¿œlt den Namen der Basisvariable, deren Wert in der letzten Spalte steht. Die Nichtbasisvariablen sind immer Null. Die erste Lï¿œsung ist also $\mathbb{L} = \{0, 0, 0, 300, 540, 320\}$; Reihenfolge: x_1; x_2; x_3; y_1; y_2; y_3. Damit befinden wir uns im Ursprung des Koordinatensystems. Die Zielfunktion hat den Wert 0. Diese Lï¿œsung ist zulï¿œssig (erfï¿œllt alle Bedingungen), ist aber sicher nicht optimal. Tatsï¿œchlich ist sie die schlechteste aller zulï¿œssigen Lï¿œsungen. Ziel ist es nun, eine Ecke zu bestimmen, bei der die Zielfunktion grï¿œï¿œer ist. Eine solche Ecke bekommt man durch Austausch einer BV mit einer NBV. Dieser Schritt entspricht einem Austauschschritt beim Lï¿œsen eines linearen Gleichungssystems. Um die optimale Lï¿œsung zu erhalten, mï¿œssen ï¿œblicherweise mehrere BV ausgetauscht werden. Dies erfolgt mit dem Simplexalgorithmus.

Algorithmus 1 Primaler Simplexalgorithmus

1. In der letzten Zeile mï¿œssen negative Elemente vorkommen, sonst ist keine Verbesserung der Lï¿œsung mï¿œglich. Man wï¿œhlt das kleinste Element, d.h. das Element, das am weitesten im negativen Bereich liegt. Die zugehï¿œrige Spalte heiï¿œt "Pivotspalte".
   Hier: erste Spalte mit -10 in der Zielfunktionszeile

2. Die Werte der rechten Seite mï¿œssen *positiv* sein. Man bildet alle Quotienten aus dem Wert der rechten Seite und dem Wert auf der Kreuzung dieser Zeile und der Pivotspalte. Negative Quotienten werden ignoriert.
   Hier: 300/2=150; 540/6=90 und 320/4=80

3. Der kleinste dieser (positiven) Quotienten bestimmt die "Pivotzeile". Negative Quotienten werden ignoriert.
   Hier: kleinster Wert ist 80, die dritte Zeile ist die Pivotzeile.

4. Die Zahl, auf der Kreuzung von Pivotzeile und Pivotspalte, heiï¿œt "Pivotelement". Nun wird die BV der Pivotzeile durch die NBV der Pivotspalte ersetzt. Am Ende der Iteration[1] (nach Schritt 6) wird diese dann neue BV sein.
   Hier: 4 ist Pivotelement; in der Variablenspalte (Spalte 1) wird "y_3" durch "x_1" ersetzt.

5. Die Elemente der Pivotzeile (einschlieï¿œlich der rechten Seite und des Pivotelements selbst) werden durch das Pivotelement geteilt.
   Hier: $2 \rightarrow \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $4 \rightarrow \frac{4}{4} = 1$; $1 \rightarrow \frac{1}{4}$ und $320 \rightarrow \frac{320}{4} = 80$

6. Alle anderen Elemente werden nach folgendem Schema (Rechteckregel) berechnet: die Elemente der Matrix seien a_{ij}; die Pivotzeile sei Zeile k; die Pivotspalte sei Spalte l;
   das Pivotelement ist also a_{kl}. Die Elemente der rechten Seite seien b_i. Dann gilt: $a_{ij} \rightarrow a_{ij} - \frac{a_{il} \cdot a_{kj}}{a_{kl}}$ und $b_i \rightarrow b_i - \frac{a_{il} \cdot b_k}{a_{kl}}$
   Damit wird das Pivotelement 1 und die anderen Werte der Pivotspalte werden 0.
   hier exemplarisch: Zeile 1 ; Spalte 2: $1 \rightarrow 1 - \frac{2 \cdot 2}{4} = 0$; Zeile 2, Spalte 3: $2 \rightarrow 2 - \frac{6 \cdot 4}{4} = -4$;
   Zeile 2, Spalte 5: $1 \rightarrow 1 - \frac{6 \cdot 0}{4} = 1$ d.h. die BV bleiben erhalten, auï¿œer der einen in der Pivotzeile.

[1] von lat. iterare ‚wiederholen'; hier bezieht sich „Iteration" auf jeden Durchgang

Das neue Simplextableau lautet nach der vollstï¿œndigen Umrechnung

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	rechte Seite
y_1	0	0	4	1	0	-0.5	140
y_2	0	2	-4	0	1	-1.5	60
x_1	1	0.5	1	0	0	0.25	80
G	0	-1	6	0	0	2.5	800

Die Zielfunktion hat nun den Wert 800. D.h. der Gewinn ist nun 800 anstatt 0. Es gibt aber noch einen negativen Wert in der Zielfunktionszeile. In einer neuen Iteration mï¿œssen sï¿œmtliche Schritte noch einmal durchlaufen werden mit dem Pivotelement 2 in Zeile 2 und Spalte 2. Damit ergibt sich das neue Simplextableau:

	x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3	rechte Seite
y_1	0	0	4	1	0	-0.5	140
x_2	0	1	-2	0	0.5	-0.75	30
x_1	1	0	2	0	-0.25	0.625	65
G	0	0	4	0	0.5	1.75	830

Nun sind alle Elemente der Zielfunktionszeile nicht negativ. Es handelt sich um die optimale Lï¿œsung. x_3 wurde nicht ausgetauscht. Der Gewinn ist maximiert und betrï¿œgt 830GE.

Bemerkung: Die Schritte 1-**??** dienen der Vorbereitung des eigentlichen Austauschschrittes, der in den zwei weiteren Schritten **??** und **??** durchgefï¿œhrt wird. Schritt 5 entspricht der Multiplikation einer Gleichung mit einer Zahl. In unserem Fall ist das Ziel, in einer Spalte eine 1 stehen zu haben.
In Schritt 6 wird von jeder Zeile (auï¿œer der Pivotzeile) ein geeignetes Vielfaches der Pivotzeile abgezogen, so dass in der Pivotspalte Nullen stehen.

ï¿œbung: Berechnen Sie das Beispiel von Kap.**??** mit der Simplexmethode.

2.1.1 Interpretation des Endtableaus

1. Ergebnisse (Ergebnisspalte; rechte Seite):

   (a) 830 in der Zielfunktionszeile ist der maximal erzielbare Erlï¿œs.

   (b) 30 und 65 sind die Werte fï¿œr x_2 und x_1, also die Mengeneinheiten der hergestellten Endprodukte E_2 und E_1.
   (c) $y_1 = 140$ besagt, dass von Rohstoff R_1 noch 140 unverbrauchte Einheiten ï¿œbrig sind.

2. Zielfunktionszeile (G-Zeile):
   (a) Die Nullen in den Spalten fï¿œr x_1, x_2 und y_1 deuten an, dass diese Grï¿œï¿œen bereits durch die Ergebnisspalte festgelegt sind.
   (b) Die Strukturvariable x_3 ist im Endtableau immer noch NBV, also Null. D.h. Endprodukt E_3 wird nicht hergestellt, wenn der Erlï¿œs maximiert werden soll. Die 4 in der Zielfunktionszeile besagt, dass der Erlï¿œs um 4GE sinkt, wenn wider besseres Wissen doch eine Einheit von E_3 hergestellt wird.
   In anderen Worten: E_3 wï¿œrde nur hergestellt werden, wenn die Produktionskosten um mindestens diesen Betrag sinken wï¿œrden oder der Erlï¿œs durch dieses Produkt um mindestens diesen Betrag erhï¿œht wï¿œrde. Man spricht auch von *reduzierten Kosten*.
   (c) 0.5 in der y_2-Spalte und 1.75 in der y_3-Spalte sind *Schattenvariablen.* Sie geben an, um wieviel der Erlï¿œs steigen wï¿œrde, wenn doch eine Einheit mehr von R_2 bzw. R_3 zur Verfï¿œgung stehen wï¿œrde. D.h. wenn eine Einheit von R_2 fï¿œr weniger als 0.5GE erhï¿œltlich ist, lohnt sich der Zukauf. Entsprechendes gilt fï¿œr R_3 zum Preis von weniger als 1.75GE.
   Man spricht auch vom *Schattenpreis, Opportunitï¿œtskosten, Effizienzpreis* oder vom *Knappheitsgrad*.

3. Auch die Zahlen im Inneren des Tableaus lassen sich verstehen:
   (a) Die Spalten fï¿œr x_1, x_2 und y_1 enthalten eine 1 und sonst Nullen. Diese Grï¿œï¿œen sind bereits durch die Ergebnisspalte festgelegt (s. 1b und 1c).
   (b) Die Existenz einer x_3-Spalte (bzw. Nichtexistenz einer x_3-Zeile) bedeutet zunï¿œchst, dass x_3 NBV geblieben ist, also $x_3 = 0$ (s. 2b). Wï¿œrde man doch eine Einheit von E_3 herstellen, bedeutet dies, dass
      i. der Erlï¿œs um 4GE sinkt, s. 2b.
      ii. x_1 um 2 *kleiner* wird, von Endprodukt E_1 also nur noch 2 Einheiten weniger hergestellt werden kï¿œnnen.

iii. x_2 um 2 *grï¿œï¿œer* wird, von Endprodukt E_2 also 2 Einheiten mehr hergestellt werden kï¿œnnen. Da E_1 den hï¿œheren Stï¿œckpreis hat, fï¿œhrt dies im Endeffekt zum erwï¿œhnten Verlust von 4GE: $-2 \cdot 10 + 2 \cdot 6 + 1 \cdot 4 = -4$

(c) Die Werte in der y_2-Spalte und der y_3-Spalte ergï¿œnzen die Aussage 2c. Wï¿œren von Rohstoff 2 541ME statt 540ME vorhanden, so kï¿œnnten 0.5ME von Endprodukt 2 mehr produziert werden. Allerdings mï¿œsste man Endprodukt 1 um 0.25ME verringern. Fï¿œr den Erlï¿œs bedeutet dies: $\frac{1}{2} \cdot 6 - \frac{1}{4} \cdot 10 = +0.5$, was 2c entspricht.
Analog gilt: Wï¿œren von Rohstoff 3 321ME statt 320ME vorhanden, so kï¿œnnten 0.625ME von Endprodukt 1 mehr produziert werden. Allerdings mï¿œsste man Endprodukt 2 um 0.75ME verringern. Fï¿œr den Erlï¿œs bedeutet dies: $0.625 \cdot 10 - 0.75 \cdot 6 = +1.75$, was 2c entspricht. Auï¿œerdem wï¿œrde von Rohstoff 1 zusï¿œtzlich 0.5ME verbraucht werden, so dass nur noch 139.5ME ï¿œbrig bleiben .

2.2 Der duale Simplexalgorithmus

Auch hier liegen alle Bedingungen in Form von Ungleichungen vor. Es dï¿œrfen jedoch auch $\geqq$-Bedingungen vorkommen. Diese werden mit -1 durchmultipliziert und werden somit zu $\leqq$-Bedingungen. Nachteil: die rechte Seite ist jetzt negativ, was beim primalen Simplex-Algorithmus verboten ist (vergleiche Schritt **??**).

Beispiel: Gegeben ist folgendes Ungleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\leqq 16 \\
3x_1 + 2x_2 &\leqq 28 \\
x_2 &\leqq 7 \\
x_1 + x_2 &\geqq 3 \\
x_1,\, x_2 &\geqq 0
\end{aligned}
$$

Die Zielfunktion $G(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$ soll maximiert werden. Es handelt sich um eine Erweiterung des Beispiels aus Kap. **??**. Die entsprechende Forderung kï¿œnnte lauten, dass mindestens 3 Liter Farbe pro Tag hergestellt werden mï¿œssen. Die grafische Lï¿œsung ginge von folgender Abbildung aus:

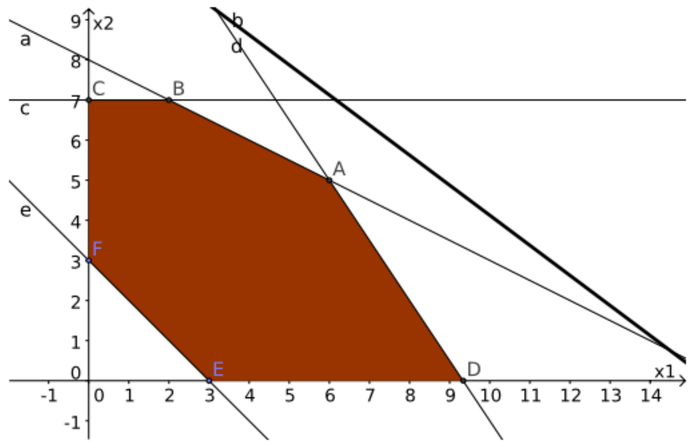


Abbildung 2:

Die Gerade e stellt eine untere Grenze dar. Der Ursprung ist also nicht mehr in der Menge der zulï¿œssigen Lï¿œsungen enthalten, so dass eine andere Anfangslï¿œsung ermittelt werden muss.

Das Gleichungssystem mit den Schlupfvariablen lautet:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + y_1 &= 16 \\ 3x_1 + 2x_2 + y_2 &= 28 \\ x_2 + y_3 &= 7 \\ -x_1 - x_2 + y_4 &= -3 \\ x_1,\ x_2,\ y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4 &\geqq 0 \end{aligned}$$

Simplextableau:

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	rechte Seite
y_1	1	2	1	0	0	0	16
y_2	3	2	0	1	0	0	28
y_3	0	1	0	0	1	0	7
y_4	-1	-1	0	0	0	1	-3
G	-3	-4	0	0	0	0	0

Ziel ist es, durch geeignete Vorarbeit zu einem Simplextableau zu kommen, auf das der primale Simplexalgorithmus angewendet werden kann, d.h. eine zulï¿œssige Anfangslï¿œsung zu bestimmen. Dann sind alle rechten Seiten wieder positiv. Dies geht in mehreren Schritten:

Algorithmus 2 Dualer Simplexalgorithmus

1. Von allen negativen Werten der rechten Seite wird der kleinste Wert bestimmt. Er legt die Pivotzeile fest.
   Hier: 4. Zeile mit -3 auf der rechten Seite

2. Es muss mindestens ein negativer Wert in der Pivotzeile vorkommen, sonst gibt es keine Lï¿œsung. Ein beliebiger dieser negativen Werte kann als Pivotelement verwendet werden.
   Hier sind dies die Zahlen : -1 in der 1. Spalte und -1 in der 2.Spalte

3. In manchen Fï¿œllen ist es vorteilhaft, aus dieser Vorauswahl den kleinsten Zielfunktionswert zur Bestimmung der Pivotspalte zu verwenden.
   Hier wird entgegen dieser Regel die erste Spalte gewï¿œhlt.

4. Das Pivotelement ist der Wert, der sowohl in der Pivotzeile als auch der Pivotspalte steht. Nun wird die BV der Pivotzeile gegen die NBV der Pivotspalte eingetauscht.
   Hier: -1 ist das Pivotelement; in der Variablenspalte (vorderste Spalte) wird "y_4" durch "x_1" ersetzt.

5. Nun folgen die Schritte **??** und **??** des primalen Simplex-Algorithmus.
   hier ergibt sich folgendes Simplextableau:

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	rechte Seite
y_1	0	1	1	0	0	1	13
y_2	0	-1	0	1	0	3	19
y_3	0	1	0	0	1	0	7
x_1	1	1	0	0	0	-1	3
G	0	-1	0	0	0	-3	9

Sind noch weitere negative Werte auf der rechten Seite vorhanden, muss das Verfahren erneut durchlaufen werden. Sind alle Werte der rechten Seite positiv, haben wir eine zulï¿œssige Anfangslï¿œsung gefunden. Trotzdem kï¿œnnen noch negative Werte in der Zielfunktionszeile stehen. Ab hier ist der primale Simplex-Algorithmus anzuwenden.

Bemerkung: Es gibt verschiedene Mï¿œglichkeiten, nach der Auswahl der Pivotzeile die Pivotspalte zu wï¿œhlen (vergl. Schritt 3 oben). Jede fï¿œhrt zum gleichen Ziel. Bei ungeschickter Wahl sind mehr Optimierungsschritte, d.h. mehr Schritte in Phase 2 nï¿œtig. Die beste Mï¿œglichkeit hï¿œngt von der konkreten Aufgabe ab und kann daher nicht allgemein festgelegt werden.

Im Beispiel gibt es keine weiteren negativen Werte auf der rechten Seite mehr, wohl aber in der Zielfunktionszeile. Es geht mit dem primalen Simplex-Algorithmus weiter. Pivotspalte ist Spalte 6 (-3 in der Zielfunktionszeile). Kleinster Quotient ist 19/3, also ist Zeile 2 die Pivotzeile und 3 das Pivotelement.
Neues Simplextableau nach vollstï¿œndigem Austausch:

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	rechte Seite
y_1	0	4/3	1	-1/3	0	0	20/3
y_4	0	-1/3	0	1/3	0	1	19/3
y_3	0	1	0	0	1	0	7
x_1	1	2/3	0	1/3	0	0	28/3
G	0	-2	0	1	0	0	28

Mit -2 in der Zielfunktionszeile ist noch nicht die optimale Lï¿œsung erreicht. Ein weiterer Austauschschritt mit dem Pivotelement 4/3 in Zeile 1 und Spalte 2 fï¿œhrt auf folgendes Simplextableau:

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	rechte Seite
x_2	0	1	3/4	-1/4	0	0	5
y_4	0	0	1/4	1/4	0	1	8
y_3	0	0	-3/4	1/4	1	0	2
x_1	1	0	-1/2	1/2	0	0	6
G	0	0	3/2	1/2	0	0	38

Nun sind alle Werte in der Zielfunktionszeile nicht negativ. Es ist die optimale Lï¿œsung erreicht mit $x_1 = 6$ und $x_2 = 5$. Fï¿œr die Zielfunktion gilt $G(6; 5) = 38$. Alle NBV, also Variablen, die nicht in der ganz links stehenden Variablenliste vorkommen, sind Null. Die Schlupfvariablen y_3 und y_4 haben im Fall der optimalen Lï¿œsung die Werte $y_3 = 2$ und $y_4 = 8$.
$y_3 = 2$ gibt an, wie viel von Farbe 2 mehr hergestellt werden dï¿œrfte, bis die Bedingung $(x_2 \leqq 7)$ verletzt wird.
$y_4 = 8$ sagt, dass 8 Einheiten Farbe weniger hergestellt werden dï¿œrften, bevor Bedingung $x_1 + x_2 \geqq 3$ verletzt wird. Beachten Sie, dass es sich hier um eine $\geqq$-Bedingung handelt und die Interpretation dementsprechend angepasst werden muss.

Zusammenfassung: Liegt ein Maximierungsproblem mit gemischten ($\leqq$ und $\geqq$) Bedingungen vor, wird die Lï¿œsung in zwei Phasen ermittelt. In Phase 1 wird eine zulï¿œssige Ausgangslï¿œsung ermittelt, indem zuerst die negativen BV (negative rechte Seite) mit Hilfe des dualen Simplexalgorithmus ausgetauscht werden. Meist hat dann die Zielfunktionszeile noch negative Werte, so dass in Phase 2 der primale Simplexalgorithmus zur Optimierung der nun zulï¿œssigen Ausgangslï¿œsung eingesetzt wird.

2.3 Der allgemeine Fall

Eine noch allgemeinere Situation ergibt sich, wenn in den Bedingungen (zusï¿œtzlich) Gleichungen auftreten. Auch in diesem Fall wird ein Simplextableau erstellt, das fï¿œr jede Gleichung eine Schlupfvariable enthï¿œlt. Allerdings muss sicher gestellt werden, dass jede Schlupfvariable, die einer Gleichung hinzugefï¿œgt wurde, am Ende Null wird, um die Gleichung zu erfï¿œllen. Da sï¿œmtliche NBV immer Null sind, wird dafï¿œr gesorgt, dass diese Schlupfvariablen zu NBV werden. Sie mï¿œssen ausgetauscht werden.

Beispiel: Aus 2 Futtermitteln soll eine Mischung hergestellt werden. Der Nutzen von Futtermittel A ist doppelt so groï¿œ, wie der von B. Aus ernï¿œhrungsphysiologischen Grï¿œnden muss die Summe aus der 3-fachen Menge von Futtermittel A und der einfachen Menge von Futtermittel B mindestens 30ME ergeben. Die einzelnen Komponenten kosten 4GE/ME (Geldeinheiten pro Mengeneinheit) und 3GE/ME. Die Gesamtkosten dï¿œrfen 60GE nicht ï¿œbersteigen. Den Futtermitteln ist ein Medikament zugesetzt, das in genauer Dosierung verabreicht werden muss. 20 ME von A oder 10 ME von B oder eine entsprechende Mischung aus beiden ergibt die richtige Menge.

Damit ergibt sich folgende mathematische Formulierung: Die Zielfunktion $G(x_1; x_2) = 2x_1 + x_2$ soll maximiert werden unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\geqq 30 \\ 4x_1 + 3x_2 &\leqq 60 \\ x_1 + 2x_2 &= 20 \\ x_1,\, x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

Das zugehï¿œrige Simplextableau ist:

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	rechte Seite	
y_1	-3	-1	1	0	0	-30	
y_2	4	3	0	1	0	60	
y_3	1	2	0	0	1	20	*
G	-2	-1	0	0	0	0	

Algorithmus 3 Allgemeiner Simplexalgorithmus

1. Alle Schlupfvariablen (zu Beginn die BV) die zu einer *Gleichung* gehï¿œren, werden markiert. Dies markiert zugleich Zeilen des Ausgangstableaus.
   Hier: Zeile 3 wird markiert, s. zusï¿œtzliche Spalte im Tableau.
2. Eine beliebige dieser markierten Zeilen wird Pivotzeile.
   Hier: Zeile 3 wird Pivotzeile
3. Als Pivotspalte kann eine beliebige Spalte gewï¿œhlt werden, fï¿œr die gilt:
   (a) Das damit festgelegte Pivotelement darf nicht Null sein.
   (b) Die Spalte darf nicht markiert sein. Dies ist beim ersten Austauschschritt natï¿œrlich nie der Fall. In einem spï¿œteren Schritt kï¿œnnte es jedoch passieren, dass eine bereits ausgetauschte Variable wieder zurï¿œckgetauscht wird, was durch diese Bedingung verhindert wird. Die Markierung wird in einer Markierungszeile fï¿œr Spalten vorgenommen (s. unten).
   Hier: z.B. fï¿œr Spalte 1 ist die Bedingung (nicht markiert) erfï¿œllt.
4. Das Pivotelement ist wie immer im Kreuzungspunkt von Pivotzeile und Pivotspalte.
   Hier: 1 in Zeile 3 und Spalte 1 wird Pivotelement.
5. Nun folgen die Schritte **??** und **??** des primalen Simplex-Algorithmus, also der eigentliche Austausch.
   Es ergibt sich folgendes Simplextableau:

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	rechte Seite
y_1	0	5	1	0	3	30
y_2	0	-5	0	1	-4	-20
x_1	1	2	0	0	1	20
G	0	3	0	0	2	40
					*	

Falls mehrere Variablen markiert wurden (mehrere Gleichungen im Ausgangsproblem) werden die Schritte 2 - 5 wiederholt, bis alle markierten Variablen NBV sind.
Hier sind keine weiteren Variablen markiert.

Falls negative Werte auf der rechten Seite existieren, folgt nun der duale Simplex-Algorithmus.
Hier ist noch ein negativer Wert auf der rechten Seite. Die zweite Zeile ist die nï¿œchste Pivotzeile. Als Pivotspalte wird Spalte 2 gewï¿œhlt, da sie auf ein negatives Pivotelement fï¿œhrt. Spalte 5 scheidet aus, da sie zur Variablen y_3 gehï¿œrt und daher markiert ist. Das neue Simplextableau lautet:

	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	rechte Seite
y_1	0	0	1	1	-1	10
x_2	0	1	0	-0.2	0.8	4
x_1	1	0	0	0.4	-0.6	12
G	0	0	0	0.6	-0.4	28
					*	

Falls erforderlich erfolgt die weitere Optimierung ï¿œber den primalen Simplex-Algorithmus.

Im allgemeinen Fall wird die Lï¿œsung also in drei Phasen ermittelt.

Hier ist eine weitere Optimierung nicht mehr mï¿œglich, da die einzige Spalte mit negativem Wert in der Zielfunktionszeile zu einer markierten Variablen gehï¿œrt und damit nicht mehr ausgetauscht werden darf. Die Zielfunktion hat nun den Wert 28. Dies scheint eine Verschlechterung gegenï¿œber dem vorherigen Schritt zu sein (dort war G=40, s.o.). Allerdings war die Lï¿œsung nicht zulï¿œssig (negativer Wert auf der rechten Seite) und damit der Zielfunktionswert sinnlos.

