参数统计教程习题解答

韦博成 周影辉 编著

前言

本习题解答是我们 2006 年在高等教育出版社出版的《参数统计教程》的配套参考书，读者对象与原书相同．正如我们在前言中所述，该书为概率统计专业的研究生教材，也可作为经济金融、生物医学、管理科学、工程技术等专业研究生的教学参考书，也可供相关专业的大学生、研究生、教师、科技人员和统计工作者参考．

为了便于读者学习和参考，今把《习题解答》的有关情况介绍如下．第一，《参数统计教程》共有习题 310 题，若以小题计，则超过 500 题．本书比较重视基本概念的介绍，因而分设为两章，分别介绍各种常见分布及相关问题；以及充分统计量与样本信息及相关问题；两章分别有习题 38 题和 28 题 (若以小题计，则合计接近 100 题)．“参数估计”是数理统计最重要、最核心的内容之一，因此本书分为 3 章，分别介绍了“点估计的基本方法”、“最优同变估计”以及“点估计的性质”，所以相应的习题较多，共有 106 题 (若以小题计，则接近 180 题)．另外，“假设检验”有 54 题；“区间估计”有 36 题．特别，由于 Bayes 统计已经成为当时最有发展前途的统计方法之一，本书第 8 章“ Bayes 统计基础”用较大篇幅作了较为系统和详尽的介绍，习题共有 48 题 (若以小题计，则接近 90 题)．因此，各章习题都比较丰富，足以使读者能够得到充分的基本训练，掌握和巩固本书的内容．第二，《参数统计教程》定位为“中等水平、便于阅读、内容充实、有一定特色”的教材．相应习题也与之相匹配，大部分习题都是中等水平的，其中一部分是作者自己设计的，主要目的是帮助读者进一步巩固和加深理解原书介绍的基本概念、基本原理和基本方法；少部分较难的习题 (标有 $*$ 号) 可作为正文内容的补充，亦可强化概念与方法．本书习题以基本理论题为主；但在第 6–8 章也配备了一些应用题．第三，《习题解答》给出了《参数统计教程》中全部习题的解答，并以该书介绍的理论与方法为依据，也与原书的例题保持一致．因此，读者对原书介绍的基本概念、基本原理和基本方法应该有较好的了解，才能使“题解”与“正文”起到相辅相成的作用．另外，我们在一些题解之后加了若干“注”，指出该题的其他解法或说明该题的统计意义，这也是我们这本《习题解答》的重要组成部分和特色之一．

由于作者水平有限，难免有不妥与谬误之处，恳请同行专家和广大读者提出批评和建议，以便我们进一步修订改正之用．

韦博成 周影辉
2008 年 9 月于东南大学

目 录

第一章　统计分布基础

1. 设 x_p 为 $F(x)$ 的 p 分位数，如定义 1.1.1 所述，证明：

(1) $F(x')<p$ 的充要条件为 $x'<x_p$；　$F(x')\geq p$ 的充要条件为 $x'\geq x_p$，是否有"$F(x')>p$ 的充要条件为 $x'>x_p$"？

(2) $F(x_p-0)\leq p\leq F(x_p)$；若 x_p 为 $F(x)$ 的连续点，则 $F(x_p)=p$；

(3) 若 $F(x'-0)>p$，则 $x'>x_p$。

证明. (1) 首先证明：　$F(x')<p$ 的充要条件为 $x'<x_p$。用反证法，假设 $x'<x_p$ 而 $F(x')\geq p$，则由分位数的定义可知 $x'\geq x_p$，这与 $x'<x_p$ 相矛盾，所以由 $x'<x_p$ 可得 $F(x')<p$；反之，若 $F(x')<p$ 而 $x'\geq x_p$，则由分布函数的单调性可知 $F(x')\geq F(x_p)\geq p$，这与 $F(x')<p$ 相矛盾，所以由 $F(x')<p$ 可得 $x'<x_p$。

其次证明：　$F(x')\geq p$ 的充要条件为 $x'\geq x_p$。若 $x'\geq x_p$，则由分布函数的单调性知 $F(x')\geq F(x_p)\geq p$；反之，若 $F(x')\geq p$，则由分位点的定义可知 $x'\geq x_p$。

最后说明"$F(x')>p$ 的充要条件为 $x'>x_p$"这一命题的充分性和必要性都是不正确的，例如对于离散型的二项分布 $X\sim b(n,\theta)$，令 $p=P\{X\leq i\}$，其中 $0<i<n$，i 为整数，则 $x_p=i$，一方面，对任意的 $x_p=i<x'<i+1$，显然有 $F(x')=p$，这表明命题的充分性不成立。另一方面，对任意满足 $P\{X\leq i-1\}<p_1<p$ 的 p_1，显然有 $F(x_p)>p_1$，而且 x_p 也是 p_1 分位数，即 $x_p=x_{p_1}$，这表明命题的必要性不成立。

(2) 由 (1) 可知，若 $x'<x_p$，则 $F(x')<p$，令 $x'\longrightarrow x_p-0$，则有 $F(x_p-0)\leq p$，所以 $F(x_p-0)\leq p\leq F(x_p)$。若 x_p 为 $F(x)$ 的连续点，则由上式可得 $F(x_p)=p$。

(3) 用反证法．若 $F(x'-0)>p$，而 $x'\leq x_p$，则由分布函数的单调性及 (2) 可知 $F(x'-0)\leq F(x_p-0)\leq p$，这与 $F(x'-0)>p$ 相矛盾．所以若 $F(x'-0)>p$，则必有 $x'>x_p$。 ∎

2. 设随机变量 X 和 Y 的分位数分别为 x_p 和 y_p，证明：

(1) 若 X 服从 Pascal 分布 $PA(\theta,r)$，Y 服从负二项分布 $NB(\theta,r)$，则 $x_p=y_p+r$；

(2) 若 X 服从 Γ 分布 $\Gamma(1/\sigma,k)$，则 $x_p=(\sigma/2)\chi^2(2k,p)$；其中 $\chi^2(2k,p)$ 表示自由度为 $2k$ 的卡方分布的 p 分位数；

(3) 若 X 服从极值分布 $EV(\alpha,\lambda)$，则 $x_p=(1/\alpha)(\log\lambda-\log\log p^{-1})$；

(4) 对于 F 分布：　$F(n,m;\alpha)=[F(m,n;1-\alpha)]^{-1}$。

证明. (1) 由 Pascal 分布和负二项分布的关系知 $X-r=Y$，设随机变量 X 和 Y 的分布函数分别为 $F(x)$ 和 $G(y)$，则有 $G(y)=F(y+r)$，由分位数的定义可得

$$\begin{aligned} y_p &= \inf\{y:G(y)\geq p\}=\inf\{y:F(y+r)\geq p\} \\ &= \inf\{x-r:F(x)\geq p\}=\inf\{x:F(x)\geq p\}-r \\ &= x_p-r. \end{aligned}$$

以上第二等式做了变换 $y+r=x$。

(2) 由 $X \sim \Gamma(\frac{1}{\sigma}, k)$ 可知 $Y=(2/\sigma)X \sim \chi^2(2k)$，仍记为 $X \sim F(x), Y \sim G(y)$，则有 $G(y)=F(\frac{\sigma}{2}y)$，又由分位数的定义可得

$$\begin{aligned}
\chi^2(2k,p)=y_p &= \inf\{y: G(y)\geq p\} = \inf\{y: F(\frac{\sigma}{2}y)\geq p\} \\
&= \inf\{\frac{2}{\sigma}x: F(x)\geq p\} = \frac{2}{\sigma}\inf\{x: F(x)\geq p\} \\
&= \frac{2}{\sigma}x_p.
\end{aligned}$$

以上第二等式做了变换 $(\sigma/2)y=x$，因此有 $x_p=(\sigma/2)\chi^2(2k,p)$。

注. 更一般地，我们有：若 $Y=\sigma X+\mu$，则 $y_p=\sigma x_p+\mu$；其中 $\sigma>0, \mu\in R$; y_p 和 x_p 分别是 Y 和 X 的 p 分位数. 事实上，仍记 $X \sim F(x), Y \sim G(y)$，则有 $G(y)=F(\frac{y-\mu}{\sigma})$，又由分位数的定义可得

$$\begin{aligned}
y_p &= \inf\{y: G(y)\geq p\} = \inf\{y: F(\frac{y-\mu}{\sigma})\geq p\} \\
&= \inf\{\sigma x+\mu: F(x)\geq p\} = \sigma\inf\{x: F(x)\geq p\}+\mu \\
&= \sigma x_p+\mu.
\end{aligned}$$

(3) 因为极值分布 $EV(\alpha,\lambda)$ 的分布函数 $F(x)=\exp\{-\lambda e^{-\alpha x}\}$ 连续，所以 x_p 满足方程 $F(x_p)=\exp\{-\lambda e^{-\alpha x_p}\}=p$，由该式反解可得 $\lambda e^{-\alpha x_p}=-\log p$，因而其 p 分位数为 $x_p=\frac{1}{\alpha}(\log\lambda-\log\log p^{-1})$。

(4) 设 $X\sim F(n,m)$，则 $Y=X^{-1}\sim F(m,n)$，记 $x_\alpha=F(n,m;\alpha)$，$y_\beta=F(m,n;\beta)$，由于 F 分布的分布函数连续，所以有

$$\begin{aligned}
P\{X\leq x_\alpha\}=\alpha &\iff P\{X^{-1}\geq x_\alpha^{-1}\}=\alpha \\
&\iff 1-P\{X^{-1}\leq x_\alpha^{-1}\}=\alpha \\
&\iff P\{X^{-1}\leq x_\alpha^{-1}\}=1-\alpha \\
&\iff x_\alpha^{-1}=y_{1-\alpha} \\
&\iff F(n,m;\alpha)=[F(m,n;1-\alpha)]^{-1}.
\end{aligned}$$

∎

3.★ 设 α 分位函数定义为

$$\rho_\alpha(t)=(\alpha-I\{t<0\})t=|t|[\alpha I\{t>0\}+(1-\alpha)I\{t<0\}],\ 0<\alpha<1,\ t\in R.$$

(1) 设随机变量 X 的概率密度函数为 $f(x;\alpha,\theta)=\alpha(1-\alpha)\exp\{-\rho_\alpha(x-\theta)\}$，证明：$X$ 的 α 分位数为 θ；

(2) 设 Y 为连续型随机变量，$g(\mu)=\mathrm{E}[\rho_\alpha(Y-\mu)]$ 关于一切 μ 存在，则当 $\mu=y_\alpha$ 时 $g(\mu)$ 达到最小值，其中 y_α 为 Y 的 α 分位数。

证明. (1) 随机变量 X 的密度函数为

$$f(x;\alpha,\theta)=\begin{cases}\alpha(1-\alpha)\exp\{-(1-\alpha)(\theta-x)\} & x\le\theta\\ \alpha(1-\alpha)\exp\{-\alpha(x-\theta)\} & x>\theta\end{cases}$$

由此易得其分布函数为

$$F(x;\alpha,\theta)=\begin{cases}\alpha\exp\{-(1-\alpha)(\theta-x)\} & x\le\theta\\ 1-(1-\alpha)\exp\{-\alpha(x-\theta)\} & x>\theta\end{cases}$$

显然，当且仅当 $x=\theta$ 时 $F(x;\alpha,\theta)=\alpha$，所以 X 的 α 分位数为 θ.

(2) 设 Y 的密度函数为 $f(y)$，则

$$\begin{aligned}g(\mu) &= \mathrm{E}[\rho_\alpha(Y-\mu)]=\int_{-\infty}^{\infty}\rho_\alpha(y-\mu)f(y)dy\\ &= \int_{\mu}^{\infty}\alpha(y-\mu)f(y)dy+\int_{-\infty}^{\mu}(1-\alpha)(\mu-y)f(y)dy\\ &= \alpha\int_{-\infty}^{\infty}(y-\mu)f(y)dy-\int_{-\infty}^{\mu}(y-\mu)f(y)dy\\ &= \alpha\mathrm{E}Y-\alpha\mu-\int_{-\infty}^{\mu}(y-\mu)f(y)dy\end{aligned}$$

对 $g(\mu)$ 求导得 $g'(\mu)=-\alpha+\int_{-\infty}^{\mu}f(y)dy$，令 $g'(\mu)=0$ 解得 $\alpha=\int_{-\infty}^{\mu}f(y)dy=F(\mu)$，从而 $\mu=y_\alpha$，由于 $g''(\mu)=f(\mu)>0$，所以 $g(\mu)$ 在 $\mu=y_\alpha$ 时达到最小值. ∎

注. 若 $\alpha=1/2$，则 $g(\mu)=(1/2)\mathrm{E}|Y-\mu|$， $\mu=y_{1/2}$ 时达到最小值，这一结果与本书定理 1.1.1 一致.

