

第二届 SKTMO

试题共 4 题，满分 150 分，按照步骤给分

一.(30分)

n 为正整数,求证: $\frac{\sum_{i=0}^{n^2} \sqrt{n+\sqrt{i}}}{\sum_{i=0}^{n^2} \sqrt{n-\sqrt{i}}} = \sqrt{2} + 1$

二.(30分)

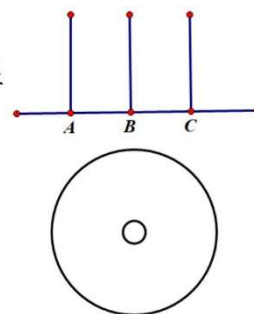
正整数 x, y, n 满足 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} < \frac{1}{n}$ 求 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ 的最大值

三. (40分)

如右上图所示为Hanoi问题。有 n 个大小不一的碟子(右下图)，可以套在三个柱子上。一开始， n 个碟子由小到大排列在柱子 A 上，现要把所有碟子从 A 移动到 C ，规定：

- 1) 一次只能移动一个柱子上最上面，即最小的碟子；
- 2) 大的碟子不能放在小的碟子上；
- 3) 只能在相邻的柱子上移动碟子；

求证：在移动过程中每种可能的碟子的状态至少经过一次。



四. (50分)

设 $\triangle ABC$ 为平面内一给定三角形， P 为 $\triangle ABC$ 内一点， AP 与 $\odot ABC$ 交于 D ， P 关于 BC 的对称点为 P' 。已知 $\triangle PDP'$ 外接圆与 $\triangle ABC$ 外接圆交于一给定的点 T ，求 P 的轨迹。

