

**МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»**

**Академия базовой подготовки
Кафедра «Физика»**

С.М. Кокин, В.А. Никитенко

**ФИЗИКА:
механика, молекулярно-кинетическая теория,
термодинамика, электричество и магнетизм**

Конспект лекций

Москва – 2021

МИНИСТЕРСТВО ТРАНСПОРТА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ТРАНСПОРТА»

Академия базовой подготовки
Кафедра «Физика»

С.М. Кокин, В.А. Никитенко

ФИЗИКА:
механика, молекулярно-кинетическая теория,
термодинамика, электричество и магнетизм

Конспект лекций

для студентов специальностей ИУЦТ, ИТТСУ, ИПСС

Москва – 2021

УДК 530.1 (076)
К-55

Кокин С.М., Никитенко В.А. Физика: механика, молекулярно-кинетическая теория, термодинамика, электричество и магнетизм: Конспект лекций. – М.: РУТ (МИИТ), 2021. – 300 с.

Учебное пособие представляет собой конспект лекций по общей физике, включающий разделы: «Механика», «Молекулярная физика и термодинамика», «Электростатика», «Постоянный электрический ток», «Магнетизм». В основу конспекта положен материал лекций, которые авторы читают в РУТ (МИИТ) для студентов ИУЦТ и ИТТСУ.

Учебное пособие предназначено для студентов специальностей и направлений ИУЦТ, ИТТСУ, ИПСС.

Рецензенты:

И.о. заведующего отделом люминесценции
им. С.И. Вавилова Физического института
им. П.Н. Лебедева Российской Академии наук
(ФИАН) высококвалифицированный главный
научный сотрудник

А.Г. Витухновский

Профессор кафедры «Цифровые технологии
управления транспортными процессами РУТ
(МИИТ)

А.М. Филимонов

© РУТ (МИИТ), 2021

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие является конспектом курса лекций, которые автор читает в первом семестре курса физики студентам РУТ (весь курс рассчитан на два семестра). Обычно учебные планы рассчитываются, исходя из предположения о том, что в каждом семестре будут прочитаны 17 лекций. Однако по различным причинам (к которым относятся праздники, разного рода мероприятия, требующие присутствия на них студентов-первокурсников и т. д.) реальное число лекций за семестр оказывается меньшим. Именно поэтому данный конспект составлен, исходя из предположения, что лекций удаётся прочитать только 16. Впрочем, во введении ко всему конспекту, а также в качестве примеров проявления тех или иных физических эффектов по теме каждой лекции в пособии приведён материал, который может быть использован преподавателем в аудитории в том случае, если потеря в лекционных часах не происходит.

При нехватке лекционного времени часть материала может быть опущена (например, введение)

Конспект не заменяет учебники, рекомендуемые для изучения общей физики; он лишь призван служить дополнительным источником информации, облегчающим освоение студентами этого курса. К числу основных учебников и задачников, используемых в РУТ (МИИТ), относятся следующие:

1. Курс физики: учеб. пособие для студ. вузов / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М.: «Академия», 2008 и далее.
2. Трофимова, Т. И. Курс физики / Т. И. Трофимова. – М.: «Академия», 2010 и далее.
3. Савельев И.В. Курс общей физики в 3-х тт. – М.: Астрель АСТ, 2007 и далее.
4. Волькенштейн В.С. Сборник задач по общему курсу физики. – М.: «Книжный мир», 2007 и далее.
5. Чертов А.Г., Воробьёв А.А. Задачник по физике: Учеб. пособие для вузов. – М.: Изд. Физ.-мат. литературы, 2007 и далее.
6. Сборник задач по дисциплине «Физика» / Под общ. ред. проф. С.М. Кокина – М.: МИИТ, 2006. – 144 с.

ВВЕДЕНИЕ

- Наука и научное знание

На протяжении всей своей истории люди выработали разные способы познания и освоения окружающего их мира, и одним из них является *наука*. Сам термин «наука» – *Science* – происходит от латинского слова *Scientia* (знание). ***Однако не всякое знание является наукой!*** Дело в том, что кроме науки по-своему отражают реальность, формируют свои области знаний, например, ещё искусство и религия. Но лишь *наука создаёт мир знаний, состоящий из экспериментально доказанных данных об этом мире и выводов, полученных на основе законов логики*. В этом мире самому человеку, его субъективным оценкам, предпочтениям отводится весьма незначительная роль.

Когда говорят о *научном методе познания*, то подразумевается, что этот метод основан на следующих принципах:

1. Принцип *причинности*. «Ни одна вещь не возникает беспричинно, но всё возникает на каком-нибудь основании и в силу необходимости», – Демокрит (около 460 – 370 гг. до н. э.). Сказанное означает, что в основе любого следствия всегда должна лежать некоторая причина (возникшее следствие, в свою очередь, может повлиять на причину). Этот принцип имеет объективный и всеобщий характер, и именно поэтому на нём базируется вся материально-техническая деятельность человека.

2. Принцип *воспроизводимости* результатов (Естественно-научная истина проверяется (доказывается) только практикой: наблюдениями, опытами, производственной деятельностью. «Наука началась тогда, когда люди научились мерить; точная наука немыслима без меры», – Д.И. Менделеев (1834 – 1907). Однако говорить о научной истине можно лишь в том случае, если результаты исследований воспроизводимы. Это означает, во первых, что полученный однажды результат должен допускать его повторение независимыми исследователями. Во-вторых, этот критерий выносит в разряд ненаучных такие невоспроизводимые

явления, как, например, НЛО. Конечно, по поводу невоспроизводимых явлений можно строить различного рода предположения, отыскивать подтверждения их справедливости, однако даже после получения серии доказательств, говорящих в их пользу, всегда будет оставаться место для сомнений: нельзя ли тот же результат объяснить по иному? В связи с этим следует вспомнить принцип, предложенный английским философом У. Оккамом (около 1300 – 1350): для объяснения чего-либо «не следует умножать сущности без надобности», то есть не нужно выдумывать новых гипотез, если это «что-то» можно объяснить, исходя из уже известных представлений.

С принципом воспроизводимости результатов тесно связан приведённый выше основной признак, который отличает науку от других способов познания окружающего мира: любая гипотеза должна подвергаться проверке экспериментом (не зря научная гипотеза определяется, как научное предположение, требующее проверки на опыте и теоретического обоснования). Пусть в пользу некоторой гипотезы говорит множество фактов, однако достаточно появиться только одному, который её опровергает, гипотезу придётся пересматривать. Так, например, весь массив накопленных наукой экспериментальных данных говорил в пользу справедливости законов классической механики, однако, в конце XIX – начале XX веков появились результаты новых исследований, и оказалось, что эти законы имеют приближённый характер: была создана специальная теория относительности (А. Эйнштейн, 1879 – 1955).

Отмеченное часто выделяют в **принцип фальсификации и верификации**. **Верификация** – проверка теоретических положений науки путём сопоставления их с чувственными данными, экспериментами или наблюдаемыми объектами. **Фальсификация** – возможность опровергнуть. Если какое – либо учение построено так, что может истолковать любые факты, то есть неопровержимо в принципе, то оно не может называться научным.

3. Принцип возможности *предсказания* новых явлений и эффектов. В основу научной теории гипотеза ложится лишь в том

случае, если на её основе удаётся сделать *предсказания* новых явлений и эффектов, таких, которые, опять-таки допускают экспериментальную проверку, но которые не могут быть объяснены другими гипотезами.

4. Принцип *относительности научного знания*. Научные понятия, идеи, концепции, модели, теории, выводы из них всегда относительно и ограничены. Задача учёного – установить границы соответствия существующего научного знания действительности. Здесь, во-первых, следует помнить, любой эксперимент характеризуется ошибками измерения (погрешностью). Совершенствование процедуры измерений позволяет уменьшить эти ошибки, однако, как ни совершенствуй измерительную аппаратуру, соответствующие погрешности хоть и могут стать меньше, но всё же окончательно не исчезнут, поскольку любой прибор характеризуется вполне определённым диапазоном измерений и чувствительностью.

Во-вторых, существование погрешностей зачастую оказывается принципиально связано с той методикой, с теми теоретическими представлениями, которые положены в основу процедуры измерения. Так, например, долгое время казалось, что по мере совершенствования оптических приборов будут создаваться всё более и более мощные микроскопы, которые, в идеале должны дать возможность измерить размеры отдельных молекулы и атомов. Но этого не произошло из-за того, что для столь малых объектов наблюдения, сами принципы геометрической оптики оказываются неприменимыми. Чем меньше объект, тем более существенной становится необходимость учёта волновых свойств электромагнитного излучения: свет огибает этот объект (явление дифракции), и поэтому увидеть последний оказывается невозможно.

К методам научного познания в настоящее время относят: наблюдение, измерение, индукцию, дедукцию, анализ, синтез, абстрагирование, моделирование и эксперимент

В заключение можно выделить отличительные признаки псевдонауки: фрагментарность, некритический подход к исходным данным, невосприимчивость к критике, отсутствие общих зако-

нов, неверифицированность и нефальсифицированность псевдонаучных данных..

• Описание окружающего мира. Явления и эффекты. Определения. Единицы измерения физических величин. Законы

Понять окружающий мир, это, прежде всего, – описать его. В свою очередь, описание начинается с выявления в природе, в различных областях практической деятельности человека причинно-связанных событий: эффектов и явлений, объяснение которым и даёт наука. Перечислим некоторые из подобных физических явлений:

- **Термоэлектронная эмиссия** – явление испускания электронов нагретыми металлами и полупроводниками;
- **Интерференция** – явление возникновения устойчивой во времени картины распределения максимумов и минимумов колебаний при наложении друг на друга нескольких волн;
- **Радиоактивный распад** – явление распада ядер атомов на более лёгкие ядра и элементарные частицы.

Важным этапом описания наблюдаемого эффекта является введение общепринятых терминов, **определений**, оперируя которыми можно однозначно информировать окружающих о результатах исследований. В каждой области человеческой деятельности есть свои термины и определения. Приведём примеры определений, используемых в физике (а также в разных областях техники): путь, перемещение, ускорение, импульс, работа, давление, потенциал, э. д. с., магнитный поток, индуктивность и т. д. Знакомство с любой новой отраслью знаний, – это, прежде всего, освоение используемой в этой отрасли системой терминов и определений, и физика здесь не является исключением.

Количественное соотношение между параметрами, вводимыми а основе определений, невозможно без установления системы **единиц измерения** величин этих параметров. Часть из этих единиц принимаются за основные (по договорённости для их определения выбираются эталоны), оставшиеся являются производны-

ми, определяемыми через основные (хотя производные единицы зачастую и имеют собственное название).

В широко распространённой в настоящее время международной системе единиц СИ основных единиц семь:

- **метр** – единица измерения длины (м);
- **секунда** – единица измерения времени (с);
- **килограмм** – единица измерения массы (кг);
- **кельвин** – единица измерения температуры (К);
- **моль** – единица измерения количества вещества (моль);
- **ампер** – единица измерения силы тока (А);
- **кандела** – единица измерения силы света (кд).

Примеры производных единиц с указанием того, что в них измеряется: метр в секунду (м/с) – скорость; метр в секунду за секунду, (м/с²) – ускорение; килограмм на метр в секунду (кг·м/с) – импульс.

Примеры производных единиц, которые имеют в СИ собственное название, с указанием того, что в них измеряется и общепринятыми обозначениями соответствующих параметров:

- **ньютон** – сила F ; $1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$;
- **джоуль** – работа A , энергия E , W , количество теплоты Q ;
 $1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2}$;
- **ватт** – мощность N , P ; $1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж} \cdot \text{с}^{-1} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-3}$;
- **паскаль** – давление p ; $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$;
- **кулон** – заряд q ; $1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot \text{с}$;
- **вольт** – потенциал ϕ , напряжение U , э. д. с. \mathcal{E} ;
 $1 \text{ В} = 1 \text{ Дж/Кл} = 1 \text{ кг} \cdot \text{А}^{-1} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-3}$;
- **фарад** – электроёмкость C ; $1 \text{ Ф} = 1 \text{ Кл/В} = 1 \text{ А}^2 \cdot \text{с}^4 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{м}^{-2}$;
- **ом** – электрическое сопротивление R , r ;
 $1 \text{ Ом} = 1 \text{ В/А} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-3} \cdot \text{А}^{-2}$;
- **тесла** – индукция магнитного поля B ;
 $1 \text{ Тл} = 1 \text{ Н/(А} \cdot \text{м)} = 1 \text{ кг} \cdot \text{А}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$;
- **вебер** – магнитный поток Φ ; $1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot \text{м}^2 = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{А}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$;
- **генри** – индуктивность L ; $1 \text{ Гн} = 1 \text{ Вб/А} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{А}^{-2} \cdot \text{с}^{-2}$;

(Напомним, сокращения единиц измерения, названных так в честь известных учёных, пишутся с большой буквы).

На основании экспериментальных данных и теоретических построений, призванных объяснить эти данные, удаётся устанавливать определённые законы. Для количественного отображения связи между соответствующими физическими величинами используются формулы, однако следует помнить, что далеко не всегда записанная формула полностью отображает суть закона. Так, например, формулу для силы Ампера, которая действует на проводник с током, помещённый в магнитное поле, можно записать в виде:

$$F_A = B \cdot I \cdot l \cdot \sin \alpha.$$

Однако, во-первых, следует объяснить, что имеется в виду под символами F_A , I , l , B и о каком угле α идёт речь, но и, во-вторых, необходимо сказать, как определяется направление действия этой силы.

Заметим, многие из переменных, входящих в формулы физических законов, являются векторами, и об этом нельзя забывать. Так, запись формулы для силы Ампера в векторном виде выглядит следующим образом:

$$\vec{F}_A = I \cdot [\vec{l} \vec{B}]$$

(здесь квадратными скобками обозначено векторное произведение векторов \vec{l} и \vec{B} : понятно, что, используя эту формулу, нужно знать, как выбирается направление этих векторов).

Сталкиваясь с конкретной практической ситуацией, исследователь, прежде всего, создаёт её упрощённую *модель*, отражающую основные особенности ситуации. Примерами моделей являются материальная точка, нерастяжимая нить, абсолютно твёрдое тело, идеальный газ, точечный заряд и др. Чем проще модель, тем легче описать её математически. Именно это и имеет место в учебных задачах, которые приведены в стандартных задачниках по физике. В большинстве случаев там сразу понятно, о каких явлениях, эффектах идёт речь, какие законы соответствуют этим явлениям, и какие, описывающие эти законы формулы, должны быть привлечены для решения задачи. В реальности, однако, зачастую неизвестно, какие из параметров являются существенны-

ми, а какие – нет, и только эксперимент подскажет, правильно ли вы рассчитали результат, или он далёк от истины. Но только решая учебные задачи можно научиться «чувствовать ситуацию», овладеть навыками самостоятельной работы, то есть – стать грамотным специалистом.

1.1 КИНЕМАТИКА

1.1.1 Основные понятия

1.1.2 Равномерное движение по прямой

1.1.3 Равнопеременное движение по прямой

1.1.4 Движение вдоль прямой с переменным ускорением

1.1.5 Движение тела, брошенного под углом к горизонту

1.1.6 Движение точки по окружности

Некоторые примеры

Вопросы для повторения

1.1 КИНЕМАТИКА

1.1.1 Основные понятия

Кинематика – раздел физики, в котором решается основная практическая задача, возникающая перед человеком: где окажется движущееся тело в заданный момент времени. Снаряд вылетел из пушки: попадёт в цель или нет? Отправляем корабль: сколько времени понадобится для достижения конца пути? Провожаем поезд: где он окажется через заданный промежуток времени? При этом то, почему происходит движение, что и по какой причине влияет на движущийся объект, в кинематике не обсуждается.

Для решения поставленной задачи, то есть для описания движения тела используется математика.

Как говорилось во введении, прежде, чем начать такое описание, следует ввести серию определений (большая часть из которых должна быть достаточно хорошо известна из школьного курса физики).

Траекторией называется мысленно проведённая в пространстве линия, соединяющая последовательно все точки, в которых побывало (или может побывать) тело в процессе движения. Линия может быть отрезком прямой, окружностью, параболой, спиралью и т. д., при этом любая линия характеризуется вполне определённым численным параметром: своей длиной. Тело пока бу-

дем считать точечным объектом, размеры которого много меньше данной длины.

Путь – это длина траектории (скалярная величина, которая не бывает отрицательной); в СИ измеряется в метрах (или кратных метру единицах: мм, км и т. д.). Из определения следует, что если в какой-то задаче требуется рассчитать путь, пройденный телом, сначала следует представить себе (нарисовать) траекторию его движения, линию, длину которой и нужно будет найти. Линия может состоять из участков разной формы, длину каждого из которых в этом случае придётся рассчитывать отдельно.

Перемещением \vec{r} называется вектор, проведённый из начальной точки траектории в любую другую заданную точку (например, – в конечную). В отличие от пути (параметра, не позволяющего сказать, куда двигалось тело), перемещение даёт возможность определить конечное положение тела в пространстве. Действительно, если выбрать систему координат, например, декартову прямоугольную с осями OX , OY , OZ , начало которой совпадает с началом траектории (рис. 1.1), вектор перемещения окажется радиусом-вектором конечной точки траектории, координаты которой можно обозначить x , y и z . В этом случае основная задача ки-

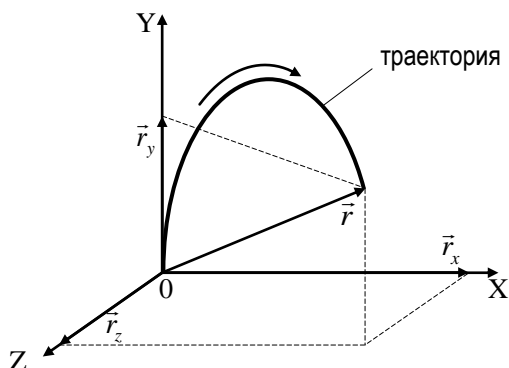


Рис. 1.1

нематики сведётся к вычислению x , y и z в интересующий нас момент времени t . Заметим: $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, и если тело дви-

жется по прямой, систему координат удобно выбирать так, чтобы одна из осей (OX) была направлена вдоль данной прямой. В этом случае проекции вектора перемещения на оси OY и OZ будут равны нулю, а $|\vec{r}| = |\vec{r}_x| = x$.

Следующее определение – скорость тела.

Вообще говоря, в математике скоростью изменения какой-либо функции f называется первая производная этой функции по времени $\frac{df}{dt}$ (другое обозначение производной по времени, использу-

емое со времён Ньютона, – точка над символом функции: \dot{f} ; заметим: производную по координате принято обозначать, не точкой, а штрихом – f' , указывая, если нужно, по какой из координат идёт дифференцирование: f'_x, f'_y, f'_z). Так, можно говорить, что,

например, $\frac{d\vec{B}}{dt}, \frac{dq}{dt}, \frac{d\Phi}{dt}$ и $\frac{dI}{dt}$ – скорости изменения магнитной индукции; заряда; магнитного потока и силы тока соответственно.

В механике **скоростью** \vec{v} (иногда такую скорость называют мгновенной) называется первая производная по времени от вектора \vec{r} перемещения (единица измерения в СИ – $\text{м} \cdot \text{с}^{-1}$):

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} v_x = \dot{x} \\ v_y = \dot{y} \\ v_z = \dot{z} \end{cases} \quad (1.1)$$

Очевидно, что при движении вдоль оси координат OX

$$|\vec{v}| = |\vec{v}_x| \equiv v_x = \dot{x}$$

Ускорением \vec{a} называется первая производная по времени от вектора \vec{v} скорости (скорость изменения скорости):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad \text{или} \quad \begin{cases} a_x = \dot{v}_x \\ a_y = \dot{v}_y \\ a_z = \dot{v}_z \end{cases} \quad (1.2)$$

При движении вдоль оси OX

$$|\vec{a}| = |\vec{a}_x| \equiv a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}.$$

В СИ ускорение измеряется в $\text{м} \cdot \text{с}^{-2}$.

Рассмотрим простейшую ситуацию – движение тела по прямой. Заметим: даже самую сложную траекторию можно представить в виде совокупности некоторого (пусть даже большого) числа прямолинейных участков¹, для каждого из которых можно записать приводимые ниже формулы. Продемонстрируем, как «работают» введённая нами система определений плюс математика.

1.1.2 Равномерное движение по прямой

Равномерным называется движение, при котором выполняется условие

$$\vec{v} = \text{const.} \quad (1.3)$$

Из определений (1.1) ÷ (1.3) следуют несколько выводов.

- Условие (1.3) означает постоянство вектора скорости как по величине, так и по направлению, то есть его выполнение означает, что тело движется по прямой.
- Так как производная от константы равна нулю, то – см. определение (1.2) – при равномерном прямолинейном движении тело не имеет ускорения ($\vec{a} = 0$).
- Выбрав ось координат OX вдоль направления движения тела, можно записать: $v = \dot{x}$, или

$$dx = v dt.$$

Найдем закон, по которому координата тела x меняется со временем t (то есть решим основную задачу кинематики).

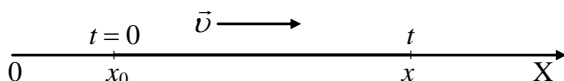


Рис. 1.2

¹ Заметим – любую кривую можно представить в виде совокупности участков окружностей разных радиусов, набора парабол и т. д.

Пусть тело в момент времени $t = 0$ находилось в точке с координатой x_0 . Тогда

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v dt, \text{ или (так как } v = \text{const}): \int_{x_0}^x dx = v \int_0^t dt,$$

$$x - x_0 = vt.$$

Таким образом, при равномерном движении тела по прямой его координата должна меняться со временем по известному из школьной программы закону:

$$x = x_0 + vt. \quad (1.4)$$

Знаки «плюс» перед x_0 и v говорят о том, что при выбранных направлении оси OX и месте нахождения начала отчёта (точки 0) координата x_0 и проекция скорости \vec{v} на ось OX положительны.

1.1.3 Равнопеременное движение по прямой

Равнопеременным называется движение, при котором выполняется условие

$$\vec{a} = \text{const}. \quad (1.5)$$

При этом если вектора скорости и ускорения параллельны ($\vec{a} \uparrow \vec{v}$), то такое движение называется **равноускоренным**: за одинаковые промежутки времени скорость тела увеличивается на одну и ту же величину.

Если вектора \vec{v} и ускорения \vec{a} антипараллельны ($\vec{a} \downarrow \vec{v}$), то такое движение называется **равнозамедленным**: за одинаковые промежутки времени скорость тела уменьшается на одну и ту же величину.

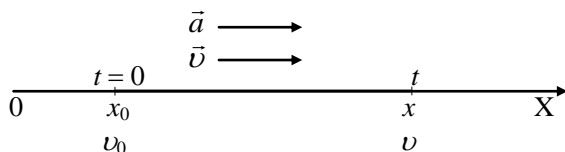


Рис. 1.3

Использование определения (1.5) позволяет вывести зависимости скорости v от времени t при равноускоренном движении. Так, выбрав ось координат вдоль направления движения тела (рис 1.3), можно записать: $a = \dot{v}$, или $dv = a dt$. Если тело в момент времени $t = 0$ тело имело скорость v_0 , то

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt, \quad \text{или (так как } a = \text{const}): \quad \int_{v_0}^v dv = a \int_0^t dt,$$

$$v - v_0 = at.$$

Таким образом, при равнопеременном движении тела по прямой его скорость меняется со временем по закону:

$$v = v_0 \pm at. \quad (1.6)$$

Знак «плюс» в этой формуле соответствует равноускоренному движению, знак «минус» – равнозамедленному.

Теперь выведем зависимость координаты x тела от времени t при равноускоренном движении.

Выбрав ось координат OX вдоль направления движения тела, можно вновь записать: $v = \dot{x}$, или

$$dx = v dt = (v_0 \pm at) dt.$$

Вновь полагая, что моменту времени $t = 0$ соответствует координата x_0 , запишем:

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v dt = \int_0^t (v_0 + at) dt = v_0 t + \frac{at^2}{2};$$

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}. \quad (1.7)$$

Какой знак («плюс» или «минус») следует поставить перед начальной скоростью v_0 и ускорением a в уравнениях (1.6) – (1.7), зависит от того, совпадают ли (знак «плюс») или нет (знак «минус») направления соответственно векторов \vec{v}_0 и \vec{a} с направлением выбранной оси координат OX .

На рис. 1.4. приведены примеры графиков зависимостей от времени координаты, скорости и ускорения при равномерном, равноускоренном и равнозамедленном движении.

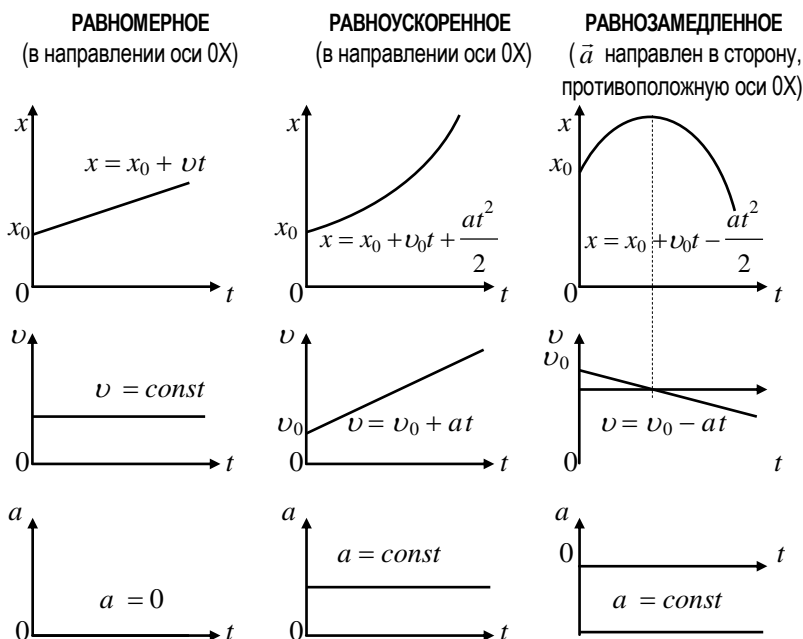


Рис. 1.4

1.1.4 Движение вдоль прямой с переменным ускорением

Не нужно думать, что движение тела по прямой может быть только либо равномерным ($\vec{v} = const$), либо равнопеременным ($\vec{a} = const$). На практике часто возникают ситуации, когда ускорение тела (a , следовательно, и его скорость, как производная по времени от ускорения) меняются со временем. Простейший пример – гармонические колебания, в ходе которых координата тела меняется по синусоидальному (гармоническому) закону:

$$\begin{aligned}
 x &= A \sin(\omega t + \alpha), \\
 v &= \dot{x} = A\omega \cos(\omega t + \alpha) \neq const, \\
 a &= \dot{v} = \ddot{x} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha) \neq const.
 \end{aligned}
 \tag{1.8}$$

Еще один пример движения, которое не является ни равномерным и ни равнопеременным – движение транспортного средства в режиме, когда меняется сила тяги $F_{\text{тяги}}$ мотора. Как следует из второго закона Ньютона, для тела постоянной массы m ускорение $a = F_{\text{тяги}}/m$, и, следовательно, изменение по какому-либо закону со временем силы тяги (например, вследствие использования водителем педали «газ») должно сопровождаться соответствующим изменением ускорения a тела.

В заключение заметим, что на практике часто используется понятие *средней путевой скорости*, которое применяется для характеристики движения с переменными скоростью и ускорением. В отличие от \vec{v} эта скорость не является вектором и определяется, как отношение всего пройденного телом пути S ко всему затраченному времени Δt , то есть $v_{\text{ср}} = S/\Delta t$.

1.1.5 Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Если пренебречь действием силы сопротивления воздуха, траекторией такого движения этого тела окажется кривая – парабола (рис. 1.5). При этом такое движение можно представить в виде совокупности двух прямолинейных движений: одного (по горизонтали) – равномерного, его можно описать формулой (1.4), и, по вертикали, – равнопеременного, описываемого формулами (1.6 и 1.7).

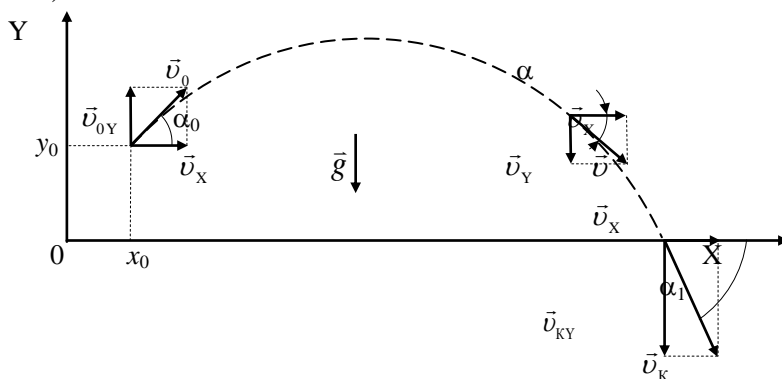


Рис. 1.5

Движение по горизонтали (ось OX) является равномерным, так как в этом направлении на тело не действуют никакие силы, и, следовательно, ускорение тела в этом направлении равно нулю, то есть горизонтальная компонента вектора скорости v_x постоянна.

По вертикали на тело действует лишь одна постоянная сила – сила тяжести $m\vec{g}$, создающая постоянное же ускорение (примерно $9,8 \text{ м/с}^2$). Следовательно, движение по вертикали является равнопеременным, и это означает, что компонента v_y скорости тела вдоль вертикальной оси (обозначим её OY и направим в сторону, противоположную вектору \vec{g}) меняется по закону

$$v_y = v_{0y} - gt.$$

Соответственно, изменение координаты y описывается выражением $y = y_0 + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}$. Учитывая связь компонент вектора скорости с самой скоростью (теорема Пифагора), а также с углом α , образуемым вектором \vec{v} с осью OX (направленной вдоль поверхности Земли) – см. рис. 1.5, можно записать следующие пять формул, которые позволяют легко решать стандартные задачи кинематики для тела, траекторией которого является парабола:

$$\begin{aligned}x &= x_0 + v_x t \\y &= y_0 + v_{0y}t + \frac{at^2}{2} \\v_y &= v_{0y} + at \\v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \\tg\alpha &= \frac{v_y}{v_x}.\end{aligned}$$

1.1.6 Движение точки по окружности

Для описания движения точки по окружности в декартовой системе координат необходимо знать законы изменения со временем хотя бы двух её линейных координат: $x(t)$ и $y(t)$ – см. рис. 1.6.

Можно, однако, упростить задачу, перейдя от декартовых координат к полярным, в которых для описания движения по окружности достаточно знать радиус этой окружности r (который со временем не меняется), и всего лишь одну зависимость от времени – для угловой координаты (угла поворота φ). В этом случае оказывается, что понятия, введённые для поступательного движения, не только могут быть использованы для описания движения по окружности, но и получаемые при этом формулы приобретают уже знакомый нам вид.

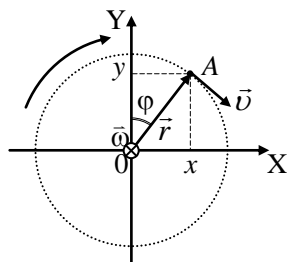


Рис. 1.6

Итак, положение точки на плоскости мы будем задавать вектором $\vec{\varphi}$, по величине, равным углу поворота относительно выбранной оси (на рисунке – это ось OY). Сам вектор $\vec{\varphi}$ (вектора такого типа называются аксиальными) направлен вдоль оси вращения в соответствии с «правилом винта (буравчика)»: поворачивая винт в сторону возрастания угла, определяем, куда движется тело самого винта – это и есть направление вектора $\vec{\varphi}$. На рис. 1.6, на котором увеличению угла соответствует вращательное движение точки A по часовой стрелке, вектор $\vec{\varphi}$ направлен из точки O по оси вращения вглубь плоскости рисунка.

По определению вектор

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \quad (1.9)$$

называется **угловой скоростью** движения точки по окружности. В СИ величину угла принято измерять в радианах, единица измерения угловой скорости – **рад·с⁻¹**. Вектор $\vec{\omega}$ также направлен вдоль оси вращения: в ту же сторону, что и $\vec{\varphi}$, если угол растёт, или в противоположную, если угол φ уменьшается. На рис. 1.6 вектор $\vec{\omega}$ так же, как и $\vec{\varphi}$, направлен вдоль оси вращения «от нас».

Угловым ускорением $\vec{\varepsilon}$ называется скорость изменения угловой скорости:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}, \quad (1.10)$$

величина углового ускорения измеряется в **рад·с⁻²**. Если в процессе движения угловая скорость растёт, значит, вектор $\vec{\varepsilon}$ направлен в ту же сторону, что и вектор $\vec{\omega}$, если угловая скорость уменьшается, то вектор $\vec{\varepsilon}$ хотя и направлен вдоль оси вращения, но антипараллелен вектору $\vec{\omega}$.

Равномерным называется вращение, при котором $\vec{\omega} = const$. Действуя так же, как в случае рассмотрения равномерного движения точки по прямой, можно легко показать, что при таком движении зависимость угла поворота от времени будет выражаться формулой

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t \quad (1.11)$$

Здесь φ_0 – значение угла в начальный ($t = 0$) момент времени; знак перед вторым слагаемым зависит от того, в какую сторону направлен вектор $\vec{\omega}$: если при движении точки угол φ растёт, то тогда пишем «+», если уменьшается (становится меньше φ_0) – знак «-».

Время T , за которое совершается один полный оборот (при этом $\varphi - \varphi_0 = 2\pi$), называется **периодом** обращения точки вокруг оси. Таким образом,

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (1.12)$$

Равнопеременным называется движение по окружности, при котором $\vec{\varepsilon} = const$. При этом если $\vec{\varepsilon} \uparrow \vec{\omega}$, вращение называется **равноускоренным**, а если $\vec{\varepsilon} \downarrow \vec{\omega}$ – **равнозамедленным**.

Аналогично тому, как это было сделано при выводе формул (1.6) и (1.7), можно записать, что при равнопеременном вращении с начальной скоростью ω_0 зависимости $\omega(t)$ и $\varphi(t)$ имеют вид:

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t; \quad (1.13)$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}. \quad (1.14)$$

Перед значениями ω_0 и ε для тех из векторов $\vec{\omega}_0$ и $\vec{\varepsilon}$, которые направлены в сторону, противоположную вектору $\vec{\phi}$, в формулах (1.13) и (1.14) пишется знак «минус».

В каждый момент времени величина линейной скорости точки v при движении по окружности радиусом r связана с её угловой скоростью соотношением $v = \omega r$. Если точка движется по траектории сложной формы, то в каждый момент времени для положения, характеризующегося радиус-вектором \vec{r} , проведённым из любой заданной точки, её линейную и угловую скорости относительно этой точки можно связать формулой

$$\vec{v} = [\vec{\omega} \vec{r}]. \quad (1.15)$$

Произведение \vec{a} и \vec{b} вида $\vec{c} = [\vec{a} \vec{b}]$ называется векторным; его результатом является вектор \vec{c} такой длины, что $c = ab \cdot \sin \alpha$ (здесь α – угол между векторами \vec{a} и \vec{b}). Направление вектора \vec{c} определяется по правилу буравчика или по «правилу левой руки»: пальцы ладони направляются по вектору \vec{a} так, чтобы вектор \vec{b} «входил» в ладонь, при этом отставленный в сторону большой палец будет показывать направление \vec{c} .

При движении по окружности все три вектора (\vec{r} , \vec{v} и $\vec{\omega}$) оказываются взаимно перпендикулярными, то есть, формула (1.15) приобретает вид $v = \omega r$. Используя «правило левой руки» для рис. 1.6, то есть, направляя пальцы ладони по радиус-вектору \vec{r} так, чтобы вектор линейной скорости точки \vec{v} «входил» в ладонь, по отставленному в сторону большому пальцу находим направление $\vec{\omega}$ (из точки 0 по оси вращения вглубь плоскости рисунка).

Равнопеременное движение по любой кривой означает, что вектор линейной скорости \vec{v} непрерывно меняет свою величину. Соответствующее этому явлению линейное ускорение \vec{a}_τ называется **тангенциальным**, в общем случае оно связано с угловым ускорением $\vec{\varepsilon}$ векторным произведением

$$\vec{a}_\tau = [\vec{\varepsilon} \vec{r}]. \quad (1.16)$$

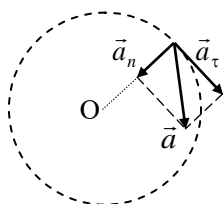
В частности, при равнопеременном движении по окружности

$a_\tau = \varepsilon r$, поскольку вектора \vec{r} , \vec{a}_τ и $\vec{\varepsilon}$ взаимно перпендикулярны.

Если $\varepsilon = 0$, то $\omega = \text{const}$, и движение по окружности является равномерным. Но даже в этом случае вектор скорость \vec{v} меняется – по направлению. Это означает, что имеет место ускорение \vec{a}_n , которое называется **нормальным** (или **центростремительным** \vec{a}_{uc}) и при этом направлено перпендикулярно вектору \vec{v} в сторону центра окружности, по которой движется точка. Можно показать, что

$$a_{uc} = \frac{v^2}{r}, \text{ или, с учётом формулы (1.15), } a_{uc} = \omega^2 r. \quad (1.17)$$

Движение по прямой можно представить, как движение по окружности бесконечно большого радиуса, при этом $\vec{a}_n = 0$, а \vec{a}_τ совпадает с обычным линейным ускорением точки \vec{a} . При равномерном движении по окружности нулю равно тангенциальное ускорение \vec{a}_τ , то есть $\vec{a} = \vec{a}_n$. В общем случае при движении с



ускорением по любой кривой полное ускорение точки \vec{a} является векторной суммой \vec{a}_τ и \vec{a}_n , а поскольку они взаимно перпендикулярны, то

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}. \quad (1.18)$$

Рис. 1.7

Сказанное поясняется рисунком 1.7.

Таким образом, в рамках данной лекции, мы показали как, основываясь лишь на определениях и используя при этом известные математические операции, можно построить основы целого раздела физики, описывающего перемещение тела в пространстве и позволяющего, тем самым, решать важные в практическом отношении задачи.

Некоторые примеры

О пути

- Длина первой железной дороги России, построенной в 1837 году, (Петербург – Царское село) – 26 км.
- Длина железнодорожной магистрали Москва – Санкт-Петербург (открыта в 1851 году) – 650 км.
- Длина самого длинного в мире железнодорожного тоннеля (Симплтон I, Швейцария) – 19,825 км.
- Длина Северо-Муйского тоннеля (Байкало-Амурская магистраль) – около 15 км;
- Длина самой большой в мире электрифицированной магистрали (Брест – Минск – Москва – Омск – Иркутск – Хабаровск – Уссурийск) – 10400 км.
- Тормозной путь электрички – до 0,5 км.
- Тормозной путь поезда (зависит от массы и скорости состава) – до 2 км.

О скорости

При описании движения тел термин «скорость» может использоваться в более широком, чем это соответствует формуле (1.1) смысле. Так, можно говорить о **крейсерской** скорости транспортного средства (эта скорость соответствует движению по маршруту без учёта участков разгона и торможения), о **коммерческой** скорости (эта скорость характеризует движение груза по маршруту с учётом всех задержек, связанных с перегрузкой с одного транспортного средства на другое, с оформлением документации и т. д.), о **конструкционной** скорости (максимальной скорости, закладываемой конструктором в проектируемый объект), и др. Каждый такой «вид» скорости имеет собственное определение, поскольку позволяет ответить на вполне определённые практически значимые вопросы. В частности, как мы уже говорили выше, на практике помимо введённой нами мгновенной скорости \vec{v} используется понятие **средней путевой скорости**.

Мы уже говорили о том, что в СИ единицей измерения скорости является метр в секунду: $[v] = \text{м} \cdot \text{с}^{-1}$. Однако допускается использование и других единиц измерения: км/ч, км/с, см/с и др.

- Максимальная скорость первого паровоза (1803 г., Р. Третвик, Англия) – 10 км/ч.
- Скорость паровоза «Ракета» (1829 г., Д. Стефенсон, Англия) – 50 км/ч.
- Скорость первого российского паровоза (1834 г., отец и сын Черепановы) – 15 км/ч.
- Скорость поезда на трассе Париж – Бордо, Франция – до 350 км/ч.
- Рекорд скорости для обычных поездов на скоростной трассе Париж – Страсбург – до 574,8 км/ч (2007 г.).
- Скорость экспериментальной модели поезда, движущегося в специально проложенной вакуумной трубе (Япония) – до 2535 км/ч.
- Скорость звука в воздухе – $330 \text{ м/с} = 1188 \text{ км/ч}$.
- Скорость света в вакууме – $2,98 \cdot 10^8 \text{ м/с}$

Об ускорении

Единица измерения ускорения в СИ: $[a] = \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$.

Некоторые примеры.

- Обычное ускорение при начале движения поезда – до $0,3 \text{ м/с}^2$.
- Допустимое ускорение поезда (считается при больших ускорениях у пассажиров возникают ощутимые неудобства) – $1,5 \text{ м/с}^2$;
- Ускорение поезда при экстренном торможении – около 1 м/с^2
- Ускорение, возникающее при использовании специально разрабатываемых тормозов для скоростных поездов – до $1,9 \text{ м/с}^2$.

Вопросы для повторения

1. Дайте определения основных терминов, используемых в кинематике: траектории, пути, перемещения, скорости, ускорения, средней скорости.
2. Какие виды движения точки по прямой и по окружности Вам известны? Дайте определения этим видам движения.
3. Выведите формулы, описывающие изменение со временем координаты точки при её движении по прямой в случаях разных видов движения.
4. Запишите формулы, описывающие изменение со временем координат точки при её движении по параболе.

5. Выведите формулы, описывающие изменение со временем угловой координаты точки при её движении по окружности в случаях разных видов движения.
6. Дайте определения основных параметров, используемых при описании движения точки по окружности.
7. Как связаны между собою линейные и угловые характеристики движения тела по окружности?
8. Приведите примеры характерных значений расстояний, скоростей и ускорений, с которыми мы сталкиваемся на железнодорожном транспорте.
9. Каково максимально достижимое значение скорости в нашей Вселенной? Какой физический объект имеет эту скорость?

2.1 МАССА И ИМПУЛЬС ТЕЛА

2.1.1 *Масса*

2.1.2 *Импульс*

2.2 ДИНАМИКА. ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

2.2.1 *Понятие силы. Инерциальные системы отсчёта. Первый закон Ньютона*

2.2.2 *Второй закон Ньютона*

2.2.3 *Третий закон Ньютона. Вес тела*

2.2.4 *Закон Всемирного тяготения*

2.2.5 *Примеры сил. Рекомендации к решению типовых задач по физике*

Некоторые примеры

Вопросы для повторения

2.1 МАССА И ИМПУЛЬС ТЕЛА

2.1.1 *Масса*

Практика показывает, что при одном и том же воздействии разные тела приобретают неодинаковые скорости. Поместим на гладкую горизонтальную поверхность вблизи неподвижной стенки тело (брусок) А и установим между стенкой и телом сжатую пружину (рис. 2.1.а). Если пружину отпустить, первоначально покоившееся тело придёт в движение и в итоге приобретёт некоторую скорость v_1 .

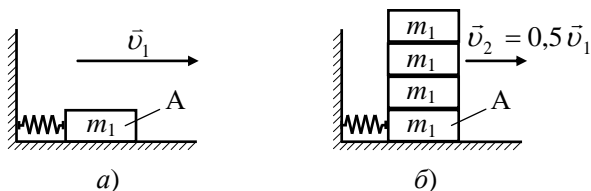


Рис. 2.1

Прикрепим к бруску А ещё три таких же – рис. 2.1.б, вновь сожмём пружину (так же, как и в предыдущем случае) и затем отпустим её: после разлёта скорость v_2 системы из четырёх тел окажется вдвое меньше, чем у одного тела А. Система из девяти одинаковых скреплённых тел после распрямления пружины будет иметь в три раза меньшую скорость и т. д. Таким образом, данный эксперимент даёт возможность количественно описать инертные свойства системы, её способность ускоряться или замедляться в результате внешних воздействий. Мерой инертных свойств тела является его масса.

Пусть брусок А – эталонное тело, и ему соответствует эталонная масса $m_1 = 1$ (единицу измерения этого параметра в СИ называют килограммом). Тогда массу m любого другого тела можно определить, сравнив его скорость в условиях нашего эксперимента со скоростью эталона:

$$\frac{v_1^2}{v^2} = \frac{m}{m_1}, \quad \text{или} \quad m = \frac{v_1^2}{v^2} m_1 \text{ (кг)}.$$

За массу в 1 кг в своё время была выбрана масса 1 л дистиллированной воды, взятой при +4 °С (именно при этой температуре вода имеет максимальную плотность). Из платиново-иридиевого сплава была изготовлена гиря такой же массы, которая и считается первым эталоном одного килограмма. Гиря хранится в Парижской палате мер и весов (промышленно развитые страны имеют копии этого эталона).

2.1.2 Импульс

Импульсом материальной точки назовём вектор

$$\vec{p} = m \vec{v}, \quad (2.1)$$

где m – масса материальной точки, \vec{v} – её скорость. Любое тело можно представить в виде системы – совокупности частей с массами m_i и скоростями \vec{v}_i каждая. В этом случае импульсом тела,

состоящего из N частей, каждую из которых с хорошей точностью можно считать материальной точкой, назовём вектор

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i.$$

Аналогично, для системы тел:

$$\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i,$$

где \vec{p}_i – импульс каждого отдельного тела.

Единица измерения импульса в СИ – $\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1}$.

Важно: импульс является вектором, то есть за обозначением \vec{p} скрываются три скалярных величины (проекции импульса на выбираемые в условиях каждой конкретной задачи оси координат): p_x , p_y и p_z .

2.2 ДИНАМИКА. ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

2.2.1 Понятие силы. Инерциальные системы отсчёта. Первый закон Ньютона

Если кинематика занимается описанием характера движения тела, не рассматривая причин возникновения и изменения этого движения, то центральной идеей динамики как раз и является учёт причин внешнего воздействия на тело. Для описания каждого воздействия вводится вектор соответствующей ему силы \vec{F}_i , но поскольку воздействия могут быть совершенно разными, то единого определения (такого, как, например, для скорости, ускорения, импульса) вектору силы дать не удаётся, хотя условно можно сказать, что это мера воздействия со стороны одного тела на другое).

Вообще говоря, в природе существуют только четыре вида фундаментальных взаимодействий, к которым сводятся все силы: гравитационное, электромагнитное, сильное и слабое. Последние два проявляются на уровне микромира; в обыденной жизни мы

чаще всего имеем дело с первыми двумя, причём практически всё то, что мы обозначаем термином «сила» (силы реакции опоры, трения, упругости и многие другие), в итоге является следствием электромагнитного взаимодействия зарядов, входящих в состав атомов и молекул.

Об основных видах сил, с которыми мы встречаемся при решении практических задач, мы поговорим ниже.

Прежде, чем мы обсудим законы динамики Ньютона, следует дать ещё одно определение.

Системой отсчёта будем называть совокупность системы координат и устройства, отсчитывающего время (часов). Как мы уже отмечали на первой лекции, чаще всего на практике используется декартова прямоугольная система координат.

Первый закон Ньютона: *существуют такие системы отсчёта, в которых тело движется равномерно прямолинейно или покоится до тех пор, пока внешние воздействия не выведут его из этого состояния.*

Таким образом: а) вслед за Ньютоном мы постулируем наличие таких систем отсчёта, в которых выполняется закон, и б) мы делаем вывод о том, что в данной системе отсчёта тело будет двигаться равномерно прямолинейно или покоиться, если на него не действуют внешние силы.

В реальности, конечно, невозможно представить себе тело, на которое вообще никакие силы не действуют: на все объекты, например, действуют силы гравитационного притяжения со стороны других тел. Но поскольку сила является вектором, может оказаться, что сумма всех сил, действующих на тело со стороны других объектов, равна нулю ($\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = 0$), и тогда, действительно, скорость тела будет постоянной (или даже равной нулю).

Системы отсчёта, в которых выполняется этот закон, называются **инерциальными**.

Таким образом, инерциальными являются любые системы отсчёта, которые покоятся друг относительно друга, или одна из них движется относительно другой равномерно прямолинейно.

Следует помнить, что равномерное прямолинейное движение в природе встречается достаточно редко и длится недолго. Так, например, с домом у дороги и с проезжающим мимо него с заданной скоростью автомобилем можно связать инерциальные системы отсчёта, однако следует помнить, что поверхность Земли не является плоскостью, а, значит, организовать по её поверхности прямолинейное движение не так-то легко.

Сама Земля вращается как вокруг своей оси, так и вокруг Солнца, поэтому системы отсчёта, связанные с Солнцем и Землёй, вообще говоря, инерциальными считать тоже нельзя...

2.2.2 Второй закон Ньютона

Как правило, любое тело одновременно испытывает воздействие со стороны многих объектов, то есть на него действует не одна, а несколько сил. Согласно второму закону Ньютона **сумма всех сил, действующих на тело - материальную точку, равна скорости изменения его импульса:**

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (2.2)$$

Заметим, что сила – вектор, и суммирование в этой формуле должно производиться по правилам сложения векторов (по правилу параллелограмма или же по отдельности для каждой из проекций сил).

Формулировка закона ещё раз напоминает нам, что скоростью изменения какой-либо функции (в нашем случае – импульса) называется первая производная этой функции по времени.

Проанализируем выражение (2.2).

Сумму всех сил, действующих на тело, заменим одной результирующей силой:

$$\vec{F}_{рез} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i.$$

Воспользовавшись определением импульса, распишем, чему равна скорость его изменения:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt}.$$

По определению ускорения – см. формулу (1.2):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \text{ то есть } \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} + \vec{v} \frac{dm}{dt}.$$

Если масса тела не меняется в процессе его движения ($m = const$, или $\frac{dm}{dt} = 0$), то формула (2.2) приобретает вид, хорошо известный из школьного курса физики:

$$\vec{F}_{рез} = m\vec{a}. \quad (2.3)$$

Таким образом, известное выражение (2.3) справедливо лишь для случая, когда масса тела, движущегося под действием некоторой постоянной силы $\vec{F}_{рез}$, не меняется со временем.

Давайте ответим на вопрос, меняется ли в процессе движения

- масса грузовика? (Да? Нет?)
- масса самолёта? (Да? Нет?)
- масса стартовой ракеты? (Да? Нет?)

В последнем случае очевиден ответ – «Да», поскольку при взлёте ракеты сжигаются десятки тонн горючего (да и ставшие пустыми баки разгонных ступеней сбрасываются). Но горючее сжигается и при полёте самолёта, и при движении грузовика! Просто соответствующим изменением массы мы зачастую пренебрегаем по сравнению с массой самого движущегося объекта: именно поэтому при решении школьных задач из раздела «динамика» мы привыкли использовать формулу второго закона Ньютона не в виде (2.2), а в виде (2.3).

Существует ещё одно важное соображение, которое необходимо иметь в виду, когда мы говорим, что именно формула (2.2), а не (2.3) является основной для второго закона.

Дело в том, что импульс тела с увеличением его скорости возрастает не прямо пропорционально v . Более общая по сравнению с классической механикой теория – специальная теория относительности – говорит о том, что на самом деле импульс тела связан с его скоростью соотношением

$$\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2.4)$$

где m_0 – масса покоящегося тела (масса покоя); c – скорость света в вакууме.

Дробь $m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ в формуле (2.4) часто интерпретируется, как масса m тела, движущегося со скоростью v :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (2.5)$$

Сказанное означает, что по мере разгона тела его масса увеличивается. Особенно заметным это оказывается при достижении скоростей, близких к скорости света: при $v \ll c$ (что как раз и имеет место в классической механике) подкоренное выражение в формулах (2.4) и (2.5) практически равно единице, и $m \approx m_0$. Однако, если всё же учесть возможность разгона тела до больших скоростей, то понятно, что формула второго закона Ньютона в виде (2.3) при этом перестанет работать, в то время как выражение (2.2) с учётом формулы (2.4) для импульса будет по-прежнему оставаться справедливым.

Для современных науки и техники процессы, в которых подтверждается справедливость релятивистских (от английского *relativity* – относительность) соотношений (2.4) и (2.5), стали уже вполне обыденными, не вызывает сомнений и корректность приведённой выше формулировки второго закона Ньютона. Тем удивительнее то, что Ньютон, живший за две с лишним сотни лет до создания СТО, сформулировал свой второй закон именно в виде

(2.2) – общим, справедливым даже в релятивистской физике, а не в упрощённом (2.3), который применим только в физике классической (и то лишь, если $m = \text{const}$).

В заключение заметим, что формулы (2.2) и (2.3) позволяют определить единицу измерения силы. В СИ сила измеряется в ньютонах; $1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$.

2.2.3 Третий закон Ньютона. Вес тела

Всякое действие носит характер взаимодействия; силы взаимодействия равны по величине и противоположны по направлению.

Пример: Тело, подвешенное на нити, на пружине, лежащее на твёрдой поверхности, плавающее в жидкости действует на свою опору (нить, пружину, твёрдую поверхность, жидкость) с некоторой силой \vec{P} .

Сила \vec{P} , с которой тело действует на опору, называется **весом тела**.

Вес и сила реакции опоры приложены к разным телам и поэтому не могут уравновешивать друг друга!

На рис. 2.2.а) изображен кубик, лежащий на полу. Вес – это сила \vec{P} , приложенная к поверхности пола; под действием этой силы пол немного прогибается. В свою очередь, пол действует на нижнюю часть тела с силой \vec{N} (сила реакции опоры) – рис. 2.2.б). Кроме силы \vec{N} на тело действует сила тяжести $m\vec{g}$, приложенная

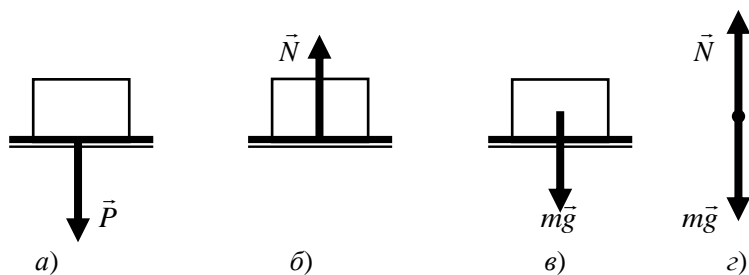


Рис. 2.2

к центру кубика – рис. 2.2.б). Поскольку кубик не вращается, его можно считать материальной точкой, к которой приложены всего две силы: \vec{N} и $m\vec{g}$ – рис. 2.2.в), причём в состоянии покоя должно выполняться условие:

$$\vec{N} + m\vec{g} = 0. \quad (2.6)$$

Так как по третьему закону Ньютона

$$\vec{P} = -\vec{N}, \quad (2.7)$$

то это означает, что в состоянии покоя

$$\vec{P} = m\vec{g}, \quad (2.8)$$

Если же кубик движется с ускорением \vec{a} (лежит на полу движущейся с ускорением кабины лифта), согласно второму закону Ньютона для него следует записать:

$$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}, \quad (2.9)$$

что, с учётом формулы (2.8), означает:

$$\vec{P} = m\vec{g} - m\vec{a}. \quad (2.10)$$

Если вектор \vec{a} направлен туда же, куда и вектор \vec{g} , вес тела \vec{P} будет меньше силы тяжести $m\vec{g}$ (при $\vec{a} = \vec{g}$ вес вообще исчезнет, наступит состояние **невесомости**). Если же вектора \vec{a} и \vec{g} направлены в противоположные стороны, возникает состояние **перегрузки**: вес тела оказывается больше его силы тяжести.

2.2.4 Закон Всемирного тяготения

Как мы уже говорили, в природе существуют четыре вида фундаментальных взаимодействий, одним из которых является гравитационное. В основе классической теории гравитации лежит открытый Ньютоном закон Всемирного тяготения, согласно которому:

- все тела в природе притягиваются друг к другу;
- сила притяжения прямо пропорциональна произведению масс тел и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними;

– если тела – однородные шары, сферы или их можно считать точечными, справедлива формула (см. рис. 2.3)

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (2.11)$$

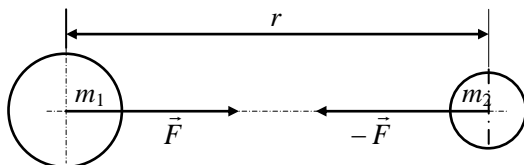


Рис. 2.3

В этой формуле $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}$ – гравитационная постоянная, m_1 – масса первого тела, m_2 – масса второго тела, r – расстояние между центрами тел (шаров, сфер), F – сила их гравитационного притяжения.

С некоторыми примерами применения этого закона мы встретимся позднее.

2.2.5 Примеры сил. Рекомендации к решению типовых задач по физике

• Если в задаче встречается слово «сила», следует вспомнить формулу второго закона Ньютона. При этом если масса тела, о котором идёт речь в задаче, постоянна, то:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = m \vec{a}. \quad (2.12)$$

Далее необходимо:

- на чертеже изобразить все силы, действующие на тело, о котором идёт речь в задаче;
- начертить оси координат (одну из осей удобно направлять вдоль направления вектора ускорения тела \vec{a});
- изобразить проекции всех сил на выбранные оси;
- формулу (2.12) переписать для проекций сил.

- Если в задаче идёт речь о весе тела, для её решения следует переходить от веса к силе реакции опоры:

$$|\vec{P}| = |\vec{N}|. \quad (2.13)$$

Это связано с тем, что к телу приложена именно сила реакции опоры, а не вес, то есть в формуле (2.12) должна фигурировать сила \vec{N} , а не \vec{P} .

- Если в задаче идёт речь о коэффициенте трения скольжения, для её решения следует записать формулу

$$F_{\text{тр}} = \mu N, \quad (2.14)$$

где $F_{\text{тр}}$ – сила трения скольжения, N – сила реакции опоры, μ – коэффициент трения скольжения (зависит, прежде всего, от природы трущихся тел).

- Если в задаче идёт речь о пружине, для её решения следует записать формулу:

$$F_{\text{упр}} = -kx, \quad (2.15)$$

где $F_{\text{упр}}$ – сила упругости, с которой пружина действует на объект; x – смещение объекта от положения равновесия, k – коэффициент жёсткости пружины, который зависит от свойств материала, из которого изготовлена пружина, от её размеров и формы¹.

При решении задач полезно помнить, что коэффициент жёсткости k входит также в выражение для потенциальной энергии упруго деформированной пружины $W_{\text{п}} = \frac{1}{2}kx^2$, которое мы выведем на одной из следующих лекций, а также в формулу для периода гармонических колебаний тела на пружине (пружинного маятника) $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ (её мы выведем в начале следующего семестра).

- Если в задаче идёт речь о спутниках, планетах, других космических объектах, для её решения необходимо записать формулу (2.11) закона Всемирного тяготения.

¹ Аббревиатура **МРФ** помогает запомнить, что именно **Материалом**, **Размерами** и **Формой** определяется величина многих физических параметров различных объектов: их электроёмкости, электрического сопротивления, индуктивности и т. д.

- Если в задаче идёт речь о теле, погружённом в жидкость (газ), для её решения следует записать формулу закона Архимеда:

$$F_{\text{выт}} = \rho_{\text{ж}} g V_{\text{тела}}. \quad (2.16)$$

Здесь $F_{\text{выт}}$ – выталкивающая сила, $\rho_{\text{ж}}$ – плотность жидкости (газа), $V_{\text{тела}}$ – объём части тела, погружённой в жидкость (газ).

- Если в задаче идёт речь о взаимодействующих точечных зарядах, следует записать формулу закона Кулона. Согласно этому закону:

- разноимённо заряженные тела притягиваются друг к другу, одноимённо заряженные – отталкиваются;
- сила взаимодействия точечных зарядов прямо пропорциональна произведению этих зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними;
- если тела – однородно заряженные шары, сферы или их можно считать точечными зарядами, справедлива формула (см. рис. 2.4)

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (2.17)$$

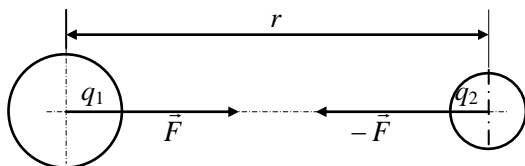


Рис. 2.4

В формуле (2.17) $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{Ф/м}$ – электрическая постоянная, q_1 – заряд первого тела, q_2 – заряд второго тела (на рис. 2.4 знаки зарядов противоположные), r – расстояние между центрами тел (шаров, сфер), ϵ – диэлектрическая проницаемость среды, в которой находятся тела, F – сила их электростатического взаимодействия.

Как мы отметим далее, если хотя бы одно из взаимодействующих заряженных тел – не точечное, не равномерно заряженные

шарик или сфера, напрямую формулой закона Кулона пользоваться нельзя, следует выразить силу \vec{F} , действующую на заряд q через напряженность электрического поля \vec{E} , в котором находится заряд:

$$\vec{F} = q\vec{E}. \quad (2.18)$$

Типичная ситуация, описываемая этой формулой – поведение точечного заряда, шарика, покоящегося или движущегося в однородном электрическом поле.

- Если в задаче идёт речь о проводнике с током, находящемся в магнитном поле, следует записать формулу для силы Ампера:

$$F_A = BIl \sin \alpha. \quad (2.19)$$

Здесь B – индукция магнитного поля, в котором находится прямой проводник длиной l , по которому идёт ток I , α – угол между направлением протекания тока и направлением вектора \vec{B} . Направление вектора силы \vec{F}_A , действующей на проводник с током, находится по правилу левой руки.

- Если в задаче идёт речь об электрическом заряде, движущемся в магнитном поле, для её решения следует записать формулу силы Лоренца:

$$F_L = Bqv \sin \alpha. \quad (2.20)$$

В этой формуле B – индукция магнитного поля, q – заряд, движущийся со скоростью v , α – угол между направлением скорости заряда и направлением вектора \vec{B} . Направление вектора силы \vec{F}_L , действующей на движущийся положительный заряд, находится по правилу левой руки. Если заряд – отрицательный, то найденное по правилу левой руки направление силы следует поменять на противоположное.

- Если в задаче идёт речь о теле, находящемся в состоянии покоя (или равномерного прямолинейного движения), следует записать:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = 0. \quad (2.21)$$

Некоторые примеры

О массе

- Электрон – $9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.
- Пуля автомата Калашникова – $7,4 \cdot 10^{-3}$ кг.
- Первый искусственный спутник Земли – 83,6 кг.
- Автомобиль «Волга» (ГАЗ-24) – $1,42 \cdot 10^3$ кг.
- Слон – до $4,5 \cdot 10^3$ кг.
- Трактор К-700 – $11 \cdot 10^3$ кг.
- Четырёхосный железнодорожный грузовой вагон – $22,6 \cdot 10^3$ кг.
- Цельнометаллический пассажирский вагон – $54 \cdot 10^3$ кг.
- Самый большой из добытых китов – $150 \cdot 10^3$ кг
- Электровоз ВЛ10 – $184 \cdot 10^3$ кг.
- Обычная масса грузового поезда – до $24000 \cdot 10^3$ кг.
- Масса самых тяжелых поездов, проведенных в порядке эксперимента, превышает $40000 \cdot 10^3$ кг.
- Останкинская телевизионная башня – $55000 \cdot 10^3$ кг.

О силе тяги

- Первый паровоз «Ракета» Стефенсона – до 2,8 кН.
- Трактор колёсный К-700 при скорости 2,6 км/ч – 60 кН.
- Двухсекционный тепловоз 2ТЭ10 при скорости 24 км/ч – 510 кН.
- Тепловоз ТЭЗ при скорости 20 км/ч – 400 кН, при трогании с места – 610 кН.
- Электровоз ВЛ80^к при скорости 51,6 км/ч – 460 кН.
- Электровоз ВЛ10 при скорости 47,3 км/ч – 390 кН.
- Суммарная тяга двигателей первой ступени ракеты-носителя корабля «Восток» – 5000 кН.
- Суммарная тяга двигателей ракеты-носителя «Энергия» в начале полёта – 353000 кН.

Вопросы для повторения

1. Что называется импульсом материальной точки? Импульсом системы материальных точек?

