DEVOIR SURVEILLÉ

2 Décembre 2018

[durée : 3 heures]

⚠ **Documents autorisés :** *Aucun.*

Exercice 1 (ROC)

On suppose connu le résultat suivant : pour tout réel x, on a $e^x > x$.

1) Soit φ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $\varphi(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

2) En déduire que $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

3) Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x}$

   a) Etudier la limite de la fonction f en $+\infty$

   b) Etudier les variations de la fonction f, puis dresser son tableau de variations sur $[0;+\infty[$.

Exercice 2 (Tangente)

On considére les fonction f et g définie pour tout réel x par $f(x) = e^x$ et $g(x) = 1 - e^{-x}$.
Les courbes représentatives de ces fonctions dans un repére orthogonal du plan, notées respectivement $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont fournies en annexe à rendre avec la copie.

Partie A

Ces courbes semblent admettre deux tangentes communes. Tracer aux mieux ces tangentes sur la figure de l'annexe.

Partie B

Dans cette partie, on admet l'existence de ces tangentes communes.
On note $\mathcal{D}$ l'une d'entre elles. Cette droite est tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse a et tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B d'abscisse b.

1) a) Exprimer en fonction de a le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.

   b) Exprimer en fonction de b le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B.

c) En déduire que $b = -a$.

2) Démontrer que le réel a est solution de l'équation $2(x-1)e^x + 1 = 0$.

Partie C

On considère la fonction $\varphi(x) = 2(x-1)e^x + 1$.

1) a) Calculer les limites de la fonction φ en $-\infty$ et $+\infty$.

b) Calculer la dérivée de la fonction φ, puis étudier son signe.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction φ sur $\mathbb{R}$. Préciser la valeur de $\varphi(0)$.

2) a) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

b) On note α la solution négative de l'équation $\varphi(x) = 0$ et β la solution positive de cette équation.
Donner une valeur approchée de $\varphi(-2)$ et $\varphi(1)$.
A l'aide de l'algorithme de dichotomie, donner un encadrement de α et β à 10^{-3}.

Exercice 3 Pour tout réel k strictement positif, on désigne par f_k la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f_k(x) = kxe^{-kx}$$

On note $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Partie A : Etude du cas $k = 1$

On considère donc la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par :

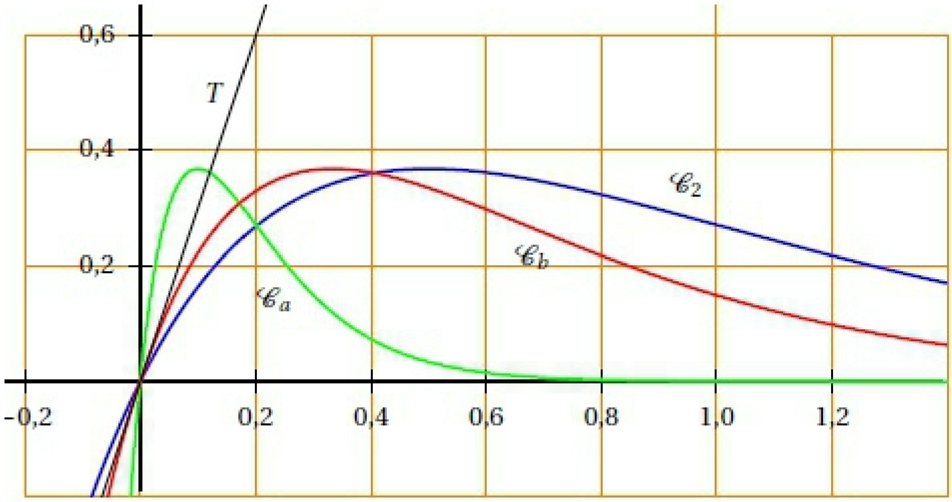
$$f_1(x) = xe^{-x}$$

1. Déterminer les limites de la fonction f_1 en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire que la courbe $\mathcal{C}_1$ admet une asymptote que l'on précisera.

2. Etudier les variations de f_1 sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

Partie B : Propriétés graphiques

On a représenté sur le graphique ci-dessous les courbes $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_b$ où a et b sont des réels strictement positifs fixés et T la tangente à $\mathcal{C}_b$ au point O origine du repère.



1. Montrer que pour tout réel k strictement positif, les courbes $\mathcal{C}_k$ passent par un même point.
2. a. Montrer que pour tout réel k strictement positif et pour tout réel x, on a :

$$f_k'(x) = k(1 - kx)e^{-kx}$$

   b. Justifier que, pour tout réel k strictement positif, f_k admet un maximum et calculer ce maximum.

   c. En observant le graphique ci-dessus, comparer a et 2. Expliquer la démarche.

   d. Ecrire une équation de la tangente à $\mathcal{C}_k$ au point O origine du repère.

   e. En déduire à l'aide du graphique une valeur approchée à b.

Annexe exercice 2