4. 设 $T(X)$ 为随机变量 X 的可测函数，$\mathrm{E}[T(X)-\theta]^2$ 在 $\theta\in[a,b]$ 上存在，记 $S(x)=T(x)$，若 $a\le T(x)\le b$； $S(x)=a$，若 $T(x)<a$； $S(x)=b$，若 $T(x)>b$，证明：$\mathrm{E}[S(X)-\theta]^2\le\mathrm{E}[T(X)-\theta]^2$.

证明. 设 $T(X)$ 的分布函数为 $F_T(t)$，由于

$$S(x)=\begin{cases}a & T(x)<a\\ T(X) & a\le T(x)\le b\\ b & T(x)>b\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[S(X)-\theta]^2 &= \int_{-\infty}^{a}(a-\theta)^2dF_T(t)+\int_a^b(t-\theta)^2dF_T(t)+\int_b^{+\infty}(b-\theta)^2dF_T(t)\\ &\le \int_{-\infty}^{a}(t-\theta)^2dF_T(t)+\int_a^b(t-\theta)^2dF_T(t)+\int_b^{+\infty}(t-\theta)^2dF_T(t)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}(t-\theta)^2dF_T(t)=\mathrm{E}[T(X)-\theta]^2\end{aligned}$$ ∎

5. 称随机变量 X 的分布关于某一点 ξ_0 对称，若其密度函数 $f(x)$ 满足 $f(\xi_0+x)=f(\xi_0-x)$，证明：

(1) X 的分布关于 ξ_0 对称的充要条件为 $X-\xi_0$ 的分布关于原点对称； X 的分布关于原点对称的充要条件为 X 与 $-X$ 同分布；

(2) 若 X 的分布关于 ξ_0 对称，则 $EX=\xi_0$； $\mathrm{E}(X-\xi_0)^{2k-1}=0$，其中 k 为正整数；

(3) 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为 $i.i.d.$ 样本，X_1 服从某一对称分布；则其样本均值 $\overline{X}=n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$ 与样本方差 $S^2=(n-1)^{-1}\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X})^2$ 不相关，即 $\mathrm{Cov}(\overline{X},S^2)=0$。

证明. (1) 设 $Y=X-\xi_0$ 的密度函数为 $g(y)$,则有 $g(y)=f(y+\xi_0)$。因此 $Y=X-\xi_0$ 的分布关于原点对称的充要条件 $g(y)=g(-y)$ 等价于 $f(y+\xi_0)=f(-y+\xi_0)$，而该式就是 X 的分布关于 ξ_0 对称的充要条件. 其次再证 X 的分布关于原点对称的充要条件为 X 与 $-X$ 同分布. 设 $Y=-X$ 的密度函数为 $g(y)$,则有 $g(y)=f(-y)$。由于 X 的分布关于原点对称的充要条件为 $f(x)=f(-x)$，这等价于 $f(-y)=f(y)$，也等价于 $Y=-X$ 的密度函数为 $g(y)=f(y)$，即 $Y=-X$ 与 X 同分布.

(2) 注意，若 X 的分布关于 ξ_0 对称，则密度函数 $f(\xi_0+x)$ 为偶函数，因此有

$$\begin{aligned}\mathrm{E}X &= \int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}(t+\xi_0)f(t+\xi_0)dt\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}tf(t+\xi_0)dt+\int_{-\infty}^{\infty}\xi_0 f(t+\xi_0)dt.\end{aligned}$$

其中第 2 个等号用到了变换 $x=t+\xi_0$。因为 $f(\xi_0+x)$ 为偶函数，所以 $tf(t+\xi_0)$ 是奇函数，从而

$$\mathrm{E}X=0+\int_{-\infty}^{\infty}\xi_0 f(t+\xi_0)dt=\int_{-\infty}^{\infty}\xi_0 f(x)dx=\xi_0.$$

同理，若令 $t=x-\xi_0$，则有

$$\mathrm{E}(X-\xi_0)^{2k-1}=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\xi_0)^{2k-1}f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}t^{2k-1}f(t+\xi_0)dt.$$

又因为 $t^{2k-1}f(t+\xi_0)$ 是奇函数，所以 $\mathrm{E}(X-\xi_0)^{2k-1}=0$。

(3) 不妨设 X_1 的密度函数为 $f(x_1)$，则由对称性可知 $f(\xi_0+x_1)=f(\xi_0-x_1)$，由 (1) 易得 $\mathrm{E}(\bar{X})=n^{-1}\sum_{i=1}^n \mathrm{E}X_i=\xi_0$，记 $s^2(x)=(n-1)^{-1}\sum_{i=1}^n(x_i-\bar{x})^2$，则有

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(\bar{X},S^2) &= \mathrm{E}[(\bar{X}-\xi_0)(S^2-\mathrm{E}S^2)]\\ &= \int_{R^n}(\bar{x}-\xi_0)[s^2(x)-\mathrm{E}S^2]f(x_1),\cdots,f(x_n)dx_1\cdots dx_n.\end{aligned}$$

今做变换 $x_i=t_i+\xi_0$， $i=1,2,\cdots,n$，则有 $\bar{x}-\xi_0=\bar{t}$， $s^2(x)=s^2(t)$，因此

$$\mathrm{Cov}(\bar{X},S^2)=\int_{R^n}\bar{t}\ [s^2(t)-\mathrm{E}S^2]f(t_1+\xi_0),\cdots,f(t_n+\xi_0)dt_1\cdots dt_n.$$

由定义可知 $s^2(-t)=s^2(t)$，因此 $[s^2(t)-\mathrm{E}S^2]$ 为 t 的偶函数，显然 $\bar{t}$ 为奇函数，因而以上被积函数是奇函数，所以 $\mathrm{Cov}(\bar{X},S^2)=0$。 ∎

6. 设随机变量 X 的 r 阶累积量为 $\mathcal{K}_r$，证明：

(1) 若 X,Y 独立，则有 $\mathcal{K}_r(X+Y)=\mathcal{K}_r(X)+\mathcal{K}_r(Y)$；

(2) $\mathcal{K}_r(X+C)=\mathcal{K}_r(X)$, $(r>1)$.

证明. (1) 由于 X 与 Y 独立，所以 $\varphi_{X+Y}(t)=\varphi_X(t)\varphi_Y(t)$，因此有 $\log\varphi_{X+Y}(t)=\log\varphi_X(t)+\log\varphi_Y(t)$，即

$$\sum_{r=1}^{\infty}\mathcal{K}_r(X+Y)\frac{(it)^r}{r!}=\sum_{r=1}^{\infty}\mathcal{K}_r(X)\frac{(it)^r}{r!}+\sum_{r=1}^{\infty}\mathcal{K}_r(Y)\frac{(it)^r}{r!}.$$

所以 $\mathcal{K}_r(X+Y)=\mathcal{K}_r(X)+\mathcal{K}_r(Y), r=1,2,\cdots$.

(2) 因为 $\varphi_{X+C}(t)=\varphi_X(t)e^{iCt}$，所以 $\log\varphi_{X+C}(t)=\log\varphi_X(t)+iCt$，即

$$\sum_{r=1}^{\infty}\mathcal{K}_r(X+C)\frac{(it)^r}{r!}=\sum_{r=2}^{\infty}\mathcal{K}_r(X)\frac{(it)^r}{r!}+(C+\mathcal{K}_1(X))it.$$

所以 $\mathcal{K}_r(X+C)=\mathcal{K}_r(X), r>1$; $\mathcal{K}_1(X+C)=\mathcal{K}_1(X)+C$. ∎

7. 设 ξ 为连续型正值随机变量，其分布函数为 $F(t)$， $F'(t)=f(t)$，记 $h(t)=f(t)/[1-F(t)]$，通常称 $h(t)$ 为危险率函数，证明

(1) $h(t)$ 表示 ξ 大于 t，但不超过 $t+\triangle t$ 的相对概率，或危险率：

$$h(t)=\lim_{\triangle t\to 0}\frac{P\{t<\xi\le t+\triangle t|\xi>t\}}{\triangle t};$$

(2) 危险率函数 $h(t)$ 与密度函数 $f(t)$ 有以下一一对应的关系：

$$f(t)=h(t)e^{-H(t)};\quad H(t)=\int_0^t h(x)dx.$$

证明. (1)

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta t\to 0}\frac{P\{t<\xi\le t+\Delta t|\xi>t\}}{\Delta t}\\&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t(1-F(t))}=\frac{F'(t)}{1-F(t)}\\&=\frac{f(t)}{1-F(t)}=h(t)\end{aligned}$$

(2) 对 $h(t)=f(t)/(1-F(t))$ 积分得

$$H(t)=\int_0^t h(u)du=\int_0^t\frac{-d(1-F(u))}{1-F(u)}=-\log(1-F(t)).$$

所以 $\log(1-F(t))=-H(t), 1-F(t)=e^{-H(t)}$，两边求导得 $-f(t)=e^{-H(t)}(-H'(t))$，即 $f(t)=h(t)e^{-H(t)}$. ∎

8. 设随机变量 X 服从 Poisson 分布 $P(\lambda)$，并已知事件 {X=0} 不可能发生，求此时 X 的分布 (截尾 Poisson 分布) 及其期望和方差.

解. 由于 $X>0$，所以对任意的正整数 k 有

$$P\{X=k|X>0\}=\frac{P\{X=k,X>0\}}{P\{X>0\}}=\frac{P\{X=k\}}{P\{X>0\}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}}{1-e^{-\lambda}} = \frac{\lambda^k}{k!(e^{\lambda}-1)}\\
\mathrm{E}(X|X>0) &= \sum_{k=1}^{\infty} k\cdot\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!(1-e^{-\lambda})} = \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\\
&= \frac{\lambda e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}\cdot e^{\lambda} = \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda}}\\
\mathrm{Var}(X|X>0) &= \mathrm{E}(X^2|X>0) - [\mathrm{E}(X|X>0)]^2
\end{aligned}
$$

而

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X^2|X>0) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2\cdot\frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^k}{k!(1-e^{-\lambda})} = \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\lambda^k}{(k-1)!}\\
&= \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)\lambda^{k+1}}{k!}\\
&= \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k\cdot\lambda^{k+1}}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{k!})\\
&= \frac{e^{-\lambda}}{1-e^{-\lambda}}(\lambda^2+\lambda)\cdot e^{\lambda} = \frac{\lambda^2+\lambda}{1-e^{-\lambda}}
\end{aligned}
$$

所以 $\mathrm{Var}(X|X>0) = \lambda[1-(1+\lambda)e^{-\lambda}]/(1-e^{-\lambda})^2$。 ∎

9. (1) 设 T 的期望和方差分别为 1 和 τ， $(N|T=t)$ 服从 Poisson 分布 $P(\lambda t)$，求 N 的期望与方差；

(2) 设 N 服从 Poisson 分布 $P(\lambda)$， $(X|N=n)$ 服从二项分布 $B(n,\theta)$，证明 X 服从 Poisson 分布 $P(\lambda\theta)$。

(1) **解**.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(N) &= \mathrm{E}_T\{\mathrm{E}(N|T)\} = \mathrm{E}_T(\lambda T) = \lambda\\
\mathrm{Var}(N) &= \mathrm{E}_T\{\mathrm{Var}(N|T)\} + \mathrm{Var}_T\{\mathrm{E}(N|T)\}\\
&= \mathrm{E}_T(\lambda T) + \mathrm{Var}_T(\lambda T)\\
&= \lambda + \lambda^2\tau
\end{aligned}
$$

(2) **证明**. X 的特征函数为

$$
\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \mathrm{E}(e^{iXt}) = \mathrm{E}_N\{\mathrm{E}(e^{i(X|N)t})\} = \mathrm{E}_N\{[(1-\theta)+\theta e^{it}]^N\}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}[(1-\theta)+\theta e^{it}]^n\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}\\
&= e^{\lambda[(1-\theta)+\theta e^{it}]}e^{-\lambda} = e^{\lambda\theta(e^{it}-1)}
\end{aligned}
$$