2. Что называется системой отсчёта? Что такое инерциальная система отсчёта? Приведите примеры.
3. Сформулируйте первый закон Ньютона, приведите примеры его проявления.
4. Сформулируйте второй закон Ньютона, приведите примеры его проявления.
5. Продемонстрируйте, в каком случае из формулы второго закона Ньютона, записанной в общем виде, можно получить упрощённое соотношение $F = ma$.
6. Сформулируйте третий закон Ньютона, приведите примеры его проявления.
7. Какие действия следует предпринять при решении задачи, если в ней встречается понятие «силы»?
8. Перечислите основные виды сил, встречающихся при решении стандартных задач по физике, и запишите соответствующие формулы.
9. Сформулируйте закон Всемирного тяготения. Ответ поясните рисунком.

3.1 ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

3.1.1 *Центр масс системы материальных точек. Модель абсолютно твёрдого тела*

3.1.2 *Момент инерции. Теорема Штейнера*

3.1.3 *Момент импульса*

3.1.4 *Момент силы*

3.1.5 *Основной закон динамики вращательного движения.*

Некоторые примеры

Вопросы для повторения

3.1 ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

3.1.1 *Центр масс системы материальных точек.*

Модель абсолютно твёрдого тела

До сих пор мы рассматривали вопросы, связанные с кинематикой и динамикой объектов, размерами которых пренебрегали по сравнению с другими расстояниями, характерными для конкретной задачи (путём, который проходит объект, расстоянием между взаимодействующими объектами и т. д.). Оказывается, что во многих случаях объект даже значительных размеров можно рассматривать как набор, совокупность достаточно малых частей, но при этом описывать движение лишь одной точки полученной системы – центра масс.

Пусть имеется система, состоящая из N материальных точек с массами m_i , каждая из ко-

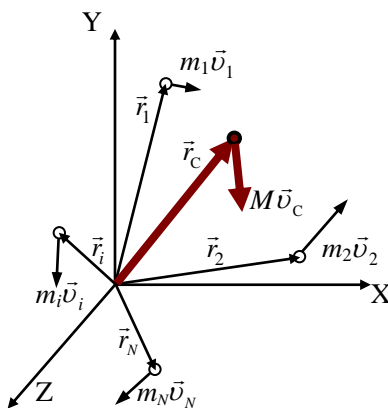


Рис. 3.1

торых в данный момент имеет свою скорость \vec{v}_i , а их положение задаётся радиус-векторами \vec{r}_i (рис. 3.1). **Центром масс** системы назовём точку, положение которой определяется радиус-вектором \vec{r}_C таким, что:

$$\vec{r}_C = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \dots + m_i\vec{r}_i + \dots + m_N\vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_i + \dots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i\vec{r}_i}{M}, \quad (3.1)$$

где M – суммарная масса системы точек. Продифференцировав правую и левую части формулы по времени и используя определение скорости, получаем выражение для скорости центра масс

$$\vec{v}_C = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_i\vec{v}_i + \dots + m_N\vec{v}_N}{m_1 + m_2 + \dots + m_i + \dots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i\vec{v}_i}{M},$$

и тогда для импульса системы $\vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$ можно записать:

$$\vec{p} = \vec{p}_C = M\vec{v}_C. \quad (3.2)$$

Если на каждую точку системы будет действовать своя сила \vec{F}_i , то для описания того, куда в итоге станет двигаться вся система в целом, не нужно писать N уравнений вида $\vec{F}_i = \frac{d\vec{p}_i}{dt}$ для каждой точки в отдельности. Достаточно записать одно подобное уравнение для центра масс, решив которое и использовав соответствующие уравнения кинематики, мы сможем предсказать, где окажется центр масс системы в заданный момент времени:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d\left(\sum_{i=1}^N \vec{p}_i\right)}{dt} = \frac{d\vec{p}_C}{dt}.$$

В частности, если масса точек не меняется со временем, можно записать:

$$\vec{F} = M\vec{a}_C,$$

где \vec{a}_c – ускорение центра масс.

Если система точек, на которые мы мысленно разбиваем тело, движется так, что за равные промежутки времени вектора их перемещений оказываются одинаковыми (и по величине и по направлению), то такое движение тела называется **поступательным**. Пример: при переносе отрезка АВ в положение А'В' (рис. 3.2) вектора перемещения всех его точек равны (в частности, $\Delta\vec{r}_A = \Delta\vec{r}_B$).

Если все взаимные расстояния между точками тела не меняются со временем, такое тело будем называть **абсолютно твёрдым**.

Помимо поступательного движения точки абсолютно твёрдого тела могут испытывать **вращательное** движение, при котором оказывается одинаковым угол поворота радиус-векторов всех точек; вектора перемещения этих точек при этом не совпадают по направлению (на рис. 3.2 это перенос отрезка АВ в положение

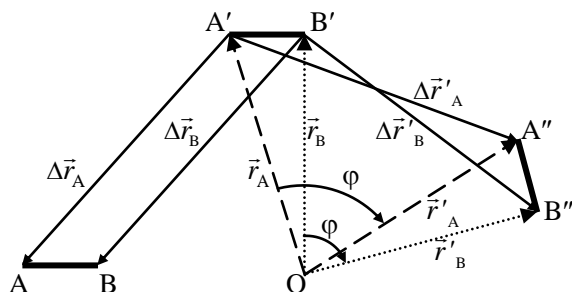


Рис. 3.2

А''В'', при котором $|\vec{r}_A| = |\vec{r}'_A|$, $|\vec{r}_B| = |\vec{r}'_B|$, но $\Delta\vec{r}'_A \neq \Delta\vec{r}'_B$).

В общем случае движение твёрдого тела в каждый момент времени можно рассматривать как совокупность поступательного движения одной точки (центра масс) и его вращательного движения относительно некоторой мгновенно выбранной оси. Поскольку мы живём в мире, характеризующемся тремя измерениями, удобно рассматривать оба типа движения относительно взаимно перпендикулярных осей: трёх (X, Y и Z), связанных с точкой отсчёта (относительно неё центр масс движется поступательно) и

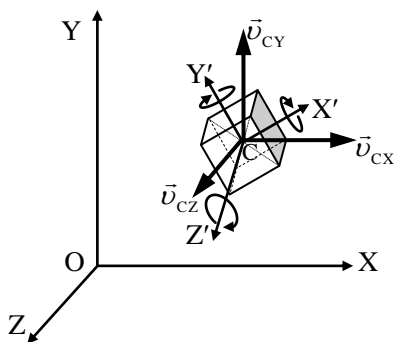


Рис. 3.3

трёх (X' , Y' и Z'), связанных с движущимся центром масс, относительно которых тело вращается (рис. 3.3). В итоге свободно движущееся твёрдое тело может иметь шесть степеней свободы: три поступательных с компонентами линейной скорости центра масс v_{cx} , v_{cy} и v_{cz} , и три вращательных, с компонентами угловой скорости $\omega_{x'}$,

$\omega_{y'}$ и $\omega_{z'}$ относительно проходящих через него осей.

3.1.2 Момент инерции. Теорема Штейнера

Как мы уже говорили в разделе «кинематика», для упрощения математического описания вращательного движения удобно использовать характеристики, связанные не с линейным перемещением объекта, а с угловым (углом поворота, угловой скоростью, угловым ускорением). При этом получаемые формулы по структуре оказываются подобны тем, которые выводятся в кинематике поступательного движения. Данный подход используется и в *динамике* вращательного движения, для описания которого можно ввести свои характеристики – аналоги ряда характеристик, используемых в динамике поступательного движения.

Прошлую лекцию мы начали с обсуждения понятия «масса» тела. Аналогом массы (мерой инертных свойств тела) при описании вращения является момент инерции.

Моментом инерции материальной точки относительно некоторой оси называется выражение вида

$$I = mr^2, \quad (3.3)$$

где m – масса точки, r – расстояние до этой оси.

Момент инерции тела (его можно представить в виде совокупности материальных точек – см. рис. 3.4.а), рассчитывается по формуле

$$I = \int_M r^2 dm, \quad (3.4)$$

в которой знак интеграла означает суммирование моментов инерции всех точек с массами dm , из которых состоит тело массой M , причём каждая из них находится на своём расстоянии r от выбранной оси.

На практике тело удобно представлять в виде набора из N частей, каждую из которых с хорошей точностью можно считать точечной массой m_i , находящейся на расстоянии r_i от оси (рис. 3.4.б), и тогда момент инерции тела может быть рассчитан, как

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2. \quad (3.5)$$

Из определения момента инерции следует, что его величина зависит не только от общей массы тела, но также и от формы тела и от распределения массы по его

объёму (какие-то части тела, например, могут быть изготовлены из более тяжёлого материала, а какие-то – из более лёгкого).

Очевидно: момент инерции неодинаков относительно разных осей, и поэтому, решая задачи на динамику вращательного движения, момент инерции тела относительно интересующей нас оси каждый раз приходится искать отдельно. Так, например, при конструировании технических устройств, содержащих вращающиеся детали (на железнодорожном транспорте, в самолетостроении, электротехнике и т. д.), требуется знание величин моментов инерции этих деталей. При сложной форме тела теоретический расчет его момента инерции может оказаться трудно выполнимым. В этих случаях предпочитают измерить момент инерции нестандартной детали опытным путем.

Рис. 3.4

В некоторых случаях теоретический расчёт момента инерции достаточно прост. В качестве примера рассмотрим, как выводится выражение для I тонкого однородного кольца массой M и радиусом R относительно оси, проходящей через центр кольца перпендикулярно его плоскости (рис. 3.5).

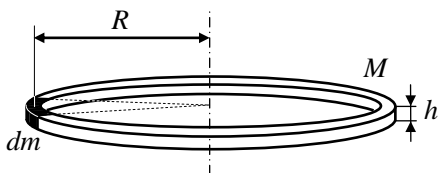


Рис. 3.5

Выделим на нашем кольце малый элемент массой dm . Поскольку он находится от оси вращения на расстоянии, равном радиусу кольца R , его момент инерции dI равен $R^2 dm$. Просуммировать

моменты инерции всех элементов кольца означает взять интеграл вида $I = \int_M R^2 dm$. Учитывая, что для всех элементов расстояние R

до оси вращения одинаково, множитель R^2 вынесем за знак интеграла, и, так как $\int_M dm = M$, получим, что момент инерции кольца

массой M и радиусом R относительно оси, проходящей через кольца перпендикулярно его плоскости

$$I = MR^2. \quad (3.6)$$

Очевидно, что, поскольку толщина h кольца в итоговую формулу не входит, полученное выражение оказывается справедливым также для тонкого обруча и тонкостенного цилиндра.

Ось вращения может проходить через центр масс тела, а может и не проходить через него (рис. 3.6). В последнем случае для вычисления момента инерции пользуются **теоремой Штейнера**.

Согласно этой теореме, **момент инерции тела I относительно произвольной оси равен сумме момента инерции I_0 относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела M на квадрат расстояния d между осями:**

$$I = I_0 + Md^2. \quad (3.7)$$

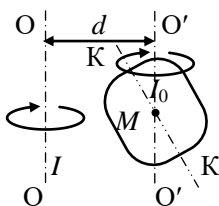


Рис. 3.6

На рис. 3.6 момент инерции I тела относительно вертикальной оси OO равен моменту инерции I_0 относительно вертикальной же оси $O'O'$ плюс выражение Md^2 . Существенно, что момент инерции I_0 определяется не относительно оси симметрии KK тела (иногда он бывает известен из теории), а именно относительно оси $O'O'$, параллельной выбранной оси OO .

В заключение в виде примеров приведём значения моментов инерции некоторых тел:

– момент инерции однородного диска (цилиндра) массой M и радиусом R относительно оси симметрии:

$$I = \frac{1}{2} MR^2;$$

– момент инерции однородного шара массой M и радиусом R относительно оси, проходящей через его центр:

$$I = \frac{2}{5} MR^2;$$

– момент инерции тонкого однородного стержня массой M и длиной l относительно оси, проходящей через его центр перпендикулярно самому стержню:

$$I = \frac{1}{12} Ml^2.$$

В общем случае момент инерции твёрдого тела $I = kML^2$, где M – его масса, L – некоторый геометрический параметр, k – коэффициент, зависящий от формы тела и его положения относительно интересующей нас оси. Заметим: от размеров тела R может зависеть и его масса. Так, моменты инерции двух изготовленных из одного материала однородных шаров, радиус одного из которых в два раза больше радиуса другого, будут отличаться не в четыре, как это могло бы показаться на первый взгляд, а в целых 32 раза! Это вызвано тем, что возрастание радиуса в два раза означает восьмикратное увеличение массы шара (объём $V = 4/3 \cdot \pi R^3$, $M = \rho V$, где ρ – плотность материала шаров).

В СИ единицей измерения момента инерции является $\text{кг} \cdot \text{м}^2$.

3.1.3 Момент импульса

Аналогом импульса \vec{p} материальной точки при описании вращательного движения является момент импульса \vec{L} . Момент импульса – это вектор, который имеет смысл только относительно выбранной точки (например, – связанной с началом отсчёта на осях координат). При этом так же, как и любой другой вектор, момент импульса можно представить в виде набора из трёх проекций на оси X, Y и Z. В этом случае говорят о моменте импульса относительно оси (L_z , например), который, как и любая проекция, является уже скалярной величиной.

По определению **моментом импульса материальной точки** A , имеющей импульс \vec{p} , относительно некоторой точки O называется векторное произведение радиуса-вектора \vec{r} , проведённого из O в A , на импульс \vec{p} :

$$\vec{L} = [\vec{r} \vec{p}] \quad (3.8)$$

Напомним, что, согласно определению векторного произведения, по величине $L = rp \cdot \sin \alpha$ (здесь α – угол между векторами \vec{r} и \vec{p}); направление \vec{L} определяется по правилу левой руки (или по правилу буравчика), см. рис. 3.7.

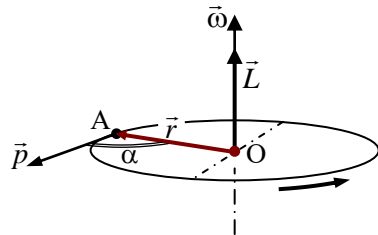


Рис. 3.7

Моментом импульса системы точек (в том числе – тела) называется сумма моментов импульса всех точек, из которых эта система (тело) состоит.

Рассмотрим твёрдое тело, вращающееся вокруг некоторой оси, проходящей через его центр масс (рис. 3.8). При равномерном вращении за одно и то же время все точки тела поворачиваются относительно этой оси на один и тот же угол $\vec{\phi}$, то есть они имеют одинаковую угловую скорость $\vec{\omega}$. Кроме того, поскольку вектора линейных скоростей \vec{v}_i (а, следовательно, и импульсов \vec{p}_i) всех точек, из которых оно состоит, лежат в плоскостях,

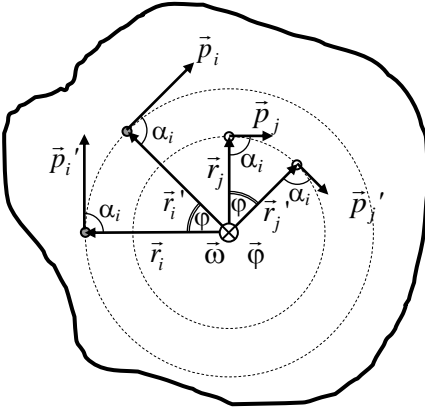


Рис. 3.8

перпендикулярных оси вращения и (как при любом движении по окружности) одновременно перпендикулярны радиус-векторам \vec{r}_i , соединяющим ось с этими точками, все углы α_i между соответствующими векторами \vec{p}_i и \vec{r}_i оказываются равными 90° . Сказанное означает, что для проекции момента импульса любой точки под номером i на ось вращения можно записать:

$$L_i = r_i p_i \sin \alpha_i = r_i p_i = r_i m_i v_i = m_i r_i^2 \frac{v_i}{r_i} = m_i r_i^2 \omega_i = m_i r_i^2 \omega.$$

Для проекции момента импульса всего тела на ось вращения:

$$L = \sum_{i=1}^N L_i = \sum_{i=1}^N r_i p_i = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \omega = \omega \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 = \omega I,$$

где I – момент инерции данного тела относительно этой же оси.

Таким образом, по аналогии с поступательным движением, которое характеризуется вектором импульса \vec{p} (его проекции p_x , p_y и p_z , на оси координат: $p_x = Mv_x$, $p_y = Mv_y$, $p_z = Mv_z$), для описания вращательного движения абсолютно твёрдого тела вводится вектор момента импульса \vec{L} . Проекции этого вектора L_x , L_y и L_z на оси координат равны, соответственно:

$$L_x = I_x \omega_x, \quad L_y = I_y \omega_y, \quad L_z = I_z \omega_z.$$

Для момента импульса \vec{L} симметричного твёрдого тела, вращающегося с угловой скоростью $\vec{\omega}$, вокруг оси симметрии (относительно которой его момент инерции равен I), можно записать:

$$\vec{L} = I \vec{\omega}. \quad (3.9)$$

Из формулы следует, что в этом случае направление момента импульса абсолютно твёрдого тела совпадает с направлением вектора его угловой скорости.

Единица измерения момента импульса в СИ – $\text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$.

3.1.4 Момент силы

Для описания внешних воздействий на объект при вращательном движении удобно использовать понятие *момента силы*.

Моментом силы \vec{M} относительно некоторой точки O называется векторное произведение радиуса-вектора \vec{r} , проведённого из O в точку приложения силы на саму силу \vec{F} :

$$\vec{M} = [\vec{r} \vec{F}]. \quad (3.10)$$

По величине $M = rF \cdot \sin \alpha$, где α – угол между векторами \vec{r} и \vec{F} . Направление вектора \vec{M} определяется по правилу левой руки (или по правилу буравчика), рис. 3.9.

Можно также говорить о проекции момента сил M_z на ось вращения Z . Данная проекция – скаляр и направления не имеет.

Произведение $d = r \cdot \sin \alpha$ равно кратчайшему расстоянию от оси вращения до линии действия силы называется *плечом силы*. Поэтому можно записать:

$$M_z = F d. \quad (3.11)$$

Единица измерения момента силы в СИ – $\text{Н} \cdot \text{м}$ (ньютон-метр).

Согласно первому и второму закону Ньютона для того, чтобы тело находилось в состоянии покоя, для сил, действующих на тело, должно выполняться условие: $\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = 0$. Аналогичным образом, для того, чтобы тело находилось *в состоянии равновесия*,

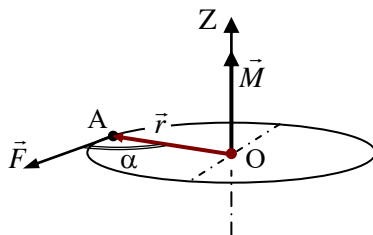


Рис. 3.9

требуется, чтобы сумма моментов всех сил, действующих на тело, равнялась нулю:

$$\sum_{i=1}^N \vec{M}_i = 0. \quad (3.12)$$

В этой формуле речь идёт о векторной сумме моментов сил; если же найти проекции этих моментов на некоторую ось (в качестве которой удобно выбрать ось возможного вращения тела), то подобную формулу можно записать для алгебраической суммы моментов сил относительно этой оси:

$$\sum_{i=1}^N M_{zi} = 0. \quad (3.13)$$

Моментам сил, стремящихся повернуть тело относительно оси по часовой стрелке, обычно приписывают знак «плюс», против часовой стрелки – знак «минус» (пример мы рассмотрим ниже).

С понятием момента силы связано определение центра тяжести тела – точки, которая, вообще говоря, не совпадает с его центром масс.

Центром тяжести тела называется точка, относительно которой сумма моментов сил тяжести всех частей, на которые можно мысленно разбить тело, равна нулю.

Если тело достаточно велико (например – это высокая башня цилиндрической формы, рис. 3.10), то её центр масс находится в геометрическом центре цилиндра. В то же время, вершина башни притягивается к Земле слабее, чем основание, поскольку, согласно закону Всемирного тяготения, величина ускорения свободного падения зависит от расстояния до центра Земли, а вершина

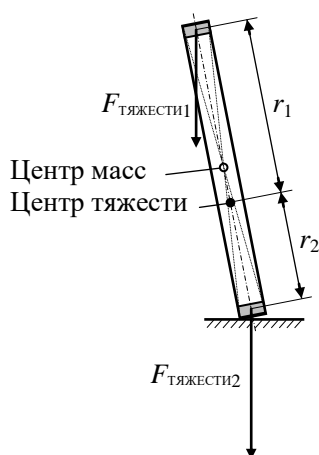


Рис. 3.10

башни отстоит от центра Земли дальше, чем её основание:

$$g = \frac{F_{\text{тяжести}}}{m} = \frac{G \frac{mM_{\text{земли}}}{R^2}}{m} = G \frac{M_{\text{земли}}}{R^2}.$$

Поэтому центр тяжести такого объекта находится ниже его центра масс, для которого должно выполняться условие равенства моментов сил тяжести верхней и нижней частей. Используя обозначения, представленные на рисунке и учитывая, что относительно оси, проходящей через центр тяжести перпендикулярно плоскости рисунка, момент силы $F_{\text{тяжести1}}$ стремится повернуть башню против часовой стрелки, а момент силы $F_{\text{тяжести2}}$ – по часовой стрелке, можно сказать, что

$$F_{\text{тяжести2}} \cdot r_2 - F_{\text{тяжести1}} \cdot r_1 = 0.$$

Но, как мы отметили выше, $F_{\text{тяжести1}} < F_{\text{тяжести2}}$, следовательно, действительно: для выполнения данного равенства требуется, чтобы соблюдалось условие: $r_1 > r_2$.

Если изменением ускорения свободного падения при переходе от одной части тела к другой можно пренебречь (например, если размеры тела много меньше размеров планеты), то тогда можно считать, что центр тяжести тела совпадает с его центром масс.

3.1.5 Основной закон динамики вращательного движения

Основной закон динамики вращательного движения является аналогом второго закона Ньютона. Согласно этому закону **сумма моментов всех сил, действующих на тело, равна скорости изменения его момента импульса**:

$$\sum_{i=1}^N \vec{M}_i = \frac{d\vec{L}}{dt}. \quad (3.14)$$

Если тело – абсолютно твёрдое, и вращается относительно закреплённой оси (относительно которой его момент инерции равен I), то эта формула приводится к виду:

$$\sum_{i=1}^N \vec{M}_i = \frac{d(I\vec{\omega})}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt},$$

а с учётом того, что, по определению, $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}$, где $\vec{\varepsilon}$ – угловое ускорение, можно записать:

$$\sum_{i=1}^N \vec{M}_i = I\vec{\varepsilon}, \quad (3.15)$$

или

$$\sum_{i=1}^N M_{zi} = I_z \varepsilon_z \quad (3.16)$$

(предполагается, что ось вращения обозначена как ось Z).

Порядок работы с этой формулой сходен с тем, который используется при решении задач на второй закон Ньютона: изображаем все силы, действующие на тело, выбираем ось вращения, находим проекции моментов сил на эту ось и записываем основной закон динамики вращательного движения для проекций (с учётом их знаков).

В качестве примера проявления основного закона динамики вращательного движения объясним явление прецессии гироскопа.

Гироскопом называется симметричный объект, вращающийся с большой скоростью относительно одной из своих осей симметрии. Если на такой объект действует сила, создающая момент который стремится повернуть ось вращения, возникает **явление прецессии** – ось вращения начинает описывать в пространстве конусообразную поверхность, ось симметрии которой совпадает с направлением действия силы. Примером прецессии является движение вращающегося волчка, ось которого выведена из вертикального положения; ещё один пример – прецессия электронных орбит в атоме, которую мы рассмотрим позднее при объяснении явления диамагнетизма.

На рис. 3.11.а) изображено положение вращающегося волчка в некоторый момент времени. Ось вращения OO' наклонена относительно вертикали на некоторый угол, волчок вращается так, что

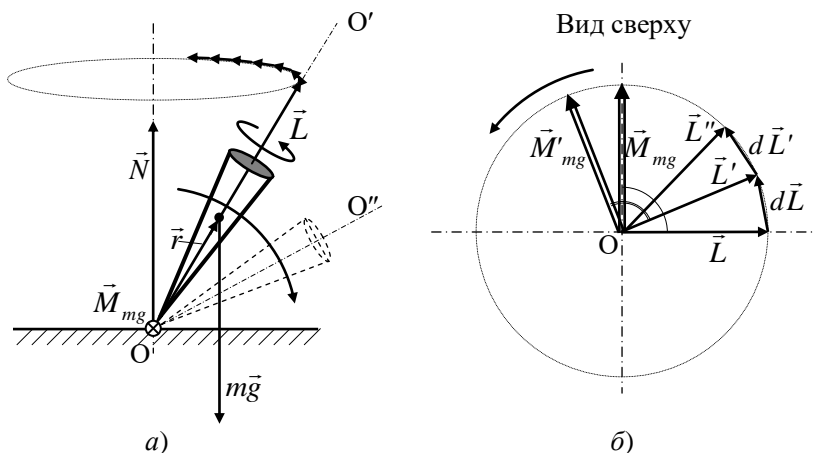


Рис. 3.11

вектор его угловой скорости (и, соответственно, вектор момента импульса \vec{L}) в этот момент находятся в плоскости рисунка.

На гироскоп действуют две силы, приложенные в разных точках: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры \vec{N} . Если бы гироскоп не вращался, он бы упал, поворачиваясь в плоскости рисунка по часовой стрелке относительно оси, проходящей через точку О перпендикулярно этой плоскости. Падение обусловлено действием момента силы тяжести \vec{M}_{mg} относительно точки О (он направлен вглубь рисунка); момент силы реакции опоры \vec{M}_N относительно этой точки равен нулю (нулю равно расстояние от точки О до точки приложения силы \vec{N}). Поэтому основной закон динамики вращательного движения для гироскопа можно записать в виде:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{mg} + \vec{M}_N = \vec{M}_{mg}.$$

Из данной формулы следует, что под действием момента силы тяжести \vec{M}_{mg} у гироскопа за малое время dt появляется добавка $d\vec{L}$ к уже имевшемуся моменту импульса \vec{L} – тоже малая и

направленная перпендикулярно ему (как и \vec{M}_{mg} , – вглубь плоскости рисунка). В результате вектор \vec{L} переходит в вектор \vec{L}' – тот же, что и \vec{L} по величине, но имеющий уже несколько иное направление (см. рис. 4.1.б), который является видом сверху схемы расположения векторов \vec{M}_{mg} , \vec{L} и $d\vec{L}$ при прецессии). Это означает, что и ось вращения гироскопа вместе с ним самим теперь уже не лежит в плоскости рисунка!

Изменение положения оси влечёт за собой изменение направления действия момента силы тяжести, который также «поворачивается» (теперь это \vec{M}'_{mg}). Под его действием возникает новая добавка к моменту импульса, $d\vec{L}'$, которая, в свою очередь меняет направление вектора \vec{L}' на \vec{L}'' , ось гироскопа продолжает движение, момент силы тяжести вновь меняет направление и т. д. Как результат, начинается прецессия – движение оси вращения гироскопа по конусообразной поверхности¹ относительно вертикальной оси (рис. 3.11.а). Примером прецессии является движение оси вращения закрученного волчка (юлы), в случае отклонения её от вертикали.

Некоторые примеры

- Момент инерции Земли относительно оси вращения в приближении её однородным сплошным шаром – $9,7 \cdot 10^{37}$ кг·м².
- Реальный момент инерции Земли относительно своей оси вращения – $8,0 \cdot 10^{37}$ кг·м².
- Момент инерции лунного модуля корабля «Аполлон» при половинном запасе топлива относительно осей, проходящих через его центр масс – около 33000 кг·м².

¹ На самом деле движение оказывается более сложным: ось испытывает *нута́ции*, то есть одновременно с движением по конусу имеет место добавочное колебательное движение оси вращения гироскопа в направлении, перпендикулярном конусообразной поверхности.

- Момент импульса Земли относительно своей оси вращения – около $4,2 \cdot 10^{29} \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1}$.
- Момент импульса Земли относительно центра Солнца (в приближении орбиты окружностью радиусом 1 а. е.) – около $2,7 \cdot 10^{40} \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1}$.
- Собственный (спиновый) момент импульса электрона – примерно $0,9 \cdot 10^{-34} \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-1}$.
- Максимальный момент силы, прикладываемый к ключу дверного замка при его открывании и закрывании не должен превышать 0,6 Н·м (ГОСТ 23306-87).
- Для разрушения большой берцовой кости взрослого человека момент скручивающей силы должен превысить 30 – 140 Н·м.
- Крутящий момент силы затягивания свечей зажигания двигателя автомобиля 10 – 40 Н·м.
- Крутящий момент силы двигателя автомобиля Audi Q7 – до 500 Н·м (при 2750 об/мин).
- Крутящий момент силы на выходе зубчатой передачи серии PM (Renold plc) – до 12000 Н·м.

Вопросы для повторения

1. Что называется моментом инерции а) материальной точки, б) системы материальных точек, в) тела? Ответ поясните рисунками.
2. Сформулируйте теорему Штейнера. Ответ поясните рисунком.
3. Что называется моментом импульса малого объекта относительно некоторой точки? Ответ поясните рисунком.
4. Что называется моментом импульса малого объекта относительно некоторой оси? Ответ поясните рисунком.
5. . Что называется моментом силы относительно некоторой точки? Ответ поясните рисунком.
6. Что называется моментом силы относительно некоторой оси? Ответ поясните рисунком.
7. Какие точки называются а) центром масс тела, б) центром тяжести тела? В каком случае они совпадают?
8. Сформулируйте основной закон динамики вращательного движения и запишите соответствующие формулы а) в случае системы точек, б) в случае абсолютно твёрдого тела.

9. Какое тело называется абсолютно твёрдым?
10. Приведите примеры параметров-аналогов и законов-аналогов в динамике поступательного и вращательного движения.
11. В чём заключается явление прецессии гироскопа? *Объясните*, из-за чего оно возникает.

4.1 РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

4.1.1 Работа силы. Мощность

4.1.2 Кинетическая энергия

4.1.3 Первая и вторая космические скорости

4.1.4 Потенциальная энергия

4.2 ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

4.2.1 Закон сохранения импульса

4.2.2 Закон сохранения момента импульса. Трёхстепенной гироскоп

4.2.3 Закон сохранения механической энергии

4.2.4 О законах сохранения в природе. Принцип симметрии

Некоторые примеры

Вопросы для повторения

4.1 РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

4.1.1 Работа силы. Мощность

Хотя использование второго закона Ньютона и позволяет найти ускорение тела и, тем самым, обеспечить решение задач кинематики, применить этот закон удаётся не всегда, особенно, если трудно сказать: все ли силы, действующие на тело, учтены, или если эти силы в процессе движения тела меняются. В таких случаях можно попытаться решить задачу описания движения тела, используя понятия работы и энергии.

Пусть тело совершает малое перемещение на $d\vec{r}$, и при этом на него действует некая сила \vec{F} . Тогда **работой** этой силы δA называется *скалярное* произведение векторов $d\vec{r}$ и \vec{F} , то есть выражение вида

$$\delta A = (\vec{F} d\vec{r}) = F \cdot dr \cdot \cos \alpha, \quad (4.1)$$

где α – угол между векторами $d\vec{r}$ и \vec{F} .

При движении тела по произвольной траектории от точки 1 к точке 2 угол α (и, вообще говоря, сама сила \vec{F}) могут меняться,

тогда работа этой силы будет равна сумме работ на малых участках, на которых и угол α и саму силу \vec{F} можно считать практически неизменными:

$$A = \int_1^2 (\vec{F} d\vec{r}). \quad (4.2)$$

Если \vec{F} не меняется со временем, а само тело движется по прямой (это означает, что $\alpha = const$, а длина вектора его перемещения $|\vec{r}|$ равна пройденному пути S), то из (4.2) следует известное выражение для **работы постоянной силы**:

$$A = \int_0^S (\vec{F} d\vec{r}) = \int_0^S (F dr \cdot \cos\alpha) = F \cdot \cos\alpha \int_0^S dr,$$

то есть

$$A = FS \cos\alpha. \quad (4.3)$$

Пример 4.1. Пусть тело поднимают вверх по наклонной плоскости (рис. 4.1).

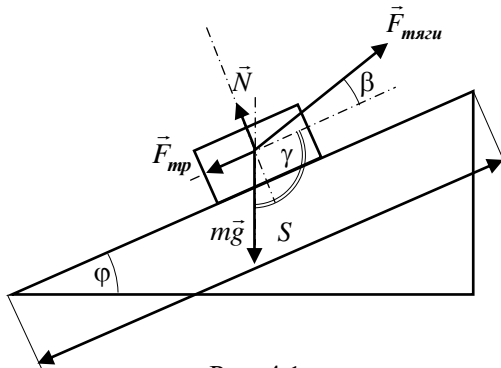


Рис. 4.1

Помимо силы тяги $\vec{F}_{тяги}$, направленной под произвольным углом β к поверхности наклонной плоскости, на тело действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила трения $\vec{F}_{тр}$ и сила реакции опоры \vec{N} . Если φ – угол

при основании наклонной плоскости, а S – путь, который проходит тело, то выражения для работы, совершаемой каждой из этих сил, можно записать следующим образом:

$$- \text{ работа силы тяжести } A_{mg} = mgS \cos \gamma = mgS \cos \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -mgS \cdot \sin \alpha,$$

$$- \text{ работа силы реакции опоры } A_N = NS \cos \frac{\pi}{2} = 0,$$

$$- \text{ работа силы трения } A_{mp} = F_{mp} S \cos \pi = -F_{mp} S,$$

$$- \text{ работа силы тяги } A_{тяги} = F_{тяги} S \cos \beta.$$

Таким образом, может оказаться, что тело проходит некоторое расстояние, на всём пути на него действует сила, но работа этой силы равна нулю, поскольку угол между направлением действия силы и направлением вектора перемещения в каждый момент времени равен 90° . Примеры: работа силы реакции опоры на рис. 4.1, работа силы гравитационного притяжения к Земле спутника, летящего по круговой орбите, работа силы кулоновского притяжения электрона к ядру атома, работа силы Лоренца и т. д.

Работа, совершаемая постоянным моментом сил M при повороте тела на угол φ :

$$A = M \cdot \varphi. \quad (4.4)$$

В СИ работа измеряется в джоулях; **1 Дж = 1 Н·м**. На практике также используются внесистемные единицы: киловатт-час (**1 кВт·ч = 3,6·10⁶ Дж**), электронвольт (**1 эВ = 1,6·10⁻¹⁹ Дж**).

С понятием работы тесно связано понятие мощности.

Средней мощностью N , развиваемой некоторым устройством, называется отношение производимой этим устройством работы A ко времени Δt , в течение которого эта работа совершается:

$$N = \frac{A}{\Delta t}. \quad (4.5)$$

Мгновенную мощность рассчитывают по формуле

$$N = \frac{\delta A}{dt}$$

(здесь δA – работа, совершаемая за бесконечно малое время dt).

Если работу совершает двигатель автомобиля так, что при постоянной силе тяги F он движется с постоянной скоростью v , то мощность двигателя можно рассчитать следующим образом:

$$N = \frac{A}{\Delta t} = \frac{FS}{\Delta t} = F \frac{S}{\Delta t} = F v. \quad (4.6)$$

Если работа совершается моментом сил по повороту тела на угол $\Delta\varphi$ с постоянной угловой скоростью ω , развиваемая при этом мощность

$$N = \frac{A}{\Delta t} = \frac{M \cdot \Delta\varphi}{\Delta t} = M\omega. \quad (4.7)$$

В СИ мощность измеряется в ваттах, $1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж} \cdot \text{с}^{-1}$.

Также до сих пор на транспорте используется внесистемная единица мощности: лошадиная сила,

$$1 \text{ л. с.} \approx 735,5 \text{ Вт}.$$

4.1.2 Кинетическая энергия

Работа является *мерой изменения энергии* тела или системы тел. В механике рассматриваются два вида энергии: кинетическая и потенциальная.

По определению *кинетическая энергия* при поступательном движении численно равна работе, которую необходимо совершить с тем, чтобы разогнать тело из состояния покоя до некоторой скорости.

Как видим, определением кинетической энергии W_k является не формула, а «рецепт» её нахождения. Выведем формулу для W_k , воспользовавшись определением.

Приложим к покоящемуся телу массой m постоянную силу \vec{F} ; будем считать, что других сил нет. Тело начнёт двигаться по прямой (направление действия силы не меняется), и в итоге совершит перемещение \vec{r} (при таком движении, очевидно, угол между векторами \vec{F} и \vec{r} равен нулю) и в итоге приобретёт скорость v . С

учётом формулы второго закона Ньютона совершаемая силой работа записывается в виде

$$A = \int_0^{|\vec{r}|} (\vec{F} d\vec{r}) = \int_0^{|\vec{r}|} F dr \cdot \cos 0^\circ = \int_0^{|\vec{r}|} \frac{dp}{dt} dr = \int_0^{|\vec{r}|} \frac{d(mv)}{dt} dr = \int_0^{|\vec{r}|} \frac{dr}{dt} d(mv).$$

Если масса тела не меняется в процессе движения, множитель m можно вынести за знак интеграла, и тогда (с учётом того, что первая производная от перемещения по времени называется скоростью), получим:

$$A = m \int_0^{|\vec{r}|} \frac{dr}{dt} dv = m \int_0^v v dv = \frac{mv^2}{2}, \quad \text{или}$$

$$W_k = \frac{mv^2}{2}. \quad (4.8)$$

При обсуждении второго закона Ньютона мы уже отмечали, что масса реальных объектов со временем меняется (расходуется горючее, истираются детали и т. д.). При достижении больших скоростей станет заметным увеличение массы тела (см. далее раздел «специальная теория относительности»). Во всех этих случаях, согласно определению, приобретённая телом кинетическая энергия будет равна работе, совершаемой по разгону тела до скорости v , однако формула для её расчёта окажется иной, и её вид будет зависеть от закона, по которому масса тела менялась со временем.

Заметим: можно показать, что кинетическая энергия твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω численно равна работе, которую необходимо совершить с тем, чтобы раскрутить это тело из состояния покоя до данной скорости и выражается формулой

$$W_k = \frac{I\omega^2}{2}. \quad (4.9)$$

Здесь I – момент инерции тела относительно оси вращения.

Если же тело массой m одновременно совершает поступательное движение в некоторой плоскости и при этом вращается с угловой скоростью ω относительно оси, проходящей через центр масс тела и сохраняющей свою ориентацию в пространстве, его общая кинетическая энергия рассчитывается по формуле

$$W_k = \frac{m v_c^2}{2} + \frac{I \omega^2}{2}. \quad (4.10)$$

Здесь v_c – скорость центра масс тела, I – момент инерции тела относительно оси вращения.

4.1.3 Первая и вторая космические скорости

Рассмотрим пример расчёта работы переменной силы в случае, когда этой силой является результатом гравитационного взаимодействия двух тел. Рассчитаем величину **второй космической скорости** $v_{2к}$ – такой минимальной скорости, которую необходимо придать телу на поверхности планеты с тем, чтобы после «броска» оно смогло улететь бесконечно далеко (притяжением других планет, звёзд пренебрегаем).

Из школьной программы мы помним, что **первой космической** называется минимальная скорость $v_{1к}$, которую необходимо сообщить телу с тем, чтобы после броска оно не упало на поверхность планеты, а двигалось над этой поверхностью по круговой орбите. При таком движении радиус траектории практически равен радиусу планеты R (которую считаем однородным шаром), а центростремительное ускорение $a_{ц}$ создаётся силой гравитационного притяжения F (M – масса планеты, m – масса тела), рис. 4.2. В итоге возникает система уравнений:

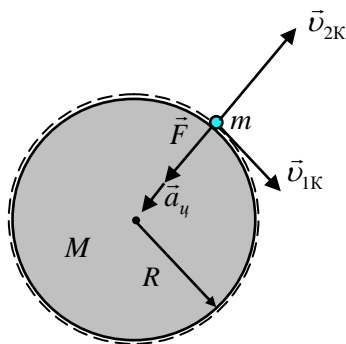


Рис. 4.2

$$\begin{cases} F = ma_y \\ F = G \frac{Mm}{R^2} \equiv mg \\ a_y = \frac{v_{1K}^2}{R}, \end{cases}$$

решив которую, получаем: $v_{1K} = \sqrt{gR}$, что для Земли составляет примерно 7,8 км/с.

Для расчёта второй космической скорости необходимо вычислить работу, которая совершается силой притяжения при перемещении тела с поверхности планеты на бесконечно большое расстояние и учесть, что вся эта работа пойдёт на уменьшение кинетической энергии тела. У поверхности планеты для этой энергии можно записать

$$W_{K1} = \frac{mv_{2K}^2}{2}, \text{ а на бесконечности } W_{K2} = 0 \text{ (тело останавливается, но}$$

$$\text{не падает обратно), то есть } W_{K2} - W_{K1} = -\frac{mv_{2K}^2}{2}.$$

Итак, работа силы притяжения:

$$A = \int_R^\infty (\vec{F} d\vec{r}) = \int_R^\infty G \frac{Mm}{r^2} \cos\pi dr = -GMm \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = G \frac{Mm}{r} \Big|_R^\infty = -G \frac{Mm}{R}.$$

Теперь учтём, что $A = W_{K2} - W_{K1}$, и что $G \frac{M}{R^2} = g$. Получим:

$$v_{2K} = \sqrt{2gR} = \sqrt{2} v_{1K}. \quad (4.11)$$

Для Земли $v_{2K} \approx 11,2$ км/с.

Формула для второй космической скорости выводилась в предположении, что на улетающее от Земли тело не действуют никакие объекты, кроме нашей планеты. На деле это не так: для того, чтобы улететь на бесконечно далёкое расстояние следует преодолеть силу притяжения самого массивного объекта Солнечной системы: Солнца. Минимальная скорость, необходимая для этого, называется *третьей космической*, она составляет примерно 16 км/с. Современные ракетные двигатели пока не способны придать космиче-

скому кораблю такую скорость. Поэтому для того, чтобы искусственные аппараты типа «*Pioneer*» и «*Voyager*» всё же смогли покинуть пределы Солнечной системы, траектории их полёта выбирались таким образом, чтобы аппараты пролетали мимо планет-гигантов (Юпитера, Сатурна, Урана), которые своими гравитационными полями помогали им преодолеть силу притяжения Солнца.

4.1.4 Потенциальная энергия

Если в каждой точке пространства на тело действует некоторая вполне определённая сила, то говорят, что тело находится *в поле сил* (будем считать далее, что величина и направление таких сил в каждой точке пространства не меняются со временем).

При перемещении тела из одной точки поля в другую силы этого поля (как любые силы, действующие на тело) могут совершать некоторую работу, рассчитать которую можно по формуле (4.2). Силы, работа которых не зависит от формы траектории, по которой перемещается тело, а определяется лишь его начальным и конечным положениями, называются *консервативными*. Примерами консервативных сил являются сила тяжести, сила электростатического взаимодействия, силы, возникающие при упругом деформировании тела.

Для поля консервативных сил можно ввести понятие потенциальной энергии $W_{\text{п}}$, величина которой, вообще говоря, в разных точках поля может быть различна (более того, в полях разной природы оказываются неодинаковыми и формулы для расчёта этой энергии)! Но во всех случаях справедливо следующее определение: *убыль¹ потенциальной энергии* при перемещении тела равна работе консервативных сил поля, совершённой при этом перемещении:

$$W_{\text{п1}} - W_{\text{п2}} = A. \quad (4.12)$$

¹ Напомним, что в математике изменение функции вида $W_2 - W_1$ называется *приращением* и обозначается символом ΔW ; разница вида $W_1 - W_2$ называется *убылью*; очевидно, что убыль равна $-\Delta W$.

Принимая потенциальную энергию в какой-то точке поля равной нулю (например, W_{Π} поля сил тяжести на поверхности Земли), можно вывести формулу для потенциальной энергии тела на любой высоте.

Рассмотрим два примера вывода формул для расчёта потенциальной энергии.

Пример 4.2. Потенциальная энергия тела в поле сил тяжести.

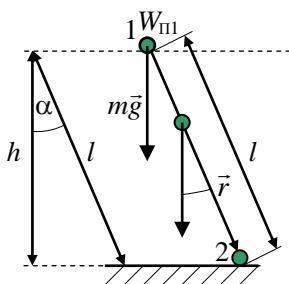


Рис. 4.3

При перемещении тела из точки 1 в точку 2 (расположенную на поверхности Земли, рис. 4.3) по отрезку 1-2 сила тяжести совершает

работу $A = \int_1^2 (\vec{F} d\vec{r})$. Если вы-

сота, на которой находилось тело в начале траектории, не слишком большая, то изменением с высотой ускорения свободного падения g можно пренебречь, и тогда, со-

гласно рисунку,

$$A = \int_1^2 (m\vec{g} d\vec{r}) = \int_1^2 (mg dr \cos \alpha) = mg \cdot \cos \alpha \int_1^2 dr = mgl \cdot \cos \alpha = mgh.$$

Но по определению $A = W_{\Pi 1} - W_{\Pi 2}$, и, полагая, что на поверхности Земли (в точке 2) $W_{\Pi 2} = 0$, получаем, что $A = W_{\Pi 1}$. Таким образом, **потенциальная энергия тела массой m , поднятого на высоту h над поверхностью Земли** (в предположении, что g не меняется с высотой), рассчитывается по формуле

$$W_{\Pi} = mgh. \quad (4.13)$$

Пример 4.3. Потенциальная энергия упруго деформированной пружины.

Рассмотрим тело, закреплённое на упруго деформированной (например, – растянутой) пружине жёсткостью k .

Мы знаем, что если тело сместить от положения равновесия на

расстояние x , на него со стороны пружины будет действовать сила $F_{\text{упр}}$, по величине равная $k|x|$, стремящаяся вернуть тело в положение равновесия, в котором $x = 0$ (рис. 4.4).

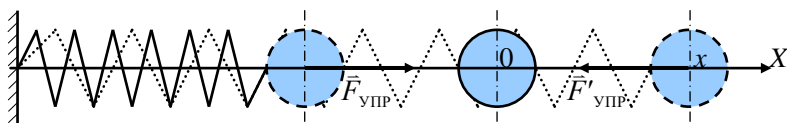


Рис. 4.4

В процессе возврата тела в такое положение (из точки с координатой x в точку с координатой 0) упругая сила совершит работу:

$$A = \int_x^0 (\vec{F} d\vec{r}) = \int_x^0 (kx dx \cdot \cos 180^\circ) = -k \int_x^0 x dx = -\frac{kx^2}{2} \Big|_x^0 = \frac{kx^2}{2}.$$

В положении равновесия потенциальную энергию пружины примем равной нулю, тогда вновь, согласно определению, можно записать $A = W_{\text{п1}} - W_{\text{п2}} = W_{\text{п1}}$, то есть **потенциальная энергия упруго деформированной пружины описывается формулой**

$$W_{\text{п}} = \frac{kx^2}{2}. \quad (4.14)$$

Заметим: в ходе вывода формулы мы ещё раз (как и в случае вычисления второй космической скорости) продемонстрировали, как рассчитывается работа переменной силы. Подобную же процедуру мы сделаем позднее (в разделе «Электростатика») при получении формулы для расчёта потенциальной энергии одного точечного заряда в поле другого точечного заряда.

4.2 ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Среди законов природы, известных человечеству, выделяется группа, имеющая всеобщий характер, и непосредственно отражающая фундаментальные свойства нашей Вселенной. Это – законы сохранения. Обсудим основные из них: тех, с которыми мы встречаемся в механике.

4.2.1 Закон сохранения импульса

Начнём с определения.

Пусть имеется система, состоящая из N материальных точек (или тел), импульсы которых обозначим: $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_i, \dots, \vec{p}_N$ (напоминаем, что импульсом материальной точки, имеющей массу m_i и скорость \vec{v}_i , называется произведение $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$). Систему назовём **замкнутой**, если на неё не действуют внешние силы (или такие силы действуют, но их сумма равна нулю).

Оказывается, что для такой системы всегда выполняется закон сохранения импульса: **суммарный импульс замкнутой системы материальных точек (тел) не меняется со временем:**

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_i + \dots + \vec{p}_N = \text{const.} \quad (4.15)$$

Заметим: импульс – вектор, и складывать импульсы необходимо соответствующим образом: либо по правилу параллелограмма, либо – складывая проекции этих векторов.

Типичным примером проявления закона сохранения импульса является реактивное движение. Пока ракета покоится, её импульс равен нулю; в результате сгорания топлива вырвавшаяся из сопла со скоростью v_1 порция газов массой m движется в одну сторону, а сама ракета, имеющая массу M , – со скоростью v_2 в противоположную сторону так, с что суммарный импульс системы остаётся нулевым ($Mv_2 - mv_1 = 0$). Правда, по мере сгорания топлива масса ракеты непрерывно уменьшается, а скорость потока газа относительно Земли становится всё меньше, и это необходимо учитывать при выводе уравнения реактивного движения.

Можно задать себе вопрос: а что происходит с системой тел в случае, если она незамкнута? Ответ даёт второй закон Ньютона: если на систему в течение некоторого времени Δt действуют силы, равнодействующая которых равна \vec{F} , то импульс \vec{p} системы меняется на $\Delta \vec{p}$

$$\Delta \vec{p} = \vec{F} \Delta t \quad (4.16)$$

и становится равным $\vec{p}' = \vec{p} + \Delta \vec{p}$ (здесь сложение – векторное).

4.2.2 Закон сохранения момента импульса. Трёхстепенной гироскоп

Напомним, что моментом импульса \vec{L} малого объекта, имеющего импульс \vec{p} , относительно некоторой точки, расстояние от которой до объекта задаётся радиус-вектором \vec{r} , называется векторное произведение $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}]$.

Введём определение.

Пусть имеется система N материальных точек, импульсы которых обозначим $\vec{L}_1, \vec{L}_2, \dots, \vec{L}_i, \dots, \vec{L}_N$. Будем называть эту систему **замкнутой**, если на неё не действуют внешние моменты сил (или действуют, но их сумма равна нулю).

Закон сохранения момента импульса: суммарный момент импульса замкнутой системы материальных точек (тел) не меняется со временем:

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_i + \dots + \vec{L}_N = \text{const.} \quad (4.17)$$

Момент импульса – вектор, направленный вдоль оси, вокруг которой движется тело (или оси вращения самого тела), а это означает, что так же, как и в случае закона сохранения импульса \vec{p} , складывать моменты импульсов необходимо либо по правилу параллелограмма, либо – суммируя проекции этих векторов.

Примечание 6.1. Пусть момент инерции тела I относительно некоторой закреплённой оси вращения не меняется со временем, тогда, как мы показали ранее, с учётом того, что угловая скорость вращения $\vec{\omega}$ всех его точек (естественно, кроме тех, которые лежат на самой оси вращения – они не движутся) одинакова, можно записать: $\vec{L} = I \vec{\omega}$. Если же момент инерции тела изменится под действием внутренних сил, то, согласно закону сохранения момента импульса, поменяется по величине и его угловая скорость: $I_1 \vec{\omega}_1 = I_2 \vec{\omega}_2$, и, следовательно,

$$\vec{\omega}_2 = \frac{I_1}{I_2} \vec{\omega}_1. \quad (4.18)$$

Приведём два примера такой ситуации.

- Если фигурист, быстро вращающийся на льду с прижатыми к груди руками, вдруг резко разведёт их в стороны (и тем самым увеличит свой момент инерции), то скорость его вращения уменьшится.

- Если звезда в процессе своей эволюции начинает сжиматься (то есть, её момент инерции будет уменьшаться), скорость вращения звезды возрастает. Во Вселенной это явление наблюдается при коллапсе звёзд из состояния белого карлика в нейтронную звезду. Процесс может носить взрывной характер и сопровождаться выделением громадной энергии: земным наблюдателем этот взрыв воспринимается как вспышка сверхновой.

Разберём ещё один пример, связанный с использованием закона сохранения момента импульса в технике: рассмотрим принцип работы *трёхстепенного гироскопа*.

Как мы говорили на прошлой лекции, гироскопом называется массивное твёрдое тело, вращающееся с большой скоростью вокруг одной из своих осей симметрии. Трёхстепенной гироскоп располагается в подвесе, позволяющем ему свободно поворачиваться не только относительно этой оси, но и еще относительно двух других, перпендикулярных друг другу и первой оси, при этом точка пересечения всех трёх осей должна совпадать с центром тяжести гироскопа. Такой подвес называется кардановым (по имени по имени Д. Кардано, (1501 – 1576), который, кстати, не изобретал его, а лишь описал в своей книге «Хитроумное устройство вещей», получившей в своё время широкую известность). Главным свойством карданова подвеса является то, что если в него закрепить вращающееся тело, то оно будет сохранять направление оси вращения независимо от ориентации самого подвеса.

Рассмотрим работу трёхстепенного гироскопа (рис. 4.5) подробнее.

На гироскоп (массивный цилиндр), вращающийся с большой скоростью относительно оси $O_xO'_x$, и имеющий момент импульса \vec{L} действуют сила тяжести $m\vec{g}$, силы реакции опоры \vec{N}_1 и \vec{N}_2 в

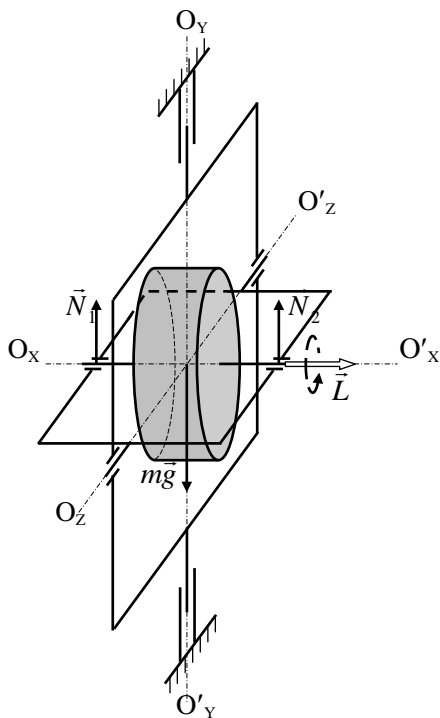


Рис. 4.5

подшипниках на оси вращения и (возможно) силы трения в самих подшипниках. Однако, момент силы тяжести равен нулю относительно любой из трёх осей $O_xO'_x$, $O_yO'_y$ и $O_zO'_z$ (так как равно нулю расстояние от точки приложения силы тяжести до любой из этих осей). Моменты сил \vec{N}_1 и \vec{N}_2 компенсируют друг друга (в силу симметрии устройства эти силы равны по величине и приложены на одинаковых расстояниях от любой из осей). Если использовать хорошие подшипники (например, подвеска – магнитная), то моментом сил трения всех трёх пар подшипников можно пренебречь.

Сказанное означает, что сумма моментов всех сил, действующих на гироскоп, равна нулю, и, вследствие закона сохранения момента импульса, у раскрученного гироскопа величина и направление \vec{L} должны сохраняться неизменными. Приложение добавочных сил к опорам на оси $O_yO'_y$ ситуации не меняют: моменты возникающих при этом сил в силу симметрии системы также одинаковы по величине и противоположны по направлению, то есть взаимно уничтожаются.

Тот факт, что ось трёхстепенного гироскопа сохраняет ориентацию в пространстве, предопределило широкое использование подобных устройств на практике. Гироскопы применяются для

создания компасов, не связанных с магнитным полем Земли (например – в космических аппаратах), транспортных средств, при любых вибрациях сохраняющих вертикальное положение (например, - сигвеев), робототехнических систем (благодаря им роботы могут передвигаться, не падая) и т. д.

Вот как, например, работал гироскоп в системе наведения первых баллистических ракет: ось раскрученного гироскопа управляла движением ползка на реохорде, включённом в цепь поворота рулей ракеты. На определённой минуте полёта программа выдавала задание на начало разворота, ракета вместе с реохордом поворачивалась, но ось-то гироскопа (и связанный с ней движок реохорда) сохраняла ориентацию в пространстве! В результате поворота ракеты и смещения корпуса реохорда относительно оси гироскопа увеличивалась длина одного из плеч, менялось его сопротивление. Поворот продолжался до тех пор, пока сопротивление не достигало заданного программой полёта значения, после чего подавался сигнал на прекращение поворота. Рули возвращались в исходное положение, и ракета летела дальше с новым постоянным положением движка реохорда относительно его корпуса.

В настоящее время широкое применение получили волновые твердотельные гироскопы, в основе работы которых лежит использование не вращательного движения, а механических колебаний. Такие устройства используются даже в смартфонах для работы приложений по определению угла наклона гаджета.

В заключение ещё раз заметим: закон сохранения момента импульса выполняется только для замкнутой системы тел. Если же система незамкнута, её момент импульса меняется, причём, согласно основному закону динамики вращательного движения, изменение момента импульса $\Delta \vec{L}$ системы прямо пропорционально времени Δt действия момента \vec{M} внешних сил:

$$\Delta \vec{L} = \vec{M} \Delta t \quad (4.19)$$

(см., например, явление прецессии).

4.2.3 Закон сохранения механической энергии

Как мы уже говорили, в механике полная энергия тела (или системы тел, материальных точек) складывается из его кинетической и потенциальной энергии. Закон сохранения энергии в механике: **полная энергия замкнутой системы, в которой действуют лишь консервативные силы, не меняется со временем:**

$$W_{\text{к}} + W_{\text{п}} = \text{const.} \quad (4.20)$$

Сделаем несколько замечаний.

- В общем случае в выражение для полной механической энергии входит кинетическая энергия не только поступательного, но и вращательного движения.

- Если в системе присутствует сила трения, то полная механическая энергия системы будет уменьшаться. Но вследствие трения температура системы повысится, то есть энергия из механической перейдёт в тепловую. Однако механика не оперирует с понятием «теплота», мы же должны описать, что происходит при этом именно в терминах механики. Аналогичная проблема возникает и в ситуации, когда система незамкнута, то есть на неё действует внешняя сила (силы): как выразить, что происходит с системой в этом случае? Ответ на эти вопросы таков: если система незамкнута и (или) в ней действуют неконсервативные силы, то изменение её полной механической энергии равно работе этих сил:

$$(W_{\text{к2}} + W_{\text{п2}}) - (W_{\text{к1}} + W_{\text{п1}}) = A. \quad (4.21)$$

В данной формуле $W_{\text{к1}}$, $W_{\text{к2}}$ и $W_{\text{п1}}$, $W_{\text{п2}}$ – начальные и конечные значения, соответственно, потенциальной и кинетической энергии всех тел системы, A – работа внешних и (или) внутренних неконсервативных сил.

Из школьной программы нам известно, что помимо потенциальной и кинетической бывают другие виды энергии, например, внутренняя, связанная с тепловым движением атомов и молекул, из которых состоит тело. Распространение понятия *энергия* на другие области физики (где также действуют силы, способные совершать работу) привело в итоге к открытию общего закона

сохранения энергии: *полная энергия замкнутой системы тел не меняется со временем, она лишь переходит из одного вида в другой.*

Существование разных видов энергии отражает её основное свойство: энергия – это универсальная мера различных форм движения и взаимодействия. Физический смысл закона сохранения энергии – неуничтожимость материи и её движения. Однако во всех случаях для выполнения закона требуется, чтобы система была замкнутой, изолированной от внешних воздействий.

Закон сохранения энергии – результат обобщения многих экспериментальных данных. Идея этого закона принадлежит М.В. Ломоносову (1711 – 1765 гг.), изложившему закон сохранения материи и движения, а количественно его формулировка дана немецкими учёными – врачом Ю. Майером (1814 – 1878 гг.) и естествоиспытателем Г. Гельмгольцем (1821 – 1894 гг.).

В заключение заметим: согласно специальной теории относительности, полная энергия тела E тесно связана с его массой, поэтому формулировку закона следует дополнить: нужно говорить не просто о сохранении энергии (и об известном из химии законе сохранения массы), а о едином законе сохранения энергии-массы.

4.2.4 О законах сохранения в природе. Принцип симметрии

Три перечисленных выше закона сохранения (импульса, момента импульса, энергии), а также закон сохранения электрического заряда, о котором мы поговорим позднее, имеют всеобщий характер. Кроме них в окружающем нас мире действует ряд других законов сохранения, которые носят уже не безусловный характер, то есть в определённых условиях всё же могут нарушаться. И здесь нужно сказать, что в целом само существование такой категории законов, как законы сохранения, связано с проявлением в природе так называемого принципа симметрии.

В широком смысле под *симметрией* подразумевают неизменность свойств системы при некотором изменении (преобразовании) её параметров. Наглядным примером пространственных

симметрий физических систем является кристаллическая структура твёрдых тел. Симметрия кристаллов – закономерность атомного строения, внешней формы и физических свойств кристаллов, заключающаяся в том, что кристалл может быть совмещён с самим собой путём поворотов, отражений, параллельных переносов и других преобразований симметрии. Симметрия свойств кристалла обусловлена симметрией его строения.

Симметрия пространства и времени называется однородностью и изотропностью пространства и времени. Современная теоретическая физика показывает, что в окружающем нас мире действует принцип симметрии: наше пространство можно считать однородным и изотропным (поводов думать иначе у нас нет), а, следовательно, в нём обязательно должен выполняться ряд законов сохранения.

Закон сохранения импульса связан с **однородностью пространства**: перенос начала отсчёта системы координат из одной точки пространства в другую не сказывается на сути физических законов.

Изотропность пространства означает неизменность физических законов относительно выбора направления осей координат системы отсчёта (то есть – относительно поворота замкнутой системы в пространстве на любой угол). Из изотропности пространства следует закон сохранения момента импульса.

Из **однородности времени** (то есть из утверждения о том, что вид физических законов не меняется со временем) следует закон сохранения энергии. Так, например, при свободном падении тела его скорость и пройденный путь зависят лишь от начальной скорости и продолжительности падения, но не зависят от того, когда происходило само падение.

С понятием симметрии пространства связаны утверждения об инвариантности (неизменности) законов природы при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой и при обращении времени.

Так, **все законы природы инвариантны относительно инерциальных систем отсчёта** (в этом заключается в частности

один из постулатов созданной Эйнштейном специальной теории относительности, СТО).

Не менее любопытным является утверждение о неизменности фундаментальных законов (по крайней мере – на уровне макромира) при обращении времени. Дело в том, что если подвергнуть анализу формулы механики, то можно заметить: перемена знака времени не приводит к изменению их вида. Более того, смена знака перед t просто позволяет вычислить значения соответствующего параметра в момент времени, предшествующий началу отсчёта (включению секундомера). Данное явление получило название детерминизма (предопределённости). В наиболее отчётливой форме его выразил П.-С. Лаплас (1749 – 1827 гг.), заметивший, что, задав начальные значения нужного числа параметров, которые характеризуют движение всех тел во Вселенной, можно однозначно рассчитать значения этих параметров в сколь угодно удалённые предыдущий и последующий моменты времени.

Утверждение о неизменности фундаментальных законов при обращении времени справедливо не только в механике, но и в случае других разделов физики. Следует помнить, однако, что наряду с **детерминизмом** (то есть причинной обусловленностью всех событий) в природе существенную роль играет **случайность**, для описания которой создан свой математический аппарат: теория вероятностей. Выводы этой теории тем точнее, чем больший коллектив объектов участвует во взаимодействиях, что хорошо выполняется в случае коллективов молекул газа, электронов в кристаллах и т. д., то есть – достаточно малых объектов. Именно поэтому о неизменности законов физики при обращении времени говорят лишь для макрообъектов, число которых не так велико, как, например, число молекул газа в нормальных условиях, электронов в веществе и др.

Некоторые примеры

- Земля не является идеальным шаром: она «сплюснута» у полюсов и «раздута» у экватора. Гравитационное воздействие Солнца и Луны на экваториальное «вздутие» приводит к возникновению мо-

ментов сил, вызывающих прецессию земной оси, которая описывает полный конус примерно за 26000 лет.

- Работа сердца взрослого человека за одно сокращение – примерно 1 Дж; за сутки – примерно 85 кДж.

- Мощность, развиваемая человеком при разовом движении – примерно до 3,5 кВт, при непрерывной интенсивной работе в течение 5 мин – до 1,5 кВт.

- Мощность двигателя автомобиля Chevrolet Niva с мотором «Опель-1,8» – 125 л. с. (или 92 кВт, так как 1 л. с. = 735,5 Вт, где л. с. – «лошадиная сила» – внесистемная единица измерения мощности;).

- Мощность паровоза «Ракета» Дж. Стефенсона – 13 л. с. (примерно 9,6 кВт).