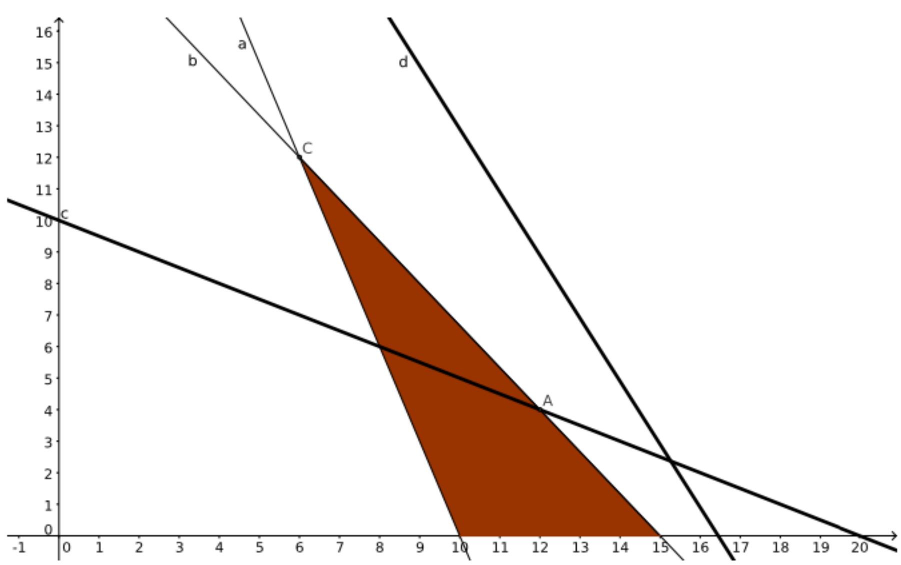


Abbildung 3:

Abbildung 3 zeigt die Gerade a als untere Grenze, die Gerade b als obere Grenze und die Gerade c auf der die Lï¿œsung liegen muss. Sie reprï¿œsentiert die Gleichung in den Bedingungen. Die Gerade d entspricht der Zielfunktion mit einem beliebigen (hier zu groï¿œen) Zielfunktionswert. Sie muss parallel nach links verschoben werden, bis sie den gï¿œltigen Bereich berï¿œhrt. Dies ist in Punkt A der Fall.

Interpretation: Von den Futtermitteln werden 12 bzw. 4 ME gebraucht.
$y_1 = 10$ heiï¿œt, dass 10 „Ernï¿œhrungseinheiten“ zu viel verbraucht wurden.
$y_2 - Spalte$: Mit einer Einheit mehr an erlaubten Gesamtkosten (also 61), wï¿œrde der Nutzen um 0.6 Einheiten steigen.
$y_3 - Spalte$: Mï¿œsste eine Einheit an Medikamenten mehr verabreicht werden, wï¿œrde der Nutzen um 0.4 Einheiten sinken (s. neg. Vorzeichen).

Zusammenfassung: Liegt ein gemischtes Maximierungsproblem mit $\leqq$, $=$ und $\geqq$ Bedingungen vor, werden auch die Gleichungen mit einer Schlupfvariablen versehen und markiert. Die Lï¿œsung erfolgt nun in 3 Phasen. Phase 0 eliminiert die markierten Variablen aus der Basis. Dann folgen Phase 1 und Phase 2 wie in Kap.**??** beschrieben.

2.4 Der verkï¿œrzte Simplexalgorithmus

Ist m die Anzahl der Bedingungen, so gibt es immer m Spalten, in denen eine 1 und sonst nur Nullen stehen. Jede dieser Spalten gehï¿œrt zu einer Basisvariablen. Die 1 steht in der Zeile, die zur gleichen Basisvariablen gehï¿œrt. Das Tableau enthï¿œlt also redundante Informationen. In einer verkï¿œrzten Version werden diese Spalten weggelassen. Damit ergeben sich ï¿œnderungen. Die Schritte 1-3 sind identisch mit denen zum primalen Simplexalgorithmus und werden hier nur der ï¿œbersichtlichkeit halber wiederholt. Die Schritte 4 und 5 werden ergï¿œnzt. In Schritt 6 bezieht sich “alle anderen Elemente” nur noch auf alle Elemente, die weder in der Pivotzeile noch in der Pivotspalte stehen.
Als Beispiel dient das Beispiel aus Kap.**??**. Die einzelnen Schritte sind im Anschluss an den Algorithmus dargestellt.

Algorithmus 4 Verkï¿œrzter Simplexalgorithmus

1. In der letzten Zeile mï¿œssen negative Elemente vorkommen, sonst ist keine Verbesserung der Lï¿œsung mehr mï¿œglich. Man wï¿œhlt das kleinste Element. Die zugehï¿œrige Spalte heiï¿œt “Pivotspalte”.
   Hier: erste Spalte mit -10 in der Zielfunktionszeile

2. Die Werte der rechten Seite mï¿œssen positiv sein. Man bildet alle Quotienten aus dem Wert der rechten Seite und dem Wert auf der Kreuzung dieser Zeile und der Pivotspalte. Negative Quotienten werden ignoriert.
   Hier: 300/2=150; 540/6=90 und 320/4=80

3. Der kleinste dieser (positiven) Quotienten bestimmt die "Pivotzeile".
   Hier: kleinster Wert ist 80, die dritte Zeile ist die Pivotzeile.

4. Die Zahl, auf der Kreuzung von Pivotzeile und Pivotspalte, heiï¿œt "Pivotelement". Nun wird die BV der Pivotzeile durch die NBV der Pivotspalte ersetzt. Am Ende der Iteration (nach Schritt 6) wird diese dann neue BV sein.
   Zusï¿œtzlich wird in der Variablenzeile ganz oben die NBV durch die BV ersetzt.
   Hier: 4 ist Pivotelement; in der Variablenspalte wird "y_3" durch "x_1" ersetzt und in der Variablenzeile wird "x_1" durch "y_3" ersetzt.

5. Die Elemente der Pivotzeile, einschlieï¿œlich der rechten Seite jedoch auï¿œer dem Pivotelement selbst, werden durch das Pivotelement geteilt.
   Hier: $2 \rightarrow \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$; $4 \rightarrow \frac{4}{4} = 1$ und $320 \rightarrow \frac{320}{4} = 80$
   Die Elemente der Pivotspalte (auï¿œer dem Pivotelement selbst) werden durch das Pivotelement geteilt und mit -1 multipliziert.
   Hier: $2 \rightarrow -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$; $6 \rightarrow -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$; $-10 \rightarrow \frac{10}{4}$
   Das Pivotelement geht in seinen Kehrwert ï¿œber.
   Hier: $4 \rightarrow \frac{1}{4} = 0.25$

6. Alle anderen Elemente werden nach folgendem Schema berechnet:
   die Elemente der Matrix seien a_{ij}; die Pivotzeile sei Zeile k; die Pivotspalte sei Spalte l
   das Pivotelement ist also a_{kl}. Die Elemente der rechten Seite seien b_i. Dann gilt:
   $a_{ij} \rightarrow a_{ij} - \frac{a_{il} \cdot a_{kj}}{a_{kl}}$ und $b_i \rightarrow b_i - \frac{a_{il} \cdot b_k}{a_{kl}}$
   hier exemplarisch: Zeile 1 ; Spalte 3: $6 \rightarrow 6 - \frac{2 \cdot 4}{4} = 4$; Zeile 2, Spalte 2: $5 \rightarrow 5 - \frac{6 \cdot 2}{4} = 2$

Das Beispiel aus Kap. ?? wird dann zu (Pivotelemente gekennzeichnet):

	x_1	x_2	x_3	r. S.
y_1	2	1	6	300
y_2	6	5	2	540
y_3	$\boxed{4}$	2	4	320
G	-10	-6	-4	0

	y_3	x_2	x_3	r. S.
y_1	-0.5	0	4	140
y_2	-1.5	$\boxed{2}$	-4	60
x_1	0.25	0.5	1	80
G	2.5	-1	6	800

	y_3	y_2	x_3	r. S.
y_1	-0.5	0	4	140
x_2	-0.75	0.5	-2	30
x_1	0.625	-0.25	2	65
G	1.75	0.5	4	830

2.5 Sensitivitï¿œtsanalyse

Bei *parametrischer Optimierung* wird geprï¿œft, wie stark sich die optimale Lï¿œsung ï¿œndert, wenn Verï¿œnderungen an den Ausgangsdaten vorgenommen werden. Wird immer nur eine Grï¿œï¿œe geï¿œndert, spricht man von *Sensitivitï¿œtsanalyse*. Die Verï¿œnderungen kï¿œnnen sich auf die Koeffizienten der Zielfunktion, die rechten Seiten der Ungleichungen und die Koeffizienten der Ungleichungen beziehen.

Auf die Herleitung wird hier verzichtet. Die einzelnen Schritte sind zwar leicht nachvollziehbar. Die Fï¿œlle eines mehrseitigen Rechengangs wird aber schnell unï¿œbersichtlich. Eine gute Darstellung findet sich in [?].

Allgemein wird ein Koeffizient mit dem Wert c_k durch die Variable c ersetzt und geprï¿œft, in welchem Intervall $\left[c_k - c_k^-;\, c_k + c_k^+\right]$ sich c befinden muss, so dass die Optimallï¿œsung fï¿œr c_k zumindest qualitativ erhalten bleibt. Nicht nur die Herleitung, sondern auch die rechnerische Untersuchung ist langwierig und wird in dieser Vorlesung nicht explizit behandelt. Das Vorgehen ist in den Ergï¿œnzungen Kap.2 dargestellt.

Statt dessen wird hier der einfache Fall mit nur zwei Variablen betrachtet. Hier ist eine graphische Veranschaulichung mï¿œglich und die ï¿œberlegungen sind dementsprechend einfacher und ï¿œbersichtlicher. Wir werden das Intervall $[c^-;\, c^+]$ bestimmen, in dem sich c bewegen darf.

Es wird das Beispiel aus Kap.**??** verwendet:

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\leqq 16 \\
3x_1 + 2x_2 &\leqq 28 \\
x_2 &\leqq 7 \\
x_1,\, x_2 &\geqq 0
\end{aligned}
$$

mit der geï¿œnderten Zielfunktion $G(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2$. D.h. der Erlï¿œs der Farben ist anders als in Kapitel **??**.

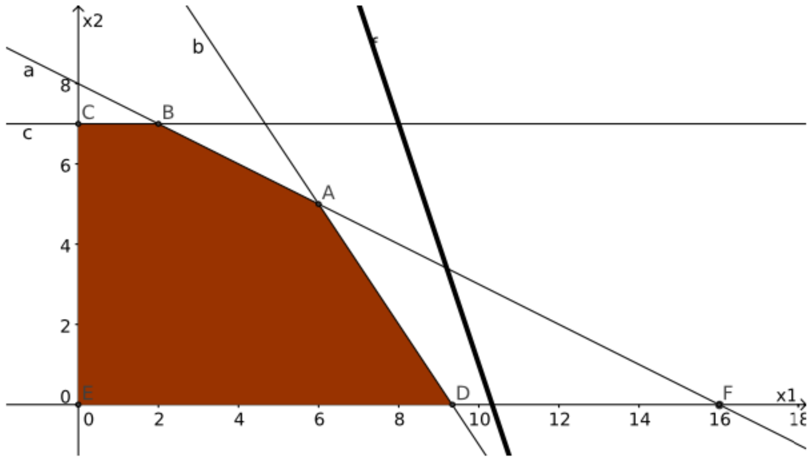


Abbildung 4:

Der Optimalpunkt ist also D statt A wie in Kap.??. D.h. es wird nur Farbe 1 hergestellt.

2.5.1 ï¿œnderung der Zielfunktionskoeffizienten

Die Koeffizienten der Zielfunktion legen die Steigung der zugehï¿œrigen Geraden fest. Gesucht ist nun der Bereich $[c^-; c^+]$, in dem sich ein Zielfunktionskoeffizient c_k ï¿œndern darf, ohne dass sich die Optimallï¿œsung ï¿œndert. Es ist leicht einzusehen, dass der Punkt $D\left(\frac{28}{3}|0\right)$ so lange die optimale Lï¿œsung reprï¿œsentiert, als die Zielfunktion nicht flacher wird als die Gerade b mit Steigung $-\frac{3}{2}$. Erst wenn die Zielfunktion flacher wird, lohnt es sich, Farbe 2 herzustellen. Da D auf einer Koordinatenachse liegt, gibt es keine obere Grenze.

Hier wird der Fall untersucht, dass c als Vorfaktor von x_2 in der Zielfunktion vorkommt:

$$G = 3x_1 + cx_2$$

Fï¿œr $c = c_k = 1$ ergibt sich also das obige Problem. Gesucht ist nun, in welchem Intervall c variieren darf, ohne den optimalen Punkt $D\left(\frac{28}{3}|0\right)$ zu ï¿œndern.

Die relevanten Geraden werden in Normalform umgeformt $(x_1 \to x;\, x_2 \to y)$:

$$\begin{aligned} Zielfunktion:\ y &= -\frac{3}{c}x + \frac{G}{c} \\ 2.Bed.(Gerade\, b):\ y &= -\frac{3}{2}x + 14 \end{aligned}$$

Nun muss gelten:

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2} &\geqq -\frac{3}{c} \\ \frac{2}{3} &\geqq \frac{c}{3} \\ c &\leqq 2 \end{aligned}$$

Die untere Grenze wird so bestimmt, dass die Steigung (pos.) Null ist. Also $c \geqq -\infty$. D.h.

$$-\infty \leqq c \leqq 2$$

2.5.2 ï¿œnderung eines Koeffizienten einer Bedingung

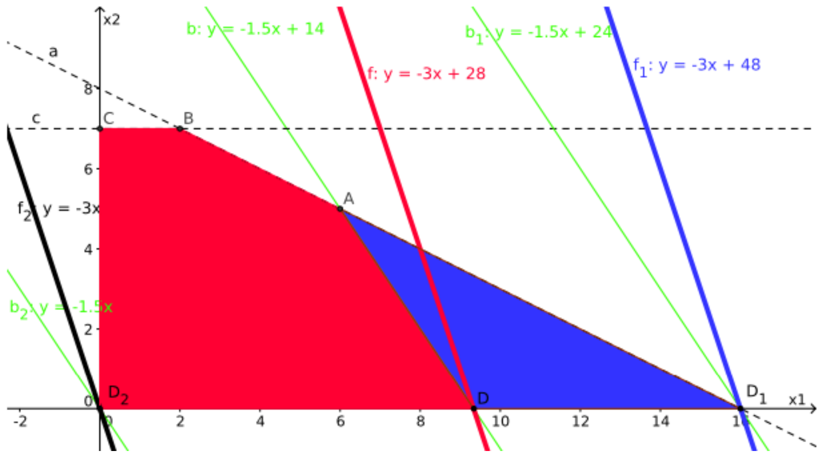
Hierdurch ï¿œndert sich Steigung einer Randbedingung. Der Fixpunkt um den sich die entsprechende Gerade dreht, liegt immer auf einer Koordinatenachse. Die Grenzen ergeben sich aus folgenden Mï¿œglichkeiten:

1. Der Optimalpunkt ist der Schnittpunkt der beweglichen Geraden mit einer anderen (festen) Geraden einer Randbedingung. Der Optimalpunkt wird mit der beweglichen Geraden entlang der festen Geraden verschoben bis einer der folgenden Fï¿œlle eintritt:
   (a) Der verschobene Optimalpunkt erreicht einen anderen Schnittpunkt von Randbedingungen.
   (b) Die Steigung der beweglichen Geraden erreicht den Wert der Steigung der Zielfunktion.
2. Der Optimalpunkt ist der Fixpunkt. Dann ergibt sich die Grenze durch Vergleich mit der Steigung der Zielfunktion.

1. Beispiel: Hier soll exemplarisch die zweite Bedingung in

$$cx_1 + 2x_2 \leqq 28$$

verallgemeinert werden. Fixpunkt (0|14). Fï¿œr c=3 ergibt sich obiges Problem:



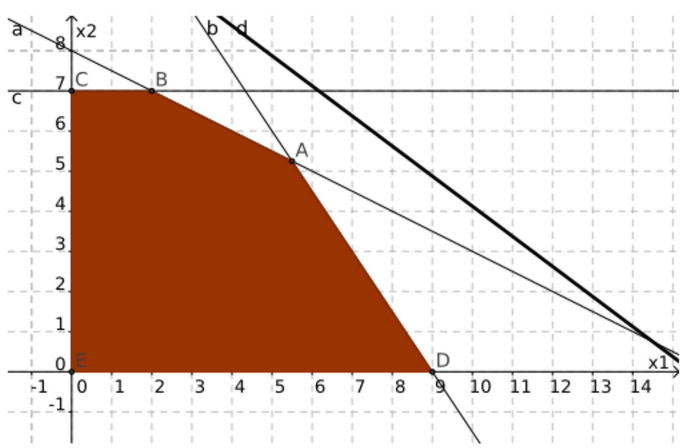
Der Punkt D darf auf der x-Achse *verschoben* werden.

Die Gerade b wird zu:

$$y = -\frac{c}{2}x + 14$$

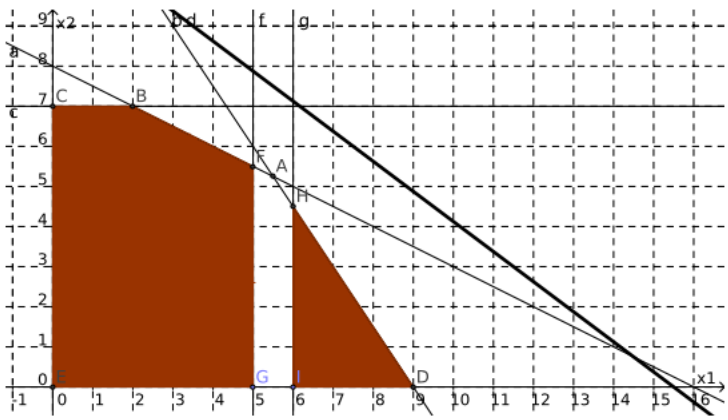
Wenn die Steigung (neg.) Null wird, rutscht der Punkt D auf der x-Achse ins Unendliche. Wenn er den Punkt F (Schnitt zwischen a und der x-Achse) ï¿œberschreitet, liegt er auï¿œerhalb des zulï¿œssigen Bereichs und F ist der neue Optimalpunkt. Dies geschieht bei $c = \frac{7}{4}$, also

$$c \geqq \frac{7}{4}$$



Wird die Gerade b aber steiler als die Zielfunktionsgerade, so wird der Punkt A zum Optimalpunkt. Es muss also gelten:

$$\begin{aligned} -\frac{c}{2} &\geqq -3 \\ c &\leqq 6 \end{aligned}$$



D.h.

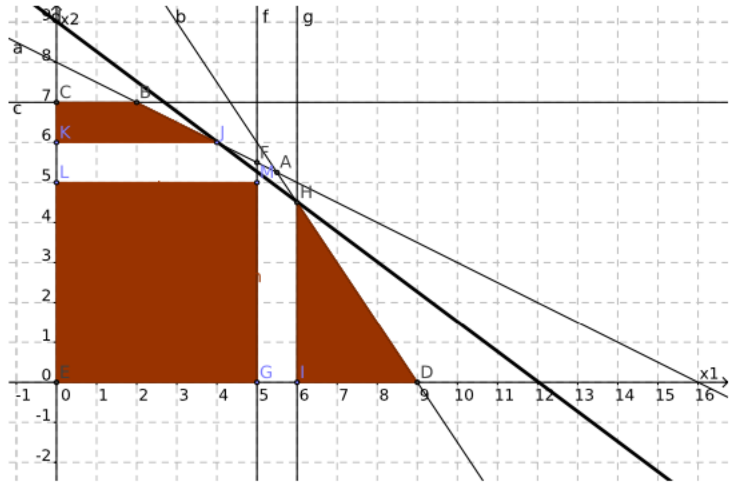
$$\frac{7}{4} \leqq c \leqq 6$$

2. Beispiel: Das Optimierungsproblem

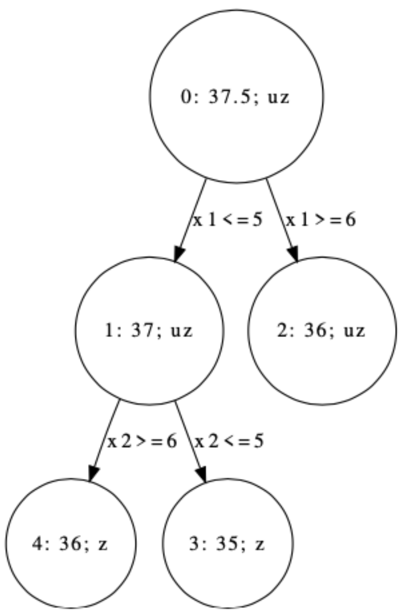
$$\begin{array}{rrcl} (I) & x_1 + 3x_2 & \leqq & 9 \\ (II) & 2x_1 + c \cdot x_2 & \leqq & 8 \\ (III) & x_1;\, x_2 & \geqq & 0 \\ & G & = & x_1 + x_2 \rightarrow MAX \end{array}$$

mit $c = 1$ hat die Lï¿œsung $x_1 = 3$ und $x_2 = 2$. Fï¿œhren Sie folgende Sensitivitï¿œtsanalyse durch: bestimmen Sie, in welchem Bereich der Vorfaktor c in der Bedingung (II) variieren darf, so dass die gegebene Lï¿œsung die Optimallï¿œsung bleibt.
Beachten Sie: die Lï¿œsung wird sich mit c *verschieben*. Gefragt ist, ab welchen Werten von c die Lï¿œsung nicht mehr durch den Schnitt der beiden Bedingungen (I) und (II) entsteht.

Fixpunkt (4|0)



Grenzpunkt: $P\,(9|0)\,:\,0=-\frac{2}{c}\cdot 9+\frac{8}{c}=-\frac{10}{c}\Longrightarrow c\rightarrow-\infty$. Die Zeichnung zeigt den Fall fï¿œr c=-20



Fï¿œr c=2 erreicht die Grenzgerade die Steigung der Zielfunktion. Also ist c=2 die andere Grenze, da ab hier der Punkt (4|0) der Optimalpunkt ist. Die Zeichnung zeigt den Fall fï¿œr c=2,67. Hier ist die Begrenzungsgerade also schon zu flach und die Zielfunktionsgerade geht durch (4|0).

OR-Skript-Abb/Bild252_2c.eps

Lï¿œsung: $-\infty \leqq c \leqq 2.$

2.5.3 ï¿œnderung der rechten Seiten

Die rechten Seiten geben typischerweise Maximalmengen oder -kosten an. Eine ï¿œnderung entspricht einer Parallelverschiebung der zugehï¿œrigen Begrenzung, in unserem Fall also von Geraden.

Wichtig: Eine solche ï¿œnderung *verschiebt* den optimalen Berï¿œhrpunkt mï¿œglicherweise. Gesucht ist der Bereich der Variation eines Wertes der rechten Seite, so dass immer noch der gleiche (evtl. jedoch verschobene) Punkt zu einem Maximum der Zielfunktion fï¿œhrt.

Erste alternative Formulierung: die Basisvariablen sollen die gleichen bleiben, ihr Wert darf sich aber ï¿œndern. Der Optimalwert der Zielfunktion ï¿œndert sich damit auch.

Zweite alternative Formulierung: der Optimalpunkt muss der Schnittpunkt der gleichen Geraden bleiben, selbst wenn sich dieser Schnittpunkt verschiebt. Von einer anderen Lï¿œsung sprechen wir erst, wenn der Optimalpunkt durch einen Schnitt zwischen anderen Geraden gegeben ist.

simplex/GeoGebra/Bild7a.ggb.eps

Abbildung 5:

Hier wird die Gerade b mit ursprï¿œnglich c=28 verschoben:

$$3x_1 + 2x_2 \leqq c$$

Sie lautet in Normalform:

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{c}{2}$$

Mit c verschiebt sich die Gerade b parallel. b kann nach links bis zum Ursprung verschoben werden. D.h. $c \geqq 0$.

