Terminale S

Mathématiques

2018-2019

Exercices de probabilité

Exercice 1 (Révision probabilités première S)

On se propose d'étudier le cas d'un lancer de dé. On prend un dé équilibré et on étudie les cas possibles, appelés issues de l'expérience.

a) Rappeler ce qu'est l'équiprobabilité, la loi uniforme. En déduire que l'expérience d'un lancer de dé suit une loi uniforme.

b) On définit les événements suivants :

A : « On obtient un nombre pair »
B : « On obtient le chiffre 5 »

i. Définir les évènements $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cup B$ et $\overline{A \cup B}$

ii. Calculer les probabilités des événements précédemment définis

c) On change l'expérience et on lance maintenant deux dés. On définit alors les événements :

A_i : « On obtient un nombre pair pour le dé i», $i = \{1, 2\}$
B_i : « On obtient le chiffre 5 pour le dé i », $i = \{1, 2\}$
C : « La somme des nombres des deux dés est paire »

i. Définir, puis calculer les événements $A_1 \cap B_2$, $\overline{A_1 \cap B_2}$ et calculer $P(C)$

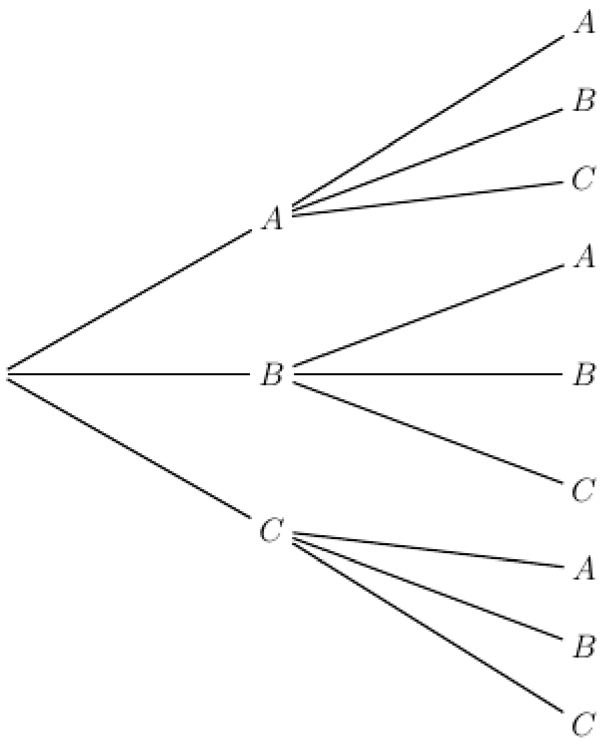
Exercice 2 (Ticket gagnant)

Un magasin organise un jeu. Chaque personne entrant dans le magasin reçoit un billet portant l'une des trois lettre : A, B ou C.

Pour chaque personne entrant dans le magasin, la probabilité de recevoir un billet portant la lettre A est $P(A) = 0.5$ et la probabilité de recevoir un billet portant la lettre B est $P(B) = 0.4$.

- Un billet A est perdant.
- Un billet B est un billet gagnant un stylo.
- Un billet C est un billet gagnant une montre.

Un couple rentre dans un magasin et chacune des deux personnes du couple reçoit un billet.



1) Reproduire et terminer l'arbre pondéré ci-contre représentant la situation.
2) Calculer la probabilité des événements suivants :

R : « Le couple ne gagne rien ».
G : « Le couple gagne deux montres ».
T : « Le couple gagne une montre et un stylo ».
S : « Le couple gagne uniquement un stylo »

Exercice 3 (Probabilités conditionnelles)

On rappelle que si deux événements sont dépendants, on note la probabilité de « A sachant B » : $P_B(A)$ et on définit alors cette probabilité par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

a) Montrer que $P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$ et $P(A \cap B) = P_B(A) \times P(B)$. En déduire la formule de bayes :

$$P_B(A) = \frac{P_A(B) \times P(A)}{P(B)}$$

b) Soient A et C deux événements correspondant à une même épreuve aléatoire.
On sait que $P(A) = 0.6$, $P(C) = 0.5$ et $P(A \cap C) = 0.18$.
Déterminer $P(\overline{A})$; $P_A(C)$, $P_A(\overline{C})$; $P(\overline{A} \cap C)$; $P_{\overline{A}}(C)$; $P_C(\overline{A})$, on pourra s'aider d'un arbre de probabilités.

