

第二届 SKTMO

试题共 4 题，满分 150 分，按照步骤给分

一.(30分)

$n$  为正整数, 求证:  $\frac{\sum_{i=0}^{n^2} \sqrt{n+\sqrt{i}}}{\sum_{i=0}^{n^2} \sqrt{n-\sqrt{i}}} = \sqrt{2} + 1$

二、(30分)

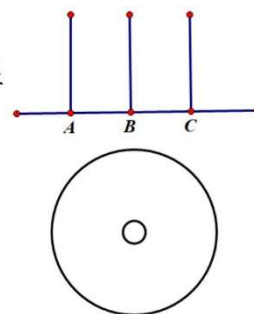
已知  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{1}{n}$  , 求  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$  的最大值

三. (40分)

如右上图所示为Hanoi问题。有 $n$ 个大小不一的碟子(右下图), 可以套在三个柱子上。一开始,  $n$ 个碟子由小到大排列在柱子 $A$ 上, 现要把所有碟子从 $A$ 移动到 $C$ , 规定:

- 1) 一次只能移动一个柱子上最上面, 即最小的碟子;
- 2) 大的碟子不能放在小的碟子上;
- 3) 只能在相邻的柱子上移动碟子;

求证: 在移动过程中每种可能的碟子的状态至少经过一次。



四. (50分)

设 $\triangle ABC$ 为平面内一给定三角形， $P$ 为 $\triangle ABC$ 内一点， $AP$ 与 $\odot ABC$ 交于 $D$ ， $P$ 关于 $BC$ 的对称点为 $P'$ 。已知 $\triangle PDP'$ 外接圆与 $\triangle ABC$ 外接圆交于一给定的点 $T$ ，求 $P$ 的轨迹。