Nach rechts kann die Gerade b verschoben werden, bis sie die x-Achse im gleichen Punkt schneidet, wie die Gerade a. Ab da ist der Schnittpunkt zwischen a und der x-Achse der

Optimalpunkt. Dies ist bei x=16 der Fall. Fï¿œr die Obergrenze von c muss also gelten:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{3}{2} \cdot 16 + \frac{c}{2} \\ 24 &= \frac{c}{2} \end{aligned}$$

D.h. $c \leqq 48$ oder $0 \leqq c \leqq 48$

2.6 Dualitï¿œt

Ein Abschnitt zur Dualitï¿œt ist in den Ergï¿œnzungen Kap.1. Hier soll nur kurz der Nutzen des dualen Problems umrissen werden.

Die Formulierung des dualen Problems folgt aus der Formulierung des ursprï¿œnglichen (primalen) Problems. Dies gilt auch fï¿œr das Ergebnis, also die optimale Lï¿œsung.

Die optimalen Variablen des dualen Problems korrespondieren mit dem Knappheitsgrad des primalen Problems.

Die optimalen dualen Strukturvariablen geben den Schattenpreis der Bedingungen des primalen Problems an.

Die dualen Schlupfvariablen geben im (optimalen) Ergebnis die Opportunitï¿œtskosten an, d.h. den zusï¿œtzlichen Gewinn bei Aufnahme einer zusï¿œtzlichen Einheit. Sie sind den primalen Strukturvariablen zugeordnet.

Diese Informationen entnehmen wir jedoch schon dem Optimaltableau des primalen Problems (s. **??**), so dass das Thema Dualitï¿œt hier nicht weiter vertieft wird. Andererseits folgen diese Interpretationen des Optimaltableaus erst aus der Theorie der Dualitï¿œt. Vergl. z.B. [**?**].

2.7 Zusammenfassung Simplex

Maximierungsproblem: Zielfunktion $\Rightarrow$ MAX

1. $\leqq$ Bedingungen: primaler Simplexalgorithmus = Phase 2
   (a) PS (Pivotspalte) aus dem kleinsten negativen ZFK (Koeffizienten der Zielfunktionszeile)
   (b) PZ (Pivotzeile) aus dem kleinsten Quotienten>0
   (c) Austausch
   (d) falls mindestens ein ZFK<0 nochmal ab (a)
   sonst fertig
2. (zusï¿œtzlich) $\geqq$ Bedingungen: dualer Simplexalgorithmus = Phase 1
   (a) PZ aus dem kleinsten negativen Wert der RS (rechten Seite)
   (b) PS beliebig jedoch mit Pivotelement<0
   (c) Austausch
   (d) falls mindestens ein Wert der RS<0 nochmal ab (a)
   sonst: falls mindestens ein ZFK<0 weiter ab 1.
   sonst fertig
3. (zusï¿œtzlich) Gleichungen: entsprechende Zeilen markieren; Phase 0
   (a) eine markierte Zeile ist PZ
   (b) PS aus den nicht markierten Spalten wï¿œhlen, so dass Pivotelement$\neq 0$
   (c) Austausch und Spalte markieren
   (d) falls weitere Zeilenmarkierungen existieren, weiter ab (a)
   sonst: falls negative RS weiter ab 2.
   sonst: falls mindestens ein ZFK<0 weiter ab 1.
   sonst fertig
4. Interpretation des Optimaltableaus
   (a) BV = RS
   (b) NBV = 0
   (c) Optimalwert der Zielfunktion = RS
   (d) Schattenvariablen als ZFK

Weitere Stichworte:

- verkï¿œrzter Simplexalgorithmus: ist effektiver, also gut zu wissen
- Dualitï¿œt: ï¿œkonomische Interpretation; nï¿œtzlich z.B. fï¿œr Minimierungsprobleme; bei uns nur am Rand
- Sensitivitï¿œtsanalyse: in der Praxis sehr wichtig, von Hand eine langwierige Rechnung; bei uns: prinzipielles Verstï¿œndnis auf grafischer Ebene wichtig
- Interpretation der Zielfunktionszeile und der rechten Seite im Optimaltableau

3 Transportprobleme

Zunï¿œchst soll die Problemstellung an Hand eines Beispiels dargestellt werden:
Eine Kaufhauskette versorgt vier Filialen F_j mit einem Gut aus drei Lagerstellen L_i. Die *gesamte* Lagermenge soll verteilt werden. Lagermengen und Bedarf entsprechen Tabelle 1, die Entfernungen (oder Kosten) Tabelle 2:

Lager	Lagermenge a_i		Filiale	Bedarfsmenge b_j
L_1	20		F_1	17
L_2	15		F_2	18
L_3	20		F_3	8
			F_4	12
Summe	55		Summe	55

Tabelle 1

	F_1	F_2	F_3	F_4
L_1	11	3	8	15
L_2	6	2	5	1
L_3	1	6	7	4

Tabelle 2

Der Bedarf soll bei minimalem Transportaufwand (gefahrene Kilometer oder Fahrtkosten) befriedigt werden.

Es handelt sich um ein Minimierungsproblem mit Nebenbedingungen und nicht negativen Variablen.

x_{ij} gibt an, wie viele ME von Lager L_i in die Filiale F_j geliefert werden. Damit gilt fï¿œr die Zielfunktion:

$G = 11x_{11}+3x_{12}+8x_{13}+15x_{14}+6x_{21}+2x_{22}+5x_{23}+x_{24}+x_{31}+6x_{32}+7x_{33}+4x_{34} \to min$

Wir betrachten hier nur lineare Zielfunktionen. D.h. die Kosten wachsen linear mit der Menge an transportierten Gï¿œtern sowie dem Transportweg. Die Gï¿œter werden also einzeln geliefert bzw. berechnet.

Die Nebenbedingungen lauten:

$$\begin{aligned}
x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} &= 20 && (1)\\
x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} &= 15 && (2)\\
x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} &= 20 && (3)\\
x_{11}+x_{21}+x_{31} &= 17 && (4)\\
x_{12}+x_{22}+x_{32} &= 18 && (5)\\
x_{13}+x_{23}+x_{33} &= 8 && (6)\\
x_{14}+x_{24}+x_{34} &= 12 && (7)\\
x_{ij} &\geqq 0\,\forall\, i,\, j && (8)
\end{aligned}$$

(1)-(3) sind die Bedingungen fï¿œr die Lagermengen. (4)-(7) sind die Bedingungen fï¿œr die Bestellmengen. (8) gilt generell, da alle Mengen positiv sind.

Dieses lineare Optimierungsproblem kï¿œnnte mit Hilfe des Simplexalgorithmus gelï¿œst werden. Allerdings sind die Bedingungen (auï¿œer den Nichtnegativitï¿œtsbedingungen) immer in Form von Gleichungen gegeben. Dieser Umstand ermï¿œglicht speziell angepasste Lï¿œsungsmethoden, die effektiver sind.

Die Ausgangsgrï¿œï¿œen sind die gegebene Entfernungs- oder Kostenmatrix (c_{ij}) und die gesuchte Mengenmatrix (x_{ij}):

c_{ij}	F_1	F_2	F_3	F_4
L_1	11	3	8	15
L_2	6	2	5	1
L_3	1	6	7	4

x_{ij}	F_1	F_2	F_3	F_4	
L_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	20
L_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	15
L_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	20
	17	18	8	12	55

Die allgemeine Formulierung eines Transportproblems lautet also:

$$G = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \quad \rightarrow \quad min \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \quad = \quad a_i;\ i \epsilon\, [1;\ m] \tag{10}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \quad = \quad b_j;\ j \epsilon\, [1;\ n] \tag{11}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{12}$$

$$x_{ij} \quad \geqq \quad 0 \tag{13}$$

Wie beim Simplexalgorithmus gibt es so viele Basisvariablen (BV), also x_{ij}, wie unabhï¿œngige Gleichungen. Dies sind die Gleichungen (10) und (11), also m+n Gleichungen. Gleichung (12) ist keine unabhï¿œngige Gleichung sondern eine zusï¿œtzliche Information und reduziert die Zahl der BV auf m+n-1.

Gleichung (10) bedeutet, dass die aus einem Lager ausgelieferten Einzelmengen in der Summe die dort vorhandene Gesamtmenge ergeben. Wie erwï¿œhnt, soll die gesamte Lagermenge ausgeliefert werden. Diese Menge steht in der Tabelle fï¿œr x_{ij} rechts.

Gleichung (11) bedeutet, dass die an eine Filiale gelieferten Mengen in der Summe die Bedarfsmenge ergeben. Diese Menge steht in der Tabelle fï¿œr x_{ij} unten.

Da hier nicht von vornherein eine zulï¿œssige Lï¿œsung existiert, muss in einer ersten Stufe eine solche gefunden werden. In Stufe 2 wird diese in Bezug auf die Zielfunktion optimiert.

Bemerkung: Die Gleichung (12) - Forderung nach Gleichheit der Summe von Angebot und Nachfrage - stellt meist keine wirkliche Einschrï¿œnkung dar. Ggf. muss ein Dummy-Anfrager ein ï¿œberangebot rechnerisch aufnehmen. Die Transportkosten werden Null gesetzt, so dass die Gesamttransportkosten nicht beeinflusst werden. Rein rechnerisch kann ein Angebotsmangel entsprechend behandelt werden. Dies bedeutet, dass Filialen mit den hï¿œchsten Transportkosten nachrangig behandelt und zunï¿œchst gar nicht beliefert werden. Im konkreten Fall werden evtl. weitere ï¿œberlegungen berï¿œcksichtigt werden mï¿œssen, wie z.B vorrangige Behandlung von Groï¿œ- oder Stammkunden.

3.1 Ermittlung einer Ausgangslï¿œsung

Es muss eine Lï¿œsung fï¿œr m+n-1 Variablen x_{ij} gefunden werden, wobei alle anderen Null sind. Diese Lï¿œsung muss die Gleichungen (10) und (11) erfï¿œllen. Auf das Beispiel bezogen muss die Mengenmatrix (s.o.) so ausgefï¿œllt werden, dass alle Zeilensummen und alle Spaltensummen erfï¿œllt sind.

Hier werden zwei Methoden vorgestellt: die Nordwest-Ecken-Regel und das Rangfolgeverfahren oder Matrixminimumverfahren.

3.1.1 Nordwest-Ecken-Regel

Folgende Tabelle muss gefï¿œllt werden

	F_1	F_2	F_3	F_4	
L_1					20
L_2					15
L_3					20
	17	18	8	12	55

Bei der Nordwest-Ecken-Regel wird links oben (Nordwest-Ecke) begonnen und die grï¿œï¿œte Zahl eingetragen, so dass weder die Zeilen- noch die Spaltensumme ï¿œberschritten wird, hier also $x_{11} = 17$. x_{11} ist damit Basisvariable. Die erste Spalte ist erledigt. Es wird in der ersten Zeile weiter gemacht. Mit $x_{12} = 3$ ist auch diese Zeile erfï¿œllt:

	F_1	F_2	F_3	F_4	
L_1	17	3			20
L_2					15
L_3					20
	17	18	8	12	55

;

	F_1	F_2	F_3	F_4	
L_1	17	3			20
L_2		15			15
L_3					20
	17	18	8	12	55

Die nï¿œchste Tabelle enthï¿œlt eine 15 in der zweiten Spalte, so dass auch diese Summe erfï¿œllt wird, ohne dass die Zeilensumme ï¿œberschritten wurde. Tatsï¿œchlich ist diese (zufï¿œllig) genau erfï¿œllt. Eine Basisvariable wird also Null. Z.B. $x_{23} = 0$. Dies darf trotz des Wertes Null nicht ï¿œbergangen werden, da wir sonst eine BV zu wenig haben. Es geht weiter mit x_{33}. Mit einer 8 ist die Spaltensumme erfï¿œllt. Dann fehlt nur noch ein letzter Wert (12) in der vierten Spalte, der auch diese Spaltensumme erfï¿œllt. Aufgrund der Gleichung (4) geht diese Rechnung mit dem letzten Wert immer auf. Mit (gedachten) Nullen in den unausgefï¿œllten Plï¿œtzen ist eine zulï¿œssige Anfangslï¿œsung gefunden:

	F_1	F_2	F_3	F_4	
L_1	17	3			20
L_2		15	0		15
L_3			8	12	20
	17	18	8	12	55

Entfernungsmatrix:

c_{ij}	F_1	F_2	F_3	F_4
L_1	11	3	8	15
L_2	6	2	5	1
L_3	1	6	7	4

Diese Lï¿œsung ist sicher nicht optimal, da die Entfernungsmatrix noch gar nicht berï¿œcksichtigt wurde. Fï¿œr die Zielfunktion gilt: $G = 17 \cdot 11 + 3 \cdot 3 + 15 \cdot 2 + 8 \cdot 7 + 12 \cdot 4 = 330$. Die Summe der Transportwege betrï¿œgt 330 Lï¿œngeneinheiten.

Bemerkung: Wird im ersten Schritt nicht, wie hier, die Spaltensumme erfï¿œllt, sondern die Zeilensumme, muss im nï¿œchsten Schritt in der ersten Spalte und der zweiten Zeile weiter gemacht werden.

Zwei Verfahren zur Optimierung werden in Kap. **??** behandelt.

3.1.2 Rangfolgeverfahren

Eine bessere Anfangslï¿œsung bekommt man mit dem Rangfolgeverfahren, da es die Entfernungsmatrix (oder Kostenmatrix) berï¿œcksichtigt. Anstatt links oben zu beginnen und zeilen- bzw. spaltenweise fortzuschreiten, wird der Platz besetzt, auf dem der kleinste Wert der Entfernungsmatrix steht. Im Beispiel Zeile 3 Spalte 1 (mit Wert 1 in der Entfernungsmatrix):

	F_1	F_2	F_3	F_4	
L_1					20
L_2					15
L_3	17				20
	17	18	8	12	55

Entfernungsmatrix:

c_{ij}	F_1	F_2	F_3	F_4
L_1	11	3	8	15
L_2	6	2	5	1
L_3	1	6	7	4

Spalte 1 ist damit erfï¿œllt und wird gestrichen. D.h. im weiteren Verlauf der Rechnung werden die Werte aus Spalte 1 nicht mehr berï¿œcksichtigt.

Weiter geht es mit Zeile 2 und Spalte 4 (Wert 1):

	F_1	F_2	F_3	F_4	
L_1					20
L_2				12	15
L_3	17				20
	17	18	8	12	55

Spalte 4 ist erfï¿œllt und wird gestrichen.

Beachten Sie, dass die Reihenfolge in der die beiden bisherigen BV gefunden wurden, willkï¿œrlich war. Die entsprechenden Werte in der Entfernungsmatrix sind gleich. In unserem Beispiel ergibt sich dadurch kein Unterschied in der zu bestimmenden Ausgangslï¿œsung. In einem anderen Fall, wenn zwei gleiche Werte in der Entfernungsmatrix in der gleichen Zeile oder der gleichen Spalte stehen, kï¿œnnte sich jedoch ein Unterschied ergeben. Das Rangfolgeverfahren gibt keine Regel an, wie in einem solchen Fall zu verfahren ist, d.h. die Wahl erfolgt zufï¿œllig.

Der nï¿œchstkleinere Wert (2) steht in Zeile 2 Spalte 2. Hier muss aufgrund der Zeilensumme eine 3 eingetragen werden.

	F_1	F_2	F_3	F_4	
L_1					20
L_2		3		12	15
L_3	17				20
	17	18	8	12	55

Damit wird Zeile 2 gestrichen.

Es folgen diese Schritte:

	F_1	F_2	F_3	F_4	
L_1		15			20
L_2		3		12	15
L_3	17				20
	17	18	8	12	55

	F_1	F_2	F_3	F_4	
L_1		15			20
L_2		3		12	15
L_3	17		3		20
	17	18	8	12	55

	F_1	F_2	F_3	F_4	
L_1		15	5		20
L_2		3		12	15
L_3	17		3		20
	17	18	8	12	55

Entfernungsmatrix (zur Berechnung der Zielfunktion):

c_{ij}	F_1	F_2	F_3	F_4
L_1	11	3	8	15
L_2	6	2	5	1
L_3	1	6	7	4

Nun sind m+n-1=6 (Basis-)Variablen besetzt und die Bedingungen sind alle erfï¿œllt.

Fï¿œr die Zielfunktion gilt: $G = 15 \cdot 3 + 5 \cdot 8 + 3 \cdot 2 + 12 \cdot 1 + 17 \cdot 1 + 3 \cdot 7 = 141$. Die Summe der Transportwege betrï¿œgt 141 Lï¿œngeneinheiten, ist also viel besser als beim Nordwest-Ecken-Verfahren.

Bemerkung: Ein noch besseres Verfahren ist das Vogelsche Approximationsverfahren. Es liefert meist schon sehr gute Anfangslï¿œsungen, ist aber sehr aufwï¿œndig und soll hier nicht besprochen werden. Eine gute Beschreibung mit durchgerechnetem Beispiel ist in [?].

3.2 Ermittlung der optimalen Lï¿œsung

Zur Ermittlung der optimalen Lï¿œsung werden zwei Methoden behandelt: die Stepping-Stone-Methode und die MODI-Methode.

3.2.1 Stepping-Stone-Methode

Die Optimierung geschieht durch eine Umverteilung der Transportmengen, was einem Austausch der BV entspricht. Dies erfolgt immer in einem rechtwinkligen Polygonzug. Das Vorgehen wird am obigen Beispiel gezeigt, wobei von der Anfangslï¿œsung nach Abschnitt **??** (Rangfolgeverfahren) ausgegangen wird.

Nun wird systematisch probiert, welche ï¿œnderungen vorteilhaft sind. Hierfï¿œr werden nacheinander alle NBV vorï¿œbergehend auf 1 gesetzt (die anderen NBV sind Null), was ï¿œnderungen an den BV nï¿œtig macht, so dass die Zeilen- und Spaltensummen erhalten bleiben.

Zunï¿œchst wird $x_{11} = 1$ gesetzt:

Tab.1	F_1	F_2	F_3	F_4	
L_1	$0 \to 1$	15	$5 \to 4$		20
L_2		3		12	15
L_3	$17 \to 16$		$3 \to 4$		20
	17	18	8	12	55

Entf.matrix:

c_{ij}	F_1	F_2	F_3	F_4
L_1	11	3	8	15
L_2	6	2	5	1
L_3	1	6	7	4

Im geschlossenen rechtwinkligen Polygonzug wird also abwechselnd der Wert 1 addiert und subtrahiert. Dadurch bleiben die Zeilen- und Spaltensummen erhalten. Beachten Sie, dass nur die NBV x_{11} geï¿œndert wurde, wï¿œhrend alle anderen ï¿œnderungen an BV vorgenommen wurden. Dies ist ein Grundprinzip der Methode und muss generell eingehalten werden. Nur dann ergibt sich immer ein eindeutiger rechtwinkliger Polygonzug in der Tabelle.

Die Zielfunktion ï¿œndert sich durch diese spezielle ï¿œnderung um 11-8+7-1=9. D.h. der Weg wird um 9 Einheiten lï¿œnger. Also muss diese ï¿œnderung verworfen werden.

Ist die Untersuchung fï¿œr eine NBV abgeschlossen, werden alle ï¿œnderungen wieder zurï¿œck gesetzt. Erst dann kann die nï¿œchste NBV untersucht werden.

Fï¿œr jeden freien Platz, der neu besetzt werden kann (d.h. jede NBV), existiert ein geeigneter Polygonzug, der nur im einfachsten Fall ein Rechteck ist. Die notwendigen ï¿œnderungen bei x_{34} sind z.B.:

Tab.2	F_1	F_2	F_3	F_4	
L_1		$15 \to 14$	$5 \to 6$		20
L_2		$3 \to 4$		$12 \to 11$	15
L_3	17		$3 \to 2$	$0 \to 1$	20
	17	18	8	12	55

ï¿œnderung der Zielfunktion: 4-7+8-3+2-1=3, also nicht gï¿œnstig.

Beachten Sie: Ein geschlossener Polygonzug kann sowohl leere als auch besetzte Felder geradlinig *ï¿œberspringen*. Diese Felder werden nicht verï¿œndert. Fï¿œr die Berechnung sind ausschlieï¿œlich die Eckpunkte zu betrachten, also die Punkte in denen der Polygonzug rechtwinklig abknickt,

Die restlichen Mï¿œglichkeiten sind in folgenden Tabellen aufgefï¿œhrt:

Tab.3	F_1	F_2	F_3	F_4	
L_1		$15 \to 16$	$5 \to 4$		20
L_2	$0 \to 1$	$3 \to 2$		12	15
L_3	$17 \to 16$		$3 \to 4$		20
	17	18	8	12	55

Tab.4	F_1	F_2	F_3	F_4	
L_1		$15 \to 14$	$5 \to 6$		20
L_2		3		12	15
L_3	17	$0 \to 1$	$3 \to 2$		20
	17	18	8	12	55

Tab.5	F_1	F_2	F_3	F_4	
L_1		$15 \to 16$	$5 \to 4$		20
L_2		$3 \to 2$	$0 \to 1$	12	15
L_3	17		3		20
	17	18	8	12	55

Tab.6	F_1	F_2	F_3	F_4	
L_1		$15 \to 14$	5	$0 \to 1$	20
L_2		$3 \to 4$		$12 \to 11$	15
L_3	17		3		20
	17	18	8	12	55

Nun mï¿œssen noch die ï¿œnderungen der Zielfunktionswerte verglichen werden.

1. $\triangle_{11} = 11 - 8 + 7 - 1 = 9$; ungï¿œnstig
2. $\triangle_{34} = 4 - 1 + 2 - 3 + 8 - 7 = 3$; ungï¿œnstig
3. $\triangle_{21} = 6 - 2 + 3 - 8 + 7 - 1 = 5$; ungï¿œnstig
4. $\triangle_{32} = 6 - 7 + 8 - 3 = 4$; ungï¿œnstig
5. $\triangle_{23} = 5 - 2 + 3 - 8 = -2$; gï¿œnstig
6. $\triangle_{14} = 15 - 3 + 2 - 1 = 13$; ungï¿œnstig

In diesem Beispiel gibt es nur *einen* Basistausch, der zu einer Verbesserung, d.h. Verringerung des Gesamttransportwegs, fï¿œhrt. Falls mehrere gï¿œnstige Ergebnisse vorliegen, wird die stï¿œrkste Verï¿œnderung (betragsgrï¿œï¿œter negativer Wert) vorgenommen.

Da nun bekannt ist, dass x_{23} vergrï¿œï¿œert werden muss, wird untersucht, welcher Wert maximal erlaubt ist. Die Grenze ergibt sich durch die ï¿œberlegung, dass keine Variable negativ werden darf. Im gegebenen Fall werden x_{22} und x_{13} um einen Betrag d verringert, wï¿œhrend x_{23} und x_{12} jeweils um d vergrï¿œï¿œert werden. Die maximal erlaubte Verringerung ist d=3, da x_{22} dann Null wird. Das Verfahren muss wie oben durchgefï¿œhrt werden aber mit 3 statt 1. Es ergibt sich

	F_1	F_2	F_3	F_4	
L_1		$15 \rightarrow 18$	$5 \rightarrow 2$		20
L_2		$3 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow 3$	12	15
L_3	17		3		20
	17	18	8	12	55

$=$

	F_1	F_2	F_3	F_4	
L_1		18	2		20
L_2			3	12	15
L_3	17		3		20
	17	18	8	12	55

Mit $x_{22} = 0$ und $x_{23} = 3$ ist x_{23} neue BV und x_{22} wird zur NBV.

Entfernungsmatrix:

c_{ij}	F_1	F_2	F_3	F_4
L_1	11	3	8	15
L_2	6	2	5	1
L_3	1	6	7	4

Jetzt muss die gesamte Berechnung fï¿œr die neuen NBV (die nun leeren Stellen) mit den neuen Werten erneut durchgefï¿œhrt werden. Tatsï¿œchlich ergeben sich nur positive Werte, so dass keine weitere Verbesserung mehr mï¿œglich ist. Das gegebene Tableau ist optimal. Die zu fahrende Strecke betrï¿œgt $G = 18{\cdot}3 + 2{\cdot}8 + 3{\cdot}5 + 12{\cdot}1 + 17{\cdot}1 + 3{\cdot}7 = 135$ Lï¿œngeneinheiten, ist also besser als die Ausgangslï¿œsung.

Beachten Sie: In der neuen Iteration mï¿œssen *alle* NBV neu berechnet werden, also auch die, die zuvor schon berechnet worden waren.