这与 Poisson 分布 $P(\lambda\theta)$ 的特征函数相同，由唯一性知 $X\sim P(\lambda\theta)$。 ∎

10. 设 T 服从 Γ 分布 $\Gamma(\lambda,\nu)$， $(X|T=t)$ 服从 Poisson 分布 $P(t)$，证明 X 服从负二项分布 $NB(\theta,\nu)$，其中 $\theta=\lambda/(1+\lambda)$；而 $(T|X=x)$ 服从 Γ 分布 $\Gamma(\lambda+1,x+\nu)$。 (提示：用特征函数证明 $X\sim NB(\theta,\nu)$)。

证明 X 的特征函数为

$$\begin{aligned}\varphi_X(s) &= \mathrm{E}(e^{iXs}) = \mathrm{E}_T\{\mathrm{E}(e^{i(X|T)s})\} = \mathrm{E}_T\{e^{T(e^{is}-1)}\} \\ &= \int_0^\infty \frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-\lambda t}\cdot t^{\nu-1}\cdot e^{t(e^{is}-1)}dt = \int_0^\infty \frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)} e^{-(\lambda+1-e^{is})t}\cdot t^{\nu-1}dt \\ &= \lambda^\nu/(\lambda+1-e^{is})^\nu = (\frac{\lambda}{1+\lambda})^\nu\cdot(1-\frac{1}{1+\lambda}e^{is})^{-\nu} \\ &= \theta^\nu[1-(1-\theta)e^{is}]^{-\nu}\end{aligned}$$

这与负二项分布 $NB(\theta,\nu)$ 的特征函数相同，因此由唯一性可知 $X\sim NB(\theta,\nu)$，其中 $\theta=\lambda/(1+\lambda)$。

另外，由于 (T,X) 的联合分布密度函数为

$$\begin{aligned}p(t,x) &= p(t)p(x|t) = \frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)}e^{-\lambda t}t^{\nu-1}\cdot e^{-t}\frac{t^x}{x!} \\ &= \frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)x!}e^{-(\lambda+1)t}t^{\nu+x-1}\end{aligned}$$

所以 $(T|X=x)$ 的密度函数为

$$\begin{aligned}p(t|x) &= p(t,x)/p(x) \\ &= \frac{\lambda^\nu}{\Gamma(\nu)x!}e^{-(\lambda+1)t}t^{\nu+x-1}\cdot\left[\binom{\nu+x-1}{x}(\frac{\lambda}{1+\lambda})^\nu(\frac{1}{1+\lambda})^x\right]^{-1} \\ &= \frac{(1+\lambda)^{\nu+x}}{\Gamma(\nu+x)}e^{-(1+\lambda)t}t^{\nu+x-1}\end{aligned}$$

这是 Γ 分布 $\Gamma(\lambda+1,\nu+x)$ 的密度函数，所以 $(T|X=x)$ 服从 Γ 分布 $\Gamma(\lambda+1,\nu+x)$。 ∎

11.* 设 X 服从二项分布，$P(X=i)=b(i|n,\theta)$，证明其分布函数 $F(i)=P(X\le i)$ 与不完全 β 函数 (见 (1.2.1) 式) 有以下关系：

$$\sum_{j=i}^n b(j|n,\theta) = I_\theta(i,n-i+1);$$

$$F(i) = 1-I_\theta(i+1,n-i) = I_{1-\theta}(n-i,i+1).$$

(提示：对第一式，令左端 $=f_1(\theta)$，右端 $=f_2(\theta)$，$f(\theta)=f_1(\theta)-f_2(\theta)$，易得 $f'(\theta)=0$，从而 $f(\theta)=0$；第 12，13 题的证明类似)。

证明 令 $f_1(\theta)=\sum_{j=i}^n b(j|n,\theta)$，$f_2(\theta)=I_\theta(i,n-i+1)$，$f(\theta)=f_1(\theta)-f_2(\theta)$，则

$$\begin{aligned}f(\theta) &= \sum_{j=i}^n \frac{n!}{j!(n-j)!}\theta^j(1-\theta)^{n-j} - \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\int_0^\theta x^{i-1}(1-x)^{n-i}dx \\ f'(\theta) &= \sum_{j=i}^n \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!}\theta^{j-1}(1-\theta)^{n-j} - \sum_{j=i}^{n-1}\frac{n!}{j!(n-j-1)!}\theta^j(1-\theta)^{n-j-1} \\ &\quad -\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}\theta^{i-1}(1-\theta)^{n-i} \\ &= \sum_{j=i+1}^n \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!}\theta^{j-1}(1-\theta)^{n-j} - \sum_{k=i+1}^n \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\theta^{k-1}(1-\theta)^{n-k} \\ &= 0\end{aligned}$$

所以 $f(\theta)\equiv c$， c 为常数，又因为 $f(0)=0$，且 $f(\theta)$ 在 $\theta=0$ 处连续，所以 $f(\theta)=0$，即 $\sum_{j=i}^{n} b(j|n,\theta)=I_\theta(i,n-i+1)$。

另外，由于

$$\begin{aligned}
F(i) &= \sum_{j=1}^{i} b(j|n,\theta) = 1-\sum_{j=i+1}^{n} b(j|n,\theta)\\
&= 1-I_\theta(i+1,n-i)
\end{aligned}$$

为计算 $I_\theta(i+1,n-i)$，做变换 $x=1-y$，则有

$$\begin{aligned}
I_\theta(i+1,n-i) &= \frac{1}{\beta(i+1,n-i)}\int_0^\theta x^i(1-x)^{n-i-1}dx\\
&= \frac{1}{\beta(i+1,n-i)}\int_1^{1-\theta}(1-y)^i y^{n-i-1}(-dy)\\
&= \frac{1}{\beta(i+1,n-i)}[\int_0^1 y^{n-i-1}(1-y)^i dy-\int_0^{1-\theta} y^{n-i-1}(1-y)^i dy]\\
&= 1-\frac{1}{\beta(n-i,i+1)}\int_0^{1-\theta} y^{n-i-1}(1-y)^i dy\\
&= 1-I_{1-\theta}(n-i,i+1)
\end{aligned}$$

所以 $F(i)=1-I_\theta(i+1,n-i)=I_{1-\theta}(n-i,i+1)$。 $\blacksquare$

12.* 若 X 服从负二项分布 $NB(\theta,r)$，则其分布函数 $F(i)=P(X\le i)$ 可由不完全 β 函数表示为 $I_\theta(r,\ i+1)$。

证明. 令

$$\begin{aligned}
f_1(\theta) &= F(i)=P(X\le i)=\sum_{k=0}^{i}\binom{k+r-1}{k}\theta^r(1-\theta)^k,\\
f_2(\theta) &= I_\theta(r,i+1)=\frac{1}{\beta(r,i+1)}\int_0^\theta x^{r-1}(1-x)^i dx,\\
f(\theta) &= f_1(\theta)-f_2(\theta)
\end{aligned}$$

下面我们用数学归纳法证明：对任意的自然数 i 有 $f'(\theta)=0$。

当 $i=0$ 时， $f'(\theta)=f_1'(\theta)-f_2'(\theta)=r\theta^{r-1}-r\theta^{r-1}=0$；

当 $i=1$ 时，

$$\begin{aligned}
f'(\theta) &= f_1'(\theta)-f_2'(\theta)\\
&= [r\theta^{r-1}+r\cdot r\theta^{r-1}(1-\theta)-r\theta^r]-r(r+1)\theta^{r-1}(1-\theta)\\
&= 0;
\end{aligned}$$

假设当 $i=m$ 时， $f'(\theta)=0$，

那么，当 $i=m+1$ 时，我们有

$$\begin{aligned}
f'(\theta) = & [\sum_{k=0}^{m}\binom{k+r-1}{k}\theta^r(1-\theta)^k]'+[\binom{m+1+r-1}{m+1}\theta^r(1-\theta)^{m+1}]'\\
&-\frac{1}{\beta(r,m+2)}\theta^{r-1}(1-\theta)^{m+1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= [F'(m) - I'_\theta(r, m+1)] + \frac{(m+r)!}{m!(r-1)!}\theta^{r-1}(1-\theta)^m \\
&\quad + \binom{m+r}{m+1} r\theta^{r-1}(1-\theta)^{m+1} - \binom{m+r}{m+1}\theta^r(m+1)(1-\theta)^m \\
&\quad - \frac{(m+r+1)!}{(m+1)!(r-1)!}\theta^{r-1}(1-\theta)^{m+1} \\
&= 0 + \frac{(m+r)!}{m!(r-1)!}\theta^{r-1}(1-\theta)^m \\
&\quad + \frac{(m+r)!}{(m+1)!(r-1)!} r\theta^{r-1}(1-\theta)^{m+1} - \frac{(m+r)!}{(m+1)!(r-1)!}\theta^r(m+1)(1-\theta)^m \\
&\quad - \frac{(m+r+1)!}{(m+1)!(r-1)!}\theta^{r-1}(1-\theta)^{m+1} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

最后一式各项加以合并，经简单计算，即可得到 $f'(\theta) = 0$。综上所述，根据数学归纳法，对任意自然数 i 有 $f'(\theta) = 0$; 又因 $f(0) = 0$，而且 $f(\theta)$ 在 $\theta = 0$ 处连续，所以 $f(\theta) = 0$，即 $F(i) = P(X \le i) = I_\theta(r, i+1)$。 ∎

13.* 设 X 服从 Poisson 分布 $P(\lambda)$，则其分布函数 $F(i) = P(X \le i)$ 可由不完全 Γ 函数 $\Gamma(\lambda,\ i+1)$ 表示为

$$
F(i) = \sum_{k=0}^{i} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = \int_\lambda^\infty e^{-x}x^i dx/\Gamma(i+1) \triangleq \Gamma(\lambda,\ i+1).
$$

证明. 令

$$
\begin{aligned}
f_1(\lambda) &= F(i) = \sum_{k=0}^{i} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, \\
f_2(\lambda) &= \Gamma(\lambda, i+1) = \frac{1}{\Gamma(i+1)}\int_\lambda^\infty e^{-x}x^i dx, \\
f(\lambda) &= f_1(\lambda) - f_2(\lambda).
\end{aligned}
$$

则

$$
\begin{aligned}
f'(\lambda) &= \sum_{k=1}^{i} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} - \sum_{k=0}^{i} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} + e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \\
&= \sum_{k=0}^{i-1} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} - \sum_{k=0}^{i} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} + e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

所以 $f(\lambda) \equiv c$，为常数，又因为 $f(0) = 1 - 1 = 0$，而且 $f(\lambda)$ 在 $\lambda = 0$ 处连续，所以 $f(\lambda) \equiv 0$，即 $F(i) = \Gamma(\lambda, i+1)$。 ∎

14. 若 $X_i \sim P(\lambda_i)$, $i = 1, \cdots, k$ 相互独立，则 $\{(X_1, \cdots, X_k) | X_1 + \cdots + X_k = n\} \sim MN(n, \pi)$，其中 $\pi = (\pi_1, \cdots, \pi_k)^T$, $\pi_i = \lambda_i / \sum_{j=1}^k \lambda_j$。

证明.

$$
P\{(X_1 = x_1, \cdots, X_k = x_k) | X_1 + \cdots, X_k = n\}
$$

$$
\begin{aligned}
&= P\{X_1 = x_1, \cdots, X_k = x_k, \sum_{i=1}^{k} x_i = n\} / P\{X_1 + \cdots, X_k = n\} \\
&= [e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^{x_1}}{x_1!} \cdots e^{-\lambda_k}\frac{\lambda_k^{x_k}}{x_k!}] / [e^{-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i}\frac{(\sum_{i=1}^{k}\lambda_i)^n}{n!}] \\
&= \frac{n!}{x_1!\cdots x_k!}(\frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i})^{x_1}\cdots(\frac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^{k}\lambda_i})^{x_k} \qquad (\text{其中} \sum_{i=1}^{k} x_i = n)
\end{aligned}
$$