- Мощность современного серийного тепловоза – более 8000 л.с. (5,9 МВт).

- Мощность современного серийного электровоза – более 10000 л.с. (7,4 МВт).

- Примерная мощность, развиваемая при экстренном торможении состава, двигавшегося со скоростью 200 км/ч – 10 МВт

- Суммарная мощность двигателей ракеты-носителя «Протон» – более $4,4 \cdot 10^7$ кВт; ракеты-носителя «Энергия» – $1,25 \cdot 10^8$ кВт.

- Энергия электрона в атоме водорода – около $2 \cdot 10^{-18}$ Дж.

- Энергия взмаха крылышек мухи – около 10^{-5} Дж.

- Тепловая энергия, испускаемая с 1 см^2 кожи человека за 1 с – около 10^{-1} Дж.

- Энергия удара молнии – около 10^{10} Дж.

- Энергия взрыва водородной бомбы – около 10^{18} Дж.

- Энергия, получаемая Землёй от Солнца за год – около 10^{26} Дж.

- Энергия взрыва сверхновой звезды – около 10^{44} Дж.

Вопросы для повторения

1. Что называется работой постоянной силы? Как рассчитывается работа, если сила меняется в процессе движения тела? В каких единицах в СИ они измеряются? Приведите пример расчёта работы переменной силы.

2. Что называется средней мощностью? Что называется мгновенной мощностью? Какие единицы измерения (в том числе – внесистемные) мощности Вам известны?
3. Что называется кинетической энергией тела при поступательном движении? Выведите соответствующую формулу для тела, масса которого не меняется в процессе движения.
4. Что называется второй космической скоростью? Выведите формулу для расчёта этой скорости.
5. Сравните выражения для работы, мощности и кинетической энергии при поступательном и вращательном движениях тела.
6. Что обозначается термином «поле сил»? Какие силы называются консервативными?
7. Какие виды потенциальной энергии в механике Вам известны? Запишите соответствующие формулы и поясните смысл входящих в эти формулы параметров.
8. Выведите формулу для расчёта потенциальной энергии тела в поле тяжести Земли.
9. Выведите формулу для расчёта потенциальной энергии упруго деформированной пружины.
10. Сформулируйте известные Вам законы сохранения.
11. Какие виды симметрий, используемых для описания окружающего мира, Вам известны? Поясните, что имеется в виду, когда говорят об этих видах симметрий.
12. Приведите примеры характерных значений мощности и энергии, с которыми мы сталкиваемся в окружающем нас мире.

5.1 ОСНОВЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ (СТО)

5.1.1 *Принцип относительности Галилея. Постулаты Эйнштейна*

5.1.2 *Преобразования Галилея. Неинерциальные системы отсчёта*

5.1.3 *Преобразования Лоренца*

5.1.4 *Следствия из преобразований Лоренца*

5.2 ОСНОВЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКИ

5.2.1 *Законы Ньютона в релятивистской динамике*

5.2.2 *Энергия тела в СТО. Полная энергия, кинетическая энергия, энергия покоя*

5.2.3 *Связь энергии и импульса тела. Инварианты к преобразованиям Лоренца*

Некоторые примеры

Вопросы для повторения

5.1 ОСНОВЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ (СТО)

5.1.1 *Принцип относительности Галилея.*

Постулаты Эйнштейна

Итак, мы отметили, что, все законы природы инвариантны относительно инерциальных систем отсчёта. В классической физике подобное утверждение впервые высказал Галилей: согласно принципу относительности Галилея **все законы классической механики не меняются при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой.**

Надо сказать, что физика, как наука, началась именно с Галилея: он был первым, поставившим на первое место в научных дискуссиях не умозрительные построения, основанные на чистой логике и «здравом смысле», а результаты реальных измерений. Заметим: во времена Галилея не существовало специальных из-

мерительных приборов, ни научной общественности, с которой можно было бы вести полноценную дискуссию, ни, конечно же, научных журналов. Единственным способом ознакомить общество со своими взглядами было написание литературных произведений, в канву которых вплетались бы научные дискуссии героев: читатель, следя за сюжетом, поневоле был вынужден знакомиться с их высказываниями (выражающими главные научные идеи автора), спорами, и, в конце концов, сам усвоить эти идеи. Именно в таком ключе Галилеем и была написана в 1632 году книга «Диалоги», в которой был изложен, в частности, принцип относительности. В этой книге автор на различных примерах показывает, что никакими механическими опытами, поставленными внутри движущейся равномерно и прямолинейно системы отсчёта, невозможно определить, движется ли эта система вообще, или она покоится.

На 250 лет позже появилась более общая теория, которая получила название специальной теории относительности (СТО)¹. На английском языке слово «относительность» звучит *«relativity»*, и поэтому в литературе по данной тематике часто звучат термины «релятивизм», «релятивистский» и т. д.

В основе СТО лежат два постулата, выдвинутые А. Эйнштейном.

Согласно первому постулату ***все законы природы инвариантны относительно инерциальных систем отсчёта***. Другими словами, никакими опытами (включая всевозможные химические реакции, биологические процессы, физические явления) нельзя определить, движется ли равномерно прямолинейно объект относительно наблюдателя, или это сам наблюдатель движется равномерно прямолинейно относительно объекта: инерциальные системы отсчёта полностью равноценны.

¹ В 1915 году Эйнштейн заложил основы теории тяготения, получившей название общей теории относительности (ОТО). В основе ОТО лежит постулат об эквивалентности массы, как характеристики инертных свойств тела (см. второй закон Ньютона), и массы, как параметра, характеризующего гравитационное притяжение двух тел (см. закон Всемирного тяготения).

Согласно второму постулату *скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчёта и не зависит от того, движутся ли источник света и приёмник или покоятся.*

Из постулатов СТО следует, что при переходе от описания объекта в одной инерциальной системе к описанию в другой системе, ряд параметров измениться не должен. К числу таких параметров (инвариантов) помимо скорости света в вакууме относятся масса покоя объекта, его электрический заряд и некоторые другие.

Если первый постулат обычно воспринимается без возражений (к сходному по формулировке принципу относительности Галилея люди привыкли уже достаточно давно), то второй постулат и связанное с ним утверждение о том, что скорость света в вакууме – максимально возможная скорость в природе до сих пор является достаточно удивительным. Ведь если принять этот постулат, то тут же оказывается, что должно выполняться его следствие: время в разных инерциальных системах отсчёта течёт по-разному!

Рассмотрим пример. Пусть в центре ракеты, движущейся со скоростью \vec{v} относительно земли, установлена лампочка Л, а в салоне на равных расстояниях от этой лампочки – два фотоприёмника ФП-1 и ФП-2 (рис. 5.1).

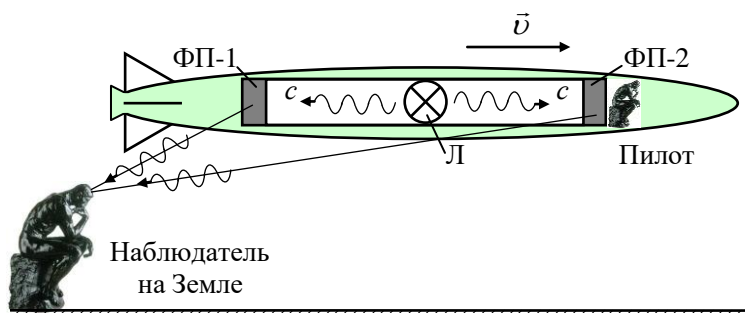


Рис. 5.1

При включении лампы пилот отметит, что оба фотоприёмника срабатывают одновременно, ведь лампа равноудалена от обоих фотоприёмников. Однако наблюдателю, находящемуся на Земле

покажется, что это не так: ведь ФП-1 движется навстречу лучу света, и поэтому сработает раньше, чем ФП-2, поскольку луч света движется ему *вдогонку*. Другими словами, события, являющиеся одновременными в одной системе отсчёта, в другой таковыми не являются, то есть время в этих системах действительно течёт по-разному!

5.1.2 Преобразования Галилея. Неинерциальные системы отсчёта

В классической механике молчаливо предполагается, что ход времени одинаков во всех системах отсчёта. Этот факт нашёл отражение в системе уравнений, которые носят название **преобразования Галилея** и позволяют перейти от координат тела в одной системе отсчёта к координатам этого же тела в другой системе, движущейся относительно первой.

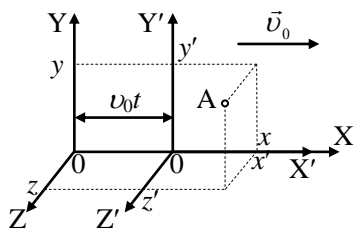


Рис. 5.2

Рассмотрим простейший случай: система отсчёта $X'Y'Z'$ движется равномерно прямолинейно относительно системы XYZ с постоянной скоростью v_0 вдоль оси OX (рис. 5.2). Пусть в начальный момент времени ($t = 0$) все оси координат полностью совпадали. Тогда, согласно законам кинематики, координаты

x', y', z' некоторой точки A , являющейся неподвижной в системе $X'Y'Z'$, в любой другой момент времени t оказываются связанными с координатами x, y, z этой же точки в системе XYZ следующими соотношениями:

$$\begin{cases} x = x' + v_0 t \\ y = y' \\ z = z' \end{cases} \quad (5.1)$$

Очевидно: если бы система $X'Y'Z'$ двигалась прямолинейно равномерно относительно системы XYZ произвольным образом, соответствующие преобразования выглядели бы так:

$$\begin{cases} x = x' + v_{0x}t \\ y = y' + v_{0y}t \\ z = z' + v_{0z}t, \end{cases} \quad (5.2)$$

где v_{0x} , v_{0y} и v_{0z} – компоненты скорости системы $X'Y'Z'$ относительно системы XYZ .

Продифференцировав правые и левые части уравнений (5.2) по времени, получим преобразования Галилея для скорости точки А в случае, если она движется равномерно прямолинейно и относительно обеих систем отсчёта:

$$\begin{cases} v_x = v_x' + v_{0x} \\ v_y = v_y' + v_{0y} \\ v_z = v_z' + v_{0z}, \end{cases} \quad (5.3)$$

Еще одно дифференцирование по времени и учёт того, что v_{0x} , v_{0y} и v_{0z} неизменны, позволяют получить соотношение между компонентами ускорения:

$$\begin{cases} a_x = a_x' \\ a_y = a_y' \\ a_z = a_z', \end{cases} \quad (5.4)$$

то есть если точка А и начнёт двигаться с ускорением относительно инерциальных систем отсчёта $X'Y'Z'$ и XYZ , то это ускорение будет одинаковым в обеих системах. Но поскольку для тела постоянной массы $\vec{a} = \vec{F}/m$, то это означает, что и сила, вызывающая это ускорение, одинакова в обеих системах отсчёта. Другими словами, мы, вслед за Галилеем, делаем вывод о том, что все явления механики должны протекать одинаково в любых системах отсчёта, движущихся друг относительно друга равномерно прямолинейно или покоящихся.

Если бы система $X'Y'Z'$ двигалась относительно XYZ с ускорением \vec{a}_0 , компоненты которого обозначим a_{0x} , a_{0y} и a_{0z} , то для координат, компонент скорости и ускорения точки А следовало бы записать:

$$\begin{cases} x = x' + v_{0x}t + a_{0x}t^2/2 \\ y = y' + v_{0y}t + a_{0y}t^2/2 \\ z = z' + v_{0z}t + a_{0z}t^2/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = v'_x + v_{0x} + a_{0x}t \\ v_y = v'_y + v_{0y} + a_{0y}t \\ v_z = v'_z + v_{0z} + a_{0z}t \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = a'_x + a_{0x} \\ a_y = a'_y + a_{0y} \\ a_z = a'_z + a_{0z} \end{cases}$$

Из последних трёх уравнений следует, что для описания поведения точки А в системе отсчёта $X'Y'Z'$, движущейся с ускорением (то есть – неинерциальной) наблюдателю, движущемуся вместе с этой системой, приходится предполагать, что в ней на точку действует добавочная сила $\vec{F}_0 = -m\vec{a}_0$. Подобные «нереальные» силы, которые приходится вводить в формулы только из-за того, что наблюдатель находится в неинерциальной системе отсчёта, называются силами инерции. Типичный пример силы инерции – «сила», которая «отбрасывает» человека назад при старте автомобиля: человеку, стоящему на тротуаре понятно, что никто пассажира не толкает назад, но самому пассажиру кажется, что его какая-то сила «вжимает» в кресло, пока автомобиль ускоряется.

Использование понятия сил инерции в ряде случаев позволяет проще записывать уравнения динамики и быстрее находить ответы в соответствующих задачах.

5.1.3 Преобразования Лоренца

Если учесть постулат Эйнштейна об инвариантности скорости света при переходе от одной системы отсчёта к другой, то системы уравнений, позволяющих осуществлять пересчёт координат и скоростей точки при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой, существенно меняются. Соответствующие формулы носят название **преобразований Лоренца**. Лоренц впервые получил их, решая задачу о том, как описать изменение электрического и магнитного полей при переходе от системы отсчёта, в которой заряды покоятся (электростатика) к системе, в которой они движутся с постоянной скоростью (их можно интерпретиро-

вать, как постоянные токи). Любопытно, что уравнения были написаны до создания Эйнштейном теории относительности, но Лоренц интерпретировал их просто как удобный метод вычислений. Эйнштейн же, опираясь на работы Лоренца и ряда других авторов, выдвинул гораздо более сильную идею – данные преобразования не просто «математический фокус», ценный в практическом отношении метод расчётов: они отражают глубинные свойства окружающего нас мира!

Перед тем, как записать систему уравнений, позволяющих выполнять как прямые, так и обратные преобразования Лоренца для координат, вновь представим себе, что система отсчёта $X'Y'Z'$ с постоянной скоростью \vec{v}_0 движется вдоль оси X относительно

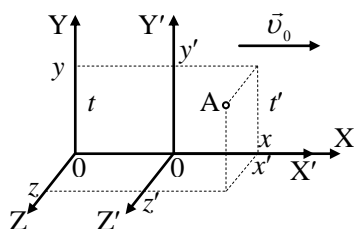


Рис. 5.3

системы отсчёта XYZ . В начальный момент времени ($t = t' = 0$, где t – показания часов в системе XYZ , t' – в системе $X'Y'Z'$) оси систем координат совпадали; точка A неподвижна в системе отсчёта $X'Y'Z'$ (рис. 5.3). Ниже записаны системы (5.5) и (5.6) преобразований Лоренца для рассматриваемого случая.

Прямые преобразования Лоренца для координат и времени:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{x' + v_0 t'}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \frac{t' + \frac{v_0}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \end{array} \right. \quad (5.5)$$

Обратные преобразования Лоренца для координат и времени:

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \frac{x - v_0 t}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{v_0}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \end{array} \right. \quad (5.6)$$

В классической механике Ньютона Вселенная рассматривается как бесконечное пространство, в каждой точке которого время течёт одинаково, и уж, тем более, независимо от того, движутся ли рассматриваемые системы отсчёта друг от друга или покоятся. Согласно СТО, дело обстоит принципиально иначе: $t \neq t'$, то есть нельзя говорить отдельно о пространстве и отдельно – о времени, они представляют собой единую систему, пространственно-временной континуум. В этом смысле нашу Вселенную следует считать не трёх-, а четырёхмерной, где состояние любого объекта описывается совокупностью четырёх взаимосвязанных переменных – трёх координат и времени. Другими словами, вопросы «где?» или «когда?» в СТО не имеют особого смысла, корректен лишь вопрос «где и когда?». Правда, в привычных нам условиях скорость реальных объектов много меньше скорости света в вакууме ($c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с), то есть $v_0 \ll c$, и $v_0/c \approx 0$. Тогда $t = t'$, системы уравнений (5.5) и (5.6) становятся идентичными и переходят в систему (6.1). Таким образом, в нашей повседневной жизни мы с успехом можем пользоваться динамикой Ньютона и полагать при этом, что время везде течёт одинаково.

Вернёмся к преобразованиям Лоренца.

Если точка А неподвижна, а движется с постоянной скоростью v_x' в системе отсчёта $X'Y'Z'$, то, учитывая, что, по определе-

нию $v_x = \frac{dx}{dt}$, а $v_x' = \frac{dx'}{dt'}$, применяя формулы (6.5) и (6.6), можно вывести правило сложения скоростей в СТО:

$$v_x = \frac{v_x' + v_0}{1 + \frac{v_0}{c^2} v_x'} \quad (5.7)$$

В частности, если точка А движется вдоль оси X' со скоростью света ($v_x' = c$), и при этом сама система отсчёта $X'Y'Z'$ движется с такой же скоростью вдоль оси X ($v_0 = c$), то скорость точки А относительно системы отсчёта XYZ будет не $v = c + c = 2c$, как казалось бы на первый взгляд, а $v_x = (c + c) / \left(1 + \frac{c}{c^2} c\right) = c$, что находится в полном соответствии со вторым постулатом Эйнштейна в СТО.

5.1.4 Следствия из преобразований Лоренца

Из преобразований Лоренца вытекает ряд следствий, которые допускают экспериментальную проверку и, тем самым, могут свидетельствовать о том, насколько теория Эйнштейна соответствует действительности.

а) Сокращение длины движущихся объектов

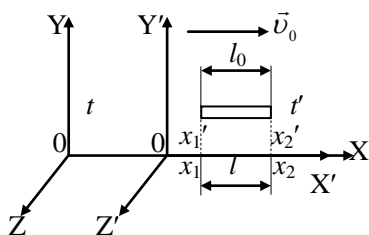


Рис. 5.4

Пусть объект, имеющий длину l_0 в системе отсчёта $X'Y'Z'$, (рис. 5.4) движется вместе с этой системой со скоростью v_0 относительно системы XYZ вдоль оси X . Очевидно при этом, что $l_0 = x_2' - x_1'$. Но длину объекта l можно измерить и в системе XYZ . Для этого в один и тот же момент времени t следует засечь координаты начала

и конца объекта: $l = x_2 - x_1$. Используя обратное преобразование

Лоренца для координаты x' (именно в него входит нужное время t), получим:

$$l_0 = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - v_0 t}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - v_0 t}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}, \text{ или}$$

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}. \quad (5.8)$$

Поскольку $\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} < 1$, $l < l_0$, то есть, объект как бы «сокращается» в размерах относительно неподвижного наблюдателя вдоль направления своего движения¹. Изменения размеров в двух других направлениях при этом не происходит.

б) Изменение длительности процесса

Пусть в одной и той же точке с координатой x' в движущейся системе отсчёта произошли два события, разделённые интервалом времени $\tau_0 = t_2' - t_1'$. С точки зрения наблюдателя, находящегося в системе отсчёта XYZ этот интервал составляет $\tau = t_2 - t_1$. Используя обратное преобразование Лоренца для координаты x' (именно в него входит нужное время t), получим:

$$\tau = t_2 - t_1 = \frac{t_2' + \frac{v_0}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} - \frac{t_1' + \frac{v_0}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}, \text{ или}$$

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}. \quad (5.9)$$

¹ Более строгие рассуждения приводят к выводу, что одновременно происходит *поворот* объекта относительно вертикальной оси.

Поскольку $\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} < 1$, $\tau > \tau_0$, то есть из формулы (5.9) следу-

ет, что длительность какого-либо события, происходящего с телом, минимальна в той системе отсчёта, в которой тело покоится. Чем быстрее тело движется, тем дольше длится это событие с точки зрения наблюдателя, мимо которого пролетает тело.

Последнее соотношение получило непосредственное экспериментальное подтверждение. Под действием солнечного излучения в верхних слоях атмосферы Земли рождаются элементарные частицы мюоны. Эти частицы нестабильны, они распадаются самопроизвольно на электрон (или позитрон) и два нейтрино. Среднее время жизни, измеренное в условиях, когда они неподвижны (или движутся с малой скоростью), составляет всего лишь $2 \cdot 10^{-6}$ с. На первый взгляд, даже двигаясь со скоростью света, мюоны за это время способны пролететь не более 600 м. Однако, как показывают наблюдения, мюоны, хотя и образуются на высоте $20 \div 30$ км, всё же успевают в значительном количестве достигнуть земной поверхности. Это объясняется тем, что $2 \cdot 10^{-6}$ с – собственное время жизни мюона, то есть время τ_0 , измеренное по часам, движущимся вместе с ним. Время τ , отсчитанное по часам экспериментатора, связанного с Землей, оказывается гораздо большим (скорость мюона близка к c). Поэтому нет ничего удивительного в том, что этот экспериментатор наблюдает пробег мюона, значительно больший 600 м.

Отметим, что с позиции самого мюона, хотя его время существования и невелико, малым для него оказывается расстояние, пролетаемое до поверхности Земли (имеет место лоренцево сокращение длины).

С замедлением течения времени в движущейся системой отсчёта связан так называемый *парадокс близнецов*. Поскольку об этом парадоксе довольно часто вспоминается в научно-популярной и фантастической литературе, имеет смысл рассмотреть его подробнее. Напомним, что, по определению, *парадокс* – это неожиданное положение, находящееся в видимом противоречии с общепринятыми понятиями.

Представим себе, что на Земле одновременно родились два брата – близнеца, один из которых в зрелом возрасте стал космонавтом и собрался полететь в межзвёздную экспедицию. До старта ракеты биологический возраст близнецов был одинаковым, поскольку оба всю жизнь провели на Земле и двигались со скоростями, много меньшими c . После старта *космонавт* будет двигаться с большой скоростью, а, следовательно, с точки зрения близнеца, оставшегося на Земле, его старение будет происходить медленнее. Это еще не парадокс, а простое следствие преобразований Лоренца.

Теперь сделаем еще один шаг в размышлениях: с точки зрения космонавта неподвижной можно было бы считать ракету, это Земля улетала из-под ног, и, следовательно, это землянин должен будет стариться медленнее! Итак, казалось бы, всё зависит от точки зрения, разницы – никакой. Однако, *несмотря на кажущуюся равноценность систем отсчёта «ракета» и «Земля», после возвращения домой окажется, что всё же именно космонавт состарится меньше брата*. Вот в этом и заключается видимое противоречие, парадокс.

Данный парадокс возник из-за того, что мы посчитали обе системы отсчёта равноценными. Но это не так: разгоняясь до околосветовой скорости, затормаживая у звезды, разворачиваясь, вновь разгоняясь по направлению к Земле, а затем – затормаживая для посадки, ракета оказывается неинерциальной, движущейся с ускорением системой отсчёта. Неинерциальность (это можно строго показать, используя математический аппарат СТО), как раз и приводит к тому, что общее время между стартом и возвращением ракеты для космонавта всё же окажется меньше, чем для земного наблюдателя.

Подобные эксперименты уже проводились в наше время: сравнивались показания часов, остававшихся на Земле, и запущавшихся в космос на спутниках. И хотя скорости современных космических аппаратов далеки от световых, различие в показаниях часов в земной лаборатории и возвращаемых на Землю после достаточно длительного полёта фиксируется вполне уверенно.

5.2 ОСНОВЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКИ

5.2.1 Законы Ньютона в релятивистской динамике

Вопросы, которые мы рассмотрели на предыдущей лекции, касались постулатов, лежащих в основе специальной теории относительности (СТО), и проблем, традиционно относящихся к кинематике поступательного движения (преобразований координат, времён, скоростей). Теперь обратим внимание на проблемы, относящиеся к динамике поступательного движения, и прежде всего, обсудим, в каком виде выполняются в рамках СТО законы Ньютона.

Первый закон Ньютона выполняется полностью, поскольку соответствует первому постулату Эйнштейна: все законы природы выполняются одинаковым образом в инерциальных системах отсчёта.

Второй закон Ньютона справедлив в общем виде:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (5.10)$$

где $\vec{p} = \frac{m_0 \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$

(здесь m_0 – масса покоящегося тела (масса покоя); c – скорость света в вакууме).

Ранее мы отмечали, что дробь $m_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ в последней формуле зачастую интерпретируется, как релятивистская масса m тела, движущегося со скоростью v :

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (5.11)$$

Что касается третьего закона Ньютона, то здесь требуются пояснения. Дело в том, что его классическая формулировка, в которой утверждается, что каждое действие носит характер взаимо-

действия, была выдвинута в то время, когда предполагалось, что взаимодействие переносится в пространстве мгновенно: достаточно что-то изменить в одном месте Вселенной, и в любом другом её месте это изменение можно почувствовать тут же. Но, согласно СТО, никакой сигнал не может распространяться быстрее света, то есть в передаче сигнала всегда есть запаздывание! Так, например, мы чувствуем воздействие далёких звёзд, свет от которых шёл к Земле миллиарды лет. Часть этих звёзд, возможно, уже прекратила существование, и в этом случае мы на них (наша Земля), конечно же, уже не действуем, хотя сами их действие ощущаем и будем ощущать ещё достаточно долго. Таким образом, в третьем законе Ньютона утверждение о том, что всякое действие носит характер взаимодействия, следует воспринимать с учётом запаздывания сигнала о воздействии одного тела на другое.

5.2.2 Энергия тела в СТО.

Полная энергия, кинетическая энергия, энергия покоя

По данным ЮНЕСКО, самой известной формулой физики XX века является соотношение

$$E = mc^2. \quad (5.12)$$

В этой формуле m – релятивистская масса, см. (5.11); c – скорость света в вакууме, а E – полная энергия тела, включающая все виды энергии – кинетическую, потенциальную, энергию взаимодействия молекул и атомов, элементарных частиц, из которых они состоят... Фактически, соотношение (5.12) говорит об эквивалентности массы и энергии, в частности, поскольку, согласно закону сохранения полная энергия замкнутой системы не меняется со временем, не должна меняться и релятивистская масса такой системы.

Выражаемая формулой (5.12) связь массы с энергией уже находит практическое применение при создании атомного оружия и построении мирной ядерной энергетики.

Как и в классической динамике, мерой изменения энергии тела является работа, и, учитывая, что работа A , которую требуется

совершить с тем, чтобы разогнать тело из состояния покоя до некоторой скорости, численно равна приобретенной при этом телом кинетической энергии W_k , можно получить формулу для кинетической энергии в релятивистской физике.

$$\text{Если } E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \text{ для тела, разогнанного до скорости } v,$$

то в состоянии покоя (при $v = 0$) масса $m = m_0$ (масса покоя) и полная энергия тела является *энергией покоя* $E_0 = m_0 c^2$. Согласно определению, $W_k = A = E - E_0$, или

$$W_k = mc^2 - m_0 c^2. \quad (5.13)$$

Как видим, данное выражение и отдалённо не напоминает формулу вида $W_k = \frac{mv^2}{2}$, выведенную нами на одной из предыдущих лекций в предположении, что масса ускоряемого тела не меняется со временем. Тем не менее, следует помнить, что правильная теория должна допускать предельный переход от одних формул к другим при изменении соответствующих параметров задачи. В частности, продемонстрируем, что выражение (5.13) принимает вид, известный нам из классической физики, в области скоростей $v \ll c$. Для этого запишем формулу (5.13) более подробно:

$$W_k = mc^2 - m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 c^2 = m_0 c^2 \left\{ \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right\}.$$

Далее используем известное правило разложения в ряд по малому параметру выражения вида $(1+x)^n$, где $|nx| \ll 1$:

$$(1+x)^n \approx 1 + nx. \quad (5.14)$$

В нашем случае $x = -\frac{v^2}{c^2}$ (при $v \ll c$, действительно, $|x| \ll 1$); а

$n = -\frac{1}{2}$, то есть

$$W_k = m_0 c^2 \left\{ \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right\} =$$

$$= m_0 c^2 \left\{ 1 + \left(-\frac{1}{2} \right) \left(-\frac{v^2}{c^2} \right) - 1 \right\} = \frac{m_0 v^2}{2} .^1$$

Учитывая, что при $v \ll c$ релятивистская масса m практически равна массе покоя m_0 , мы, как и требовалось, получили классическое выражение для кинетической энергии поступательного движения тела постоянной массы.

5.2.3 Связь энергии и импульса тела. Инварианты к преобразованиям Лоренца

Как мы отметили выше, полная энергия тела связана с его релятивистской массой соотношением $E = mc^2$. Преобразуем это выражение, возведя в квадрат правую и левую части и используя формулу для зависимости массы от скорости:

$$E^2 = m^2 c^4 = \frac{m_0^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{m_0^2 c^4 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v^2}{c^2} \right)}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = m_0^2 c^4 + \frac{m_0^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} c^2, \text{ или}$$

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} . \quad (5.15)$$

¹Формула (5.14) крайне полезна для проведения приближённых вычислений. Пусть, например, возникла задача посчитать, сколько получится, если 1,001 возвести в степень 100. Никакой калькулятор тут не поможет: возникнет переполнение разрядов, но мы можем записать: $(1,001)^{100} = (1 + 0,001)^{100} \approx 1 + 100 \cdot 0,001 = 1,1$.

Существуют и другие полезные формулы для приближённых вычислений: так, следует помнить, что при малых значениях аргумента, таких, что $x \leq 0,1$ (рад), $\sin x \approx \operatorname{tg} x \approx x$, и что при $|x| \ll 1$ можно записать: $e^x \approx 1 + x$.

Пример 5.1. При скорости объекта $v \ll c$ (то есть при $\frac{v^2}{c^2} \ll 1$)

$$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} = m_0 c^2 \left(1 + \frac{p^2}{m_0^2 c^2} \right)^{\frac{1}{2}} = m_0 c^2 \left(1 + \frac{m_0^2 v^2}{m_0^2 c^2} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= m_0 c^2 \left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) = m_0 c^2 + \frac{m_0 v^2}{2} = E_0 + W_K,$$

чего и следовало ожидать.

Пример 5.2. Согласно второму постулату Эйнштейна в СТО кванты света (фотоны) в любой инерциальной системе отсчёта движутся со скоростью c , то есть не могут покоиться, и поэтому не обладают массой покоя: $m_0 = 0$. Поэтому для фотонов можно записать:

$$E = pc, \text{ или } p = mc.$$

В заключение скажем несколько слов о основных законах природы, о которых мы говорили выше: о законах сохранения импульса, момента импульса, энергии. Согласно первому постулату Эйнштейна эти законы, так же, как и закон сохранения электрического заряда, в рамках СТО безусловно выполняются в любых инерциальных системах отсчёта. Кроме этого, следует отметить ряд параметров, которые должны оставаться неизменными при переходе от одной такой системы к другой (про них говорят, что они являются **инвариантами** по отношению к преобразованиям Лоренца).

К числу таких параметров относятся, например, скорость света в вакууме, масса покоя тела m_0 и связанная с ней энергия покоя E_0 , а также выражение, которое следует из формулы (5.15) и отражает связь полной энергии тела и его импульса:

$$m_0^2 c^4 = E^2 - p^2 c^2.$$

Нетрудно убедиться, что условию инвариантности соответствует выражение, связывающее координаты x_1 и x_2 точки и моменты времени t_1 и t_2 , в которые она имела эти координаты:

$$[c(t_2 - t_1)]^2 - (x_2 - x_1)^2 = [c(t'_2 - t'_1)]^2 - (x'_2 - x'_1)^2. \quad (5.16)$$

В более общем случае, учитывая возможные изменения координат по всем трём осям X и Y и Z и используя следующее обозначение: $(\Delta l)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$, можно записать:

$$(c\Delta t)^2 - (\Delta l)^2 = (\Delta S)^2 \quad (5.17)$$

Входящий в эту формулу параметр ΔS называется **пространственно-временным интервалом**; о нём также можно сказать, что он является инвариантом по отношению к преобразованиям Лоренца. Само существование такого инварианта является подтверждением того, что пространство и время не являются независимыми сущностями, а неразрывно связаны друг с другом.

Некоторые примеры

- Учитывая, что среднее расстояние от Земли до Солнца составляет одну астрономическую единицу (1 а. е.) или 150000000 км, можно оценить время, за которое свет, испущенный нашим светилом, достигает земной поверхности: около 500 с или 8,3 мин.

- До самой близкой к Солнцу соседней звезды (Альфа Центавра) свет идёт примерно 4,4 года. Если полететь к этой звезде на космическом корабле, движущемся со скоростью 0,99с, то для космонавта полёт туда и обратно займёт примерно 9 лет. На Земле при этом пройдёт более 60 лет...

- По современным представлениям средний диаметр Вселенной составляет около 156 млрд. световых лет.

- Даже у аппарата, движущегося с третьей космической скоростью (16,6 км/с), лоренцево сокращение длины не превышает $1,5 \cdot 10^{-9} \%$.

- Один из проектов создания электронных пушек для уничтожения военных космических аппаратов подразумевает стрельбу по движущейся мишени пучком ускоренных электронов. После прохождения разности потенциалов в 10 МВ (или 10^7 В) скорость электронов возрастает почти до 0,98с, что позволяет поражать цели на орбите вокруг Земли практически мгновенно.

- При столкновении протона и антипротона происходит их аннигиляция: они исчезают, но при этом рождаются два кванта элек-

ромагнитного излучения, суммарная энергия которых равна примерно $3 \cdot 10^{-10}$ Дж. При аннигиляции молекулы обычной воды и молекулы воды из антивещества энергии выделяется уже в 18 раз больше. Это означает, что при попадании в атмосферу земли метеорита из «антильда» массой всего в 1 г при его аннигиляции выделится энергия примерно $1,8 \cdot 10^{13}$ Дж: в три с лишним раза больше, чем выделилось энергии при взрыве четырёхтонной атомной бомбы в Хиросиме.

Вопросы для повторения

1. Сформулируйте постулаты Эйнштейна в СТО. Чем формулировка первого постулата отличается от формулировки принципа относительности Галилея?
2. Приведите пример ситуации, которая говорит о том, что время в системах отсчёта, движущихся относительно друг друга, течёт неодинаково.
3. Каков смысл преобразований Галилея и Лоренца (что с их помощью можно определить)?
4. Приведите пример применения правила сложения скоростей в СТО.
5. Какие следствия вытекают из преобразований Лоренца?
6. Приведите пример эксперимента, для объяснения результатов которого необходимо привлекать преобразования Лоренца.
7. В чём заключается парадокс близнецов?
8. Оцените время, которое пройдёт на Земле за время космической экспедиции к Сириусу (до него примерно 8,6 световых лет пути) со средней скоростью 0,99 от скорости света.
9. Выполняются ли законы Ньютона в рамках СТО?
10. Как рассчитывается кинетическая энергия в СТО?
11. Продемонстрируйте, что при малых скоростях объекта релятивистская формула для его кинетической энергии переходит в выражение, известное из классической механики.
12. Что имеется в виду, когда говорят, что некоторый параметр является инвариантом к преобразованиям Лоренца? Приведите примеры таких параметров.
13. Продемонстрируйте, что пространственно-временной интервал действительно является инвариантом к преобразованиям Лоренца

6.1 ВВЕДЕНИЕ

6.1.1 Два подхода к описанию свойств макросистем

6.1.2 Параметры состояния

6.2 ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ

6.2.1 Определение. Уравнение состояния

6.2.2 Изопроцессы в идеальном газе

6.2.3 Масса и размеры молекул идеального газа

6.3 РЕАЛЬНЫЙ ГАЗ. УРАВНЕНИЕ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА

6.4 ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗОВ

Некоторые примеры

Вопросы для повторения

6.1 ВВЕДЕНИЕ

6.1.1 Два подхода к описанию свойств макросистем

Анализируя поведение электронов в веществе, атомов и молекул в твёрдых телах, в жидкостях и газах, мы сталкиваемся с тем, что рассматриваемые объекты являются *макросистемами*, содержащими такое количество частиц, составить уравнения обычной кинематики и динамики для которого практически невозможно. Так, в 1 м^3 воздуха при нормальных условиях содержится около 10^{25} молекул, а в 1 м^3 металла – примерно 10^{28} электронов. Понятно, что для математического описания подобных объектов требуются свои методы. Классическим примером решения данной проблемы является раздел «Молекулярная физика и термодинамика», в котором развиваются два подхода к расчётам свойств макросистем: статистический и термодинамический.

Статистический подход основан на выявлении статистических закономерностей в поведении большого числа объектов; при этом исследователь оперирует со средними и наиболее вероятными значениями скорости частиц, а также их энергии и импульса.

Термодинамический подход базируется на описании процессов превращения энергии в рассматриваемых системах, для чего используются макроскопические параметры состояния системы, такие, как объём, давление, температура.

6.1.2 Параметры состояния

Параметры состояния (термодинамические параметры) – физические величины, характеризующие состояние термодинамической системы. К ним относятся, например, температура, давление, объём, число частиц, намагниченность, электрическая поляризация и др.

Напомним смысл некоторых из них.

Объём V – количественная характеристика пространства, занимаемого телом или веществом. В СИ измеряется в кубических метрах; нужно помнить, что $1 \text{ м}^3 = 1000 \text{ л}$.

Число частиц N (безразмерная величина); **концентрация** n – число частиц в единице объёма, в СИ $[n] = 1 \text{ м}^{-3}$.

Давление p – отношение силы dF , действующей на элемент поверхности нормально к ней, к площади этого элемента dS :

$$p = \frac{dF}{dS}. \quad (6.1)$$

В СИ давление измеряется в паскалях $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}$. На практике используется внесистемная единица давления – миллиметр ртутного столба; $1 \text{ мм рт. ст.} \approx 133,3 \text{ Па}$.

Температура – исторически вводилась как параметр, характеризующий линейное расширение тел. Так, если нагреть трубочку с ртутью или спиртом, длина столбика жидкости увеличится от значения l_0 до l ; возрастание длины описывается формулой

$$l = l_0(1 + \alpha t), \quad (6.2)$$

где α – температурный коэффициент линейного расширения ртути или спирта, соответственно, а t – и есть температура. Далее нужно было договориться, какое значение температуры принять за ноль (при этой t следовало измерить l_0), а затем – создать шка-

лу, по которой, отслеживая изменение l , можно определять и изменение температуры.

В СИ используется понятие **термодинамической температуры**, которая связана с кинетической энергией W_k хаотического (теплового) движения атомов и молекул. Абсолютному нулю соответствует температура, при которой $W_k = 0$ (атомы и молекулы не движутся). Термодинамическая температура обозначается буквой T и измеряется в кельвинах ($[T] = K$). Кельвин – одна из семи основных единиц СИ.

Сравнить шкалы Цельсия ($[t] = ^\circ C$), Фаренгейта ($[t] = ^\circ F$), Реомюра ($[t] = ^\circ R$) и Кельвина можно, пользуясь приведённой ниже таблицей 6.1.

Таблица 6.1

Шкалы	<div style="display: flex; justify-content: space-around; width: 100%;"><div>Лёд + вода + + нашатырь</div><div>Плавящийся лёд</div><div>Тело здорового человека</div><div>Кипящая вода</div></div>					
Кельвина	0		273		373	1 K = 1 °C
Цельсия	-273	-32	0	+36,6	+100	
Фаренгейта		0		+100	+212	1 °F = 5/9 °C
Реомюра			0		+80	1 °R = 1,25 °C

В состоянии термодинамического равновесия (в котором система может находиться неограниченно долгое время) не все параметры состояния являются независимыми, часть из них может быть связана друг с другом **уравнением состояния**. Так, например, для заданной массы конкретного идеального газа, зная V и T , можно однозначно определить p . Теоретический вывод уравнения состояния возможен при помощи уравнений статистической физики: в этом проявляется связь статистического и термодинамического подходов к описанию свойств макросистем.

Одной из простейших является модель макросистемы, которая называется идеальным газом.

6.2 ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ

6.2.1 Определение. Уравнение состояния

Идеальным называется газ, для которого выполняются два условия:

- размеры его молекул много меньше среднего расстояния между ними;
- молекулы¹ газа, не взаимодействуют друг с другом на расстоянии, а испытывают лишь абсолютно упругие столкновения между собой и со стенками сосуда, в котором находится газ.

Подобный объект является лишь удобной математической моделью, однако многие газы, входящие в состав воздуха, в обычных условиях ведут себя, как идеальный.

Состояние идеального газа описывается **уравнением Клапейрона – Менделеева**:

$$pV = \frac{M}{\mu} RT. \quad (6.3)$$

Здесь p – давление газа, V – занимаемый им объём, M – масса газа, T – термодинамическая температура; $R = 8,31 \text{ Дж} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$ – универсальная газовая постоянная.

μ – масса одного моля газа (**молярная масса**), измеряется в килограммах на моль (например, у воды $\mu_{\text{H}_2\text{O}} = 0,018 \text{ кг/моль}$).

Вспомним, что такое один моль.

Набор идентичных тел можно характеризовать

- массой (например, можно пойти и купить *килограмм* гвоздей),
- стоимостью (например, – купить тех же гвоздей на тысячу *рублей*),
- количеством (например, купить сто штук всё тех же гвоздей или три коробки, или одну упаковку).

Моль – это и есть единица измерения **количества** вещества; один моль включает столько же структурных элементов (атомов,

¹ Напомним, что под молекулой понимают наименьшую частицу вещества, обладающую его химическими свойствами и состоящую из атомов, соединённых между собой химическими связями.

молекул, ионов), сколько их содержат 12 г углерода (изотоп ^{12}C) а именно: $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль $^{-1}$ (это число называется числом Авогадро).

Таким образом, если бы мы попросили у продавца один моль гвоздей, он был бы вынужден отсчитать нам примерно 602000000000000000000000 штук. Понятно, что и масса такой кучи была бы чудовищной, и стоимость – невообразимой, поэтому молями измеряют количество малых объектов: атомов, молекул, ионов.

Моль, как и кельвин, и метр, и секунда, и килограмм, и ампер и кандела (служит для измерения силы света) – одна из семи основных единиц СИ.

Примечание 6.1. Очевидно, что если массу всего газа M разделить на массу одного моля μ , то мы получим число ν молей этого газа. Аналогичный результат получится, если всё имеющееся число молекул газа N разделить на число Авогадро N_A :

$$\nu = \frac{M}{\mu} = \frac{N}{N_A}. \quad (6.4)$$

Примечание 6.2. Формула (6.3) – один из видов записи **уравнения состояния идеального газа**. Но это же уравнение может быть представлено по-другому:

$$p = \frac{M}{\mu} \frac{RT}{V} = \frac{N}{N_A} \frac{RT}{V} = \frac{N}{V} \frac{R}{N_A} T = n \frac{R}{N_A} T, \text{ или}$$

$$p = nkT, \quad (6.5)$$

где $n = N/V$ – концентрация молекул газа; $k = R/N_A$ – постоянная Больцмана, $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж \cdot К $^{-1}$.

Примечание 6.3. **Нормальными атмосферными условиями** называется состояние газа при температуре $T = 273$ К (0 °С) и давлении $p = 101325$ Па (примерно 10^5 Па). В этих условиях один моль ($\nu = M/\mu = 1$) любого идеального газа занимает один и тот же объём $V_\mu \approx 22,4$ л.

Примечание 6.4. С хорошей степенью точности сухой воздух можно считать смесью идеальных газов, для каждого из которых, как и для смеси в целом, можно записать своё уравнение Клапейрона-Менделеева. Кроме того, для воздуха выполняется закон Дальтона, согласно которому **давление смеси идеальных газов равно сумме давлений, создаваемых каждым газом в отдельности:**

$$p_{\text{смеси}} = p_1 + p_2 + \dots + p_N. \quad (6.6)$$

6.2.2 Изопроцессы в идеальном газе

Приставка **изо-** означает, что речь идёт о процессах, в ходе которых, по крайней мере, один из параметров состояния остаётся постоянным.

Далее мы рассмотрим такие изменения параметров состояния, при которых будут оставаться неизменными масса газа M и число частиц N в нём; варьироваться будут лишь p , V и T (причём давление, объём и температура связаны между собой уравнением Клапейрона-Менделеева $pV = M/\mu RT$).

а) Изотермический процесс ($T = \text{const}$)

В этом процессе меняются лишь p и V , причём так, что $p_1V_1 = p_2V_2$, или просто $pV = \text{const}$ (закон Бойля – Мариотта).

Графики изотермических процессов для двух значений температуры T_1 и T_2 ($T_2 > T_1$) представлены на рис. 6.1. Очевидно: в координатах $p - V$ это гиперболы; в координатах $p - T$ и $V - T$ – прямые линии.

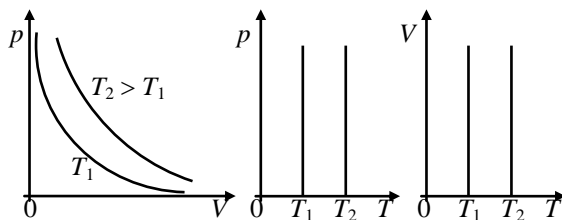


Рис. 6.1

b) Изобарный процесс ($p = \text{const}$)

Здесь меняются лишь V и T , но так, что $\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$, или просто

$$\frac{V}{T} = \text{const}_1 \text{ (закон Гей-Люссака).}$$

Графики изобарных процессов для двух значений давления p_1 и p_2 ($p_2 > p_1$) изображены на рис. 6.2.

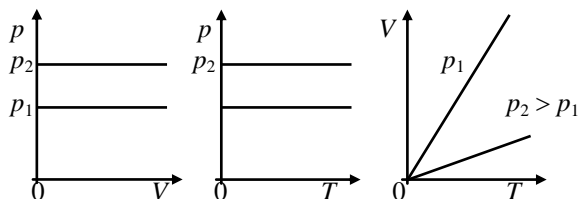


Рис. 6.2

В координатах $p - V$ и $p - T$ это прямые линии, параллельные оси абсцисс ($p = \text{const}_2$), в координатах $V - T$ – прямые линии, проходящие через начало координат, причём, чем больше p , тем наклон этих прямых меньше, так как, согласно уравнению Клапейрона – Менделеева, $V = \frac{MR}{\rho p} T$, или $V = \frac{\text{const}_3}{p} T$.

c) Изохорный процесс ($V = \text{const}$)

В этом процессе меняются p и T , причём так, что $\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$,

или $\frac{p}{T} = \text{const}_4$ (закон Шарля). Графики изохорных процессов для двух значений объёма V_1 и V_2 ($V_2 > V_1$) изображены на рис. 6.3.

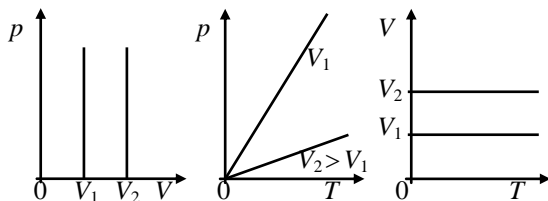


Рис. 6.3

В координатах $p - V$ это прямые линии, параллельные оси ординат, ($V = const_5$), в координатах $V - T$ – прямые, параллельные оси абсцисс ($V = const_5$), в координатах $p - T$ – прямые линии, проходящие через начало координат, чем больше V , тем меньше их наклон, так как согласно уравнению Клапейрона-Менделеева, $p = \frac{MR}{\mu V} T$,

или $p = \frac{const_3}{V} T$.

6.2.3 Масса и размеры молекул идеального газа

Проведём некоторые численные оценки параметров идеального газа (на примере молекулы водяного пара H_2O).

- Оценим массу одной молекулы.

Молярная масса воды $\mu_{H_2O} = 0,018$ кг/моль, число молекул в моле $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹, следовательно, масса одной молекулы

$$m = \mu_{H_2O} / N_A \approx 3 \cdot 10^{-26} \text{ кг}.$$

- Полагая молекулу шариком, оценим размер одной молекулы.

Поскольку масса молекулы воды $m = 3 \cdot 10^{-26}$ кг, а плотность H_2O $\rho = 10^3$ кг·м⁻³, найдём сначала объём молекулы

$$V_0 = m / \rho = 3 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3,$$

а затем ($V_0 = \frac{4}{3} \pi r^3$) – её радиус:

$$r = \sqrt[3]{3V_0 / (4\pi)} \approx 2 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 2 \text{ \AA},$$

где символом \AA обозначена внесистемная единица измерения длины **ангстрем**: $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$.

- Оценим площадь поверхности одной молекулы-шарика:

$$S_0 = 4\pi r^2 \approx 25 \cdot 10^{-20} \text{ м}^2,$$

а также площадь поверхности всех молекул, содержащихся в одном моле:

$$S_M = N_A \cdot S_0 \approx 1,5 \cdot 10^5 \text{ м}^2.$$

- Перейдём к водяному пару (считая его идеальным газом).

Вспомним, что один моль идеального газа в нормальных условиях занимает объём $V_\mu \approx 22,4 \text{ л} = 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$. Если этот газ находится в сосуде сферической формы, то радиус сосуда составляет r_c
 $= \sqrt[3]{3V_\mu/(4\pi)} \approx 0,17 \text{ м}$, а площадь его стенок

$$S_c = 4\pi r_c^2 \approx 0,38 \text{ м}^2.$$

Сравнивая S_μ и S_c , делаем вывод: суммарная площадь поверхности молекул газа гораздо больше площади поверхности стенок сосуда, в котором он находится, следовательно, молекулы гораздо чаще сталкиваются друг с другом, чем со стенками. Именно в процессе таких столкновений они передают друг другу энергию, обмениваются импульсами, в результате чего со временем в замкнутом теплоизолированном сосуде наступает равновесное состояние, при котором параметры состояния оказываются одинаковыми во всех частях сосуда.

6.3 РЕАЛЬНЫЙ ГАЗ. УРАВНЕНИЕ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА

Запишем уравнение Клапейрона – Менделеева в виде (6.3):

$$pV = \frac{M}{\mu} RT.$$

Мы только что оценили объём одной молекулы идеального газа ($V_0 \approx 3 \cdot 10^{-29} \text{ м}^3$), объём же всех молекул, содержащихся в одном моле $V_\mu = V_0 \cdot N_A \approx 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3$. В свою очередь сам моль газа в нормальных атмосферных условиях занимает объём $V_\mu \approx 22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$. Сравнивая V_μ и V_μ , можно сделать вывод о том, что $V_\mu \gg V_\mu$, и при расчётах размерами молекул в первом приближении можно пренебрегать.

Однако, понижая температуру (и одновременно сжимая газ), можно прийти к ситуации, для расчёта которой уже потребуется учитывать то, что объём свободного пространства для движения молекул окажется сравним с размерами молекул, заполняющих сосуд. Такой газ считать идеальным уже нельзя, следовательно, для проведения вычислений в уравнение 6.3 надо ввести поправ-

ку, учитывающую размеры молекул конкретного газа. В итоге вместо объёма идеального газа в формуле должна фигурировать разность $V - vb$, где той же буквой V обозначен теперь *объём сосуда*, который занят реальным газом, $v = M/\mu$ – число молей газа, а b – параметр, характеризующий данный реальный газ и зависящий от размеров его молекул. Произведение vb имеет смысл объёма непосредственно молекул газа.

Далее следует учесть ещё одну поправку. Дело в том, что в объёме газа на каждую молекулу действуют силы со стороны соседей, которые окружают молекулу со всех сторон. Совокупность равнодействующих этих сил в случае и входит в формулу для расчёта давления газа. Однако со стороны стенок сосуда в непосредственной близости от этих стенок молекул газа нет, поэтому компенсации действия молекул, находящихся со стороны объёма, не происходит. В связи с этим давление непосредственно на стенку сосуда оказывается выше, чем давление на любую мысленно выбираемую поверхность в объёме газа.¹ Именно поэтому при расчёте давления на стенки приходится использовать поправку: вместо давления идеального газа в формуле (6.3) следует записать выражение вида $p + v^2 a/V$. Здесь буквой p обозначено *давление реального газа*, V – его объём, a – параметр, учитывающий силы взаимодействия молекул конкретного газа даже тогда, когда они находятся на некотором расстоянии друг от друга.

В итоге вместо формулы закона Клапейрона – Менделеева возникает уравнение вида

$$\left(p + \frac{M^2}{\mu^2} \frac{a}{V^2} \right) \left(V - \frac{M}{\mu} b \right) = \frac{M}{\mu} RT, \quad (6.7)$$

¹ Можно предложить следующую аналогию: в заполненном вагоне метро на человека, который находится в глубине толпы, силы действуют со всех сторон, и в конкретном направлении равнодействующая всех сил, хоть порой и возникает, но она невелика. Но если человек находится у дверей, то при толчках он давит на дверь (стенки «сосуда») с большей силой, «передавая» давление всей массы народа, который наваливается на него сзади.

которое называется *уравнением Ван-дер-Ваальса*.

Особенностью формулы является то, что она позволяет описать явление конденсации реального газа (превращения его в жидкость). С тем, чтобы в этом убедиться, совсем не обязательно пытаться достичь очень низких температур и высоких давлений: реальным газом являются, например, насыщенный пар воды в воздухе, для объяснения поведения которого удобно использовать формулу (6.7).

На рис. 6.4а приведены графики нескольких изотерм реального газа.

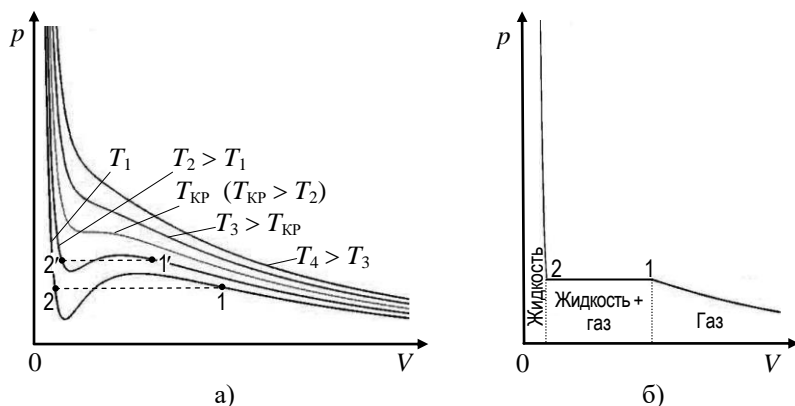


Рис. 6.4

Особенностью кривых является наличие у них «ямы», которая с ростом температуры становится менее выраженной, а выше некоторой критической температуры $T_{кр}$ исчезает вовсе.

При анализе формы кривых следует помнить, что уравнение (6.7) является лишь очередным приближением в описании поведения реального газа. На деле связь давления с объёмом описывается линией, близкой той, которая представлена на рис. 6.4б: при сжатии газа, начиная с точек 1 и 1' на рис. 6.4а, в сосуде возникает жидкая фаза, причём, чем сильнее сжимается газ, тем её больше. Давление практически не растёт вплоть до точек 2 и 2', когда весь газ превращается в жидкость. Далее изотерма описывает по-

ведение уже не газа, а жидкости, которая сжимается плохо, о чём говорит крутизна графика в области малых V .

При температурах выше $T_{кр}$, а также в области больших V реальный газ ведёт себя, как идеальный.

6.4 ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗОВ

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории (МКТ) позволяет связать друг с другом параметры идеального газа: макроскопические (которые обычно измеряются на практике, например – давление) и микроскопические (характеризующие движение отдельных молекул, например, их скорость). Это уравнение впервые было получено Клаузиусом; в основе вывода лежат следующие положения.

1. Давление газа объясняется ударами молекул о дно и стенки сосуда.

2. Давление p тем больше, чем больше количество ударов. Но количество ударов определяется концентрацией молекул n , значит, давление зависит от концентрации: $p \sim n$, где $n = N/V$ (здесь N – число молекул в сосуде объёмом V).

3. Давление тем больше, чем больше кинетическая энергия молекулы, налетающей на стенки сосуда. Значит, давление зависит от массы m молекул и квадрата их скорости v^2 . Но для молекул газа, находящегося в замкнутом сосуде, все направления равновероятны, поэтому вдоль любого из них (вдоль осей X , Y и Z) в каждый момент времени компоненты скорости имеет лишь треть молекул: $p \sim \frac{1}{3}mv^2$

4. Молекул много, они движутся с различными скоростями и в различных направлениях, причем далеко не все из них принимают участие в создании давления на конкретный участок стенок сосуда. Это означает: при расчётах скорости молекул следует усреднить.

Для получения уравнения используем *метод размерностей*:

- давление p измеряется в паскалях, $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2} = 1 \text{ кг} \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{м}^{-1}$;

- концентрация n измеряется в м^{-3} ;
- масса m измеряется в килограммах (кг);
- скорость v измеряется в метрах в секунду ($\text{м}\cdot\text{с}^{-1}$).

Комбинируя размерности, можно сделать вывод о том, что равенство левой и правой частей уравнения достигается, если его записать в виде: $\text{кг}\cdot\text{с}^{-2}\cdot\text{м}^{-1} = \text{м}^{-3}\cdot\text{кг}\cdot(\text{м}\cdot\text{с}^{-1})^2$, то есть

$$p \sim nmv^2.$$

Строгий вывод формулы приводит к следующему виду **основного уравнения МКТ газов**:

$$p = \frac{1}{3} nmv_{\text{KB}}^2. \quad (6.8)$$

Здесь учтён множитель $1/3$, о котором говорилось выше, и проведено усреднение квадратов скоростей всех N молекул:

$$v_{\text{KB}}^2 = \frac{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_N^2}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N v_i^2}{N}.$$

Скорость $v_{\text{KB}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N v_i^2}{N}}$ называется среднеквадратичной, она

характеризует среднюю кинетическую энергию хаотического поступательного движения молекул газа. Действительно, общая кинетическая энергия хаотического поступательного движения молекул газа

$$W_{\text{K}} = \frac{mv_1^2}{2} + \dots + \frac{mv_N^2}{2} = \frac{Nm[(v_1^2 + \dots + v_N^2)/N]}{2} = \frac{Mv_{\text{KB}}^2}{2},$$

где $M = Nm = nVm$ – общая масса всех молекул, поэтому уравнение (15.1) может быть представлено в виде

$$pV = \frac{2}{3} W_{\text{K}}, \quad (6.9)$$

или, согласно формулам (15.1) и (15.2), $p = \frac{2}{3} n \frac{mv_{\text{KB}}^2}{2} = \frac{2}{3} n \langle w_{\text{K}}^* \rangle$,

где $\langle w_K^* \rangle = \frac{m v_{KB}^2}{2}$ – средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы.

Таким образом, давление идеального газа численно равно двум третям энергии поступательного хаотического движения молекул, находящихся в единице его объёма.

Примечание. Поскольку $W_K = \frac{M v_{KB}^2}{2}$, и при этом для идеального

газа $pV = \frac{M}{\mu} RT$, можно сделать вывод о том, что $v_{KB} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$,

или, с учётом соотношений $k = R/N_A$, $\mu = mN_A$ (здесь k – постоянная Больцмана, N_A – число Авогадро),

$$v_{KB} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}. \quad (6.10)$$

Таким образом, средняя кинетическая энергия $\langle w_K^* \rangle$ поступательного хаотического движения молекулы любого идеального газа определяется только его температурой и не зависит от природы самого газа:

$$\langle w_K^* \rangle = \frac{m v_{KB}^2}{2} = \frac{3}{2} kT.$$

В свою очередь термодинамическая температура T характеризует скорость поступательного хаотического движения молекул идеального газа или соответствующую этой скорости среднюю кинетическую энергию этого движения.

Молекулы могут не только двигаться поступательно, но вращаться, а их отдельные фрагменты ещё и колебаться: как мы отметим далее, энергия этих видов движения также зависит лишь от температуры T .

Итак, чем выше температура, тем больше скорость хаотического движения молекул газа. С другой стороны, можно представить себе ситуацию, при которой все молекулы покоятся: в классической физике это состояние системы соответствует абсолютному нулю температуры.

Некоторые примеры

– Формула (6.3) – результат сделанного в 1874 году российским учёным-химиком Д. И. Менделеевым обобщения уравнения состояния идеального газа, которое было выведено в 1834 году французским учёным Бенуа Клапейроном. Любопытно, что деятельность Клапейрона была тесно связана с транспортом: в период с 1821 по 1831 год он преподавал в петербургском институте путей сообщения (даже был заведующим кафедрами механики и химии), а после возвращения во Францию руководил строительством мостов и железных дорог Париж – Сен-Жермен, Бордо – Войона, был профессором Школы мостов и дорог в Париже.

– 1 м^3 сухого воздуха при нормальных атмосферных условиях ($1,01325 \cdot 10^5 \text{ Па}$, 273 К) содержит около 10^{25} молекул.

– Стандартной величиной плотности воздуха на уровне моря в соответствии принимается значение $1,2250 \text{ кг/м}^3$, которая соответствует плотности сухого воздуха при $+15 \text{ }^\circ\text{C}$ и давлении 101330 Па .

– Больше всего в сухом воздухе азота ($78,01 \%$), далее идут кислород ($20,95 \%$) и аргон ($0,93 \%$). Других газов в сухом воздухе существенно меньше, так, например, углекислого газа – лишь $0,032 \%$.

– Примеры значений критической температуры (выше которой газ не превращается в жидкость, каким бы высоким ни было давление) приведены в таблице 6.2

Таблица 6.2

Газ	Критическая температура, $^\circ\text{C}$
Вода H_2O	374,0
Аммиак NH_3	132,4
Пропан C_3H_8	96,8
Углекислый газ CO_2	31,0
Метан CH_4	–82,1
Кислород O_2	–118,8
Азот N_2	–147,1
Водород H_2	–240,0
Гелий He	–268,0

Вопросы для повторения

1. Какой газ называется идеальным? Запишите уравнение Клапейрона – Менделеева, поясните смысл и укажите единицы измерения входящих в него величин.
2. Что такое 1 моль?
3. Выведите формулу, связывающую давление идеального газа с концентрацией его молекул.
4. Какие процессы называются изопроцессами? Начертите графики этих процессов в координатах $p - V$, $p - T$, $V - T$.
5. Оцените размер молекулы газа.
6. В чём заключается закон Дальтона? Приведите пример проявления закона.
7. Чем поведение реального газа на практике отличается от поведения идеального газа?
8. Начертите графики изотермы реального газа в координатах $p - V$ для нескольких значений температуры.
9. Какая температура в случае реального газа называется критической?
10. Продемонстрируйте, что в формуле, связывающей среднеквадратичную скорость молекул газа и температуру, правая и левая части совпадают по размерности.

7.1 ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

7.1.1 Распределение Максвелла молекул по скоростям

7.1.2 Опыт Штерна

7.1.3 Барометрическая формула

7.1.4 Распределение Больцмана

7.1.5 Распределение Максвелла – Больцмана по энергиям

7.2 ЭНЕРГИЯ МОЛЕКУЛ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

7.2.1 Распределение энергии по степеням свободы

7.3 ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА

7.3.1 Средняя длина свободного пробега

7.3.2 Явления переноса в газах

Некоторые примеры

Вопросы для повторения

7.1 ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА7.1.1 Распределение Максвелла молекул по скоростям

В каждый конкретный момент времени одни молекулы газа движутся быстрее, другие – медленнее, есть и такие, которые практически остановились. Задачу о распределении молекул идеального газа по скоростям поступательного движения впервые теоретически решил Дж. Максвелл. Он показал, какое число dN из общего числа молекул N , при данной температуре T обладает скоростью, значение модуля которой принадлежит интервалу dv в пределах от v до $v + dv$. Соответствующая формула имеет вид:

$$dN = N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi v^2 dv. \quad (7.1)$$

Выражение

$$F(v) = \frac{dN}{dv} = N \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} 4\pi v^2 \quad (7.2)$$

называется **полной статистической функцией распределения** молекул по скоростям.

Очевидно: при $v = 0$ и $F(v) = 0$; при $v \rightarrow \infty$ $F(v) \rightarrow 0$. Из условия $\frac{dF}{dv} = 0$ можно найти значения v , соответствующие экстремумам функции. Легко показать, что при $v = 0$ имеет место минимум: $F(v) = 0$; максимальному значению $F(v)$ соответствует наиболее вероятная (чаще других встречающаяся) скорость

$$v_{\text{ВЕР}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}. \quad (7.3)$$

Зная вид функции $F(v)$, для модуля v можно определить среднюю арифметическую скорость молекул газа: $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{kT}{m}}$. И наиболее вероятная, и средняя арифметическая скорости, так же, как и среднеквадратичная, зависит от температуры, при этом

$$v_{\text{ВЕР}} < \langle v \rangle \approx 1,13 v_{\text{ВЕР}} < v_{\text{КВ}} \approx 1,22 v_{\text{ВЕР}}.$$

Графики полной статистической функции распределения молекул идеального газа по скоростям для трёх значений температуры представлены на рис. 7.1.