Algorithmus 5 Stepping-Stone

1. Zulï¿œssige Ausgangslï¿œsung (Basislï¿œsung) bestimmen, s.Kap. **??**
2. Ein freies Feld wird mit 1 besetzt
3. Korrekturen entlang einem rechtwinkligen Entfernungs- oder Kostenmatrixpolygonzug, so dass alle Bedingungen erfï¿œllt bleiben
4. Berechnung der Entfernungs- oder Kostenï¿œnderung $\triangle_{ij}$
5. Schritte 2-4 fï¿œr alle freien Felder
6. Sind alle $\triangle_{ij} \geqq 0$, liegt eine optimale Basislï¿œsung vor, sonst weiter mit Schritt 7
7. Es liegt mindestens ein negatives $\triangle_{ij}$ vor. Gibt es mehrere, so wird das betragsgrï¿œï¿œte davon gewï¿œhlt
8. Die Transportmatrix wird entlang dem in Schritt 3 verwendeten Polygonzug so korrigiert, dass eine der Basisvariablen Null wird, aber keine kleiner als Null. Dazu muss untersucht werden, welche Werte entlang des Polygonzuges verkleinert werden. Der kleinste dieser Werte sei d. Die Berechnung entspricht nun der von Schritt 3 mit d anstatt mit 1.
   Die Null gewordene ehemalige BV ist nun NBV. Die von Null auf d angewachsene ehemalige NBV ist neue BV.
   Im Fall von Entartung kï¿œnnen mehrere BV zugleich Null werden. Dann verlï¿œsst nur eine davon die Basis. Die anderen bleiben in der Basis, jedoch mit Wert 0.

Die Schritte 2-8 entsprechen einer Iteration. Sie mï¿œssen so lange wiederholt werden, bis in Schritt 6 die Abbruchbedingung erfï¿œllt ist.

ï¿œbung: 1) Berechnen Sie die $\triangle_{ij}$ und weisen Sie nach, dass das Tableau die optimale Transportverteilung darstellt.
2) Optimieren Sie die Anfangslï¿œsung von Kap. **??** (Nordwest-Ecken-Regel).

3.2.2 MODI-Methode

Die MODI-Methode (modifizierte Distributions Methode) unterscheidet sich vom Stepping-Stone Verfahren hauptsï¿œchlich in der Bestimmung der neuen Basisvariablen. Die Umverteilung entlang eines rechtwinkligen Polygonzuges bleibt erhalten.

Das Verfahren erfordert einen geringeren Rechenaufwand, ist aber mathematisch schwerer zu verstehen. Ohne Beweis wird von der Tatsache ausgegangen, dass die Werte der Entfernungs- oder Kostenmatrix c_{ij} an den Stellen der Basisvariablen folgender Gleichung genï¿œgen: $c_{ij} = u_i + v_j$. u_i und v_j sind *Dualvariablen*. Es wird wieder das Beispiel von oben verwendet mit der Anfangslï¿œsung nach Abschnitt **??** (NWE-Regel).

Die folgenden Tabellen zeigen die Basislï¿œsung aus Abschnitt **??**, die gesamte Entfernungsmatrix c_{ij} und die Matrix z_{ij}, die an den Stellen der Basisvariablen die Werte der *Entfernungs*matrix c_{ij} enthï¿œlt:

Basisv.	F_1	F_2	F_3	F_4
L_1	17	3		
L_2		15	0	
L_3			8	12

c_{ij}	F_1	F_2	F_3	F_4
L_1	11	3	8	15
L_2	6	2	5	1
L_3	1	6	7	4

z_{ij}	v_1	v_2	v_3	v_4
u_1	11	3		
u_2		2	5	
u_3			7	4

Nun mï¿œssen die Unbekannten u_i und v_j nach der Bedingung $c_{ij} = u_i + v_j$ bestimmt werden. Es gibt immer m+n solcher Variablen, jedoch nur m+n-1 Gleichungen zu ihrer Bestimmung (entsprechend der m+n-1 Basisvariablen). Ein Wert kann also beliebig gewï¿œhlt werden, z.B. $v_1 = 0$. Damit lassen sich die weiteren Grï¿œï¿œen sukzessiv bestimmen:

z_{ij}	0	-8	-5	-8
11	11	3		
10		2	5	
12			7	4

Die Bedingungen zur Bestimmung dieser Werte kï¿œnnen auch als ein lineares Gleichungssystem geschrieben werden, das mit den bekannten Methoden gelï¿œst wird.

Nun werden die freien Stellen berechnet.

Es muss gelten: $z_{ij} = u_i + v_j$:

z_{ij}	0	-8	-5	-8
11	11	3	6	3
10	10	2	5	2
12	12	4	7	4

Nun wird die *Differenzmatrix* $d_{ij} = c_{ij} - z_{ij}$ gebildet:

d_{ij}				
	0	0	2	12
	-4	0	0	-1
	-11	2	0	0

d_{ij} enthï¿œlt an den Stellen der BV also immer Nullen.

Gï¿œbe es in der Differenzmatrix keine negativen Werte, wï¿œre die Anfangslï¿œsung optimal gewesen. Von den negativen Werten wird der betragsgrï¿œï¿œte gewï¿œhlt: $d_{31} = -11$. Diese Stelle legt die neue Basisvariable fest. D.h. x_{31} wird neue Basisvariable. Die dadurch notwendigen Korrekturen werden wieder entlang einem rechtwinkligen Polygonzug ï¿œber die BV gebildet. Dieser Schritt entspricht Schritt 8 der Stepping-Stone-Methode.

Transportm.	F_1	F_2	F_3	F_4
L_1	$17 \to 9$	$3 \to 11$		
L_2		$15 \to 7$	$0 \to 8$	
L_3	$0 \to 8$		$8 \to 0$	12

$=$

Transportm.	F_1	F_2	F_3	F_4
L_1	9	11		
L_2		7	8	
L_3	8			12

x_{31} ist neue BV statt x_{33}.

Das beschriebene Verfahren wird wiederholt, bis in der Differenzmatrix nur noch positive Werte stehen: (T.m.=Transportmatrix)

z_{ij}	0	-8	-5	3
11	$\boxed{11}$	$\boxed{3}$	6	14
10	10	$\boxed{2}$	$\boxed{5}$	13
1	$\boxed{1}$	-7	-4	$\boxed{4}$

d_{ij}				
	0	0	2	1
	-4	0	0	-12
	0	13	11	0

T.m.	F_1	F_2	F_3	F_4
L_1	2	18		
L_2			8	7
L_3	15			5

z_{ij}	0	-8	7	3
11	$\boxed{11}$	$\boxed{3}$	18	14
-2	-2	-10	$\boxed{5}$	$\boxed{1}$
1	$\boxed{1}$	-7	8	$\boxed{4}$

d_{ij}				
	0	0	-10	1
	8	12	0	0
	0	13	-1	0

T.m.	F_1	F_2	F_3	F_4
L_1		18	2	
L_2			6	9
L_3	17			3

z_{ij}	0	2	7	3
1	1	$\boxed{3}$	$\boxed{8}$	4
-2	-2	0	$\boxed{5}$	$\boxed{1}$
1	$\boxed{1}$	3	8	$\boxed{4}$

d_{ij}				
	10	0	0	11
	8	2	0	0
	0	3	-1	0

T.m.	F_1	F_2	F_3	F_4
L_1		18	2	
L_2			3	12
L_3	17		3	

z_{ij}	0	1	6	2
2	2	$\boxed{3}$	$\boxed{8}$	4
-1	-1	0	$\boxed{5}$	$\boxed{1}$
1	$\boxed{1}$	2	$\boxed{7}$	3

d_{ij}				
	9	0	0	11
	7	2	0	0
	0	4	0	1

Nun sind alle Werte in der Differenzmatrix d_{ij} nicht negativ. Die letzte Transportmatrix war also optimal. Ein Vergleich mit dem Ergebnis aus Abschnitt **??** zeigt, dass sich erwartungsgemï¿œï¿œ die gleiche Matrix ergeben hat.

Die BV sind x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{24}, x_{31} und x_{33}.

Algorithmus 6 MODI

1. Zulï¿œssige Ausgangslï¿œsung (Basislï¿œsung) bestimmen, s.Kap. **??**
2. Es wird eine neue Matrix z_{ij} erstellt, die an den Stellen der Basisvariablen die Werte der gegebenen Entfernungs- oder Kostenmatrix c_{ij} enthalten. Die anderen Stellen bleiben leer.

   Achtung: Nicht die Werte der Transportmatrix verwenden!
3. Bestimmung der Dualvariablen u_i und v_j mit $c_{ij} = u_i + v_j$. Eine Variable ist frei wï¿œhlbar, bei uns immer $v_1 = 0$.
4. Berechnung der noch unbestimmten Grï¿œï¿œen z_{ij}, so dass $z_{ij} = u_i + v_j$.
5. Berechnung der Differenzmatrix $d_{ij} = c_{ij} - z_{ij}$.
6. Wenn alle $d_{ij} \geqq 0$ sind, ist die letzte Transportmatrix x_{ij} optimal. Sonst weiter mit Schritt 7.
7. Von allen $d_{ij} < 0$ wird der betragsgrï¿œï¿œte Wert gewï¿œhlt. Diese Stelle bestimmt die neue Basisvariable x_{ij}.
8. Dieser Schritt entspricht Schritt 8 der Stepping-Stone-Methode, wodurch die neue, verbesserte Transportmatrix bestimmt wird.

Die Schritte 2-8 entsprechen einer Iteration. Sie mï¿œssen so lange wiederholt werden, bis in Schritt 6 die Abbruchbedingung erfï¿œllt ist.

ï¿œbung: Optimieren Sie die Anfangslï¿œsung von Kap. **??** (Rangfolgeverfahren).

3.3 Das lineare Zuordnungsproblem

Das lineare Zuordnungsproblem ist ein Spezialfall der Transportprobleme. Anstatt z.B. 20 Gï¿œter von 3 Anbietern auf 5 Nachfrager zu verteilen, werden die 20 Gï¿œter von je einem (also insgesamt 20) Anbietern auf 20 Nachfrager verteilt. Die Frage ist jetzt nur noch, wer wen beliefert. Die Aufgabe ist in dieser Form meist unrealistisch. Mathematisch identisch ist aber das Problem, von n Arbeitern n verschiedene Aufgaben zu unterschiedlichen Kosten ausfï¿œhren zu lassen. Die Kosten hï¿œngen von der Kombination Arbeiter/Tï¿œtigkeit ab. Wird eine bestimmte Tï¿œtigkeit X von Arbeiter A ausgefï¿œhrt, kï¿œnnen die Kosten hï¿œher sein, als wenn die gleiche Tï¿œtigkeit von Arbeiter B erledigt wird. Andererseits kï¿œnnte die Situation auf Tï¿œtigkeit Y bezogen genau umgekehrt sein, was offensichtlich auf ein Optimierungsproblem fï¿œhrt.

Die allgemeine Formulierung des linearen Zuordnungsproblems lautet:

$$\begin{aligned} G = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \quad &\rightarrow \quad min \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \quad &= \quad 1\,;\,\forall i \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \quad &= \quad 1\,;\,\forall j \\ x_{ij} \quad &\epsilon \quad \{0;\,1\} \end{aligned}$$

Dies lï¿œsst sich mit den oben behandelten Methoden lï¿œsen.

Speziell angepasst ist die *Ungarische Methode* (s.[**?**] und [**?**]), die hier nicht besprochen werden soll.

Beispiel: Das folgende Zuordnungsproblem soll gelï¿œst werden. Die Ausgangslï¿œsung wird mit dem Rangfolgeverfahren bestimmt und mit der MODI-Methode optimiert. Drei Baustellenkrï¿œne wechseln ihren Einsatzort. Die Entfernungen zwischen den momentanen Standorten S_i und den Zielorten Z_j entsprechen folgender Tabelle:

Entfernungsmatrix	Zielort: Z_1	Z_2	Z_3
Standort: S_1	10	5	3
S_2	5	6	3
S_3	1	7	3

Welche Verteilung minimiert den gesamten Transportweg?

Rangfolgeverfahren und MODI-Methode:

Die Einsen (der tatsï¿œchlich stattfindende Transport entsprechend der Ausgangslï¿œsung) ergeben sich nach dem Rangfolgeverfahren.

Allerdings haben wir dann noch nicht genug Basisvariablen. Es mï¿œssen noch zwei weitere BV gewï¿œhlt werden. Diese werden durch Nullen in der Tabelle gekennzeichnet. Sie tragen also nicht zum Transport bei. Trotzdem kann sich eine ungeschickte Wahl auf die weiteren Berechnungen entscheidend auswirken. Es kï¿œnnen sich insbesondere zwei Probleme ergeben. Dies wird an diesem Beispiel gezeigt. Eine Systematik einer besseren Wahl wird im folgenden Abschnitt (**??**) betrachtet.

Erstes Problem:

T.m.	Z_1	Z_2	Z_3
S_1		0	1
S_2		1	0
S_3	1		

z	0		
		5	3
		6	3
1	1		

Hier enden die Mï¿œglichkeiten, da die Basisvariablen so ungeschickt gewï¿œhlt wurden, dass eine BV sowohl in ihrer Zeile als auch in ihrer Spalte alleine steht. Die Bestimmung der Dualvariablen bricht in einem solchen Fall vorzeitig ab. Dies muss vermieden werden.

Zweites Problem:

Die folgende Wahl vermeidet das erste Problem, ist jedoch immer noch nicht optimal, da hier bei ungeschickter Fortfï¿œhrung der Iteration eine Endlosschleife entstehen kï¿œnnte:

T.m.	Z_1	Z_2	Z_3
S_1	0	*	1
S_2		1	
S_3	1	0	

z	0	6	-7
10	10	16	3
0	0	6	-7
1	1	7	-6

d			
	0	-11	0
	5	0	10
	0	0	9

Mit * ist die Stelle in der Transportmatrix gekennzeichnet, die zur neuen Basisvariablen gehï¿œrt. Diese Stelle konnte erst nach der Berechnung der Differenzmatrix d bestimmt werden.

T.m.	Z_1	Z_2	Z_3
S_1		0	1
S_2		1	
S_3	1	0	*

z	0	6	4
-1	-1	5	3
0	0	6	4
1	1	7	5

d			
	11	0	0
	5	0	-1
	0	0	-2

In diesem Schritt gab es keine Verï¿œnderung der Zuordnung. Nur die Basisvariablen wurden getauscht.

T.m.	Z_1	Z_2	Z_3
S_1		*	1
S_2		1	
S_3	1	0	0

z	0	6	2
1	-1	6	3
0	0	6	2
1	1	7	3

d			
	9	-1	0
	5	0	1
	0	0	0

Auch hier wurden nur Basisvariablen getauscht. Eine mï¿œgliche neue Transportmatrix ist:

T.m.	Z_1	Z_2	Z_3
S_1		0	1
S_2		1	*
S_3	1	$\underline{0}$	-

(wie oben; Endlosschleife mï¿œglich)

Damit liegt wieder die Situation von zwei Zeilen weiter oben vor und es kï¿œnnte eine *Endlosschleife* entstehen. Die Wahl der Basisvariablen ist jedoch teilweise willkï¿œrlich. Anstatt der unterstrichenen Null kï¿œnnte die mit „-“ gekennzeichnete Stelle zur neuen BV werden:

T.m.	Z_1	Z_2	Z_3
S_1		0	1
S_2		1	*
S_3	1		0

z	0	4	2
1	1	5	3
2	2	6	4
1	1	5	3

d			
	9	0	0
	3	0	-1
	0	2	0

T.m.	Z_1	Z_2	Z_3
S_1		1	
S_2		0	1
S_3	1		0

z	0	5	2
0	0	5	2
1	1	6	3
1	1	6	3

d			
	10	0	1
	4	0	0
	0	1	0

Diese Wahl hat zu einer Verï¿œnderung der Zuordnung gefï¿œhrt. Alle Werte in der

Differenzmatrix sind nicht negativ. Die letzte Transportmatrix stellt die optimale Zuordnung dar.

Mehrdeutigkeiten ergeben sich durch die nicht eindeutige Wahl der Basisvariablen. Bei jedem linearen Zuordnungsproblem ergibt sich diese Mehrdeutigkeit schon bei der Anfangslï¿œsung. Hier mï¿œssen BV gewï¿œhlt werden, die nicht zum Transport beitragen, also mit Null belegt werden. Man spricht von *Entartung*.

3.4 Entartung

Entartung (oder *Degeneration*) tritt auf, wenn bei der Bestimmung der Anfangslï¿œsung oder bei einem Optimierungsschritt die Wahl der BV nicht eindeutig ist.

Bei einem Optimierungsschritt ist dies der Fall, wenn zwei (oder mehr) Basisvariablen zugleich Null werden. Damit ist nicht klar, welche zur NBV wird. In einem solchen nicht-eindeutigen Fall kann bei ungï¿œnstiger Wahl sogar eine Endlosschleife auftreten (s. o.).

Zunï¿œchst ist offensichtlich, dass in einem solchen Fall (mindestens) eine Variable, die Null wurde, in der Basis verbleibt. Die Wahl muss immer so erfolgen, dass folgende Bedingungen erfï¿œllt sind:
1. keine der BV darf sowohl in der Zeile als auch in der Spalte alleine stehen (siehe erstes Problem im Beispiel von Abschnitt **??**)
2. die BV mï¿œssen so verteilt sein, dass kein geschlossener rechtwinkliger Polygonzug ï¿œber sie gelegt werden kann.
Damit ist die Situation oft noch nicht eindeutig. Meist hilft jedoch folgende
Regel: Stehen zwei Variablen zur Wahl, von denen eine in der Basis verbleiben muss, so wird die Variable verwendet, an deren Stelle in der Kosten- oder Entfernungsmatrix der kleinere Wert steht. Dieses Verfahren erinnert an die Belegung der Ausgangsmatrix nach dem Rangfolge-Verfahren. In der neuen Transportmatrix wird diese Stelle mit Null belegt. Es findet also auf der zugehï¿œrigen Strecke kein Transport statt. Die Variable wird jedoch als BV mitgefï¿œhrt, so dass im nï¿œchsten Schritt die Zwischenmatrix eindeutig bestimmt werden kann.

Besonders bei linearen Zuordnungsproblemen tritt der Fall der Entartung generell auf, da die Transportmatrix hier nur die Werte Null und Eins annehmen kann.

Beispiel: Diese Regeln werden nun auf das Problem von **??** angewendet.

Entfernungsmatrix:

	Z_1	Z_2	Z_3
S_1	10	5	3
S_2	5	6	3
S_3	1	7	3

Zunï¿œchst werde drei Einsen entsprechend ihrer Rangfolge eingetragen. Anschlieï¿œend werden die zwei noch nï¿œtigen Nullen auch nach Rangfolge eingetragen, allerdings unter Berï¿œcksichtigung der biden oben genannten Bedingungen. Diese ï¿œndern in unserem Beispiel hier allerdings nichts.

T.m.	Z_1	Z_2	Z_3
S_1		*	1
S_2		1	0
S_3	1		0

z	0	5	2
1	1	6	3
1	1	6	3
1	1	6	3

d			
	9	-1	0
	4	0	0
	0	1	0

Mit * ist die Stelle in der Transportmatrix gekennzeichnet, die zur neuen BV gehï¿œrt. Diese Stelle konnte erst nach der Berechnung der Differenzmatrix d bestimmt werden.

T.m.	Z_1	Z_2	Z_3
S_1		1	$\underline{0}$
S_2		-	1
S_3	1		0

z	0	4	2
1	1	5	3
1	1	5	3
1	1	5	3

d			
	9	0	0
	4	1	0
	0	2	0

Hier wurde die mit - gekennzeichnete Stelle aus der Basis entfernt und die unterstrichene 0 als BV beibehalten. Dies ergibt sich aus einem Vergleich mit den entsprechenden Werten der Entfernungsmatrix (3 und 6). Alle Werte in der Differenzmatrix sind nun nicht negativ. Die letzte Transportmatrix stellt die optimale Zuordnung dar.

Dieses Ergebnis entspricht erwartungsgemï¿œï¿œ dem Ergebnis aus **??**, wurde aber in viel weniger Schritten erhalten. Im Fall dieses Beispiels waren unter Berï¿œcksichtigung der Regeln dieses Kapitels alle Schritte eindeutig.

3.5 Transport Zusammenfassung

Minimierungsproblem mit ausschlieï¿œlich Gleichungen als Bedingungen.
Das Gleichungssystem ist unterbestimmt.

1. Ausgangslï¿œsung bestimmen

   (a) Nordwest-Ecken-Regel

   (b) Rangfolgeverfahren

   (c) (Vogelsches Approximationsverfahren)

   Es mï¿œssen fï¿œr die Transportmatrix Werte bestimmt werden, die sowohl die Zeilen- als auch die Spaltensumme erfï¿œllen. Damit sind die vorlï¿œufigen BV festgelegt.

2. Optimierung der Lï¿œsung

(a) Stepping-Stone-Methode

Umverteilung entlang eines rechtwinkligen Polygonzuges, so dass *eine* Nichtbasisvariable zunï¿œchst den Wert 1 erhï¿œlt und die entsprechenden BV entlang des Polygonzuges abwechselnd um 1 verringert und erhï¿œht werden. Dies fï¿œr alle NBV. Wenn sich Verbesserungen ergeben, d.h. der Zielfunktionswert verringert wird, wird die maximale Verbesserung angewendet, was einen Basiswechsel bedeutet.
Mit den neuen NBV von vorne, bis sich keine Verbesserung mehr ergibt.

(b) MODI-Methode

Die NBV, die die maximale Verbesserung bringt, wird anders bestimmt als bei (a):

i. Zwischenmatrix z_{ij} bestimmen

   A. An den Stellen der BV stehen die gegebenen Werte der Entfernungsmatrix c_{ij}.

   B. Es werden die Dualvariablen u_i und v_j so bestimmt, dass an diesen Stellen immer $u_i + v_j = z_{ij}$ gilt. Dabei gibt es immer eine Bedingung zu wenig, so dass eine der Dualvariablen frei gewï¿œhlt werden kann, bei uns immer $v_1 = 0$.

   C. Die nicht besetzten Stellen der Zwischenmatrix z_{ij} (also die Stellen der NBV) werden gefï¿œllt, so dass auch dort gilt: $u_i + v_j = z_{ij}$.

ii. Differenzmatrix d_{ij} bilden: $d_{ij} = c_{ij} - z_{ij}$
An den Stellen der BV mï¿œssen also immer Nullen stehen.
Gibt es keine negativen Werte mehr, ist die letzte Transportmatrix optimal, sonst weiter.

iii. Die Stelle mit dem kleinsten Wert (also dem betragsgrï¿œï¿œten negativen Wert) bestimmt die NBV, die in die Basis kommt. Diese wird entlang eines rechtwinkligen Polygonzuges maximiert, so dass keine BV kleiner als Null wird.

Mit den neuen BV von vorne, bis sich keine Verbesserung mehr ergibt.

Ein Spezialfall davon ist das *lineare Zuordnungsproblem*. Es entspricht formal dem Transportproblem, wobei jede Zeilen- und jede Spaltensumme immer genau 1 ergeben muss. Besonders einfach ist eine Ausgangslï¿œsung, die in der Hauptdiagonalen Einsen enthï¿œlt. Um die Anzahl der BV zu erreichen, kann rechts neben jedes Diagonalelement eine Null geschrieben werden (bis auf das letzte Element).

Vorteilhaft ist jedoch eine Belegung, die die Transportmatrix berï¿œcksichtigt. Bei der Bestimmung der Ausgangslï¿œsung entspricht dies dem Rangfolgeverfahren.

Die Optimierung kann mit einem der oben beschriebenen Verfahren erfolgen.

4 Ganzzahlige und kombinatorische lineare Optimierung

Ganzzahlige lineare Probleme unterscheiden sich nicht grundsï¿œtzlich von allgemeinen linearen Optimierungsproblemen, die mit dem Simplexalgorithmus gelï¿œst werden kï¿œnnen. Da die Lï¿œsung jedoch ganzzahlig sein muss, liefert Simplex meist eine unzulï¿œssige Lï¿œsung. Man kï¿œnnte meinen, dass es ausreicht, „benachbarte" ganzzahlige Lï¿œsungen auf Zulï¿œssigkeit und Optimalitï¿œt zu ï¿œberprï¿œfen. Dies gilt jedoch nur in einem sehr weiten und insbesondere nicht eindeutig festgelegten Sinn von „benachbart". Sinnvollerweise wird statt dessen ein systematisches Verfahren angewendet, das zunï¿œchst auch nicht-ganzzahlige Lï¿œsungen findet, diese aber ganzzahlig optimiert, das „Branch-and-Bound-Verfahren".