所以 $\{(X_1, \cdots, X_k) | X_1 + \cdots + X_k = n\}$ 服从多项分布 $MN(n, \pi)$，其中 $\pi = (\pi_1, \cdots, \pi_k)^T$，而 $\pi_i = \lambda_i / \sum_{j=1}^{k}\lambda_j,\ i = 1, \cdots, k$。 ∎

15.★ 设 $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数，证明：

(1) 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则 $\mathrm{E}[\Phi(X)] = \Phi(\frac{\mu}{\sqrt{1+\sigma^2}})$ (提示：把 $\mathrm{E}[\Phi(X)]$ 表示为二重积分；或令 $I(\mu) = \mathrm{E}[\Phi(X)]$，在积分号下对 μ 求导，再对 μ 积分； (2) 和 (3) 类似)；

(2) 若 $X \sim (\chi^2(1))^{1/2}$，则 $\mathrm{E}[\Phi(X)] = 3/4$；

(3) 若 $X \sim N(0,1)$，则相关系数 $\rho(X,\ \Phi(X)) = \sqrt{3/\pi}$。

证明. (1) 今记正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ 的密度函数为 $\varphi_{(\mu,\sigma)}(\cdot)$， 则有

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[\Phi(X)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)\varphi_{(\mu,\sigma)}(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{x} \varphi_{(0,1)}(y)dy\varphi_{(\mu,\sigma)}(x)dx.
\end{aligned}
$$

若记 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$， $Y \sim N(0,1)$，则由上可得

$$\mathrm{E}[\Phi(X)] = P\{-\infty < X < +\infty;\ -\infty < Y < X\} = P\{Y < X\} = P\{Y - X < 0\}.$$

而 $Y - X \sim N(-\mu, 1+\sigma^2)$， $(Y - X + \mu)/\sqrt{1+\sigma^2} \sim N(0,1)$，因此有

$$\mathrm{E}[\Phi(X)] = P\{\frac{Y - X + \mu}{\sqrt{1+\sigma^2}} < \frac{\mu}{\sqrt{1+\sigma^2}}\} = \Phi(\frac{\mu}{\sqrt{1+\sigma^2}}).$$

注. 本题亦可证明如下，令 $\mathrm{E}[\Phi(X)] = I(\mu)$，即把 $\mathrm{E}[\Phi(X)]$ 看作 μ 的函数，则有

$$I(\mu) = \mathrm{E}[\Phi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x)\frac{1}{\sigma}\phi(\frac{x-\mu}{\sigma})dx$$

其中 $\phi(.)$ 是标准正态分布 $N(0,1)$ 的密度函数，作变换 $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$，则

$$I(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\mu + \sigma t)\phi(t)dt$$

上式满足积分号下对 μ 求导的条件，因此有

$$I'(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{1+\sigma^2}}\exp\{-\frac{\mu^2}{2(1+\sigma^2)}\}.$$

该式再积分即可得到 $\mathrm{E}[\Phi(X)] = \Phi(\frac{\mu}{\sqrt{1+\sigma^2}})$。

(2) X 的密度函数为 $f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}I\{x>0\}$，因此有

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[\Phi(X)] &= \int_0^{+\infty}\Phi(x)\sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx \\
&= 2\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{x}\varphi_{(0,1)}(y)dy\varphi_{(0,1)}(x)dx. \\
&= 2P\{0<X<+\infty;\ -\infty<Y<X\};\ \ (X\sim N(0,1),\ Y\sim N(0,1)) \\
&= 2P\{0<X;\ 0<Y<X\}+2P\{0<X;\ Y<X;\ Y<0\} \\
&= 2P\{0<X;\ 0<Y<X\}+2P\{0<X;\ Y<0\}.
\end{aligned}$$

由对称性可知

$$P\{0<X;\ Y<0\}=P\{0<X;\ Y>0\}=\frac{1}{2}P\{0<X\}=\frac{1}{4};$$

$$P\{0<X;\ 0<Y<X\}=P\{0<X;\ Y>X\}=\frac{1}{2}P\{0<X;\ 0<Y\}=\frac{1}{8}.$$

代入上式可得 $\mathrm{E}[\Phi(X)]=3/4$。

注. 本题亦可证明如下，令 $I(\sigma)=\int_0^\infty\Phi(\sigma x)f(x)dx\ \ (\sigma\ge 0)$，则有 $I(1)=\mathrm{E}[\Phi(X)]$，对 $I(\sigma)$ 求导再积分，即可得到 $I(1)=3/4$。

(3) 由于 $X\sim N(0,1)$，因此 $Y=\Phi(X)\sim R(0,1)$，所以有 $\mathrm{Var}(\Phi(X))=1/12$，

$$\begin{aligned}
\rho(X,\Phi(X)) &= \mathrm{Cov}(X,\Phi(X))/\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(\Phi(X))} \\
&= [\mathrm{E}(X\Phi(X))-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(\Phi(X))]/\sqrt{1\cdot 1/12} \\
&= 2\sqrt{3}\mathrm{E}[X\Phi(X)].
\end{aligned}$$

以下应用类似的方法计算 $\mathrm{E}[X\Phi(X)]$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X\Phi(X)] &= \int_{-\infty}^{+\infty}x\Phi(x)\varphi_{(0,1)}(x)dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{x}x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx.
\end{aligned}$$

以上积分交换次序可得

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X\Phi(X)] &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{y}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}xe^{-\frac{x^2}{2}}dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\int_{y}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}xe^{-\frac{x^2}{2}}dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}.
\end{aligned}$$

代入上式可得 $\rho(X,\Phi(X))=\sqrt{3/\pi}$。 ∎

16. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为 *i.i.d.* 样本，若 $X_1\sim N(\mu,1)$，其样本均值 $\overline{X}=n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$，$\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数，求 α，使 $\mathrm{E}[\Phi(\alpha\overline{X})]=\Phi(\mu)$。

解. 由于 $\overline{X} \sim N(\mu, 1/n)$，所以 $\alpha\overline{X} \sim N(\alpha\mu, \alpha^2/n)$，由第 15 题第 (1) 小题的结论知：

$$\mathrm{E}[\Phi(\alpha\overline{X})] = \Phi(\alpha\mu/\sqrt{1+\alpha^2/n})$$

要使其等于 $\Phi(\mu)$，则需 $\alpha/\sqrt{1+\alpha^2/n} = 1 \quad (\alpha > 0)$，由此解得 $\alpha = \sqrt{n/(n-1)}$，即 $\mathrm{E}[\Phi(\sqrt{n/(n-1)}\,\overline{X})] = \Phi(\mu)$。 ∎

17. 设 X_1, X_2, X_3 为 *i.i.d.* 样本，且 $X_1 \sim \mathrm{E}(\lambda)$。

(1) 令 $Y_1 = X_1 + X_2 + X_3$, $Y_2 = \frac{X_1}{X_1+X_2}$, $Y_3 = \frac{X_1+X_2}{X_1+X_2+X_3}$，求 (Y_1, Y_2, Y_3) 的联合密度函数，并判断 Y_1, Y_2, Y_3 是否独立；

(2) 令 $Z_1 = X_1/Y_1$, $Z_2 = X_2/Y_1$，求 (Z_1, Z_2) 的联合密度函数。

解. (1) 作变换 $\begin{cases} Y_1 = X_1 + X_2 + X_3 \\ Y_2 = \frac{X_1}{X_1+X_2} \\ Y_3 = \frac{X_1+X_2}{X_1+X_2+X_3} \end{cases}$ 则 $\begin{cases} X_1 = Y_1Y_2Y_3 \\ X_2 = Y_1Y_3 - Y_1Y_2Y_3, \\ X_3 = Y_1 - Y_1Y_3 \end{cases}$

所以变换 Jacobi 为 $\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(y_1,y_2,y_3)^T} = y_1^2y_3$，由

$$f(x_1, x_2, x_3) = \lambda^3 e^{-\lambda(x_1+x_2+x_3)} I\{x_{(1)} \geq 0\}$$

可得

$$f(y_1, y_2, y_3) = \lambda^3 e^{-\lambda y_1} y_1^2 y_3 I\{y_1 \geq 0;\ 0 \leq y_2,\ y_3 \leq 1\}.$$

又因为

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 + X_2 + X_3 \sim \Gamma(\lambda, 3), \quad \text{即 } f(y_1) = \frac{1}{2}\lambda^3 e^{-\lambda y_1} y_1^2 \cdot I\{y_1 \geq 0\}, \\ Y_2 &= \frac{X_1}{X_1+X_2} \sim BE(1,1), \qquad \text{即 } f(y_2) = 1 \cdot I\{0 \leq y_2 \leq 1\}, \\ Y_3 &= \frac{X_1+X_2}{X_1+X_2+X_3} \sim BE(2,1), \quad \text{即 } f(y_3) = 2y_3 \cdot I\{0 \leq y_3 \leq 1\}. \end{aligned}$$

这时有 $f(y_1, y_2, y_3) = f(y_1)f(y_2)f(y_3)$，所以 Y_1, Y_2, Y_3 独立。

(2) 作变换 $\begin{cases} Z_1 = X_1/Y_1 \\ Z_2 = X_2/Y_1 \\ Z_3 = Y_1 \end{cases}$ 则 $\begin{cases} X_1 = Z_1Z_3 \\ X_2 = Z_2Z_3 \\ X_3 = Z_3 - X_1 - X_2 = (1 - Z_1 - Z_2)Z_3 \end{cases}$

所以变换 Jacobi 为 $\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(z_1,z_2,z_3)^T} = z_3^2$，由

$$f(x_1, x_2, x_3) = \lambda^3 e^{-\lambda(x_1+x_2+x_3)} I\{x_i \geq 0, i = 1, 2, 3\}$$

得

$$f(z_1, z_2, z_3) = \lambda^3 e^{-\lambda z_3} \cdot z_3^2 I\{0 \leq z_1, z_2;\ z_1 + z_2 \leq 1;\ z_3 \geq 0\}.$$

所以 (Z_1, Z_2) 的联合密度函数为

$$f(z_1, z_2) = \int_0^\infty f(z_1, z_2, z_3)dz_3 = 2I\{0 \leq z_1, z_2;\ z_1 + z_2 \leq 1\}.$$

∎

18. (1) 设 $X \sim \Gamma(1,\alpha_1)$，$Y \sim \Gamma(1,\alpha_2)$，且 X 与 Y 独立. 证明：$X+Y$ 与 X/Y 独立;

(2) 设 X_1, X_2 独立同分布，$X_1 \sim BE(n,1)$，令 $Y = X_{(1)}/X_{(2)}$, $Z = X_{(2)}$, 证明：Y 与 Z 独立.

证明. (1) 作变换 $\begin{cases} U = X+Y \\ V = X/Y \end{cases}$ 则 $\begin{cases} X = \frac{UV}{1+V} \\ Y = \frac{U}{1+V} \end{cases}$

所以变换 Jacobi 为 $|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)^T}| = \frac{u}{(1+v)^2}$，由

$$f(x,y) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-(x+y)} x^{\alpha_1-1} y^{\alpha_2-1} I\{x \ge 0, y \ge 0\}$$

得

$$\begin{aligned} f(u,v) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} e^{-u} (\frac{uv}{1+v})^{\alpha_1-1} (\frac{u}{1+v})^{\alpha_2-1} \frac{u}{(1+v)^2} \cdot I\{u>0\} \cdot I\{v>0\} \\ &= \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)} e^{-u} u^{\alpha_1+\alpha_2-1} \cdot I\{u>0\}\right) \times \\ &\quad \left(\frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \cdot v^{\alpha_1-1}(1+v)^{-(\alpha_1+\alpha_2)} \cdot I\{v>0\}\right) \\ &= f(u)f(v) \end{aligned}$$

所以 U 与 V 独立，即 $X+Y$ 与 X/Y 独立.

