集合论与图论考前笔记

（赖嘉欣）

一、集合的运算

1. 单元集{x}的广义交和广义并都等于 x
2. 集合的运算中广义运算和~运算的优先级高于并补差对称差
3. 德摩根定律 A-(B∪C)=(A-B)∩(A-C);A-(B∩C)=(A-B)∪(A-C)

   ~(B∪C)=~B∩~C　　　~(B∩C)=~B∪~C

   注意换号！！！
4. 集合的运算满足幂等律、结合律、交换律、分配律
5. 证明题：<u>包含传递法；命题演算法；利用命题的等价条件；反证法；利用已知包含式并交计算；等式替换法(A∩E=A)</u>
6. 包容排斥原理

设 S 为有穷集，P1, P2, ..., Pm 是 m 种性质，Ai 是 S 中具有性质 Pi 的元素构成的子集，i=1, 2,..., m.则 S 中不具有性质 P1, P2, ..., Pm 的元素数为

$$|\overline{A_1}\cap\overline{A_2}\cap\ldots\cap\overline{A_m}|$$

$$=|S|-\sum_{i=1}^{m}|A_i|+\sum_{1\le i<j\le m}|A_i\cap A_j|-\sum_{1\le i<j<k\le m}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\ldots$$

$$+(-1)^m|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_m|$$

二、二元关系

1、笛卡尔积：①不满足交换律②不满足结合律③对于交或并运算满足分配律④若 A 或 B 中有一个为空集，则 A×B 为空集（在处理笛卡尔积时无论什么性质都要时刻注意有序性和空集的问题）

2、由于关系是集合（只是以序偶为元素），因此，所有规定集合的方式均适用于关系的确定。（其中～R=A×A-R）

3、空关系，全域关系，恒等关系，小于等于关系 L_A,整除关系 D_A,包含关系 $R_{\subseteq}$

4、二元关系的描述：集合表达式、关系图、关系矩阵（元素值为 0 或 1）

5、关系的运算：用 xRy 表示 〈x, y〉 ∈R

Dom R= ｛x|x∈A∧y(y∈B∧〈x, y〉 ∈R)｝

Ran R＝{y|y∈B∧x(x∈A∧〈x, y〉 ∈R)｝

Fld R=Dom R∪Ran R

6、逆关系对于转置矩阵，且$(A\times B)^{-1}$=B×A

7、关系的复合：$R\circ R$,(对于矩阵相乘（采用逻辑加）)，满足结合律，$(F\circ G)^{-1}=G^{-1}\circ F^{-1}$

对于交或并运算满足分配律

8、限制：R|A={<x,y>|xRy∧x∈A},结果表示的是 R 的子关系，是一个集合

像：R[A]=ran(R|A)，表示的是 R 的值域的值.

上述两者对于交或并运算满足分配律

9、关系的幂运算：$R \circ R = I_A$　　　　　$R^{n+1} = R^n \circ R$

$$(R^m)^n = R^{mn} \qquad (R^{-1})^n = (R^n)^{-1}$$

设 A 为 n 元集，R 是 A 上的关系，则存在自然数 s 和 t，使得 $R^s = R^t$(证明：鸽巢原理)

幂序列是有周期性的：若 $R^s = R^t$，则 $R^{s+kp+i} = R^{s+i}$，其中 p=t-s

10、关系的性质：

自反 $\Leftrightarrow I_A \subseteq R$，反自反 $\Leftrightarrow R \cap I_A = \varnothing$，对称 $\Leftrightarrow R^{-1} = R$，反对称 $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subseteq I_A$，传递 $\Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$

11、关系的闭包：

自反闭包 $r(R) = R \cup R^0$

对称闭包 $s(R) = R \cup R^{-1}$

传递闭包 $t(R) = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$　　　（直至 R^n 为空集）

求传递闭包 $\rightarrow$ <u>沃舍尔（Warshall）算法</u>，注意该算法有三重循环：最外层：列循环；中层：行循环；最内层：满足关系的行中各个元素依次相加

（1） R 自反当且仅当 R=r(R)。
（2） R 对称当且仅当 R=s(R)。
（3） R 传递当且仅当 R=t(R)。

（1） 如果 R 是自反的，那么 s(R)和 t(R)都是自反的。
（2） 如果 R 是对称的，那么 r(R)和 t(R)都是对称的。
（3） 如果 R 是传递的，那么 r(R)是传递的。

（1） r(R1)∪r(R2)=r(R1∪R2)
（2） s(R1)∪s(R2)=s(R1∪R2)
（3） t(R1)∪t(R2) $\subseteq$ t(R1∪R2)

（1） rs(R)＝sr(R)
（2） rt(R)＝tr(R)
（3） st(R)$\subseteq$ts(R)

12、等价关系

（1）定义：自反，对称，传递
（2）等价类：[x]={y|y∈A∧xRy}

$\forall x, y \in A,$ 如果 xRy，则 $[x] = [y]$

$\forall x, y \in A,$ 如果 $x \not R y$，则 $[x]$ 与 $[y]$ 不交

（3）商集：$A/R = \{[x]_R \mid x \in A\}$

商集与划分的对应关系

商集 A/R 就是 A 的一个划分，不同的商集对应于不同的划分.

