

Suites numériques

Terminale S

Définition

Une suite (u_n) peut-être définie :

- ✧ de manière explicite : $u_n = f(n)$
- ✧ de manière récurrente : $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Variations

- ✧ Si pour tout n , $u_{n+1} - u_n > 0$ ou $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors la suite (u_n) est strictement croissante
- ✧ Si pour tout n , $u_{n+1} - u_n < 0$ ou $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante

Suites arithmétiques

Récurrance : $u_{n+1} = u_n + r$ (de raison r)

Explicite : $u_n = u_0 + nr$ ou $u_n = u_p + (n - p)r$

Somme : nbre termes $\times \frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}$

$$S_n = u_0 + \dots + u_n = (n + 1) \times \frac{u_0 + u_n}{2}$$

Suites géométriques

Récurrance : $u_{n+1} = q \times u_n$ (de raison q)

Explicite : $u_n = u_0 \times q^n$ ou $u_n = u_p \times q^{(n-p)}$

Somme : premier terme $\times \frac{1 - q^{\text{nbre termes}}}{1 - q}$

$$S_n = 1 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

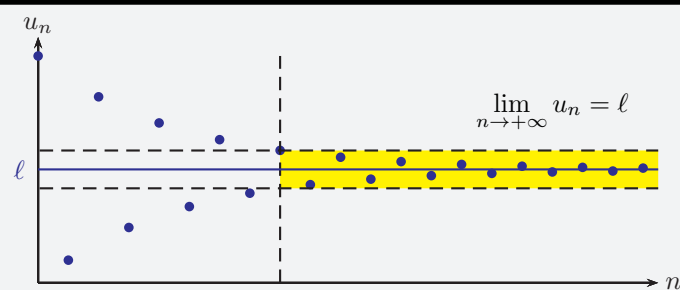
Raisonnement par récurrence

But : montrer qu'une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$

- ✧ Initialisation : on vérifie que la propriété est vraie au rang n_0
- ✧ Hérédité : on montre que si la propriété est vraie au rang n , alors elle est encore vraie au rang $n + 1$

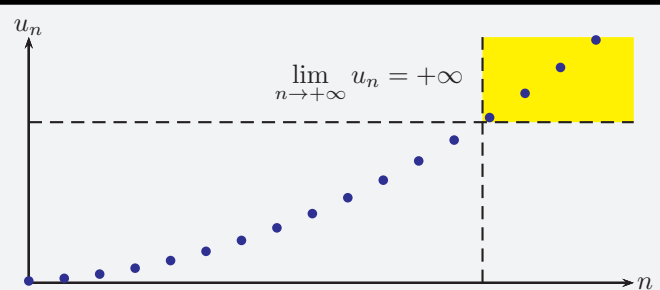
Conclusion : la propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$

Limite finie (convergence)



Ex : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n$ n'existe pas

Limite infinie (divergence)



Ex : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$

Théorèmes de comparaison

$(u_n), (v_n), (w_n)$ sont trois suites. Si à partir d'un rang :

- ✧ $u_n \leq v_n$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$
- ✧ $u_n \leq v_n$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$
- ✧ $u_n \leq v_n \leq w_n$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$

Limites d'une suite géométrique

- ✧ Si $q \leq -1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n$ n'existe pas
- ✧ Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$
- ✧ Si $q = 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$
- ✧ Si $q \geq 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

Convergence d'une suite monotone

Une suite (u_n) est majorée [resp. minorée] si, et seulement si, il existe un réel M [resp. m] tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$ [resp. $u_n \geq m$]. Si la suite est à la fois minorée et majorée, on dit qu'elle est bornée

- ✧ Toute suite croissante et majorée converge, toute suite décroissante et minorée converge
- ✧ Une suite croissante de limite ℓ est majorée par ℓ