(2) 作变换 $\begin{cases} Y = X_{(1)}/X_{(2)} \\ Z = X_{(2)} \end{cases}$ 则 $\begin{cases} X_{(1)} = YZ \\ X_{(2)} = Z \end{cases}$

所以变换 Jacobi 为 $\frac{\partial(x_{(1)},x_{(2)})}{\partial(y,z)^T} = z$，由

$$f(x_{(1)}, x_{(2)}) = 2n^2 x_{(1)}^{n-1} x_{(2)}^{n-1} I\{0 \le x_{(1)} \le x_{(2)} \le 1\}$$

可得

$$\begin{aligned} f(y,z) &= 2n^2 (yz)^{n-1} z^{n-1} \cdot z \cdot I\{0 \le y, z \le 1\} \\ &= (ny^{n-1} I\{0 \le y \le 1\}) \cdot (2nz^{2n-1} I\{0 \le z \le 1\}) \\ &= f(y)f(z) \end{aligned}$$

所以 Y 与 Z 独立，并且 $Y \sim BE(n,1)$，$Z \sim BE(2n,1)$. ∎

19.* 设 $X_1, \cdots, X_m$, 独立，$X_i \sim \chi^2(n_i)$, $i = 1, \cdots, m$，令 $U_1 = \frac{X_1}{X_1+X_2}, U_2 = \frac{X_1+X_2}{X_1+X_2+X_3}$, $\cdots, U_{m-1} = \frac{X_1+\cdots+X_{m-1}}{X_1+\cdots+X_m}$，证明：$U_1, \cdots, U_{m-1}$ 相互独立，且 $U_i \sim \beta(\frac{n_1+\cdots+n_i}{2}, \frac{n_{i+1}}{2})$, $i = 1, \cdots, m-1$ (提示：令 $U_m = X_1 + \cdots + X_m$，作变换 $X_1 = U_1 \cdots U_m$, $X_2 = U_2 \cdots U_m - U_1 \cdots U_m$, $\cdots, X_m = U_m - U_{m-1}U_m$).

证明. 令 $U_m = X_1 + \cdots + X_m$，则 $\begin{cases} X_1 = U_1 \cdots U_m \\ X_2 = U_2 \cdots U_m - U_1 \cdots U_m \\ \quad \vdots \\ X_m = U_m - U_{m-1}U_m \end{cases}$

再令 $S_t = U_tU_{t+1}\cdots U_m, t = 1, 2, \cdots, m$，则 $\begin{cases} X_1 = S_1 \\ X_2 = S_2 - S_1 \\ \quad\vdots \\ X_m = S_m - S_{m-1} \end{cases}$

所以变换的 Jacobi 行列式为

$$J = \frac{\partial(x_1, \cdots, x_m)}{\partial(u_1, \cdots, u_m)^T} = \begin{vmatrix} \frac{s_1}{u_1} & \frac{s_1}{u_2} & \frac{s_1}{u_3} & \cdots & \frac{s_1}{u_m} \\ -\frac{s_1}{u_1} & \frac{s_2 - s_1}{u_2} & \frac{s_2 - s_1}{u_3} & \cdots & \frac{s_2 - s_1}{u_m} \\ 0 & -\frac{s_2}{u_2} & \frac{s_3 - s_2}{u_3} & \cdots & \frac{s_3 - s_2}{u_m} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & -\frac{s_{m-1}}{u_{m-1}} & \frac{s_m - s_{m-1}}{u_m} \end{vmatrix}$$

行列式的第一行加到第二行；然后第二行加到第三行； ⋯；如此继续可得

$$J = \frac{s_1}{u_1}\frac{s_2}{u_2}\cdots\frac{s_m}{u_m} = s_2\cdots s_m = \prod_{i=2}^{m} u_i^{i-1}$$

因为

$$f(x_1, \cdots, x_m) = \left(\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{2^{\frac{n_i}{2}}\Gamma(\frac{n_i}{2})}\right)\cdot\exp\{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}x_i\}\prod_{i=1}^{m}x_i^{\frac{n_i}{2}-1}.$$

注意到 $x_i = s_i - s_{i-1} = (1 - u_{i-1})u_iu_{i+1}\cdots u_m$，$\sum_{i=1}^m x_i = s_m = u_m$，因此有

$$\prod_{i=1}^{m}x_i^{\frac{n_i}{2}-1} = \left[\prod_{i=1}^{m}u_i^{\sum_{j=1}^{i}(\frac{n_j}{2}-1)}\right]\cdot\left[\prod_{i=1}^{m-1}(1-u_i)^{\frac{n_{i+1}}{2}-1}\right]$$

所以把 Jacobi 行列式 J 代入上式可得

$$f(u_1, \cdots, u_m) = \left(\prod_{i=1}^{m}\frac{1}{2^{\frac{n_i}{2}}\Gamma(\frac{n_i}{2})}\right)\exp\{-\frac{1}{2}u_m\}u_m^{\frac{n_1+\cdots+n_m}{2}-1}\cdot\prod_{i=1}^{m-1}u_i^{\frac{n_1+\cdots+n_i}{2}-1}(1-u_i)^{\frac{n_{i+1}}{2}-1}$$

由此可知 $U_1, \cdots, U_m$ 独立，且 $U_i \sim BE(\frac{n_1+\cdots+n_i}{2}, \frac{n_{i+1}}{2})$，　$i = 1, 2, \cdots, m-1$。 ∎

20. 设 $X_1, \cdots, X_4$ 为 *i.i.d.* 样本，若 $X_1 \sim N(0, \sigma^2)$，则 $Z = (X_1^2 + X_2^2)/(X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2) \sim R(0, 1)$。

证明. 由定理 (1.3.1) 的推论 3 可知：

$$Z \sim BE(\frac{2}{2}, \frac{2}{2}) \sim BE(1, 1) \sim R(0, 1).$$

∎

21. 设 $X_1, \cdots, X_n$ 为 *i.i.d.* 样本，

(1) 设 X_1 服从均匀分布 $R(0, \theta)$，证明： $T = -2\sum_{i=1}^n \log(X_i/\theta)$ 服从 $\chi^2(2n)$；

(2) 设 X_1 服从 β 分布 $BE(\theta, 1)$，证明： $T = -2\theta\sum_{i=1}^n \log X_i$ 服从 $\chi^2(2n)$；

(3) 设 X_1 服从 Weibull 分布，即 $f(x_1) = \alpha\lambda x_1^{\alpha-1} exp\{-\lambda {x_1}^{\alpha}\} I\{x_1 > 0\}$，证明：$T = 2\lambda\sum_{i=1}^n X_i^\alpha$ 服从 $\chi^2(2n)$。

证明 (1) 由 $X_1 \sim R(0,\theta)$ 得 $X_1/\theta \sim R(0,1)$，所以

$$-\log(Z_1/\theta) \sim \Gamma(1,1), \quad -2\log(X_1/\theta) \sim \Gamma(\frac{1}{2},1) \sim \chi^2(2).$$

因为 $X_1,\cdots,X_n \quad i.i.d.$，所以 $-2\log(X_1/\theta),\cdots,-2\log(X_n/\theta) \quad i.i.d.$；由 χ^2 分布的可加性可知

$$T = -2\sum_{i=1}^n \log(X_i/\theta) \sim \chi^2(2n).$$

(2) 令 $y_1 = -\log x_1$，则 $x_1 = e^{-y_1}, \quad dx_1 = -e^{-y_1}dy_1$，因为

$$f(x_1,\theta) = \theta x_1^{\theta-1} I\{0 \le x_1 \le 1\},$$

所以

$$f(y_1,\theta) = \theta e^{-(\theta-1)y_1} e^{-y_1} I\{y_1 \ge 0\} = \theta e^{-\theta y_1} I\{y_1 \ge 0\},$$

从而

$$Y_1 = -\log X_1 \ \sim \Gamma(\theta,1), \quad 2\theta Y_1 = -2\theta\log X_1 \sim \Gamma(\frac{1}{2},1) \sim \chi^2(2).$$

又因为 $X_1,\cdots,X_n \quad i.i.d.$，所以 $-2\theta\log X_1,\cdots,-2\theta\log X_n \quad i.i.d.$；由 χ^2 分布的可加性可知

$$-2\theta\sum_{i=1}^n \log X_i \sim \chi^2(2n).$$

(3) 令 $Y_1 = X_1^\alpha$，则 $X_1 = Y_1^{\frac{1}{\alpha}}, \quad dx_1 = \frac{1}{\alpha} y_1^{\frac{1}{\alpha}-1} dy_1$，所以

$$\begin{aligned} f(y_1) &= \alpha\lambda y_1^{\frac{1}{\alpha}(\alpha-1)} e^{-\lambda y_1} \cdot \frac{1}{\alpha} y_1^{\frac{1}{\alpha}-1} I\{y_1 \ge 0\} \\ &= \lambda e^{-\lambda y_1} I\{y_1 \ge 0\} \end{aligned}$$

由此可知

$$Y_1 \sim \Gamma(\lambda,1), \quad 2\lambda X_1^\alpha \sim \Gamma(\frac{1}{2},1) \sim \chi^2(2).$$

又因为 $X_1,\cdots,X_n \quad i.i.d.$，所以 $2\lambda X_1^\alpha,\cdots,2\lambda X_n^\alpha \quad i.i.d.$；由 χ^2 分布的可加性知

$$T = 2\lambda\sum_{i=1}^n X_i^\alpha \sim \chi^2(2n).$$ ∎

22. (1) 设 X 服从 Poisson 分布 $P(\lambda)$，证明：$(X-\lambda)/\sqrt{\lambda}$ 的渐近分布为标准正态分布 $N(0,1)$ (当 $\lambda \to +\infty$) (提示：用特征函数证明)；

(2) 设 X 服从 $\chi^2(n)$ 分布，证明：$(X-n)/\sqrt{2n}$ 的渐近分布为标准正态分布 $N(0,1)$ (当 $n \to +\infty$)。

证明. (1) $(X-\lambda)/\sqrt{\lambda}$ 的特征函数为

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \mathrm{E}(e^{i\frac{X-\lambda}{\sqrt{\lambda}}t}) = e^{-it\sqrt{\lambda}}\cdot \mathrm{E}(e^{iX\frac{t}{\sqrt{\lambda}}})\\ &= \exp\{-it\sqrt{\lambda}\}\cdot\exp\{\lambda(e^{it/\sqrt{\lambda}}-1)\}\\ &= \exp\{\lambda(e^{it/\sqrt{\lambda}}-1)-it\sqrt{\lambda}\}\\ &= \exp\{\lambda[1+\frac{it}{\sqrt{\lambda}}+\frac{(it)^2}{2\lambda}+o(\frac{1}{\lambda})]-\lambda-it\sqrt{\lambda}\}\\ &= \exp\{-\frac{1}{2}t^2+o(1)\}\end{aligned}$$

其中当 $\lambda\longrightarrow\infty$ 时， $o(1)\longrightarrow 0$，所以

$$\varphi(t)\longrightarrow\exp\{-\frac{1}{2}t^2\}.$$

而 $\exp\{-\frac{1}{2}t^2\}$ 是标准正态分布 $N(0,1)$ 的特征函数，由唯一性知： $(X-\lambda)/\sqrt{\lambda}$ 的渐近分布为 $N(0,1)(\lambda\longrightarrow\infty)$。

(2) 由标准正态分布与 χ^2 分布的关系可知， X 可被表示为 $X=\sum_{i=1}^n Y_i^2$，其中 $Y_1,\cdots,Y_n$ $i.i.d.$ 且 $Y_1\sim N(0,1)$， $Y_i^2\sim\chi^2(1)$，根据中心极限定理，我们有

$$\frac{\sum_{i=1}^n Y_i^2-\sum_{i=1}^n \mathrm{E}Y_i^2}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}(Y_i^2)}}\xrightarrow{L} N(0,1),$$

所以有

$$(X-n)/\sqrt{2n}\xrightarrow{L} N(0,1)\ (n\longrightarrow\infty).$$

注. 本题亦可通过计算特征函数来加以证明. ∎

23. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为 $i.i.d.$ 样本， X_1 服从 Pareto 分布 $PR(\alpha,\theta)$，即 X_1 的密度函数为 $f(x_1)=\alpha\theta^\alpha x_1{}^{-(\alpha+1)}I\{x_1\geq\theta\}$，令 $T=\prod_{i=1}^n X_i$，证明：

(1) $2\alpha(\log T-n\log\theta)$ 服从 $\chi^2(2n)$； (2) $X_{(1)}\sim PR(n\alpha,\theta)$。

证明. (1) 令 $y_1=\log x_1$，则 $x_1=e^{y_1}$， $dx_1=e^{y_1}dy_1$，由此可得 Y_1 的密度函数为

$$\begin{aligned}f(y_1) &= \alpha\theta^\alpha e^{-(\alpha+1)y_1}\cdot e^{y_1}I\{y_1\geq\log\theta\}\\ &= \alpha e^{-\alpha(y_1-\log\theta)}I\{y_1-\log\theta\geq 0\}\end{aligned}$$