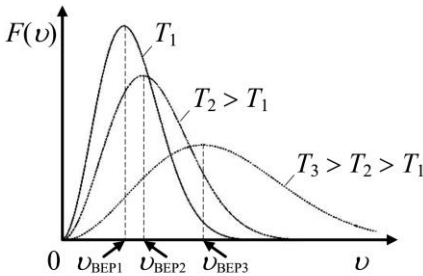


Рис. 7.1

Равны, поскольку эти площади численно равны этому количеству:

$$\int_0^{\infty} F(v) dv = \int_0^{\infty} \frac{dN}{dv} dv = \int_0^{\infty} dN = N = \text{const.}$$

Из рисунка следует:

- чем выше температура, тем больше $v_{\text{ВЕР}}$, но молекулы, обладающие этой скоростью, встречаются реже, то есть соответствующее значение $F(v_{\text{ВЕР}})$ становится меньше.

- При неизменном количестве молекул N площади под кривыми на рис. 7.1 одинаковы,

Ещё раз отметим: закон Максвелла – статистический, то есть выполняется тем точнее, чем больше N . Он справедлив лишь для хаотического (теплого) движения молекул идеального газа.

Примечание 7.1. Об атмосфере планет.

При $v \rightarrow \infty$ функция $F(v)$ хотя и стремится к нулю, но остаётся больше него, а это означает, что среди молекул газа атмосферы, окружающей планету, должны встречаться такие, скорость которых больше, чем вторая космическая для данной планеты. Такие молекулы способны улететь в космос, и атмосфера планеты будет «таять». Существенно, что снижение числа молекул в газе при данной температуре приводит лишь к уменьшению площади под кривой на графике функции $F(v)$, сама же форма кривой не меняется: после ухода быстрых молекул появляются новые с такими же скоростями, которые тоже покидают атмосферу, и так далее. В итоге любая планета должна со временем потерять свою атмосферу. Процесс идёт тем быстрее, чем меньше масса планеты (ниже значение второй космической скорости), поэтому, например, пытаться создать атмосферу вокруг астероидов смысла не имеет.

Потери могут компенсироваться в результате выбросов газа из недр планет. Так, потери земной атмосферы полностью перекрываются поступлением газов из недр Земли при тектонических процессах (извержениях вулканов, землетрясениях и так далее). На Марсе, например, подобных явлений не наблюдается, и это – одна из причин, по которым его атмосфера является гораздо более разрежённой, чем земная.

7.1.2 Опыт Штерна

Экспериментальное подтверждение справедливости закона Максвелла впервые дал. Штерн. Опыт Штерна заключался в следующем.

По платиновой проволоке, покрытой слоем серебра, пропусклся электрический ток. Проволока нагревалась, серебро испа-

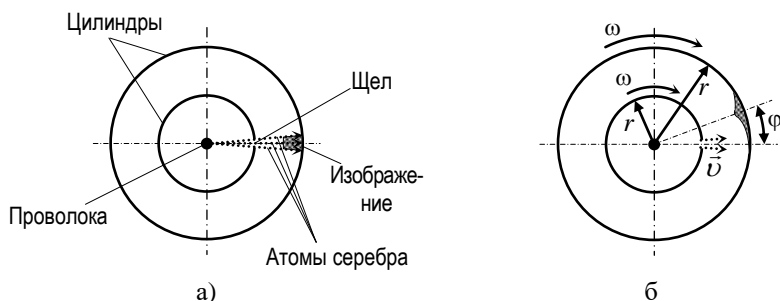


Рис. 7.2

рялось: пары серебра, испускаемые проволокой, играли роль идеального газа. Вокруг проволоки располагались два цилиндра с радиусами r_1 и r_2 так, что их оси совпадали с проволокой (схема установки, вид сверху, показана на рис. 7.2). В цилиндре меньшего радиуса была прорезана щель, параллельная его оси; атомы серебра, пролетев сквозь щель, оседали на внутренней поверхности большого цилиндра, формируя тёмную полосу – чёткое изображение щели (рис. 7.2а).

Изображение фиксировалось при неподвижных цилиндрах, а затем сравнивалось с тем, которое получалось в случае, когда оба цилиндра начинали вращаться относительно проволоки с одинаковой угловой скоростью ω . Из-за того, что пролёт промежутка между цилиндрами занимает некое время, изображение щели на его внутренней поверхности большого цилиндра оказывается смещённым на угол φ , такой, что

$$\varphi = \frac{r_2 - r_1}{v} \omega,$$

где v – скорость атомов серебра, вылетевших из щели.

Если бы скорости всех атомов были одинаковы, изображение щели всё равно получалось бы чётким. Но скорости у атомов – разные, причём, чем больше v , тем меньше оказывается угол φ (рис. 7.2б). Анализируя угловое распределение плотности осажденного серебра (по степени потемнения поверхности цилиндра), можно сделать вывод о распределении атомов серебра по

скоростям. Сопоставление результатов эксперимента с теоретическими расчётами подтвердило правильность выводов Максвелла.

Примечание 7.2. Прямая интерпретация результатов опыта Штерна не совсем корректна: распределение Максвелла справедливо для хаотического движения частиц, а в опыте сравнивались скорости их направленного движения. Учёт этого фактора необходим при анализе получаемых в ходе опыта данных.

Примечание 7.3. От формулы полной статистической функции распределения молекул газа по скоростям $F(v)$ можно перейти к формуле для полной статистической функции распределения молекул газа по их кинетическим энергиям $F(w_k)$. Для этого следует

преобразовать выражение (7.2), учитывая, что $\frac{mv^2}{2} = w_k$,

$$v^2 = \frac{2}{m} w_k, \text{ а } dv = \frac{2}{mv} dw_k = \frac{2}{m\sqrt{\frac{2}{m} w_k}} dw_k = \sqrt{\frac{2}{mw_k}} dw_k.$$

В результате получим:

$$F(w_k) = \frac{dN}{dw_k} = N \frac{2\pi}{(\pi kT)^{3/2}} e^{-\frac{w_k}{kT}} \sqrt{w_k} \quad (7.4)$$

7.1.3 Барометрическая формула

Известно, что чем выше мы поднимаемся над поверхностью Земли, тем разрежённое становится воздух, тем меньше оказывается атмосферное давление. Выведем **барометрическую формулу** – уравнение, описывающее, как давление идеального газа меняется с высотой.

Известно, что вертикальный столб газа или жидкости высотой h оказывает на горизонтальную поверхность давление

$$p = \rho gh, \quad (7.5)$$

где ρ – плотность газа (жидкости), g – ускорение свободного падения. Подъём над поверхностью на высоту dy означает уменьшение на то же dy высоты столба или снижение давления на величину dp – см. рис. 7.3. Если считать, что ни плотность газа (жидкости), ни ускорение свободного падения с высотой практически не меняются, то

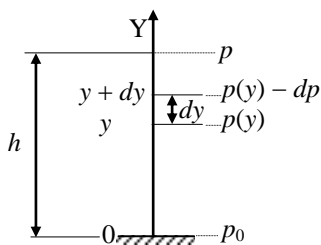


Рис. 7.3

$$dp = -\rho g \cdot dy \quad (7.6)$$

(знак «минус» означает, что чем больше высота подъёма, тем меньше становится давление).

Для атмосферы – идеального газа, подчиняющегося закону Клапейрона – Менделеева, можно записать:

$$p = \frac{M}{\mu V} RT, \text{ или } p = \frac{\rho}{\mu} RT, \text{ откуда } \rho = \frac{\mu p}{RT}.$$

Подставим полученное выражение для ρ в формулу (7.6):

$$dp = -\frac{\mu p}{RT} g \cdot dy$$

и преобразуем её к виду

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu}{RT} g \cdot dy.$$

Проинтегрируем левую и правую части уравнения, принимая во внимание, что при $y = 0$ давление равно некоторому значению p_0 , а при $y = h$ давление равно искомому p (параметры μ , g и T будем считать постоянными):

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\int_0^h \frac{\mu}{RT} g dy, \text{ или} \\ p = p_0 \cdot e^{-\frac{\mu g h}{RT}}. \quad (7.7)$$

Мы получили барометрическую формулу, показывающую, как атмосферное давление меняется с высотой подъёма над земной поверхностью. Учитывая, что молярная масса $\mu = N_A m$, а $R = N_A k$, где m – масса молекулы, N_A – число Авогадро, а k – постоянная Больцмана, барометрическую формулу можно переписать в виде

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{mgh}{kT}}. \quad (7.8)$$

7.1.4 Распределение Больцмана

Сделаем следующий шаг.

Поскольку для идеального газа справедлива формула $p = nkT$, где n – концентрация молекул, из (7.8) следует, что

$$n = n_0 \cdot e^{-\frac{mgh}{kT}}. \quad (7.9)$$

Здесь n – концентрация молекул на высоте h , а n_0 – концентрация молекул на уровне земли.

В уравнение (7.9) входит выражение, являющееся формулой для расчёта потенциальной энергии тела массой m , которое находится в однородном ($g = \text{const}$) поле тяготения на высоте h над поверхностью планеты: $W_{\Pi} = mgh$, то есть

$$n = n_0 \cdot e^{-\frac{W_{\Pi}}{kT}}. \quad (7.10)$$

Больцман показал, что **данная формула справедлива** не только для газа, находящегося в гравитационном поле, но и **для большого коллектива частиц, находящихся в любом потенциальном поле** (например, заряженных частиц в электрическом поле).

Переписав это выражение для общего числа частиц N и N_0 , находящихся в заданном объёме в состояниях с W_{Π} и с потенциальной энергией, равной нулю, соответственно, получаем формулу **распределения Больцмана** частиц по значениям их потенциальной энергии:

$$N = N_0 \cdot e^{-\frac{W_{\Pi}}{kT}}. \quad (7.11)$$

7.1.5 Распределение Максвелла – Больцмана по энергиям

Итак, согласно Больцману $N = N_0 \cdot e^{-\frac{w_{\Pi}}{kT}}$, а ранее – см. (7.2) мы показали, что по Максвеллу

$$F(w_k) = \frac{dN}{dw_k} = N \frac{2\pi}{(\pi kT)^{3/2}} e^{-\frac{w_k}{kT}} \sqrt{w_k}.$$

В случае идеального газа полная энергия молекулы складывается из её потенциальной и кинетической энергии: $E = w_{\Pi} + w_k$.

Полагая, что распределение частиц по значениям их кинетической энергии не зависит от того, каким образом они распределяются по значениям потенциальной энергии (и наоборот), формулы распределений можно объединить, подставив (7.11) в (7.2). Получаемое при этом выражение называется распределением Максвелла-Больцмана. В частности, для газа, не испытывающего воздействия внешних сил ($w_{\Pi} = 0$) полная статистическая функция распределения Максвелла-Больцмана по энергиям имеет вид

$$F(E) = \frac{dN}{dE} = N \frac{2\pi}{(\pi kT)^{3/2}} e^{-\frac{E}{kT}} \sqrt{E}. \quad (7.12)$$

7.2 ЭНЕРГИЯ МОЛЕКУЛ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

7.2.1 Распределение энергии по степеням свободы

Полную энергию E системы частиц можно рассматривать, как сумму её внутренней энергии U и её энергии W (кинетической и потенциальной), как целого объекта. Величина U зависит только от внутреннего состояния вещества: в общем случае она складывается из энергии, связанной с движением отдельных молекул относительно центра масс, от потенциальной энергии взаимодействия молекул и атомов друг с другом, от энергии взаимодействия электронов с ядрами атомов и нуклонов в самих ядрах... В случае идеального газа U связана лишь с хаотическим движением

молекул: поступательным, вращательным, колебательным. То, какой средней энергией обладает одна молекула, определяется законом равномерного распределения энергии по степеням свободы.

Число степеней свободы – это число независимых переменных (координат), которые полностью определяют положение системы в пространстве. Понятно, что если система состоит всего из одной частицы (точки), то в нашем трёхмерном пространстве для описания её положения нужны три координаты, значит, число её степеней свободы $i = 3$. Если система состоит из N^* объектов, то приходится описывать положение каждого из них, и число степеней свободы оказывается равным $3N^*$. Если перейти в систему отсчёта, связанную с центром масс системы, все $3N^*$ степеней свободы можно разделить на три группы: на те, которые описывают поступательное движение центра масс вдоль выбираемых осей координат (их всего три), на те, которые описывают вращение системы вокруг этих же осей (их, соответственно, тоже три) и на те, которые связаны с колебательным движением отдельных частиц около своего положения равновесия (понятно, что их $3N^* - 3 - 3 = 3N^* - 6$ штук).

Согласно закону о равном распределении энергии по степеням свободы, на каждую степень свободы молекулы в среднем приходится одинаковая кинетическая энергия (поступательного, вращательного или колебательного движения), равная

$\frac{1}{2} kT$, где k – постоянная Больцмана, T – термодинамическая температура. При колебательном движении кроме кинетической энергии объект обладает ещё и потенциальной энергией, на долю которой (на каждую степень свободы) приходится также по $\frac{1}{2} kT$.

Рассмотрим примеры:

- *Одноатомный газ* (например, гелий He): $N^* = 1$. Всего число степеней свободы $i = 3N^* = 3$, они описывают только поступа-

тельное движение, и поэтому называются «поступательными». На каждую из них приходится средняя энергия по $\frac{1}{2}kT$, и поэтому общая средняя энергия молекулы одноатомного газа $\langle w_k^* \rangle = \frac{3}{2} kT$ (см. предыдущую лекцию). О вращении атома – точки говорить не приходится, нет и колебательных степеней свободы.

- *Двухатомный газ* (например, кислород, O_2), $N^* = 2$. Всего число степеней свободы $i = 3N^* = 6$. Среди них – три поступательные, на долю каждой из которых приходится по $\frac{1}{2}kT$. В двухатомном газе можно говорить о вращении молекул лишь относительно двух осей (см. рис. 7.4). Дело в том, что момент инерции системы, состоящей из двух точек, относительно третьей оси равен нулю (на рис. 7.4 это ось Z), и о кинетической энергии при вращении относительно этой оси говорить не приходится (напомним: при вращении $W_k = \frac{1}{2}I\omega^2$, где I – момент инерции относительно оси вращения, ω – угловая скорость; так как $I \sim r^2$, где r – расстояние частицы до оси вращения, то в случае точечного объекта, расположенного на оси вращения, $r = 0$, то есть $I = 0$ и $W_k = 0$).

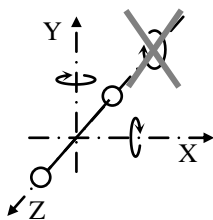


Рис. 7.4

Таким образом, для молекулы двухатомного газа имеет смысл говорить о трёх поступательных, двух вращательных степенях свободы (на каждую из этих степеней приходится по $\frac{1}{2}kT$) и (поскольку всего $i = 3N^* = 6$) – об одной колебательной, на долю которой приходится $\frac{1}{2}kT + \frac{1}{2}kT = kT$. Правда, при обычных, не слишком высоких температурах **колебания атомов в молекулах газа практически не проявляются**, поэтому можно считать, что энергия молекулы двухатомного идеального газа в среднем равна

$$\langle w_k^* \rangle = \frac{3}{2} kT + \frac{2}{2} kT = \frac{5}{2} kT, \quad \text{или } i = 5.$$

- *Многоатомный газ* ($N \geq 3$). У метана CH_4 , например, $N^* = 5$, общее число степеней свободы $3N^* = 15$, из которых три – поступательных (на них приходится по $\frac{1}{2}kT$), три – вращательных (теперь возможно вращение вокруг всех трёх осей), на каждую из которых также приходится по $\frac{1}{2}kT$, и $15 - 3 - 3 = 9$ колебательных, на каждую из которых должно приходиться по kT . Однако при обычных температурах колебания не проявляются, и поэтому существованием колебательных степеней свободы можно пренебречь. В итоге $\langle w_k^* \rangle = \frac{3}{2}kT + \frac{3}{2}kT = 2kT$, или $i = 6$.

В результате можно сделать вывод: при обычных температурах в среднем энергия одной молекулы идеального газа $\langle w_k^* \rangle = \frac{i}{2}kT$, где $i = 3$ или $i = 5$ или $i = 6$. Если же газ содержит $N = \frac{M}{\mu} N_A$ молекул (здесь M – масса газа, μ – его молярная масса, а N_A – число Авогадро), то его внутренняя энергия рассчитывается так:

$$U = N \langle w_k^* \rangle = \frac{M}{\mu} N_A \frac{i}{2} kT = \frac{i}{2} \frac{M}{\mu} RT. \quad (7.13)$$

Примечание 7.4. Высокими считаются температуры, при которых колебания настолько сильны, что становится возможным распад молекул на отдельные атомы. Это, например, – одна из причин, по которой трудно описать процессы, происходящие в двигателе внутреннего сгорания: температура и давление паров топлива постоянно меняются, колебательные степени свободы то проявляются, то нет, да и сами пары неоднородны, то есть являются смесью разных газов со своими собственными характеристиками.

Сходная ситуация наблюдается и при понижении температуры: при T порядка сотни кельвин молекулы газов перестают вращаться, и у них остаются лишь поступательные степени свободы, то есть в этих условиях $i = 3$.

7.3 ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА

7.3.1 Средняя длина свободного пробега

Как устанавливается в большом статистическом коллективе частиц распределение Максвелла-Больцмана?

Молекулы, двигаясь хаотически, постоянно сталкиваются друг с другом, передавая друг другу часть энергии, в результате чего и устанавливается распределение: достигается **равновесное состояние** газа, в котором он может находиться неограниченно долго.

Среднее расстояние, которое молекулы пролетают от одного столкновения до другого, называется средней **длиной свободного пробега**. Чем меньше эта длина, тем быстрее в системе устанавливается распределение, соответствующее равновесному состоянию.

Минимальное расстояние d между центрами молекул при их столкновении называется эффективным диаметром, а соответствующая площадь $S_0 = \pi d^2$ – эффективным сечением молекулы.

Пользуясь методом размерностей, получим формулу для оценки средней длины свободного пробега $\lambda_{\text{ср}}$ молекул в идеальном газе.

Очевидно: чем выше концентрация молекул n , тем чаще они сталкиваются друг с другом, и тем меньшей оказывается $\lambda_{\text{ср}}$. Кроме того, чем больше площадь S_0 , тем вероятнее то, что они «зацепят» друг друга, столкнутся.

Далее учтём, что $\lambda_{\text{ср}}$ и d измеряются в метрах (м), а единица измерения концентрации – м^{-3} . Очевидно, что равенство размерностей в левой и правой частях уравнения достигается при следующей комбинации $\lambda_{\text{ср}}$, d и n :

$$\text{м} = \frac{1}{\text{м}^2 \cdot \text{м}^{-3}}, \text{ или } \lambda_{\text{ср}} \sim \frac{1}{d^2 n}.$$

Более строгий вывод формулы для вычисления средней длины свободного пробега приводит к уравнению

$$\lambda_{\text{ср}} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}. \quad (7.14)$$

Заметим: концентрация молекул в идеальном газе напрямую связана с его давлением, так как $p = nkT$. Поэтому средняя длина свободного пробега тем меньше, чем выше давление. Так, например, в воздухе при нормальных атмосферных условиях (273 К, 10^5 Па) средняя длина свободного пробега молекул составляет примерно 60 нм.

7.3.2 Явления переноса в газах

Хаотичность движения молекул газа, находящегося в равновесном состоянии, можно нарушить внешними воздействиями. В результате этих воздействий возникнет новое равновесное состояние. Необратимые явления, возникающие при переходе системы из одного равновесного состояния в другое, называются **явлениями переноса**. О переносе чего идёт речь?

а) Перенос массы: явление диффузии

Явление заключается во взаимном проникновении друг в друга частиц двух контактирующих тел: часть массы тел переносится из той области, где её много, туда, где её мало. В одномерном случае уравнение диффузии выглядит так:

$$m_{\text{сЕК}} = -D \frac{dp}{dx}. \quad (7.15)$$

Здесь $m_{\text{сЕК}}$ – масса, переносимая в единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярной направлению переноса вещества, p – плотность вещества, x – координата по оси, вдоль которой переносится масса, D – коэффициент диффузии (зависит от природы газа, а также от его параметров: давления, температуры).

Формула (7.14) носит название закона Фика.

б) Перенос импульса: явление внутреннего трения

Внутреннее трение (вязкость) – это свойство текучих тел (жидкостей и газов) оказывать сопротивление перемещению одной их части (слоя) относительно другой. При движении одного слоя в результате взаимодействия начинает двигаться следующий, контактирующий с ним. Но из-за трения в движение

приходит и третий слой, и так далее: от слоя к слою переносится импульс.

Явление описывается законом Ньютона:

$$\tau^* = -\eta \frac{dv}{dy}. \quad (7.16)$$

В этой формуле τ^* – напряжение трения, численно равное силе внутреннего трения, которая действует на единицу поверхности слоя по касательной к ней; dv – изменение скорости движения слоёв при переходе от слоя к слою на расстояние dy в направлении, перпендикулярном движению слоёв; η – коэффициент внутреннего трения (другое название – динамический коэффициент вязкости), который определяется свойствами вещества.

с) Перенос энергии: явление теплопроводности

Явление связано с переносом энергии из одной части системы (нагретой) в другую, имеющую меньшую температуру.

В случае одномерного переноса тепла (вдоль направления, задаваемого осью X), уравнение теплопроводности (закон Фурье) имеет следующий вид:

$$q_{\text{СЕК}} = -\kappa^* \frac{dT}{dx}, \quad (7.17)$$

где $q_{\text{СЕК}}$ – энергия, передаваемая в форме теплоты за единицу времени через единичную поверхность, перпендикулярную направлению переноса энергии, x – координата по оси, вдоль которой переносится тепло, κ^* – коэффициент теплопроводности (зависит от свойств вещества).

Формулы (7.15) – (7.17) могут быть выведены на основе молекулярно-кинетической теории. Ещё раз отметим: описываемые ими процессы переноса стремятся вернуть систему, выведенную внешними воздействиями из равновесного состояния в состояние, которое вновь будет характеризоваться лишь хаотическим, неупорядоченным движением частиц, подчиняющимся распределению Максвелла-Больцмана.

Некоторые примеры

– У поверхности земли при подъёме на каждые 12 метров давление уменьшается приблизительно на 1 мм рт. ст. И поскольку «нормальное» атмосферное давление (760 мм рт. ст.) соответствует уровню моря, для Москвы (высота около 140 м над уровнем моря) нормальным является давление воздуха примерно 748 мм рт. ст.

– При комнатной ($T \approx 300$ К) температуре наиболее вероятная скорость молекул кислорода в воздухе составляет около 500 м/с, примерно такой же является и скорость пули при вылете из пистолетного ствола.

– При комнатной ($T \approx 300$ К) температуре произведение kT (то есть значение тепловой энергии, приходящейся на одну степень свободы) равно примерно $4,1 \cdot 10^{-23}$ Дж или $2,6 \cdot 10^{-4}$ эВ. Для сравнения энергия одного кванта света (зелёный цвет) составляет примерно 2,2 эВ, то есть больше в 10000 раз.

Вопросы для повторения

1. Запишите основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов и поясните смысл входящих в него величин.
2. Запишите формулу для расчёта среднеквадратической скорости молекул идеального газа. Какой смысл имеет эта скорость (что она характеризует)?
3. Каков смысл распределения Максвелла молекул по скоростям? Начертите графики полной статистической функции распределения Максвелла для двух температур: T_1 и $T_2 > T_1$.
4. Опишите опыт Штерна.
5. Выведите барометрическую формулу.
6. Какой смысл имеет распределение Больцмана? Что оно показывает?
7. Какой смысл имеет распределение Максвелла-Больцмана молекул по энергиям?
8. Что называется средней длиной свободного пробега молекул в газе? От чего она зависит?

9. Приведите примеры явлений переноса. В каком случае возникают эти явления?

10. В чём заключается суть теоремы о равном распределении энергии молекул идеального газа по степеням свободы? Поясните суть теоремы на примере молекул газов, входящих в состав атмосферы.

8.1 ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

8.1.1 О внутренней энергии идеального газа

8.1.2 Работа, совершаемая идеальным газом

8.1.3 Теплоёмкость

8.1.4 Адиабатный процесс

Некоторые примеры

Вопросы для повторения

8.1 ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ

8.1.1 О внутренней энергии идеального газа

Первое начало (закон) термодинамики является одной из формулировок закона сохранения энергии, распространённой на процессы, связанные с передачей тепла от одного тела к другому. Согласно этому закону **количество теплоты δQ , сообщаемое системе, расходуется на изменение dU её внутренней энергии и на работу δA системы против внешних сил:**

$$\delta Q = dU + \delta A. \quad (8.1)$$

Закон говорит о том, что по сути количество теплоты, так же, как и работа является мерой изменения внутренней энергии системы: dU – полный дифференциал функции U , а δQ и δA – бесконечно малые изменение теплоты и элементарная работа, которые таковыми не являются¹. Рассмотрим поведение каждой из

¹ Знак полного дифференциала d перед U означает, что при переходе системы из одного состояния в другое внутренняя энергия если и меняется, то величина изменения не зависит от того, каким образом происходил процесс, а определяется лишь конечными и начальными параметрами состояния. В противоположность этому символы δ перед Q и A говорят о том, что общая работа, совершаемая при таком переходе, а также получаемое (или отдаваемое) количество теплоты зависят от того, каким образом осуществляется процесс перехода.

функций, входящих в приведённое уравнение, на примере идеального газа.

На прошлой лекции мы показали, что внутренняя энергия идеального газа рассчитывается так:

$$U = \frac{i}{2} \frac{M}{\mu} RT.$$

Это означает, что если число молекул в газе не меняется (множитель $M/\mu = \text{const}$), то

$$dU = \frac{i}{2} \frac{M}{\mu} R dT. \quad (8.2)$$

Мы вновь видим: внутренняя энергия идеального газа зависит только от его температуры. При этом если в ходе некоторого термодинамического процесса газ возвращается в состояние с исходной температурой, общее изменение его внутренней энергии оказывается равным нулю, то есть

$$\oint dU = 0. \quad (8.3)$$

Термодинамические функции, для которых выполняется условие вида (8.3), то есть принимаемые ими значения *однозначно* определяется параметрами состояния (в данном случае – температуры) и не зависит от того, каким путём система в него пришла, называются **функциями состояния**. Таким образом, внутренняя энергия идеального газа является функцией его состояния (в отличие от теплоты и работы: см. примечание ниже).

8.1.2 Работа, совершаемая идеальным газом

По определению (см. раздел «Механика») работой δA силы \vec{F} , под действием которой тело испытывает перемещение $d\vec{r}$, называется скалярное произведение вида $\delta A = (\vec{F} \cdot d\vec{r}) = F dr \cos \alpha$, где α – угол между векторами \vec{F} и $d\vec{r}$. Если сила – переменная, если в процессе движения меняется угол α , то работа по перемещению тела из точки 1 в точку 2 рассчитывается, как интеграл:

$$A = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 (\vec{F} d\vec{r}).$$

Рассмотрим идеальный газ, находящийся в цилиндре объёмом V , одно из оснований которого (площадью S^*) – невесомый поршень способный перемещаться без трения вдоль оси цилиндра (рис. 8.1). Пусть давление газа в сосуде равно p ; под действием этого давления поршень приходит в движение. При смещении поршня на малое расстояние dx объём, занимаемый газом, увеличивается на величину $dV = S^*dx$, при этом ни сила F , с которой газ действует на поршень,

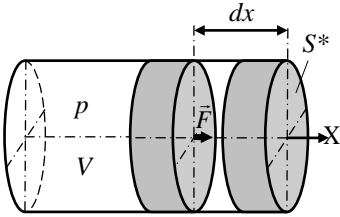


Рис. 8.1

ни само давление $p = F/S^*$ не успевают измениться. С учётом того, что в данном случае угол $\alpha = 0$, совершаемую газом работу δA можно вычислить, как

$$\delta A = (\vec{F} d\vec{r}) = F dx \cdot \cos \alpha = F dx = \frac{F}{S^*} S^* dx = p dV.$$

Итак, расширяясь, газ совершает работу

$$\delta A = p dV, \quad (8.4)$$

или

$$A = \int_1^2 p dV. \quad (8.5)$$

Рассмотрим примеры применения этой формулы.

- **Изохорный процесс:** $V = \text{const}$, $dV = 0$, следовательно, $\delta A = 0$, то есть в ходе такого процесса работа газом не совершается.

- **Изобарный процесс:** $p = \text{const}$, $A = \int_1^2 p dV = p \int_1^2 dV = p(V_2 - V_1)$,

или

$$A = p \Delta V \quad (8.6)$$

- **Изотермический процесс:** $T = const$. В ходе вычислений используем уравнение Клапейрона – Менделеева, из которого

следует, что $p = \frac{M}{\mu} \frac{RT}{V}$, то есть

$$A = \int_1^2 p dV = \int_1^2 \frac{M}{\mu} \frac{RT}{V} dV = \frac{M}{\mu} RT \int_1^2 \frac{dV}{V} = \frac{M}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (8.7)$$

- Для расчёта работы, совершаемой газом в ходе процесса, при котором меняются все его параметры, удобно использовать график этого процесса, построенный в координатах давление – объём ($p - V$). Используя формулу (8.5), а также вспомнив, каков графический смысл определённого интеграла, общую работу, совершаемую газом при расширении от V_1 до V_2 , можно рассчитать,

как площадь под кривой на графике (при этом по оси абсцисс должны быть отложены кубические метры, а по оси ординат – паскали) – см. рис. 8.2.

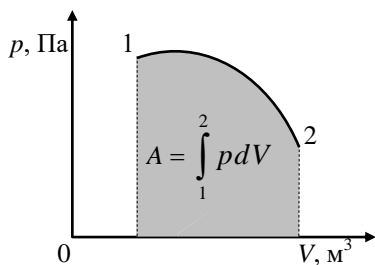


Рис. 8.2

Приведённые примеры показывают: работа, совершаемая газом при переходе из состояния 1 в состояние 2, зависит от того, каким образом совершается этот процесс.

Это означает: работа A в отличие от внутренней энергии U функцией состояния не является.

Примечание 8.1. Используя зависимости (8.1) – (8.7), формулу первого начала термодинамики в случае идеального газа для постоянного количества вещества (неизменного числа частиц) можно записать следующим образом:

- в общем случае:
$$\delta Q = \frac{i}{2} \frac{M}{\mu} R dT + p dV;$$
- в изохорном процессе:
$$\delta Q = \frac{i}{2} \frac{M}{\mu} R dT;$$

- в изобарном процессе: $\Delta Q = \frac{i}{2} \frac{M}{\mu} R \Delta T + p \Delta V;$
- в изотермическом процессе: $\delta Q = p dV = \frac{M}{\mu} RT \ln \frac{V_2}{V_1};$
- в адиабатном процессе (без теплообмена с окружающей средой, то есть при $\delta Q = 0$) $0 = \frac{i}{2} \frac{M}{\mu} R dT + p dV.$

Примечание 8.2. Поскольку внутренняя энергия идеального газа определяется лишь его температурой и не зависит от объёма, при расширении такого газа в пустоту его температура не меняется: процесс оказывается изотермическим.

В случае реального газа его адиабатное расширение сопровождается увеличением среднего расстояния между молекулами, которые взаимодействуют друг с другом. Совершается работа против сил притяжения, внутренняя энергия и температура газа понижаются.

Явление изменения температуры реального газа при его адиабатном расширении от одного значения давления до другого называется **эффектом Джоуля-Томсона**.

8.1.3 Теплоёмкость

Выше мы отметили, что работа, совершаемая идеальным газом при переходе из одного состояния в другое, зависит от того, каким образом происходит переход. Очевидно, этот же вывод можно сделать и в отношении количества теплоты δQ , требуемой для такого перехода. Для описания подобных процессов в теплофизике введено понятие теплоёмкости, которое может иметь несколько вариантов.

- **Теплоёмкость тела** $c_{\text{тела}}$ численно равна количеству теплоты, которое необходимо сообщить этому телу, чтобы нагреть его на 1 К:

$$c_{\text{тела}} = \frac{\delta Q}{dT}. \quad (8.8)$$

- **Удельная теплоёмкость** $c_{y\partial}$ численно равна количеству теплоты, которое необходимо сообщить одному килограмму вещества с тем, чтобы нагреть его на 1 К:

$$c_{y\partial} = \frac{1}{M} \frac{\delta Q}{dT}. \quad (8.9)$$

- **Молярная теплоёмкость** C численно равна количеству теплоты, которое необходимо сообщить одному молю вещества с тем, чтобы нагреть его на 1 К:

$$C = \frac{1}{\nu} \frac{\delta Q}{dT} = \frac{\mu}{M} \frac{\delta Q}{dT}. \quad (8.10)$$

В случае идеального газа на практике чаще всего используется именно молярная теплоёмкость.

Численное значение C определяется тем, как происходит передача тепла.

а) **Молярная теплоёмкость C_v в изохорном процессе:**

$$C_v = \frac{\mu}{M} \frac{\delta Q}{dT} = \frac{\mu}{M} \frac{1}{dT} \frac{i}{2} \frac{M}{\mu} R dT, \text{ или}$$

$$C_v = \frac{i}{2} R. \quad (8.11)$$

б) **Молярная теплоёмкость C_p в изобарном процессе:**

$$C_p = \frac{\mu}{M} \frac{\delta Q}{dT} = \frac{\mu}{M} \frac{1}{dT} \left(\frac{i}{2} \frac{M}{\mu} R dT + p dV \right) = C_v + \frac{\mu}{M} \frac{1}{dT} p dV. \quad (8.12)$$

Вспомним уравнение Клапейрона – Менделеева, $pV = \frac{M}{\mu} RT$.

Возьмём дифференциал от обеих частей уравнения:

$$\frac{M}{\mu} R dT = d(pV), \text{ или}$$

$$p dV = -\frac{i}{2} d(pV) = -\frac{i}{2} (p dV + V dp).$$

С учётом того, что в изобарном процессе $p = \text{const}$, получаем:

$$pdV = \frac{M}{\mu} R dT.$$

Подставим данное соотношение в формулу (8.12), в результате чего формула для C_p приобретает вид, который называется **уравнением Майера**:

$$C_p = C_v + R. \quad (8.13)$$

Молярную теплоёмкость идеального газа при постоянном давлении (так же, как это мы уже сделали в случае C_v) можно выразить через число степеней свободы i молекул этого газа:

$$C_p = \frac{i+2}{2} R. \quad (8.14)$$

Примечание 8.3. (О единицах измерения теплоты и теплоёмкости).

В СИ единицей измерения теплоты, энергии и работы является джоуль. Однако в теплотехнике часто используются ещё одна, внесистемная единица измерения: калория. Одна калория равна количеству теплоты, необходимому для нагрева 1 г воды на 1 К (или на 1 °C от +14,5 °C до +15,5 °C); **1 кал \approx 4,18 Дж**.

$$[c_{\text{тела}}] = \text{Дж} \cdot \text{К}^{-1};$$

$$[c_{\text{уд}}] = \text{Дж} \cdot \text{кг}^{-1} \cdot \text{К}^{-1};$$

$$[C] = \text{Дж} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}.$$

8.1.4 Адиабатный процесс

В адиабатном (адиабатическом) процессе $\delta Q = 0$, а это означает, что $0 = dU + \delta A$, то есть при совершении газом работы его внутренняя энергия уменьшается: $\delta A = -dU$, или

$$pdV = - \frac{i}{2} \frac{M}{\mu} R dT.$$

Но $\frac{M}{\mu} R dT = d(pV)$, и это позволяет записать:

$$pdV = -\frac{i}{2} d(pV), \text{ или}$$

$$pdV = -\frac{i}{2} (pdV + Vdp).$$

Разделяя переменные, получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{i+2}{2} \frac{dV}{V} = -\frac{i}{2} \frac{dp}{p}.$$

Пусть в начале адиабатного процесса газ имел объём V_1 при давлении p_1 , а в конце – объём V_2 при давлении p_2 . С учётом этого, интегрируя, можно записать:

$$\frac{i+2}{2} \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -\frac{i}{2} \int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p}, \quad \text{или} \quad \frac{i+2}{i} \ln \frac{V_2}{V_1} = -\ln \frac{p_2}{p_1}. \quad (8.15)$$

Заметим: $C_v = \frac{i}{2} R$; $C_p = \frac{i+2}{2} R$, следовательно, $\frac{i+2}{i} = \frac{C_p}{C_v}$.

Введём обозначение: $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, и перепишем формулу (8.15):

$$\gamma \ln \frac{V_2}{V_1} = -\ln \frac{p_2}{p_1},$$

$$\text{откуда} \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^\gamma = \frac{p_1}{p_2}, \quad \text{или} \quad p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma.$$

Другими словами, в ходе адиабатного процесса произведение вида pV^γ остается постоянным. Полученное соотношение, записанное в виде

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad (8.16)$$

называется **уравнением Пуассона для адиабатного процесса**.

Показатель степени $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i}$ для конкретного идеального

газа (с известным числом степеней свободы молекулы i) может быть вычислен теоретически

Примечание 8.4. Поскольку речь идёт об идеальном газе, для которого справедливо уравнение Клапейрона – Менделеева, от переменных p и V в уравнении Пуассона можно перейти к переменным V и T или p и T . Так, например, в случае переменных p и T уравнение Пуассона записывается следующим образом:

$$p T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \text{const.}$$

Формулу уравнения Пуассона в переменных $V - T$ предлагается вывести самостоятельно.

Примечание 8.5. Построим график адиабатного процесса в координатах $p - V$.

Из уравнения (8.16) следует, что в адиабатном процессе $p = \frac{\text{const}}{V^\gamma}$, то есть графиком процесса будет являться гипербола (чем V больше, тем p меньше). Сходный вид в этих же координатах имеет изотерма ($p = \frac{(M/\mu)RT}{V}$ или $p = \frac{\text{const}}{V}$), однако адиа-

бата спадает круче, так как показатель степени $\gamma = \frac{i+2}{i} > 1$. Так, например, для одноатомного газа $i = 3$, $\gamma = 5/3 \approx 1,7$; для двухатомного $i = 5$, $\gamma = 7/5 = 1,4$, для многоатомного $i = 6$, $\gamma = 8/6 \approx 1,3$.

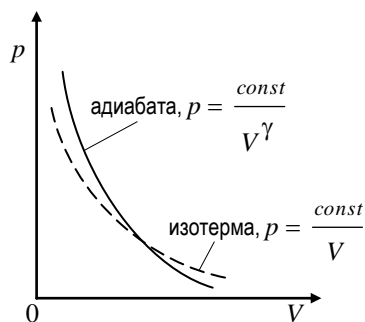


Рис. 8.3

В сухом воздухе больше всего азота (N_2) и кислорода (O_2) — двухатомных газов, поэтому для воздуха с хорошей точностью можно принять $\gamma = 1,4$.

Примеры графиков изотермы и адиабаты представлены на рис. 8.3.

Графики адиабаты в координатах $p - T$ и $V - T$ предлагается построить самостоятельно.

Примечание 8.6. Все процессы, которые вы рассмотрели выше, являются частными случаями, так называемого, **политропного процесса**, который описывается уравнением вида

$$pV^n = \text{const.}$$

Действительно:

- в изобарном процессе $n = 0, p = \text{const}; C_p = \text{const};$
- в изотермическом процессе $n = 1, pV = \text{const}; C_T \rightarrow \pm \infty;$
- в адиабатном процессе $n = \gamma, pV^\gamma = \text{const}; C_{\text{Ад}} = 0;$
- в изохорном процессе $n \rightarrow \pm \infty, pV^n = \text{const}; C_v = \text{const}.$

Некоторые примеры

– При оплате коммунальных платежей стоимость потреблённой тепловой энергии устанавливается не за джоули (в СИ), а за гигакалории. Видимо, это сделано с учётом психологии потребителя: морально легче заплатить «всего» за $\approx 2,5$ Гкал (именно столько тепла в среднем ежемесячно идёт на обогрев московской квартиры в холодное время года), чем за целых $\approx 10^{10}$ (!!!) Дж.

В настоящее время для жилого фонда стоимость 1 Гкал в Москве составляет около 2500 руб.

– Явление изменения температуры реального газа при его адиабатном расширении (эффект Джоуля-Томсона) используется на практике для ожижения газов (например, для получения жидкого азота из воздуха). Создание соответствующего высокоэффективного устройства (*турбодетандера*) позволившего поставить получение сжиженных газов на промышленную основу, – во многом заслуга выдающегося советского физика, лауреата Нобелевской премии П.Л. Капицы

– Адиабатный процесс (например, адиабатно заварить чай) можно провести в закрытом термосе. Как показывает опыт, современные стальные термосы «удерживают тепло» практически так же хорошо, как и стеклянные, но зато они являются более «удароустойчивыми».

– Как отмечалось на предыдущей лекции, число степеней

свободы молекул газа может меняться с температурой. Соответственно, будут меняться значения C_p , C_v и γ .

Вопросы для повторения

1. Сформулируйте первое начало термодинамики. Какой смысл имеют входящие в соответствующую формулу величины?
2. Что имеется в виду, когда говорят, что внутренняя энергия является функцией состояния? От чего зависит изменение внутренней энергии идеального газа?
3. Выведите выражение для работы, совершаемой при расширении идеального газа.
4. Какие процессы называются обратимыми? Приведите примеры.
5. Что называется молярной теплоёмкостью? Что такое C_v и C_p ? Как они рассчитываются в случае идеального газа?
6. Выведите уравнение Майера.
7. Какой процесс называется адиабатным? Запишите уравнение Пуассона для адиабатного процесса. Начертите график адиабаты в координатах $p - V$, $p - T$ и $V - T$.
8. Запишите формулу первого начала термодинамики для разных изопроцессов, протекающих в идеальном газе.
9. Какой процесс называется политропным? Приведите примеры.

9.1 ТЕПЛОВЫЕ МАШИНЫ

9.1.1 Круговые процессы. Тепловые машины

9.1.2 Обратимые процессы. Цикл Карно

9.1.3 Второе начало термодинамики

9.2 ЭНТРОПИЯ

9.2.1 Энтропия, как функция состояния

9.2.2 Энтропия в необратимых процессах

9.2.3 Энтропия и термодинамическая вероятность состояния

9.2.4 Химический потенциал

Некоторые примеры

Вопросы для повторения

9.1 ТЕПЛОВЫЕ МАШИНЫ

9.1.1 Круговые процессы. Тепловые машины

Первое начало термодинамики может быть использовано для описания работы тепловых двигателей – устройств, которые используют поступающее тепло для получения полезной работы.

В основе работы тепловых двигателей лежат **круговые процессы (циклы)**, при которых система раз за разом возвращается в исходное состояние с тем, чтобы вновь начать совершать работу. Схематически работа тепловой машины поясняется рисунком 9.1.

Для расширения **рабочее тело** (в нашем случае – газ) нагревают (обеспечивающее нагрев устройство обозначают термином «**нагреватель**»), для того, чтобы он вновь сжался, его охлаждают (устройство для охлаждения называют «**холодильник**»). Изменение внутренней энергии идеального

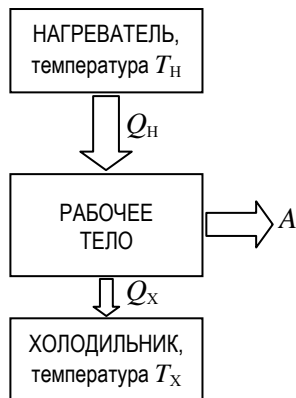


Рис. 9.1

газа за полный цикл равно нулю ($\oint dU = 0$), поэтому работа A , совершаемая газом за один цикл, оказывается равной разнице количеств теплоты, полученной от нагревателя Q_H и переданной холодильнику Q_X :

$$A = Q_H - Q_X.$$

На графике циклического процесса в координатах $p - V$ (рис. 9.2) работа, совершаемая газом при расширении из состояния с объёмом V_1 в состояние с объёмом V_2 , численно равна площади под кривой $1 - 2 - 3$ (рис. 9.2а), а работа, совершаемая над газом при его сжатии от V_2 до V_1 , – площади под кривой $3 - 2' - 1$ (рис. 9.2б). Таким образом, полезная работа, совершаемая за цикл тепловым двигателем на основе идеального газа, численно равна площади, ограниченной замкнутой кривой $1 - 2 - 3 - 2' - 1$ графика цикла в координатах $p - V$ (рис. 9.2в).

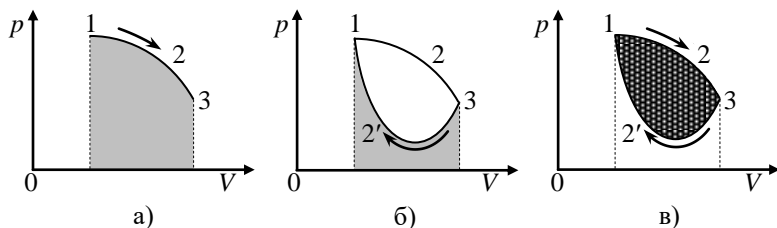


Рис. 9.2

Тепло, передаваемое холодильнику, как правило, бесполезно теряется в окружающей среде.

Коэффициент полезного действия η тепловой машины рассчитывается по формуле

$$\eta = \frac{A}{Q_H} = \frac{Q_H - Q_X}{Q_H}. \quad (9.1)$$

Очевидно: $\eta < 1$, и это подтверждает то, что *невозможен периодически действующий двигатель, который совершал бы работу в большем количестве, чем получаемая им извне энер-*

гия (такое гипотетическое устройство называется «вечным двигателем первого рода»).

9.1.2 Обратимые процессы. Цикл Карно

Проблема повышения к. п. д. тепловых машин привлекала пристальное внимание учёных. С этой целью совершенствовалась конструкция машин, варьировалось топливо нагревателя, менялся режим работы (форма кривой цикла)... Одновременно проводились теоретические исследования, в результате которых удалось показать, что максимально возможным к. п. д. должны обладать машины, цикл которых представляет собой обратимый процесс.

Термодинамический процесс называется обратимым, если он допускает возврат системы в первоначальное состояние без того, чтобы в окружающей среде остались какие-либо изменения. Другими словами, после окончания обратимого цикла в исходное состояние должно возвращаться не только само рабочее тело машины (в нашем случае – газ), но и все другие окружающие машину и связанные с ней тела. Примером обратимого процесса в механике являются свободные незатухающие гармонические колебания (идеальный процесс, происходящий без трения), в термодинамике – адиабатный и изотермический процессы. На практике и трение, и сопротивление всегда имеют место; они приводят к безвозвратной потере части затрачиваемой энергии, и поэтому реальные процессы необратимы.

То, что максимальным к. п. д. (η^*) должна обладать машина, работающая по обратимому циклу, впервые показал Карно. Он доказал также, что величина к. п. д. такой машины не должна зависеть от природы рабочего тела (газ ли это, жидкость или твёрдое тело), а определяется лишь температурой нагревателя T_H и температурой холодильника T_X :

$$\eta^* = \frac{T_H - T_X}{T_H}. \quad (9.2)$$

Таким образом, у идеальной тепловой машины:

$$\eta^* = \frac{A}{Q_H} = \frac{Q_H - Q_X}{Q_H} = \frac{T_H - T_X}{T_H}. \quad (9.3)$$

Обратим внимание: и у идеальной тепловой машины к. п. д. меньше единицы!

Карно не только вывел формулу для вычисления максимально возможного значения к. п. д., он предложил пример цикла, работа по которому, тепловая машина будет его иметь. Соответствующий цикл получил название **цикла Карно**.

Цикл Карно состоит из двух изотерм и двух адиабат (рис. 9.3).

Началу цикла соответствует состояние 1: нагретый до температуры нагревателя T_H газ, получая от этого нагревателя тепло Q_H , изотермически расширяется до состояния 2. Далее обмен теплом между нагревателем и газом прекращается; последний продолжает расширяться, но уже адиабатически до состояния 3, в котором его температура оказывается равной температуре холодильника T_X . Расширение заканчивается, газ приводится в контакт с холодильником и начинает отдавать ему тепло Q_X . Происходит *изотермическое сжатие* газа до состояния 4, в котором обмен теплом между рабочим телом и холодильником заканчивается, а газ, сжимаясь адиабатически, возвращается в исходное состояние 1.

Цикл завершён. Параметры состояния газа вернулись к исходным значениям, температура и нагревателя и холодильника остались теми же: цикл Карно является обратимым процессом.

Поскольку к. п. д. идеальной тепловой машины зависит лишь от температуры нагревателя и холодильника, какие бы другие обратимые циклы мы не совершали, при тех же T_H и T_X к. п. д. работа-

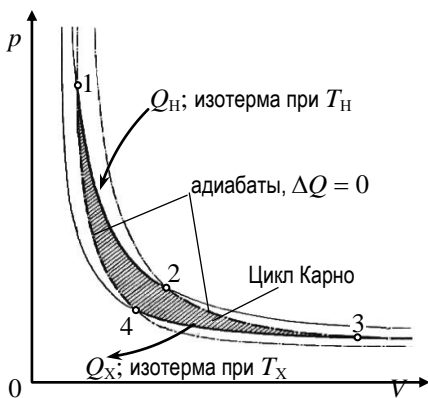


Рис. 9.3

ющих по этим циклам тепловых машин будет таким же, как и в случае цикла Карно – см. формулу (9.3).

Примечание 9.1. К. п. д. идеальной тепловой машины

$$\eta^* = \frac{Q_H - Q_X}{Q_H} = \frac{T_H - T_X}{T_H}, \text{ то есть: } 1 - \frac{Q_X}{Q_H} = 1 - \frac{T_X}{T_H}, \text{ или } \frac{Q_X}{Q_H} = \frac{T_X}{T_H},$$

то есть в обратимом цикле:

$$\frac{Q_H}{T_H} = \frac{Q_X}{T_X}. \quad (9.4)$$

Примечание 9.2. К. п. д. любой идеальной тепловой машины

(работающей по обратимому циклу) $\eta^* = \frac{T_H - T_X}{T_H}$, а к. п. д. ре-

альной тепловой машины (работающей по необратимому циклу)

$$\eta = \frac{Q_H - Q_X}{Q_H} < \eta^*.$$

Это означает, что для необратимого цикла можно записать:

$$\frac{Q_H - Q_X}{Q_H} < \frac{T_H - T_X}{T_H}, \text{ или } \frac{Q_X}{Q_H} > \frac{T_X}{T_H}, \text{ или } \frac{Q_X}{T_X} - \frac{Q_H}{T_H} > 0. \quad (9.5)$$

9.1.3 Второе начало термодинамики

Закон сохранения энергии (и второе начало термодинамики, как одна из форм его проявления) накладывает запрет на возможность создания вечного двигателя первого рода. Можно, однако, представить себе двигатель, внутренняя энергия рабочего тела которого не меняется (например, – у идеального газа в изотермическом процессе $\Delta U = 0$), а, значит, получаемое тепло полностью переходит в эквивалентную ему работу: $\Delta Q = A$. Получая тепло от нагревателя и полностью преобразуя его в полезную работу, мы

создали бы устройство, которое называется *вечным двигателем второго рода*. Препяду на этом пути *ставит второе начало термодинамики*.

Второе начало имеет несколько формулировок, которые, однако, эквивалентны друг другу. Приведём здесь две из них:

- *Невозможен процесс, единственным результатом которого является превращение всей теплоты, полученной от нагревателя, в эквивалентную ей работу (то есть – невозможно создание вечного двигателя второго рода)*. Так, например, при изотермическом расширении хоть ΔQ и равно A , однако этот результат – не единственный: газ расширяется! Расширение не может идти до бесконечности, рано или поздно нам придётся возвращать газ в исходное состояние, для чего необходимо затрачивать часть полученной энергии: таким образом, нельзя создать тепловую машину с к. п. д., равным единице.

- *Если два тела с разными температурами приведены в тепловой контакт, то тепло будет передаваться от горячего тела к холодному, а не наоборот*. Если б это было не так, мы бы могли тепло, получаемое холодильником в ходе циклического процесса, полностью возвращать нагревателю, и тогда и холодильник и рабочее тело периодически возвращались бы в исходное состояние, а единственным результатом функционирования такого устройства было бы превращение получаемого от нагревателя тепла в эквивалентную ему работу. Это запрещено – см. предыдущую формулировку второго начала.

Таким образом, несмотря на то, что формула вида $\Delta Q = A$ может оказаться математически верной, физически количество теплоты и работа оказываются неравноценны. Работу A в эквивалентное ей тепло ΔQ полностью (и так, чтобы в окружающей среде не появились изменения) превратить можно, например, вследствие внутреннего трения, обратный процесс осуществить не удаётся.

9.2 ЭНТРОПИЯ

9.2.1 Энтропия, как функция состояния

Назовём **энтропией** термодинамическую функцию S , которую введём таким образом, чтобы в обратимом процессе она удовлетворяла условию:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}. \quad (9.6)$$

Что даёт введение такой функции? Каков её физический смысл?

Для того чтобы понять это, рассмотрим обратимый процесс в изолированной системе на примере цикла Карно и посчитаем, чему равен интеграл от dS за весь цикл (то есть выясним, как меняется энтропия идеального газа за один обратимый цикл). При вычислениях будем пользоваться рисунком 9.3.

Итак:

$$\Delta S = \oint dS = \oint \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T} + \int_2^3 \frac{\delta Q}{T} + \int_3^4 \frac{\delta Q}{T} + \int_4^1 \frac{\delta Q}{T}.$$

Процесс 1 – 2 – изотермический, $T = T_H = \text{const}$, следовательно,

$$\int_1^2 \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T_H} = \frac{1}{T_H} \int_1^2 \delta Q = \frac{Q_H}{T_H}. \quad (9.7)$$

Процесс 2 – 3 – адиабатный, $\delta Q = 0$, то есть,

$$\int_2^3 \frac{\delta Q}{T} = 0. \quad (9.8)$$

Процесс 3 – 4 – изотермический, $T = T_X = \text{const}$, и это означает:

$$\int_3^4 \frac{\delta Q}{T} = \int_3^4 \frac{\delta Q}{T_X} = \frac{1}{T_X} \int_3^4 \delta Q = -\frac{Q_X}{T_X} \quad (9.9)$$

(знак «минус» показывает, что тепло отводится от рабочего тела к холодильнику).

Процесс 4 – 1 – адиабатный, $\delta Q = 0$, или

$$\oint_4^1 \frac{\delta Q}{T} = 0. \quad (9.10)$$

Объединяя формулы (9.7) – (9.10), получаем:

$$\Delta S = \oint \delta S = \oint \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_H}{T_H} + 0 - \frac{Q_X}{T_X} + 0 = \frac{Q_H}{T_H} - \frac{Q_X}{T_X}.$$

Ранее, однако, мы показали – (9.4), – что в обратимом процессе $\frac{Q_H}{T_H} = \frac{Q_X}{T_X}$, а это означает, что рассматриваемый интеграл равен нулю, или, другими словами, по завершении цикла Карно энтропия системы не изменилась, то есть $\Delta S = 0$. Сказанное справедливо не только для цикла Карно, но и для любого обратимого цикла.

На предыдущей лекции мы говорили о том, что термодинамические функции, интеграл по замкнутому контуру для которых равен нулю (то есть их значение определяется лишь значениями параметров состояния и не зависит от того, каким путём система в него пришла), называются функциями состояния. Функцией состояния является внутренняя энергия; из сказанного выше можно сделать вывод о том, что **функцией состояния является и энтропия**.

Примечание 9.3. Из определения энтропии ($dS = \delta Q/T$) следует, что если к системе подводится тепло ($\delta Q > 0$), то её энтропия воз-

растает, если тепло отводится ($\delta Q < 0$), – энтропия уменьшается. В адиабатном процессе $\delta Q = 0$, то есть адиабатным является процесс, протекающий при постоянной энтропии, $S = const$.

Сказанное позволяет построить график цикла Карно в координатах температура – энтропия ($T - S$), рис. 9.4.

Участок 1 – 2 на графике – изотерма, $T = T_H = const$; участок 2 – 3 – адиа-

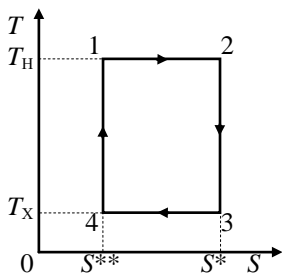


Рис. 9.4

бата, $S = S^* = \text{const}$; участок 3 – 4 – изотерма, $T = T_x = \text{const}$; участок 4 – 1 – адиабата, $S = S^{**} = \text{const}$. График имеет вид прямоугольника, площадь которого также равна совершаемой за цикл работе. Это легко показать, используя первое начало термодинамики, и то, что $dS = \delta Q/T$, или $\delta Q = TdS$.

Действительно, для нашего цикла $TdS = dU + \delta A$, или $\oint TdS = \oint dU + \oint \delta A$. Но $\oint dU = 0$, следовательно, $A = \oint TdS$.

Последний интеграл численно как раз и равен площади, ограниченной кривой $T(S)$ в координатах $T - S$.

9.2.2 Энтропия в необратимых процессах

Формула (17.6), согласно которой $dS = \frac{\delta Q}{T}$, справедлива лишь для обратимых процессов. Можно показать, что если процесс необратим, изменение энтропии оказывается больше, то есть в необратимом процессе в изолированной системе

$$dS > \frac{\delta Q}{T}, \quad (9.11)$$

что соответствует условию $\Delta S > 0$.

Таким образом, мы пришли к соотношению

$$\Delta S \geq 0, \quad (9.12)$$

которое называется неравенством Клаузиуса.

С учётом того, что в окружающем нас мире практически все процессы необратимы, неравенство (9.12) позволяет дать ещё одну формулировку второго начала термодинамики: **при любых процессах, происходящих в природе, энтропия замкнутой системы возрастает (не убывает)**. Она остаётся постоянной лишь в идеальных, обратимых процессах.

Таким образом, энтропия, как функция состояния, позволяет оценить, насколько протекающий круговой процесс далёк от иде-

ального, обратимого: чем сильнее меняется энтропия замкнутой системы, тем дальше этот процесс от обратимого.

На основании сказанного формула первого начала термодинамики может быть записана в виде

для обратимого процесса: $TdS = dU + \delta A$,

для необратимого процесса: $TdS > dU + \delta A$,

в общем виде:

$$TdS \geq dU + \delta A. \quad (9.13)$$

9.2.3 Энтропия и термодинамическая вероятность состояния

а) О вероятности состояния

Если N – число равновероятных событий, то вероятность одного события $\varpi = 1/N$.

Пример: два одинаковых шарика «а» и «b», не глядя, бросаем в ящик, разделённый на равные две части перегородкой. Возможны следующие варианты:

- шарик «а» окажется слева, шарик «b» – справа (рис. 9.5а);
- слева окажется шарик «b», а шарик «а» – справа (рис. 9.5б);
- оба шарика окажутся слева (рис. 9.5в);
- оба шарика окажутся справа (рис. 9.5г).

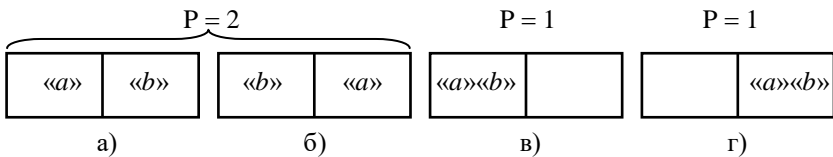


Рис. 9.5

Вероятность каждого события равна $1/4$, однако нетрудно заметить, что первое и второе события, по существу, описывают одно и то же состояние: отличий между ними нет.

Термодинамической вероятностью состояния P называется число способов, которыми оно может реализоваться. Очевидно, что состоянию, когда и справа и слева находится по одно-

му шарик, соответствует $P = 2$, а каждому из состояний, при которых оба шарика находятся справа или оба шарика находятся слева, соответствует $P = 1$.

Термодинамическую вероятность состояния связал с энтропией Больцман. Он показал, что:

$$S = k \cdot \ln P + \text{const},$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К – коэффициент пропорциональности (постоянная Больцмана).

Видно, что эта связь определена с точностью до константы, но по предложению Планка константу условились считать равной нулю (на практике всех интересует лишь изменение энтропии), поэтому в итоге:

$$S = k \cdot \ln P. \quad (9.14)$$

Поскольку энтропия замкнутой системы не может убывать, можно дать ещё одну (в нашем случае – уже четвёртую) формулировку второго начала термодинамики: ***термодинамическая вероятность состояния замкнутой системы при всех происходящих в ней процессах не может убывать.***

Сравнивая различные состояния любой замкнутой системы, можно сделать вывод о том, что, чем больше она упорядочена, тем меньше P , соответствующее этому состоянию. Так, на рис. 9.5 порядку соответствуют события в) и г), но для них P меньше, чем в случаях а) и б), в которых частицы равномерно (хаотично) разбросаны по обеим частям ящика. (Это знакомо и по жизни: порядок, например, на письменном столе, достигается вполне определённым числом способов, когда всё разложено по определённым местам, беспорядок же, – когда всё набросано, где попало, – можно создать гораздо бóльшим числом способов).

б) Возрастание энтропии и стремление замкнутой системы к хаосу. Статистическое толкование второго начала термодинамики

Из закона возрастания энтропии следует, что в процессе эволюции любая замкнутая система стремится к состоянию с макси-

мально возможной термодинамической вероятностью, то есть – к хаосу. При этом энтропия, со статистической точки зрения, является мерой хаоса (беспорядка).

Итак, хаос, беспорядок – будущее замкнутых систем.

Сказанное не касается систем незамкнутых, то есть тех, в которые есть обмен энергией и информацией с окружающей средой. Так, например, затратив некоторую энергию, мы можем создать порядок на том же самом письменном столе, на котором до этого царил хаос.

С эволюцией замкнутой системы в сторону хаоса в космологии связан термодинамический парадокс, на который обратил внимание ещё Больцман.

Если Вселенная существует бесконечно долгое время, то хаос в ней (состояние, при котором атомы не объединены в молекулы, не образуют вещество и не формируют планеты и звёзды, а равномерно «распылены» по всему пространству) должен был бы наступить уже давным-давно. Но ведь в реальности хаоса нет! – в этом и заключается парадокс.

Сам же Больцман предложил варианты его объяснения:

- Вселенная не замкнута, и поэтому говорить о неуклонном возрастании её энтропии нельзя.
- Вселенная бесконечна в пространстве, а, значит, говорить о вероятности того или иного состояния бессмысленно.
- Хаос на самом деле уже давным-давно наступил, но в любом хаотичном состоянии возможны локальные, существующие лишь некоторое время, отклонения параметров системы от среднего значения – флуктуации. В рамках этого объяснения окружающий нас мир является гигантской флуктуацией, которая, случайно возникнув, рано или поздно «рассосётся».

О том, каким образом решается данный парадокс в рамках современных представлений о строении Вселенной, мы поговорим в следующем семестре, во второй части курса физики.

в) Открытые диссипативные системы. Самоорганизация в открытых системах

Флуктуации (случайные отклонения значений физических величин от их средних значений) – общее свойство коллектива частиц, и их наличие обычно не сказывается на макропараметрах системы. Появление в системе неустойчивости способствует разрастанию флуктуации, что на определённом этапе может перевести систему в неустойчивое критическое состояние (состояние бифуркации), из которого она может сброситься в качественно новую систему (произойдёт самоорганизация).

Наличие случайного фактора и самоорганизация являются неотъемлемыми свойствами большого коллектива. Так, например, броуновское движение маленьких частиц, взвешенных в жидкости, совершенно беспорядочно. Но если таких частиц много, то они своим хаотическим движением дают начало упорядоченному процессу диффузии. Другие примеры самоорганизации – возникновение устойчивых конвекционных потоков частиц в нагреваемой жидкости, водоворотов на поверхности реки, вращение галактик в расширяющейся Вселенной.

Самоорганизация приводит к появлению порядка из беспорядка, а это означает, что данному процессу соответствует уменьшение энтропии, что, на первый взгляд, противоречит второму началу термодинамики. Но дело в том, что второе начало было сформулировано для замкнутых систем, а самоорганизация – свойство открытых систем. При этом даже может оказаться, что самоорганизация системы не потребует подвода добавочной энергии, но тогда всё равно часть энергии из системы придётся выводить в окружающую среду, иначе самоорганизация не произойдёт. Так, например, ожижение газа и затвердевание расплава не требуют затрат энергии. Но для протекания данных процессов, переводящих газ и жидкость в более упорядоченные состояния (в жидкое и в твёрдое, соответственно), необходимо часть энергии из этих систем вывести.