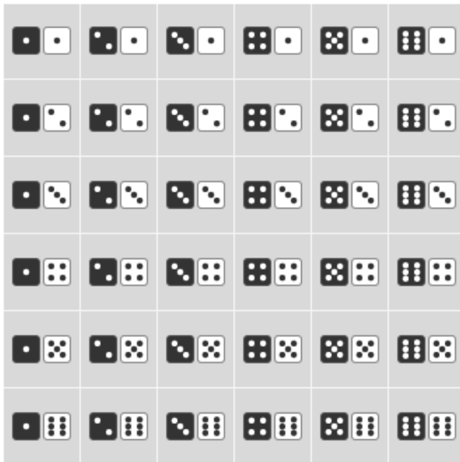
Exercice 4 (Indépendance)

Théorique

On dit que deux événements A et B sont indépendants si et seulement si : $P_B(A) = P(A)$ et $P_A(B) = P(B)$.
En déduire que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ si et seulement si ils sont indépendants.

Pratique

On lance deux dés à 6 faces non pipés. L'univers Ω des 36 éventualités associé à cette épreuve est représenté ci-contre.



a) Quelle est la probabilité $P(A)$ que le premier dé tombe sur 5 ?

b) Quelle est la probabilité $P(B)$ que le deuxième dé tombe sur 3 ?

c) Quelle est la probabilité $P(A \cap B)$ que le premier dé tombe sur 5 et le deuxième sur 3 ?

d) Quelle est la probabilité conditionnelle $P_A(B)$ que le deuxième dé tombe sur 3 sachant que le premier dé tombe sur 5 ?

e) A-t-on $P_A(B) = P(B)$? Les événements sont-ils indépendants ? *On pourrait de même montrer que $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.*

Exercice 5 (Annale)

Pour prévenir l'extension d'une épidémie virale, on décide de soumettre la population menacée à des tests. D'une façon générale, le résultat de chaque test est positif pour les porteurs du virus, négatif pour les personnes qui ne sont pas atteintes, mais il y a des exceptions. Le but de cet exercice est de comparer deux procédures de dépistage, l'une n'utilisant qu'un test, l'autre consistant en la succession de deux tests identiques réalisés indépendamment l'un de l'autre.
On choisit un individu X au hasard et on considère les événements suivants :

$$V : \text{« } X \text{ est porteur du virus».}$$
$$T : \text{« Le test est positif».}$$

et on a : $P(V) = 0.1$, $P_V(T) = 0.95$, $P_V(\overline{T}) = 0.05$ et $P_{\overline{V}}(T) = 0.03$.
(Il est préférable à ce stade de faire un schéma , un arbre, ou au moins de noter toutes les informations)

1. Dans cette question on étudie la procédure du contrôle qui n'utilise qu'un test.

   a) Calculer la probabilité des évènements suivants :

   A : « X est porteur du virus **et** le test appliqué à X est positif ».

   B : « X n'est pas porteur du virus **et** le test appliqué à X est positif ».

   En déduire la probabilité de T, puis celle de $\overline{T}$.

   b) Calculer la probabilité que X soit porteur du virus et que le test soit négatif.
   En déduire la probabilité que X soit porteur du virus sachant que le test appliqué à X est négatif.

2. On effectue maintenant deux tests identiques dans des conditions qui garantissent l'indépendance des résultats. On considère l'événement $\overline{T_2}$: « les résultats des deux tests appliqués à X sont négatifs ».

   a) Quelle est la probabilité de $\overline{T_2}$? Quelle est la probabilité que les deux tests soient négatifs sachant que X est porteur du virus ?

   b) Déduire de la question 2.a) la probabilité que X soit porteur du virus et que les deux tests soient négatifs, puis la probabilité que X soit porteur du virus sachant que les deux tests ont été négatifs.