Kombinatorische Optimierung ist auch eine Form von ganzzahliger Optimierung, wobei hier typischerweise nicht auf den Simplexalgorithmus zurï¿œck gegriffen wird. Es handelt sich z.B. um Zuordnungsprobleme (s.**??**), Reihenfolgeprobleme (z.B. Traveling-Salesman) oder Auswahlprobleme (z.B. Rucksack-Problem=Knapsack-Problem). Auch sie werden oft mit Hilfe des Branch-and-Bound-Verfahrens gelï¿œst. In speziellen Fï¿œllen liegt die Anpassung der Lï¿œsungsmethode an die Aufgabenstellung evtl. nicht auf der Hand.

4.1 Branch-and-Bound-Verfahren

Die Problemstellung ist zunï¿œchst die eines allgemeinen linearen Optimierungsproblems (s. **??**) und der zusï¿œtzlichen Bedingung

$$x_i \epsilon \mathbb{N}_0$$

Algorithmus 7 Branch & Bound

1. Berechnen der optimalen nicht-ganzzahligen Lï¿œsungen x_i mit Simplex.
2. Falls sich mehrere nicht-ganzzahlige Lï¿œsungsvariablen ergeben, entscheidet man sich fï¿œr eine von ihnen mit Index i und setzt $d = x_i$
   Verzweigen (branching) in zwei Teilprobleme A und B.
   Teilproblem A hat die zusï¿œtzliche Bedingung $x_i \leqq n_i$, wobei n_i die grï¿œï¿œte ganze Zahl mit $n_i < d$ ist.
   Teilproblem B hat die zusï¿œtzliche Bedingung $x_i \geqq n_i + 1$; $n_i + 1$ ist die kleinste ganze Zahl $> d$. $\cdots\cdots n \cdots\cdots d \cdots\cdots n+1 \cdots\cdots >$
   Die Teilprobleme A und B haben also fï¿œr x_i eine obere bzw. untere Schranke (bound).
3. Lï¿œsen der Teilprobleme. Daraus erhï¿œlt man jeweils eine obere Schranke $\overline{G_A}$ bzw. $\overline{G_B}$ fï¿œr den Wert der Zielfunktion.
4. Endgï¿œltige Bewertung (ausloten) des Zweiges. D.h. das gesamte Verfahren wird auf jeden Teilzweig angewendet.

Beispiel: Das Beispiel aus Kapitel **??** wird in einer Bedingung verï¿œndert, so dass der (optimale) Punkt A nicht mehr ganzzahlige Koordinaten hat.

$$\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 & \leqq & 16 \\ 3x_1 + 2x_2 & \leqq & 27 \\ x_2 & \leqq & 7 \\ x_1,\, x_2 & \geqq & 0 \\ x_i & \epsilon & \mathbb{N} \end{array}$$

Die Zielfunktion bleibt gleich $G(x_1, x_2) = 3x_1 + 4x_2$. Die Ganzzahligkeit ergibt sich oft, wenn nicht in beliebigen Mengen, sondern in Stï¿œckzahlen oder Verpackungsmengen gerechnet wird.

simplex/GeoGebra/Bild9a1.ggb.eps

Abbildung 6:

A ist nach wie vor der optimale Punkt im Fall nicht-ganzzahliger Lï¿œsungen: $A(5.5|5.25)$ und $G = 37.5$. Zulï¿œssig sind jedoch nur ganzzahlige Lï¿œsungen, hier also die Kreuzungspunkte des Koordinatengitters.

Es wird verzweigt in $x_1 \leqq 5$ und $x_1 \geqq 6$. Die Verzweigung kï¿œnnte auch mit x_2 vorgenommen werden.

Es ergibt sich eine neue Abbildung mit zwei getrennten zulï¿œssigen Bereichen, die zwei voneinander unabhï¿œngigen Simplexproblemen entsprechen:

simplex/GeoGebra/Bild9a2.ggb.eps

Abbildung 7:

Beides wird mit Simplex gelï¿œst und liefert:

1. $x_1 \leqq 5$: $x_1 = 5$ und $x_2 = 5.5$; $G = 37$; nicht zulï¿œssig, also Kandidat fï¿œr weitere Verzweigung

2. $x_1 \geqq 6$: $x_1 = 6$ und $x_2 = 4.5$; $G = 36$; nicht zulï¿œssig, also Kandidat fï¿œr weitere Verzweigung

   Zunï¿œchst scheint es gleichgï¿œltig zu sein, ob 1. oder 2. zuerst verzweigt wird. 1. hat jedoch das grï¿œï¿œere G und ist damit der aussichtsreichere Kandidat fï¿œr eine optimale Lï¿œsung. Wenn eine zulï¿œssige Lï¿œsung mit $G \geqq 36$ gefunden wird, muss 2. nicht mehr verzweigt werden. 1. wird verzweigt in $x_2 \leqq 5$ und $x_2 \geqq 6$. Die Teilung ergibt:

   simplex/GeoGebra/Bild9b.ggb.eps

   Abbildung 8:

   Beides wird mit Simplex gelï¿œst und liefert:

3. $x_2 \leqq 5$ (und $x_1 \leqq 5$ von oben): $x_1 = 5$ und $x_2 = 5$; $G = 35$; zulï¿œssig

4. $x_2 \geqq 6$ (und $x_1 \leqq 5$ von oben): $x_1 = 4$ und $x_2 = 6$; $G = 36$; zulï¿œssig

   Beide Lï¿œsungen sind zulï¿œssig. 4. hat mit $G = 36$ den hï¿œheren Zielfunktionswert und ist die optimale Lï¿œsung. 2. wird nicht mehr untersucht, da der Zielfunktionswert $G = 36$ von 2. durch eine weitere Einschrï¿œnkung nicht vergrï¿œï¿œert werden kann und 4. bereits eine zulï¿œssige Lï¿œsung mit $G = 36$ ist.

Hï¿œufig wird die Verzweigungshierarchie in einem Baum dargestellt:

OR-Skript-Abb/bb.eps

Abbildung 9:

Jeder Knoten reprï¿œsentiert eine Lï¿œsung. Die Beschriftung bedeutet:
<Name>: <Zielfunktionswert>; zulï¿œssige/unzulï¿œssige Lï¿œsung.
Die Verzweigungsbedingung steht an den Pfeilen.

Probleme in mehr Schritten sind in [?] und [?] dargestellt.

Zusammenfassung: Mit dem Branch-and-Bound-Verfahren kï¿œnnen „herkï¿œmmliche“ Probleme auf ganzzahlige Lï¿œsungen beschrï¿œnkt werden. Das Branch-and-Bound-Verfahren ist jedoch nicht auf solche Probleme beschrï¿œnkt. Daher ist es angemessen, die einzelnen Schritte allgemeiner zu betrachten.

Algorithmus 8 Branch & Bound, allgemeiner

1. Falls eine zulï¿œssige Lï¿œsung vorliegt, ist deren Zielfunktionswert eine (vorlï¿œufige) untere Schranke. Zweige, die nicht besser sein kï¿œnnen, mï¿œssen nicht weiter betrachtet werden.
2. Zunï¿œchst wird ein „relaxiertes“ Problem gelï¿œst, fï¿œr das ein bekanntes Lï¿œsungsverfahren existiert. D.h. es werden noch nicht alle Forderungen gestellt. ï¿œblich ist, die Forderung nach Ganzzahligkeit zurï¿œckzustellen.
   Beim herkï¿œmmlichen Problem ist das Simplexverfahren eine geeignete Methode, das relaxierte Problem zu lï¿œsen.
3. Es wird eine Regel zum Verzweigen gebraucht.
   Beim herkï¿œmmlichen Problem wird der Lï¿œsungsraum bei einer nicht-ganzzahligen Variablen geeignet unterteilt.
4. Jedes Teilproblem wird entsprechend 2. gelï¿œst. Es kï¿œnnen sich folgende Fï¿œlle ergeben:
   (a) Das *relaxierte* Problem hat eine (evtl. unzulï¿œssige) Lï¿œsung, die schlechter ist, als die bisher beste zulï¿œssige Lï¿œsung (bester Wert der Zielfunktion). Der Zweig muss nicht weiter behandelt werden.
   (b) Das relaxierte Problem hat eine zulï¿œssige Lï¿œsung, die besser ist als die bisher beste zulï¿œssige Lï¿œsung. Damit ergibt sich ein neuer Referenzwert fï¿œr die beste zulï¿œssige Lï¿œsung.
   (c) Das relaxierte Problem hat keine Lï¿œsung. Eine weitere Betrachtung des Zweiges ist sinnlos.
   (d) Das relaxierte Problem hat eine unzulï¿œssige Lï¿œsung, die aber besser ist, als die bisher beste zulï¿œssige Lï¿œsung. Das Problem muss weiter verzweigt werden.
5. Sind alle Teilprobleme so lange verzweigt worden, bis am Ende entweder 4a, 4b oder 4c steht, so ist die optimale Lï¿œsung (die mit der besten zulï¿œssigen Lï¿œsung) gefunden. Ist ein Zweig bis zu Ende betrachtet, so gilt er als „*ausgelotet*“.

Optimierungsprobleme, die keinen Simplexschritt erfordern, sind z.B. das Traveling-Salesman-Problem und das Rucksackproblem. Letzteres soll hier genauer untersucht werden.

4.2 Rucksack-Problem

Beim Rucksackproblem (Knapsackproblem) sollen Gegenstï¿œnde in einen Rucksack gepackt werden. Jeder Gegenstand hat ein bestimmtes Gewicht (oder Volumen) und einen bestimmten Nutzen. Es darf ein vorgegebenes Maximalgewicht (oder maximales Gesamtvolumen) nicht ï¿œberschritten werden. Der Nutzen soll maximiert werden. Jeder Gegenstand wird einzeln aufgefï¿œhrt und kann entweder eingepackt werden oder eben nicht. Deshalb kann die Anzahl x_i eines Gegenstands i nur entweder $x_i = 1$ oder $x_i = 0$ sein. Man spricht auch von *binï¿œrer linearer Optimierung*.

Typische Anwendungen sind Investitionsentscheidungen.

Das Vorgehen wird direkt am Beispiel erlï¿œutert.

Beispiel: Im Fluggepï¿œck dï¿œrfen maximal 20kg mitgenommen werden. Der erste Koffer ist gepackt und wiegt 12 kg. Fï¿œr den zweiten stehen 7 Gegenstï¿œnde mit unterschiedlichem Gewicht und unterschiedlichem Nutzen (in willkï¿œrlichen Einheiten) zur Verfï¿œgung:

Gewicht	5	4	3	2	1	1	1
Nutzen	5	6	1	6	8	6	4

Aus diesen Angaben wird zunï¿œchst Nutzen/Gewicht berechnet und die Nummerierung der Gegenstï¿œnde in der Reihenfolge abnehmenden Nutzen/Gewicht-Verhï¿œltnisses zugeordnet.

Nutzen/Gewicht	1	1.5	$\frac{1}{3}$	3	8	6	4
Gegenstand Nr.	6	5	7	4	1	2	3

Gesucht ist nun, welche Gegenstï¿œnde unter Berï¿œcksichtigung des Maximalgewichts den Nutzen maximieren.

Hier lï¿œsst sich das Problem durch eine geeignete Anpassung der Regeln effektiver lï¿œsen als durch die (prinzipiell mï¿œgliche) Rechnung ï¿œber einen Simplex-Ansatz.

Neue Regeln:

Algorithmus 9 Rucksack-Problem

1. Sortierung nach Nutzen/Gewicht-Verhï¿œltnis
2. Gegenstï¿œnde werden in dieser Reihenfolge eingepackt, bis die Bedingung genau erfï¿œllt ist. Meist kann somit vom letzten Gegenstand (mit der Nummer k) nur ein Teil eingepackt werden. Die Lï¿œsung ist also unzulï¿œssig. Dies entspricht der Lï¿œsung eines *relaxierten* Problems.
3. Nun wird das unzulï¿œssige Problem verzweigt. Es sind verschiedene Verzweigungsregeln mï¿œglich. Hier wird folgende Regel verwendet: Verzweigt wird ein unzulï¿œssiges Problem, indem in einem Zweig $x_k = 0$ und im anderen Zweig $x_k = 1$ gesetzt wird. Eine andere Mï¿œglichkeit wird in [?] beschrieben.
4. In beiden Zweigen wird unter der gegebenen Verzweigungsbedingung wieder von vorne wie unter 2. eingepackt. Unzulï¿œssige Lï¿œsungen werden weiter verzweigt, wobei sich die Bedingungen weiter vererben.
5. Ein Zweig ist *ausgelotet*, wenn
   (a) eine zulï¿œssige Lï¿œsung entsteht. Ist der Zielfunktionswert besser (hier also hï¿œher) als der bisher beste Zielfunktionswert einer zulï¿œssigen Lï¿œsung, entsteht eine neue Grenze.
   (b) eine zulï¿œssige oder eine unzulï¿œssige Lï¿œsung entsteht, deren Zielfunktionswert unter der Grenze liegt, also schlechter ist, als die bisher beste zulï¿œssige Lï¿œsung.
   (c) keine Lï¿œsung existiert, die die Bedingungen erfï¿œllt.
6. Das Verfahren endet, wenn alle Zweige ausgelotet sind.

Bemerkung: Das Verhï¿œltnis und die Sortierung mï¿œssen je nach Aufgabenstellung evtl. angepasst werden.

Auf das Beispiel angewendet ergibt sich die Ausgangslï¿œsung Z0:

Z0	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Gewicht	1	1	1	2	4	5	3	8
Nutzen	8	6	4	6	6	5	1	28.5
Anzahl x_i	1	1	1	1	$\frac{3}{4}$	0	0	

$\rightarrow$ Z00; Z01

Die Lï¿œsung ist unzulï¿œssig, da $x_5 = \frac{3}{4}$ weder 0 noch 1 ist. Der (theoretische) Nutzen betrï¿œgt 28.5. Es wird verzweigt in Z00 mit $x_5 = 0$ und Z01 mit $x_5 = 1$. Die Darstellung ist hier zunï¿œchst noch sehr ausfï¿œhrlich. Die in Klausuren verwendete Darstellung ist kompakter und wird anschlieï¿œend gezeigt. Beide Verfahren sind vï¿œllig ï¿œquivalent.

$Z00\left(1|1|1|1|0^*|\frac{3}{5}|0\right)$ mit N=27$\rightarrow$ Z000; Z001

$Z01\left(1|1|1|\frac{1}{2}|1^*|0|0\right)$ mit N=27$\rightarrow$ Z010; Z011

Der vorgegebene Wert ist mit * gekennzeichnet. Die weiteren sind von vorne aufgefï¿œllt, bis sich wieder ein Gewicht von 8 ergibt. Die Lï¿œsungen sind beide unzulï¿œssig und mï¿œssen weiter verzweigt werden in Z000 und Z001 sowie in Z010 und Z011.

$Z000\,(1|1|1|1|0^*|0^*|1)$ mit N=25, dies ist die bisher einzige zulï¿œssige Lï¿œsung.

Z000	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Gewicht	1	1	1	2	4	5	3	8
Nutzen	8	6	4	6	6	5	1	25
Anzahl x_i	1	1	1	1	0	0	1	

$Z001\,(1|1|1|0|0^*|1^*|0)$ mit N=23. Dies Lï¿œsung ist auch zulï¿œssig aber schlechter als Z000.

Da der Nutzen der unzulï¿œssigen Lï¿œsung Z01 mit N=27 hï¿œher liegt als der Nutzen der zulï¿œssigen Lï¿œsung Z000 mit N=25, wird Z01 weiter verzweigt.

$Z010\left(1|1|1|0^*|1^*|\frac{1}{5}|0\right)$ mit N=25. Diese Lï¿œsung ist unzulï¿œssig und kï¿œnnte damit weiter verzweigt werden. Allerdings ist der Nutzen mit N=25 nicht hï¿œher als der von Z000. Eine Verbesserung ist also nicht mehr mï¿œglich. Wenn nicht alle optimalen Lï¿œsungen gesucht sind, sondern nur eine, muss hier nicht weiter verzweigt werden.

$Z011\,(1|1|0|1^*|1^*|0|0)$ mit N=26. Diese Lï¿œsung ist zulï¿œssig und besser als Z000. Auï¿œerdem ist sie besser als Z010, sodass letztere also ab hier nicht mehr verzweigt werden muss, selbst wenn alle optimale Lï¿œsungen gesucht sind.

Z011	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Gewicht	1	1	1	2	4	5	3	8
Nutzen	8	6	4	6	6	5	1	26
Anzahl x_i	1	1	0	1	1	0	0	

Z011 ist die optimale Lï¿œsung.

Andere Darstellung:

Genau die gleichen Schritte kï¿œnnen auch in folgender Tabelle (ohne Erklï¿œrung der einzelnen Schritte) zusammengefasst werden. Ausgangspunkt ist die Tabelle der Aufgabe, sowie

Nutzen/Gewicht	1	1.5	$\frac{1}{3}$	3	8	6	4
Gegenstand Nr.	6	5	7	4	1	2	3

(s.o.)

sortiert:

	Gewicht	**1**	**1**	**1**	**2**	**4**	**5**	**3**		
	Nutzen	**8**	**6**	**4**	**6**	**6**	**5**	**1**		
Nr.		**eingepackte Menge**							**Nutzen**	**z/uz**
1	**Z0**	**1**	**1**	**1**	**1**	$\frac{3}{4}$	**0**	**0**	**28.5**	**uz**
2	**Z00**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0***	$\frac{3}{5}$	**0**	**27**	**uz**
3	**Z01**	**1**	**1**	**1**	$\frac{1}{2}$	**1***	**0**	**0**	**27**	**uz**
4	**Z000**	**1**	**1**	**1**	**1**	**0***	**0***	**1**	**25**	**z**
5	**Z001**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0***	**1***	**0**	**23**	**z**
6	**Z010**	**1**	**1**	**1**	**0***	**1***	$\frac{1}{5}$	**0**	**25**	**uz**
7	**Z011**	**1**	**1**	**0**	**1***	**1***	**0**	**0**	**26**	**z**

Dies entspricht logish genau der vorhergehenden Lï¿œsung, allerdings ohne Erklï¿œrung, dafï¿œr kompakt dargestellt.

Es ergibt sich der Verzweigungsbaum in Abbildung 10. Die Beschriftung folgt dem Schema von Abb. 9.

OR-Skript-Abb/Rucksack_B.eps

Abbildung 10:

Formulierungsvariante: Das Beispiel oben wurde im Rahmen der Namensgebung „Rucksackproblem“ formuliert. Ein Beispiel zu einer Investitionsentscheidung kï¿œnnte lauten: In einer Siebdruckerei stehen maximal 8000ï¿œ zur Investition in neue Druckmaschinen zur Verfï¿œgung. Im Angebot sind drei Maschinen zu je 1000ï¿œ

sowie je eine Maschine zu 2000ï¿œ, 4000ï¿œ, 5000ï¿œ und 3000ï¿œ. Pro Stunde kï¿œnnen bei gleicher Qualitï¿œt 8000, 6000, 4000, 6000, 6000, 5000 und 1000 Drucke hergestellt werden. Welche Maschinen sollten angeschafft werden?
Wenn die GE in 1000ï¿œ und die Anzahl der Drucke in 1000 Stï¿œck pro Stunde gemessen werden, ergibt sich rechnerisch genau die Aufgabe des oben durchgerechneten Beispiels.

4.3 Branch&Bound Zusammenfassung

“Herkï¿œmmliches” Optimierungsproblem mit der zusï¿œtzlichen Bedingung fï¿œr Ganzzahligkeit

1. Mathematisches Modell aufstellen

2. Lï¿œsen des relaxierten Problems, bei dem die Ganzzahligkeit noch nicht berï¿œcksichtigt wird (Simplex). Damit ergibt sich eine Lï¿œsung, bei der $x_i = a$ nicht ganzzahlig ist.

3. Aufspalten des Problems in zwei Teilprobleme mit jeweils einer zusï¿œtzlichen Bedingung:

   (a) $x_i \leqq n$, wobei n die grï¿œï¿œte ganze Zahl kleiner a ist.

   (b) $x_i \geqq n + 1$

4. Lï¿œsen der relaxierten Teilprobleme und weiteres Aufteilen, bis die beste rein ganzzahlige Lï¿œsung ï¿œbrig bleibt.

Rucksackproblem

1. Sortierung nach Nutzen/Gewicht-Verhï¿œltnis

2. Gegenstï¿œnde einpacken, bis die Bedingung genau erfï¿œllt ist (relaxiertes Problem).

3. Verzweigen; mit je einer geeigneten weiteren Bedingung fï¿œr jeden Zweig

4. In beiden Zweigen wird unter der gegebenen Verzweigungsbedingung wieder wie unter 2. eingepackt. Unzulï¿œssige Lï¿œsungen werden weiter verzweigt, wobei sich die Bedingungen weiter vererben.

5. ausloten der Zweige

Das Verfahren endet, wenn alle Zweige ausgelotet sind.

5 Graphentheorie

Ein Graph besteht aus Knoten V_i (Vertex) und sie verbindenden Kanten E_j (Edge). Sind die Kanten gerichtet, spricht man von Pfeilen. Die Kanten sind meist gewichtet (oder bewertet).

OR-Skript-Abb/Abb_A.eps	OR-Skript-Abb/gerichtetGraph.eps
Abb. A: ungerichteter Graph	Abb. B: gerichteter Graph

Ein Knoten kann z.B. eine Stadt darstellen und die gewichteten Kanten sind die Verbindungswege oder -kosten z.B. eines Versorgungsnetzes (Strom, Wasser, Gas,...). Eine typische Fragestellungen ist die nach dem kï¿œrzesten oder dem billigsten Weg von einer Stadt zu einer anderen.

Einige Grundbegriffe

- Bei einem *gerichteten* Graphen bestehen die Kanten aus Pfeilen (Abb. B). Sind die Kanten nicht mit einer Richtung versehen, spricht man von *ungerichteten* Graphen (Abb. A).
- *Parallele* Pfeile oder Kanten sind solche mit gleichen Anfangs- und Endknoten. Die Beispielgraphen haben keine parallelen Kanten oder Pfeile.
- Eine Kante oder ein Pfeil, die/der einen Knoten mit diesem direkt verbindet, heiï¿œt *Schlinge*. Die Beispielgraphen haben keine Schlingen.
- Ein Graph ohne parallele Pfeile oder Kanten und ohne Schlingen heiï¿œt *schlichter* Graph. Beide Graphen der Abbildungen sind schlichte Graphen.
- Ein schlichter, gerichteter Graph heiï¿œt *Digraph*, s. Abb. B.
- Ein *bewerteter* Graph hat Gewichtungen an Pfeilen oder Kanten. Die obigen Abbildungen stellen beide bewertete Graphen dar.

- Besteht zwischen zwei Knoten eines Graphen eine Verbindung ï¿œber andere Knoten, so heiï¿œt diese eine *Kette*. Z.B. gibt es eine Kette von Knoten 1 zu Knoten 4 in beiden Abbildungen A und B.

- Der Weg von einem Ausgangsknoten ï¿œber weitere Knoten zurï¿œck zum Ausgangsknoten heiï¿œt *Kreis* oder *Zyklus*.

- In einem *zusammenhï¿œngenden* Graphen sind alle Knoten direkt oder ï¿œber eine Kette verbunden. Beide Graphen der Abbildungen sind zusammenhï¿œngende Graphen.
  Der gerichtete Graph (Abb. B) ist jedoch nur *schwach zusammenhï¿œngend*, da erst ein zusammenhï¿œngender Graph entsteht, wenn die gerichteten Kanten durch ungerichtete ersetzt werden.
  Bei einem *stark zusammenhï¿œngenden* gerichteten Graphen mï¿œsste dagegen ein gerichteter Weg von jedem Knoten zu jedem anderen bestehen.

- Ein zusammenhï¿œngender Graph ohne Kreis heiï¿œt *Baum*.

- Ein zusammenhï¿œngender und kreisloser Teil eines Graphen, der alle Knoten dieses Graphen enthï¿œlt, heiï¿œt *spannender Baum*.

- Ein *minimal spannender Baum* ist ein spannender Baum mit minimaler Summe der Kantengewichtungen.

5.1 Kï¿œrzeste Wege in Graphen

Hier gibt es zwei Fragestellungen:

1. Welche kï¿œrzesten Ketten verbinden einen bestimmten Ausgangsknoten mit allen anderen Knoten des Graphen?

2. Welche kï¿œrzesten Ketten verbinden jeden Knoten mit allen anderen Knoten des Graphen?

5.1.1 Dijkstra Algorithmus

Mit Hilfe des Dijkstra Algorithmus wird die erste der Ausgangsfragen beantwortet: Welches sind die kï¿œrzesten Wege von einem gegebenen Ausgangsknoten zu allen anderen Knoten des Graphen? Hier folgt zunï¿œchst ganz formal der Algorithmus. Es ist aber sinnvoll, diesen gleich anhand des Beispiels zu betrachten.