所以

$$Y_1-\log\theta=\log X_1-\log\theta\sim\Gamma(\alpha,1),$$

从而

$$2\alpha(\log X_1-\log\theta)\sim\Gamma(\frac{1}{2},1)\sim\chi^2(2).$$

又因为 $X_1,\cdots,X_n$ $i.i.d.$，所以 $2\alpha(\log X_1-\log\theta),\cdots,2\alpha(\log X_n-\log\theta)$ $i.i.d.$；由 χ^2 分布的可加性知

$$2\alpha(\log T-n\log\theta)\sim\chi^2(2n).$$

(2) X_1 的分布函数为

$$F(x_1)=\int_\theta^{x_1}\alpha\theta^\alpha t^{-(\alpha+1)}dt=-\theta^\alpha\cdot t^{-\alpha}|_\theta^{x_1}=1-(\frac{\theta}{x_1})^\alpha,$$

由极小次序统计量 $S=X_{(1)}$ 的密度函数公式可得 $X_{(1)}$ 的密度函数为

$$f(s)=n\alpha\theta^{\alpha}s^{-(\alpha+1)}(\frac{\theta}{s})^{(n-1)\alpha}I\{s\geq\theta\}=n\alpha\theta^{n\alpha}s^{-(n\alpha+1)}I\{s\geq\theta\}\sim PR(n\alpha,\theta),$$

所以 $X_{(1)}\sim PR(n\alpha,\theta)$。 ∎

24. (1) 若 X_1, X_2 独立同分布，且 $X_1\sim N(0,1)$，则 $Y=X_1/|X_2|\sim CA(0,1)$；

(2) 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为 *i.i.d.* 样本，且 X_1 服从 $CA(0,1)$，证明： $\overline{X}=n^{-1}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 与 X_1 同分布。

证明. (1) 由两个随机变量商的密度函数公式可知

$$f_Y(y)=f_{X_1/|X_2|}(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X_1}(yx_2)f_{|X_2|}(x_2)|x_2|dx_2,$$

因为

$$f_{|X_2|}(x_2)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-x_2^2/2},\quad 其中\ |X_2|\in[0,+\infty),$$

所以

$$\begin{aligned}f_{X_1/|X_2|}(y)&=\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(yx_2)^2/2}\cdot\frac{2}{\sqrt{2\pi}}e^{-x_2^2/2}x_2dx_2\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-(x_2^2/2)(y^2+1)}x_2dx_2\\&=\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2}\end{aligned}$$

所以 $Y=X_1/|X_2|\sim CA(0,1)$。

注. 本题亦可如下证明，因为 X_1, X_2 独立同分布，且 $X_1\sim N(0,1)$，所以

$$Y=\frac{X_1}{|X_2|}=\frac{X_1}{\sqrt{X_2^2}}\sim t(1).$$

又因为自由度为 1 的 t 分布就是标准 Cauchy 分布，所以 $Y=\frac{X_1}{|X_2|}\sim CA(0,1)$。

(2) 因为 X_1 的特征函数为

$$\varphi_{X_1}(t)=\exp\{it-|t|\},$$

所以 $\overline{X}$ 的特征函数为

$$\varphi_{\overline{X}}(t)=\mathrm{E}(e^{it\overline{X}})=\prod_{j=1}^{n}\varphi_{X_j}(t/n)=\exp\{it-|t|\},$$

由唯一性定理知： $\overline{X}$ 与 X_1 同分布。 ∎

25.* 设 $X_2\sim N(\mu_2,V_2)$， $X_1|X_2\sim N(AX_2,B)$；证明： $X_1\sim N(A\mu_2,\ B+AV_2A^T)$;

$$\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}\sim N\left(\begin{pmatrix}A\mu_2\\\mu_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}B+AV_2A^T & AV_2\\V_2A^T & V_2\end{pmatrix}\right).$$

(提示：应用条件期望公式计算特征函数)。

证明. 由多元正态分布的特征函数的计算公式可算得 X_1 的特征函数为

$$\begin{aligned}
\varphi_{X_1}(t_1) &= \mathrm{E}(e^{it_1^TX_1}) = \mathrm{E}_{X_2}\{E[e^{it_1^TX_1}|X_2]\} \\
&= \mathrm{E}_{X_2}\{e^{it_1^TAX_2-\frac{1}{2}t_1^TBt_1}\} = e^{-\frac{1}{2}t_1^TBt_1}\cdot\mathrm{E}_{X_2}\{e^{i(A^Tt_1)^TX_2}\} \\
&= e^{-\frac{1}{2}t_1^TBt_1}\cdot e^{i(A^Tt_1)^T\mu_2-\frac{1}{2}(A^Tt_1)^TV_2(A^Tt_1)} \\
&= e^{it_1^TA\mu_2-\frac{1}{2}t_1^T(B+AV_2A^T)t_1}
\end{aligned}$$

由唯一性知 $X_1 \sim N(A\mu_2,\ B+AV_2A^T)$。

记

$$X=\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix},\quad \mu=\begin{pmatrix} A\mu_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix},\quad t=\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix},\quad V=\begin{pmatrix} B+AV_2A^T & AV_2 \\ V_2A^T & V_2 \end{pmatrix},$$

则 $X=(X_1^T,X_2^T)^T$ 的特征函数为

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \mathrm{E}(e^{iX^Tt}) = \mathrm{E}\{e^{iX_1^Tt_1+iX_2^Tt_2}\} \\
&= \mathrm{E}_{X_2}\{\mathrm{E}[\exp(iX_1^Tt_1+iX_2^Tt_2)|X_2]\} = \mathrm{E}_{X_2}\{e^{iX_2^Tt_2}\cdot\mathrm{E}[e^{iX_1^Tt_1}|X_2]\} \\
&= \mathrm{E}_{X_2}\{\exp[iX_2^Tt_2+i(AX_2)^Tt_1-\frac{1}{2}t_1^TBt_1]\} = e^{-\frac{1}{2}t_1^TBt_1}\cdot\mathrm{E}_{X_2}\{e^{iX_2^T(A^Tt_1+t_2)}\} \\
&= e^{-\frac{1}{2}t_1^TBt_1}\cdot\exp\{i\mu_2^T(A^Tt_1+t_2)-\frac{1}{2}(A^Tt_1+t_2)^TV_2(A^Tt_1+t_2)\} \\
&= \exp\{i\mu^Tt-\frac{1}{2}t^TVt\}.
\end{aligned}$$

这与多元正态分布 $N(\mu,V)$ 的特征函数相一致，所以由唯一性知 $X\sim N(\mu,V)$。注意，在求 $\varphi(t)$ 的过程中，我们用到了

$$\begin{aligned}
\mu^Tt &= \mu_2^TA^Tt_1+\mu_2^Tt_2=\mu_2^T(A^Tt_1+t_2), \\
t^TVt &= t_1^TAV_2A^Tt_1+t_1^TBt_1+t_1^TAV_2t_2+t_2^TV_2A^Tt_1+t_2^TV_2t_2 \\
&= (A^Tt_1+t_2)^TV_2(A^Tt_1+t_2)+t_1^TBt_1.
\end{aligned}$$

注. 本题亦可如下证明。由于 $X_2\sim N(\mu_2,V_2)$, $X_1|X_2\sim N(AX_2,B)$，因此可令 $X_1=AX_2+\epsilon$，经简单计算可知，$\epsilon\sim N(0,B)$，且与 X_2 独立。因为

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ \epsilon \end{pmatrix}\sim N\left(\begin{pmatrix} \mu_2 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} V_2 & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\right),\quad X_1=\begin{pmatrix} A & I_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} X_2 \\ \epsilon \end{pmatrix}$$

所以 $X_1\sim N(A\mu_2,\ B+AV_2A^T)$。又因为

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & I_1 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} X_2 \\ \epsilon \end{pmatrix},$$

其中 I_1,I_2 是维数分别与 X_1,X_2 的维数相一致的单位阵，所以有

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}\sim N\left(\begin{pmatrix} A\mu_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} B+AV_2A^T & AV_2 \\ V_2A^T & V_2 \end{pmatrix}\right).\qquad\blacksquare$$

26. 设 $X\sim N(\mu,1)$，求 X^2 的特征函数，并证明它服从非中心 χ^2 分布 $\chi^2(1,\mu^2)$。

证明. X^2 的特征函数为

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \mathrm{E}(e^{itX^2}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{1}{2}[(1-2it)x^2-2\mu x+\mu^2]\}dx.\end{aligned}$$

令 $u=\sqrt{(1-2it)}x$，则有

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{1}{2}(u^2-\frac{2\mu}{\sqrt{1-2it}}u+\mu^2)\}\cdot(1-2it)^{-\frac{1}{2}}du\\ &= (1-2it)^{-\frac{1}{2}}\exp\{\frac{1}{2}(\frac{\mu^2}{1-2it}-\mu^2)\}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(u-\frac{\mu}{\sqrt{1-2it}})^2}du\\ &= (1-2it)^{-\frac{1}{2}}\exp\{\frac{it\mu^2}{1-2it}\}.\end{aligned}$$

这恰好是非中心 χ^2 分布 $\chi^2(1,\mu^2)$ 的特征函数，由唯一性知 $X^2\sim\chi^2(1,\mu^2)$。 ▮

27. 设 X 服从非中心 χ^2 分布 $\chi^2(n,\delta)$，证明：当 $n\to+\infty$ 时，$[X-(n+\delta)]/\sqrt{2(n+2\delta)}$ 的渐近分布为标准正态分布 $N(0,1)$。

证明. 由非中心 χ^2 分布的可加性知，X 可分解为：$X=\sum_{i=1}^n Y_i^2$，其中 $Y_1,\cdots,Y_n$ $i.i.d.$，$Y_1\sim N(\mu,1)$，$\mu=\pm\sqrt{\delta/n}$。由于 $Y_1^2\sim\chi^2(1,\delta/n)$，所以 $\mathrm{E}(Y_1^2)=1+\delta/n$，$\mathrm{Var}(Y_1^2)=2(1+2\delta/n)$，从而由中心极限定理得：

$$\frac{X-(n+\delta)}{\sqrt{2(n+2\delta)}}=\frac{\sum_{i=1}^n Y_i^2-\sum_{i=1}^n \mathrm{E}(Y_i^2)}{\sqrt{\sum_{i=1}^n\mathrm{Var}(Y_i^2)}}\xrightarrow{L}N(0,1)\ (n\longrightarrow\infty).$$

注. 本题亦可通过计算特征函数来加以证明。 ▮

28.★ 设 $X_1\sim P(\lambda x)$，$X_2\sim P(\delta/2)$，二者都服从 Poisson 分布，证明：$P(X_1-X_2\geq\nu)=\Gamma(x;\lambda,\nu,\delta)$ 为非中心 Γ 分布 $\Gamma(\lambda,\nu;\delta)$ 的分布函数 (提示：应用关于 X_2 的全概公式及第 13 题的结果)。

证明. 令记 $G(x)=P(X_1-X_2\geq\nu)$，则有

$$\begin{aligned}G(x) &= P(X_1-X_2\geq\nu)=1-P(X_1-X_2<\nu)\\ &= 1-P(X_1-X_2\leq\nu-1)=1-P(X_1\leq X_2+\nu-1)\\ &= 1-\sum_{j=0}^{\infty}P(X_1\leq X_2+\nu-1|X_2=j)P(X_2=j)\\ &= 1-\sum_{j=0}^{\infty}e^{-\frac{\delta}{2}}\frac{(\delta/2)^j}{j!}\cdot P(X_1\leq\nu+j-1)\\ &= 1-\sum_{j=0}^{\infty}e^{-\frac{\delta}{2}}\frac{(\delta/2)^j}{j!}\cdot\frac{1}{\Gamma(\nu+j)}\int_{\lambda x}^{\infty}e^{-t}t^{\nu+j-1}dt\end{aligned}$$