Какие бы примеры самоорганизации мы не рассматривали, всегда необходимыми условиями её возникновения являются

наличие большого коллектива, в котором возможны флуктуации, склонные к разрастанию в состоянии неустойчивости, и открытость самой системы – этого коллектива.

В принципе самоорганизация возможна и в замкнутых системах. Однако, самоорганизация и уменьшение энтропии в одной части замкнутой системы неминуемо сопровождается возрастанием энтропии и нарастанием хаоса в другой её части.

Рассмотренная схема является составной частью развитой лауреатом Нобелевской премии И. Пригожиным теории нелинейной термодинамики неравновесных процессов. Междисциплинарное направление, которое изучает процессы самоорганизации в природе, получило название «синергетика».

9.2.4 Химический потенциал

Напоследок вновь вернёмся к первому началу термодинамики и попытаемся описать ситуацию, когда в системе меняется число входящих в неё частиц N . Очевидно, что с изменением этого числа должна меняться и энергия всей системы в целом. Учтём эту возможность.

Для обратимого процесса в системе с неизменным числом частиц формулу первого начала термодинамики мы можем записать так:

$$TdS = dU + pdV, \text{ откуда} \\ dU = TdS - pdV.$$

Увеличим число частиц в системе на dN : её энергия возрастет на некоторую величину μdN , где μ – коэффициент пропорциональности. Формулу первого начала термодинамики для системы с переменным числом частиц теперь можно записать в следующем виде:

$$dU = TdS - pdV + \mu dN. \quad (9.15)$$

Коэффициент μ называется химическим потенциалом. Его физический смысл таков: он показывает, на какую величину меняется внутренняя энергия системы в случае постоянных объёма и

энтропии ($dV = 0$ и $dS = 0$) при изменении (dN) числа частиц в ней на единицу.

$$\mu = \left(\frac{\partial U}{\partial N} \right)_{V,S}. \quad (9.16)$$

Можно показать, что при контакте двух систем, способных обмениваться частицами, их химические потенциалы начнут меняться. ***В состоянии термодинамического равновесия химические потенциалы контактирующих систем окажутся одинаковыми.***

Данный вывод мы используем позднее для объяснения свойств p - n -переходов, на работе которых основана элементная база современной микроэлектроники.

Некоторые примеры

К.п.д. реальных тепловых двигателей:

– бензиновый	25 – 30 %
– турбореактивный	20 – 30 %
– дизельный	35 – 45 %
– паровой (паровоза)	6 – 8 %

Вопросы для повторения

1. Какие машины называются тепловыми? Какие превращения происходит с теплом и энергией за один цикл работы таких машин?
2. Какие процессы называются обратимыми? Приведите примеры обратимых и необратимых процессов.
3. В чём заключалась суть выводов, сделанных Карно? Какой цикл был им предложен, в чём заключались особенности этого цикла?
4. Как рассчитывается к. п. д. в цикле Карно и в других обратимых циклах; в необратимых циклах?

5. Приведите (по крайней мере) две формулировки второго начала термодинамики.

6. Что называется энтропией? Как она связана с теплотой? Что происходит с энтропией при обратимых и необратимых процессах в замкнутых системах?

7. Начертите графики цикла Карно в координатах $p - V$ и $T - S$. Поясните, каким процессам соответствуют отдельные участки графиков.

8. Как энтропия связана с термодинамической вероятностью состояния? В чём заключается статистическое толкование второго начала термодинамики?

9. В чём заключается смысл парадокса о тепловой смерти Вселенной?

10. Опишите схему процессов самоорганизации в природе. Что такое бифуркация?

11. Что называется химическим потенциалом? В каких единицах он измеряется в СИ? Что происходит с химическим потенциалом при установлении равновесия в системе из двух контактирующих тел?

10.1. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

10.1.1 Закон сохранения электрического заряда и закон Кулона – основополагающие законы электростатики

10.1.2 Напряженность электрического поля

10.1.3 Теорема Гаусса для электрического поля в вакууме

10.2 ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

10.2.1 Работа по переносу заряда в электрическом поле

10.2.2 Потенциал электрического поля

10.2.3 Связь потенциала и напряжённости электрического поля

Некоторые примеры

Вопросы для повторения

10.1 ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

10.1.1 Закон сохранения электрического заряда и закон Кулона – основополагающие законы электростатики

Известно, что в природе существуют два вида электрических зарядов: положительные и отрицательные. Одноимённые заряды отталкиваются, разноимённые – притягиваются. Положительный заряд приобретает, например, стеклянная палочка, натёртая шёлком; отрицательный – эбонитовая палочка, натертая шерстью. До натирания палочки являются электронейтральными, в процессе натирания заряды одного знака остаются на палочке, другого знака – переходят на шёлк или шерсть. При этом происходит перераспределение зарядов, новых зарядов не возникает, а существовавшие ранее не исчезают.

Общий заряд тела определяется избытком или недостатком в нём зарядов того или иного знака. Так, например, в металлах этот заряд определяется количеством элементарных носителей электрического заряда – свободных электронов, частиц, которые имеют массу $m \approx 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг и заряд $e \approx -1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл (заряд элек-

трона принимается отрицательным). Заряд электрона – минимальный, который может иметь свободная частица.

Тела могут обмениваться электрическими зарядами, отдавая их или принимая, однако при этом, согласно **закону сохранения, алгебраическая сумма зарядов тел, входящих в изолированную систему, не меняется со временем.**

$$q_1 + q_2 + \dots + q_i + \dots + q_N = \text{const.} \quad (10.1)$$

Термин «алгебраическая сумма» означает, что при суммировании необходимо учитывать знаки зарядов: сумма может оказаться и положительной, и отрицательной, и равной нулю. Под изолированной понимается система, которая не обменивается зарядами с окружающей средой.

Вторым основополагающим законом, лежащим в основе учения об электричестве, является **закон Кулона**, согласно которому (как мы это уже говорили ранее):

– *разноимённо заряженные тела притягиваются друг к другу, одноимённо заряженные – отталкиваются;*

– *сила взаимодействия заряженных тел прямо пропорциональна произведению их зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними;*

– *если тела – однородно заряженные шары, сферы или их можно считать точечными зарядами (см. рис. 10.1), формулу закона Кулона можно записать в виде*

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (10.2)$$

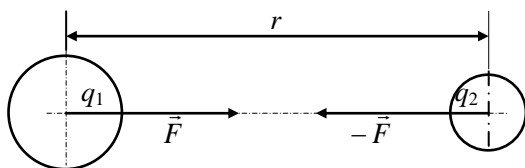


Рис. 10.1

В этой формуле $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м – электрическая постоянная, q_1 – заряд первого тела, q_2 – заряд второго тела (на рис. 10.1 знаки зарядов противоположны), r – расстояние между центрами тел (шаров, сфер), ε – диэлектрическая проницаемость среды, в которой находятся тела, F – сила их электростатического взаимодействия. Заметим: в полном соответствии с третьим законом Ньютона силы взаимодействия равны по величине и противоположны по направлению.

Закон Кулона – один из тех законов физики, которые не выводятся из каких-либо теоретических соображений, а отражают объективную реальность, и поэтому сами лежат в основе любых теорий, пытающихся объяснить «устройство» окружающего мира.

Закон Кулона можно применять и в тех случаях, когда заряженные тела не являются шарами, сферами или точечными зарядами. Пусть, например, одно из тел точечным считать нельзя. Тогда его необходимо мысленно разбить на N малых частей, для каждой из которых уже можно записать формулы вида (10.2), вычислить силы \vec{F}_i , действующие со стороны этих частей на второе заряженное тело, а затем вычисленные силы векторно сложить. Говорят, что в данном случае используется *принцип суперпозиции*: искомая результирующая сила

$$\vec{F}_{\text{рез}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i.$$

Вычисления будут тем точнее, чем большим будет число N частей, на которые мы мысленно разбиваем первое тело; в предельном случае это число должно стремиться к бесконечности, а суммирование заменится интегрированием.

В общем случае подобные расчёты могут оказаться достаточно сложными, поэтому для нахождения сил, действующих на заряженные тела, в электростатике часто используют не сам закон Кулона, а формулы, в которых фигурирует вспомогательная силовая характеристика, называемая напряжённостью электрического поля.

10.1.2 Напряженность электрического поля.

Напомним: если на тело в каждой точке пространства действует определённая сила, то говорят, что тело находится в поле сил. Если на заряженное тело со стороны других заряженных тел в каждой точке пространства действует сила Кулона, то можно говорить о поле таких сил, или об *электрическом поле*. По определению **напряжённостью электрического поля** \vec{E} в заданной точке называется отношение силы \vec{F} , действующей на точечный заряд q_0 , помещённый в эту точку, к величине этого заряда:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}. \quad (10.3)$$

Направление вектора \vec{E} совпадает с направлением силы, действующей на положительный точечный заряд q_0 ; в СИ напряжённость электрического поля измеряется в вольтах на метр: $[\vec{E}] = 1 \text{ В} \cdot \text{м}^{-1}$; при этом $1 \text{ В} \cdot \text{м}^{-1} = 1 \text{ Н} \cdot \text{Кл}^{-1}$. Вольт – единица измерения электрического потенциала; обоснованность подобного выбора единицы измерения напряжённости электрического поля мы подтвердим позднее.

Приведённое определение даёт нам практический способ нахождения \vec{E} . Так, например, если нас интересует напряжённость электрического поля в данной точке комнаты, необходимо поместить в эту точку положительный заряд заданной величины q_0 , измерить электрическую силу, которая на него будет действовать в этой точке (для этого можно использовать достаточно чувствительный динамометр), и, разделив F на q_0 , вычислить величину E . Направление \vec{E} совпадает с направлением силы \vec{F} .

Задание: Используя определение напряжённости электрического поля и формулу закона Кулона, убедитесь, что напряжённость электрического поля, создаваемого точечным зарядом q на некотором расстоянии r от него, рассчитывается по формуле

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (10.4)$$

Заметим: по такой же формуле рассчитывается напряжённость электрического поля, создаваемого заряженным шаром (или сферой) на расстоянии r от его центра при условии, что это расстояние больше радиуса шара (сферы).

Для напряжённости, так же, как и для силы, справедлив принцип суперпозиции: напряжённость электрического поля \vec{E} , создаваемого в заданной точке системой заряженных тел, равна векторной сумме напряжённостей электрических полей, создаваемых в этой точке каждым телом в отдельности:

$$\vec{E}_{\text{ПЭЗ}} = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i. \quad (10.5)$$

Пример определения $\vec{E}_{\text{ПЭЗ}}$ путём векторного суммирования напряжённостей полей трёх зарядов поясняется рисунком 10.2.

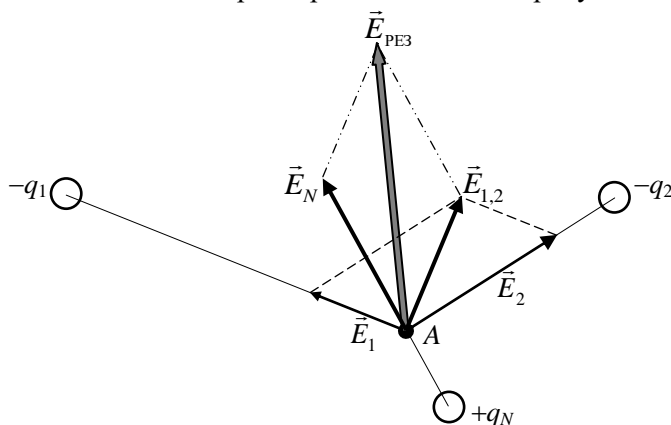


Рис. 10.2

Таким образом, если хотя бы одно из взаимодействующих заряженных тел – не точечное, не равномерно заряженный шар или сфера, напрямую формулу закона Кулона использовать нельзя, нужно выражать силу \vec{F} , действующую на заряд q , через напряжённость электрического поля \vec{E} , в котором заряд находится:

$$\vec{F} = q\vec{E}. \quad (10.6)$$

Саму же напряжённость следует заранее рассчитать, пользуясь уже рассмотренным принципом суперпозиции, применяя теорему Гаусса (о ней речь пойдёт позднее) и просто (если это возможно) заранее измерить с помощью соответствующих приборов.

Электрическое поле можно отображать графически с помощью силовых линий. **Силовой называется линия**, касательная в каждой точке к которой совпадает по направлению с силой, действующей в электрическом поле на точечный положительный заряд, помещаемый в эту точку.

Примеры картин силовых линий полей, создаваемых отдельными зарядами и системами зарядов, приведены на рис. 10.3 – 10.5.

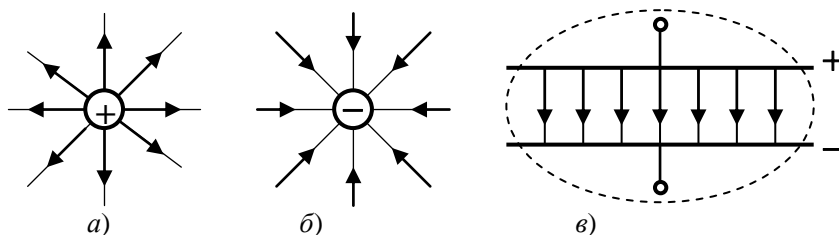


Рис. 10.3. а) Поле положительного точечного заряда; б) поле отрицательного точечного заряда; в) поле внутри плоского конденсатора

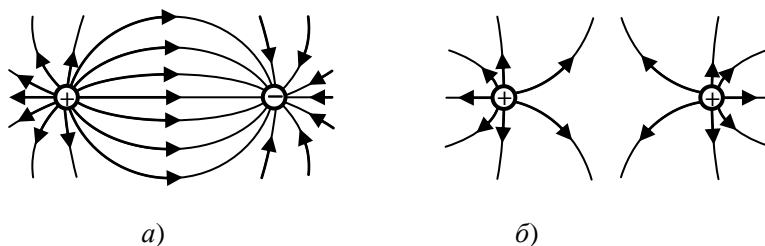


Рис. 10.4 Поля двух близко расположенных друг от друга точечных зарядов: а) заряды разноимённые; б) заряды одноимённые.

Силовые линии начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных (или уходят в бесконечность). Силовые линии не должны пересекаться, поскольку, если бы хотя бы пара линий пересеклась в какой-то точке поля, то в этой точке

можно было бы провести две касательные (по одной к каждой линии), а, значит, однозначно определить направление действия кулоновской силы на помещаемый туда заряд было бы нельзя.

Принцип построения силовой линии для системы из двух точечных зарядов с противоположными знаками поясняется рисунком 10.5.

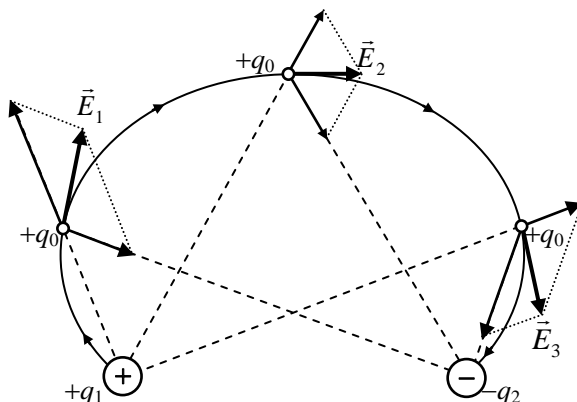


Рис. 10.5 Пример построения силовой линии с использованием принципа суперпозиции

Пробный точечный заряд q_0 помещаем в некоторую точку поля, по принципу суперпозиции находим величину и направление результирующего вектора \vec{E}_1 в этой точке. Затем отпускаем заряд q_0 и даём ему возможность немного сместиться под действием сил поля. В новой точке фиксируем заряд, опять определяем величину и направление вектора напряжённости, вновь отпускаем заряд, позволив ему сдвинуться дальше, затем ещё раз останавливаем и ищем напряжённость поля, и т. д. Определив направления векторов напряжённости на пути перемещения пробного заряда от $+q_1$ до $-q_2$, строим линию, к которой все эти вектора были бы касательными.

Это и будет искомая силовая линия (на рисунке изображены лишь три последовательных положения заряда q_0 и три соответствующих вектора напряжённости: \vec{E}_1 , \vec{E}_2 и \vec{E}_3).

10.1.3 Теорема Гаусса для электрического поля в вакууме

Как мы уже отмечали, для вычисления силы электростатического взаимодействия тел произвольной формы используют силовую характеристику поля – его напряжённость в данной точке. Зная напряжённость, мы и находим силу ($\vec{F} = q\vec{E}$), действующую на заряд q . Саму напряжённость \vec{E} можно рассчитать, пользуясь принципом суперпозиции, однако в ряде случаев в этих целях удобнее использовать теорему Гаусса.

Введём определение: если каждой точке пространства можно сопоставить некоторый вектор (например, – вектор \vec{A}), то, выбрав в этом пространстве некоторую поверхность S , можно говорить о потоке вектора \vec{A} через эту поверхность (рис. 10.6).

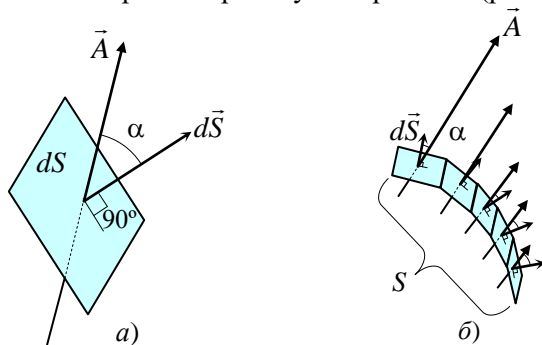


Рис. 10.6

Для вычисления потока поверхность S мысленно разбивают на много малых частей dS , каждой из которых сопоставляют вектор $d\vec{S}$, по величине равный площади dS и направленный вдоль вектора нормали к поверхности выбранного участка (во всех случаях – к одной и той же стороне всей поверхности S). По определению потоком вектора \vec{A} через элемент $d\vec{S}$ называется скалярное произведение этих векторов: $d\Phi_A = (\vec{A} d\vec{S}) = A dS \cos \alpha$, где α – угол между векторами \vec{A} и $d\vec{S}$ (см. рис. 10.6.а). **Потоком вектора \vec{A} через всю поверхность S** (рис. 10.6.б) называется интеграл вида

$$\Phi_A = \int_S \vec{A} d\vec{S}.$$

В качестве вектора \vec{A} можно выбрать вектор силы (для описания поля сил), скорости (для описания движения частиц в струе жидкости), индукции магнитного поля и т. д. В теореме Гаусса для электрического поля в вакууме говорится о потоке Φ_E вектора напряженности электрического поля \vec{E} , при этом поток считается не через обычную поверхность, а через *замкнутую*, то есть разделяющую пространство таким образом, что проникнуть из одной его части в другую, не пронзив эту поверхность, невозможно.

Сформулируем теорему.

Поток вектора напряжённости электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен деленной на электрическую постоянную ϵ_0 алгебраической сумме зарядов, охватываемых этой поверхностью:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum_{i=1}^N q_i}{\epsilon_0}. \quad (10.7)$$

Заметим: формула не является альтернативой тексту теоремы, поскольку из (10.7) не следует, что замкнутая поверхность может иметь любую форму (в том числе – такую, которая нам удобна для проведения вычислений); кроме того, глядя на выражение (8.9) невозможно сказать, о каких зарядах q_i идёт речь (учитываются только те, которые охватываются выбранной поверхностью!).

Вывод формул для напряжённости электрического поля с помощью теоремы Гаусса особенно прост в случаях полей, создаваемых симметричными заряженными объектами. Для вывода формул необходимо:

- Начертить рисунок с изображением заряженного тела и силовых линий создаваемого им электрического поля.
- Указать на рисунке точку, в которой мы будем рассчитывать величину напряжённости электрического поля, и провести сквозь эту точку силовую линию.
- Выбрать замкнутую поверхность, форма которой соответствовала бы симметрии задачи; поверхность должна проходить через выбранную точку.

- Посчитать поток вектора напряжённости электрического поля через выбранную поверхность (учитывая взаимную ориентацию отдельных частей поверхности и пронзающих их силовых линий).
- Определить, какой заряд охватывается выбранной поверхностью, после чего применить теорему Гаусса.

Примеры применения теоремы Гаусса

а) Поле равномерно заряженной сферы

Рассмотрим сферу радиусом R и зарядом $+Q$. Она делит пространство на две области: внутри сферы (где зарядов нет) и снаружи от неё. Выражение для напряжённости создаваемого электрического поля получим для каждой из этих областей.

Для области вне сферы: рисуем чертёж, изображаем силовые линии, выбираем точку M , находящуюся на расстоянии r от центра сферы, проводим через неё одну из силовых линий, после чего выбираем замкнутую поверхность, соответствующую симметрии задачи и проходящую через эту точку. Очевидно, такой поверхностью будет сфера, центр которой совпадает с центром сферы, напряжённость электрического поля которой мы рассчитываем (рис. 10.7.а).

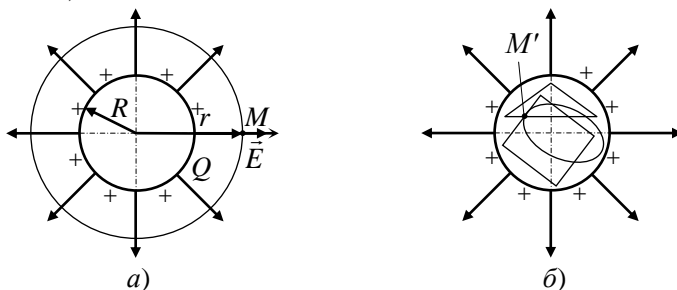


Рис. 10.7

Теперь считаем поток вектора \vec{E} через выбранную поверхность, учитывая, что нормаль к её любому участку, например, – с точкой M , совпадает с силовой линией, проходящей через этот участок (угол α в формуле для потока, везде равен нулю):

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E dS \cdot \cos 0^\circ = \oint_S E dS$$

В силу симметрии выбранной поверхности напряжённость электрического поля в любой её точке должна быть одинаковой:

$$\Phi_E = \oint_S E dS = E \oint_S dS.$$

Но по определению интеграла $\oint_S dS = S$, где $S = 4\pi r^2$ – площадь сферы; таким образом, $\Phi_E = 4\pi r^2 E$.

Применим теорему Гаусса: выбранной поверхностью охватывается весь заряд $+Q$, поэтому можно записать: $4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0}$, или, другими словами, напряженность поля вне заряженной сферы

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}. \quad (10.8)$$

Для любой точки M' в области, находящейся внутри заряженной сферы, можно выбрать сколь угодно много замкнутых поверхностей, проходящих через эту точку и при этом лежащих внутри сферы (рис. 10.7.б). Но ни одна из таких поверхностей не окружает заряд, поэтому по теореме Гаусса для них для всех $\Phi_E = 0$, независимо от формы. Другими словами, в этом случае $\oint_S \vec{E} d\vec{S} \equiv 0$ при любом S , а это возможно лишь если интеграл берётся от нуля, то есть внутри заряженной сферы $E = 0$.

б) Поле равномерно заряженной бесконечно длинной тонкой прямой нити

Пользуясь теоремой, выведем формулу для напряжённости электрического поля, создаваемого длинной прямой тонкой нитью с линейной плотностью заряда τ (зарядом dQ , приходящимся на единицу длины dl , $\tau = \frac{dQ}{dl}$) на некотором расстоянии r от этой нити.

Действуем по алгоритму, изложенному на предыдущей лекции: рисуем чертёж, изображаем силовые линии, выбираем точку M , находящуюся на расстоянии r от нити, проводим через неё одну из силовых линий, после чего выбираем замкнутую поверхность, соответствующую симметрии задачи и проходящую через эту точку. Очевидно, такой поверхностью будет цилиндр, ось которого совпадает с нитью (рис. 9.1, предполагается, что нить заряжена положительно).

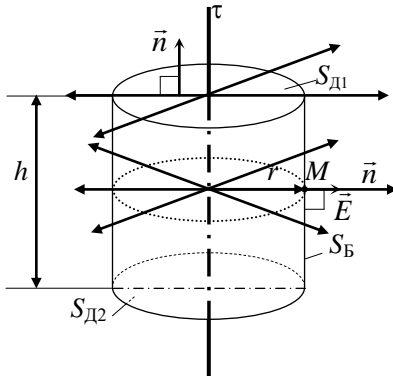


Рис. 10.8

Следующий шаг – вычисление потока вектора \vec{E} через всю поверхность цилиндра как суммы интегралов по двум доньям цилиндра $S_{д1}$ и $S_{д2}$, а также по его боковой поверхности $S_{б}$. В вычислениях учитываем, что нормали к доньям перпендикулярны силовым линиям, а нормали в любой точке боковой поверхности (например, – в точке M) направлены вдоль силовых линий, проходящих через эти

точки.

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_{S_{д1}} \vec{E} d\vec{S} + \int_{S_{д2}} \vec{E} d\vec{S} + \int_{S_{б}} \vec{E} d\vec{S} = \\ &= \int_{S_{д1}} E dS \cdot \cos 90^\circ + \int_{S_{д2}} E dS \cdot \cos 90^\circ + \int_{S_{б}} E dS \cdot \cos 0^\circ = \int_{S_{б}} E dS .\end{aligned}$$

Принимая во внимание то, что в силу симметрии цилиндра напряжённость электрического поля в любой точке его боковой поверхности одинакова, а также то, что площадь боковой поверхности цилиндра, имеющего высоту h , равна $2\pi rh$, запишем:

$$\Phi_E = \int_{S_{б}} E dS = E \int_{S_{б}} dS = 2\pi rhE.$$

Заряд, находящийся в области, ограниченной поверхностью цилиндра, сосредоточен на участке нити длиной h и равен τh . Согласно теореме Гаусса $\Phi_E = \tau h / \epsilon_0$, или

$$2\pi r h E = \frac{\tau h}{\epsilon_0}.$$

Сократив h в обеих частях равенства, получаем формулу для расчёта напряжённости электрического поля тонкой прямой заряженной нити:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\epsilon_0 r}. \quad (10.9)$$

с) Поле равномерно заряженной плоскости

Получим формулу для расчёта напряжённости электрического поля, создаваемого равномерно заряженной плоскостью с поверхностной плотностью заряда σ (зарядом dQ , приходящимся на единицу площади dS , то есть $\sigma = \frac{dQ}{dS}$).

Точно так же, как это мы делали ранее, создаём чертёж, изображаем силовые линии, выбираем точку M , находящуюся на некотором расстоянии от плоскости, проводим через неё одну из силовых

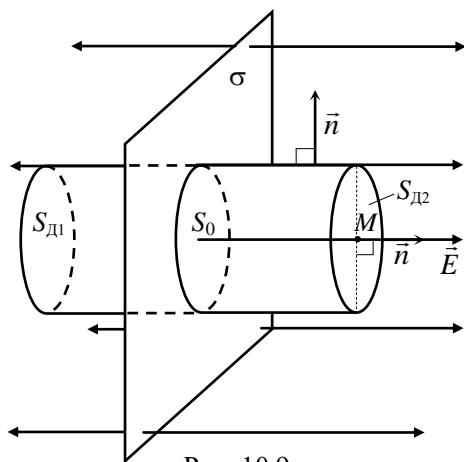


Рис. 10.9

линий, после чего выбираем замкнутую поверхность, соответствующую симметрии задачи и проходящую через эту точку. В данном случае в качестве такой поверхности можно также выбрать цилиндр, ось которого проходит через выбранную точку M и перпендикулярна заряженной плоскости (на рис. 10.9. её заряд принят положительным).

Теперь вычислим поток

вектора \vec{E} через всю поверхность цилиндра как сумму интегралов по двум доньям цилиндра $S_{\text{д1}}$ и $S_{\text{д2}}$, а также по его боковой поверхности $S_{\text{б}}$. В Вычислениях учитываем, что нормали к доньям параллельны силовым линиям, а нормали в любой точке боковой поверхности направлены перпендикулярно силовым линиям, проходящих через эти точки.

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \int_{S_{\text{д1}}} \vec{E} d\vec{S} + \int_{S_{\text{д2}}} \vec{E} d\vec{S} + \int_{S_{\text{б}}} \vec{E} d\vec{S} = \\ &= \int_{S_{\text{д1}}} E dS \cdot \cos 0^\circ + \int_{S_{\text{д2}}} E dS \cdot \cos 0^\circ + \int_{S_{\text{б}}} E dS \cdot \cos 90^\circ = \int_{S_{\text{д1}}} E dS + \int_{S_{\text{д2}}} E dS.\end{aligned}$$

В силу симметрии значения напряжённости в любых точках доньшек одинаковы, площади доньшек равны, следовательно,

$$\Phi_E = ES_{\text{д1}} + ES_{\text{д2}} = 2ES_0.$$

Заряд, охватываемый цилиндром, сосредоточен на участке поверхности площадью S_0 и равен σS_0 . Применив теорему Гаусса,

получим: $\Phi_E = 2ES_0 = \frac{\sigma S_0}{\varepsilon_0}$, или в вакууме напряжённость элек-

трического поля равномерно заряженной плоскости на любом расстоянии от этой плоскости

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \quad (10.10)$$

d) Поле двух равномерно заряженных плоскостей с равными по величине, но имеющими противоположные знаки зарядами

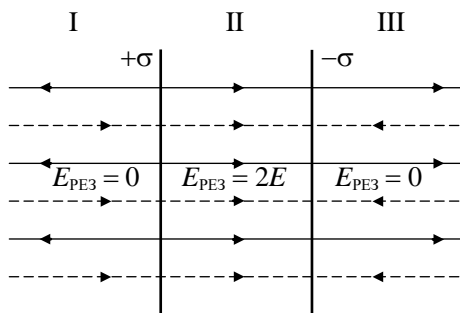


Рис. 10.10

Для вычисления напряжённости воспользуемся только что полученной формулой (10.10), и принципом суперпозиции. На рис. 10.10 представлен вид сбоку такой системы; силовые линии положительно

заряженной плоскости (поверхностная плотность заряда $+\sigma$) изображённая сплошными, отрицательно заряженной (поверхностная плотность заряда $-\sigma$) – пунктирными линиями.

Поскольку для обеих плоскостей E не зависит от расстояния и одинаково по модулю, то в областях I и III соответствующие вектора напряжённости в сумме дают ноль, зато в области II результирующая напряжённость $E_{\text{рез}} = 2E$, то есть

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (10.11)$$

Итак, электрического поля вне данной системы нет, оно как бы «конденсируется» в пространстве между двумя плоскостями, поэтому такую систему называют плоским конденсатором, а заряженные плоскости – обкладками этого конденсатора. Заметим: формула (10.11) получена в предположении, что обкладки плоскости безграничны.

10.2 ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

10.2.1 Работа по переносу заряда в электрическом поле

Решая задачи механики, мы убедились в том, что использование понятий «работа» и «энергия» позволяет получать ответы даже в тех случаях, когда в ходе перемещения тела силы, действующие на него, менялись по величине. Подобная проблема особенно актуальна в неоднородном электрическом поле, ведь даже сила взаимодействия двух точечных зарядов существенным образом зависит от расстояния между ними.

Для описания изменения энергии заряженных тел в электрическом поле вводится энергетическая характеристика этого поля, которая называется потенциалом.

Об электрическом поле мы говорим, поскольку в каждой точке пространства на заряд, помещаемый в это поле, действует определённая сила (Кулона). Силы электростатического поля являются консервативными (их работа не зависит от формы траектории, по которой перемещается тело, а определяется лишь его началь-

ным и конечным положениями). Работа сил такого поля равна убыли потенциальной энергии тела.

Рассчитаем работу, которую совершают силы электрического поля перемещая один точечный заряд q , находившийся изначально на расстоянии r_1 от второго точечного заряда Q того же знака в точку, в которой расстояние между зарядами станет равным r_2 .

По определению, работа переменной силы при перемещении тела из точки 1 в точку 2: $A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 F dr \cdot \cos \alpha$. В нашем случае угол α между направлением силы и направлением перемещения первого заряда равен нулю (заряды отталкиваются), а сама сила F описывается формулой закона Кулона, поэтому

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 F dr \cdot \cos \alpha = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} dr = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_1}^{r_2} = \\ &= \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \end{aligned}$$

Последнее выражение можно интерпретировать, как убыль потенциальной энергии: $A = W_{\text{п1}} - W_{\text{п2}}$. Полагая, что на бесконечности (при $r \rightarrow \infty$ заряды практически перестают взаимодействовать, $F \rightarrow 0$) потенциальная энергия равна нулю (то есть при $r_2 \rightarrow \infty$ $W_{\text{п2}} \rightarrow 0$), получаем выражение для потенциальной энергии в точке 1 поля: $W_{\text{п1}} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_1}$. Такую же формулу можно записать для

потенциальной энергии заряда q в любом другом месте поля, создаваемого точечным зарядом Q :

$$W_{\text{п}} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}. \quad (10.12)$$

Очевидно: потенциальная энергия $W_{\text{п}}$ численно равна работе A_{∞} , которую необходимо совершить силам поля с тем, чтобы переместить положительный заряд из данной точки на бесконечность.

В электрическом поле, создаваемом не одним, а несколькими

зарядами потенциальная энергия заряда q равна алгебраической сумме значений потенциальной энергии в полях, создаваемых каждым зарядом в отдельности:

$$W_{\Pi} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i}{r_i} \quad (10.13)$$

Примечание 10.1. Если после перемещения в поле по замкнутому контуру l заряд q вернули в исходную точку ($r_1 = r_2$), работа сил электростатического поля окажется равной нулю, поскольку $W_{\Pi 1} = W_{\Pi 2}$. Это можно отобразить так:

$$A = \oint \vec{F} d\vec{l} = 0.$$

Из определения напряжённости электрического поля $\vec{F} = q \vec{E}$, следовательно,

$$\oint \vec{F} d\vec{l} = q \oint \vec{E} d\vec{l} = 0, \text{ то есть в электростатическом поле}$$

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = 0. \quad (10.14)$$

В математике интеграл вида $\oint \vec{E} d\vec{l}$ называют *циркуляцией вектора \vec{E}* , поэтому можно сказать: **в электростатическом поле циркуляция вектора \vec{E} равна нулю.**

10.2.2 Потенциал электрического поля

С потенциальной энергией заряда тесно связана энергетическая характеристика электрического поля: *потенциал* φ .

Потенциалом электрического поля в заданной точке называется отношение потенциальной энергии положительного пробного заряда, помещаемого в эту точку поля, к величине заряда:

$$\varphi = \frac{W_{\Pi}}{q_0}. \quad (10.15)$$

В СИ потенциал электрического поля измеряется в вольтах, очевидно, что **$1 \text{ В} = 1 \text{ Дж} \cdot \text{Кл}^{-1}$** .

С учётом того, что $W_{\Pi} = A_{\infty}$, иногда говорят, что потенциал численно равен работе, которую должны совершить силы поля с

тем, чтобы переместить единичный пробный заряд из данной точки поля в бесконечность.

Выражение для W_{Π} в поле точечного заряда мы вывели ранее – (10.12), поэтому, пользуясь определением, можем записать формулу для расчёта потенциала такого поля в точке, удалённой от заряда Q на расстояние r :

$$\varphi = \frac{W_{\Pi}}{q_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}. \quad (10.16)$$

Так же, как и напряжённости электрического поля, для потенциала справедлив **принцип суперпозиции**, однако, в отличие от напряжённости, которая является вектором, потенциал – скаляр, может быть как положительным, так и отрицательным, и поэтому принцип звучит так: **потенциал электрического поля, создаваемого системой зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности.**

Потенциал электрического поля можно отображать графически с помощью **экипотенциальных линий** (и поверхностей) – линий, потенциалы во всех точках которых одинаковы. Их особенностями является то, что

- экипотенциальные линии всегда замкнуты;
- экипотенциальные поверхности и силовые линии всегда

взаимно перпендикулярны.

Примеры картин экипотенциальных линий приведены на рис. 10.11 и 10.12; силовые линии на этих рисунках проведены пунктиром.

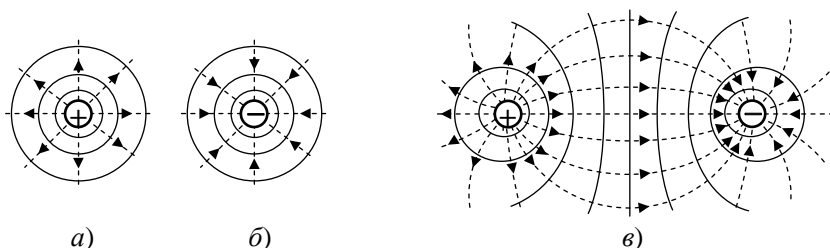


Рис. 10.11 Картины полей: а) точечного положительного заряда; б) точечного отрицательного заряда; в) диполя – системы из двух близко расположенных точечных зарядов противоположных знаков

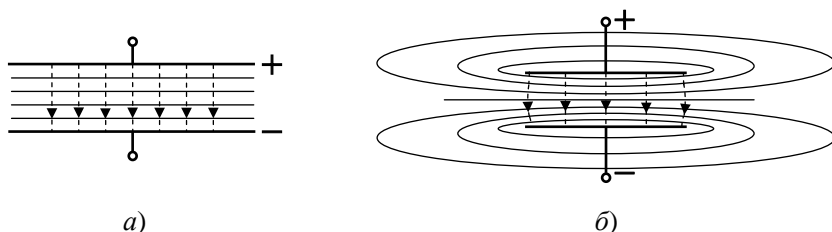


Рис. 10.12 Картины электрических полей: а) внутри плоского конденсатора; б) внутри и вне плоского конденсатора конечных размеров

Поскольку при перемещении заряда q из одной точки поля (с потенциалом φ_1) в другую (с потенциалом φ_2) работа сил поля $A = W_{\text{пл}} - W_{\text{пл2}}$, с учётом (10.15), можно записать $A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$, или, введя обозначение $\varphi_1 - \varphi_2 = U$,

$$A = qU. \quad (10.17)$$

Примечание 10.2. Символом U в разделе «электричество» принято обозначать падение напряжения на участке цепи. В общем случае (например, если рассматриваемый участок содержит батареи, аккумуляторы), значения разности потенциалов и падения напряжения не совпадают. В электростатике, однако, мы не рассматриваем работу источников тока, и в этом случае можно говорить, что U это разность потенциалов электрического поля в двух выбранных точках, а можно – что это падение напряжения (или напряжение) на участке цепи между этими точками.

10.2.3 Связь потенциала и напряжённости электрического поля

Если заряд q поместить в электрическое поле и затем отпустить его, то под действием сил поля, он начнёт двигаться и на малом первом участке пути $d\vec{l}$ вдоль силовой линии эти силы совершат работу

$$\delta A = \vec{F} d\vec{l} = q_0 \vec{E} d\vec{l} = q_0 E dl \cdot \cos 0^\circ = q_0 E dl.$$

Но, поскольку работа сил поля равна убыли потенциальной энергии заряда, можно записать:

$$\delta A = -dW_{\Pi}$$

(напомним, что в математике знак дифференциала означает бесконечно малое приращение: из нового значения функции мы вычитаем предыдущее; в нашем случае речь идёт об убыли, то есть, наоборот, нужно вычесть последующее значение функции из предыдущего, отсюда возникает знак «минус» перед dW_{Π}).

Из определения потенциала следует, что $dW_{\Pi} = q_0 d\varphi$, поэтому запишем: $\delta A = q_0 E dl = -q_0 d\varphi$, то есть при перемещении вдоль силовой линии

$$E = - \frac{d\varphi}{dl}. \quad (10.18)$$

Если вектор перемещения $d\vec{l}$ разложить по осям координат X, Y, Z (единичные вектора по которым обозначим \vec{i} , \vec{j} , \vec{k}), связь между напряжённостью и потенциалом электрического поля может быть представлена в виде

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi, \quad (10.19)$$

где символ $\text{grad}\varphi$ означает вектор вида

$$\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{k}.$$

Соотношения (10.18) и (10.19) позволяют по заданной зависимости $E(x, y, z)$ находить функцию $\varphi(x, y, z)$.

Некоторые примеры

- В физике, как правило, потенциал электрического поля равен нулю выбирается на бесконечности; в электротехнике за нулевой потенциал часто принимают поверхность Земли.

- У живых клеток в покое между внутренним содержимым клетки и наружным раствором существует разность потенциалов порядка 60 – 90 мВ.

- Разность потенциалов между катодом и анодом внутри электронно-лучевой трубки цветного телевизора достигает 25 кВ.

- Разность потенциалов между Землёй и ионосферой составляет 200 – 250 кВ.
- Средняя напряжённость электростатического поля нашей планеты (системы Земля – ионосфера) составляет примерно 100 В/м.
- Оценка и нормирование электростатических полей на рабочих местах осуществляется в зависимости от времени воздействия поля на работника. Так, при напряженности электрического поля менее 20 кВ/м время пребывания на рабочем месте не регламентируется, но уже в электростатических полях с напряженностью более 60 кВ/м нахождение персонала без специальных средств защиты не допускается вообще.

Вопросы для повторения

1. Сформулируйте закон сохранения электрического заряда.
2. Сформулируйте закон Кулона; ответ поясните рисунком.
3. Что называется напряжённостью электрического поля? В каких единицах она измеряется в СИ? Как отображается графически?
4. В чём заключается принцип суперпозиции в случае напряженности электрического поля? Ответ поясните рисунком.
5. Изобразите картины силовых линий электростатических полей, создаваемых уединёнными точечными зарядами, близко расположенными разноимёнными и одноимёнными электрическими зарядами, обкладками плоского электрического конденсатора.
6. Сформулируйте теорему Гаусса для электрического поля в вакууме; запишите соответствующую формулу и поясните смысл входящих в формулу величин.
7. Продемонстрируйте, как применяется теорема Гаусса для вычисления напряженности электрического поля, создаваемого равномерно заряженной сферой.
8. Продемонстрируйте, как применяется теорема Гаусса для вычисления напряженности электрического поля, создаваемого прямой, тонкой, бесконечной, равномерно заряженной нитью.
9. Продемонстрируйте, как применяется теорема Гаусса для вычисления напряженности электрического поля, создаваемого равномерно заряженной плоскостью.

10. Выведите формулу для вычисления напряженности электрического поля, создаваемого двумя параллельными равномерно и при этом разноимённо заряженными плоскостями.

11. Что называется потенциалом электрического поля? В каких единицах она измеряется в СИ? Как отображается графически?

12. Выведите формулу для потенциала электрического поля, создаваемого точечным зарядом.

13. В чём заключается принцип суперпозиции в случае потенциала электрического поля? Ответ поясните рисунком.

14. Запишите формулы, связывающие напряжённость и потенциал электрического поля и поясните смысл входящих в эти формулы величин.

15. Изобразите картины эквипотенциальных линий электростатических полей, создаваемых уединёнными точечными зарядами, близко расположенными разноимёнными зарядами, обкладками плоского электрического конденсатора.

11.1 ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

11.1.1 Электрический диполь. Диполь в однородном и неоднородном электрических полях

11.1.2 Молекулы диэлектрика в электрическом поле

11.1.3 О пьезоэффекте и сегнетоэлектричестве

11.1.4 Теорема Гаусса для электрического поля в диэлектрике

10.2 МЕТАЛЛЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

11.2.1 Напряжённость и потенциал электрического поля уединённого проводника

11.2.2 Емкость уединённого проводника

11.2.3 Энергия уединённого заряженного проводника

11.2.4 Электрические конденсаторы.

11.1.5 Энергия заряженного конденсатора. Объёмная плотность энергии электрического поля

Некоторые примеры

Вопросы для повторения

11.1.1 Электрический диполь. Диполь в однородном и неоднородном электрических полях

Сравнивая закон Кулона с законом Всемирного тяготения, на первый взгляд создаётся впечатление, что, точно так же, как и гравитационное воздействие, электрические поля от различных объектов должны ощущаться на громадных, вплоть до границ Вселенной, расстояниях. На деле это, однако, не совсем так. Дело в том, что в целом окружающий нас мир не обладает избыточным электрическим зарядом, и воздействие близко расположенных зарядов разных знаков на больших расстояниях практически компенсируются. Примером объекта, на котором это можно достаточно легко продемонстрировать, является электрический диполь: система из одинаковых по величине, но имеющих противоположные знаки зарядов $+q$ и $-q$, расположенных малой (по сравнению с расстоянием r до точки наблюдения) дистанции l друг от друга. «Связь» между зарядами может быть как абсолютно жёсткой

($l = \text{const}$), так и упругой (возможно небольшое изменение l под действием внешних сил).

Для количественного описания свойств диполя вводится **дипольный электрический момент**: вектор \vec{p}_e , определяемый, как

$$\vec{p}_e = q\vec{l}, \quad (11.1)$$

где \vec{l} – вектор, по длине равный расстоянию между зарядами диполя и направленный от отрицательного заряда к положительному (см. рис. 11.1.а). На рис. 11.1.б) и 11.1.в) приведены другие примеры графического изображения электрических диполей.

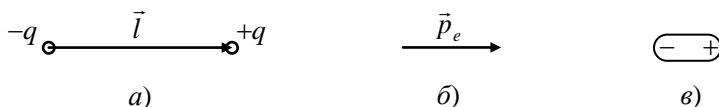


Рис. 11.1

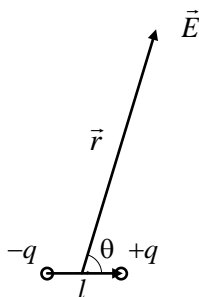


Рис. 11.2

Понятно, что на большом расстоянии r от диполя (см. рис. 11.2) притяжение заряда одного знака практически уравнивается отталкиванием от заряда противоположного знака. Можно показать, что при $r \gg l$ напряжённость электрического поля, создаваемого диполем, обратно пропорциональна уже не квадрату, а кубу расстояния (и при этом зависит от угла θ , под которым ведётся наблюдение):

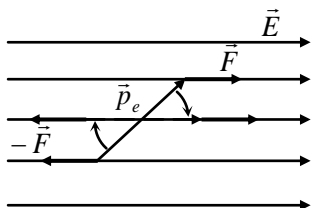
$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{p_e}{r^3} \sqrt{1 + 3\cos^2\theta}. \quad (11.2)$$

Реально силы кулоновского электростатического взаимодействия обычно учитываются на расстояниях, не превышающих десятка километров. В то же время на очень малых (меньших, чем диаметр атомного ядра, то есть менее 10^{-15} м) кулоновскими силами зачастую также можно пренебречь, так как на таких расстояниях существенным становится *сильное взаимодействие* между эле-

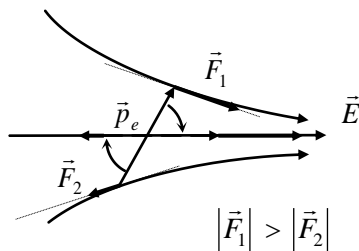
ментарными частицами.

Электрический диполь может служить моделью молекул, из которых состоят многие окружающие нас вещества, и поэтому важное практическое значение имеет рассмотрение того, как такой объект ведёт себя в электрическом поле.

а) **В однородном поле** (вектор \vec{E} везде одинаков по величине и направлению, силовые линии являются параллельными и расположенными на равном расстоянии друг от друга прямыми) на положительный и отрицательный полюса диполя действуют одинаковые по величине, но противоположные по направлению силы (рис. 11.3.а).



а)



б)

Рис. 11.3

На положительный полюс действует сила, по определению направленная туда же, что и вектор \vec{E} (на рисунке - направо), на отрицательный полюс - в противоположную сторону (на рисунке - налево). Под действием возникающего момента пары сил происходит разворот диполя таким образом, чтобы вектор \vec{p}_e оказался направлен туда же, куда и вектор \vec{E} . В дальнейшем силы, действующие на полюса, будут стремиться «растянуть» диполь, но ни повернуть, ни заставить его двигаться они уже не смогут, так как эти силы равны по величине, противоположны по направлению и при этом лежат на одной прямой.

б) **Если поле неоднородно** (в одной части рисунка силовые линии расположены гуще, чем в другой), то диполь не только поворачивается, но одновременно начинает втягиваться в область

сильного поля. Действительно, силы теперь, во-первых, направлены в разные стороны, причём под углом, не равным 180° , друг к другу (они по-прежнему являются касательными к силовым линиям), и, во-вторых, неодинаковы по величине, поскольку в области сгущения силовых линий напряжённость электрического поля выше: рис. 11.3.б.

11.1.2 Молекулы диэлектрика в электрическом поле

Согласно классической теории электропроводности, главной особенностью диэлектриков, отличающей их от проводников, является отсутствие в них свободных зарядов, способных перемещаться под действием электрического поля. В связи с этим все диэлектрики по электрическим свойствам молекул и атомов, из которых они состоят, можно условно разделить на две основные группы: на полярные и неполярные.

В **полярных диэлектриках** атомы в молекулах располагаются таким образом, что саму молекулу можно считать электрическим диполем, поскольку у неё есть два полюса, заряженные положительно и отрицательно. Типичными примерами полярных диэлектриков являются H_2O , NH_3 , HCl . Молекулы таких веществ обладают электрическим дипольным моментом \vec{p}_e , величина которого зависит от формы молекул, размеров и взаимного расположения атомов, из которых они состоят.

Атомы в молекулах **неполярных диэлектриков** расположены таким образом, что геометрические центры областей сосредоточения положительных и отрицательных зарядов совпадают, и поэтому электрический дипольный момент молекулы оказывается равным нулю. Примеры таких веществ: H_2 , N_2 , CCl_4

Введём вектор \vec{P} , который называется **поляризованностью вещества**; его величина равна отношению суммарного электрического дипольного момента некоторого объёма ΔV диэлектрика к величине этого объёма (единица измерения \vec{P} в СИ – $\text{Кл}\cdot\text{м}^{-2}$).

$$\vec{P} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{p}_{ei}}{\Delta V}. \quad (11.3)$$

Понятно, что в обычных условиях поляризованность неполярных диэлектриков равна нулю (в них все $\vec{p}_{ei} = 0$). Но в отсутствие внешних воздействий поляризованности нет и у полярных диэлектриков: поскольку ориентация их молекул носит хаотический характер, то для любого элемента объёма $\sum_{i=1}^N \vec{p}_{ei} = 0$.

Однако, при внесении диэлектриков в электрическое поле картина меняется. Элементарные диполи – молекулы полярных ди-

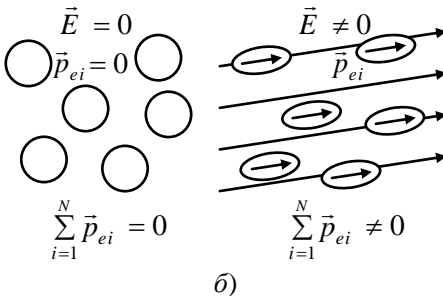
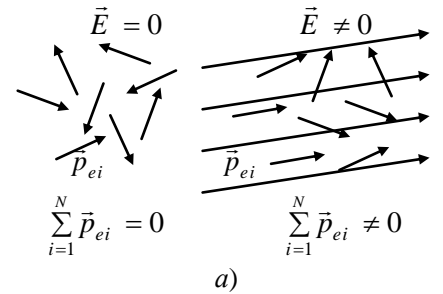


Рис. 11.4

электриков – в электрическом поле разворачиваются. Взаимодействие молекул друг с другом, играет роль сил трения, поэтому все молекулы сразу развернуться по полю не могут. Свой вклад в нарушение порядка дают и тепловые колебания, тем не менее, в области не слишком сильных полей можно считать, что возникающий суммарный дипольный момент единицы объёма прямо пропорционален величине внешнего электрического поля, то есть $\sum_{i=1}^N \vec{p}_{ei} \sim \vec{E}$, и, следовательно,

но, $\vec{P} \sim \vec{E}$ (рис. 11.4.a).

Под действием внешнего электрического поля молекулы неполярного диэлектрика повернуться не могут, однако они начинают деформироваться, «растягиваться», то есть сами становятся дипо-

лями (рис. 11.4.б). Чем больше \vec{E} , тем сильнее растяжение и, соответственно, дипольный момент каждой единицы объёма. Таким образом, и для неполярного диэлектрика $\sum_{i=1}^N \vec{p}_{ei} \sim \vec{E}$, или $\vec{P} \sim \vec{E}$.

Сама сумма дипольных моментов пропорциональна числу молекул ($\sum_{i=1}^N \vec{p}_{ei} \sim N$), следовательно, с учетом того, что $\frac{N}{\Delta V} = n$, где n – концентрация молекул, $\vec{P} \sim n \vec{E}$.

Последнее выражение можно записать в виде равенства, введя в него в виде сомножителей электрическую постоянную ϵ_0 и некоторый параметр α^* , определяемый свойствами диэлектрика (характером отдельных связей между атомами в молекулах, температурой и т. д.):

$$\vec{P} = \epsilon_0 \alpha^* n \vec{E}. \quad (11.4)$$

Произведение $\alpha = \alpha^* n$ называется **диэлектрической восприимчивостью** вещества, это безразмерная величина.

Таким образом, для не слишком сильных полей выполняется соотношение, полученное впервые П.Дебаем

$$\vec{P} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}. \quad (11.5)$$

11.1.3 О пьезоэффекте и сегнетоэлектричестве

У подавляющего большинства веществ, не проводящих электрический ток, диэлектрическая восприимчивость к не слишком велика и является постоянной величиной. Однако, нужно помнить, что она отражает свойства молекул вещества откликаться на воздействие внешнего электрического поля и поэтому может зависеть от величины \vec{E} (в случае электростатического поля), а также от его частоты и амплитуды (в случае переменного поля).

К поляризации диэлектрика могут привести и другие внешние воздействия, например, – механическое сжатие или растяжение (явление **электрострикции** и **пьезоэффект**), его нагрев (**пироэлектрический эффект**). Пример, иллюстрирующий влияние растяжения на фрагмент кристаллической решётки, представлен

на рис. 11.5: если в обычном состоянии (рис. 11.5.а) центры систем положительных отрицательных зарядов совпадали, и электрический дипольный момент системы был равен нулю, то деформация приводит к смещению атомов и появлению у данного фрагмента некоторого \vec{p}_e , тем большего, чем сильнее деформация (рис. 11.б).

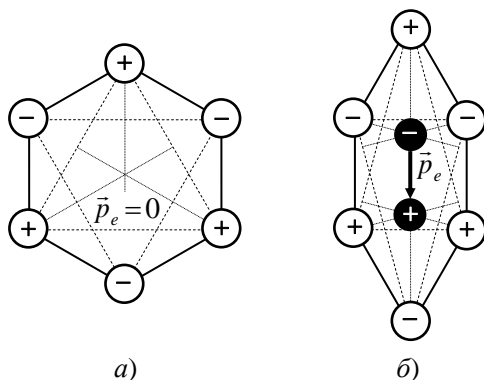


Рис. 11.5

Возможен и **обратный пьезоэффект**, при котором под действием электрического поля происходит механическая деформация образца (например, – кристалла кварца). Явление находит применение в устройствах, преобразующих механическое воздействие в электрический сигнал, например, – в датчиках, используемых при испытаниях на прочность деталей различных машин. Преобразование электрического сигнала в механическую деформацию позволяет создавать, в частности, миниатюрные наушники для плееров.

Между соседними молекулами диэлектрика может существовать настолько сильное взаимодействие, что все электрические диполи в пределах области, объединяющей сотни тысяч молекул, оказываются ориентированными в одном направлении. Такие области называются **доменами**; кривая зависимости $\vec{P}(\vec{E})$ у таких веществ имеет вид петли. Данные материалы (сегнетова соль $KNaC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$, титанат бария $BaTiO_3$ и др.) называются сегне-

тоэлектриками (или ферроэлектриками), их поведение в электрическом поле во многом аналогично поведению в магнитном поле ферромагнетиков, о которых мы будем говорить позднее в разделе «Магнитные свойства вещества».

11.1.4 Теорема Гаусса для электрического поля в диэлектрике

Как мы показали на предыдущих лекциях, теорема Гаусса позволяет вывести формулы для расчёта напряжённости электрического поля в вакууме. Но прямое использование данной теоремы для расчёта поля в диэлектрике осложняется необходимостью учёта вклада в суммарный заряд, охватываемый выбранной замкнутой поверхностью, всех зарядов молекул вещества, также охваченного этой поверхностью. Понятно, что в целом молекулы электронейтральны, но ведь при произвольном выборе поверхности часть из них будет «рассекаться» этой поверхностью на положительно и отрицательно заряженные части, вклад которых в общий заряд нам приходится учитывать.

Рассмотрим эту ситуацию подробнее на примере неполярного диэлектрика (рис. 11.6).

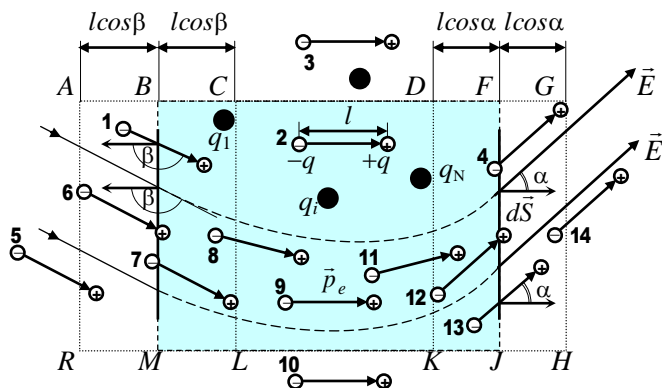


Рис. 11.6

Пусть такой материал, в который помещены N заряженных объектов (их заряды $q_1 \div q_N$ мы будем называть свободными),

находится в неоднородном электростатическом поле. В этом поле молекулы материала станут диполями, причём их дипольные моменты \vec{p}_{ei} в каждой точке будут параллельны силовым линиям поля. Окружим некоторую область вещества замкнутой поверхностью (на рисунке её сечение обозначено *BFJM* на сером фоне), и подсчитаем заряд, охватываемый этой поверхностью.

Во-первых, эта поверхность охватывает свободные заряды, сумма которых равна $\sum_{i=1}^N q_i$, и, во-вторых, поверхность охватывает заряды, связанные с молекулами-диполями. Часть диполей целиком находится в охватываемой области, и их суммарный вклад в общий заряд равен нулю (на рисунке это диполи 2, 8, 9, 11). Часть диполей лежит вне охватываемой области, и поэтому их заряд также учитывать не нужно (диполи 3, 5, 10, 14).

Вблизи малого участка dS (на рисунке расположен справа), в области которого поле можно считать практически однородным, суммарный заряд dQ , который соответствует диполям, лишь одной вершиной находящихся в охватываемой области (диполи 4, 12, 13), равен

$$dQ = -qndV, \quad (11.6)$$

где n – концентрация диполей (их общее число в единице объёма),

$dV = l \cdot \cos \alpha \cdot dS$ – объём вблизи площадки dS , занимаемый зарядом, который следует учитывать,

l – длина диполя,

α – угол между вектором \vec{E} и внешней нормалью к dS .

В формуле (11.6) учтено, что заряд, который мы учитываем, отрицателен (знак «минус»).

Согласно теореме Гаусса, интегрируя по всей замкнутой поверхности, получим:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \frac{\sum_{i=1}^N q_i}{\epsilon_0} + \frac{\oint dQ}{\epsilon_0}, \text{ или}$$

$$\oint_S \varepsilon_0 \vec{E} d\vec{S} = \sum_{i=1}^N q_i + \oint_S (-q) n l \cdot \cos \alpha dS.$$

Но произведение $ql = p_e$, причём $np_e = P$, где p_e – электрический дипольный момент молекулы, а P – поляризованность вещества. Более того, по определению скалярного произведения и учитывая, что площадке dS соответствует вектор $d\vec{S}$, направленный по вектору внешней нормали, можно записать:

$$\oint_S \varepsilon_0 \vec{E} d\vec{S} = \sum_{i=1}^N q_i - \oint_S P d\vec{S}.$$

Оба интеграла, входящие в эту формулу, берутся по одной и той же поверхности, поэтому их можно объединить:

$$\oint_S (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) d\vec{S} = \sum_{i=1}^N q_i.$$

Комбинация векторов напряжённости электрического поля и поляризованности, стоящая под знаком интеграла, обозначается символом \vec{D} и называется **вектором электрического смещения**:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (11.7)$$

Формулировка же теоремы Гаусса приобретает вид: **поток вектора электрического смещения через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме свободных зарядов, охватываемых этой поверхностью**,

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum_{i=1}^N q_i. \quad (11.8)$$

Очевидно, что в вакууме, где нет никаких дипольных моментов и $\vec{P} = 0$, формула приобретает уже знакомый нам вид (10.7).

На практике, описывая связь векторов \vec{D} и \vec{E} , обычно учитывают, что $\vec{P} = \varepsilon_0 \varkappa \vec{E}$, где \varkappa – диэлектрическая восприимчивость вещества (это мы показали на прошлой лекции). При этом

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \varkappa \vec{E} = (1 + \varkappa) \varepsilon_0 \vec{E}.$$

Сумма $1 + \varkappa$ обозначается буквой ε и называется **диэлектри-**

ческой проницаемостью вещества, то есть

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}. \quad (11.9)$$

Применяя теорему Гаусса, сформулированную для электрического поля в диэлектрике, и используя соотношение (11.9), можно вывести выражения для напряжённости электрического поля, создаваемого в этом диэлектрике равномерно заряженными сферой

(вне сферы $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$), нитью ($E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 r}$), плоскостью

($E = \frac{\sigma}{2\varepsilon\varepsilon_0}$). Студентам предлагается проделать это самостоятельно.

но.

11.2 МЕТАЛЛЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

11.2.1 Напряжённость и потенциал электрического поля уединённого проводника

Согласно классической теории электропроводности, главным отличием диэлектриков от металлов является наличие в последних газа свободных электронов, оторвавшихся от атомов кристаллической решётки и способных свободно перемещаться по всему объёму образца. Направленное движение электронов (электрический ток) возникает под влиянием силы, действующей со стороны электрического поля, но если тока нет, то это означает, что нет и силы, а, значит, внутри проводника не должно быть электрического поля, $E_{\text{внутр}} = 0$ (здесь $E_{\text{внутр}}$ – напряжённость электрического поля внутри проводника).

Принимая во внимание связь напряжённости электрического поля с потенциалом ($\vec{E} = -\text{grad}\varphi$), из условия, что $E_{\text{внутр}} = 0$, получаем, что внутри проводника потенциал должен быть везде одинаков, $\varphi = \text{const}$. Таким образом, в постоянном электрическом поле объём уединённого проводника и его поверхность эквипотенциальны.

Если проводник заряжен, заряды, отталкиваясь друг от друга, располагаются на его поверхности и больше не движутся (токов нет). Это означает, что вектор напряженности электрического поля не имеет компоненты, параллельной поверхности проводника, то есть силовые линии оказываются перпендикулярными этой поверхности. Распределение зарядов по поверхности может быть неравномерным: так, где есть выступы, плотность заряда σ (и напряжённость создаваемого ими поля) оказывается выше, вблизи впадин, углублений σ оказывается меньше.

Внесение даже нейтрального проводника в электрическое поле меняет картину силовых линий этого поля: свободные заряды, имеющиеся в проводнике, перераспределяются по его поверхности таким образом, чтобы компенсировать действие внешнего поля (и обеспечить выполнение условия $E_{\text{внутр}} = 0$), – рис. 11.2.

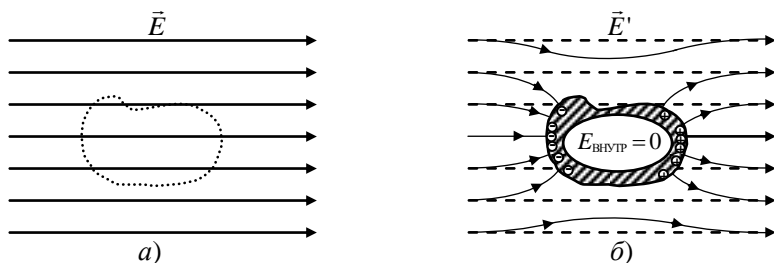


Рис. 11.7 Картина силовых линий электрического поля:
 а) до внесения в поле металлического образца (его контур обозначен прерывистой линией) и б) после внесения образца в поле (силовые линии до его внесения обозначены пунктиром)

Данный эффект положен в основу электростатической защиты электронного оборудования: если защищаемый от внешних полей прибор со всех сторон окружить металлическим корпусом, последний станет играть экранирующую роль: перераспределиться по его поверхности заряды обеспечат нулевую напряжённость электрического поля в объёме, ограниченном этим корпусом.