Algorithmus 10 Dijkstra

Voraussetzungen

- gegebener Startknoten $start$
- Vektor $D(i)$, in dem zu jedem Zeitpunkt der kï¿œrzeste Abstand von $start$ zum Knoten i gespeichert ist.
- Vektor $V(i)$, der zu jedem Zeitpunkt den Vorgï¿œnger des Knotens i enthï¿œlt auf dem bis dahin bekannten kï¿œrzesten Weg von $start$ zu i .
- M ist die Menge von Knoten aus der der nï¿œchste zu behandelnde Knoten gewï¿œhlt wird.
- $N(a)$ ist die Menge aller direkt nachfolgenden Knoten von Knoten a.
- k_{ij} ist die Gewichtung des Pfeiles von Knoten i zu Knoten j. Wenn keine Verbindung besteht, ist der entsprechende Wert ∞.

Initialisierungen

- $M = \{start\}$, zu Beginn besteht die Menge der ausgewï¿œhlten Knoten nur aus dem Startknoten
- $D(start) = 0$ und $D(i) = \infty$ fï¿œr alle anderen Knoten
- $V(i)$ ist leer fï¿œr alle Knoten

Iteration

1. Aus der Menge M wird ein Knoten a ausgewï¿œhlt. Wenn (wie meist) mehrere Knoten in der Menge stehen, wird der Knoten mit minimalem Abstand zu $start$ gewï¿œhlt. Fï¿œr a gilt also, dass $D(a) = min\,[D(i)\,mit\,i\epsilon M]$.

2. Die Nachbarknoten von a (in Vorwï¿œrtsrichtung) stehen in $N(a)$. Die folgende Untersuchung wird auf alle diese Knoten angewendet.
   Falls $D(a) + k_{aj} < D(j)$ gibt es einen kï¿œrzeren Weg zu Knoten j. Dann wird gesetzt:

   - $D(j) = D(a) + k_{aj}$
   - $V(j) = a$
   - j wird in die Menge M aufgenommen, falls j nicht schon enthalten ist

3. a wird aus der Menge M der markierten Knoten entfernt.

Falls die Menge M leer ist, also $M = \{\}$, ist das Verfahren zu Ende. Sonst geht es weiter ab Schritt 1.

In $V(i)$ steht nun der Vorgï¿œngerknoten von Knoten i auf dem kï¿œrzesten Weg vom Anfangsknoten. Um den kï¿œrzesten Weg zum Zielknoten z zu bestimmen, wird der Weg ausgehend von z rï¿œckwï¿œrts verfolgt.

Eine ausfï¿œhrliche Schritt fï¿œr Schritt Berechnung zum Graphen B ist in den Ergï¿œnzungen Kap.**??**. Entsprechend dieser Berechnung kann gegebenenfalls ein Programm geschrieben werden.

Im Folgenden wird eine mehr intuitive Vorgehensweise besprochen, wie sie auch in der Klausur vorkommen kann.

Beispiel: Es sollen die kï¿œrzesten Wege des gerichteten Graphen B' von Knoten 1 zu allen anderen Knoten bestimmt werden.

Abb. gerichteter Graph B' `OR-Skript-Abb/GraphB2.eps`

Es handelt sich um den Graphen B von oben mit vertauschter Bezeichnung der Knoten 2 und 3. Dies ermï¿œglicht eine deutlichere Abgrenzung der beiden hier betrachteten Algorithmen Dijkstra und FIFO (nï¿œchster Abschnitt). Letzterer behandelt die gleiche Fragestellung, unterscheidet sich im Lï¿œsungsweg aber geringfï¿œgig.

Die Abfolge der einzelnen Lï¿œsungsschritte ist in folgender Tabelle zusammengefasst und wird anschlieï¿œend erklï¿œrt:

a	i=	1	2	3	4	5	Menge M
	D(i)=	0	∞	∞	∞	∞	
-	V(i)=	-	-	-	-	-	1
	D(i)=	0	2	1	∞	∞	
1	V(i)=	-	1	1	-	-	2, 3
	D(i)=	0	2	1	7	10	
3	V(i)=	-	1	1	3	3	2, 4, 5
	D(i)=	0	2	1	5	7	
2	V(i)=	-	1	1	2	2	4, 5
	D(i)=	0	2	1	5	6	
4	V(i)=	-	1	1	2	4	5
	D(i)=	0	2	1	5	6	
5	V(i)=	-	1	1	2	4	

Zunï¿œchst ist der Anfangsknoten a=1 in der Menge M vorgegeben. Dementsprechend ist die Entfernung D=0 und es gibt keinen Vorgï¿œnger V. Im ersten Schritt wird untersucht, ob es irgendwelche Verbindungen gibt. Dies ist der Fall: nach Knoten 2 und 3. Die Entfernungen werden eingetragen. Vorgï¿œnger ist jeweils Knoten 1. Die Menge M wird um die Knoten 2 und 3 erweitert und der betrachtete Knoten 1 wird aus M gelï¿œscht.

Im zweiten Schritt wird der Knoten 3 als Anfangsknoten gewï¿œhlt, da er den geringeren Abstand D zu Knoten 1 hat. ï¿œber Knoten 3 kommt man sowohl nach 4 als auch nach 5. Nun wird die **Gesamtentfernung** von Knoten 1 eingetragen sowie Konten 3 als Vorgï¿œnger. Die Menge M erhï¿œlt zusï¿œtzlich 4 und 5. 3 wird entfernt.

Im dritten Schritt wird eine entsprechende Untersuchung ï¿œber Knoten 2 durchgefï¿œhrt, da Knoten 2 den geringsten Abstand D zu Knoten 1 hat.

Im vierten Schritt wird eine entsprechende Untersuchung ï¿œber Knoten 4 durchgefï¿œhrt, da Knoten 4 den geringsten Abstand D zu Knoten 1 hat.

Im fï¿œnften Schritt wird eine entsprechende Untersuchung ï¿œber Knoten 5 durchgefï¿œhrt. Hier ergibt sich keine ï¿œnderung in Abstand und Vorgï¿œnger mehr. Die Menge M wird geleert und das Verfahren ist beendet.

ï¿œbung 1: Fï¿œhren Sie die Rechnung mit Graph B durch.

Ergebnis:

(Graph B) a	i=	1	2	3	4	5	Menge M
	D(i)=	0	∞	∞	∞	∞	
-	V(i)=	-	-	-	-	-	1
	D(i)=	0	1	2	∞	∞	
1	V(i)=	-	1	1	-	-	2, 3
	D(i)=	0	1	2	7	10	
2	V(i)=	-	1	1	2	2	3, 4, 5
	D(i)=	0	1	2	5	7	
3	V(i)=	-	1	1	3	3	4, 5
	D(i)=	0	1	2	5	6	
4	V(i)=	-	1	1	2	4	5
	D(i)=	0	1	2	5	6	
5	V(i)=	-	1	1	2	4	

ï¿œbung 2: Fï¿œhren Sie das gleiche Verfahren mit dem ungerichteten Graphen A durch. Beachten Sie hierbei, dass die Kanten in beide Richtungen durchlaufen werden kï¿œnnen. Die ausfï¿œhrliche Rechnung mit Ergebnis ist in den Ergï¿œnzungen Kap.**??**.

5.1.2 FIFO-Algorithmus

Der FIFO-Algorithmus lï¿œst das gleiche Problem, wie der Dijkstra Algorithmus und unterscheidet sich von diesem nur in der Auswahl des Knotens a. Er wird einer Warteschlange entnommen, die nach dem FIFO-(*F*irst *I*n *F*irst *O*ut) Prinzip organisiert ist. Die anderen Schritte sind wie bei Dijkstra.

Algorithmus 11 FIFO

Voraussetzungen

- gegebener Startknoten $start$
- Vektor $D(i)$, in dem zu jedem Zeitpunkt der kï¿œrzeste Abstand von $start$ zum Knoten i gespeichert ist.
- Vektor $V(i)$, der zu jedem Zeitpunkt den Vorgï¿œnger des Knotens i enthï¿œlt auf dem bis dahin bekannten kï¿œrzesten Weg von $start$ zu i .
- S ist die Schlange von Knoten aus der der nï¿œchste Knoten gewï¿œhlt wird.
- KS ist der Kopf der Schlange. Er ersetzt den Knoten a bei Dijkstra.
- ES ist das Ende der Schlange.
- $N(KS)$ ist die Menge aller nachfolgenden Knoten von KS.
- k_{ij} ist die Gewichtung des Pfeiles von Knoten i zu Knoten j. Wenn keine Verbindung besteht, ist der entsprechende Wert ∞.

Initialisierungen

- $KS = ES = start$, zu Beginn besteht die Schlange nur aus dem Startknoten
- $D(start) = 0$ und $D(i) = \infty$ fï¿œr alle anderen Knoten
- $V(i)$ ist leer fï¿œr alle Knoten

Iteration

1. KS ist der Kopf der Schlange
2. Alle Nachbarknoten von KS (in Vorwï¿œrtsrichtung) stehen in $N(KS)$. Der Index j lï¿œuft ï¿œber alle $N(KS)$.
   Falls $D(KS) + k_{KS,j} < D(j)$ gibt es einen kï¿œrzeren Weg zu Knoten j. Dann wird gesetzt:
   - $D(j) = D(KS) + k_{KS,j}$
   - $V(j) = KS$
   - j wird an die Warteschlange hinten angestellt, sofern es noch nicht in der Schlange enthalten ist.
3. Falls $KS = ES$, ist das Verfahren zu Ende.
4. Der alte Schlangenkopf KS wird entfernt. Damit rï¿œckt das nï¿œchste Element nach.
   Weiter mit Schritt 1.

Wie oben, wird auch hier eine kompakte Vorgehensweise betrachtet. Die ausfï¿œhrliche Rechnung zum Graphen B ist in den Ergï¿œnzungen Kap.??.

Beispiel: Es sollen die kï¿œrzesten Wege des gerichteten Graphen Abb. B' von Knoten 1 zu allen anderen Knoten bestimmt werden.

OR-Skript-Abb/GraphB2.eps

Die Knoten werden wieder entsprechend ihrer Nummerierung abgearbeitet:

KS	i=	1	2	3	4	5	Schlange
	D(i)=	0	∞	∞	∞	∞	
-	V(i)=	-	-	-	-	-	<1|
	D(i)=	0	2	1	∞	∞	
1	V(i)=	-	1	1	-	-	<2, 3|
	D(i)=	0	2	1	5	7	
2	V(i)=	-	1	1	2	2	<3, 4, 5|
***	D(i)=	0	2	1	5	7	
3	V(i)=	-	1	1	2	2	<4, 5|
	D(i)=	0	2	1	5	6	
4	V(i)=	-	1	1	2	4	<5|
	D(i)=	0	2	1	5	6	
5	V(i)=	-	1	1	2	4	

Beachten Sie den Unterschied: hier wird im markierten Schritt (mit Anfangsknoten 3) keine Verbesserung mehr vorgenommen. Bei Dijkstra war dies anders: dort war Knoten 3 bereits im vorhergehenden Schritt Anfangsknoten, statt Knoten 2, da dort nicht die Schlange abgearbeitet wird, sondern immer der Knoten mit kleinstem Abstand gewï¿œhlt wird.

Die Markierung *** hat nichts mit dem Lï¿œsungsgang zu tun. Sie wurde hier nur eingefï¿œgt, um den Verweis eindeutig zu machen.

ï¿œbung: Es sollen wie oben die kï¿œrzesten Wege des gerichteten Graphen Abb. B von Knoten 1 zu allen anderen Knoten bestimmt werden.

Ergebnis:

KS	i=	1	2	3	4	5	Schlange
	D(i)=	0	∞	∞	∞	∞	
-	V(i)=	-	-	-	-	-	<1|
	D(i)=	0	1	2	∞	∞	
1	V(i)=	-	1	1	-	-	<2, 3|
	D(i)=	0	1	2	7	10	
2	V(i)=	-	1	1	2	2	<3, 4, 5|
	D(i)=	0	1	2	5	7	
3	V(i)=	-	1	1	3	3	<4, 5|
	D(i)=	0	1	2	5	6	
4	V(i)=	-	1	1	3	4	<5|
	D(i)=	0	1	2	5	6	
5	V(i)=	-	1	1	3	4	

Bemerkung: Wir kï¿œnnen leicht sehen, dass die einzelnen Schritte denen von Dijkstra entsprechen. Lediglich die Darstellung der letzten Spalte ist anders. Das Vorgehen unterscheidet sich zwar in folgenden zwei Punkten, die Abfolge ï¿œndert sich gegenï¿œber Dijkstra in diesem Beispiel jedoch nicht.

1. Jeder verbesserte Knoten wird in der Schlange *hinten* angestellt.
2. Der nï¿œchste Anfangsknoten ist immer der Schlangenkopf.

Tatsï¿œchlich mï¿œssen nur die Endergebnisse der beiden Verfahren ï¿œbereinstimmen. Die Zwischenschritte kï¿œnnen sich unterscheiden.

5.1.3 Tripel Algorithmus

Auch beim Tripel Algorithmus (auch Floyd-Algorithmus) werden kï¿œrzeste Wege bestimmt, jedoch von jedem Knoten zu jedem anderen.

Algorithmus 12 Tripel

Voraussetzungen

- Graph mit n Knoten
- Matrix $D(i,j)$, in der zu jedem Zeitpunkt der kï¿œrzeste Abstand von Knoten i zum Knoten j gespeichert ist. Zu Beginn wird damit der Graph definiert.
- Matrix $V(i,j)$, die zu jedem Zeitpunkt den Vorgï¿œnger des Knotens j enthï¿œlt auf dem bis dahin bekannten kï¿œrzesten Weg von i zu j .

Initialisierungen

- $D(i,j) = \begin{cases} 0 \quad für & i = j \\ k_{ij}\, für & eine\, direkte\, Verbindung\, von\, i\, zu\, j \\ \infty & sonst \end{cases}$
- $V(i,j) = \begin{cases} i \;\; für & i = j \\ i \;\; falls & eine\, direkte\, Verbindung\, von\, i\, zu\, j \;\; existiert \\ 0 & sonst \end{cases}$

Iteration

- Schleife $j = 1$ bis n # mittlerer Knoten bzw. Verbindungsknoten
  - Schleife $i = 1$ bis n # Anfang

    * Schleife $k = 1$ bis n # Ende
      Falls $D(i,j) + D(j,k) < D(i,k)$ gibt es einen kï¿œrzeren Weg von Knoten i zu Knoten k. Dann wird gesetzt:
      $D(i,k) = D(i,j) + D(j,k)$
      $V(i,k) = V(j,k)$
    * Ende Schleife ï¿œber k
  - Ende Schleife ï¿œber i
- Ende Schleife ï¿œber j

Am Ende enthï¿œlt die Matrix D die kï¿œrzesten Wege (Ketten) von jedem Knoten zu jedem anderen. Der Weg ï¿œber die einzelnen Zwischenknoten kann ausgehend vom Endknoten ï¿œber die jeweiligen Vorgï¿œnger aus Matrix V ermittelt werden.

Beispiel: Es sollen die kï¿œrzesten Wege des gerichteten Graphen Abb. B von allen Knoten zu allen anderen Knoten bestimmt werden.

OR-Skript-Abb/gerichtetGraph.eps

Initialisierungen: $D_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \infty & \infty \\ \infty & 0 & \infty & 6 & 9 \\ \infty & \infty & 0 & 3 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 2 & 0 \end{bmatrix}$ und $V_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

Bemerkung: Zu Beginn enthï¿œlt die Vorgï¿œngermatrix in jeder Zeile also ausschlieï¿œlich Nullen oder die Zahl, die ihrer Zeilennummer entspricht. D.h. ein Knoten der Spaltennummer hat den Knoten der Zeilennummer entweder als (direkten) Vorgï¿œnger oder nicht. Jeder Knoten gilt als sein eigener Vorgï¿œnger.

Achtung: Im Lauf der Iterationen ï¿œndert sich die Vorgï¿œngermatrix und als Vorgï¿œnger gelten nicht nur direkte Vorgï¿œnger, sondern auch solche, die ï¿œber eine Kette zum Zielknoten (entsprechend der Spaltennummer) fï¿œhren.

Iteration

Falls keine Wege von einem Knoten i zu Knoten j oder von j zu einem anderen Knoten k existieren, muss die Schleife nicht betrachtet werden. In anderen Worten: der Verbindungsknoten j muss andere Knoten miteinander verbinden. Sonst ist eine weitere Betrachtung sinnlos.

Der Weg von j zu j ist uninteressant, da $D_{jj} = 0$ und $V_{jj} = j$ sich nicht ï¿œndern.

OR-Skript-Abb/gerichtetGraph.eps

Schleife j=1

da kein Weg zu j fï¿œhrt, ist die Schleife zu Ende und die Matrizen bleiben gleich.

Schleife j=2

- zu j=2 $D_{12} = 1$
- von j=2 $D_{24} = 6$; $D_{25} = 9$

  Es mï¿œssen also zwei Kombinationen ï¿œberprï¿œft werden:

  1. $D_{12} + D_{24} = 7$ im Vergleich zu $D_{14} = \infty$
     Es gibt eine Verbesserung. Es wird gesetzt $D_{14} = 7$ und $V_{14} = 2$
  2. $D_{12} + D_{25} = 10$ im Vergleich zu $D_{15} = \infty$
     Es gibt eine Verbesserung. Es wird gesetzt $D_{15} = 10$ und $V_{15} = 2$

  Matrizen: $D_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 7 & 10 \\ \infty & 0 & \infty & 6 & 9 \\ \infty & \infty & 0 & 3 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 2 & 0 \end{bmatrix}$ und $V_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

Schleife j=3

- zu j=3 $D_{13} = 2$

- von j=3 $D_{34} = 3$; $D_{35} = 5$

  Es mï¿œssen also zwei Kombinationen ï¿œberprï¿œft werden:

  1. $D_{13} + D_{34} = 5$ im Vergleich zu $D_{14} = 7$
     Es gibt eine Verbesserung. Es wird gesetzt $D_{14} = 5$ und $V_{14} = 3$
  2. $D_{13} + D_{35} = 7$ im Vergleich zu $D_{15} = 10$
     Es gibt eine Verbesserung. Es wird gesetzt $D_{15} = 7$ und $V_{15} = 3$

  Matrizen: $D_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 & 7 \\ \infty & 0 & \infty & 6 & 9 \\ \infty & \infty & 0 & 3 & 5 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 2 & 0 \end{bmatrix}$ und $V_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

Schleife j=4

- zu j=4 $D_{14} = 5$; $D_{24} = 6$; $D_{34} = 3$; $D_{54} = 2$
- von j=4 $D_{45} = 1$

  Es mï¿œssen also vier Kombinationen ï¿œberprï¿œft werden:

  1. $D_{14} + D_{45} = 6$ im Vergleich zu $D_{15} = 7$
     Es gibt eine Verbesserung. Es wird gesetzt $D_{15} = 6$ und $V_{15} = 4$
  2. $D_{24} + D_{45} = 7$ im Vergleich zu $D_{25} = 9$
     Es gibt eine Verbesserung. Es wird gesetzt $D_{25} = 7$ und $V_{25} = 4$
  3. $D_{34} + D_{45} = 4$ im Vergleich zu $D_{35} = 5$
     Es gibt eine Verbesserung. Es wird gesetzt $D_{35} = 4$ und $V_{35} = 4$
  4. $D_{54} + D_{45}$ fï¿œhrt von 5 zu 5, muss also nicht betrachtet werden.

  Matrizen: $D_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 5 & 6 \\ \infty & 0 & \infty & 6 & 7 \\ \infty & \infty & 0 & 3 & 4 \\ \infty & \infty & \infty & 0 & 1 \\ \infty & \infty & \infty & 2 & 0 \end{bmatrix}$ und $V_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

Schleife j=5

Von jedem Knoten aus fï¿œhren alle optimalen Wege ï¿œber 4 nach 5. Da Knoten 5 nur zu Knoten 4 zurï¿œckfï¿œhrt, ergibt sich keine Verbesserung.

Die Matrizen nach Schleife 4 stellen also die optimalen Wege dar. Der kï¿œrzeste Weg wird rekursiv ermittelt. Z.B. von 1 nach 5 (vergl. Dijkstra oder FIFO): Die Gesamtlï¿œnge betrï¿œgt $D_{15} = 6$ und der Vorgï¿œnger von 5 auf diesem Weg ist $V_{15} = 4$. Der Vorgï¿œnger von 4 auf diesem Weg ist $V_{14} = 3$. Der Vorgï¿œnger von 3 auf diesem Weg ist $V_{13} = 1$. Der Weg ist also 1-3-4-5.

ï¿œbungen: 1. Fï¿œhren Sie die Schleife j=5 (Bsp. oben) aus.

2. Wenden Sie den Tripelalgorithmus auf den ungerichteten Graphen Abb. A an.

Ergebnis: $D_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ und $V_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 5 \end{bmatrix}$

5.2 Minimal spannende Bï¿œume

Minimal spannende Bï¿œume sind Teilgraphen von gewichteten Graphen. Sie enthalten und verbinden alle Knoten. Die Summe der Gewichtungen soll so klein wie mï¿œglich sein.

Ein leicht vorstellbares Beispiel: Einige Ortschaften sollen an ein Gasnetz angeschlossen werden. Der Verteiler liegt in einem der Orte. Die verschiedenen Verbindungsmï¿œglichkeiten zwischen den Orten mit Gasleitungen sind einschlieï¿œlich ihrer Kosten bekannt. Ziel ist es, jeden Ort, evtl. ï¿œber andere Orte, mit dem zentralen Verteiler zu verbinden. Die Baukosten sollen minimal sein.

Die Orte kï¿œnnen als Knoten eines Graphen dargestellt werden. Die mï¿œglichen Gasleitungen sind die Kanten und die Gewichtung der Kanten entspricht den Baukosten.

5.2.1 Kruskal Algorithmus

Es wird ein Graph K erstellt, der alle Knoten des gegebenen Graphen G enthï¿œlt, aber keine Kanten. Die Kanten des Graphen G werden nach aufsteigender Reihenfolge ihrer Bewertungen k_{ij} sortiert. Daraus wird der minimal spannende Baum konstruiert: die Kanten werden nacheinander in den Graphen K in der Reihenfolge aufsteigender Bewertung eingefï¿œgt. Entsteht durch Hinzunahme einer Kante ein Kreis, wird diese Kante weggelassen. Als Ergebnis entsteht der minimal spannende Baum.

Algorithmus 13 Kruskal

Voraussetzung

- ein bewerteter, ungerichteter, zusammenhï¿œngender, schlingenfreier Graph G mit n Knoten und m Kanten
- ein Graph K mit den n Knoten von G aber ohne Kanten

Lï¿œsungsschritte

1. Die Kanten werden nach aufsteigender Reihenfolge ihrer Bewertungen k_{ij} sortiert.
2. Schleife i = 1 bis m (Schleife ï¿œber alle Kanten)
   - Kante i wird dem Graphen K hinzugefï¿œgt, wenn dadurch kein Kreis entsteht. Sonst wird die Kante ï¿œbergangen.

   Ende der Schleife ï¿œber i

Wenn $(n-1)$ Kanten in den Graphen K eingefï¿œgt wurden, ist das Verfahren zu Ende. K ist der minimal spannende Baum.

Beispiel: Es soll der minimal spannende Baum eines ungerichteten Graphen bestimmt werden. Es wird eine modifizierte Version des Graphen der Abbildung A verwendet:

OR-Skript-Abb/Abb_A_mod.eps

1. $k_{12} = 1$ (Kante 1); $k_{45} = 1$ (Kante 2); $k_{23} = 2$ (Kante 3); $k_{13} = 3$ (Kante 4); $k_{24} = 4$ (Kante 5); $k_{34} = 5$ (Kante 6); $k_{35} = 5$ (Kante 7)
2. Schleifen (Die folgenden Abbildungen zeigen nur die bereits behandelten Knoten.)
   (a) Schleife i=1; Kante (1, 2) wird hinzugefï¿œgt

   OR-Skript-Abb/kruskalBaum0.eps

(b) Schleife i=2; Kante (4, 5) wird hinzugefï¿œgt

OR-Skript-Abb/kruskalBaum1.eps

Der Graph K ist zu diesem Zeitpunkt nicht zusammenhï¿œngend.

