TERMINALE S
MATHÉMATIQUES

2018-2019

BAC BLANC

30 Novembre 2018

[durée : 3 heures]

⚠ **Documents autorisés :** *Aucun.*

Exercice 1 (triangles complexes)

On munit le plan du repère orthonormée $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. On considère l'équation :
$$(E) : \quad z^2 - 6z + c = 0$$
où c est un réel strictement supérieur à 9.
   a. Justifier que (E) admet deux solutions complexes non réelles.
   b. Justifier que les solutions de (E) sont $z_A = 3 + i\sqrt{c-9}$ et $z_B = 3 - i\sqrt{c-9}$
2. On note A et B les points d'affiches respectives z_A et z_B.
Justifier que le triangle OAB est isocèle en O.
3. Démontrer qu'il existe une valeur du réel c pour laquelle le triangle OAB est rectangle et déterminer cette valeur.

Exercice 2 (Un problème de cétacés)

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3000 cétacés dans cette réserve au 1er juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2000.

Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

— entre le 1er juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
— entre le 1er novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite (u_n). Selon ce modèle, pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre de cétacés au 1er juin de l'année $2017 + n$. On a donc $u_0 = 3000$.

a) Justifier que $u_1 = 2926$.

b) Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,95u_n + 76$.

c) À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite (u_n). Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	0	1	2	3	4	5	6	7
2	u_n	3000	2926	2856	2789	2725	2665	2608	2553

Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite (u_n) ?

d) (i) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1520$.

(ii) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

(iii) Justifier que la suite (u_n) est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.

e) On désigne par (v_n) la suite définie par, pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 1520$.

(i) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.

(ii) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1480 \times 0,95^n + 1520$.

(iii) Déterminer la limite de la suite (u_n).

f) Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2000.

```
n ← 0
u ← 3000
Tant que ...
    n ← ...
    u ← ...
Fin de Tant que
```

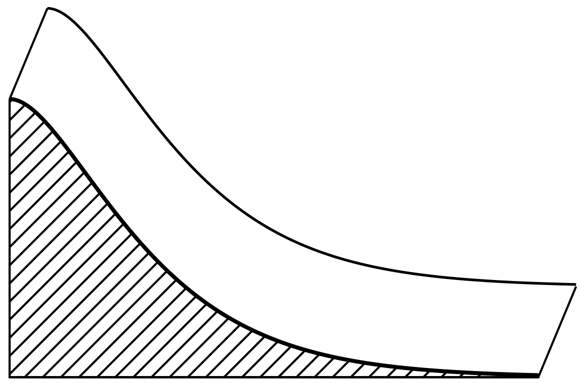
La notation « $\leftarrow$ » correspond à une affectation de valeur, ainsi « $n \leftarrow 0$ » signifie « Affecter à n la valeur 0 ».

g) La réserve marine fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de la fermeture.

Exercice 3 (Le toboggan des pandas)

Le directeur d'un zoo souhaite faire construire un toboggan pour les pandas. Il réalise le schéma suivant de ce toboggan en perspective cavalière.

Voici ce schéma :

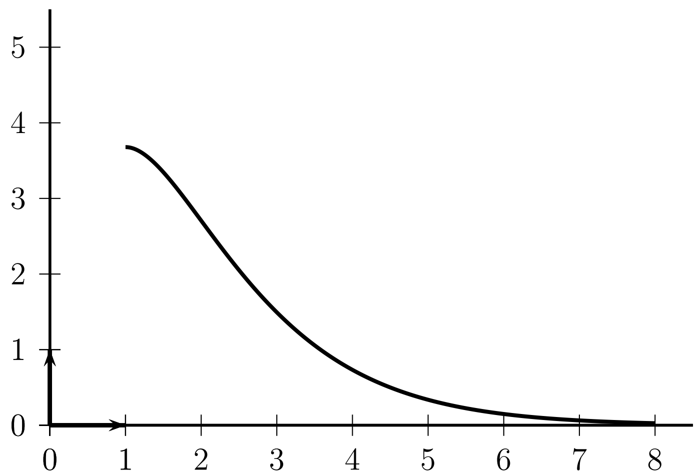


Partie A Modélisation

Le profil de ce toboggan est modélisé par la courbe $\mathcal{C}$ représentant la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;\,8]$ par

$$f(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{-x} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux entiers naturels.}$$

La courbe $\mathcal{C}$ est tracée ci-dessous dans un repère orthonormé dont l'unité est le mètre.



a) On souhaite que la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ en son point d'abscisse 1 soit horizontale.

Déterminer la valeur de l'entier b.

b) On souhaite que le haut du toboggan soit situé entre $3,5$ et 4 mètres de haut.

Déterminer la valeur de l'entier a.

Partie B Un aménagement pour les visiteurs

On admet dans la suite que la fonction f introduite dans la partie A est définie pour tout réel $x \in [1\ ;\ 8]$ par

$$f(x) = 10x\mathrm{e}^{-x}.$$

Le mur de soutènement du toboggan sera peint par un artiste sur une seule face, hachurée sur le schéma en début d'exercice. Sur le devis qu'il propose, celui-ci demande un forfait de 300 euros augmenté de 50 euros par mètre carré peint.

a) Soit g la fonction définie sur $[1\,;8]$ par

$$g(x) = 10(-x-1)\mathrm{e}^{-x}.$$

Déterminer la fonction dérivée de la fonction g.

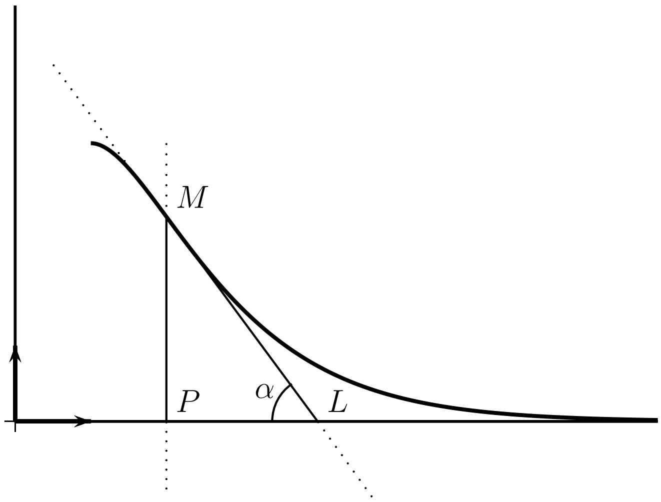
b) Quel est le montant du devis de l'artiste ?

Partie C Une contrainte à vérifier

Des raisons de sécurité imposent de limiter la pente maximale du toboggan.

On considère un point M de la courbe $\mathcal{C}$, d'abscisse différente de 1. On appelle α l'angle aigu formé par la tangente en M à $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses.

La figure suivante illustre la situation.



Les contraintes imposent que l'angle α soit inférieur à 55 degrés.

a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;8]$. On admet que, pour tout x de l'intervalle $[1\,;8]$, $f'(x) = 10(1-x)\mathrm{e}^{-x}$.

Étudier les variations de la fonction f' sur l'intervalle $[1\,;8]$.

b) Soit x un réel de l'intervalle $]1\,;\,8]$ et soit M le point d'abscisse x de la courbe $\mathcal{C}$. Justifier que $\tan\alpha = |f'(x)|$.

c) Le toboggan est-il conforme aux contraintes imposées ?