11.2.2 Электроёмкость уединённого проводника

Если уединённому (расположенному вдалеке от других заряженных и проводящих тел) проводнику сообщить электрический заряд q , то приобретаемый им при этом потенциал φ окажется связан с q прямой пропорциональной зависимостью: $\varphi \sim q$. Коэффициент пропорциональности

$$C = \frac{q}{\varphi} \quad (11.10)$$

называется **электроёмкостью** уединённого проводника, он не зависит ни от q , ни от φ , а определяется лишь свойствами *материала* окружающей среды (диэлектрика), *размером* проводника и его *формой* (напомним сокращенную аббревиатуру «**МРФ**»).

Поясним сказанное выводом формулы для электроёмкости уединённого металлического шара (или сферы) радиусом $R_{\text{ш}}$, находящегося в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ .

Сначала получим формулу для потенциала поверхности шара, с зарядом q . Как мы говорили ранее, это поверхность эквипотенциальна, силовые линии перпендикулярны к ней и при их мысленном продолжении проходят через центр шара (мысленном, поскольку поля внутри шара нет). В этом случае связь потенциала с напряжённостью удобно описывать не зависимостью $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$, а формулой, применяемой при движении вдоль силовой линии (в

вдоль прямой, исходящей из центра шара: $E = -\frac{d\varphi}{dr}$. Кроме того,

учтём, что напряжённость электрического поля вне равномерно

заряженного шара описывается выражением $E = \frac{1}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$.

При перемещении с поверхности шара на бесконечность должно выполняться соотношение:

$$\int_{\varphi_{\text{ш}}}^{\varphi_{\infty}} d\varphi = - \int_{R_{\text{ш}}}^{\infty} E dr = - \int_{R_{\text{ш}}}^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} \Big|_{R_{\text{ш}}}^{\infty}.$$

Поскольку на бесконечности потенциал мы приняли равным нулю ($\varphi_\infty = 0$), можно записать:

$$\varphi_{\text{ш}} = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_{\text{ш}}} . \quad (11.11)$$

Теперь пришла пора использовать определение электроёмкости: $C = \frac{q}{\varphi}$, и получить искомую формулу

$$C_{\text{ш}} = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R_{\text{ш}}. \quad (11.12)$$

Мы видим, что электроёмкость шара $C_{\text{ш}}$ действительно зависит от свойств материала окружающей среды (его ϵ), размера шара ($R_{\text{ш}}$) и его формы (мы явно воспользовались тем, что это именно шар, вспоминая формулу для напряжённости электрического поля).

В СИ электроёмкость измеряется в фарадах, **1 Ф = 1 Кл·В⁻¹**.

Формула 11.12 позволяет определить единицу измерения¹ электрической постоянной: $[\epsilon_0] = [C_{\text{ш}}]/[R_{\text{ш}}] = \text{Ф/м}$

11.2.3 Энергия уединённого заряженного проводника

Ранее мы получили, что потенциальная энергия $W_{\text{п}}$ точечного заряда q , находящегося в вакууме на расстоянии r от другого то-

чечного заряда Q , рассчитывается по формуле $W_{\text{п}} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$. Не-

трудно показать, что если заряды находятся в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ , формула принимает вид $W_{\text{п}} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{1}{r}$.

Обозначим один заряд q_1 , а второй, соответственно, q_2 . Тогда

¹ Напомним, что единицу измерения какой-либо физической величины обозначают символом этой величины, помещённым в квадратные скобки.

$$W_{\Pi} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0} \frac{1}{r} = \frac{1}{2} \left(\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} \right) = \\ = \frac{1}{2} q_1 \frac{q_2}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} + \frac{1}{2} q_2 \frac{q_1}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r} = \frac{q_1 \Phi_1}{2} + \frac{q_2 \Phi_2}{2}.$$

Здесь Φ_1 – потенциал поля, создаваемого первым зарядом в той точке, где находится заряд q_2 , и, наоборот, Φ_2 – потенциал поля, создаваемого зарядом q_2 в той точке, где находится заряд q_1 . Оба слагаемых равноценны: всё равно считать, который из зарядов находится в поле соседа, то есть энергия W_{Π} является общей потенциальной энергией данной системы зарядов.

Для потенциальной энергии системы, состоящей не из двух, а из N точечных зарядов $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_N$, можно записать:

$$W_{\Pi} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i \Phi_i}{2}. \quad (11.13)$$

Такой системой можно считать поверхность имеющего заряд q проводника, предварительно разбив её на N достаточно малых частей. Однако, в отсутствие электрического тока, все точки проводника имеют одинаковый потенциал Φ , следовательно,

$$W_{\Pi} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i \Phi_i}{2} = \frac{\Phi}{2} \sum_{i=1}^N q_i = \frac{q\Phi}{2},$$

Используя определение электроёмкости (11.10), выражение для энергии заряженного проводника, можно представить в виде:

$$W_{\Pi} = \frac{q\Phi}{2} = \frac{q^2}{2C} = \frac{C\Phi^2}{2}. \quad (11.14)$$

10.2.4 Электрические конденсаторы

Электрическим конденсатором называется система, состоящая из двух близко расположенных проводников. Чаще всего в электрических схемах конденсаторы соединены таким образом, что при накоплении на одном из них заряда $+q$, заряд на другом

оказывается равным $-q$. Если принять потенциал первого проводника равным Φ_1 , а потенциал второго, равным Φ_2 , то **электроёмкостью конденсатора** называется отношение

$$C = \frac{q}{\Phi_1 - \Phi_2}. \quad (11.15)$$

С учётом введённого ранее обозначения $U = \Phi_1 - \Phi_2$, выражение (11.15) приобретает вид:

$$C = \frac{q}{U}. \quad (11.16)$$

Так же, как и в случае уединённого проводника, электроёмкость конденсатора зависит от свойств материала окружающей среды (M), размеров проводников (P), и их формы (Φ), в том числе – от геометрии их взаимного расположения в пространстве; она также измеряется в фарадах.

Следует особо обратить внимание на то, что электроёмкостью обладает система из двух любых близко расположенных проводников, а не только тех, которые входят в состав используемых в радиосхемах конденсаторов. Центральная жила кабеля и его заземляющая оплётка – электрический конденсатор, провод линии электропередачи и земля – тоже и т. д. То, что такие системы обладают собственной электроёмкостью, необходимо учитывать при расчёте токов утечки (как известно, конденсатор проводит переменный электрический ток), возможных наводок паразитных сигналов в цепях работающей аппаратуры.

В общем случае расчёт электроёмкости системы из двух проводников может быть весьма затруднителен, поэтому на практике конденсаторы изготавливают из таких материалов, таких размеров и формы, для которых расчёт C достаточно прост. В качестве примера покажем, как рассчитывается электроёмкость **плоского конденсатора**: системы из двух параллельных разноимённо заряженных проводящих (металлических) плоских пластин, линейные размеры которых много больше расстояния d между ними. Площадь каждой из пластин S ; между пластинами находится изолирующая среда с диэлектрической проницаемостью ϵ .

Полагая, что в наших условиях каждую заряженную пластину можно считать плоскостью с поверхностной плотностью заряда $+\sigma$ и $-\sigma$ соответственно, запишем формулу для напряжённости

электрического поля в области между пластинами: $E = \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0}$ (сту-

дентам предлагалось вывести её самостоятельно по аналогии с формулой для напряжённости поля в области между двумя параллельными, находящимися в вакууме плоскостями $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$).

Ранее мы рисовали картину силовых линий внутри плоского конденсатора: они перпендикулярны пластинам, поэтому, выбрав ось координат X так, как это показано на рис. 11.8, и вспомнив связь E с φ , запишем, что вдоль силовой линии $E = - \frac{d\varphi}{dx}$.

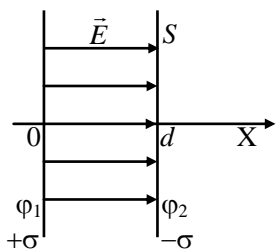


Рис. 11.8

Из этого выражения следует:

$$d\varphi = -E dx, \text{ или } \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = - \int_0^d E dx, \text{ то есть}$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = - \frac{\sigma}{\epsilon \epsilon_0} d.$$

По ходу дела отметим полученное нами и очень полезное в практическом отношении соотношение: для плоского конденсатора

$$E = \frac{U}{d}. \quad .17)$$

Поскольку $U = \varphi_1 - \varphi_2$, а $\sigma = q/S$, где q – заряд одной пластины, можно записать, что $U = \frac{q}{\epsilon \epsilon_0 S} d$. С учётом определения $C = q/U$, мы получаем искомую формулу для расчёта **ёмкости плоского конденсатора**:

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}. \quad (11.18)$$

Расчёт электроёмкости конденсаторов других конструкций (цилиндрических, сферических и т. д.) ведётся по аналогичному принципу: сначала выводим формулу для расчёта E (например, – с помощью теоремы Гаусса), затем, используя связь E с φ , находим разность $\varphi_1 - \varphi_2$ между проводниками-обкладками конденсатора, после чего применяем формулу-определение C .

Из формулы (11.18) можно легко получить единицу измерения электрической постоянной ε_0 (Ф/м).

В заключение отметим: в электрических схемах конденсаторы могут соединяться друг с другом и с другими элементами цепи разным образом. О способах соединения простейших элементов электрических цепей и о методах соответствующих расчётов будет рассказано на практических занятиях.

11.2.5 Энергия заряженного конденсатора.

Объёмная плотность энергии электрического поля

Ранее мы получили – см. (11.13), что для системы, состоящей из N точечных зарядов, $W_{\Pi} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i \varphi_i}{2}$. Учтем, что в конденсаторе

на одной обкладке, имеющей потенциал φ_1 , сосредоточен заряд $+q = \sum_{i=1}^N q_i$, а на обкладке с потенциалом φ_2 – заряд $-q = \sum_{i=1}^N (-q_i)$:

$$W_{\Pi} = \sum_{i=1}^N \frac{q_i \varphi_i}{2} = \frac{1}{2} \varphi_1 \sum_{i=1}^N q_i + \frac{1}{2} \varphi_2 \sum_{i=1}^N (-q_i) = \frac{1}{2} \varphi_1 q - \frac{1}{2} \varphi_2 q = \frac{qU}{2}.$$

Таким образом, *энергия заряженного конденсатора*

$$W_{\Pi} = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \quad (11.19)$$

Сделаем ещё один шаг: рассмотрим конкретный объект – плоский конденсатор, формулу для расчёта электроёмкости которого и выражение, связывающее E с U , мы получили выше.

$$W_{\Pi} = \frac{CU^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 SU^2}{2d} = \frac{\varepsilon_0 Sd}{2} \left(\frac{U}{d} \right)^2 = \frac{\varepsilon_0 Sd}{2} E^2.$$

Произведение Sd – это объём пространства между обкладками; поделив на него левую и правую части последнего равенства, получим выражение для **объёмной плотности энергии** (энергии, приходящейся на единицу объёма) электрического поля внутри плоского конденсатора:

$$w_{\text{эл}} = \frac{W_{\Pi}}{Sd} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} = \frac{ED}{2}. \quad (11.2)$$

На последнем этапе вывода формулы мы использовали полученное ранее выражение (11.9) для расчёта вектора электрического смещения $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$.

Полученное выражение справедливо не только для поля плоского конденсатора, но и для полей, создаваемых другими объектами. Более того, оно позволяет рассчитать объёмную плотность энергии не только электростатического, но и переменного электрического поля, например – распространяющейся в пространстве электромагнитной волны.

Некоторые примеры

- Электрический дипольный момент молекулы HCl равен $3,5 \cdot 10^{-30}$ Кл·м; у молекулы воды $p_e = 6,2 \cdot 10^{-30}$ Кл·м.
- Кварцевая пластина толщиной 1 мм под действием напряжения 100 В изменяет свою толщину на $2,3 \times 10^{-7}$ мм.
- Электроёмкость планеты Земля составляет примерно 700 мкФ.
- Для экранировки внешнего электростатического поля в обычных условиях достаточно слоя металла толщиной в один – два атомных слоя.

Вопросы для повторения

1. Что называется полярными и неполярными диэлектриками? Как молекулы этих диэлектриков ведут себя в электрическом поле?
2. Что называется поляризованностью вещества? В каких единицах поляризованность измеряется в СИ?
3. Какова связь поляризованности диэлектрика с напряжённостью внешнего электрического поля?
4. Что называется вектором электрического смещения? В каких единицах его величина измеряется в СИ?
5. Сформулируйте теорему Гаусса для электрического поля в диэлектрике; запишите соответствующую формулу и поясните смысл входящих в формулу величин.
6. Продемонстрируйте, как применяется теорема Гаусса для вычисления напряженности электрического поля в диэлектрике в случае полей, создаваемых: а) равномерно заряженной сферой; б) равномерно заряженной тонкой бесконечной прямой нитью; в) равномерно заряженной плоскостью; г) двумя параллельными разноимённо заряженными плоскостями.
7. Что называется электроёмкостью уединённого проводника? От чего она зависит? В каких единицах измеряется в СИ?
8. Выведите формулу для расчёта электроёмкости металлического шара.
9. Что называется электроёмкостью конденсатора? От чего она зависит? В каких единицах измеряется в СИ?
10. Выведите формулу для расчёта электроёмкости плоского конденсатора.
11. Сравните формулы для расчёта энергии заряженного конденсатора и заряженного уединённого проводника. Какие из этих формул имеют одинаковый вид?
12. Выведите формулу для расчёта плотности энергии электрического поля.

12.1 ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В МЕТАЛЛАХ*12.1.1 Основы классической теории электропроводности**12.1.2 Закон Ома в дифференциальной форме**12.1.3 Закон Ома для однородного участка цепи. Электрическое сопротивление*12.2 ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ*12.2.1 Электродвижущая сила. Закон Ома для неоднородного участка цепи. Закон Ома для замкнутой цепи**12.2.2 Соединение элементов цепи. Правила Кирхгофа**12.2.3 Закон Джоуля-Ленца**12.2.4 Достоинства и недостатки классической теории электропроводности**Некоторые примеры**Вопросы для повторения*12.1 ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В МЕТАЛЛАХ*12.1.1 Основы классической теории электропроводности*

Электрическим током называется направленное движение зарядов. В металлах – это движение электронов (частиц, имеющих отрицательный заряд), в растворах – ионов (как положительных, так и отрицательных), в газах – и электронов и ионов. Как правило, такое движение возникает под действием внешнего электрического поля (хотя заряды можно перемещать, например, просто механически), при этом если внешнее поле и заряд, перемещаемый им в единицу времени, не меняются, то такой ток называется постоянным.

Силой тока называется выражение вида

$$I = \frac{dq}{dt}, \quad (12.1)$$

где q – перемещаемый заряд, t – время, то есть сила тока – это скорость изменения заряда.

В случае постоянного электрического тока $I = \text{const}$.

В СИ единицей измерения силы тока является ампер, одна из семи основных единиц СИ (о том, что принимается за эталон одного ампера, мы поговорим позднее).

За направление тока выбрано направление движения положительных зарядов, то есть оно определяется направлением вектора напряженности внешнего электрического поля. Сказанное означает, что направление тока всегда противоположно направлению движения электронов и отрицательно заряженных ионов.

Сама сила тока I является скаляром, то есть ничего не говорит о направлении движения зарядов. Для пространственного описания этого движения вводится вектор **плотности тока** \vec{j} , направление которого совпадает с **дрейфовой скоростью** \vec{v}_d — скоростью направленного, обусловленного воздействием внешнего электрического поля (напряжённостью \vec{E}) движения положительных зарядов.

Если S — некоторая поверхность (не обязательно плоская), сквозь которую движутся заряды (рис. 12.1), то, по определению плотности тока, должно выполняться соотношение

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S}. \quad (12.2)$$

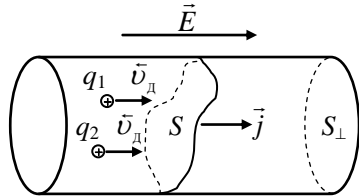


Рис. 12.1

Интеграл данного типа нам знаком, он означает, что сила тока является потоком вектора плотности тока через выбранную поверхность S . Если же поверхность — плоская и расположена перпендикулярно вектору \vec{j} , то она является поперечным сечением проводника, и, обозначив её площадь символом S_{\perp} , можно записать:

$$j = \frac{I}{S_{\perp}}. \quad (12.3)$$

Единицей измерения плотности тока является $\text{А} \cdot \text{м}^{-2}$.

Согласно классической теории электропроводности, ток в металлах возникает из-за движения электронов. Валентные электроны, оторвавшись от атомов, «обобществляются», в результате чего возникает система из практически неподвижных (испытывающих лишь тепловые колебания) положительно заряженных, регулярно расположенных в пространстве ионов металла и равномерно заполняющего весь объём кристалла отрицательно заряженного электронного газа. Внешнее электрическое поле заставляет двигаться электроны: возникает ток.

На примере хорошего проводника – меди – оценим концентрацию электронов в металле (их число в единице объёма). Нам известно, что в одном моле любого вещества содержится N_A (число Авогадро, $N_A \approx 6,02 \cdot 10^{23}$) структурных элементов (атомов, молекул), причём 1 моль меди имеет массу $\mu_{Cu} = 0,064$ кг. В одном кубическом метре Cu содержится n атомов; согласно справочным данным, масса 1 м³ меди (то есть её плотность) равна $8,9 \cdot 10^3$ кг. Составив пропорцию, получаем, что

$$n = N_A \frac{\rho_{Cu}}{\mu_{Cu}} = 6,02 \cdot 10^{23} \cdot \frac{8,9 \cdot 10^3}{0,064} \approx 8 \cdot 10^{28} \text{ (м}^{-3}\text{)}.$$

Будем считать, что каждый атом меди явился «поставщиком» в электронный газ одного электрона, тогда $n \approx 8 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}$ – это и концентрация электронов в кристалле. Для сравнения отметим, что при нормальных атмосферных условиях концентрация молекул в воздухе почти в 3000 раз меньше!

Подобно молекулам идеального газа, электроны находятся в постоянном тепловом движении. Скорость такого движения весьма высока и при комнатной температуре среднеквадратичная скорость этого движения составляет

$$v_{KB} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{9,1 \cdot 10^{-31}}} \approx 1,1 \cdot 10^5 \text{ (м/с)},$$

то есть в 14 раз выше первой космической скорости для Земли (в данной формуле k – постоянная Больцмана, T – термодинамическая температура, m – масса электрона). Однако эта скорость ха-

рактизует хаотическое движение электронов, а для протекания тока важна скорость их направленного движения (дрейфовая). У электронов в меди, например, в обычных условиях v_d составляет величину порядка 10^{-3} м/с, то есть

$$v_d \ll v_{KB}.$$

12.1.2 Закон Ома в дифференциальной форме

Во внешнем электрическом поле напряжённостью E на электрон (заряд e , масса m) в металле действует сила $F = eE$. Используя формулу второго закона Ньютона, для ускорения, приобретаемого электроном, запишем:

$$a = \frac{eE}{m}. \quad (12.4)$$

При равноускоренном движении за время τ скорость электрона достигает величины $v_d = a\tau$, причём она росла бы и дальше, но, согласно классической теории, электроны, как атомы идеального газа, постоянно сталкиваются с ионами металла, теряют скорость и меняют её направление (а для тока важна скорость именно направленного движения), поэтому вынуждены разгоняться вновь и вновь. Если обозначить среднюю длину свободного пробега электронов от одного столкновения до другого буквой λ , то время τ , соответствующее такому пробегу, можно выразить, как

$$\tau = \frac{\lambda}{v} \approx \frac{\lambda}{v_{KB}} = \frac{\lambda}{\sqrt{3kT/m}}. \quad (12.5)$$

Здесь учтено, что полная скорость v движения электронов в каждый момент времени складывается из дрейфовой и тепловой, причём $v_d \ll v_{KB}$, поэтому $v \approx v_{KB}$.

Таким образом, достижимое значение дрейфовой скорости составляет

$$v_d = a\tau = \frac{eE\lambda}{m\sqrt{3kT/m}} = \frac{eE\lambda}{\sqrt{3mkT}}. \quad (12.6)$$

Теперь получим выражение, связывающее дрейфовую скорость с плотностью тока j .

Пусть по участку цилиндрического проводника, имеющему длину l и площадь поперечного сечения S , идёт ток I . Представим себе, что в этом участке изначально находилось N свободных электронов, которые под действием электрического поля движутся со скоростью v_d вдоль проводника (в направлении, обратном направлению вектора \vec{E}). Электроны, находившиеся ближе к правому «дну» цилиндрического участка (рис. 12.2), покинут данный участок проводника раньше, остальные – позже.

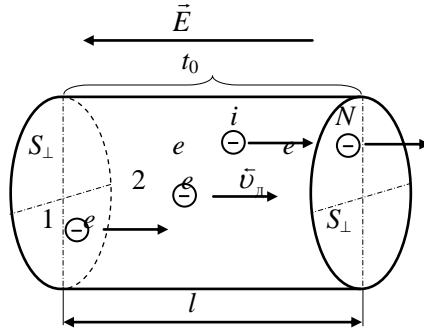


Рис. 12.2

Последними покинут данный участок электроны, находившиеся в начальный момент времени у левого «дна», то есть общее время, которое потребуется для того, чтобы весь заряд, равный eN , прошёл через данный участок, составляет $t_0 = l/v_d$. При этом сила тока может быть представлена, как

$$I = \frac{q}{t_0} = \frac{eN}{l/v_d} = \frac{eNv_d}{l} \cdot \frac{S_{\perp}}{S_{\perp}} = \frac{N}{S_{\perp}l} e v_d S_{\perp} = e n v_d S_{\perp},$$

и плотность тока j оказывается связанной с концентрацией n свободных носителей заряда (электронов) и с их дрейфовой скоростью соотношением

$$j = \frac{I}{S_{\perp}} = env_{\text{д}}. \quad (12.7)$$

Если заряд переносится носителями обоих знаков (ионами в растворах и в газах, электронами и дырками в полупроводниках и т. д.), то в итоговом выражении для плотности тока следует учесть вклад и тех и других:

$$j = |q_1|n_1v_{\text{д1}} + |q_2|n_2v_{\text{д2}}. \quad (12.8)$$

Вернувшись к формуле 12.6, выражение 12.7 для плотности тока в металле перепишем в виде

$$j = en \frac{eE\lambda}{\sqrt{3kTm}} = \frac{e^2 n \lambda}{\sqrt{3kTm}} E. \quad (12.9)$$

Множитель, стоящий перед напряжённостью электрического поля E , принято обозначать буквой σ ; он называется **удельной электропроводностью**. Очевидно, его величина определяется свойствами проводника (концентрацией в нём носителей заряда, их длиной свободного пробега λ); σ зависит также от температуры. В итоге, с учётом того, что в нашем случае вектор \vec{j} направлен туда же, куда и вектор \vec{E} , мы получаем формулу, которая выражает **закон Ома в дифференциальной форме**:

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (12.10)$$

12.1.3 Закон Ома для однородного участка цепи. Электрическое сопротивление

Учтём теперь, что в ситуации, изображённой на рис. 12.2, сила тока $I = jS_{\perp}$, а также то, что в однородном электрическом поле внутри проводника вдоль силовой линии

$$E = -d\varphi/dl = (\varphi_1 - \varphi_2)/l = U/l.$$

Исходя из сказанного, нетрудно получить, что $I = \frac{\sigma S}{l} U$. Нам

осталось ввести обозначение $\frac{\sigma S}{l} = \frac{1}{R}$, чтобы получить формулу, известную, как **закон Ома для однородного участка цепи**:

$$I = \frac{U}{R}. \quad (12.11)$$

Согласно этому закону, **сила тока I на однородном участке цепи (не содержащем источников э. д. с.) прямо пропорциональна разности потенциалов U на концах этого участка и обратно пропорциональна электрическому сопротивлению R этого участка** – рис. 12.3.а). Элемент цепи, обладающий лишь электрическим сопротивлением, называется **резистором** и на схемах изображается в таком масштабе, как это представлено на рис. 12.3.б). На этом же рисунке показано, как на схемах изображается электрический конденсатор (рис. 12.3.в).

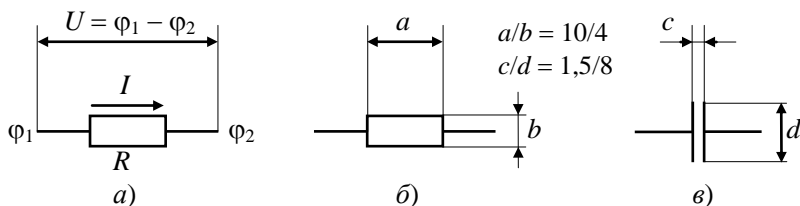


Рис. 12.3

Таким образом, электрическое сопротивление по определению вводится, как коэффициент пропорциональности между силой тока и разностью потенциалов:

$$R = \frac{U}{I}. \quad (12.12)$$

Но $R = \frac{l}{\sigma S}$, и, вводя обозначение $\rho = \frac{1}{\sigma}$ (данный коэффициент носит название **удельного сопротивления**), запишем:

$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (12.13)$$

Полученная формула позволяет сделать вывод о том, что электрическое сопротивление зависит от материала (M) проводника – то есть от удельного сопротивления ρ , от его размера (P) – то есть от l и S , и от его формы (Φ): в частности, выражение (12.13) получено нами для проводника-цилиндра, рис. 12.2.

Электрическое сопротивление измеряется в омах, $1 \text{ Ом} = 1 \text{ В} \cdot \text{А}^{-1}$.

В заключение данного параграфа заметим, что из формул 12.9 – 12.13 следует, что удельное сопротивление металла должно зависеть от температуры, будучи пропорциональным \sqrt{T} :

$$\rho = \frac{\sqrt{3kTm}}{e^2 n \lambda}. \quad (12.14)$$

На деле это не так, но то, с чем может быть связано расхождение между выводами теории и данными эксперимента, мы обсудим позднее.

12.2 ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

12.2.1 Электродвижущая сила. Закон Ома для неоднородного участка цепи. Закон Ома для замкнутой цепи

Если бы электрический ток создавался только теми электронами, которые оторвались от атомов кристаллической решётки проводника, то спустя некоторое время они должны были бы покинуть металл, а ток – закончиться. Для существования постоянного тока необходимо непрерывно восполнять их число, для чего требуется выполнять работу против сил электрического поля, которые стремятся выровнять потенциальную энергию системы. Разделять заряды, поддерживая разность потенциалов на концах проводника, могут силы неэлектрической природы, связанные с механическими, химическими явлениями, фотоэффектом и т.д. **Силы, осуществляющие перемещение электрических зарядов против сил электростатического поля, называются сторонними.** Работа $A_{\text{СТ}}$ таких сил тем больше, чем больше перенесённый заряд q . Отношение работы сторонних сил по перенесению

заряда к величине этого заряда называется электродвижущей силой (э. д. с.) и обозначается буквой \mathcal{E} :

$$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{ст}}}{q}. \quad (12.15)$$

В СИ э. д. с., как и потенциал, измеряется в вольтах.

Устройство, осуществляющее разделение зарядов, называется источником э. д. с., примерами таких источников могут служить электрофорные машины, разделяющие заряд с помощью сил трения, химические батареи и аккумуляторы, работа которых связана с протеканием внутри них химических реакций, солнечные батареи (разделять заряд в них помогает свет).

На рис. 12.4 показано, как на электрической схеме принято изображать химический источник э. д. с. (длинная черта означает положительный электрод, короткая – отрицательный). Существенно, что такой источник обладает

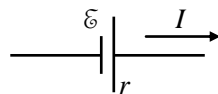


Рис. 12.4

внутренним сопротивлением r , которое зависит от материала (M) электролита и его температуры, размеров (P), формы (Φ) и взаимного расположения элементов конструкции устройства. Химические реакции, приводящие к разложению электролита на ионы внутри источника, в течение достаточно долгого времени могут поддерживать положительный потенциал на одном из электродов и отрицательный – на другом, обеспечивая, тем самым постоянство электрического тока в цепи.

Участок цепи, содержащий источник э. д. с., называется **неоднородным**; пример такого участка изображён на рис. 12.5. Предполагается, что к клеммам 1 и 2 подключены другие элементы цепи (на рисунке они не изображены), что обеспечивает прохождение на участке 1-2 постоянного электрического тока (на рисунке – от точки 1 к точке 2).

На каждый движущийся заряд на данном участке цепи действуют силы электрического поля; их работа $A_э = q(\varphi_1 - \varphi_2)$, поскольку на рисунке ток идёт от точки с по-

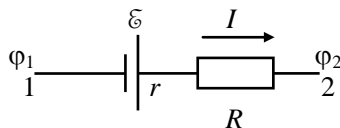


Рис. 12.5

тенциалом φ_1 к точке с потенциалом φ_2 . Кроме этого на участке действуют сторонние силы, совершающие свою работу $A_{\text{СТ}} = \mathcal{E}q$. Источник включён так, что сторонние силы на данном участке сонаправлены с электрическими; общая работа $A = A_{\mathcal{E}} + A_{\text{СТ}} = q(\varphi_1 - \varphi_2) + \mathcal{E}q$. Если бы батарея была включена «наоборот», общая работа рассчитывалась бы, как $A = q(\varphi_1 - \varphi_2) - \mathcal{E}q$, и это даёт возможность записать:

$$\frac{A}{q} = \frac{A_{\mathcal{E}}}{q} \pm \frac{A_{\text{СТ}}}{q} = \varphi_1 - \varphi_2 \pm \mathcal{E}.$$

Ранее, в отсутствие источников э. д. с., разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ мы обозначали символом U , теперь

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 \pm \mathcal{E} \quad (12.16)$$

и это уже не разность потенциалов, а **падение напряжения** на участке 1-2. Принимая во внимание, что общее сопротивление $R_{\text{общ}}$ данного участка складывается из сопротивлений последовательно соединённых батареи (r) и резистора (R), то есть $R_{\text{общ}} = R + r$, можно записать **закон Ома для неоднородного (содержащего источник э. д. с.) участка цепи**:

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 \pm \mathcal{E}}{R + r}. \quad (12.17)$$

В этой формуле φ_1 – потенциал той точки, откуда идёт ток, а φ_2 – точки, куда он идёт; «плюс» или «минус» перед \mathcal{E} выбирается с учётом того, помогает ли источник силам электрического поля (+), или мешает (–).

Для замкнутой (полной) цепи – рис. 12.6 – точки 1 и 2 фактически совпадают, $\varphi_1 = \varphi_2$, то есть можно записать:

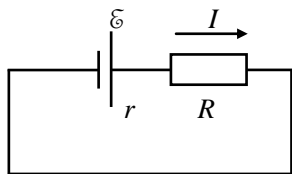


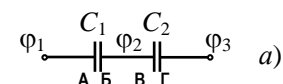
Рис. 12.6

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \quad (12.18)$$

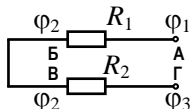
Мы получили известную из школьной программы физики формулу закона Ома для замкнутой цепи.

12.2.2 Соединение элементов цепи Правила Кирхгофа

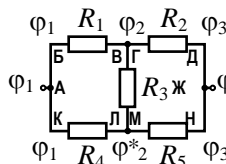
Два элемента цепи (резистора, конденсатора, источника э. д. с. и др.) можно соединить друг с другом или последовательно, или параллельно. Если на участке цепи элементов больше, чем два, их общее соединение может оказаться более сложным, но вполне вероятно, что хотя бы часть из элементов (или их комбинаций)



а)



б)



в)

Рис. 12.7

соединена друг с другом каким-либо из этих способов. Расчёт значений падения напряжения на отдельных элементах электрических цепей, токов идущих через эти элементы (или зарядов на конденсаторах) в случае данных двух типов соединений достаточно прост, поэтому их нужно уметь выявлять, то есть знать определения, какое соединение является последовательным, а какое – параллельным. При этом следует помнить, что на электрических схемах точки, имеющие одинаковый потенциал, соединяются тонкой линией, вдоль которой значение потенциала, естественно, также не меняется.

Последовательное соединение

При **последовательном соединении** двух элементов цепи потенциал на одном из выводов первого элемента равен потенциалу на одном из выводов второго элемента, причём к участку цепи с этим потенциалом не подключено больше никаких других элементов цепи.

Рассмотрим несколько примеров.

На рис. 12.7.а) пластина Б конденсатора C_1 соединена с пластиной В конденсатора C_2 ; в точке соединения (на участке БВ) никаких других подключений нет: конденсаторы соединены последовательно.

Аналогичная схема изображена на рис 12.7.б): вывод Б резистора R_1 соединён в выводом В резистора R_2 , и в точке их соединения (на участке БВ) других подключений не имеется.

На схеме, изображённой на рис. 12.7.в), последовательно соединённых резисторов нет вовсе: так, например, хотя вывод В резистора R_1 и соединён с выводом Г резистора R_2 , но в точке их соединения (на участке ВГ) есть добавочное подключение (резистора R_3). По той же причине не является последовательным соединение резисторов R_4 и R_5 ¹.

Параллельное соединение

При **параллельном соединении** двух элементов цепи потенциалы на их выводах попарно равны.

На рис. 12.8.а) конденсаторы C_1 и C_2 соединены параллельно, так как потенциалы на их выводах попарно равны (на Б и Д потенциал φ_1 , на В и Е – потенциал φ_3).

На схеме 12.8.б) вывод В резистора R_1 имеет тот же потенциал (φ_1), что и вывод Г резистора R_2 , а вывод Б резистора R_1 – тот же потенциал (φ_2), что и вывод Д резистора R_2 , следовательно, резисторы соединены параллельно.

Нетрудно убедиться в том, что в общем случае (когда $\varphi_2 \neq \varphi_2^*$) нет параллельно соединённых резисторов и на рис. 12.7.в).

Совокупность двух последовательно или параллельно соединённых резисторов (конденсаторов, источников э. д. с. и т. д.) можно представить в виде одного элемента цепи, параметры которого можно рассчитать, используя соответствующие определения.

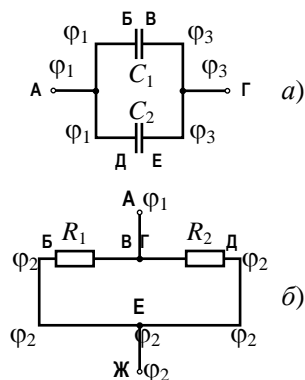


Рис. 12.8

¹ Вообще говоря, при определённом соотношении между R_1 , R_2 , R_4 и R_5 (например, при $R_1 = R_2 = R_4 = R_5$) возможна ситуация, когда ток через резистор R_3 не идёт, и тогда резисторы R_1 и R_2 (а также R_4 и R_5) можно считать включёнными последовательно.

Пример 12.1. Последовательное соединение конденсаторов

Участок АБ, включающий в себя правую пластину конденсатора C_1 , левую пластину конденсатора C_2 и соединяющий их провод АБ (рис. 12.9.а) можно считать отдельным проводником, никак не соединённым с другими элементами цепи.

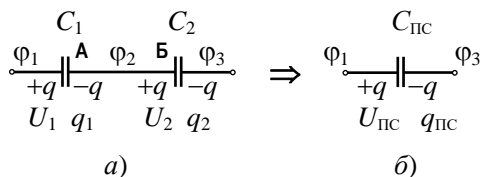


Рис. 12.9

Это означает, что если изначально он был электронейтральным, то после того, как на пластине А накопится заряд $-q$, компенсирующий заряд $+q$ на левой пластине этого же конденсатора, на другом конце проводника (на пластине Б второго конденсатора) останется заряд также $+q$: в целом участок АБ останется электронейтральным (по закону сохранения электрического заряда).

С учётом этого, а также используя обозначения

$$U_1 = \varphi_1 - \varphi_2, \quad U_2 = \varphi_2 - \varphi_3, \quad U_{\text{пс}} = \varphi_1 - \varphi_3$$

и определение электроёмкости конденсатора

$$C = \frac{q}{U},$$

можно записать:

$$\begin{aligned}
 q_{\text{пс}} &= q_1 = q_2 = q, \\
 U_{\text{пс}} &= \varphi_1 - \varphi_3 = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3) = U_1 + U_2, \\
 \frac{1}{C_{\text{пс}}} &= \frac{U_{\text{пс}}}{q} = \frac{U_1 + U_2}{q} = \frac{U_1}{q} + \frac{U_2}{q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}.
 \end{aligned}$$

Итак, при последовательном соединении конденсаторов для общей разности потенциалов $U_{\text{пс}}$, заряда $q_{\text{пс}}$ и электроёмкости $C_{\text{пс}}$ на данном участке (рис. 12.9.б) можно записать:

$$q_{\text{пс}} = q_1 = q_2, \quad U_{\text{пс}} = U_1 + U_2, \quad \frac{1}{C_{\text{пс}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (12.19)$$

Пример 12.2. Последовательное соединение резисторов (рис. 12.10)

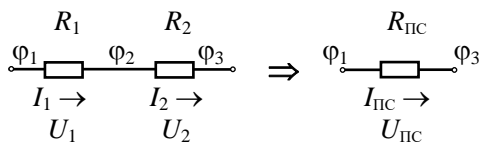


Рис. 12.10

По закону сохранения электрического заряда, какой заряд войдёт в каждый из резисторов, такой же из него и выйдет, то есть токи I_1 и I_2 должны быть одинаковыми ($I_1 = I_2 = I$). С учётом того, что $U_1 = \varphi_1 - \varphi_2$, $U_2 = \varphi_2 - \varphi_3$, $U_{\text{Пс}} = \varphi_1 - \varphi_3$, а также используя определение электрического сопротивления (согласно которому $R = U/I$), запишем:

$$I_{\text{Пс}} = I_1 = I_2 = I,$$

$$U_{\text{Пс}} = \varphi_1 - \varphi_3 = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3) = U_1 + U_2,$$

$$R_{\text{Пс}} = U_{\text{Пс}}/I_{\text{Пс}} = (U_1 + U_2)/I = U_1/I + U_2/I = R_1 + R_2.$$

В итоге при последовательном соединении резисторов:

$$I_{\text{Пс}} = I_1 = I_2, \quad U_{\text{Пс}} = U_1 + U_2, \quad R_{\text{Пс}} = R_1 + R_2. \quad (12.20)$$

Пример 12.3. Параллельное соединение конденсаторов (рис. 12.11)

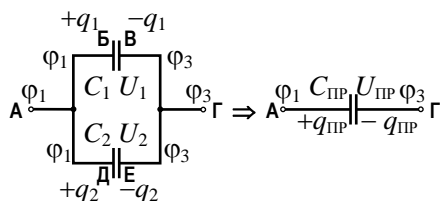


Рис. 12.11

Поскольку весь участок БАД является единым проводником (состоящим из двух пластин Б и Д и соединяющего их провода), общий заряд этого участка равен сумме зарядов q_1 и q_2 . Следовательно,

$$q_{\text{Пс}} = q_1 + q_2$$

$$U_{\text{Пс}} = \varphi_1 - \varphi_3 = U_1 = U_2 = U$$

$$C_{\text{Пс}} = q_{\text{Пс}}/U_{\text{Пс}} = (q_1 + q_2)/U = q_1/U + q_2/U = C_1 + C_2.$$

Таким образом, при параллельном соединении конденсаторов

$$q_{\text{ПР}} = q_1 + q_2, \quad U_{\text{ПР}} = U_1 = U_2, \quad C_{\text{ПР}} = C_1 + C_2. \quad (12.21)$$

Пример 12.4. То, что при параллельном соединении резисторов

$$I_{\text{ПР}} = I_1 + I_2, \quad U_{\text{ПР}} = U_1 = U_2, \quad \frac{1}{R_{\text{ПР}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}, \quad (12.22)$$

студентам предлагается убедиться самостоятельно.

В общем случае для расчёта значений напряжения и силы тока на отдельных участках цепи можно использовать правила Кирхгофа, которые применимы не только в цепях постоянного, но и в цепях переменного токов.

Согласно **первому правилу Кирхгофа алгебраическая сумма токов в узле электрической цепи равна нулю:**

$$\sum_{i=1}^N I_i = 0. \quad (12.23)$$

Слова «алгебраическая сумма» означают, что значения тех токов I_i , которые входят в узел, в формуле (12.23) нужно брать с одним знаком, тех, которые выходят из узла, – с противоположным. Так, например, для узла Б на рис. 12.12: $I_3 - I_1 + I_2 + I' = 0$, для узла Ж, соответственно, $I_1 - I_3 - I_5 = 0$.

Нетрудно заметить, что в основе первого правила Кирхгофа лежит закон сохранения электрического заряда.

Второе правило Кирхгофа относится к замкнутым участкам электрической схемы (на рис. 12.12 это, например, участки БВГДБ, АБДЕЖИА и др.). Выбирая направление обхода каждого такого участка (например, по часовой стрелке) и учитывая те токи, которые совпадают с направлением обхода, как положительные, а противоположные им, как отрицательные, можно записать выражение, отражающее суть закона.

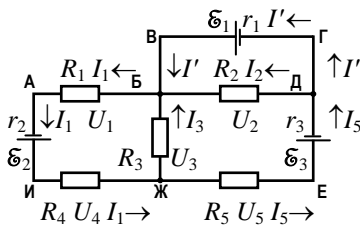


Рис. 12.12

Второе правило Кирхгофа: сумма падений напряжения на элементах замкнутого участка цепи равна алгебраической сумме э. д. с. на этом участке:

$$\sum_{i=1}^N I_i R_i = \sum_{j=1}^K \mathcal{E}_j. \quad (12.24)$$

Фраза «алгебраическая сумма э. д. с.» означает, что э. д. с. тех источников, которые включены так, чтобы помочь прохождению тока в направлении обхода, при суммировании нужно брать со знаком «плюс», а тех, которые мешают – со знаком «минус».

В частности, для участка БВГДБ формула записывается так:

$$-I' r_1 + I_2 R_2 = -\mathcal{E}_1.$$

Для участка АБДЕЖИА

$$-I_1 R_1 - I_2 R_2 - I_5 R_3 - I_5 R_5 - I_1 R_4 - I_1 r_2 = \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2.$$

Нетрудно заметить, что если цепь сама по себе представляет собой лишь один замкнутый контур, второе правило Кирхгофа превращается в формулировку закона Ома для замкнутой (полной) цепи.

Подробнее правила Кирхгофа и приёмы работы с ними рассматриваются в курсе «Теоретические основы электротехники».

12.2.3 Закон Джоуля-Ленца

Как мы уже говорили ранее, перемещая заряды, силы электрического поля совершают работу $A = q(\varphi_1 - \varphi_2)$. Если перемещение заряда означает протекание по проводнику постоянного электрического тока, то, по определению силы тока, $q = I\Delta t$, где Δt – время, за которое совершается работа.

Совершение работы сопровождается изменением энергии проводника (его нагревом, протеканием химических реакций в электролите). Если вся работа идёт только на нагрев однородного участка цепи (преобразуется в тепловую, внутреннюю энергию резистора), то для выделяющегося количества теплоты Q можно записать, что $Q = I(\varphi_1 - \varphi_2)\Delta t$, а с учётом закона Ома для такого участка:

$$Q = I^2 R \Delta t. \quad (12.25)$$

Данное соотношение носит название *закона Джоуля-Ленца*.

Если ток – не постоянный, то эту же формулу можно записать для малого промежутка времени dt :

$$dQ = I^2 R dt. \quad (12.26)$$

Тогда тепло, выделившееся за время t , рассчитывается, как

$$Q = \int_0^t I^2 R dt. \quad (12.27)$$

С учётом того, что $I = jS$, где j – плотность тока, S – площадь поперечного сечения проводника (для простоты будем считать проводник однородным цилиндром с удельным сопротивлением ρ и длиной l , для которого $R = \rho l/S$)

$$dQ = (jS)^2 \rho \frac{l}{S} dt = j^2 \rho S l dt. \quad (12.28)$$

Произведение Sl – объём проводника V , поэтому $\frac{dQ}{dt} \frac{1}{V} = j^2 \rho$.

Последнее выражение (количество теплоты, выделяющейся в единице объёма в единицу времени) называют удельной тепловой мощностью тока $Q_{\text{уд}}$, а формулу

$$Q_{\text{уд}} = j^2 \rho \quad (12.29)$$

– *законом Джоуля-Ленца, записанным в дифференциальной форме*.

12.2.4 Достоинства и недостатки классической теории электропроводности

То, что, пользуясь представлениями классической теории электропроводности, рассматривающей совокупность электронов в металле как газ свободных электронов, ускоряемых электрическим полем, нам удалось вывести основные законы постоянного тока, которые подтверждаются экспериментом, является несомненным достоинством теории. Если бы теории была неверна,

вряд ли можно было бы рассчитывать работу электрических схем, конструировать электрические приборы, комплексы и системы. Становление современной цивилизации невозможно представить без использования электричества, и роль классической теории в этом процессе трудно переоценить. Тем не менее, уже в начале XX века накопился комплекс проблем, вопросов, на которые эта теория ответа дать не могла. Среди таких вопросов (и в этом – недостаток классической теории) отметим следующие три:

- Как мы отметили на прошлой лекции, согласно классической теории температурная зависимость удельного сопротивления должна иметь вид:

$$\rho = \frac{\sqrt{3kTm}}{e^2 n \lambda}, \quad \text{или} \quad \rho \sim \sqrt{T}.$$

На практике, однако, в диапазоне температур, близких к комнатным, для многих металлов данная зависимость линейна (то есть $\rho \sim T$). С чем это может быть связано, классическая теория ответа не даёт.

- При низких (близких к 0 К) температурах отличие теории от данных эксперимента становится особенно явным: многие металлы при температуре, меньшей некоторого значения (зависящего от природы металла и ряда других условий) переходят в сверхпроводящее состояние. Их сопротивление становится не просто малым, оно исчезает вовсе, наблюдается явление **сверхпроводимости**. Данное явление классическая теория объяснить не в состоянии.

- Существует класс материалов, которые во многом ведут себя как металлы: плавятся при нагреве, обладают характерным металлическим блеском, пластичны, проводят электрический ток и т.д. Однако, если повышение температуры обычного металла сопровождается увеличением его сопротивления, то у таких материалов рост T приводит к уменьшению ρ . Эти материалы называются полупроводниками, какова природа процессов, которые объясняют подобное поведение подобных объектов, классическая теория описать также не может.

Ответы на эти и ряд других вопросов физикам удалось дать

только после создания квантовой теории, с основными положениями которой мы познакомимся позднее.

Некоторые примеры

- В обычных электробытовых приборах сила тока, как правило, не превышает 1 А – 2 А. В сварочном аппарате сила тока может составлять 20 А – 1000 А. Сверхпроводящие обмотки электромагнитов Большого адронного коллайдера рассчитаны на токи выше 10^4 А. При магнитных бурях в верхних слоях приполярных областей атмосферы Земли возникают токи силой более 10^5 А.

- Для человека смертельной считается сила тока 100 мА. При казни на электрическом стуле через человека пропускают ток до 6 А.

- Решая задачи о зарядке аккумуляторов, следует помнить, что при зарядке совершается работа против сторонних сил, поэтому, применяя формулу закона Ома для неоднородного участка цепи, перед значком \mathcal{E} . д. с. следует писать знак «минус».

- Важной характеристикой аккумулятора является его ёмкость, которая совсем не то же самое, что электроёмкость конденсатора: она измеряется в ампер-часах и даёт информацию о накопленном данным устройством заряде и времени, в течение которого этот заряд может быть израсходован.

- В вагонах поезда используются щелочные и кислотные аккумуляторные батареи. Э. д. с. кислотного аккумулятора равна 2,1 В – 2,15 В, щелочного – около 1,45 В (в настоящее время в пассажирских вагонах используются в основном щелочные аккумуляторы).

- Электрическая мощность, расходуемая на работу наушников плеера, составляет около 0,1 Вт; мощность одного двигателя электровоза типа ВЛ10 составляет 650 Вт.

- Температура T_C перехода в сверхпроводящее состояние алюминия составляет 1,2 К, у цинка $T_C = 0,9$ К, медь, золото, серебро в сверхпроводящее состояние не переходят. Для сравнения

температура кипения жидкого гелия – хладагента, используемого для получения низких температур, при нормальном атмосферном давлении составляет 4,2 К, то есть им охладить цинк и алюминий до перехода в сверхпроводящее состояние невозможно.

- Потоки заряженных частиц, испускаемых Солнцем в периоды вспышек, достигая атмосферы Земли, отклоняются её магнитным полем и формируют токи, которые текут в приполярных широтах на высоте около 100 км. Сила таких токов составляет до 10^5 А. Ионизация газа сопровождается его свечением: возникает «северное сияние». При особенно сильных магнитных бурях северное сияние может наблюдаться даже на широте Москвы (ноябрь 2008 г.).

- Некоторые значения удельного электрического сопротивления: серебро: $\rho = 0,016 \cdot 10^{-6}$ Ом·м; никром: $\rho = 1,1 \cdot 10^{-6}$ Ом·м; 10-процентный раствор поваренной соли: $\rho = 83 \cdot 10^{-3}$ Ом·м; вода дистиллированная: до 10^4 Ом·м; резина: $\rho = 10^{12}$ Ом·м; сухой воздух: до 10^{18} Ом·м.

- Стоимость 1 кВт·час (или $3,6 \cdot 10^6$ Дж) электрической энергии в Москве в 2021 году составляла около 5 руб. Поскольку среднемесячное потребление электроэнергии семьёй, живущей в трёхкомнатной квартире, равно примерно 500 кВт·час, семейные расходы только на оплату электроэнергии за год составили около 30000 руб.

Вопросы для повторения

1. Что называется силой тока, плотностью тока, дрейфовой скоростью носителей заряда?
2. На данной лекции говорилось о четырёх вариантах закона Ома. Перечислите соответствующие варианты.
3. Из формулы закона Ома для неоднородного участка цепи получите формулу закона Ома для замкнутой цепи.
4. Что называется электродвижущей силой? В каких единицах она измеряется в СИ?
5. Какие силы называются сторонними? Приведите примеры.

6. Что называется падением напряжения на участке цепи? В каком случае падение напряжения и разность потенциалов на участке цепи совпадают?

7. Что называется электрическим сопротивлением? В каких единицах оно измеряется в СИ? От чего зависит электрическое сопротивление.

8. Выведите формулы, связывающие общую силу тока, напряжение и электрическое сопротивление системы из двух резисторов, соединённых: а) параллельно; б) последовательно, с известными значениями силы тока, напряжения и электрического сопротивления для каждого из этих резисторов.

9. Выведите формулы для расчёта заряда, напряжения и электроёмкости системы, состоящей из двух конденсаторов, соединённых: а) параллельно; б) последовательно, с известными значениями заряда, напряжения и электроёмкости для каждого из этих конденсаторов.

10. Пользуясь определениями, выведите формулы для расчёта силы тока, э. д. с. и электрического сопротивления системы из двух батарей, соединённых: а) параллельно; б) последовательно, с известными значениями силы тока, э. д. с. и электрического сопротивления для каждой из этих батарей.

11. Сформулируйте правила Кирхгофа и приведите примеры их применения.

12. Запишите формулы закона Джоуля-Ленца: а) в обычном виде; б) в дифференциальной форме.

13. В чём заключаются достоинства и недостатки классической теории электропроводности?

Лекция 13 ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК. ЧАСТЬ II МАГНИТНОЕ ПОЛЕ. ЧАСТЬ I

13.1 ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ВАКУУМЕ, В ЖИДКОСТЯХ И В ГАЗАХ

13.1.1 Явление термоэлектронной эмиссии. Вакуумный диод

13.1.2 Электрический ток в жидкостях. Явление электролиза

13.1.3 Электрический ток в газах. Виды газового разряда

13.1 ИНДУКЦИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

13.2.1 Магнитное поле. Силовые линии. Сила Ампера. Вектор магнитной индукции

13.2.2 Взаимодействие параллельных токов. Ампер – основная единица СИ

13.2.3 Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца. Ускорители заряженных частиц

13.2.4 Эффект Холла. Использование эффекта Холла для определения знака и концентрации носителей заряда

Некоторые примеры

Вопросы для повторения

13.1 ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В ВАКУУМЕ, В ЖИДКОСТЯХ И В ГАЗАХ

13.1.1 Явление термоэлектронной эмиссии. Вакуумный диод

Термоэлектронной эмиссией называется явление испускания электронов нагретыми металлами.

Электронный газ в металле характеризуется средней кинетической энергией хаотического (теплого) движения отдельных электронов. Однако при комнатной температуре этой энергии недостаточно для совершения работы против сил притяжения со стороны ионов кристаллической решётки, поэтому электроны не могут вырваться из металла. Нагрев приводит к повышению средней кинетической энергии электронов, при этом часть из них становится способна преодолеть силы притяжения со стороны ионов решетки и вылететь из металла.

Явление термоэлектронной эмиссии лежит в основе работы вакуумных электронных ламп, простейшей из которых является вакуумный диод.

При нагреве катода (отрицательного электрода, см. рис. 13.1.а) электроны начинают вылетать из него; если же между катодом и

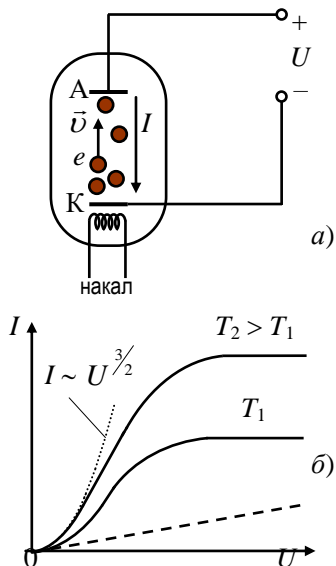


Рис. 13.1

температуры катода описывается формулой Ричардсона-Дэшмена:

$$j = BT^2 e^{-\frac{A_{\text{вых}}}{kT}}. \quad (13.1)$$

В этой формуле $A_{\text{вых}}$ – работа выхода (минимальная работа, которую должен совершить электрон с тем, чтобы преодолеть силы притяжения со стороны ионов кристаллической решётки и вылететь из металла). Величина $A_{\text{вых}}$ зависит, прежде всего, от природы металла и от наличия в нём примесей, её значение можно найти в соответствующих таблицах. Коэффициент B отражает

зависимость плотности тока насыщения от особенностей конструкции лампы, размеров и формы электродов.

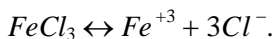
Нетрудно заметить, что вакуумный диод – пример элемента электрической цепи, не подчиняющийся закону Ома: его вольт-амперная характеристика нелинейна (если бы для диода закон Ома, согласно которому $I \sim U$ выполнялся, то график вольтамперной характеристики имел бы вид, изображённый на рис. 13.1.б пунктиром). Во-первых, в отличие от резистора, диод пропускает ток лишь в одном направлении (когда катод имеет отрицательный потенциал). Это свойство диода используется в радиотехнике для выделения из переменных сигналов компонент лишь одной полярности. Во-вторых, ток через диод с ростом U выходит на насыщение, чего также нельзя сказать о токе через резистор. Даже при малых значениях напряжения между анодом и катодом рост силы тока происходит быстрее, чем в законе Ома. На начальном участке вольтамперной характеристики диода выполняется «закон трёх вторых», согласно которому при не слишком больших U

$$I \sim U^{3/2}. \quad (13.2)$$

Более подробно с работой простейших вакуумных ламп (диода и триода) многие из вас ознакомятся при выполнении лабораторного практикума.

13.1.2 Электрический ток в жидкостях. Явление электролиза

Для того, чтобы жидкость проводила электрический ток, она должна содержать переносчики электрического заряда, в качестве которых чаще всего выступают положительно и отрицательно заряженные ионы самой жидкости или веществ, растворённых в ней. При растворении в воде, например, соли хлорного железа ($FeCl_3$) под влиянием электрического поля, создаваемого ионами H^+ и OH^- , происходит электролитическая диссоциация – разрушение молекулы хлорида железа и образования ионов Fe^{+3} и Cl^- :



Если в такой раствор погрузить два электрода и создать на них разность потенциалов, то через электролит пойдёт ток: ионы Fe^{+3} начнут двигаться к катоду, а ионы Cl^{-} – к аноду (рис. 13.2). До-

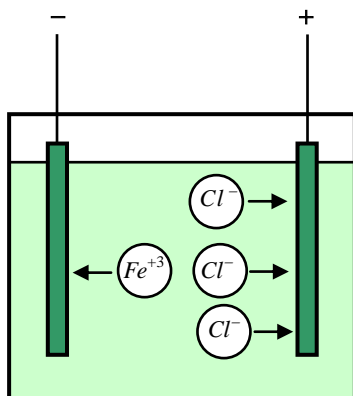


Рис. 13.2

стигнув электродов, ионы захватывают заряд противоположного знака и превращаются в нейтральные атомы. Это означает, что катод начнёт покрываться слоем железа, а вблизи анода станет выделяться хлор.

Вещества, растворы которых хорошо проводят электрический ток, называются **электролитами**. Таким образом, прохождение электрического тока через электролит тесно связано с переносом вещества – ионов растворённого соединения.

М. Фарадей установил два закона электролиза:

Первый закон:

Масса вещества m , выделившегося на электроде, прямо пропорциональна заряду Δq , прошедшему через электролит:

$$m = k \Delta q, \quad (13.3)$$

где k – электрохимический эквивалент вещества (постоянная для данного электролита величина).

Второй закон:

Электрохимический эквивалент вещества пропорционален его атомной массе M_A и обратно пропорционален валентности n движущихся ионов:

$$k = \frac{1}{F} \frac{M_A}{n}, \quad (13.4)$$

где $F = 965000$ Кл/моль – постоянная Фарадея.

Можно легко показать, что $F = e N_A$, где e – заряд электрона, N_A – число Авогадро.

13.1.3 Электрический ток в газах. Виды газового разряда

В обычных условиях газы не проводят электрический ток, то есть являются диэлектриками. Внешние воздействия, однако, могут способствовать появлению в газе свободных носителей заряда: электронов и положительно заряженных ионов, и тогда газ начнёт проводить электрический ток.

Если носители заряда возникают в газе в результате внешних воздействий, не связанных с электрическим полем (освещением, нагревом, радиоактивным излучением), то обусловленная этими носителями проводимость называется **несамостоятельной**. Если носители тока возникают вследствие воздействия на газ сил электрического поля, проводимость называется **самостоятельной**.

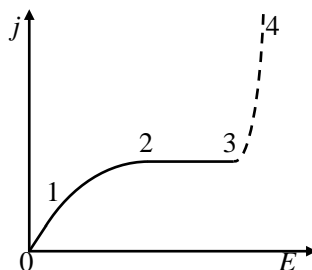


Рис. 13.3

Несамостоятельная проводимость

График зависимости плотности тока j от напряжённости электрического поля E в случае несамостоятельного газового разряда представлен на рис. 13.3.

На начальном участке поведение зависимости $j(E)$ описывается законом Ома: $j = \sigma E$. Внешнее воздействие (например, ультрафиолетовое излучение) стимулирует отрыв электронов от атомов газа, превращая последние в положительно заряженные ионы. В электрическом поле ионы и электроны движутся, создавая электрический ток. Однако, одновременно с ионизацией газа происходит обратный процесс: рекомбинация, при которой ионы и электроны вновь объединяются в нейтральные молекулы, атомы. Чем больше напряжённость поля, тем больше носителей заряда успевают достичь электродов, не испытав рекомбинации; плотность тока возрастает (линейный участок 0-1 на рис. 12.9). Участок 2-3 (участок насыщения) соответствует ситуации, когда все рождаемые внешним воздействием носители заряда достигают электродов, и увеличение E к росту j уже не приводит. На участке

3-4 носители заряда, ускоряются полем до таких скоростей, что при соударении с нейтральными молекулами, атомами выбивают из них электроны, превращая в ионы. Начинается процесс «ударного умножения» (лавинообразного увеличения числа носителей заряда), ток резко возрастает и наступает электрический пробой газового промежутка между электродами. Проводимость при этом остаётся несамостоятельной: если убрать внешнее воздействие, ток прекратится.

Одним из внешних воздействий, способствующих возникновению несамостоятельной проводимости газа, является ионизирующее излучение. Явление зависимости плотности тока в газовом промежутке между электродами от величины внешнего воздействия используется для создания приборов, измеряющих интенсивность рентгеновского и гама-излучения (ионизационных камер, пропорциональных счётчиков, счётчиков Гейгера-Мюллера).

Самостоятельный разряд

К видам самостоятельного разряда относятся:

- *тлеющий разряд* (возникает при низких давлениях, составляющих около 10 % от нормального атмосферного давления);
- *термоэлектронный дуговой разряд* (характерной особенностью которого является сильный нагрев катода и газа межэлектродном пространстве);
- *коронный разряд* (начинающийся вблизи заострённого электрода, в месте, где напряжённость электрического поля достаточно высока для пробоя газа);
- *искровой разряд* (также сопровождающийся пробоем газа с образованием ионизированных каналов – стримеров).

Во всех случаях энергии рождающихся в электрическом поле свободных электронов и положительно заряженных ионов даже без добавочного воздействия оказывается достаточно для того, чтобы при столкновении с другими атомами (самого газа или материала, из которого изготовлен катод) «породить» потоки новых носителей заряда. Некоторые свойства перечисленных типов разрядов рассматриваются, в частности, при изучении дисциплины «Техника высоких напряжений».

13.2 ИНДУКЦИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

13.2.1 Магнитное поле. Силовые линии. Сила Ампера. Вектор магнитной индукции

С древних времён известно, что существуют вещества, обладающие магнитными свойствами, из которых можно изготавливать постоянные магниты. У таких магнитов два полюса, причём один из полюсов стремится повернуться на север (его так и называют – **северным полюсом магнита**), другой – к югу (**южный полюс магнита**). Одноименные полюса двух магнитов отталкиваются, разноименные – притягиваются.

Поскольку магниты ориентируются в пространстве относительно Земли определённым образом, естественно предположить, что и сама Земля является большим постоянным магнитом (рис. 13.4). На географическом севере находится её **южный магнитный полюс** (территориально он расположен в западном полуша-

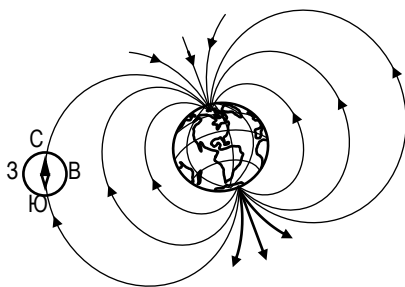


Рис. 13.4

рии в Северном ледовитом океане), а на географическом юге (в Антарктиде) – **северный магнитный полюс** (в этой точке, известной так же, как полюс холода, находится Российская станция «Восток»). К слову сказать, магнитные поля есть не у всех планет, нет магнитного поля и у спутника Земли – Луны. Положение магнитных по-

люсов у небесных объектов также не является постоянным, так, например, каждые 11 лет происходит смена полюсов на Солнце; на Земле за время её существования изменение положения магнитных полюсов происходило, по меньшей мере, три раза, да и в настоящее время магнитные полюса нашей планеты медленно, но движутся.

Северный полюс постоянных магнитов принято обозначать буквой *N* и окрашивать в синий цвет, южный – буквой *S* и окрашивать в красный цвет.

В 1827 году Эрстед открыл, что магнитным полем обладают не только постоянные магниты: оно возникает вокруг любых проводников, по которым идёт электрический ток. Другими словами, магнитное поле оказалось связано с направленным движением зарядов, и этот факт лёг в основу классической теории магнетизма, которая изначально создавалась по аналогии с классической теорией электричества. Существенная разница этих двух теорий заключается в том, что, в отличие от двух типов зарядов (положительных и отрицательных), по отдельности «северных» и «южных» полюсов («магнитных зарядов») обнаружить не удаётся. Если магнит разделить на две части, то у каждой из них будут свои северный и южный полюса; и хотя есть теоретические модели, в которых делаются предположения о существовании в природе объектов с «магнитным зарядом» лишь одного «знака» (они носят название «монополь Дирака»), эксперимент пока не может подтвердить их справедливость.