以上最后一式用到了第 13 题的结果，另一方面，若记非中心 Γ 分布 $\Gamma(\lambda,\nu;\delta)$ 的密度函数为 $\gamma(x;\lambda,\nu,\delta)$，则有

$$\Gamma(x;\lambda,\nu,\delta) = \int_0^x\gamma(t;\lambda,\nu,\delta)dt=1-\int_x^{\infty}\gamma(t;\lambda,\nu,\delta)dt$$

$$
\begin{aligned}
&= 1-\int_x^\infty \sum_{j=0}^\infty \frac{\lambda^{\nu+j}}{\Gamma(\nu+j)} e^{-\lambda t} t^{\nu+j-1} \cdot e^{-\frac{\delta}{2}} \frac{(\delta/2)^j}{j!} dt \\
&= 1-\sum_{j=0}^\infty e^{-\frac{\delta}{2}} \frac{(\delta/2)^j}{j!} \cdot \frac{1}{\Gamma(\nu+j)} \int_{\lambda x}^\infty e^{-u} u^{\nu+j-1} du \\
&= G(x)
\end{aligned}
$$

其中上面第三个等式用到了变换 $\lambda t = u$，所以 $P(X_1 - X_2 \geq \nu) = \Gamma(x;\lambda,\nu,\delta)$。 ∎

29.★ 设 $X \sim \chi^2(n)$， $Y = X/\delta,\ 0<\delta<1$，利用特征函数的展开证明： Y 可视为 (Y,J) 中 Y 的边缘分布，其中 $J \sim NB(\delta, n/2)$， $Y|J \sim \chi^2(n+2J)$。

证明. 易见， X 和 Y 都是连续型分布，都存在特征函数． X 的特征函数为

$$\phi_X(t) = \mathrm{E}(e^{iXt}) = (1-2it)^{-\frac{n}{2}}.$$

Y 的特征函数为

$$
\begin{aligned}
\phi_Y(t) &= \mathrm{E}(e^{iYt}) = \mathrm{E}(e^{i(X/\delta)t}) = \mathrm{E}(e^{iXt/\delta}) = (1-2it/\delta)^{-\frac{n}{2}} \\
&= (1-\delta^{-1}+\delta^{-1}-2it/\delta)^{-\frac{n}{2}} = [(1-\delta^{-1})+\delta^{-1}(1-2it)]^{-\frac{n}{2}} \\
&= [\delta^{-1}(1-2it)]^{-\frac{n}{2}} [1+\frac{1-\delta^{-1}}{\delta^{-1}(1-2it)}]^{-n/2} \\
&= (1-2it)^{-\frac{n}{2}} \delta^{\frac{n}{2}} [1-(1-\delta)(1-2it)^{-1}]^{-\frac{n}{2}}.
\end{aligned}
$$

$0<\delta<1$ 时，该式可以进行 Taylor 展开，从而得到

$$
\begin{aligned}
\phi_Y(t) &= (1-2it)^{-\frac{n}{2}} \delta^{\frac{n}{2}} \sum_{j=0}^\infty \frac{\frac{n}{2}\cdots(\frac{n}{2}+j-1)}{j!} \cdot (1-\delta)^j (1-2it)^{-j} \\
&= \sum_{j=0}^\infty (1-2it)^{-\frac{n}{2}-j} \times \frac{(\frac{n}{2}+j-1)!}{j!(\frac{n}{2}-1)!} \delta^{\frac{n}{2}} (1-\delta)^j.
\end{aligned}
$$

该式右端第一项为 $\chi^2(n+2j)$ 的特征函数，第二项为 $NB(\delta,n/2)$ 的分布密度．根据特征函数的逆转公式，上式两端乘以 $(2\pi)^{-1}e^{-ixt}$，然后积分．由于 $0<\delta<1$ 时以上级数收敛，相应的分布密度都存在，因此可以逐项积分，从而得到

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \phi_Y(t) e^{-ixt} dt &= \sum_{j=0}^\infty \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty (1-2it)^{-\frac{n}{2}-j} e^{-ixt} dt \times \frac{(\frac{n}{2}+j-1)!}{j!(\frac{n}{2}-1)!} \delta^{\frac{n}{2}} (1-\delta)^j \\
f_Y(x) &= \sum_{j=0}^\infty \chi^2(x;\ n+2j) \times \frac{(\frac{n}{2}+j-1)!}{j!(\frac{n}{2}-1)!} \delta^{\frac{n}{2}} (1-\delta)^j.
\end{aligned}
$$

其中 $f_Y(x)$ 和 $\chi^2(x;\ n+2j)$ 分别为 Y 和 $\chi^2(n+2j)$ 分布的密度函数．上式与原书 (1.4.1) 式 (见 p.25) 完全类似，只是上式第二项为负二项分布，不再是 Poisson 分布．因此， Y 可视为 (Y,J) 中 Y 的边缘分布，其中 $J \sim NB(\delta,n/2)$， $Y|J \sim \chi^2(n+2J)$。 ∎

30. (1) 设 X 服从负二项分布 $NB(\theta,r)$，若 r 已知， θ 未知，则为指数族；若 θ， r 都未知，则负二项分布不是指数族；

(2) 设 X 服从 Laplace 分布 $LA(\mu,\sigma)$，若 μ,σ 都未知，则 $LA(\mu,\sigma)$ 不是指数族；若 μ 为常数， σ 未知，则 $LA(\mu,\sigma)$ 为指数族．

证明 (1) 负二项分布的密度函数为

$$\begin{aligned} f(x) &= \binom{x+r-1}{x}\theta^r(1-\theta)^x \qquad (x=0,1,2,\cdots) \\ &= \exp\{x\log(1-\theta)+r\log\theta+\log(x+r-1)!-\log(x)!-\log(r-1)!\}. \end{aligned}$$

当 r 已知，θ 未知时，显然是指数族；当 θ，r 都未知时，$\log(x+r-1)!$ 无法表示为 $T(x)Q(r)$ 的形式，所以不是指数族。

(2) Laplace 分布 $LA(\mu,\sigma)$ 的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{2\sigma}\exp\{-\frac{|x-\mu|}{\sigma}\}=\frac{1}{2}\exp\{-\frac{x-\mu}{\sigma}I\{x\geq\mu\}+\frac{x-\mu}{\sigma}I\{x<\mu\}-\log\sigma\}.$$

在 $I\{x\geq\mu\}$ 和 $I\{x<\mu\}$ 中显然无法将 x 和 μ 分开，表示为 $T(x)Q(\mu)$ 的形式，所以当 μ,σ 都未知时，$LA(\mu,\sigma)$ 不是指数族；但是当 μ 为常数，σ 未知时，若记 $T(x)=|x-\mu|$，则有

$$f(x)=\frac{1}{2}\exp\{-\frac{T(x)}{\sigma}-\log\sigma\}.$$

显然为指数族。 ∎

31. 设 $Y_1,\cdots,Y_n$ 独立同分布，Y_1 服从指数族分布 $ED(\theta,\sigma^2)$，即

$$f(y_1;\theta,\phi)=\exp\left\{\phi\left[\theta^T y_1-b(\theta)-c(y_1,\phi)\right]\right\},\quad \phi=\sigma^{-2}.$$

求 Y_1 的特征函数，并证明：$\overline{Y}=n^{-1}\sum_{i=1}^n Y_i$ 服从指数族分布 $ED(\theta,\sigma^2/n)$

解 Y_1 的特征函数为

$$\begin{aligned} \varphi_{Y_1}(t) &= \mathrm{E}(e^{it^TY_1})=\int_{R^p}e^{it^Ty_1}\cdot f(y_1;\theta,\phi)d\mu(y_1) \\ &= \int_{R^p}\exp\{\phi[(\theta+it/\phi)^Ty_1-b(\theta+it/\phi)-c(y_1,\phi)]\}\times \\ &\quad \exp\{\phi[b(\theta+it/\phi)-b(\theta)]\}d\mu(y_1) \\ &= \exp\{\phi[b(\theta+it/\phi)-b(\theta)]\} \end{aligned}$$

其中 p 为 Y_1 的维数，由此易得 $\overline{Y}=n^{-1}\sum_{k=1}^n Y_k$ 的特征函数为

$$\begin{aligned} \varphi_{\overline{Y}}(t) &= \mathrm{E}(e^{it^T\overline{Y}})=\prod_{k=1}^n \mathrm{E}(e^{it^TY_k/n}) \\ &= \prod_{k=1}^n \exp\{\phi[b(\theta+\frac{it}{n\phi})-b(\theta)]\} \\ &= \exp\{n\phi[b(\theta+\frac{it}{n\phi})-b(\theta)]\} \end{aligned}$$

由唯一性知 $\overline{Y}$ 服从指数族分布 $ED(\theta,\sigma^2/n)$。 ∎

32. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为 $i.i.d.$ 样本，X_1 的密度函数 $f(x)$ 关于某一点 ξ_0 对称，即 $f(\xi_0+x)=f(\xi_0-x)$，设其第 i 个次序统计量的密度函数为 $g_{(i)}(y)$，证明：$g_{(i)}(\xi_0+y)=g_{(n-i+1)}(\xi_0-y)$，对任意的 y 及 $i=1,\cdots,n$ 都成立。

证明. 设 X_1 的分布函数为 $F(x)$，则由次序统计量的密度函数公式可知

$$g_{(i)}(\xi_0+y)=\frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}F^{i-1}(\xi_0+y)f(\xi_0+y)[1-F(\xi_0+y)]^{n-i}.$$

由密度函数 $f(x)$ 的对称性可以看出： $F(\xi_0-x)+F(\xi_0+x)=1$，事实上

$$\begin{aligned}F(\xi_0+x) &= \int_{-\infty}^{\xi_0+x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x} f(\xi_0+u)du\\ &= \int_{-\infty}^{x} f(\xi_0-u)du=\int_{\infty}^{\xi_0-x} f(s)(-ds)=\int_{\xi_0-x}^{\infty} f(s)ds\\ &= 1-\int_{-\infty}^{\xi_0-x} f(s)ds=1-F(\xi_0-x)\end{aligned}$$

其中第二个等号处用到了变换 $t=\xi_0+u$，第四个等号处用到了变换 $s=\xi_0-u$，所以

$$\begin{aligned}g_{(i)}(\xi_0+y) &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}F^{i-1}(\xi_0+y)f(\xi_0+y)[1-F(\xi_0+y)]^{n-i}\\ &= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!}[1-F(\xi_0-y)]^{i-1}f(\xi_0-y)F^{n-i}(\xi_0-y)\\ &= g_{(n-i+1)}(\xi_0-y).\end{aligned}$$

∎

33. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为 $i.i.d.$ 样本， X_1 服从指数分布 $E(1)$，证明： $Y=X_{(n)}-\log n$ 收敛到标准极值分布 $f(y)=\exp\{-e^{-y}-y\}$，

证明. X_1 的分布函数为 $F(x_1)=(1-e^{-x_1})I\{x_1\geq 0\}$，所以 $X_{(n)}$ 的密度函数为

$$f(t)=n(1-e^{-t})^{n-1}e^{-t}I\{t\geq 0\}.$$

令 $Y=X_{(n)}-\log n$，则 Y 的密度函数为

$$\begin{aligned}f(y) &= n(1-e^{-y-\log n})^{n-1}e^{-y-\log n}=(1-\frac{1}{n}e^{-y})^{n-1}\cdot e^{-y}\\ &= (1-\frac{1}{n}e^{-y})^{(-\frac{n}{e^{-y}})\cdot\frac{-e^{-y}}{n}\cdot(n-1)}\cdot e^{-y}\\ &\to \exp\{-e^{-y}\}e^{-y}\qquad(n\to\infty)\\ &= \exp\{-e^{-y}-y\}.\end{aligned}$$

