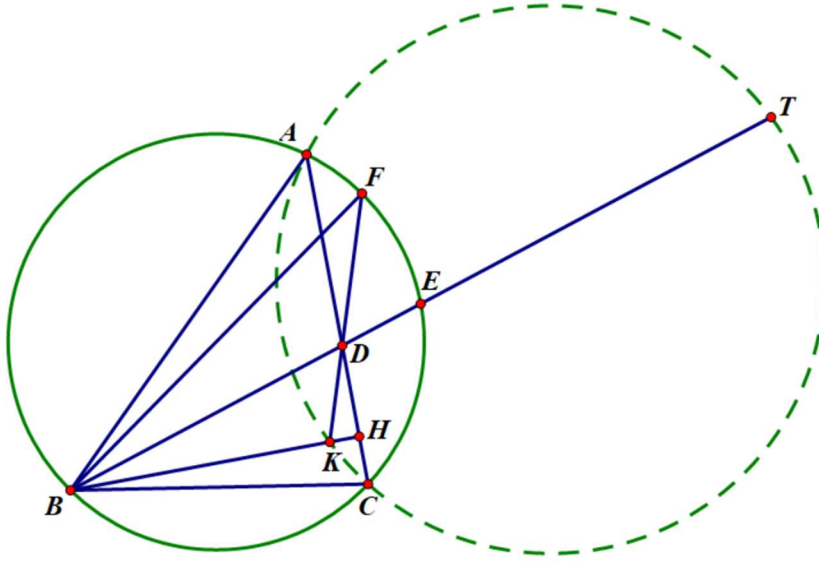


## 第一届 SKTMO

截止日期: 2022.1.12

一. (30分)

如图, 在 $\triangle ABC$ 中,  $BH \perp AC$ 于 $H$ ,  $BT$ 平分 $\angle ABC$ , 交 $AC$ 于 $D$ , 交 $\triangle ABC$ 外接圆于 $E$ , 且 $BE=ET$ ,  $BF$ 为 $\triangle ABC$ 外接圆的一条直径,  $FD$ 交 $BH$ 于 $K$ , 求证:  $A, K, C, T$ 共圆



二. (30分)

求实数M的最大值，使得对于任意正整数a, b, c, d, 均有 $S \geq M$ ，其中：

$$S = \frac{7a}{2b+3c+5d} + \frac{4b}{a+3c+5d} + \frac{2c}{a+2b+5d} + \frac{d}{a+2b+3c}$$

三(40分).

初一(9)班的49名同学们刚完成期中测试，分数居然各不相同。他们班的班主任要召开家长会，家长们坐在 $7 \times 7$ 的座位中。假设一个家长如果发现，自己相邻(前后左右)的家长的孩子的分数至多有一个比她自己孩子的分数高，那么她会对自己的儿子感到满意，否则则不满意。他们班的心理老师希望通过调整座位，使得尽可能多的家长对自己的孩子感到满意。那么请问，心理老师最多可以使多少家长对孩子满意？

四(50分).  
 设数列 $a_n$ 满足 $a_1=2$ , 且  

$$a_n = 2^n - \sum_{d|n, d \neq n} a_d$$
  
 求证:  $n \mid a_n$

By SKTMO 委员会