Слова «магнитное поле» означают, что в каждой точке пространства на полюса помещаемого в эту точку маленького магнита будут действовать определенные силы, стремящиеся развернуть этот магнит. В связи с этим для графического отображения магнитного поля, принято использовать силовые линии (подобно тому, как это делается в случае электрического поля). В данном случае силовой называется линия, касательная в каждой точке к которой совпадает по направлению с силой, действующей на северный полюс маленького магнита, помещаемого в эту точку. Из определения следует, что силовые линии должны выходить из северного полюса магнита и входить в южный. Примерный вид силовых линий магнитных полей, создаваемых разными объектами, изображён на рис. 13.5: а) поле постоянного магнита; б) поле соленоида с током; в) поле кругового витка с током; г) поле прямого проводника с током. Из рисунка следует, что магнитное поле маленького постоянного магнита эквивалентно полю одного витка с током.

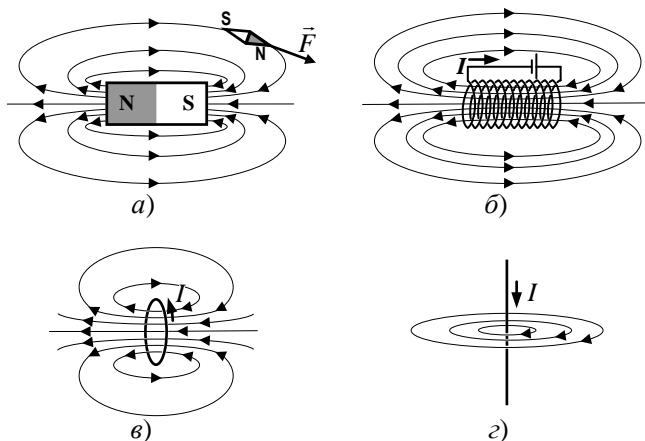


Рис. 13.5

Поскольку термин «поле» неразрывно связан со словом «сила», обсудим, какая сила действует в магнитном поле на объект, обладающий магнитными свойствами, и прежде всего – на прямой участок проводника с током.

Пусть в поле, создаваемое постоянным магнитом, помещён проводник с током (рис. 13.6). Выделим на проводнике малый прямой участок длиной dl : в магнитном поле на этот участок действует сила dF , величина которой зависит от силы тока в проводнике I , от длины участка dl , а также от угла α между направлением протекания тока и направлением силовых линий поля в месте, где находится рассматриваемый участок.

Очевидно, эффект зависит и от того, насколько «велико» само поле, то есть в итоговую формулу для расчёта dF должна входить некая силовая характеристика поля. Эта характеристи-

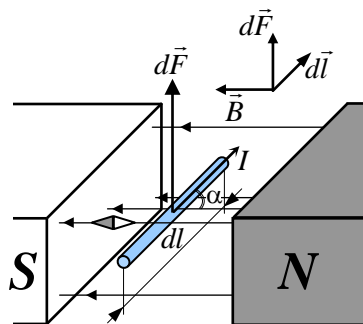


Рис. 13.6

ка носит название **вектора магнитной индукции** \vec{B} , который по направлению совпадает с силой, действующий на северный полюс маленького магнита. Таким образом,

$$dF = IB \sin \alpha \cdot dl. \quad (13.5)$$

Данная формула позволяет характеризовать магнитное поле количественно. Действительно, поместив в заданную точку пространства прямой проводник заданной длины, и пропустив по нему известный ток, можно измерить действующую на проводник силу, после чего – вычислить значение магнитной индукции:

$$B = \frac{1}{I \cdot \sin \alpha} \frac{dF}{dl}. \quad (13.6)$$

В СИ индукция магнитного поля измеряется в теслах (Тл).

Если участку проводника сопоставить вектор $d\vec{l}$, по величине, равный длине dl этого участка, и направленный в ту сторону, в которую идёт ток, то, с учётом того, что индукция магнитного поля также является вектором, выражение (13.5) можно переписать в виде

$$d\vec{F} = I [d\vec{l} \times \vec{B}]. \quad (13.7)$$

Сила, рассчитываемая по этой формуле, носит название **силы Ампера**, её величина описывается выражением (13.5), а направление определяется так же, как это делается всегда в случае векторного произведения (например, по правилу буравчика или по правилу левой руки: пальцы руки направляются по первому вектору-сомножителю, второй вектор-сомножитель должен «входить в ладонь», и тогда отставленный в сторону большой палец покажет направление векторного произведения).

Если проводник – прямой и весь находится в однородном магнитном поле, то сила Ампера рассчитывается по формуле:

$$\vec{F} = I [\vec{l} \times \vec{B}], \quad (13.8)$$

где \vec{l} – вектор, по величине, равный длине l проводника, и направленный в ту же сторону, в которую идёт ток.

13.2.2 Взаимодействие параллельных токов. Ампер – основная единица СИ

Поскольку вокруг любого проводника с током имеется магнитное поле, это означает, что два проводника, по которым идут токи, должны взаимодействовать друг с другом. В качестве примера рассмотрим два прямых, бесконечно длинных тонких проводника, расположенных параллельно друг другу. Каждый из них создаёт вокруг себя магнитное поле, которое действует на «соседа», силы взаимодействия, естественно, равны по величине и противоположны по направлению (третий закон Ньютона). Определим, в каком направлении будут действовать эти силы.

Пусть токи в проводниках идут в одну сторону (рис. 13.7).

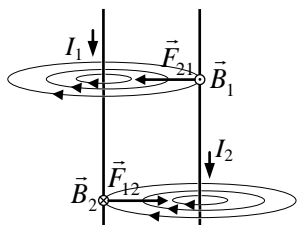


Рис. 13.7

Проводник с током I_1 находится в поле, создаваемом вторым проводником (его индукция в том месте, где находится первый проводник, равна \vec{B}_2 , вектор направлен от нас). Следовательно, на первый проводник со стороны второго действует сила \vec{F}_{12} , которая, в соответствии с правилом левой руки, направлена направо. Аналогично, проводник с

током I_2 находится в поле первого проводника, вектор \vec{B}_1 магнитной индукции которого направлен на нас. Сила \vec{F}_{21} , действующая на второй проводник со стороны первого, направлена налево. Таким образом, проводники, по которым токи идут в одном направлении, притягиваются.

Что произойдёт с проводниками, по которым токи идут в противоположных направлениях, студентам предлагается определить самостоятельно.

Взаимодействие прямых параллельных проводников с током положено в основу эталона ампера – основной единицы СИ. **По определению, 1 А**, это такая сила постоянного тока, который при прохождении по двум прямолинейным параллельным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого поперечного сечения,

расположенным в вакууме на расстоянии 1 м друг от друга, вызывал бы на каждом участке проводника длиной 1 м силу взаимодействия, равную $2 \cdot 10^{-7}$ Н.

13.2.3 Действие магнитного поля на движущийся заряд.

Сила Лоренца. Ускорители заряженных частиц

Итак, на проводник длиной l , по которому идёт ток I и который находится в магнитном поле с индукцией B , действует сила Ампера F_A , вычисляемая по формуле $F_A = IlB \sin \alpha$, где α – угол между направлением тока и вектором магнитной индукции. Если же тока нет, то сила Ампера не возникает. Этот факт заставляет предположить, что магнитное поле действует лишь на движущиеся заряды (в металлах – на электроны), а на неподвижные (на ионы кристаллической решётки, испытывающие только хаотические тепловые колебания около положения равновесия) влияния не оказывает. Поэтому давайте получим формулу для вычисления силы, действующей в магнитном поле на один движущийся заряд.

Согласно определению, сила постоянного тока $I = \frac{dq}{dt} = \frac{\Delta q}{\Delta t}$,

где Δq – общий заряд, который переносится силами поля за время Δt . Если зарядов N штук, и величина каждого равна q , то $\Delta q = Nq$, и формулу для силы Ампера можно переписать в виде

$$F = \frac{Nq}{\Delta t} l B \sin \alpha = Nq \frac{l}{\Delta t} B \sin \alpha.$$

Поскольку Δt – это время, за которое заряды преодолевают расстояние l под действием сил поля, то дробь $l/\Delta t$ фактически равна их дрейфовой скорости v , направление которой к тому же (в случае положительных зарядов) совпадает с направлением протекания тока. Сказанное позволяет сделать следующий шаг:

$$F = Nq v B \sin \alpha, \text{ или } \vec{F} = Nq [\vec{v} \vec{B}].$$

Но \vec{F} – сила, действующая на все N зарядов, а на каждый из них по отдельности действует сила F_L , в N раз меньшая:

$$\vec{F}_\text{л} = q[\vec{v} \vec{B}]. \quad (13.9)$$

Эта сила носит название силы Лоренца.

Данная сила действует на любой заряд, движущийся в магнитном поле. Если же кроме магнитного поля на заряд действует ещё и электрическое, то

$$\vec{F}_\text{л} = q[\vec{v} \vec{B}] + q\vec{E}. \quad (13.10)$$

Определить направление силы Лоренца по формуле (14.1) можно, используя правило левой руки. Однако, следует помнить, что это правило в математике применяется лишь для определения направления векторного произведения (в нашем случае – произведения $[\vec{v} \vec{B}]$). Если заряд q положителен, то направление $\vec{F}_\text{л}$ совпадёт с направлением этого произведения, если заряд q имеет знак «минус» (как, например, у электрона), то сила Лоренца будет направлена в сторону, противоположную той, которая определялась по правилу левой руки.

Особенностью векторного произведения является то, что его результат (в нашем случае вектор $\vec{F}_\text{л}$) оказывается перпендикулярным обоим сомножителям (у нас – векторам \vec{v} и \vec{B}). Если при этом сами вектора \vec{v} и \vec{B} взаимно перпендикулярны, то заряд будет двигаться в магнитном поле по окружности.

На рис. 13.8 изображены траектории движения в однородном

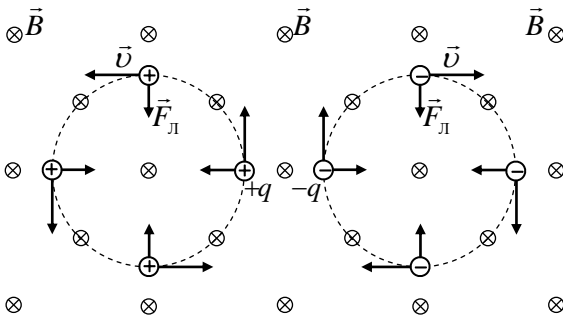


Рис. 13.8

магнитном поле одинаковых по массе, но имеющих заряды $+q$ и $-q$, частиц, влетевших с одинаковой скоростью в поле перпендикулярно его силовым линиям (на рисунке они направлены

«от нас»). Если скорость влетающего в поле заряда имеет компоненту \vec{v}_{\parallel} , параллельную силовым линиям, траекторией заряда окажется *винтовая спираль*. Вдоль оси спирали заряд будет двигаться равномерно со скоростью \vec{v}_{\parallel} , но одновременно под действием силы Лоренца он станет вращаться вокруг оси спирали с постоянной линейной скоростью \vec{v}_{\perp} (здесь \vec{v}_{\perp} – компонента скорости, перпендикулярная вектору \vec{B}). При этом сила Лоренца $F_L = qv_{\perp}B$.

Возможность отклонять пучки заряженных частиц от первоначального направления распространения с помощью магнитного поля широко используется на практике. Системы такого отклонения обычно оказываются более компактными, чем те, в которых отклонение обеспечивается электрическими полями. Типичный пример использования этого явления – электронно-лучевые трубки (кинескопы) телевизоров. Электроны, испускаемые нагретым катодом, после ускорения электрическим полем отклоняются магнитными полями соленоидов системы вертикальной и горизонтальной развёртки. В результате электронный луч попадает в заданные точки экрана, заставляя светиться нанесённый на него люминофор: возникает изображение.

Принцип организации движения зарядов не по прямой, а по окружности, используется в ускорителях заряженных частиц (в том числе – в запущенном недавно в Европейском центре ядерных исследований Большом адронном коллайдере). Непосредственно для ускорения частиц до больших скоростей применяется электрическое поле, силы которого совершают работу по перемещению зарядов и, тем самым, сообщают им требуемую кинетическую энергию. Однако за время разгона частицы успевает пройти большое расстояние, а построить требуемый для этого прямой, достаточно длинный тоннель, из которого, к тому же, должен быть откачен воздух (такая конструкция носит название «линейный ускоритель»), технически весьма сложно (и даже практически невозможно, если длина тоннеля должна превышать несколько сотен метров). Но использование магнитного поля поз-

воляет «свернуть» прямую траекторию ускоряемой заряженной частицы в окружность или расширяющуюся спираль. Примером устройства данного типа является **циклотрон**.

Циклотрон состоит из двух металлических коробов (они называются «дуанты»), форма каждого из которых близка форме половины цилиндра, разрезанного на две равные части вдоль оси симметрии. Дуанты внутри пустые, на них может создаваться разность потенциалов как одного, так и другого знаков, причём каждый находится в магнитном поле, силовые линии которого перпендикулярны его основаниям (рис. 13.9.а).

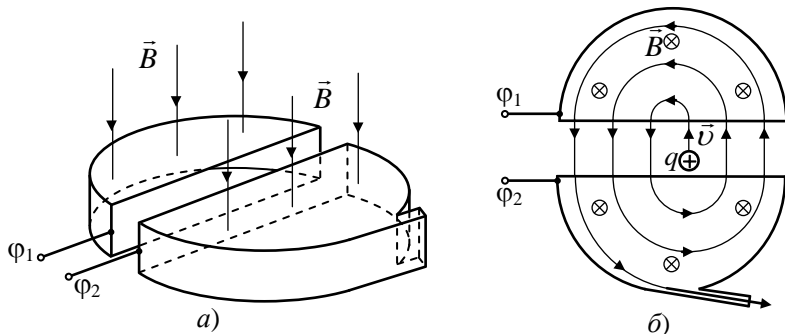


Рис. 13.9

Дуанты разведены друг от друга на некоторое расстояние; если ввести в зазор вблизи центра системы заряженную частицу и создать между дуантами ускоряющую разность потенциалов $\phi_1 - \phi_2$, частица начнёт ускоряться. В момент влёта частицы внутрь первого дуанта она уже будет иметь некоторую скорость, однако там на неё будет действовать сила Лоренца, и траектория частицы искривится. Описав полуокружность, частица вылетит из дуанта, но к этому времени полярность дуантов меняют, и частица вновь ускоряется в зазоре между ними. Она влетает уже во второй дуант (её скорость стала больше), внутри него вновь испытывает действие силы Лоренца, и, описав полуокружность, вылетает из него. К этому времени полярность дуантов меняют вновь: происходит новое ускорение частицы, затем имеет место новый поворот магнитным полем и т.д. (рис. 13.9.б).

Поскольку скорость частицы всё время возрастает, её траекторией оказывается уже не окружность, а расширяющаяся спиралевидная кривая, и когда её радиус достигнет размера установки, частица вылетает из дуанта в специальное окно: поставленная цель по разгону частицы до нужной скорости выполнена.

На практике, конечно, всё обстоит не так просто: следует точно согласовать моменты переключения полярности дуантов с моментами вылета частицы из очередного из них, учесть эффект увеличения релятивистской массы частицы при больших скоростях и т.д. Именно поэтому разгон заряженных частиц до скоростей, приближающихся к скорости света, происходит на установках, которые имеют уже другую конструкцию – синхротронах, синхрофазотронах и др. Однако сам принцип превращения прямолинейной траектории движения разгоняемой заряженной частицы в окружность или расширяющуюся спираль остаётся тем же: это делается с помощью силы Лоренца.

13.2.4 Эффект Холла. Использование эффекта Холла для определения знака и концентрации носителей заряда

Ещё одним эффектом, в котором проявляется действие силы Лоренца, является эффект Холла. ***Эффект заключается в возникновении поперечной разности потенциалов в проводнике, по которому идёт электрический ток и который помещён в магнитное поле.***

Рассмотрим образец, по которому идёт электрический ток – результат движения положительных зарядов (например, протонов), рис. 13.10.а).

Если образец помещён в магнитное поле, силовые линии которого перпендикулярны вектору плотности тока (совпадающему по направлению с вектором дрейфовой скорости зарядов), то на него будет действовать сила Лоренца (на рисунке \vec{F}_L направлена на нас). На передней грани образца начнёт накапливаться положительный заряд, задняя грань будет заряжена отрицательно.

Одновременно с накоплением зарядов в образце возникнет электрическое поле, которое действует на положительные заряды

с силой \vec{F}_3 , противоположной по направлению силы Лоренца. По мере накопления зарядов эта сила возрастает до тех пор, пока не сравняется по величине с $\vec{F}_л$. После этого накопление заряда на передней и задней гранях прекращается и новые заряды, попадающие в образец, движутся прямолинейно. В итоге передняя грань приобретает потенциал $+\varphi_1$, задняя – потенциал $-\varphi_2$; возникающая поперечная разность потенциалов называется «холловской».

Получим выражение для разности $\varphi_1 - \varphi_2$.

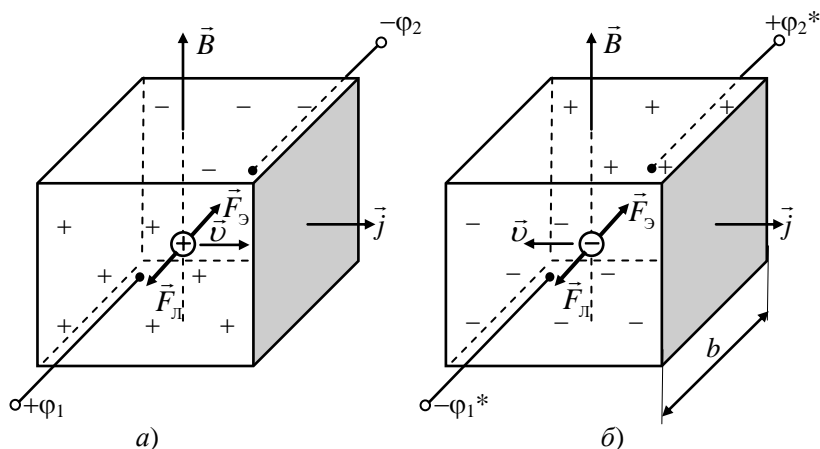


Рис. 13.10

В состоянии, когда действие сил $\vec{F}_л$ и \vec{F}_3 уравнивается с учётом того, что $F_л = qvB$, а $F_3 = qE$, где E – напряжённость возникшего поперечного электрического поля, можно записать: $qvB = qE$, или $vB = E$.

Электрическое поле в пространстве между передней и задней гранями образца (грани параллельны) можно считать однородным, и для него, также, как и для электрического поля внутри плоского конденсатора, можно записать: $E = \frac{U}{b} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{b}$. Таким

образом, $vB = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{b}$, или $\varphi_1 - \varphi_2 = vBb$. Но при выводе форму-

лы закона Ома в дифференциальной форме мы показали, что плотность тока j связана с концентрацией n и скоростью v носителей заряда соотношением $j = env$. Полагая, что в нашем случае заряд q равен по величине заряду электрона $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, и выразив скорость носителей заряда v через плотность тока и концентрацию, получим:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{en} Bbj. \quad (13.11)$$

Из формулы следует, что, измерив в эксперименте ширину образца b , плотность идущего через него тока j , индукцию магнитного поля B и холловскую разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$, можно вычислить концентрацию носителей заряда в образце, и даже более того, – исследовать, как меняется эта концентрация в зависимости от тех или иных внешних воздействий (при нагреве, внешней засветке и т.д.). Именно поэтому эффект Холла является мощным инструментом исследования в физике полупроводников и металлов.

Коэффициент, стоящий перед произведением Bbj в формуле (13.11) носит название постоянной Холла и обозначается R_x , в общем случае он отличается от полученной нами дроби $\frac{1}{en}$ на множитель, по величине, близкий к единице.

Помимо концентрации носителей заряда, создающих электрический ток, эффект Холла позволяет определить их знак. Мы уже убедились в том, что если ток создают положительно заряженные носители, потенциал передней грани приобретает знак «плюс». Но если такой же ток создают отрицательно заряженные носители (для этого они должны двигаться в противоположном вектору \vec{j} направлении, рис. 13.10.б), то, согласно правилу левой руки, «от нас» будет направлено векторное произведение $[\vec{v} \vec{B}]$. Сама же сила Лоренца, как результат умножения этого произведения на отрицательный заряд q , как и в первом случае окажется направленной «на нас»: потенциал передней грани образца будет иметь знак «минус». Таким образом, используя эффект Холла, можно

определить, например, каким типом электропроводности (*p*- или *n*-) характеризуется полупроводник.

В заключение отметим: сила Лоренца разделяет электрические заряды, отклоняя заряды одного знака в одну сторону, а другого – в противоположную, что позволяет использовать её в качестве сторонней для создания источников э. д. с. Как мы увидим далее, именно это свойство силы Лоренца лежит в основе явления электромагнитной индукции.

Некоторые примеры

- Индукция магнитных полей, возникающих при функционировании человеческого мозга, составляет около 10^{-9} Тл.

- Индукция магнитного поля, создаваемого магнитными аппликаторами, которые используются в медицине для снижения мышечных болей, составляет около 10 мТл.

- Крупные электромагниты с железными сердечниками создают в промежутке между полюсами магнитную индукцию до 6 Тл; на уникальных установках, созданных в СССР и США, удавалось достичь индукции до 50 Тл.

- Магнитное поле нейтронных звёзд может превышать 10^{10} Тл, при этом энергия взаимодействия электрона с магнитным полем оказывается соизмеримой с его энергии покоя $m_e c^2$, что должно приводить к появлению специфических релятивистских эффектов.

- Диаметр первого циклотрона (1931 г.) составлял 25 см. Диаметр Серпуховского ускорителя равен примерно 1,5 км, средний диаметр кольца Большого адронного коллайдера превышает 8 км.

- Поскольку величина холловской разности потенциалов зависит от индукции внешнего магнитного поля, создаваемого, в частности проводниками, по которым идёт электрический ток, то это позволяет создавать на основе датчиков Холла бесконтактные измерители силы тока в пределах от десятков миллиампер до нескольких тысяч ампер.

- На основе эффекта Холла созданы (и предлагаются к продаже многими фирмами) датчики тока, индукции магнитного по-

ля, положения, перемещения, расхода, угла поворота, частоты вращения и др.; устройства блокировки дверей, считыватели магнитных карточек или ключей, датчики систем зажигания автомобилей, бесконтактные реле и т. д.

Вопросы для повторения

1. В чём заключается явление термоэлектронной эмиссии? Что такое «работа выхода» при термоэлектронной эмиссии и от чего она зависит?
2. Объясните вид вольтамперной характеристики вакуумного диода.
3. Сформулируйте законы Фарадея для электролиза.
4. Объединив первый и второй законы Фарадея для электролиза, можно сразу записать:

$$m = \frac{1}{eN_A} \frac{M_A}{n} \Delta q.$$

5. Обоснуйте справедливость данного равенства.
6. Какие виды газового разряда Вам известны?
7. Объясните вид вольтамперной характеристики, описывающей несамостоятельный газовый разряд.
8. Сформулируйте закон Ампера и приведите пример его проявления.
9. Дайте определение вектору индукции магнитного поля. В каких единицах магнитная индукция измеряется в СИ?
10. Как графически отображается магнитное поле? Приведите примеры.
11. Объясните, как взаимодействуют бесконечно длинные параллельные проводники, по которым токи идут: а) в одном направлении; б) в противоположных направлениях.
12. Дайте определение основной единице СИ – амперу.
13. Пользуясь формулой закона Ампера, выведите формулу для силы Лоренца.
14. Опишите принцип работы циклотрона.
15. В чём заключается эффект Холла? Как с его помощью можно определить концентрацию и знак носителей заряда в веществе?

14.1 ИНДУКЦИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ (Часть II)

14.1.1 Закон Био-Савара-Лапласа

14.1.2 Теорема о циркуляции вектора \vec{B} . Примеры применения теоремы

14.2 МАГНИТНЫЙ ПОТОК

14.2.1 Теорема Гаусса для магнитного поля

14.2.2 Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

Вопросы для повторения

14.1 ИНДУКЦИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ (Часть II)

14.1.1 Закон Био-Савара-Лапласа

Для вычисления силы, которая будет действовать на один проводник со стороны другого, необходимо уметь рассчитывать индукцию магнитного поля, создаваемого проводником с током на заданном расстоянии от него (в том числе – в случае, если второй проводник не является прямым). Вычислить индукцию магнитного поля $d\vec{B}$, создаваемого малым участком $d\vec{l}$ проводника, по которому идёт ток I , в точке, положение которой задаётся радиус-вектором \vec{r} (см. рис. 14.1), можно, пользуясь законом Био-Савара-Лапласа, который в СИ имеет вид:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}. \quad (13.5)$$

В этой формуле $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн·м⁻¹ – магнитная постоянная (о единице измерения индуктивности – генри – мы поговорим позднее).

$$\text{По величине } dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \cdot r \cdot \sin\alpha}{r^3} = \frac{\mu_0 Idl \cdot \sin\alpha}{4\pi r^2},$$

где α угол между векторами $d\vec{l}$ и \vec{r} ; согласно правилу левой руки (или правилу буравчика), применённому для векторного произве-

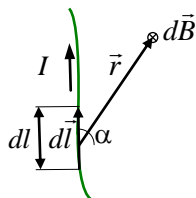


Рис. 14.1

дения $[d\vec{l}\vec{r}]$, вектор $d\vec{B}$ направлен вглубь рисунка («от нас»).

Для нахождения общей индукции магнитного поля, создаваемого всем проводником в целом, следует применить **принцип суперпозиции**, согласно которому **индукция магнитного поля, создаваемого системой разных объектов (проводников с током, постоянных магнитов), равна векторной сумме векторов индукции магнитных полей, создаваемых каждым объектом в отдельности:**

$$\vec{B} = \int d\vec{B}. \quad (14.1)$$

В виде примера рассмотрим, как используется закон Био-Савара-Лапласа для расчёта индукции магнитного поля, создаваемого в центре кругового витка с током.

Пусть по круговому витку радиусом R идёт ток I (рис. 14.2.а). Выделим на витке малый участок $d\vec{l}$ (направление этого вектора совпадает с направлением протекания тока) и запишем, чему равна индукция магнитного поля, создаваемого этим участком в центра витка. Учитывая, что радиус окружности всегда перпендикулярен любому малому участку этой окружности ($\alpha = 90^\circ$), запишем:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \cdot R \cdot \sin\alpha}{R^3} = \frac{\mu_0 Idl}{4\pi R^2}. \quad (14.2)$$

По правилу левой руки вектор $d\vec{B}$ на рисунке направлен вверх, причём это направление одинаково для всех малых элементов $d\vec{l}$, выбираемых на окружности. Это означает, что и результирующий вектор \vec{B} в центре окружности будет направлен вверх, то есть, интегрировать можно уже не сами вектора $d\vec{B}$, а их проекции на вертикальную ось, скаляры dB – см. (14.2):

$$B = \oint dB = \oint \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \oint dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \cdot 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2R}.$$

Таким образом, индукция магнитного поля в центре кругового витка с током рассчитывается по формуле

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}. \quad (14.3)$$

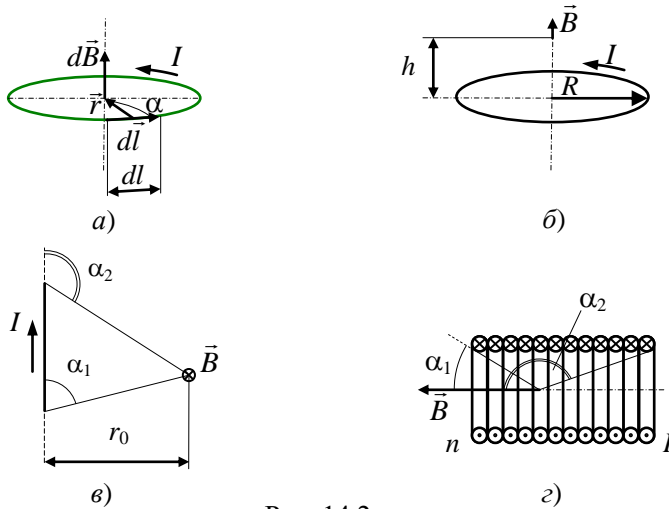


Рис. 14.2

Используя закон Био-Савара-Лапласа, можно вывести формулы для индукции магнитного поля, создаваемого:

- на оси кругового витка с током на высоте h над плоскостью витка (рис. 14.2.б):

$$B = \frac{\mu_0 I (\pi R^2)}{2\pi (R^2 + h^2)^{3/2}}. \quad (14.4)$$

- на расстоянии r_0 от прямого отрезка проводника с током, концы которого из точки наблюдения видны под углами α_1 и α_2 (рис. 14.2.в):

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2). \quad (14.5)$$

В частности, для бесконечно длинного проводника $\alpha_1 \rightarrow 0^\circ$, $\alpha_2 \rightarrow 180^\circ$, и выражение (14.5) принимает вид:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r_0}. \quad (14.6)$$

- внутри соленоида, имеющего n витков на единицу длины, на его оси в точке, из которой края соленоида видны под углами α_1 и α_2 (рис. 14.2.2):

$$B = \frac{1}{2} \mu_0 n I (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1). \quad (14.7)$$

Для бесконечно длинного соленоида $\alpha_1 \rightarrow 180^\circ$, $\alpha_2 \rightarrow 0^\circ$, и для индукции магнитного поля внутри соленоида можно записать:

$$B = \mu_0 n I. \quad (14.8)$$

Формулы (14.3) и (14.8) мы выведем позднее, используя теорему о циркуляции вектора индукции магнитного поля.

14.1.2 Теорема о циркуляции вектора \vec{B} . Примеры применения теоремы

Расчёт сил, действующих в магнитном поле на проводники с током и движущиеся заряды, требует умения вычислять значение индукции магнитного поля в любой точке пространства. Это можно сделать, используя закон Био-Савара-Лапласа, однако, в ряде случаев, для расчётов удобно применять другой подход, основанный на использовании теоремы о циркуляции вектора \vec{B} . Данный подход во многом схож с тем, который лежит в основе вычисления напряженности электрического поля путём применения теоремы Гаусса.

Для начала введём определение.

Если в пространстве, каждой точке которого соответствует некоторый вектор \vec{A} , выбрать замкнутый контур L и затем начать обходить этот контур в каком-то направлении, то каждому малому элементу длины этого контура $d\vec{l}$ (направление вектора совпадает с направлением обхода) можно сопоставить скалярное произведение $(\vec{A} d\vec{l}) = A dl \cos \alpha$, где A – величина вектора \vec{A} в области выбранного вектора $d\vec{l}$, а α – угол между этими векто-

рами. Просуммировав такие произведения вдоль всего контура, мы получаем интеграл (обозначим его буквой Γ), который называется *циркуляцией вектора \vec{A} по контуру L* :

$$\Gamma = \oint_L \vec{A} d\vec{l} . \quad (14.9)$$

После того, как мы записали определение циркуляции вектора¹, сформулируем теорему, вынесенную в заглавие параграфа.

Циркуляция вектора магнитной индукции по произвольно-замкнутому контуру равна умноженной на магнитную постоянную μ_0 алгебраической сумме токов, которые пронизывают поверхность, мысленно натянутую на этот контур:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^N I_i . \quad (14.10)$$

При вычислении суммы следует учитывать направление обхода контура: те токи, которые пронизывают поверхность, мысленно натянутую на контур в направлении, совпадающем с направлением хода винта (буравчика), вращаемого в сторону обхода, берутся со знаком «плюс», те, которые идут в противоположном направлении, — со знаком «минус».

Точно так же, как и в случае теоремы Гаусса для электрического поля, в которой речь шла о произвольной замкнутой поверхности, выбираемый контур обхода может иметь любую форму, и именно поэтому его выбирают таким, чтобы можно было легко взять интеграл и, тем самым, получить формулу для расчёта индукции B в заданной точке пространства.

Рассмотрим два примера.

Пример 14.1. Расчёт индукции магнитного поля прямого бесконечно длинного тонкого проводника с током

Выполним шаги, аналогичные тем, которые мы делали в слу-

¹ Ранее мы уже отмечали, что в электростатическом поле циркуляция вектора его напряжённости равна нулю, то есть $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0$.

чае использования теоремы Гаусса для электрического поля.

– Начертим рисунок с изображением проводника с током и силовых линий создаваемого им магнитного поля (рис. 14.3).

– Укажем на рисунке точку, в которой мы будем рассчитывать величину индукции магнитного поля, и проведём сквозь эту точку силовую линию (на рис. 14.3. это точка A).

– Выберем замкнутый контур, форма которого соответствовала бы симметрии задачи; контур должен проходить через нужную нам точку A (на рис. 14.3. это окружность радиусом R, плоскость которой перпендикулярна проводнику с током, проходящему через центр этой окружности).

– Посчитаем циркуляцию вектора индукции магнитного поля по выбранному контуру. Обход совершим по направлению силовых линий, тогда в формуле (14.10) ток можно будет брать со знаком «плюс».

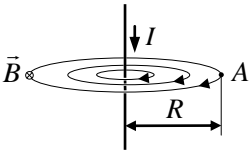


Рис. 14.3

Во всех точках выбранный нами контур совпадает с одной и той же силовой линией и согласуется с ней по направлению обхода, поэтому угол α между векторами

\vec{B} и $d\vec{l}$ везде равен нулю. Кроме того, в силу симметрии контура (все участки которого находятся на равном расстоянии от проводника с током) во всех его точках величина индукции одинакова, и множитель B можно вынести за знак интеграла. Учтём также, что, по определению интеграла, $\oint_L dl = 2\pi R$. Сказанное означает:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B dl \cos 0^\circ = \oint_L B dl = B \oint_L dl = 2\pi R B.$$

– Определим теперь, какой суммарный ток пронизывает поверхность, мысленно натянутую на выбранный контур, после чего применить теорему о циркуляции вектора \vec{B} .

В нашем случае речь идёт только об одном токе I , следовательно, циркуляция вектора \vec{B} должна просто равняться произве-

дению $\mu_0 I$, то есть,

$$2\pi R B = \mu_0 I.$$

Сказанное означает, что индукция магнитного поля, создаваемого прямым тонким бесконечно длинным проводником с током I на расстоянии R от него, рассчитывается по формуле:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}. \quad (14.11)$$

Пример 14.2. Расчёт индукции магнитного поля тороида (и бесконечно длинного соленоида) с током

Тороид представляет собой тороидальный (имеющий «форму бублика») сердечник, изготовленный из немагнитного материала, на который виток к витку плотно навит провод в тонкой изоляционной оболочке. На рис. 14.4.а) показан вид такого объекта сверху; для того, чтобы не загромождать чертёж, витки провода изображены лишь в его левой части. Заметим: тороидом бесконечно большого радиуса R можно считать бесконечно длинный соленоид.

Всё пространство вокруг проводов с током I , идущим по тороиду, можно разбить на три области. Область I соответствует точкам, лежащим вне тороида, область II – точкам, которые находятся в его «дырке» и область III, лежащая в «теле» сердечника тороида (рис. 14.4.б). Определим, какова индукция магнитного поля в этих областях на примере точек A , A' и A'' .

Проведём через точку A замкнутый контур I, окружающий тороид. Поверхность, мысленно натянутая на тот контур, пересекается каждым витком дважды (рис. 14.4.в), поэтому алгебраическая сумма токов, идущих по виткам и пронизывающих эту поверхность равна нулю, какой бы формы контур мы ни выбирали. Но если при любом выборе формы контура интеграл по нему равен нулю, то это означает, что под знаком интеграла также стоит ноль. Так как $d\vec{l}$ явно не ноль, это означает, что вне тороида индукция магнитного поля равна нулю, то есть вне тороида магнитного поля нет.

Аналогичная ситуация имеет место и в области II. Какой бы

формы контур (овальный, треугольный, четырёхугольный и т. д.), проходящий через точку A' мы ни выбирали, циркуляция вектора \vec{B} по нему будет равна нулю, так как поверхности, натянутые на каждый из этих контуров токами вообще не пересекаются. И снова, - если для любого контура интеграл равен нулю, следовательно

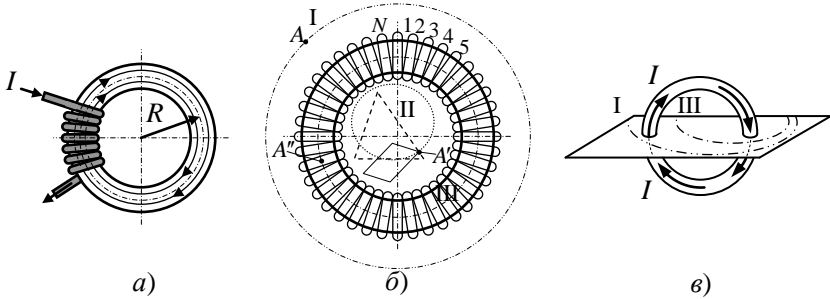


Рис. 14.4

но, дело в подынтегральном выражении – оно (точнее вектор \vec{B}) тождественно равно нулю: магнитного поля нет и в области II.

Но в области III ситуация качественно иная: поверхность, натянутая на контур - окружность, которая совпадает со средней линией тороида, пронизывается каждым витком только один раз, и все соответствующие токи идут в одном направлении. Ранее силовые линии внутри соленоида мы уже рисовали; с учётом того, что и внутри тороида силовые линии на каждом участке параллельны контуру обхода – окружности, можно записать, что угол α между \vec{B} и $d\vec{l}$ в любом месте равен нулю. Кроме того, в силу симметрии контура и тороида, индукция B должна быть одинакова в любой точке контура, длина которого равна $2\pi R$:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B dl \cos 0^\circ = \oint_L B dl = B \oint_L dl = 2\pi R B.$$

Сумма токов, пронизывающих поверхность, мысленно натянутую на выбранный контур, равна NI , где N – общее число витков проволоки. Сказанное означает: внутри тороида (так же, как и внутри бесконечно длинного соленоида)

$$B = \frac{N}{2\pi R} \mu_0 I = \mu_0 n I, \quad (14.12)$$

где n – число витков на единицу длины тороида.

Формулы (14.11) и (14.12) совпадают с формулами (14.3) и (14.8), которые можно получить для этих же объектов, используя закон Био-Савара-Лапласа.

14.2 МАГНИТНЫЙ ПОТОК

14.2.1 Теорема Гаусса для магнитного поля

Помимо теоремы о циркуляции вектора \vec{B} в теории магнетизма имеется своя теорема Гаусса, которая также касается потока вектора, являющегося силовой характеристикой поля (в данном случае – магнитного). Речь идёт о потоке вектора магнитной индукции или о магнитном потоке.

По определению **магнитным потоком** Φ_M через некоторую поверхность S называется интеграл вида

$$\Phi_M = \int_S (\vec{B} d\vec{S}). \quad (14.13)$$

В отличие от потока вектора напряжённости электрического поля магнитный поток в СИ имеет собственную единицу измерения – вебер; **1 Вб = 1 Тл·м²**.

В формуле (14.13) поверхность может быть любой, но в теореме Гаусса говорится о замкнутой поверхности. Приведём текст теоремы и соответствующую ей формулу¹.

Поток вектора индукции магнитного поля через произвольную замкнутую поверхность равен нулю:

$$\oint_S (\vec{B} d\vec{S}) = 0. \quad (14.14)$$

¹И вновь формула не является альтернативой тексту теоремы, поскольку из формулы не следует, что замкнутая поверхность может иметь любую форму (в том числе – такую, которая нам удобна для проведения вычислений).

Напомним: применяя теорему Гаусса для электрического поля, в правую часть формулы следует подставлять алгебраическую сумму электрических зарядов, охватываемых поверхностью. Именно поэтому теорема Гаусса для магнитного поля, согласно которой в правой части формулы должен стоять ноль, иногда интерпретируется, как свидетельство того, что отдельно существующих магнитных «зарядов» (монополей – «северных» и «южных») в природе не существует.

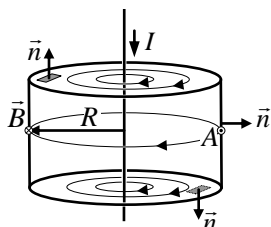


Рис. 14.5

Продemonстрируем справедливость теоремы на простейшем примере, применив её для описания магнитного поля, создаваемого прямым, тонким, бесконечно длинным проводником с током (рис. 14.5).

– Начертим рисунок, выберем некоторую точку A , находящуюся на расстоянии R от прямого проводника с током, изобразим силовые линии магнитного поля (одна из них проходит через точку A).

– Выберем замкнутую поверхность, форма которой соответствует симметрии задачи; поверхность проходит через выбранную точку A (на рис. 14.5. это цилиндр радиусом R , ось которого совпадает с проводником).

– Посчитаем поток вектора индукции магнитного поля по выбранной поверхности, как сумму интегралов по двум доньям цилиндра S_{D1} и S_{D2} , а также по его боковой поверхности S_B . Учтём, что нормали и к доньям цилиндра и к любому элементу боковой поверхности (например, – в выбранной точке A) перпендикулярны силовым линиям магнитного поля, поэтому:

$$\begin{aligned}\Phi_M &= \oint_S (\vec{B} d\vec{S}) = \int_{S_{D1}} (\vec{B} d\vec{S}) + \int_{S_{D2}} (\vec{B} d\vec{S}) + \int_{S_B} (\vec{B} d\vec{S}) = \\ &= \int_{S_{D1}} B dS \cdot \cos 90^\circ + \int_{S_{D2}} B dS \cdot \cos 90^\circ + \int_{S_B} B dS \cdot \cos 90^\circ = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, магнитный поток через выбранную нами за-

мкнутую поверхность действительно равен нулю: утверждение, высказанное в виде теоремы Гаусса для магнитного поля, справедливо.

14.2.2 Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле

Сила Ампера, действующая в магнитном поле с индукцией \vec{B} на проводник длиной l , по которому идёт ток I , может привести его в движение и совершить при этом работу:

$$\delta A = (\vec{F} d\vec{r}) = F dr \cdot \cos\varphi = F dr = I |\vec{l} \vec{B}| dr = IlB \cdot \sin\alpha \cdot dr,$$

где α – угол между вектором \vec{l} (его направление совпадает с направлением движения положительных зарядов в проводнике) и вектором магнитной индукции \vec{B} (рис. 14.6). Поскольку проводник движется под действием силы Ампера \vec{F} , угол φ между вектором перемещения $d\vec{r}$ и самой силой везде равен нулю; это означает, что косинус угла между этими векторами, входящий в виде сомножителя в скалярное произведение $(\vec{F} d\vec{r})$, равен единице.

С учётом того, что площадь, «заметаемая» проводником в процессе движения, вычисляется, как $dS = l \cdot dr$, и того, что $\sin\alpha = \cos\beta$, выражение для расчёта работы силы Ампера можно переписать в виде

$$\delta A = IlB \cdot \sin\alpha \cdot dr = IB dS \cos\beta.$$

Но, согласно определению магнитного потока, $\Phi_M = \int_S (\vec{B} d\vec{S})$, или

$d\Phi_M = (\vec{B} d\vec{S})$, следовательно, $\delta A = I d\Phi_M$. Таким образом, работу по перемещению проводника с током в магнитном поле можно рассчитать, используя формулу

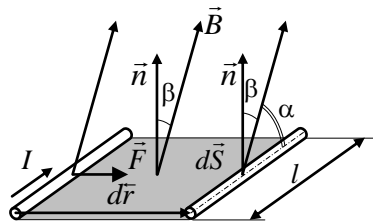


Рис. 14.6

$$A = I \cdot \Delta\Phi_M. \quad (14.15)$$

Здесь $\Delta\Phi_M$ – магнитный поток через поверхность, замкнутую проводником с постоянным током I в процессе движения.

Данная формула справедлива и в случаях, когда проводник движется не поступательно, а разворачивается в магнитном поле, при деформации, а также при переносе в область с другим значением магнитной индукции любого замкнутого контура с током I .

В заключение отметим: формула (15.1) позволяет легко выразить единицу измерения магнитного потока (вебер) через основные единицы СИ: $1 \text{ Вб} = 1 \text{ Дж} \cdot \text{А}^{-1} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{с}^{-2} \cdot \text{А}^{-1}$.

Вопросы для повторения

1. В чём заключается закон Био-Савара-Лапласа? Приведите пример его применения.
2. Что называется циркуляцией вектора \vec{B} ?
3. Сформулируйте теорему о циркуляции вектора магнитной индукции и приведите пример её применения для вычисления индукции магнитного поля, создаваемого прямым бесконечным проводником с током.
4. Сформулируйте теорему о циркуляции вектора магнитной индукции и приведите пример её применения для вычисления индукции магнитного поля, создаваемого тороидом.
5. Выведите формулу для расчёта работы по перемещению прямого проводника с током в однородном магнитном поле.

15.1 ВИТОК С ТОКОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

15.1.2 Магнитный момент витка с током. Виток с током в однородном и неоднородном магнитных полях

15.2 МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

15.2.1 Гипотеза Ампера. Гиромагнитное отношение

15.2.2 Намагниченность \vec{J} . Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции в веществе. Вектор напряжённости магнитного поля \vec{H} . Закон полного тока

15.2.3 Связь векторов \vec{B} , \vec{J} и \vec{H} . Виды магнетиков.

15.2.4 Парамагнетизм

15.2.5 Прецессия электронных орбит в атоме. Диамагнетизм

15.2.6 Ферромагнетизм. Петля гистерезиса

Некоторые примеры

Вопросы для повторения

15.1 ВИТОК С ТОКОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

15.1.2 Магнитный момент витка с током.

Виток с током в однородном и неоднородном магнитных полях

Сила, действующая на прямой проводник с током в однородном магнитном поле, заставляет двигаться его поступательно. Картина меняется, если проводник имеет форму замкнутого витка, например, – прямоугольной рамки. Рассмотрим, что происходит в этом случае.

Пусть прямоугольная проводящая рамка, по которой идёт ток, расположена в однородном магнитном поле так, что нормаль к её поверхности составляет некоторый угол α с силовыми линиями. На каждый из участков рамки действует своя сила, причём направления этих сил – разные (сказанное поясняется рисунками 15.1.а), на котором изображена рамка с током в магнитном поле, и 15.1.б), где представлен вид сверху этой же рамки).

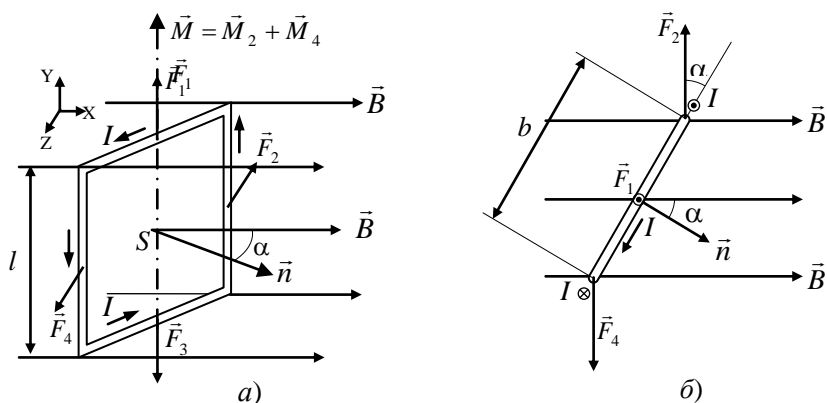


Рис. 15.1

Используя правило левой руки, можно определить направления этих сил и убедиться в том, что при данной ориентации рамки в пространстве они стремятся: а) развернуть рамку так, чтобы угол α стал равен нулю, и б) в итоге растянуть рамку.

Пусть теперь поле, в котором находится рамка, неоднородно. Увеличение индукции магнитного поля графически отображается, в виде сгущения силовых линий (на рис. 15.2.а) и 15.2.б) такое

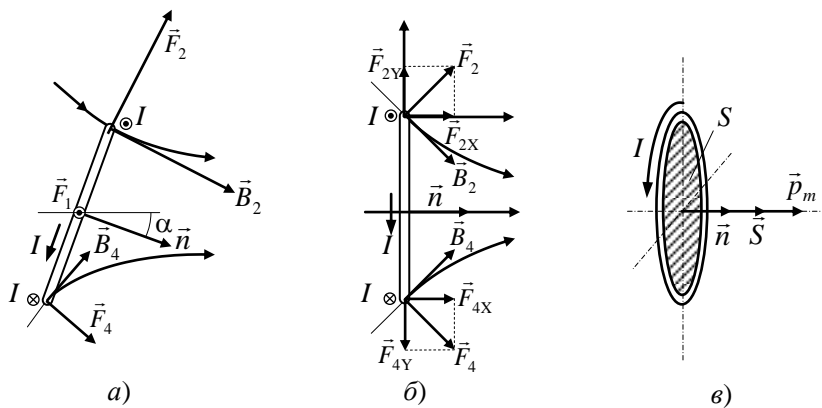


Рис. 15.2

сгущение соответствует правой части рисунка). Силы, действующие на разные участки рамки, теперь не только направлены в разные стороны, но и не одинаковы по величине. Нетрудно заметить, однако, что и в этом случае они стремятся развернуть рамку так, чтобы нормаль к её поверхности (выбираемая по правилу винта в соответствии с током в рамке) оказалась направлена вдоль силовой линии.

Развернувшаяся рамка не останется на месте: действующие на неё силы (на рис. 15.2.б) это силы \vec{F}_2 и \vec{F}_4) имеют не только компоненты \vec{F}_{2Y} и \vec{F}_{4Y} , стремящиеся растянуть рамку, но и компоненты \vec{F}_{2X} и \vec{F}_{4X} , которые втягивают рамку с током в область сильного магнитного поля.

Для описания поведения витка произвольной формы удобно использовать следующее определение.

Магнитным моментом витка с током I будем называть выражение вида

$$\vec{p}_m = I \vec{S} = IS \vec{n}. \quad (15.1)$$

Здесь \vec{S} – псевдовектор, характеризующий поверхность, мысленно натянутую на виток: $\vec{S} = S \vec{n}$, где S – площадь этой поверхности, а \vec{n} – единичный вектор нормали к данной поверхности, причём его направление по правилу винта согласовано с направлением протекания тока по витку.

Нетрудно заметить: при помещении витка с током в магнитное поле он стремится развернуться так, чтобы его магнитный момент был ориентирован вдоль силовой линии, втягиваясь в область сильного поля. Ситуация подобна той, которую мы описывали в случае электрического поля, так же вёл себя диполь с электрическим дипольным моментом \vec{p}_e : этот вектор тоже стремился выстроиться по направлению силовых линий, а сам диполь – втянуться в область с большей напряженностью поля.

Ещё одно замечание: направление вектора \vec{p}_m совпадает с направлением вектора магнитной индукции поля, создаваемого на оси витка самим током, идущим по этому витку.

В однородном магнитном поле (рис. 15.1) развернуть рамку стремятся силы \vec{F}_2 и \vec{F}_4 , моменты которых направлены в одну сторону (вверх), поэтому для суммарного момента \vec{M} этих сил можно записать:

$$\begin{aligned} |\vec{M}| &= F_2 \frac{b}{2} \sin \alpha + F_4 \frac{b}{2} \sin \alpha = B \cdot I \cdot l \cdot \frac{b}{2} \sin \alpha + B \cdot I \cdot l \cdot \frac{b}{2} \sin \alpha = B \cdot I \cdot (bl) \sin \alpha = \\ &= B \cdot I \cdot S \cdot \sin \alpha = B \cdot p_m \cdot \sin \alpha = |[\vec{p}_m \vec{B}]|. \end{aligned}$$

Очевидно, что момент пары сил \vec{M} максимален (то есть $M = M_{max}$), когда угол α между векторами \vec{p}_m и \vec{B} равен 90° . В этом случае

$$B = \frac{M_{max}}{p_m} = \frac{M_{max}}{IS}.$$

Это соотношение может быть использовано для определения величины вектора индукции магнитного поля.

Явление поворота витка в магнитном поле лежит в основе работы электродвигателей постоянного и переменного тока. Дело в том, что если после окончания поворота витка изменить направление силы тока в нём (например, переключением скользящих вместе с витком контактов), то вращение продолжится, поскольку в момент переключения вектор \vec{p}_m станет антипараллелен вектору \vec{B} . После очередного поворота и переключения контакта направление протекания тока вновь поменяется, и т. д. В реальных моторах одновременно поворачивается не один, а десятки или даже сотни витков, намотанных на общий сердечник; каждый из них снабжён скользящими контактами, обеспечивающими изменение направления протекания тока в нужный момент времени.

15.2 МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

15.2.1 Гипотеза Ампера. Гиромагнитное отношение

По характеру воздействия магнитного поля на различные материалы все их можно разделить на несколько групп, среди которых большую часть составляют парамагнетики, диамагнетики и ферромагнетики¹. Парамагнетики и диамагнетики очень слабо взаимодействуют с магнитным полем, причём парамагнетики втягиваются в область сильного поля, а диамагнетики, наоборот, выталкиваются из него. На ферромагнетики магнитное поле оказывает сильное влияние, изготовленные из таких материалов объекты притягиваются магнитами и сами могут становиться таковыми.

Для объяснения природы магнитных свойств вещества Ампер выдвинул гипотезу, согласно которой любой материал можно представить в виде совокупности невидимых глазу из-за своих малых размеров кольцевых микротоков. В ненамагниченном состоянии все микротоки (и их магнитные моменты) ориентированы хаотически, а поскольку \vec{p}_m совпадает по направлению с вектором индукции магнитного поля, создаваемого самим витком на его оси, магнитное поле внутри образца отсутствует вовсе (рис. 15.3.а). При внесении образца в магнитное поле микротоки начинают поворачиваться (рис. 15.3.б), и хотя тепловое движение и взаимодействие токов друг с другом мешают развороту, тем не менее, с увеличением индукции внешнего магнитного поля упорядоченная ориентация микротоков становится всё более явно выраженной (рис. 15.3.в). Общее магнитное поле в веществе является теперь суперпозицией внешнего поля \vec{B} и суммарного поля $\vec{B}_{\text{внут}}$ всех микротоков, что и накладывает свой отпечаток на поведение в магнитном поле всего образца в целом.

Используя данную гипотезу, можно объяснить явление парамагнетизма, однако сама она не может дать ответ основной на вопрос: что это такое – микротоки, какова их физическая природа?

¹Существуют и другие типы магнетиков: антиферромагнетики, ферриты, антиферримагнетики и др.

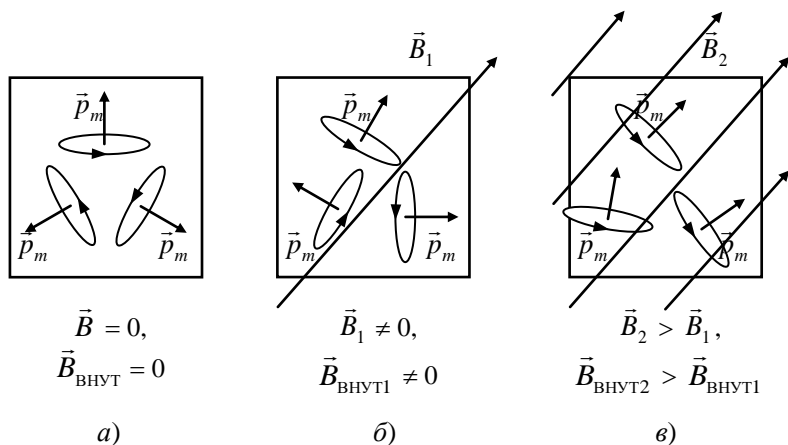


Рис. 15.3

Во времена Ампера о строении вещества люди имели ещё весьма смутное представление, но сейчас даже школьник знаком с полуклассической теорией Бора строения атома, и способен предположить, что микротоки можно считать результатом движения по орбитам вокруг ядра электронов, которые входят в состав атома. Каждый электрон, движущийся по своей орбите – это микроток, и если таких электронов не один (как у водорода) а больше, то, сложив векторно магнитные моменты, соответствующие их орбитальному движению, получаем некоторый усреднённый магнитный момент атома в целом.

Воспользовавшись этим представлением, покажем, как должен быть связан магнитный момент электрона, движущегося вокруг ядра по круговой орбите, с его моментом импульса – параметром, характеризующим вращательное движение электрона (см. рис. 15.4).

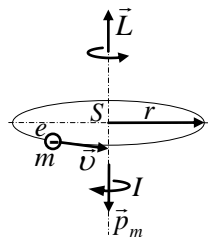


Рис. 15.4

Напомним: моментом импульса L материальной точки (а электрон можно считать такой точкой) относительно некоторой оси (в нашем случае – оси вращения) называется выражение вида

$$\vec{L} = [\vec{r}\vec{p}], \text{ причём}$$

$$L = rp = rmv,$$

где r – расстояние до оси (у нас – радиус орбиты), p – импульс точки ($p = mv$, где m – масса электрона, v – его линейная скорость). Направление вектора \vec{L} согласовано с вектором скорости \vec{v} по правилу винта (на рисунке 15.4 вектор \vec{L} направлен вверх).

В свою очередь, интерпретируя движение электрона, как протекание электрического тока (его направление противоположно направлению вращения электрона, частицы, имеющей отрицательный заряд), можно рассчитать магнитный момент получающегося «витка» – круговой орбиты, по которой движется заряд e , совершая один оборот за время T (соответствующий ток $I = \frac{e}{T}$):

$$p_m = IS = \frac{e}{T} \pi r^2.$$

Так как направление вектора \vec{p}_m согласовано с направлением протекания тока по правилу винта, то на рисунке этот вектор направлен вниз.

Учтём теперь, что $v = 2\pi r/T$. Тогда $\frac{p_m}{L} = - \frac{e}{T} \pi r^2 \cdot \frac{T}{rm \cdot 2\pi r}$, или

$$\frac{p_m}{L} = - \frac{e}{2m}. \quad (15.2)$$

Формула (15.2) носит название орбитального **гиромагнитного отношения**; знак «минус» в ней говорит о том, что вектор момента импульса и вектор магнитного момента электрона при орбитальном движении направлены в противоположные стороны (то есть проекции этих векторов на любую выделенную ось должны иметь разные знаки).

В справедливости соотношения для парамагнитных и диамагнитных материалов можно убедиться на практике; об одном из экспериментов (опыте Штерна - Герлаха) будет рассказано позднее в разделе «Квантовая механика». В случае ферромагнетиков

данное отношение (обозначим его p_{ms}/L_s) не связано с орбитальным движением, и к тому же оно оказывается в два раза больше:

$$\frac{p_{ms}}{L_s} = - \frac{e}{m}. \quad (15.3)$$

15.2.2 Намагниченность \vec{J} . Теорема о циркуляции вектора магнитной индукции в веществе. Вектор напряжённости магнитного поля \vec{H} . Закон полного тока

Принимая гипотезу Ампера, при расчёте индукции магнитного поля в любой среде помимо внешнего поля следует теперь учитывать и поля, создаваемые микротоками, которые соответствуют движению электронов в атомах. Для этого вводится усреднённая характеристика вещества – **намагниченность** \vec{J} ; величина этого вектора равна отношению суммарного магнитного момента некоторого объёма ΔV вещества к величине этого объёма (единица измерения \vec{J} в СИ – $\text{А} \cdot \text{м}^{-2}$)¹.

$$\vec{J} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{p}_{mi}}{\Delta V}. \quad (15.4)$$

В этой формуле N в знаке суммы – общее число микротоков в объёме ΔV . Таким образом, можно сказать, что намагниченность \vec{J} имеет смысл магнитного момента единицы объёма вещества.

Если все \vec{p}_m направлены в одну сторону,

$$\vec{J} = n \vec{p}_m, \quad (15.5)$$

где n – число микротоков (атомов) в единице объёма (то есть, их концентрация).

Рассмотрим, как учитывается наличие микротоков при применении теоремы о циркуляции вектора \vec{B} . Данная проблема акту-

¹Сравните способ введения намагниченности \vec{J} с тем, как ранее был введён вектор поляризованности \vec{P} .

альна, поскольку, теперь нам будет нужно складывать не только «макротоки» $I_{\text{МАКРО}}$, которые пронизывают натянутую на контур поверхность (в виде отдельных проводников с током или пучков заряженных частиц), но и большое число микротоков $I_{\text{МИКРО}}$ (электронных орбит атомов), пронизывающих эту же поверхность:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \sum_{i=1}^{N_1} I_{\text{МАКРО}} + \mu_0 \sum_{i=1}^{N_2} I_{\text{МИКРО}} . \quad (15.6)$$

Расчёт слагаемого $\sum_{i=1}^{N_2} I_{\text{МИКРО}}$ выполняется по схеме, которая была нами опробована при обсуждении формулировки теоремы Гаусса для электрического поля в среде. На рис. 15.5 изображён малый участок контура dl , который, в силу малости, можно считать прямым.

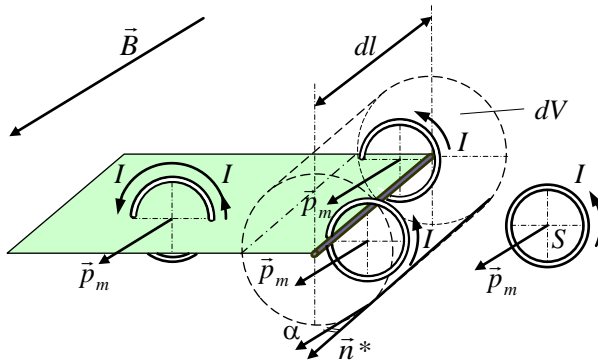


Рис. 15.5

Сама поверхность, натянутая на контур, находится слева от этого участка; очевидно, что вклад в сумму микротоков дадут лишь те из них, которые пронизывают эту поверхность лишь один раз. Они сосредоточены в прилежащей к рассматриваемому участку dl области (наклонного цилиндра) объёмом $dV = S dl \cos \alpha$. (здесь S – площадь отдельного витка-микротока, α – угол между образующей цилиндра и перпендикуляром \vec{n}^* к его основанию). Если концентрация микротоков равна n , то всего их в этой обла-

сти $dN_2 = nSdl \cdot \cos\alpha$ штук, и их сумма вычисляется, как

$$I \cdot dN_2 = I \cdot nSdl \cdot \cos\alpha = n \cdot IS \cdot dl \cdot \cos\alpha = n \cdot p_m \cdot dl \cdot \cos\alpha = Jdl \cdot \cos\alpha = (\vec{J}d\vec{l}).$$

В приведённых выкладках использовано то, что $p_m = IS$ (формула 15.2) и то, что $J = n \cdot p_m$ (формула 15.5).

Последняя запись позволяет заменить суммирование микро-токов в формуле (15.6) на их интегрирование вдоль всего выбираемого контура:

$$\sum_{i=1}^{N_2} I_{i\text{МИКРО}} = \oint_L \vec{J}d\vec{l}.$$

Разделив обе части выражения (15.6) на одну и ту же константу μ_0 и объединив интегралы (они берутся по одному и тому же контуру, а, значит, это можно сделать), получаем:

$$\oint_L \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) d\vec{l} = \sum_{i=1}^{N_1} I_{i\text{МАКРО}}. \quad (15.7)$$

Введём обозначение. Комбинация векторов \vec{B} и \vec{J} вида

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \quad (15.8)$$

называется **вектором напряжённости магнитного поля**. В СИ напряжённость магнитного поля, как и намагниченность, измеряется в амперах на метр ($A \cdot m^{-1}$).

Теперь теорему о циркуляции для магнитного поля в веществе можно сформулировать следующим образом: **циркуляция вектора напряжённости магнитного поля по произвольному замкнутому контуру равна алгебраической сумме макроток, которые пронизывают поверхность, мысленно натянутую на этот контур**,

$$\oint_L \vec{H}d\vec{l} = \sum_{i=1}^N I_{i\text{МАКРО}}. \quad (15.9)$$

Теорему о циркуляции вектора напряжённости магнитного поля называют также **законом полного тока**.

15.2.3 Связь векторов \vec{B} , \vec{J} и \vec{H} . Виды магнетиков.

Использованный нами подход для учёта вклада микротоков в создание общего магнитного поля в веществе сходен с тем, который был применён ранее при рассмотрении теоремы Гаусса для электрического поля. Напомним: с целью учёта вклада полей отдельных молекул (электрических диполей) в создание общего электрического поля нами был также введён вспомогательный вектор (вектор электрического смещения), $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, после чего в формулировке самой теоремы стали фигурировать только свободные (а не связанные с диполями) заряды. Далее мы учли, что $\vec{P} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$, где ϵ – диэлектрическая восприимчивость вещества, в результате чего получили: $\vec{D} = \epsilon_0(1 + \epsilon) \vec{E}$, или $\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}$.