所以 $Y=X_{(n)}-\log n$ 收敛到标准极值分布. ∎

34. 设 $X_1^i,\cdots,X_n^i$ 为 $i.i.d.$ 样本， $X_1^i\sim R(0,1)$， $i=1,\cdots,k$，且各组间也独立. 设 $X_{(n)}^i=Y_{in}$ 为第 i 组的最大值， $V=\prod_{i=1}^k Y_{in}$，证明： V 的分布密度为

$$g(v)=\frac{n^k}{\Gamma(k)}v^{n-1}(-\log v)^{k-1}I\{0\leq v\leq 1\}$$

(提示：先求 $U=-\log V$ 的分布密度)，

解. 令 $T_i=Y_{in}$，则 $T_i\sim f(t_i)=nt_i^{n-1}I\{0\leq t_i\leq 1\}$，由此易得 $Z_i=-\log T_i\sim ne^{-nz_i}I\{z_i\geq 0\}\sim\Gamma(n,1)$，由于组间相互独立，所以 $T_1,\cdots,T_k$ 独立同分布，从而 $Z_1,\cdots,Z_k$ 也独立同分布. 所以

$$U=-\log V=\sum_{i=1}^k(-\log T_i)=\sum_{i=1}^k Z_i\sim\Gamma(n,k).$$

即

$$U \sim f(u) = \frac{n^k}{\Gamma(k)} e^{-nu} u^{k-1} I\{u \geq 0\}.$$

所以

$$g(v) = \frac{n^k}{\Gamma(k)} v^{n-1} (-\log v)^{k-1} I\{0 \leq v \leq 1\}.$$

∎

35. 设 $(U_{(1)}, \cdots, U_{(n)})$ 为均匀分布 $R(0,1)$ 的次序统计量，若记 $Y_1 = U_{(1)}/U_{(2)}, \cdots$，$Y_k = U_{(k)}/U_{(k+1)}, \cdots$，$Y_{n-1} = U_{(n-1)}/U_{(n)}$，$Y_n = U_{(n)}$，证明：$Y_1, \cdots, Y_k, \cdots, Y_n$ 独立，且有 $Y_k \sim BE(k,1) \sim ky^{k-1} I\{0 \leq y \leq 1\}$，$k = 1, \cdots, n$。

证明. 由 $\left\{\begin{array}{l} Y_1 = U_{(1)}/U_{(2)} \\ \quad\vdots \\ Y_{n-1} = U_{(n-1)}/U_{(n)} \\ Y_n = U_{(n)} \end{array}\right.$ 可得 $\left\{\begin{array}{l} U_{(1)} = Y_1 Y_2 \cdots Y_n \\ \quad\vdots \\ U_{(n-1)} = Y_{n-1} Y_n \\ U_{(n)} = Y_n \end{array}\right.$

所以变换 Jacobi 为

$$J = \frac{\partial(u_1, \cdots, u_n)}{\partial(y_1, \cdots, y_n)^T} = \prod_{k=1}^{n} y_k^{k-1}.$$

由于 $(U_{(1)}, \cdots, U_{(n)})$ 的分布密度函数为

$$f(u_1, \cdots, u_n) = n! I\{0 \leq u_1 < u_2 < \cdots < u_n \leq 1\},$$

所以有

$$\begin{aligned} f(y_1, \cdots, y_n) &= f(u_1, \cdots, u_n) \cdot |J| \\ &= n! \prod_{k=1}^{n} y_k^{k-1} I\{0 < y_k < 1,\ k = 1, 2, \cdots, n\} \\ &= \prod_{k=1}^{n} k y_k^{k-1} I\{0 < y_k < 1\}. \end{aligned}$$

由此可知 $Y_1, \cdots, Y_n$ 独立，且有 $Y_k \sim BE(k,1)$。 ∎

36.* 设 $X_1, \cdots, X_n$ 为 *i.i.d.* 样本，且 X_1 服从均匀分布 $R(0,1)$，证明：

(1) $(\frac{X_{(1)}}{X_{(r+1)}}, \cdots, \frac{X_{(r)}}{X_{(r+1)}})$ 与 $(X_{(r+1)}, \cdots, X_{(n)})$ 独立，$r = 1, \cdots, n-1$；

(2) 利用 (1) 来证明 $X_{(n)}, \frac{X_{(n)}}{X_{(n-1)}}, \frac{X_{(n-1)}}{X_{(n-2)}}, \cdots, \frac{X_{(2)}}{X_{(1)}}$ 独立。(提示：在 (1) 中求联合分布)。

证明. (1) 作变换 $\left\{\begin{array}{lcl} Z_1 &=& \frac{X_{(1)}}{X_{(r+1)}} \\ & \vdots & \\ Z_r &=& \frac{X_{(r)}}{X_{(r+1)}} \\ Z_{r+1} &=& X_{(r+1)} \\ & \vdots & \\ Z_n &=& X_{(n)} \end{array}\right.$ 则 $\left\{\begin{array}{lcl} X_{(1)} &=& Z_{r+1} Z_1 \\ & \vdots & \\ X_{(r)} &=& Z_{r+1} Z_r \\ X_{(r+1)} &=& Z_{r+1} \\ & \vdots & \\ X_{(n)} &=& Z_n \end{array}\right.$

所以变换的 Jacobi 行列式为

$$J = \frac{\partial(x_{(1)}, \cdots, x_{(n)})}{\partial(z_1, \cdots, z_n)^T} = z_{r+1}^r,$$

由

$$f(x_{(1)},\cdots,x_{(n)})=n!I\{0<x_{(1)}<\cdots<x_{(n)}<1\},$$

可得

$$f(z_1,\cdots,z_n)=n!z_{r+1}^rI\{0<z_1<\cdots<z_r<1\}I\{0<z_{r+1}<\cdots<z_n<1\}.$$

又因为

$$\begin{aligned}f(z_{r+1},\cdots,z_n)&=f(x_{(r+1)},\cdots,x_{(n)})=\frac{n!}{r!}z_{r+1}^rI\{0<z_{r+1}<\cdots<z_n<1\}\\ f(z_1,\cdots,z_r)&=\int_0^1\int_0^{z_n}\cdots\int_0^{z_{r+3}}\int_0^{z_{r+2}}n!z_{r+1}^rdz_{r+1}dz_{r+2}\cdots dz_{n-1}dz_n\\ &=r!I\{0<z_1<\cdots<z_r<1\}.\end{aligned}$$

所以

$$f(z_1,\cdots,z_n)=f(z_1,\cdots,z_r)\cdot f(z_{r+1},\cdots,z_n),$$

即 $(\frac{X_{(1)}}{X_{(r+1)}},\cdots,\frac{X_{(r)}}{X_{(r+1)}})$ 与 $(X_{(r+1)},\cdots,X_{(n)})$ 独立，$r=1,\cdots,n-1$.

(2) 在 (1) 中，当 $r=1$ 时，则有 $\frac{X_{(1)}}{X_{(2)}}$ 与 $(X_{(2)},\cdots,X_{(n)})$ 独立，所以

$$\begin{aligned}P(.)&\triangleq P(X_{(n)}\le y_n,\frac{X_{(n)}}{X_{(n-1)}}\le y_{n-1},\cdots,\frac{X_{(3)}}{X_{(2)}}\le y_2,\frac{X_{(2)}}{X_{(1)}}\le y_1)\\ &=P(X_{(n)}\le y_n,\frac{X_{(n)}}{X_{(n-1)}}\le y_{n-1},\cdots,\frac{X_{(3)}}{X_{(2)}}\le y_2)\cdot P(\frac{X_{(2)}}{X_{(1)}}\le y_1).\end{aligned}$$

依此类推，有

$$P(.)=P(X_{(n)}\le y_n)\cdot P(\frac{X_{(n)}}{X_{(n-1)}}\le y_{n-1})\cdots P(\frac{X_{(3)}}{X_{(2)}}\le y_2)\cdot P(\frac{X_{(2)}}{X_{(1)}}\le y_1),$$

所以 $X_{(n)},\frac{X_{(n)}}{X_{(n-1)}},\frac{X_{(n-1)}}{X_{(n-2)}},\cdots,\frac{X_{(2)}}{X_{(1)}}$ 独立。 ∎

37. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为 $i.i.d.$ 样本，且 X_1 服从 (σ,μ) 上的均匀分布，$-\infty<\sigma<\mu<+\infty$，证明：$X_{(1)}|X_{(n)}=x$ 与 $Y_{(1)}$ 同分布，其中 $X_{(1)},\cdots,X_{(n)}$ 是 $X_1,\cdots,X_n$ 的次序统计量；$Y_1,\cdots,Y_{n-1}$ 为 $i.i.d.$ 样本，且 Y_1 服从 (σ,x) 上的均匀分布；$Y_{(1)},\cdots,Y_{(n-1)}$ 是 $Y_1,\cdots,Y_{n-1}$ 的次序统计量。

证明. 令 $(T_1,T_2)=(X_{(1)},X_{(n)})$，易得 (T_1,T_2) 的联合密度函数为

$$f(t_1,t_2)=n(n-1)(t_2-t_1)^{n-2}\cdot(\mu-\sigma)^{-n}I\{\sigma<t_1<t_2<\mu\},$$

所以 $T_2=X_{(n)}$ 的边缘分布密度函数为

$$f_2(t_2)=\int_\sigma^{t_2}f(t_1,t_2)dt_1=n(t_2-\sigma)^{n-1}(\mu-\sigma)^{-n}.$$

从而 $T_1|T_2=x$ 的分布密度函数为

$$f(t_1|T_2=x)=\frac{f(t_1,x)}{f_2(x)}=(n-1)\frac{(x-t_1)^{n-2}}{(x-\sigma)^{n-1}}.$$

另一方面，因为 $Y_1,\cdots,Y_{n-1}$ 为 $i.i.d.$ 样本，且 $Y_1 \sim R(\sigma, x)$，所以根据最小次序统计量 $T = Y_{(1)}$ 的密度函数公式可得

$$f(t) = (n-1)\frac{(x-t)^{n-2}}{(x-\sigma)^{n-1}}.$$

所以 $X_{(1)}|X_{(n)} = x$ 与 $Y_{(1)}$ 同分布。 ∎

38. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 为 $i.i.d.$ 样本，且 $X_1 \sim \mu + \Gamma(1/\sigma,\ 1)$。

(1) 证明： $e^{-X_1/\sigma} \sim R(0, e^{-\mu/\sigma})$；

(2) 求 $\frac{X_{(1)}-\mu}{S}$ 的分布，其中 $X_{(1)}$ 为次序统计量中最小的， $S = \sum_{i=1}^n X_{(i)} - nX_{(1)}$；

(3) 证明： $X_{(1)},\ X_{(2)} - X_{(1)},\ \cdots,\ X_{(n)} - X_{(n-1)}$ 相互独立；并且 $X_{(i)}$ 与 $X_{(i+k)} - X_{(i)}$ 独立；对任意的 $i,\ k$ 成立。

证明. (1) 令 $e^{-x_1/\sigma} = y$，则 $x_1 = -\sigma\log y,\quad dx_1 = -(\sigma/y)dy$，所以 Y 的密度函数为

$$\begin{aligned} f(y) &= \frac{1}{\sigma}e^{-\frac{1}{\sigma}(-\sigma\log y-\mu)}\cdot\frac{\sigma}{y}I\{0<y<e^{-\frac{\mu}{\sigma}}\} \\ &= e^{\frac{\mu}{\sigma}}I\{0<y<e^{-\frac{\mu}{\sigma}}\}. \end{aligned}$$

所以 $e^{-X_1/\sigma} \sim R(0, e^{-\mu/\sigma})$。

(2) 因为

$$X_{(1)} \sim \mu + \Gamma(\frac{n}{\sigma}, 1),\ S \sim \Gamma(\frac{1}{\sigma}, n-1)$$

且 $X_{(1)}$ 与 S 独立，所以

$$\frac{2n}{\sigma}(X_{(1)}-\mu) \sim \chi^2(2),\ \frac{2}{\sigma}S \sim \chi^2(2(n-1))$$

且二者相互独立，从而

$$\frac{\frac{2n}{\sigma}(X_{(1)}-\mu)/2}{\frac{2}{\sigma}S/2(n-1)} = \frac{n(n-1)(X_{(1)}-\mu)}{S} \sim F(2, 2(n-1)).$$

由此易得 $Z = \frac{X_{(1)}-\mu}{S}$ 的分布密度函数为

$$f(z) = n(1+\frac{z}{n(n-1)})^{-n}I\{z \geq 0\}.$$

(3) 令 $Y_i = X_{(i)} - X_{(i-1)},\ i = 2,3,\cdots,n,\ Y_1 = X_{(1)}$，则由指数族分布次序统计量的性质知 $Y_1,\cdots,Y_n$ 相互独立 (见原书定理 1.6.2, p.41)。又因 $X_{(i)} = \sum_{k=1}^i Y_k,\ X_{(i+k)} - X_{(i)} = \sum_{j=i+1}^{i+k} Y_j$，所以对任意的 $i,\ k$， $X_{(i)}$ 与 $X_{(i+k)} - X_{(i)}$ 独立。 ∎