(c) Schleife i=3; Kante (2, 3) wird hinzugefï¿œgt

OR-Skript-Abb/kruskalBaum2.eps

Auch hier sind noch zwei nicht zusammenhï¿œngende Teilgraphen.

(d) Schleife i=4; Kante (1, 3) wird nicht hinzugefï¿œgt, da sonst ein Kreis entsteht.

(e) Schleife i=5; Kante (2, 4) wird hinzugefï¿œgt

OR-Skript-Abb/kruskalBaum4.eps

(f) Schleife i=6 muss nicht mehr untersucht werden, da bereits $n-1=4$ Kanten eingefï¿œgt wurden. Der minimal spannende Baum ist vollstï¿œndig.

Wir werden intern fï¿œr eine kompaktere Darstellung des Ergebnisses in der Klausur folgende Darstellung verwenden:

OR-Skript-Abb/kruskalBaum4Reihenfolge.eps

Hier stehen an den Kanten nicht deren Gewichtungen, sondern die Reihenfolge, in der die Kanten eingefï¿œgt wurden. Dies ist keine offizielle Darstellung, spart aber in der Klausur Zeit und enthï¿œlt alle fï¿œr eine Kausur wichtigen Informationen.

5.2.2 Prim Algorithmus

Der Prim Algorithmus ist dem von Kruskal sehr ï¿œhnlich. Auch hier werden die Kanten nach aufsteigender Reihenfolge ihrer Bewertungen k_{ij} sortiert. Der neue Graph K besteht am Anfang aus einem Knoten. Von diesem Knoten ausgehend werden in der vorgegebenen Reihenfolge nur Kanten und Knoten hinzugefï¿œgt, die einen zusammenhï¿œngenden

Teilbaum ergeben. Auch hier werden Kanten ï¿œbergangen, die zu einem Kreis fï¿œhren. Der Graph K wï¿œchst, bis alle Knoten von G und damit $n-1$ Kanten enthalten sind.

Algorithmus 14 Prim

Voraussetzung

- ein bewerteter, ungerichteter, zusammenhï¿œngender, schlingenfreier Graph G mit n Knoten und m Kanten
- ein Anfangsknoten

Lï¿œsungsschritte

1. Die Kanten werden nach aufsteigender Reihenfolge ihrer Bewertungen k_{ij} sortiert.
2. Schleife i = 1 bis n-1 # Anzahl der benï¿œtigten Kanten
   - Schleife j = 1 bis m_i # Schleife ï¿œber alle sortierten Nachbarknoten des Teilgraphen
     - Kante j (einschlieï¿œlich des Endknoten) wird dem Graphen K hinzugefï¿œgt, wenn dieser dadurch zusammenhï¿œngend bleibt und kein Kreis entsteht. Sonst wird die Kante ï¿œbergangen.

     Ende der Schleife ï¿œber j, nachdem eine Kante hinzugefï¿œgt wurde

   Ende der Schleife ï¿œber i

Der Graph K enthï¿œlt nun $(n-1)$ Kanten. Das Verfahren endet. K ist der minimal spannende Baum.

1. Beispiel: Es soll der minimal spannende Baum des ungerichteten Graphen des Beispiels in Abschnitt **??** bestimmt werden. Der Anfangsknoten sei 1.

OR-Skript-Abb/Abb_A_mod.eps

1. $k_{12}=1$ (Kante 1); $k_{45}=1$ (Kante 2); $k_{23}=2$ (Kante 3); $k_{13}=3$ (Kante 4); $k_{24}=4$ (Kante 5); $k_{34}=5$ (Kante 6); $k_{35}=5$ (Kante 7)

2. Schleifen:

   (a) Schleife i=1; Kante (1, 2) (=Kante 1) wird hinzugefï¿œgt

   OR-Skript-Abb/kruskalBaum0.eps

   (b) Schleife i=2; Kante (4, 5) (=Kante 2) wird nicht hinzugefï¿œgt, da weder Knoten 4 noch Knoten 5 im bisherigen Teilbaum enthalten sind. Die Kante mit der kleinsten Bewertung, die diese Bedingung erfï¿œllt, ist Kante (2, 3) (=Kante 3). Sie wird hinzugefï¿œgt

   OR-Skript-Abb/primBaum12.eps

   (c) Schleife i=3; Kante (2, 4) (=Kante 5) wird hinzugefï¿œgt

   OR-Skript-Abb/primBaum24.eps

   (d) Schleife i=4; Kante (4, 5) (=Kante 2) wird hinzugefï¿œgt

   OR-Skript-Abb/primBaum31.eps

   (e) Nun sind $n - 1 = 4$ Kanten eingefï¿œgt. Der minimal spannende Baum ist vollstï¿œndig.

Unsere interne, kompaktere Darstellung ist hier:

OR-Skript-Abb/primBaum31Reihenfolge.eps

2. Beispiel: Hier soll gezeigt werden, dass das Ergebnis unabhï¿œngig vom Startknoten ist. Es soll wieder der minimal spannende Baum des ungerichteten Graphen von Beispiel 1 in Abschnitt **??** bestimmt werden. Der Anfangsknoten sei 5.

OR-Skript-Abb/Abb_A_mod.eps

1. $k_{12} = 1$ (Kante 1); $k_{45} = 1$ (Kante 2); $k_{23} = 2$ (Kante 3);$k_{13} = 3$ (Kante 4); $k_{24} = 4$ (Kante 5); $k_{34} = 5$ (Kante 6); $k_{35} = 5$ (Kante 7)
2. Schleifen:
   (a) Schleife i=1; Kante (1, 2) (=Kante 1) wird nicht hinzugefï¿œgt, da weder Knoten 1 noch Knoten 2 im bisherigen Teilbaum enthalten sind.
   Kante (4, 5) (=Kante 2) wird hinzugefï¿œgt

   OR-Skript-Abb/primBaum54.eps

   (b) Schleife i=2; Kanten 1, 2 und 3 werden nicht hinzugefï¿œgt, da sich kein zusammenhï¿œngender Teilgraph ergeben wï¿œrde. Die Kante mit der kleinsten Bewertung, die diese Bedingung erfï¿œllt, ist Kante (2, 4) (=Kante 5). Sie wird hinzugefï¿œgt

   OR-Skript-Abb/primBaum245.eps

   (c) Schleife i=3; Kante (1, 2) (=Kante 1) wird hinzugefï¿œgt

   OR-Skript-Abb/primBaum1245.eps

   (d) Schleife i=4; Kante (2, 3) (=Kante 3) wird hinzugefï¿œgt

   OR-Skript-Abb/primBaum31.eps

   (e) Nun sind $n - 1 = 4$ Kanten eingefï¿œgt. Der minimal spannende Baum ist vollstï¿œndig. Das Ergebnis ist wie oben.

Unsere interne, kompaktere Darstellung unterscheidet sich allerdings da die Reihenfolge anders ist:

OR-Skript-Abb/primBaum1245Reihenfolge.eps

5.2.3 Vergleich der Algorithmen

Die beiden Algorithmen zur Bestimmung eines minimal spannenden Baumes sind hier auf eine leicht nachvollziehbare Art angegeben. Implementierungen laufzeitoptimierter Versionen sprengen den Rahmen dieses Manuskripts und der Vorlesung.

Fï¿œr die Laufzeit gilt: Wenn $|E|$ und $|V|$ die Anzahl von Knoten und Kanten eines Graphen ist, ist fï¿œr Kruskal die Laufzeit $\mathcal{O}\left(|E|\log|V|\right)$ und fï¿œr Prim $\mathcal{O}\left(|E| + |V|\log|V|\right)$. Prim ist also schneller, wenn $|E| \gg |V|$.

5.3 Graphentheorie Zusammenfassung

A. Grundbegriffe

B. kï¿œrzeste Wege

1. Dijkstra
   (a) Anfangsknoten $a \epsilon M$ mit kï¿œrzestem Abstand zum Startknoten wï¿œhlen
   (b) alle Nachfolger auf kï¿œrzeren Abstand ï¿œber a untersuchen
   (c) falls ja
      i. Menge M erweitern
      ii. Entfernungsvektor (-tabelle) anpassen
      iii. Vorgï¿œngervektor (-tabelle) anpassen
2. FIFO
   (a) Anfangsknoten ist KS (Kopf der Schlange)
   (b) alle Nachfolger auf kï¿œrzeren Abstand ï¿œber KS untersuchen
   (c) falls ja
      i. Schlange erweitern
      ii. Entfernungsvektor (-tabelle) anpassen
      iii. Vorgï¿œngervektor (-tabelle) anpassen
3. Tripel
   (a) mittleren Knoten j wï¿œhlen (Schleife ï¿œber alle Knoten des Graphen)

(b) Verbindung von Vorgï¿œnger zu Nachfolger auf kï¿œrzeren Abstand ï¿œber j untersuchen

(c) falls ja

i. Entfernungsmatrix (-tabelle) anpassen

ii. Vorgï¿œngermatrix (-tabelle) anpassen

C. minimal spannende Bï¿œume

1. Kruskal

   (a) Graph K wie Ausgangsgraph G aber ohne Kanten

   (b) Kanten von G nach aufsteigender Reihenfolge der Bewertung sortieren

   (c) Kanten in dieser Reihenfolge in K einfï¿œgen, sofern sich kein Kreis ergibt

2. Prim

   (a) Graph K mit nur einem Knoten aus G

   (b) Kanten von G nach aufsteigender Reihenfolge der Bewertung sortieren

   (c) Kanten in dieser Reihenfolge untersuchen: die erste Kante, die von K ausgeht und keinen Kreis ergibt, wird eingefï¿œgt, einschlieï¿œlich Endknoten bis alle Knoten aus G auch in K sind

6 Netzplantechnik

Die Netzplantechnik ist eine Planungsmethode, bei der Aktivitï¿œten nach ihrem Zeitbedarf und ihren gegenseitigen Abhï¿œngigkeiten in ihrer Reihenfolge geplant werden. Die Dauer der einzelnen Tï¿œtigkeiten ist bekannt. Auï¿œerdem ist bekannt, welche Tï¿œtigkeiten abgeschlossen sein mï¿œssen, bevor eine bestimmte weitere begonnen werden kann. Dies wird in einer *Vorgangsliste* festgehalten.

Gesucht sind ein Strukturplan, der die notwendigen Reihenfolgen graphisch darstellt, sowie ein Zeitplan, dem entnommen werden kann, wann welche Tï¿œtigkeit frï¿œhestens begonnen werden kann und wann sie spï¿œtestens abgeschlossen sein muss, wenn die mindestens notwendige Gesamtdauer des Projekts nicht verlï¿œngert werden soll. Dies wird dann im Netzplan zusammen gefasst.

Beispiele sind: Bauprojekte aller Art, Betriebsablï¿œufe, Veranstaltungen, Lehrplï¿œne, Softwareprojekte u.s.w.

Folgende Abkï¿œrzungen sind ï¿œblich:

- FAZ(i) - frï¿œhest mï¿œglicher Anfangszeitpunkt der Tï¿œtigkeit i
- FEZ(i) - frï¿œhest mï¿œglicher Endzeitpunkt der Tï¿œtigkeit i
- SAZ(i) - spï¿œtest mï¿œglicher Anfangszeitpunkt der Tï¿œtigkeit i, ohne das Projekt zu verzï¿œgern
- SEZ(i) - spï¿œtest mï¿œglicher Endzeitpunkt der Tï¿œtigkeit i, ohne das Projekt zu verzï¿œgern
- V(i) - Menge der Vorgï¿œnger von i, d.h. Menge der Tï¿œtigkeiten, die abgeschlossen sein mï¿œssen, bevor Tï¿œtigkeit i anfangen kann
- N(i) - Menge der Nachfolger von i, d.h. Menge der Tï¿œtigkeiten, die erst begonnen werden kï¿œnnen, wenn i abgeschlossen ist

Beispiel: Ein Gebï¿œude soll erweitert werden. Dabei stehen (u.a.) folgende Tï¿œtigkeiten an (Dauer in Tagen):

Tï¿œtigkeit	Beschreibung	Dauer	Vorgï¿œnger
A	Bauaushub	10	-
B	Wï¿œnde und Decken	20	A
C	Dach	5	B
D	Tï¿œren und Fenster	3	B
E	Elektroinstallation	4	B
F	Boden	5	D, E
G	Streichen	2	C, E, F

Die Spalte der Vorgï¿œnger enthï¿œlt die unabhï¿œngigen Vorgï¿œnger. Z.B. muss Tï¿œtigkeit A vor allen anderen Tï¿œtigkeiten ausgefï¿œhrt werden. Dies wird nur bei B erwï¿œhnt, da die anderen Tï¿œtigkeiten nach B erfolgen mï¿œssen. Manchmal sind auch einige abhï¿œngige Vorgï¿œnger mit aufgefï¿œhrt. Dies ï¿œndert am Gesamtablauf nichts, da die Information redundant ist.
Aus dieser Tabelle ergibt sich der *Strukturplan*:

`OR-Skript-Abb/StrukturUmbau2.eps`

Die Zahlen entsprechen der Dauer des Vorgangs. Die Pfeile geben die jeweiligen Nachfolger an. Zeitliche Mindestabstï¿œnde kï¿œnnten hier notiert werden. Im gegebenen Beispiel treten diese nicht auf.
Die Zeitplanung ist aus der Strukturplanung noch nicht ersichtlich. Hierfï¿œr mï¿œssen die Anfangs- und Endzeiten berechnet werden.

Die ausfï¿œhrliche Rechnung, wie sie gegebenenfalls programmiert wird, ist in den Ergï¿œnzungen Kap.**??** beschrieben. Hier soll die mehr intuitive Erstellung des Netzplans betrachtet werden. Auch sie wird in die Teile „Vorwï¿œrtsrechnung“ und „Rï¿œckwï¿œrtsrechnung“ geteilt. Gestartet wird mit einem leeren Netzplan. Dieser enthï¿œlt lediglich die Informationen des Strukturplans. Die einzelnen Knoten des Netzplans, die den Vorgï¿œngen entsprechen, enthalten die Informationen in folgender Form:

Vorgang i	Zeitbedarf t(i)
FAZ(i)	SAZ(i)
FEZ(i)	SEZ(i)
Pufferzeit P(i)	

Die frï¿œhesten Anfangs- und Endzeiten, $FAZ(i)$ und $FEZ(i)$, werden ï¿œber die *Vorwï¿œrtsrechnung* bestimmt, die spï¿œtesten Anfangs- und Endzeiten $SAZ(i)$ und $SEZ(i)$ ï¿œber die Rï¿œckwï¿œrtsrechnung.

6.1 Vorwï¿œrtsrechnung

Hier wird zunï¿œchst das Ergebnis der Vorwï¿œrtsrechnung dargestellt und anschlieï¿œend besprochen:

OR-Skript-Abb/NetzplanSkriptV.eps

Vor der Rechnung ist ein teilweise gefï¿œllter Netzplan gegeben. Er enthï¿œlt

1. die Informationen des Strukturplans, also Namen des Knoten, d.h. des Vorgangs sowie
2. Dauer des Vorgangs (rechts daneben) und
3. Pfeile, also die Information ï¿œber Vorgï¿œnger
4. Anfangszeit 0 im ersten Knoten (mit * gekennzeichnet)

Der FEZ ergibt sich aus FEZ=FAZ+Dauer.

Die FAZ jedes Knotens kann aus der FEZ des Vorgï¿œngers direkt ï¿œbernommen werden. Hat ein Knoten mehrere Vorgï¿œnger, muss der spï¿œteste FEZ genommen werden.

So wird Schritt fï¿œr Schritt durch den gesamten Plan FAZ und FEZ bestimmt.

Damit sind die frï¿œhesten Anfangs- und Endzeiten bekannt und kï¿œnnen fï¿œr die Rï¿œckwï¿œrtsrechnung verwendet werden.

6.2 Rï¿œckwï¿œrtsrechnung

Die Voraussetzungen sind wie oben. Allerdings muss die Vorwï¿œrtsrechnung fï¿œr die Initialisierung abgeschlossen sein, da FEZ(n) bekannt sein muss. ï¿œber die Rï¿œckwï¿œrtsrechnung werden $SAZ(i)$ und $SEZ(i)$ bestimmt.

Das Ergebnis sieht folgendermaï¿œen aus

OR-Skript-Abb/NetzplanSkriptR.eps

Ausgangspunkt war das Ergebnis der Vorwï¿œrtsrechnung. Und zusï¿œtzlich der SEZ(n) des letzten Knotens, hier mit * gekennzeichnet. Dieser ist gleich dem FEZ des gleichen Knotens, da sich sonst die Gesamtdauer vergrï¿œï¿œert.

Der SAZ ergibt sich aus SAZ=SEZ-Dauer.

Der SEZ jedes Knotens kann aus dem SAZ des Nachfolgers direkt ï¿œbernommen werden. Hat ein Knoten mehrere Nachfolger, muss der frï¿œheste SAZ genommen werden.

So wird Schritt fï¿œr Schritt durch den gesamten Plan SEZ und SAZ bestimmt.

Nun kï¿œnnen noch die Pufferzeiten eingetragen werden. Sie ergeben sich fï¿œr jeden Vorgang aus Pufferzeit=SAZ-FAZ=SEZ-FEZ. Die Pufferzeit beschreibt die Zeit, um die ein Vorgang maximal verzï¿œgert werden darf, ohne dass das Ende des Gesamtprojekts dadurch verzï¿œgert wird. Man beachte jedoch: wird diese Pufferzeit bei einem Vorgang ausgeschï¿œpft, dann haben die Nachfolger keine Pufferzeit mehr und mï¿œssen zu ihrem SAZ beginnen.

Das Ergebnis ist der gesuchte Netzplan.

Es gibt mindestens einen Weg vom ersten zum letzten Knoten, bei dem keine Pufferzeiten vorkommen. Kein Vorgang, der auf diesem Weg liegt, kann verzï¿œgert werden, ohne das gesamte Projekt zu verzï¿œgern. Dieser Weg heiï¿œt *kritischer Pfad*. Im oben stehenden Beispiel ist der kritische Pfad A-B-E-F-G.

7 Simulation

Dieses Kapitel kann keine Vorlesungsreihe ï¿œber Simulation ersetzen. Es soll hier lediglich ein elementares Verstï¿œndnis vermittelt werden.

Der bisher unwichtige Begriff des Zufalls bzw. der Zufallszahlen ist bei vielen Simulationen mathematisch zentral und soll daher als Einziges auch rechnerisch zur Sprache kommen.

Bisher wurden Situationen betrachtet, in denen klar definierte Anfangszustï¿œnde zu klar berechenbaren Endsituationen fï¿œhren. Simulationen spielen immer auch dort eine Rolle, wo dies nicht der Fall ist. Das kann an einem zu komplexen mathematischen

Modell liegen oder an der Tatsache, dass bei der Ausgangssituation einige Parameter zufï¿œllige Werte haben, z.B. Schwankungen in Liefermengen oder Verkaufszahlen. Um diese Schwankungen berï¿œcksichtigen zu kï¿œnnen, braucht man geeignete mathematische Methoden zur Darstellung zufï¿œlliger Ereignisse. Z.B. kann das wiederholte Werfen eines Wï¿œrfels nur simuliert werden, wenn ganze Zahlen von 1 bis 6 in zufï¿œlliger Reihenfolge ausgegeben werden. Hinzu kommt, dass hier im langfristigen Mittel jede Zahl gleich oft vorkommen muss. In anderen Situationen gibt es einen zentralen Wert, um den sich die Zahlen hï¿œufen, z.B. bei Fertigungsungenauigkeiten, die um den Sollwert streuen. In den Kapiteln **??** und **??** wird die Berechnung zweier Fï¿œlle vorgestellt. Das wichtigste Simulationsverfahren im Rahmen der Stochastik ist die Monte-Carlo-Simulation.

7.1 Monte-Carlo-Simulation

Die Monte-Carlo-Simulation wird zur Darstellung zufï¿œlliger Prozesse verwendet. Ein anderer Anwendungsbereich ergibt sich, wenn von einem Prozess nur der Endzustand bekannt ist, nicht aber die Anfangsparameter. Diese werden dann zufallsverteilt in eine groï¿œe Zahl gleichartiger Rechnungen eingesetzt und ï¿œberprï¿œft, welche Kombinationen von Anfangsparametern den bekannten Endzustand ergeben.

ï¿œhnlich wie beim Roulette werden nach einer vorgewï¿œhlten Wahrscheinlichkeitsverteilung Zufallszahlen gewï¿œhlt, die als Inputgrï¿œï¿œen fï¿œr weitere Berechnungen dienen. Beim Roulette ist die Situation besonders einfach: alle Zahlen haben die gleiche Wahrscheinlichkeit (gleichverteilte Zufallszahlen). Auï¿œerdem werden keine weiteren Berechnungen mehr angestellt, auï¿œer der Gewinnausschï¿œttung.

Andere Situationen kï¿œnnen mit der Monte-Carlo-Simulation durch geeignete Anpassung der Wahrscheinlichkeitsverteilung simuliert werden. Typischerweise dienen die Inputgrï¿œï¿œen als statistische Anfangswerte fï¿œr weitere Berechnungen.

Ein wichtiger Bereich des Finanzwesens, in dem die Monte-Carlo-Simulation eine groï¿œe Rolle spielt, ist die Berechnung komplexer (nicht-europï¿œischer) Optionen.

Eine wesentliche Eigenschaft von Zufallszahlen ergibt sich aus der Forderung, dass jede Zahl unabhï¿œngig von den bisher gezogenen Zahlen sein muss. In diesem Sinn kann ein bestimmter Algorithmus immer nur Pseudo-Zufallszahlen erzeugen. Die Verteilung einer Serie entspricht zwar echten Zufallszahlen. Ein erneutes Aufrufen des Algorithmus bei gleichen Anfangsbedingungen erzeugt aber wieder die gleiche Serie.

7.2 Gleichverteilte Zufallszahlen

Das Beispiel des Wï¿œrfels erfordert eine Gleichverteilung der (ganzen) Zufallszahlen innerhalb des Intervalls $[1; 6]$. Beim Roulette werden die 37 Zahlen von 0 bis 36 gezogen. Ohne Beschrï¿œnkung der Allgemeinheit werden intern reelle Zufallszahlen oft im Intervall $[0; 1]$ berechnet. Dies lï¿œsst sich leicht auf jedes beliebige Intervall umrechnen. Man spricht von *Standard-Gleichverteilung* bzw. von Standardzufallszahlen.

Midsquare-Methode

Voraussetzung: eine beliebige 4-stellige Zahl x

Berechnung: $y = x^2$; von y werden abwechselnd vorne und hinten Stellen abgestrichen, bis wieder eine 4-stellige Zahl x ï¿œbrig ist. Diese ist Ausgangspunkt fï¿œr die weitere Berechnung.

Am Ende hat man eine Folge von zufï¿œllig verteilten vierstelligen Zahlen, die nach einer Division durch 10000 im gewï¿œnschten Bereich liegen.

Die nï¿œchste Methode nutzt Modulo, also die Division mit Rest. Z.B.: $13\, mod\, 3 = 1$, denn 3 passt 4 Mal in 13 und 1 bleibt ï¿œbrig.

Kongruenzmethode von Lehner

Voraussetzung: Vier natï¿œrliche Zahlen a, b, Z_0, m

Berechnung: $Z_{k+1} = (a \cdot Z_k + b)\text{mod}\, m$ ergibt weitere Werte von Z

$S_k = \frac{Z_k}{m}$ sind Standardzufallszahlen

Bei der Auswahl der Zahlen a, b, Z_0, m mï¿œssen einige Restriktionen beachtet werden, dass keine periodischen Zahlen entstehen, z.B. $m = 2^l$ mit $30 \leqq l \leqq 40$ und $Z_0 \ll m$.

Ein Beispiel ist in den Ergï¿œnzungen enthalten.

7.3 Normalverteilte Zufallszahlen

Wenn eine Grï¿œï¿œe um einen Mittelwert streut, z.B. bei Fertigungstoleranzen, sind diese Werte typischerweise normalverteilt. Die Dichtefunktion der Normalverteilung lautet:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

mit dem Erwartungswert μ und der Varianz σ^2. σ heiï¿œt *Standardabweichung*. Der Erwartungswert entspricht der Sollgrï¿œï¿œe bei Fertigungen und die Varianz ist ein

Maï¿œ fï¿œr die Streuung. Normalverteilte Zufallszahlen lassen sich ï¿œber verschiedene Methoden erzeugen, s.[**?**].