Применим подобные рассуждения и в случае магнитного поля.

Поскольку ориентация магнитных моментов отдельных микротоков определяется индукцией внешнего поля (см. рис. 15.3), то и их векторная сумма также зависит от \vec{B} , то есть $\vec{J} \sim \vec{B}$. Обычно, однако, вектор \vec{J} связывают не с индукцией магнитного поля, а с его напряжённостью \vec{H} , записывая эту связь в виде

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \quad (15.10)$$

при этом коэффициент пропорциональности χ называют **магнитной восприимчивостью** вещества.

Используя соотношение (15.10), можно осуществить следующие выкладки: $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi \vec{H}$, или $\vec{B} = \mu_0(1 + \chi) \vec{H}$.

Если теперь ввести обозначение $1 + \chi = \mu$, то связь векторов \vec{B} и \vec{H} приобретает вид:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad (15.11)$$

где коэффициент μ называется **магнитной проницаемостью** вещества. Так же, как и диэлектрическая проницаемость ϵ , магнитная проницаемость является безразмерной величиной и зависит от свойств вещества.

Диэлектрическая проницаемость ϵ всегда больше единицы; в отличие от неё магнитная проницаемость μ может оказаться меньше единицы. Это связано с тем, что диэлектрическая восприимчивость всегда положительна, в то время как магнитная восприимчивость χ оказывается отрицательной у веществ, относящихся к классу диамагнетиков. Именно по этому параметру и производится классификация магнетиков:

- если $|\chi| \ll 1$ и при этом $\chi > 0$ (обычно $\chi \approx 10^{-5} - 10^{-4}$), то такие вещества являются **парамагнетиками** (типичный пример – щелочные металлы), они слабо реагируют на внешнее магнитное поле, втягиваясь в область с повышенной магнитной индукцией;

- если $|\chi| \ll 1$, но при этом $\chi < 0$ (обычно $\chi \approx 10^{-6} - 10^{-5}$), то такие вещества являются **диамагнетиками** (типичный пример – инертные газы), они также слабо реагируют на внешнее магнитное поле, но выталкиваются из него;

- магнитная восприимчивость **ферромагнетиков** не только положительна и весьма велика ($\chi \gg 1$ и может достигать $10^3 - 10^4$), но она, к тому же, не является константой, $\chi = \chi(H)$, то есть зависит от напряжённости магнитного поля.

15.2.4 Парамагнетизм

Итак, все вещества по их магнитным свойствам можно разделить на несколько классов, среди которых мы выделили парамагнетики (их магнитная восприимчивость $|\chi| \ll 1$ и при этом $\chi > 0$), диамагнетики ($|\chi| \ll 1$, но при этом $\chi < 0$) и ферромагнетики ($\chi \gg 0$, причём $\chi = \chi(H)$). Рассмотрим, чем обусловлены магнитные свойства этих веществ.

Как мы уже говорили, движение электрона по орбите вокруг ядра можно интерпретировать, как протекание микротока, имеющего некоторый магнитный момент \vec{p}_m , связь которого с орбитальным моментом импульса описывается гиромагнитным отношением $\frac{p_m}{L} = -\frac{e}{2m}$. Кроме того, как следует из уравнений кван-

товой механики, каждый электрон обладает собственным моментом импульса \vec{L}_s , спином (поначалу его связывали с вращением электрона вокруг собственной оси, но такое представление оказалось неверным) и соответствующим ему собственным (спиновым) магнитным моментом \vec{p}_{ms} . Связь \vec{p}_{ms} с \vec{L}_s описывается своим

гиромангнитным отношением: $\frac{p_{ms}}{L_s} = -\frac{e}{m}$. Более того, собственными (спиновыми) магнитными моментами обладают также протоны и нейтроны, входящие в состав ядра. Сказанное означает, что общий магнитный момент $\vec{p}_{\text{магн. атома}}$ атома, позволяющий интерпретировать его, как некий единый микроток, должен являться суммой векторов \vec{p}_{mi} всех электронов и \vec{p}_{msj} всех электронов, протонов и нейтронов, входящих в состав атома:

$$\vec{p}_{\text{магн. атома}} = \vec{p}_{m1} + \vec{p}_{m2} + \dots + \vec{p}_{ms1} + \vec{p}_{ms2} + \dots \quad (15.12)$$

Если $\vec{p}_{\text{магн. атома}}$ не равен нулю, то отличной от нуля является и

намагниченность $\vec{J} = \frac{\sum_{k=1}^N \vec{p}_{\text{магн. атома } k}}{\Delta V}$ (здесь k – номер атома в малом

объёме ΔV материала), а поскольку микротоки в магнитном поле стремятся развернуться так, чтобы их \vec{p}_m совпадали по направлению с векторами \vec{B} и \vec{H} , то магнитная восприимчивость χ (коэффициент пропорциональности в формуле $\vec{J} = \chi \vec{H}$) оказывается положительной. Из-за того, что магнитные моменты электронов протонов и нейтронов направлены в разные стороны суммарный магнитный момент атома оказывается малым, не очень большой оказывается и намагниченность, поэтому $|\chi| \ll 1$. Вещества, магнитные моменты атомов $\vec{p}_{\text{магн. атома}}$ которых в отсутствие внешних воздействий **не равны нулю** и при этом не оказывают влияния друг на друга, являются **парамагнетиками**, для них обычно $\chi \approx 10^{-5} - 10^{-4}$.

Очевидно: чем больше напряжённость внешнего поля \vec{H} , тем больше атомы разворачивают свои магнитные моменты по полю (их полному развороту мешают тепловые колебания атомов, их взаимодействие друг с другом – аналог трения). Зависимость $J(H)$ оказывается линейной, правда, лишь в области не слишком больших значениях напряжённости магнитного поля. Возрастание H может привести к выходу кривой $J(H)$ на насыщение (рис. 15.6), которое наступит, когда по полю развернутся магнитные моменты всех атомов.

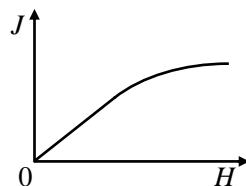


Рис. 15.6

То, что тепловые колебания атомов мешают упорядочению их магнитных моментов, находит своё отражение в законе Кюри, согласно которому магнитная восприимчивость парамагнетиков обратно пропорциональна термодинамической температуре:

$$\chi = \frac{C_1}{T}, \quad (15.13)$$

где C_1 – некоторая постоянная для данного вещества величина (постоянная Кюри).

Парамагнитными свойствами может обладать также газ свободных электронов в твёрдом теле. Это происходит в случае, если число электронов, обладающих проекцией собственного (спинового) магнитного момента, направленной по полю, заметно превышает число электронов, собственный магнитный момент которых направлен против поля. В отличие от парамагнетизма электронов в атоме, парамагнетизм свободных носителей заряда не зависит от температуры.

Типичным примером веществ – парамагнетиков являются щелочные металлы.

15.2.5 Прецессия электронных орбит в атоме. Диамагнетизм

Может оказаться, что суммарный магнитный момент атома $\sum_{k=1}^N \vec{p}_{\text{магн}}^k$ какого-либо вещества равен нулю, тогда нулю ока-

жется и его намагниченность J . Казалось бы, это означает, что нулевой должна оказаться и магнитная восприимчивость χ , однако этого не наблюдается, поскольку в таких условиях наблюдается эффект, о котором пока мы не говорили: эффект прецессии электронных орбит в магнитном поле.

Рассмотрим электрон, движущийся по круговой орбите вокруг ядра. Движению этого электрона соответствуют орбитальный момент импульса \vec{L} и орбитальный же магнитный момент \vec{p}_m , которые направлены в противоположные стороны (рис. 15.7).

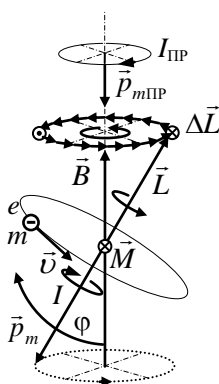


Рис. 15.7

В однородном магнитном поле, силовые линии которого на рисунке направлены вверх, вектор \vec{p}_m стремится развернуться по полю, и это означает, что на электронную орбиту действует момент сил \vec{M} , направленный вглубь рисунка. Однако, согласно основному закону динамики вращательного движения, $\vec{M} = \Delta\vec{L}/\Delta t$, то есть к моменту импульса \vec{L} , лежащему в плоскости рисунка должен добавиться вектор $\Delta\vec{L}$, направленный туда же, что и вектор \vec{M} , то есть – вглубь рисунка.

Новый момент импульса $\vec{L}' = \vec{L} + \Delta\vec{L}$ теперь уже не будет лежать в плоскости рисунка, ось вращения повернется: начнется прецессия электронной орбиты. Ситуация аналогична той, которую мы рассматривали в механике в случае прецессии гироскопа под действием силы тяжести. Но если в механике всё заканчивалось констатацией возникновения прецессии (того, что ось вращения и сам гироскоп начинают поворачиваться относительно вертикали), то сейчас следует учесть, то, что прецессия электронной орбиты означает возникновение добавочного движения отрицательно заряженной частицы, электрона. Добавочному движению соответствует добавочный ток прецессии $I_{пр}$, направление которого противоположно направлению движения

кончика вектора \vec{L} . Такой ток обладает магнитным моментом $\vec{p}_{\text{мпр}}$, направленным *против вектора \vec{B}* (и, соответственно, – вектора \vec{H}), причём, чем сильнее внешнее поле, тем больше $\vec{p}_{\text{мпр}}$. И подобные магнитные моменты, направленные против поля, возникают у всех электронов в атоме, поэтому теперь намагниченность $\vec{J} \sim \sum_{k=1}^N \vec{p}_{\text{матом}k}$ не только не равна нулю, но, так же, как и каждый из добавочных магнитных моментов, направлена в сторону, противоположную вектору \vec{H} . Другими словами, $\vec{J} = \chi \vec{H}$, но теперь $\chi < 0$.

Эффект мал, $|\chi| \ll 1$ (обычно $|\chi| \approx 10^{-6} - 10^{-5}$), и поэтому прецессия орбит, имеющая место и в случае парамагнетиков, на фоне уже имеющегося магнитного момента атома практически незаметна. Но в **диамагнетиках**, у которых в отсутствие внешнего магнитного поля суммарный магнитный момент атома равен нулю, именно возникновение прецессии под действием внешнего поля приводит к намагничиванию «против поля» и выталкиванию образца из этого поля.

Особенно явно эффект выталкивания наблюдается в случае сверхпроводников, которые являются идеальными диамагнетиками (у них $\chi = -1$, то есть $\vec{J} = -\vec{H}$, и магнитное поле внутри сверхпроводника полностью компенсируется: возникает «экранировка», подобная той, которая имеет место внутри уединённого проводника, помещённого в электростатическое поле). Природа столь сильного намагничивания против поля, однако, совсем иная. О том, что при этом происходит внутри сверхпроводника, мы поговорим при изучении третьей части курса физики.

График зависимости $J(H)$ для диамагнетика приведён на рис. 15.8: в отличие от рис 15.6 наклон прямой $J(H)$ является заметно менее крутым, и при этом насыщения нет.

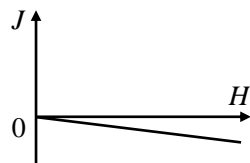


Рис. 15.8

В твердом теле, помещённом в магнитное поле, свободные электроны начинают двигаться по замкнутым орбитам, создавая при этом добавочное магнитное поле, направленное противоположно внешнему. Эффект также невелик: диамагнетизм свободных носителей (диамагнетизм Ландау) по порядку величины сравним с диамагнетизмом электронных оболочек.

15.2.6 Ферромагнетизм. Петля гистерезиса

Особенностью **ферромагнетиков** является, во-первых, то, что явление намагничивания у них проявляется очень сильно ($\chi \gg 1$) при этом магнитная восприимчивость этих веществ не является константой, а сама зависит от величины напряжённости магнитного поля, то есть $\chi = \chi(H)$. Во-вторых, графики зависимостей $J(H)$ и $B(H)$ ферромагнетиков имеют вид петли: образцы, как бы «помнят» свою «предысторию» (как они намагничивались ранее); соответствующая петля носит название **петли гистерезиса** (от английского *history*, история).

Если ненамагниченный ферромагнетик поместить в магнитное поле, напряжённость которого можно увеличивать, график зависимости $J(H)$ будет иметь вид, представленный на рис. 15.9.а). На начальном участке происходит быстрое возрастание намагниченности, но затем, после прохождения участка максимальной крутизны, рост J замедляется и кривая выходит на насыщение. Для достижения насыщения требуются поля гораздо меньшие, чем в случае парамагнетика.

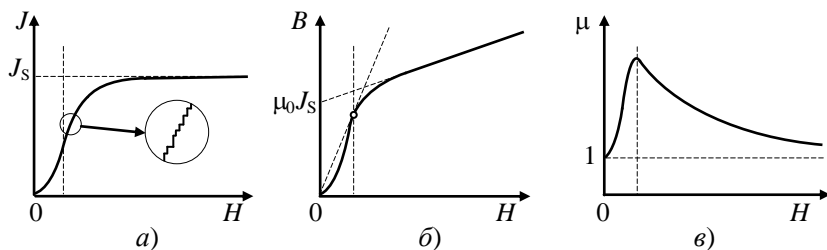


Рис. 15.9

Похожий вид имеет график зависимости $B(H)$ с той только разницей, что он не выходит на насыщение, а всё более приближается к наклонной прямой (рис. 15.9.б). Это и понятно:

согласно определению $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J}$, или $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J})$, и, коль

скоро J , выходя на насыщение, становится некоторой константой J_s , то график зависимости $B = \mu_0(H + J_s)$ оказывается прямой линией, отсекающей по оси ординат отрезок $B = \mu_0 J_s$ и имеющей тангенс угла наклона к оси абсцисс, равный μ_0 .

На рис. 15.9.в) показан график зависимости от напряжённости магнитного поля для магнитной проницаемости вещества μ . Так как $\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{J}) = \mu_0(\vec{H} + \chi \vec{H}) = \mu_0(1 + \chi) \vec{H} = \mu_0 \mu \vec{H}$, то это означает, что максимуму графика зависимости $\mu(H)$ соответствует область с наибольшей крутизной прямой, проведённой из начала координат и являющейся при этом касательной к графику зависимости $B(H)$.

Петля гистерезиса возникает, если по достижении насыщения (точка А на рис. 15.10.а) напряжённость магнитного поля начать уменьшать. Окажется, что даже после того, как внешнее поле ис-

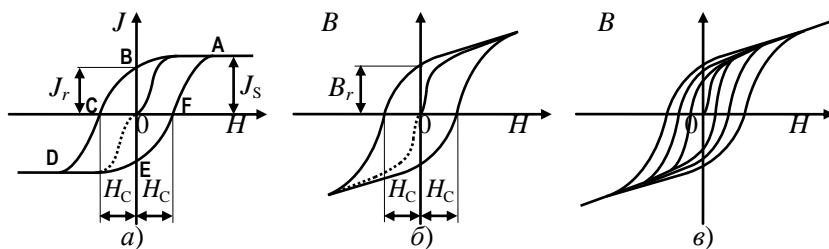


Рис. 15.10

чезнет, у образца сохранится остаточная намагниченность J_r , (точка В) для полного устранения которой необходимо поле с противоположным направлением вектора \vec{H} .

Значение напряжённости, при котором намагниченность вновь станет равной нулю, носит название *коэрцитивной силы* и обо-

значается H_c (рис. 15.10.а, точка **С**). Очевидно, что коэрцитивная сила, как и напряжённость магнитного поля вообще, измеряется в амперах на метр.

Чем больше коэрцитивная сила, тем труднее перемагнитить образец. Вещества с большими значениями H_c (то есть с широкой петлёй гистерезиса) называются магнитожёсткими, из них изготавливаются постоянные магниты; а вещества, характеризующиеся малой коэрцитивной силой (с узкой петлёй гистерезиса) – магнитомягкими. Из последних изготавливают сердечники для трансформаторов: в переменном электрическом поле, при котором работают эти устройства, происходит периодическое перемагничивание сердечников, и чем труднее это делать, тем большая доля электрической энергии вместо преобразования будет расходоваться на их перемагничивание.

Если после достижения нулевой намагниченности напряжённость магнитного поля продолжать увеличивать по величине, то намагниченность вновь выйдет на насыщение (точка **D**), при этом направление вектора \vec{J} будет совпадать с направлением вектора \vec{H} . Затем напряжённость магнитного поля можно начать уменьшать, и при $H = 0$ образец вновь станет иметь нулевую намагниченность (точка **E**). При $H = H_c$ намагниченность вновь окажется равной нулю (точка **F**) и в дальнейшем кривая зависимости вновь выйдет на насыщение: петля **ABCDEF** замкнётся.

Аналогичная ситуация имеет место и в случае графика зависимости $B(H)$, отличие заключается лишь в том, что концы петли оказываются не горизонтальными, а асимптотически стремятся к наклонной прямой, которой в области больших напряжённостей поля характеризует связь B и H (рис. 15.10.б).

При первом намагничивании J можно не доводить до насыщения, тогда петля гистерезиса окажется меньше по размерам. Подобные петли называются частными. Пример системы частных петель, лежащих внутри полной петли для зависимости $B(H)$ представлен на рис. 15.10.в.

Магнитная восприимчивость χ ферромагнетика и связанная с ней магнитная проницаемость $\mu = 1 + \chi$ в сильной мере зависят от

H : они максимальны в области, где график зависимости $J(H)$ возрастает наиболее быстро. Кроме того, так же, как и у парамагнетиков, магнитная восприимчивость ферромагнетиков зависит от температуры. Эта зависимость приблизительно передается законом Кюри – Вейса:

$$\chi = \frac{C_2}{T - T_c}, \quad (15.14)$$

где T_c – температура Кюри, *по достижению которой ферромагнетик переходит в парамагнитное состояние*; C_2 – постоянная.

В отличие от диа- и парамагнетиков, магнитные свойства которых определяются поведением отдельных атомов или свободных электронов, характерной чертой ферромагнетиков является наличие в них областей самопроизвольного (спонтанного) намагничивания – **доменов**. Возникновение доменов в ферромагнетике обусловлено так называемым обменным взаимодействием электронов в атомах, которое имеет квантовомеханическую природу. В результате этого взаимодействия собственные (спиновые) магнитные моменты электронов соседних атомов могут выстраиваться параллельно друг другу, и данный элемент объема вещества оказывается намагниченным до насыщения и приобретает отличный от нуля магнитный момент. Границы между доменами состоят из атомов, магнитные моменты которых образуют переходные области, постепенно меняя ориентацию от одного домена к другому. Характерные поперечные размеры доменов в железе, например, составляют 0,01 – 0,1 мм, толщина доменных стенок (переходных областей) – около 0,0001 мм.

Ход кривой намагничивания ферромагнетика тесно связан с процессами, происходящими в доменах. Внутри каждого из них магнитные моменты электронов выстроены в одном направлении, однако магнитные моменты отдельных доменов имеют хаотическую ориентацию, при этом намагниченность магнетика равна нулю. Сказанное иллюстрируется рисунком 15.11, в верхней части которого условно изображены четыре домена, вектора намаг-

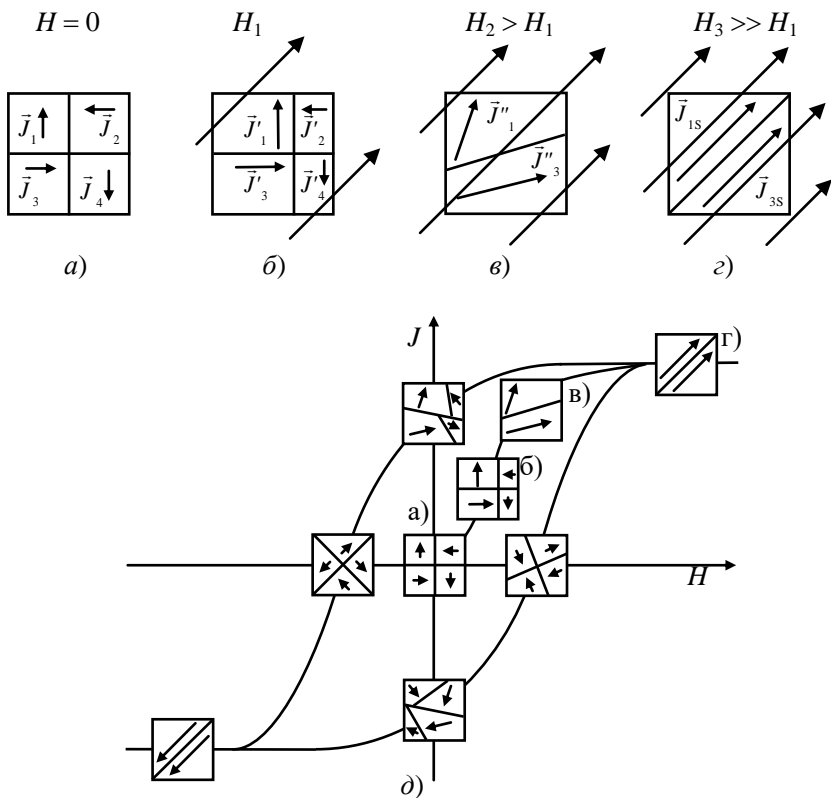


Рис. 15.11

ниченности \vec{J} которых имеют разные направления (рис. 15.11.а), поэтому при $H = 0$ сумма $\vec{J}_1 + \vec{J}_2 + \vec{J}_3 + \vec{J}_4 = 0$.

Внесём такой объект в магнитное поле, напряженность которого можно менять. В области малых полей нарастание H ведет к росту размеров тех доменов, направление вектора \vec{J} в которых составляет малые углы с вектором \vec{H} (на рис. 15.11.б) \vec{J}_1 увеличивается до \vec{J}'_1 , \vec{J}_3 увеличивается до \vec{J}'_3 , в то время, как \vec{J}_2 и \vec{J}_4

уменьшаются, соответственно, до \vec{J}'_2 и \vec{J}'_4). Увеличение размеров происходит путем перемещения границ доменов; в области малых полей процесс идет плавно, но затем (с ростом H) приобретает скачкообразный характер. При этом на кривой намагничивания появляются отдельные ступеньки (рис. 15.9.а); данное явление носит название эффекта Баркгаузена.

При дальнейшем увеличении напряжённости начинается разворот всех доменов по полю до тех пор, пока их магнитные моменты не станут параллельными вектору \vec{H} (на рис. 15.11.в) домены с \vec{J}'_2 и \vec{J}'_4 исчезли вовсе, а домены с \vec{J}'_1 и \vec{J}'_3 , ещё больше увеличившись в размерах и начав поворачиваться вдоль силовых линий приобрели магнитные моменты \vec{J}''_1 и \vec{J}''_3). После полного разворота доменов по полю намагничивание закончится, а намагниченность выходит на насыщение (\vec{J}_{1S} и \vec{J}_{3S} на рис. 15.11.г).

Если напряженность магнитного поля начать снижать, то перечисленные процессы пойдут в обратном направлении: сначала нарушится ориентация доменов, а затем начнут возникать домены, намагниченные под разными углами к вектору \vec{H} . Границы новых доменов не совпадают с теми, которые были до намагничивания: разбиение на домены происходит «заново». Но даже при снижении напряжённости поля до нуля преимущественное направление у магнитных моментов доменов образца всё же сохранится. Возникает магнитный гистерезис: для размагничивания образца и полной разориентации доменов требуется создать поле H_c , силовые линии которого имеют направление, противоположное первоначальному. Возможные варианты направления векторов намагниченности отдельных доменов на разных стадиях изменения H показаны стрелочками на рис. 15.11.д).

Нагрев образца вносит хаос в ориентацию доменов. Если температура станет выше некоторого значения T_c , энергия тепловых колебаний атомов превысит энергию обменного взаимодействия. В этом случае домены «распадутся»: магнитная связь между атомами нарушится, каждый из них будет реагировать на воздей-

ствие внешнего поля самостоятельно, и ферромагнетик превратится в парамагнетик. Температура такого перехода и называется точкой Кюри.

В заключение следует отметить, что существует важный класс кристаллов, которые можно представить в виде двух вставленных друг в друга подрешеток с противоположно направленными магнитными моментами атомов, причём эти моменты в сумме не компенсируют друг друга. Соответствующие вещества носят название ферритов. Ферриты ведут себя подобно ферромагнетикам, однако, замечательной особенностью, обусловившей их широкое применение, является высокое электрическое сопротивление таких материалов. Сопротивление ферритов превышает сопротивление металлов - ферромагнетиков в $10^5 - 10^{15}$ раз, что чрезвычайно важно при использовании этих материалов в диапазоне сверхвысоких частот (в СВЧ-диапазоне). В обычных ферромагнетиках на этих частотах возникают вихревые токи Фуко, которые резко снижают к. п. д. соответствующих устройств, разогревая их и выводя из строя. Ферритовые же сердечники, благодаря своему большому сопротивлению позволяют резко снизить тепловые потери: вихревые токи в них оказываются во много раз меньше. Общая химическая формула многих ферритов может быть записана в виде $MeO \cdot Fe_2O_3$, где символ Me означает двухвалентный металл: Mg , Ni , Co , Cu и др.

Ферриты широко применяются при изготовлении магнитной ленты и дисков для аудио- и видеозаписывающих систем, элементов запоминающих устройств современных компьютеров. Присваивая положительному значению остаточной намагниченности J_r отдельного участка ленты или диска значение «1», а отрицательному – значение «0», на подобном носителе с помощью внешнего магнитного поля можно записывать и хранить информацию в двоичном коде.

Некоторые примеры

- К диамагнетикам относятся инертные газы, азот, водород, кремний, фосфор, висмут, цинк, медь, золото, серебро, а также многие другие, как органические, так и неорганические, соединения. Человек в магнитном поле ведет себя как диамагнетик.

- Идеальными диамагнетиками являются сверхпроводники, их магнитная восприимчивость $\chi = -1$, то есть внешнее магнитное поле внутри них полностью экранируется.

- Парамагнетиками являются щелочные и щелочно-земельные металлы, некоторые переходные металлы, соли железа, кобальта, никеля, редкоземельных металлов, кислород, окись азота.

- Примеры ферромагнетиков: железо, никель, кобальт, их соединения и сплавы, некоторые сплавы марганца, серебра, алюминия и др. При низких температурах некоторые редкоземельные элементы – гадолиний, тербий, диспрозий, гольмий, эрбий, тулий.

- Наличие у электронов собственного (спинового) момента импульса и связанного с ним магнитного момента объясняется в рамках релятивистской квантовой механики. Таким образом, используя в повседневной жизни постоянные магниты, мы каждый раз сталкиваемся с объектами, понять природу которых можно, лишь зная квантовую механику и специальную теорию относительности.

- Управляя движением порошков, приготовленных на основе ферромагнитных частиц, можно шлифовать и полировать поверхности изделий, дробить мелкие объекты, смешивать сыпучие и жидкие материалы, перемещать введенные в их потоки объекты.

- Магнитное поле влияет на размеры ферромагнитного образца (например, на длину ферромагнитного стержня), поскольку при намагничивании происходит некоторое изменение расстояния между атомами. Образец может как расширяться, так и сжиматься – этот эффект используется для получения ультразвука.

- Долгое время считалось, что в кристаллической решетке ферромагнетика обязательно должны присутствовать атомы группы железа или редкоземельные элементы. В настоящее время, однако, уже синтезированы кристаллы на основе орга-

нических соединений, правда, их ферромагнитные свойства проявляются лишь при температуре ниже 1,5 К.

- Если ферромагнетик размельчить до частиц, имеющих размеры порядка одного домена (реально – несколько микрометров), а затем размешать полученный порошок в жидкости (воде, керосине, минеральном или силиконовом масле), получится магнитная жидкость, движением которой можно управлять, используя магнитное поле. Магнитным полем можно менять плотность и вязкость (вплоть до «затвердевания») такой жидкости, её оптическую прозрачность.

Вопросы для повторения

1. Что называется магнитным моментом витка с током? Как ведёт себя виток в однородном и неоднородном магнитных полях?
2. Какой принцип лежит в основе работы электромотора?
3. Что называется намагниченностью вещества \vec{J} ? В каких единицах намагниченность измеряется в СИ?
4. Что называется вектором напряжённости магнитного поля \vec{H} ? В каких единицах напряжённость магнитного поля измеряется в СИ?
5. Сформулируйте закон полного тока. Продемонстрируйте, как, пользуясь этим законом, можно вывести формулу для индукции магнитного поля, создаваемого прямым тонким проводником с током на некотором расстоянии от него.
6. Какие классы магнетиков вам известны? По какому параметру они отличаются друг от друга?
7. Объясните, чем обусловлено явление парамагнетизма.
8. Объясните, чем обусловлено явление диамагнетизма.
9. Что такое «домены» и какую роль они играют в формировании свойств ферромагнетика?
10. Начертите графики зависимости намагниченности от напряжённости магнитного поля для пара- и диамагнетиков. Чем отличаются эти графики?
11. Объясните, что называется петлёй гистерезиса, и какие

физические процессы приводят к её возникновению.

12. Что называется остаточной индукцией, остаточной намагниченностью, коэрцитивной силой, и в каких единицах эти параметры измеряются в СИ?

13. Как изменение температуры влияет на магнитные свойства материалов?

16.1 ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

16.1.1 Явление электромагнитной индукции

16.1.2 Явление самоиндукции

16.1.3 Явление взаимной индукции

16.1.4 Энергия магнитного поля

16.1.5 Система уравнений Максвелла

Некоторые примеры

Контрольные вопросы

16.1 ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

16.1.1 Явление электромагнитной индукции

Если взять замкнутый проводящий контур (например, круговой виток провода), то при поднесении к нему постоянного магнита в витке возникнет электрический ток; аналогичный эффект возникает и при удалении магнита от витка, ток при этом идёт в противоположном направлении. То, что электрическое поле способно породить магнитное (при прохождении по проводнику постоянного электрического тока) было открыто Эрстедом в 1820 году, для установления обратного эффекта, то есть того, что *магнитное поле* способно порождать электрическое, понадобилось еще десять лет. Существенным здесь оказалось то, что для проявления эффекта магнитное поле должно меняться со временем.

Открытое в 1831 году Фарадеем *явление электромагнитной индукции заключается в возникновении э. д. с. при изменении магнитного потока через поверхность, ограниченную замкнутым контуром или заметаемую проводником в процессе движения.*

Направление протекания тока в замкнутом контуре определяется по *правилу Ленца: индукционный ток всегда направлен так, чтобы препятствовать причине, его вызывающей.*

Пример 16.1. Пусть к замкнутому проводочному контуру северным полюсом приближается постоянный магнит (см. рис. 16.1). Как будет направлен ток, индуцируемый при этом в контуре?

Прежде всего, объясним, почему ток вообще возникнет. *Приближение* магнита к контуру (стрелка 1) означает, что магнитное

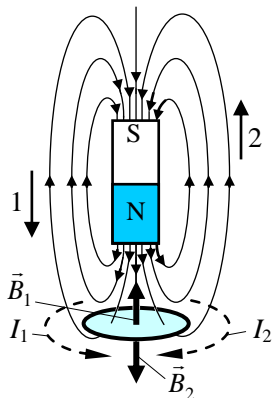


Рис. 16.1

поле, в котором находится виток, становится всё более и более сильным (его индукция возрастает), увеличивается и магнитный поток Φ через площадь, ограниченную контуром. Увеличение магнитного потока (то есть, его изменение) приводит к возникновению э. д. с. индукции в контуре, и по нему начинает идти ток.

Для ответа на вопрос о направлении тока сначала следует нарисовать линии индукции поля магнита (на рисунке они направлены вниз). Теперь применим правило Ленца: «индукци-

онный ток должен препятствовать причине, его вызывающей». Для того, чтобы воспрепятствовать возрастанию потока, образованного полем, линии индукции которого направлены вниз, необходимо создать в контуре ток, магнитное поле которого характеризуется линиями индукции, направленными вверх — \vec{B}_1 . Если вспомнить картину силовых линий, создаваемых кольцом с током (рис. 13.5.б) и применить правило винта, легко понять, что возникающий ток должен иметь направление, указанное на рисунке стрелкой I_1 .

Если магнит удаляется от контура (стрелка 2), магнитный поток уменьшается. Препятствовать этому уменьшению можно, лишь создав индукционный ток, линии индукции которого будут теперь направлены вниз — \vec{B}_2 : ток пойдёт в направлении стрелки I_2 .

Пример 16.2. Пусть прямой, параллельный оси Z проводник, имеющий длину l , движется поступательно со скоростью v вдоль

оси X в плоскости XZ , находясь в однородном магнитном поле с индукцией B , силовые линии которого направлены вдоль оси Y (рис. 16.2).

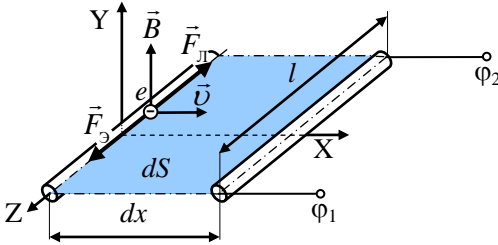


Рис. 16.2

При движении проводника в магнитном поле на находящиеся в нём заряды действует сила Лоренца. В металле перемещаться могут лишь электроны, и под действием этой силы они начинают смещаться к дальнему от нас

концу проводника, в результате чего он заряжается отрицательно (а ближний конец – положительно). Накопление зарядов происходит до тех пор, пока сила \vec{F}_3 , действующая на электрон со стороны возникшего электрического поля, не уравнивает силу Лоренца \vec{F}_L , при этом между концами проводника создаётся разность потенциалов $\phi_1 - \phi_2$. Так как $F_L = e v B$ (здесь e – заряд электрона, а v – скорость его движения вместе с проводником, причём угол между векторами \vec{v} и \vec{B} равен 90°), а $F_3 = e E$, где E – напряжённость возникшего электрического поля, то, с учётом того, что связь между напряжённостью E и разностью потенциалов на концах проводника выражается формулой $E = (\phi_1 - \phi_2)/l$, можно записать: $e v B = e(\phi_1 - \phi_2)/l$, или

$$\phi_1 - \phi_2 = l v B. \quad (16.1)$$

В нашем случае сила Лоренца играет роль сторонней, разделяющей заряды в движущемся проводнике. Запишем закон Ома для участка неоднородной цепи: $I(R + r) = \phi_1 - \phi_2 + \mathcal{E}$. Поскольку в состоянии равновесия ток по проводнику не идёт ($I = 0$), следовательно,

$$\mathcal{E} = -(\phi_1 - \phi_2) = -l v B = -l \frac{dx}{dt} B = -\frac{d(xl)}{dt} B = -\frac{dS}{dt} B,$$

где dS – площадь, заметаема проводником в процессе движения.

Если учесть, что $dS \cdot B = d\Phi_M$, где $d\Phi_M$ – магнитный поток через поверхность dS , то окончательная формула будет выглядеть так:

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_M}{dt}. \quad (16.2)$$

Данная формула оказывается справедливой не только при поступательном, но и при вращательном движении проводника, причём вектор скорости не обязательно должен быть перпендикулярен силовым линиям. Аналогичное выражение описывает возникновение э. д. с. и в замкнутом контуре при изменении магнитного потока через мысленно натянутую на него поверхность. При этом контур может быть неподвижен, а меняется магнитное поле.

Таким образом, *э. д. с. индукции равна взятой с обратным знаком скорости изменения магнитного потока через поверхность, ограниченную замкнутым контуром или заметаемую проводником в процессе движения (закон Фарадея)*. Знак «минус» в формуле (16.2) отражает уже упоминавшееся выше правило Ленца: индукционный ток направлен так, чтобы препятствовать причине, его вызывающей.

Если контур содержит не один, а N витков, то в формулу (16.2) вместо магнитного потока Φ_M через один виток следует подставлять выражение $\Psi = N\Phi_M$; параметр Ψ называется *потокосцеплением* и также измеряется в веберах.

Явление электромагнитной индукции лежит в основе работы генераторов электрического тока. В таких устройствах для получения электрической энергии проволочную рамку (точнее – систему рамок), находящуюся в магнитном поле, приводят во вращение с помощью потоков воды или пара, двигателей внутреннего сгорания или просто усилиями собственных мускулов.

В заключение заметим, что индукционные токи, которые возникают при изменении магнитного потока, могут течь не только в проволочных контурах, но и в объёме массивных проводников, заметно нагревая их. Эти токи называются токами Фуко; данное явление используется, например, для плавки металлов.

16.1.2 Явление самоиндукции

Электрический ток I , идущий в проводящем контуре, создаёт собственное магнитное поле и соответствующий этому полю собственный магнитный поток Φ_M , который сам пронизывает поверхность, ограниченную контуром. При изменении I меняется и Φ_M (очевидно, $\Phi_M \sim I$), вследствие чего в контуре возникает добавочная э. д. с. **Явление возникновения э. д. с. в контуре при изменении силы тока в нём называется самоиндукцией.**

Прямую пропорциональную зависимость Φ_M от I (или же, если контур содержит несколько витков, – потокосцепления Ψ от I) можно выразить формулой $\Phi_M = LI$, в которой коэффициент

$$L = \frac{\Phi_M}{I}, \quad (16.3)$$

зависящий от свойств материала (M) среды, в которой находится контур, от его размера (P) и формы (Φ), называется **индуктивностью**. В СИ индуктивность измеряется в генри (в честь физика, открывшего явления самоиндукции), $1 \text{ Гн} = 1 \text{ Вб} \cdot \text{А}^{-1}$.

Учитывая связь Φ_M с I , для возникающей э. д. с. можно записать:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_M}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -\left(L \frac{dI}{dt} + I \frac{dL}{dt} \right). \quad (16.4)$$

Если индуктивность контура является константой (не меняются со временем ни размер, ни форма контура, остаются теми же свойства окружающей среды), то тогда $\frac{dL}{dt} = 0$, и

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}. \quad (16.5)$$

Зачастую эту формулу называют законом Генри для явления самоиндукции; как и раньше знак «минус» отражает необходимость выполнения для индукционного тока правила Ленца.

Пример 16.3. Продемонстрируем, как выводится формула для индуктивности тороида (или бесконечно длинного тонкого соленоида) и рассмотрим, от чего она зависит.

Ранее мы вывели формулу для индукции магнитного поля внутри тороида, содержащего n витков на единицу длины,

$$B = \mu_0 n I = \frac{N}{l} \mu_0 I,$$

где l – длина тороида, N – число витков в нём, I – сила тока, идущего по тороиду. Применяя закон полного тока, можно получить аналогичную формулу для магнитного поля, создаваемого внутри тороида, не «пустого» внутри, а навитого на сердечник, изготовленный из материала с магнитной проницаемостью μ :

$$B = \mu \mu_0 n I = \frac{N}{l} \mu \mu_0 I,$$

Используя данное соотношение, можно записать выражение для магнитного потока через один виток (площадь, ограниченную витком обозначим S): $\Phi = BS = \frac{N}{l} \mu \mu_0 I S$ и для общего магнитного

потока (потокосцепления) через все N витков:

$$\Psi = \frac{N^2}{l} \mu \mu_0 I S.$$

Таким образом, согласно определению ($L = \frac{\Psi}{I}$), получаем:

$$L = \frac{N^2}{l} \mu \mu_0 S = \mu \mu_0 n^2 l S. \quad (16.6)$$

Сделаем некоторые выводы.

– L действительно зависит от свойств среды (от магнитной проницаемости μ) сердечника, от размеров проводящего контура (то есть от числа витков N и его длины l), а также – от его формы (мы воспользовались формулой для индукции B внутри тонкого тороида, а не какого-либо иного объекта).

– Для того, чтобы индуктивность оставалась постоянной требуется не только неизменность N и l , формы тороида, но независимость от времени μ . Последнее может не выполняться, напри-

мер, при использовании ферромагнитных сердечников: изменение силы тока в контуре ведёт к изменению напряженности магнитного поля H в сердечнике, но $\mu = \mu(H)$ следовательно, магнитная проницаемость тоже будет меняться.

– Формула 16.6 позволяет продемонстрировать, в каких единицах измеряется магнитная постоянная:

$$[\mu_0] = [L] \frac{[I]}{[S]} = \text{Гн} \cdot \frac{\text{м}}{\text{м}^2} = \text{Гн} \cdot \text{м}^{-1}.$$

16.1.3 Явление взаимной индукции

Если два проводящих контура расположить неподалёку друг от друга (или надеть на общий ферромагнитный сердечник), то окажется, что при изменении силы тока в одном из контуров, во втором возникнет э. д. с.

Явление возникновения э. д. с. в одном контуре при изменении силы тока в другом называется явлением взаимной индукции.

Сказанное поясняется рисунком 16.3, на котором изображены два контура (А и Б), расположенных в воздухе неподалёку друг от друга.

При увеличении силы тока I_1 в контуре А в контуре Б возникает э. д. с. взаимной индукции, причём ток I_2 будет иметь такое направление, чтобы уменьшить магнитный поток, создаваемый током I_1 (см. правило Ленца). Направление протекания тока I_2 и силовые линии создаваемого им магнитного поля рис. 16.3 показаны пунктиром.

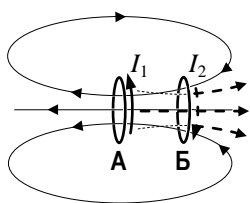


Рис. 16.3

Аналогичная картина будет наблюдаться и в случае, если сила тока I_1 будет оставаться неизменной, но контур А мы начнём приближать к контуру Б.

Если $\Phi_{1Б}$ – магнитный поток, создаваемый током I_1 через поверхность, ограниченную контуром Б, то э. д. с. $\mathcal{E}_Б$, возникающая

в этом контуре, может быть рассчитана по формуле

$$\mathcal{E}_B = -L_{B1} \frac{dI_1}{dt}. \quad (16.7)$$

Множитель $L_{B1} = \Phi_{1B}/I_1$, входящий в эту формулу, носит название коэффициента взаимной индукции; его величина зависит от магнитных свойств материала среды, в которой находятся контуры **А** и **Б**, от их размеров, формы.

Ситуацию можно «обратить»: менять ток I_2 в контуре **Б** и наблюдать возникновение э. д. с. \mathcal{E}_A в контуре **А**:

$$\mathcal{E}_A = -L_{A2} \frac{dI_2}{dt}. \quad (16.8)$$

В формуле (16.8) $L_{A2} = \Phi_{2A}/I_2$, где Φ_{2A} – магнитный поток, создаваемый током I_2 через поверхность, ограниченную контуром **А**; L_{A2} – коэффициент взаимной индукции (в СИ измеряется в генри).

В воздухе $L_{A2} = L_{B1}$, даже если контуры **А** и **Б** разные (например, два соленоида, имеющие неодинаковое число витков N_1 и N_2) однако, если их надеть на общий ферромагнитный (или ферритовый) сердечник, то тогда может оказаться, что $L_{A2} \neq L_{B1}$. Возникающее отличие обусловлено зависимостью магнитной проницаемости среды μ от напряжённости магнитного поля H , которая, в свою очередь, определяется числом витков в том соленоиде, который создаёт магнитное поле (напомним: внутри длинного тонкого соленоида и тороида $B = \mu\mu_0 nI$, или $H = nI$).

Явление взаимной индукции используется в работе трансформаторов: устройств, в которых на общий замкнутый сердечник, изготовленный из ферромагнитного материала, надеты две проволочные катушки-обмотки, содержащие разное (N_1 и N_2) число витков. Если первую катушку (первичную обмотку) подключить к источнику переменной э. д. с. \mathcal{E}_1 , то в ней возникнет переменный ток I_1 , который создаст меняющееся со временем магнитное поле, локализованное внутри сердечника. Переменный магнитный поток, в свою очередь, индуцирует э. д. с. во вторичной обмотке, надетой на этот же сердечник, и если вторичная обмотка

разомкнута (такой режим называется *режимом холостого хода*)

$$\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{N_1}{N_2}. \quad (16.9)$$

Если число витков во вторичной обмотке N_2 , больше числа витков в первичной обмотке N_1 , трансформатор называется повышающим ($\mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_1$), если $N_2 < N_1$, – понижающим ($\mathcal{E}_2 < \mathcal{E}_1$).

16.1.4 Энергия магнитного поля

Представим себе, что в цепи, изображённой на рис. 16.4, идёт электрический ток. Если ключ K перевести из положения 1 в положение 2, источник э. д. с. окажется отсоединённым, но зато образуется замкнутая цепь, состоящая из катушки с индуктивностью L и резистора с сопротивлением R . Ток, проходивший по катушке, начнёт спадать до нуля, но при этом в ней возникнет э. д. с. самоиндукции, и спад не будет мгновенным. За время спада э. д. с. самоиндукции успеет совершить работу, в ходе выполнения которой магнитная энергия перейдёт во внутреннюю (тепловую) энергию резистора. В соответствии с определением электродвижущей силы, работа сторонних сил $\delta A_{\text{СТ}}$ по перенесению малого заряда dq рассчитывается, как $\delta A_{\text{СТ}} = \mathcal{E} dq$. Полная работа, которую успеют совершить сторонние силы (вызванные явлением самоиндукции) за время спада тока от I до нуля, равна:

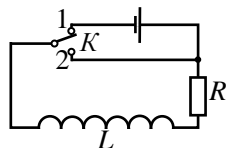


Рис. 16.4

$$A_{\text{СТ}} = \int_I^0 \left(-L \frac{dI}{dt} \right) dq = -L \int_I^0 \frac{dq}{dt} dI = -L \int_I^0 I dI = \frac{LI^2}{2}.$$

Как известно, работа является мерой изменения энергии. Это означает, что совершившая работу катушка индуктивности в момент отключения источника питания обладала энергией W_M , связанной с магнитным полем, изменение которого и порождает э. д. с. самоиндукции. $W_M = A_{\text{СТ}}$, или *энергия магнитного поля*

$$W_M = \frac{LI^2}{2}. \quad (16.10)$$

Если катушка индуктивности представляет собой тороид или длинный тонкий соленоид, для которых, согласно формуле (16.6), $L = \mu\mu_0 n^2 l S = \mu\mu_0 n^2 V$, где V – объём пространства внутри тороида (там, где сосредоточено магнитное поле), можно записать:

$$W_M = \frac{LI^2}{2} = \frac{\mu\mu_0 n^2 I^2}{2} V = \frac{(\mu\mu_0 n I)(n I)}{2} V = \frac{BH}{2} V.$$

Здесь учтено, что внутри тороида $B = \mu\mu_0 n I$, а $H = B/\mu\mu_0 = n I$. Таким образом, мы можем записать выражение для **объёмной плотности энергии магнитного поля**:

$$w_{\text{эл}} = \frac{W_M}{V} = \frac{BH}{2}. \quad (16.11)$$

Данная формула справедлива не только для магнитного поля внутри тороида, но и вообще для любого магнитного поля.

В заключение заметим: если мы увеличиваем ток в катушке от нуля до некоторого значения I (напряжённость магнитного поля при этом растёт до некоторого значения H), мы совершаем работу *против* сторонних сил, вызванных явлением самоиндукции,

$$A = -A_{\text{ст}} = \int_0^I L I dI = \int_0^I \mu\mu_0 n^2 l S I dI = V \int_0^I (\mu\mu_0 n I) d(n I) = V \int_0^H B dH.$$

Таким образом, на графике зависимости $B(H)$ совершаемая нами работа, приходящаяся на единицу объёма, численно равна площади под соответствующей кривой. В частности, если внутри катушки индуктивности находится ферромагнитный сердечник, график зависимости $B(H)$ имеет вид петли гистерезиса, и работа, совершаемая за цикл по перемагничиванию единицы объёма сердечника, оказывается численно равной площади петли:

$$\frac{A}{V} = \oint B dH. \quad (16.12)$$

Чем больше площадь петли гистерезиса, тем значительнее потери энергии, требуемые для перемагничивания сердечника.

16.1.5 Система уравнений Максвелла

Вершиной развития классической электродинамики явилось построение теории электромагнетизма, в основе которой лежит система уравнений Максвелла.

Пусть в замкнутом контуре длиной l , содержащем N_1 источников э. д. с. \mathcal{E}_i , идёт постоянный электрический ток. Сторонние силы совершают работу по разделению заряда q , но такую же затем совершают силы электрического поля внутри источников, обеспечивающие протекание тока в самом контуре. По определению

работа первых $A_{\text{СТ}} = q \sum_{i=1}^{N_1} \mathcal{E}_i$, работа вторых $A = \int_l \vec{F} d\vec{l} = \oint q \vec{E} d\vec{l}$, и

$$\oint q \vec{E} d\vec{l} = q \sum_{i=1}^{N_1} \mathcal{E}_i, \text{ или } \oint \vec{E} d\vec{l} = \sum_{i=1}^{N_1} \mathcal{E}_i.$$

Сумма э. д. с. здесь алгебраическая: для тех источников, которые «помогают» протеканию тока в цепи, \mathcal{E}_i нужно брать со знаком «плюс», для тех, которые «мешают» – со знаком «минус». Открытое Фарадеем явление электромагнитной индукции говорит о том, что источником э. д. с. может явиться переменное магнитное поле, и это также следует учесть при подсчёте указанной суммы:

$$\oint \vec{E} d\vec{l} = - \frac{d\Phi_{\text{М}}}{dt} + \sum_{i=1}^{N_1} \mathcal{E}_i. \quad (16.13)$$

Максвелл предположил, что данное уравнение справедливо не только для замкнутого проводящего контура, по которому идёт электрический ток, но и **для любого замкнутого контура, мысленно выбранного в пространстве**. С учётом этого замечания формула (16.13) стала первым уравнением системы.

В основе второго уравнения лежит закон полного тока (теорема о циркуляции вектора напряжённости магнитного поля), согласно которой $\oint \vec{H} d\vec{l} = \sum_{i=1}^{N_2} I_i$, где $\sum_{i=1}^{N_2} I_i$ – алгебраическая сумма токов (N_2 – их число), которые пронизывают поверхность, мысленно натянутую на контур. Максвелл обратил внимание на то, что изменение электрического поля в некоторой области про-

странства может быть интерпретировано, как изменение заряда в этой области. Действительно, теорема Гаусса для электрического поля утверждает, что для системы, состоящей из N_3 зарядов q_i ,

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum_{i=1}^{N_3} q_i, \text{ и, следовательно, } \frac{d}{dt} \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^{N_3} q_i \right) = \frac{dQ}{dt}. \text{ Поток}$$

вектора электрического смещения (интеграл вида $\oint_S \vec{D} d\vec{S}$) часто

обозначается просто Φ_Δ , а ток $\frac{dQ}{dt}$ называется **током смещения**

(I_{CM}). Согласно Максвеллу, уравнение закона полного тока долж-

но быть записано в виде $\oint \vec{H} d\vec{l} = I_{\text{CM}} + \sum_{i=1}^{N_2} I_i$, или

$$\oint \vec{H} d\vec{l} = \frac{d\Phi_\Delta}{dt} + \sum_{i=1}^{N_2} I_i. \quad (16.14)$$

Это – **второе уравнение Максвелла**, оно также справедливо для любого мысленно выбранного в пространстве замкнутого контура.

Третье и четвёртое уравнения системы – это формулы теорем Гаусса для электрического и магнитного полей. Максвелл предположил, что они справедливы не только для постоянных, но **и для переменных полей**.

Кроме перечисленных четырёх уравнений в систему входят ещё три уравнения-связки, позволяющие выражать \vec{D} через \vec{E} , \vec{B} через \vec{H} , и \vec{j} (плотность тока) через \vec{E} с помощью удельной электропроводности σ .

В итоге система уравнений Максвелла может быть представлена в следующем виде¹:

¹Это – так называемый «интегральный» вид системы (используются *интегралы «поток» и «циркуляция» вектора*). Часто систему уравнений Максвелла удобно записывать в «дифференциальном» виде (для бесконечно малых объёмов и площадей) с использованием математических операций «*дивергенции*» и «*ротора*» вектора (см., например, Савельев И.В. Курс общей физики, Т. 2).

$$\left\{ \begin{array}{l} \oint \vec{E} d\vec{l} = -\frac{d\Phi_M}{dt} + \sum_{i=1}^{N_1} \mathcal{E}_i \\ \oint \vec{H} d\vec{l} = \frac{d\Phi_{\mathfrak{A}}}{dt} + \sum_{i=1}^{N_2} I_i \\ \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \sum_{i=1}^{N_3} q_i \\ \oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0, \\ \vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E} \\ \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu \mu_0} \\ \vec{j} = \sigma \vec{E}. \end{array} \right. \quad (16.15)$$

Данная система говорит о взаимосвязи электрического и магнитного полей, которая проявляется в том, что **любое изменение магнитного поля обязательно приводит к появлению электрического поля** (явление электромагнитной индукции), а **изменение электрического поля, в свою очередь, сопровождается возникновением магнитного поля**.

Теория Максвелла и предложенная им система уравнений позволяют решить основную задачу электродинамики: **по заданному распределению в пространстве токов и зарядов вычислить значения напряжённости электрического и магнитного полей в нужной точке в требуемый момент времени**. Теория Максвелла – основной инструмент для расчёта параметров антенн приёмников и передатчиков электромагнитного излучения, систем связи (радио-, спутниковой, сотовой и т. д.), устройств, усиливающих, ослабляющих и отражающих электромагнитные волны, описания взаимодействия электромагнитных волн с веществом и многих других процессов. После создания этой теории даже некоторое время считалось, что Максвеллом даны ответы практически на все вопросы электродинамики, и дальнейшая работа физиков сведётся лишь к уточнению некоторых аспектов теории и решению конкретных практических задач. Позднее оказалось, однако,

что это не так (в частности, электромагнитное излучение обладает квантовыми свойствами, о которых речь пойдёт в следующей части курса). Кроме того, сама классическая теория не свободна от недостатков:

- Теория *макроскопична* (имеет дело с временами и расстояниями, много большими размеров атомов и соответствующими атомарным процессам временами).

- Теория *феноменологична* (даёт ответы на вопрос «как пользоваться уравнениями», но не даёт ответа на вопрос «почему уравнения именно таковы»).

Тем не менее, как уже говорилось, теория Максвелла имеет громадное практическое значение, и с некоторыми аспектами этой теории мы ещё ознакомимся в следующем семестре.

Некоторые примеры

- Независимо от англичанина М.Фарадея (и даже несколько раньше него) явление электромагнитной индукции открыл американский физик Д.Генри. Но он не спешил с публикацией результатов своих исследований, и когда попытался сделать это, обнаружил, что он уже не первый. «Мне следовало печатать всё это раньше... И откуда мне было знать, что кто-то другой по ту сторону Атлантического океана занимается той же проблемой?» – с горечью писал он своему другу-издателю. Но, несмотря на неудачу, Генри не прекращает работать, открывает явление самоиндукции и успевает опубликовать сообщение об открытии на пару недель раньше, чем это попытался сделать Фарадей, также открывший это явление.

- Вращение системы проводящих рамок в магнитном поле с целью получения э. д. с. индукции – основной способ выработки электрической энергии. Коэффициент полезного действия процесса зависит от конструкции устройства, заставляющего рамки вращаться. Так, к. п. д. лучших тепловых электростанций не превышает 40 %, у серийных реакторов атомных станций этот параметр меньше (до 32 – 35 %), в то время как к. п. д. крупных гидроэлектростанций может приближаться к отметке 90 %!

- Явление взаимной индукции, которое используется в трансформаторах для преобразования переменного напряжения, позволяет делать это с очень высокой эффективностью: к. п. д. серийных трансформаторов обычно превышает 98 %.

- Из уравнений Максвелла следует, что меняющееся магнитное поле, силовые линии которого, как известно, всегда замкнуты, порождает меняющееся со временем электрическое поле, силовые линии которого также оказываются замкнутыми! Такое поле называют *вихревым*.

Вопросы для повторения

1. Что называется явлением электромагнитной индукции? Приведите пример его проявления.

2. Выведите формулу закона Фарадея для явления электромагнитной индукции.

3. Что называется правилом Ленца? Приведите пример его проявления в случае явления электромагнитной индукции.

4. Что называется явлением самоиндукции? Приведите пример его проявления.

5. Что называется явлением взаимной индукции? Приведите пример его проявления.

6. Почему трансформатор используется для преобразования лишь переменного напряжения? Почему его не применяют для преобразования постоянного электрического сигнала?

7. Что называется индуктивностью контура? От чего она зависит и в каких единицах измеряется в СИ?

8. Продемонстрируйте, что магнитная постоянная действительно измеряется в Гн/м.

9. Выведите выражение для объёмной плотности энергии магнитного поля.

10. Запишите систему уравнений Максвелла и поясните смысл входящих в систему уравнений.

В чём заключаются достоинства теории Максвелла? Что можно отнести к её недостаткам?

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
ВВЕДЕНИЕ	4
<u>Лекция 1</u>	МЕХАНИКА. ЧАСТЬ I
1.1 КИНЕМАТИКА	11
1.1.1 Основные понятия	11
1.1.2 Равномерное движение по прямой	14
1.1.3 Равнопеременное движение по прямой	15
1.1.4 Движение вдоль прямой с переменным ускорением	17
1.1.5 Движение тела, брошенного под углом к горизонту	18
1.1.6 Движение точки по окружности.	19
Некоторые примеры	24
Вопросы для повторения	25
<u>Лекция 2</u>	МЕХАНИКА. ЧАСТЬ II
2.1 МАССА И ИМПУЛЬС ТЕЛА	27
2.1.1 Масса	27
2.1.2 Импульс	28
2.2 ДИНАМИКА. ЗАКОНЫ НЬЮТОНА	29
2.2.1 Понятие силы. Инерциальные системы отсчёта. Первый закон Ньютона.	29
2.2.2 Второй закон Ньютона.	31
2.2.3 Третий закон Ньютона. Вес тела	34
2.2.4 Закон Всемирного тяготения	35
2.2.5 Примеры сил. Рекомендации к решению типовых задач по физике	36
Некоторые примеры	40
Вопросы для повторения	40
<u>Лекция 3</u>	МЕХАНИКА. ЧАСТЬ III
3.1 ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ	42
3.1.1 Центр масс системы материальных точек. Модель абсолютно твёрдого тела	42
3.1.2 Момент инерции. Теорема Штейнера.	45
3.1.3 Момент импульса.	49
3.1.4 Момент силы.	51
3.1.5 Основной закон динамики вращательного движения. . .	53
Некоторые примеры	56
Вопросы для повторения	57

<u>Лекция 4</u>	МЕХАНИКА. ЧАСТЬ IV
4.1 РАБОТА И ЭНЕРГИЯ.	59
4.1.1 Работа силы. Мощность.	59
4.1.2 Кинетическая энергия	62
4.1.3 Первая и вторая космические скорости	64
4.1.4 Потенциальная энергия	66
4.2 ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ	68
4.2.1 Закон сохранения импульса	69
4.2.2 Закон сохранения момента импульса. Трёхстепенной гироскоп	70
4.2.3 Закон сохранения механической энергии	74
4.2.4 О законах сохранения в природе. Принцип симметрии .	75
Некоторые примеры	77
Вопросы для повторения	78
<u>Лекция 5</u>	МЕХАНИКА. ЧАСТЬ V
5.1 ОСНОВЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНО- СТИ (СТО)	80
5.1.1 Принцип относительности Галилея. Постулаты Эйнштейна.	80
5.1.2 Преобразования Галилея. Неинерциальные системы отсчёта	83
5.1.3 Преобразования Лоренца.	85
5.1.4 Следствия из преобразований Лоренца	88
5.2 ОСНОВЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДИНАМИКИ	92
5.2.1 Законы Ньютона в релятивистской динамике.	92
5.2.2 Энергия тела в СТО. Полная энергия, кинетическая энергия, энергия покоя.	93
5.2.3 Связь энергии и импульса тела. Инварианты к преоб- разованиям Лоренца	95
Некоторые примеры	97
Вопросы для повторения	98
<u>Лекция 6</u>	МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ЧАСТЬ I
6.1 ВВЕДЕНИЕ	99
6.1.1 Два подхода к описанию свойств макросистем.	99
6.1.2 Параметры состояния.	100
6.2 ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ	102
6.2.1 Определение. Уравнение состояния	102
6.2.2 Изопроцессы в идеальном газе	104
6.2.3 Масса и размеры молекул идеального газа	106

6.3 РЕАЛЬНЫЙ ГАЗ. УРАВНЕНИЕ ВАН-ДЕР-ВААЛЬСА. . . .	107
6.4 ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗОВ.	110
<i>Некоторые примеры</i>	113
<i>Вопросы для повторения</i>	114
<u>Лекция 7</u> МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ЧАСТЬ II	
7.1 ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА .115	
7.1.1 Распределение Максвелла молекул по скоростям.	115
7.1.2 Опыт Штерна	117
7.1.3 Барометрическая формула	119
7.1.4 Распределение Больцмана	121
7.1.5 Распределение Максвелла-Больцмана по энергиям.	122
7.2 ЭНЕРГИЯ МОЛЕКУЛ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА	122
7.2.1 Распределение энергии по степеням свободы.	122
7.3 ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА	126
7.3.1 Средняя длина свободного пробега.	126
7.3.2 Явления переноса в газах	127
<i>Некоторые примеры</i>	129
<i>Вопросы для повторения</i>	129
<u>Лекция 8</u> ТЕРМОДИНАМИКА. ЧАСТЬ I	
8.1 ПЕРВОЕ НАЧАЛО ТЕРМОДИНАМИКИ	131
8.1.1 О внутренней энергии идеального газа	131
8.1.2 Работа, совершаемая идеальным газом	132
8.1.3 Теплоёмкость.	135
8.1.4 Адиабатный процесс	137
<i>Некоторые примеры</i>	140
<i>Вопросы для повторения</i>	141
<u>Лекция 9</u> ТЕРМОДИНАМИКА. ЧАСТЬ II	
9.1 ТЕПЛОВЫЕ МАШИНЫ.	142
9.1.1 Круговые процессы. Тепловые машины	142
9.1.2 Обратимые процессы. Цикл Карно.	144
9.1.3 Второе начало термодинамики	146
9.2 ЭНТРОПИЯ	148
9.2.1 Энтропия, как функция состояния	148
9.2.2 Энтропия в необратимых процессах.	150
9.2.3 Энтропия и термодинамическая вероятность состояния.	150
9.2.4 Химический потенциал.	155

Некоторые примеры	156
Вопросы для повторения	156
<u>Лекция 10</u>	ЭЛЕКТРОСТАТИКА. ЧАСТЬ I
10.1 ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ.	158
10.1.1 Закон сохранения электрического заряда и закон Кулона – основополагающие законы электростатики.	158
10.1.2 Напряженность электрического поля.	161
10.1.3 Теорема Гаусса для электрического поля в вакууме.	165
10.2 ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ.	172
10.2.1 Работа по переносу заряда в электрическом поле	172
10.2.2 Потенциал электрического поля.	174
10.2.3 Связь потенциала и напряжённости электрического поля	176
Некоторые примеры	177
Вопросы для повторения	178
<u>Лекция 11</u>	ЭЛЕКТРОСТАТИКА. ЧАСТЬ II
11.1 ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ.	180
11.1.2 Электрический диполь. Диполь в однородном и неоднородном электрических полях.	180
11.1.2 Молекулы диэлектрика в электрическом поле.	183
11.1.3 О пьезоэффекте и сегнетоэлектричестве	185
11.1.4 Теорема Гаусса для электрического поля в диэлектрике	187
11.2 МЕТАЛЛЫ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ	190
11.2.1 Напряжённость и потенциал электрического поля уединённого проводника	190
11.2.2 Емкость уединённого проводника.	192
11.2.3 Энергия уединённого заряженного проводника.	193
11.2.4 Электрические конденсаторы.	194
11.2.5 Энергия заряженного конденсатора. Объёмная плотность энергии электрического поля	197
Некоторые примеры	198
Вопросы для повторения	199
<u>Лекция 12</u>	ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК. ЧАСТЬ I
12.1 ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК В МЕТАЛЛАХ.	200
12.1.1 Основы классической теории электропроводности.	200
12.1.2 Закон Ома в дифференциальной форме	203
12.1.3 Закон Ома для однородного участка цепи. Электри-	

Св. план 2021 г., поз. 194

Кокин Сергей Михайлович
Никитенко Владимир Александрович

ФИЗИКА:
механика, молекулярно-кинетическая теория,
термодинамика, электричество и магнетизм

Конспект лекций