Zwï¿œlferregel

Voraussetzung: k Serien zu je 12 Standardzufallszahlen $x_i(k)$

Berechnung: $N_k = \sum_{i=1}^{12} x_i(k) - 6$

N_i ist eine Folge von nï¿œherungsweise normalverteilten Zufallszahlen.

Box-Muller-Methode

Voraussetzung: k Serien zu je 2 Standardzufallszahlen $x_1(k)$ und $x_2(k)$

Berechnung: $N_k = \sqrt{-2 \cdot \ln x_1(k)} \cdot \cos\left(2\pi \cdot x_2(k)\right)$

N_i ist eine Folge von normalverteilten Zufallszahlen.

`OR-Skript-Abb/Dichtefunktion.png`

Abbildung 11:

Abb. 11 (Aus Wikipedia, „Normalverteilung“, September 2010) zeigt die Dichtefunktion der Normalverteilung. Der Erwartungswert ist hier $\mu = 0$ und die Varianz ist $\sigma^2 = 1$.

Anhang

A ï¿œbungen

Die folgenden ï¿œbungen werden im Rahmen der Vorlesungszeit bearbeitet. In diesem Rahmen werden auch die Lï¿œsungen zur Verfï¿œgung gestellt.

ï¿œbungsblatt 1

1. Maximieren Sie die Zielfunktion $G = 5x_1 + 3x_2$ unter den Bedingungen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqq 14 \\ 4x_1 + 9x_2 &\leqq 81 \\ x_1 &\leqq 11 \\ x_1,\, x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

   Lï¿œsen Sie die Aufgabe sowohl zeichnerisch als auch rechnerisch.

2. Die Zielfunktion G soll unter folgenden Nebenbedingungen maximiert werden:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\leqq 24 \\ -4x_1 + 3x_2 &\leqq 12 \\ x_1 &\leqq 10 \\ x_2 &\leqq 7 \\ x_1,\, x_2 &\geqq 0 \end{aligned}$$

   (a) $G = 2x_1 + 3x_2$

   (b) $G = 2x_1 + x_2$

3. Wie 2. mit $x_2 = 7$ statt $x_2 \leqq 7$. Welche der Lï¿œsungen bleibt erhalten - warum?

4. Wie 2. mit $x_2 \geqq 7$ statt $x_2 \leqq 7$.

5. Ein Rohstoff wird zu drei Gï¿œtern G_1, G_2 und G_3 verarbeitet. Man benï¿œtigt fï¿œr G_1 5kg/Stï¿œck, fï¿œr G_2 9kg/Stï¿œck und fï¿œr G_3 7kg/Stï¿œck. Benï¿œtigte Arbeitszeit in Stunden pro Stï¿œck: 5 fï¿œr G_1, 8 fï¿œr G_2 und 4 fï¿œr G_3. Es

stehen maximal 140 Arbeitsstunden und 190kg Rohstoff zur Verfï¿œgung. G_1 und G_2 werden an der gleichen Maschine vorbereitet. Diese steht insgesamt nur 1 Stunde zur Verfï¿œgung. Von G_1 kï¿œnnen pro Stunde an dieser Maschine 10 Stï¿œck vorbereitet werden, von G_2 5 Stï¿œck. Gewinn pro hergestelltem Stï¿œck: 4ï¿œ fï¿œr G_1, 4ï¿œ fï¿œr G_2 und 5ï¿œ fï¿œr G_3. Wie soll produziert werden, dass der Gewinn maximal wird?
Interpretieren Sie das Ergebnis.

6. Wie 5., wobei sicher gestellt werden soll, dass die genannte Maschine genau eine Stunde genutzt wird.

7. Wie 5., wobei die Maschine *mindestens* eine Stunde genutzt werden soll.
Interpretieren Sie das Ergebnis.

ï¿œbungsblatt 2

1. (vergl. Beispiel 2.1 aus [?]) Ein Betrieb fertigt zwei Artikel A_1 und A_2 mit zwei Maschinen M_1 und M_2 und einer Montagegruppe. Der jeweilige Gewinn betrï¿œgt $g_1 = 5GE$ und $g_2 = 8GE$. Wï¿œhrend beide Maschinen jeweils 24 Stunden pro Tag zur Verfï¿œgung stehen, stellt die Montagegruppe insgesamt 36 Arbeitsstunden zur Verfï¿œgung. Fï¿œr die Herstellung von A_1 werden 5 Stunden auf M_1 und eine Stunde auf M_2 sowie 6 Montagestunden gebraucht. Fï¿œr die Herstellung von A_2 werden 2 Stunden auf M_1 und 5 Stunden auf M_2 sowie 6 Montagestunden gebraucht.

   (a) Stellen Sie ein mathematisches Modell auf.

   (b) Erstellen Sie das entsprechende Simplextableau (Ausgangstableau).

   (c) Lï¿œsen Sie das Problem mit Hilfe des Simplexalgorithmus.

   (d) Gibt es noch ungenutzte (Maschinen- oder Arbeitszeit-) Kapazitï¿œten?

2. (vergl. Beispiel 2.4 aus [?]) Der in Aufg. 1 genannte Betrieb erweitert sein Sortiment um einen Artikel A_3, dessen Fertigung 3 Stunden auf Maschine M_1 benï¿œtigt. Montagezeit fï¿œllt keine an. Ein Artikel A_3 kann nur zusammen mit je einem Artikel A_1 verkauft werden. Genau ein Artikel A_1 wird ohne A_3 verkauft. Ein Artikel A_3 trï¿œgt mit einer GE zum Gewinn bei.

   (a) Erweitern Sie das mathematische Modell von Aufg. 1 geeignet.

(b) Lï¿œsen Sie das Problem mit Hilfe des Simplexalgorithmus.

(c) Ist die Auslastung der Kapazitï¿œten nun besser?

(d) Wie wï¿œre die Auslastung ohne die Bindung von A_3 an A_1?

3. Bestimmen Sie das zu Aufg. 1 duale Problem und lï¿œsen Sie es mit dem Simplexalgorithmus.

4. Machen Sie eine Sensitivitï¿œtsanalyse von Aufg. 1. Verwenden Sie hierfï¿œr die zeichnerische Lï¿œsung. Es reicht, die Zielfunktionskoeffizienten sowie die rechten Seiten der Bedingungen zu untersuchen.
Untersuchen Sie auch den Koeffizienten c in der zweiten Gleichung.

$$M_2 \quad c * x_1 + 5x_2$$

ausgehend von c=1. D.h. in welchem Bereich darf sich c ï¿œndern, so dass die Lï¿œsung (Schnitt der gleichen Geraden) erhalten bleibt?

ï¿œbungsblatt 3

1. Folgende Angebots- und Nachfragemengen sollen nach einem kostenminimalen Transportplan ausgeliefert werden:

Lager	Liefermenge a_i	Filiale	Bedarfsmenge b_j
L_1	5	F_1	6
L_2	8	F_2	5
L_3	7	F_3	4
		F_4	5
Summe	20	Summe	20

Kosten	F_1	F_2	F_3	F_4
L_1	2	9	3	5
L_2	8	7	8	7
L_3	4	10	6	11

(a) Bestimmen Sie eine Anfangslï¿œsung mit der Nordwest-Ecken-Regel.

(b) Bestimmen Sie eine Anfangslï¿œsung mit dem Rangfolgeverfahren.

(c) Ermitteln Sie eine optimale Lï¿œsung mit der Stepping-Stone-Methode. Gehen Sie von der Lï¿œsung (a) aus.

(d) Ermitteln Sie eine optimale Lï¿œsung mit der MODI-Methode. Gehen Sie von der Lï¿œsung (b) aus.

2. Sechs Fahrzeugparks P_i stellen ihre Fahrzeuge vier Baustellen B_j zur Verfï¿œgung. Die Entfernungstabelle gibt an, wie groï¿œ jeweils die Entfernung von Park P_i zu Baustelle B_j ist.

Park	Anzahl der Fahrzeuge	Baustelle	Bedarf
1	13	1	23
2	7	2	14
3	9	3	17
4	12	4	11
5	6		
6	18		
Summe	65		65

Entf.	1	2	3	4
1	4	1	6	13
2	7	3	4	12
3	3	4	6	8
4	9	10	7	9
5	8	13	5	8
6	12	18	4	7

Verteilen Sie Fahrzeuge so, dass insgesamt eine mï¿œglichst geringe Gesamtweglï¿œnge gefahren werden muss. Verwenden Sie fï¿œr die Ausgangslï¿œsung das Rangfolgeverfahren. Optimieren Sie die Lï¿œsung mit dem MODI-Verfahren.

3. Lï¿œsen Sie folgendes Zuordnungsproblem. Fï¿œr drei gleich ausgebildete Personen stehen drei Stellen zur Verfï¿œgung. Der Weg vom Wohnort zur mï¿œglichen Arbeitsstelle ist durch folgende Entfernungsmatrix gegeben:

Entfernungsmatrix	A_1	A_2	A_3
P_1	5	4	7
P_2	5	2	3
P_3	4	6	5

Welche Person mï¿œsste welche Arbeitsstelle bekommen, so dass der insgesamt gefahrene Weg zwischen Wohnung und Arbeitsstelle minimal ist?

ï¿œbungsblatt 4

1. (vergl. Beispiel 4.1 aus [?]) Auf zwei Maschinengattungen M_1 und M_2 werden zwei Artikel A_1 und A_2 gefertigt. Es stehen mehrere Montagekrï¿œfte zur Verfï¿œgung. Beschrï¿œnkungen (Maschinenzeit in Stunden/Stï¿œck) und Gewinn bei jedem Artikel entsprechen folgender Tabelle:

	A_1	A_2	Kapazitï¿œt
M_1	5	2	24h/Tag
M_2	1	5	24h/Tag
Montagekrï¿œfte	6	6	36h/Tag
Gewinn	5GE	8GE	

(a) Erstellen Sie ein mathematisches Modell zur Bestimmung des Gewinnmaximums unter Berï¿œcksichtigung der Kapazitï¿œtsgrenzen.

(b) Stellen Sie das Problem grafisch dar.

(c) Pro Tag soll immer eine ganzzahlige Anzahl von Artikeln hergestellt werden. Lï¿œsen Sie dieses Problem grafisch und rechnerisch mit dem Branch-and-Bound-Verfahren.

2. Lï¿œsen Sie Aufgabe 7 von Blatt 1 fï¿œr ganzzahlige Werte.

3. Lï¿œsen Sie das Rucksackproblem von Kap. 4.2 mit folgender Verzweigungsregel: Verzweigt wird ein unzulï¿œssiges Problem, indem in einem Zweig $x_i = 0$ und im anderen Zweig $x_i = 1$ gesetzt wird. i soll dabei mï¿œglichst klein sein, zu Beginn also 1. Da die Verzweigungsentscheidung weiter vererbt wird, wird i immer grï¿œï¿œer.
Diese Verzweigungsregel wird bei Gert Heinrich verwendet.

4. Das bei Gert Heinrich verwendete Beispiel fï¿œhrt auf folgende Tabelle:

Kosten	5000	3000	6000	4500	6000	5000
Nutzen	40	10	30	30	15	20
Kosten/Nutzen						
Gegenstand Nr.						

Lï¿œsen Sie dieses Problem mit dem im Skript besprochenen Verfahren. Der Nutzen muss mindestens 90 betragen. Die Kosten sollen minimiert werden.
Beachten Sie, dass es sich hier um ein Minimierungsproblem handelt. Die Schritte mï¿œssen also sinngemï¿œï¿œ angepasst werden.

ï¿œbungsblatt 5

1. ï¿œber folgendes Verkehrsnetz werden die fï¿œnf Firmen 2-6 von Lager 1 beliefert. Bestimmen Sie mit dem Dijkstra-Algorithmus und mit dem FIFO-Algorithmus die

jeweils kï¿œrzesten Wege.

Uebungen_skript/Abb/V_1.eps

Was ï¿œndert sich, wenn das Lager statt in Ort 1 im Ort 2 steht und entsprechend die Firma in 1?

2. In obigem Verkehrsnetz sollen die kï¿œrzesten Wege von jedem Ort zu jedem anderen Ort bestimmt werden. Verwenden Sie den Tripel-Algorithmus.

3. In obigem Verkehrsnetz sollen die Richtungen ignoriert werden. Bestimmen Sie die kï¿œrzesten Wege von jedem Ort zu jedem anderen Ort. Verwenden Sie den Tripel-Algorithmus.

4. In obigem Graphen sollen die Richtungen ignoriert werden. Bestimmen Sie den minimal spannenden Baum mit dem Kruskal-Algorithmus und mit dem Prim-Algorithmus und beginnen Sie bei diesem mit Knoten 1.

ï¿œbungsblatt 6

1. (aus [?]) Eine (etwas altertï¿œmliche) Liste fï¿œr die Erstellung einer EDV-Anlage kï¿œnnte so aussehen:

Vorgang	Beschreibung	Dauer	Vorgï¿œnger
A	Entwurf	10	-
B	Fertigung der Zentraleinheit	5	A
C	Bereitstellung der Ein- und Ausgabegerï¿œte	2	A
D	Erstellung der Grundsatzprogramme	4	A
E	Erstellung des Prï¿œfprogramms	4	D
F	Erstellung der Kundenprogramme	3	D
G	Funktionsprï¿œfung	2	B, C, E
H	Bereitstellung der Anschlussgerï¿œte	5	C
I	Auslieferung, Installation	1	F, G, H

Erstellen Sie einen Netzplan und bestimmen Sie den kritischen Pfad.

2. Ergï¿œnzen Sie den folgenden unvollstï¿œndig ausgefï¿œllten Netzplan und erstellen Sie eine Tabelle mit den Spalten „Vorgang“, „Dauer“ und „Vorgï¿œnger“.

Kennzeichen Sie den kritischen Pfad.

OR-Skript-Abb/NetzplanAufg.eps

ï¿œbungsblatt 7

1. (aus [?], andere Zahlen) Ein verschuldeter Fuï¿œballverein muss Spieler im Wert von 10Mio. ï¿œ verkaufen. Die Spieler haben diese Marktwerte im Mio.ï¿œ: 4, 3, 1, 2, 2, 5. Es muss mit folgenden Zuschauerverlusten bei jedem Verkauf gerechnet werden: 500, 300, 200, 300, 280, 600. Minimieren Sie den Schaden unter Einhaltung des Mindesterlï¿œses.

2. Aus drei verschiedenen Produkten A, B und C soll eine Futtermittelmischung hergestellt werden. Die Kosten pro ME betragen 10ï¿œ, 20ï¿œ und 15ï¿œ. In den Produkten sind die Nï¿œhrstoffe N_1 und N_2 enthalten. A enthï¿œlt 2 bzw. 3 ME. B enthï¿œlt 4 bzw. 2 ME. C enthï¿œlt 1 bzw. 5 ME. Die Mindestmenge von N_1 betrï¿œgt 30ME und von N_2 50 ME. Welche Mischung aus A, B und C ist herzustellen, um die Kosten zu minimieren?
   Stellen Sie ein mathematisches Modell auf und bestimmen Sie das Ausgangstableau.

3. (aus [?]) Ein Landwirt will auf maximal 40ha Boden Zuckerrï¿œben und Weizen anbauen. Er kann 2400ï¿œ und 312 Arbeitstage einsetzen. Die Anbaukosten fï¿œr Rï¿œben betragen 40ï¿œ/ha und fï¿œr Weizen 120ï¿œ/ha. Fï¿œr Rï¿œben werden 7 und fï¿œr Weizen 12 Arbeitstage/ha benï¿œtigt. Der Gewinn betrï¿œgt bei Rï¿œben 100ï¿œ/ha und bei Weizen 250ï¿œ/ha. Maximieren Sie den Gewinn.
   Stellen Sie das mathematische Modell auf, bestimmen Sie das Ausgangstableau und berechnen Sie die Zielfunktionszeile sowie die rechte Seite der ersten verbesserten Lï¿œsung von Hand. Bestimmen Sie die Optimallï¿œsung mit Hilfe eines Simplexrechners und interpretieren Sie die Werte der rechten Seite und der Zielfunktionszeile.
   Bestimmen Sie die Lï¿œsung zeichnerisch.

4. Ein Optimierungsproblem mit der Zielfunktion $G = 5x_1 + 3x_2 \rightarrow MAX$ mit den Bedingungen $x_1 \leqq 11$ und $4x_1 + 9x_2 \leqq 71$ hat sein Optimum bei $x_1 = 11$ und $x_2 = 3$ (ï¿œhnlich Aufg. 1 von Blatt 1). In welchem Bereich darf der

Zielfunktionskoeffizient $c_2 = 3$ variieren, so dass die optimale Lï¿œsung erhalten bleibt?

5. Vier Fabriken erzeugen ein Produkt, das von 6 Abnehmern gebraucht wird. Die Transportkosten pro Einheit sowie Kapazitï¿œt und Bedarf betragen:

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
F_1	3	8	3	9	8	12
F_2	1	3	4	10	13	8
F_3	6	4	6	5	6	4
F_4	19	12	8	9	7	7

Kapazitï¿œt	F_1	F_2	F_3	F_4		
	23	14	17	11		
Bedarf	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
	13	7	9	12	6	18

Bestimmen Sie den optimalen Transportplan mit einer geeigneten Methode Ihrer Wahl.

6. Diese und die darauf aufbauende nï¿œchste Aufgabe wurden in dieser Form neu aufgenommen. Die Lï¿œsungen kï¿œnnen noch fehlerhaft sein.
Eine Versicherung bietet eine flexible Kombinationsversicherung an, d.h. aus den Leistungen kann eine beliebige Kombination (jeweils ein Mal) gewï¿œhlt werden. Einzige Voraussetzung ist, dass mindestens zwei der angebotenen Leistungen in Anspruch genommen werden. Monatliche Beitrï¿œge sowie Maximalwert der Versicherung entsprechen folgender Tabelle (in ï¿œ):

	Beitrag	Deckungssumme	Wahrsch.	erwarteter Schaden
priv. Haftpflicht	10	10 Mio.	10%	500ï¿œ
Unfall	8	300000	1%	80000ï¿œ
Rechtsschutz	10	unbegrenzt	10%	8000ï¿œ
Gebï¿œude	40	400000	0,25%	500000ï¿œ
Hausrat	3	45000	0,3%	20000ï¿œ

Zusï¿œtzlich sind die persï¿œnliche Einschï¿œtzung einer Eintrittswahrscheinlichkeit und der zu erwartende Schaden angegeben.
Der Versicherungsnehmer plant, einen monatlichen Beitrag von (maximal) 40ï¿œ einzusetzen. Er mï¿œchte seinen Nutzen maximieren und berechnet diesen zu

$$Nutzen = Eintrittswahrscheinlichkeit * Schaden$$

(a) An welcher Stelle muss die Nutzenberechnung modifiziert werden, um sinnvoll zu sein?

(b) Mit welcher Optimierungsmethode wï¿œrden Sie die fï¿œr den Versicherungsnehmer optimale Zusammensetzung bestimmen?

(c) Stellen Sie geeignete Anfangstabellen auf. Berï¿œcksichtigen Sie das Ergebnis von Teilaufgabe (a).

(d) Optimieren Sie die Ausgangssituation ein Mal. Erklï¿œren Sie kurz die verwendete Methode.

7. Lï¿œsen Sie die vorhergehende Aufgabe mit folgenden ï¿œnderungen:

   - Die einzelnen Teilversicherungen kï¿œnnen in beliebigem Umfang abgeschlossen werden; d.h. es ist z.B. mï¿œglich, 1,5 Haftpflichtversicherungen abzuschlieï¿œen. Damit wï¿œre der monatliche Einsatz 15ï¿œ und die Deckungssumme wï¿œrde sich entsprechend auf 15Mio.ï¿œ erhï¿œhen.
   - Die Versicherungsgesellschaft hat jedoch die maximalen Deckungssummen begrenzt (auï¿œer Rechtsschutz):

	Beitrag	Deckungss./Max.	Wahrsch.	erwarteter Schaden
priv. Haftpflicht	10	10 Mio. / 20Mio.	10%	500ï¿œ
Unfall	8	300000 / 1Mio.	1%	80000ï¿œ
Rechtsschutz	10	unbegrenzt	10%	8000ï¿œ
Gebï¿œude	40	400000 / 1Mio.	0,25%	500000ï¿œ
Hausrat	3	45000 / 100000	0,3%	20000ï¿œ

   - auï¿œerdem gilt noch folgende Begrenzungen: Gebï¿œude+Hausrat maximal 1Mio.; d.h., wenn z.B. der Gebï¿œudeschutz vollstï¿œndig ausgenutzt wird, kann keine Hausratsversicherung mehr abgeschlossen werden.

8. Diese Aufgabe ist gegenï¿œber frï¿œher verï¿œndert. Die Lï¿œsung kann noch fehlerhaft sein.

   Eine Transportfirma hat in fï¿œnf Stï¿œdten je einen leeren LKW ï¿œbrig und benï¿œtigt diese in fï¿œnf anderen Stï¿œdten. Wie muss man die LKWs dirigieren, dass die gefahrene Gesamtstrecke mï¿œglichst minimal wird? Die Entfernung der Orte voneinander betrï¿œgt:

Ausgangsorte (unten) Bestimmungsorte (rechts)	1	2	3	4	5
1	6	3	11	13	16
2	2	4	17	9	7
3	12	9	4	8	6
4	9	11	9	7	14
5	6	8	9	3	3

26	Anfangslï¿œsung				
	0	1			
	1				
	0		1		
	0				1
	0			1	

Beginnen Sie mit der gegebenen (ungeschickten) Anfangslï¿œsung.
Beachten Sie: Ausgangs- und Bestimmungsorte sind jeweils von 1 bis 5 durchnummeriert. Die Orte unterscheiden sich.

9. Bestimmen Sie die kï¿œrzesten Wege von Knoten 1 zu allen anderen Knoten in folgendem Graph:

   Uebungen_skript/Abb/Baum_Blatt7_aufg7.eps

10. Vernachlï¿œssigen Sie die Richtungen im obigen Graphen und bestimmen Sie den minimal spannenden Baum. Hinweis: es gibt mehrere Lï¿œsungen mit der gleichen minimalen Gesamtgewichtung.

11. Sie haben eine Idee fï¿œr ein neues Produkt. Bis zur Markteinfï¿œhrung mï¿œssen folgende Schritte durchlaufen werden. Stellen Sie einen Netzplan auf und gehen Sie von einer mï¿œglichst schnellen Markteinfï¿œhrung aus. Bestimmen Sie den kritischen Pfad.

Vorgang	Tï¿œtigkeit	Zeit	Vorgï¿œnger
A	Machbarkeitsstudie	5	-
B	Produktentwicklung	5	A
C	Fertigung	10	B
D	Markteinfï¿œhrung	20	C, G
E	Planung der Kommunikationsstrategie	3	A
F	Erstellen der Pressemappen	5	E
G	Informieren der Presse	5	F

Literatur

[1] Domschke, Drexl
Einfï¿œhrung in Operations Research; Springer
Grundlegendes Lehrbuch, das die meisten Inhalte der Vorlesung abdeckt.

[2] Domschke, Drexl, Klein, Scholl, Voss
ï¿œbungen und Fallbeispiele zum Operations Research; Springer

[3] Ellinger, Beuermann, Leisten
Operations Research; Eine Einfï¿œhrung; Springer
Dieses Buch deckt nicht den gesamten Umfang der Vorlesung ab, die Erklï¿œrungen sind aber besonders anschaulich.

[4] Heinrich, Gert
Operations Research; Verlag Oldenburg
Die meisten Vorlesungsinhalte sind enthalten. Das Lehrbuch zeichnet sich durch vollstï¿œndig durchgerechnete Beispiele aus, an denen die einzelnen Schritte sehr gut nachvollzogen werden kï¿œnnen.

[5] Neumann, Klaus; Morlock, Martin
Operations Research; Verlag Hauser
Umfangreiches Lehrbuch mit vielen guten Erklï¿œrungen. Mathematisch exakt und damit in diesem Bereich teilweise etwas abstrakt. Enthï¿œlt auch Beweise.

[6] Zimmermann
Operations Research - Quantitative Methoden zur Entscheidungsvorbereitung, Verlag Oldenbourg
In einigen Kapiteln eine empfehlenswerte Ergï¿œnzung zu [?]

[7] Gohout
Operations Research; Verlag Oldenburg
Kurzes Lehrbuch, das besonders fï¿œr die Kapitel ?? bis ?? sehr zu empfehlen ist.

[8] Werners
Grundlagen des Operations Research; Springer