任给 A 的一个划分π，如下定义 A 上的关系 R:

$R=\{<x,y> \mid x,y\in A \wedge x$ 与 y 在π的同一划分块中$\}$

则 R 为 A 上的等价关系，且该等价关系所确定的商集就是π.

A 上的等价关系与 A 的划分是一一对应的.

一般说的 R 是 A 上的等价关系指的不是一个划分块上的等价关系

13、偏序关系（自反，非对称，传递）

（1）**$x,y\in A$, x 与 y 可比 $\Leftrightarrow x\preccurlyeq y \vee y\preccurlyeq x$.**

$\forall x,y\in A$, x 与 y 都是可比的，则称 R 为全序（或线序）

实例：数集上的小于或等于关系是全序关系

整除关系不是正整数集合上的全序关系

$x,y\in A$，如果 $x\prec y$ 且不存在 $z\in A$ 使得 $x\prec z\prec y$，则称 y 覆盖 x.

例如{1,2,4,6}集合上的整除关系, 2 覆盖 1, 4 和 6 覆盖 2. 但 4 不覆盖 1.

（2）哈斯图（注意 I_A）

无环（环省略），位置低的元素的顺序在前（箭头省去），具有覆盖关系的两个结点连边（将由传递关系可推定的边省去）

（3）

存在情况	可能存在且唯一	一定存在，可很多	不一定存在，存在不一定唯一	存在则唯一
	最小元	极小元	上界	最小上界或上确界
	最大元	极大元	下界	最大下界或

良序集：任一个非空子集合有最小元
一个良序集一定是一个全序集
有限全序集是一个良序集

14、小结：涉及关系运算的集合包含或者等式的证明

方法：证明集合包含或者相等的证明方法.

数学归纳法（主要用于幂运算）

证明中用到关系运算的定义和公式，如：

$x\in \mathrm{dom}R \Leftrightarrow \exists y(<x,y>\in R)$

$y\in \mathrm{ran}R \Leftrightarrow \exists x(<x,y>\in R)$

$<x,y>\in R \Leftrightarrow <y,x>\in R^{-1}$

$<x,y>\in R\circ S \Leftrightarrow \exists t\ (<x,t>\in R\wedge <t,y>\in S)$

$<x,y>\in R\restriction A \Leftrightarrow x\in A\wedge <x,y>\in R$

$y\in R[A] \Leftrightarrow \exists x\ (x\in A\wedge <x,y>\in R)$

$r(R) = R\cup I_A$

$s(R) = R\cup R^{-1}$

$t(R) = R\cup R^2\cup\ldots$

三、函数

1、定义：①设 F 为二元关系，若 $\forall x\in \mathrm{dom}F$ 都存在唯一的 $y\in \mathrm{ran}F$ 使 xFy 成立，则称 F 为函数

②设 A, B 为集合，如果

f 为函数，$\mathrm{dom}f=A$，$\mathrm{ran}f\subseteq B$，

则称 f 为从 A 到 B 的函数，记作 f：$A\to B$

③所有从 A 到 B 的函数的集合记作 B^A，符号化表示为 $\subseteq$

$B^A=\{f \mid f: A\to B\}$

$|A|=m$，$|B|=n$，且 $m,n>0$，$|B^A|=n^m$.

$A=\varnothing$，则 $B^A=B^{\varnothing}=\{\varnothing\}$.

$A\neq\varnothing$ 且 $B=\varnothing$，则 $B^A=\varnothing^A=\varnothing$.

④像，完全原像。（集合对应集合）

2、定理

设 f：X→Y，对任意 A⊆X，B⊆X，有

（1）$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$

（2）$f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$

（3）$f(A)-f(B)\subseteq f(A-B)$

3、某些重要函数

常函数，单调函数，恒等函数，

特征函数：设 A 为集合，对于任意的 $A'\subseteq A$，A' 的特征函数

$\chi_{A'}$：$A\to\{0,1\}$ 定义为

$\chi_{A'}(a)=1, a\in A'$

$\chi_{A'}(a)=0, a\in A-A'$

自然映射：设 R 是 A 上的等价关系，令

g：$A\to A/R$

$g(a)=[a], \forall a\in A$

称 g 是从 A 到商集 A/R 的自然映射.

所以自然映射都是满射且只有等价关系取 I_A 时是双射

3、函数的阶

4、函数的复合

函数的复合仍为函数，且具有结合律

我们注意到，$\langle x,z\rangle\in f\circ g$ 是指有 y 使

$\langle x,y\rangle\in f$，$\langle y,z\rangle\in g$，即 $y=f(x)$，$z=g(y)=g(f(x))$，因而

$$f\circ g(x)=g(f(x))$$

这就是说，当 f，g 为函数时，它们的合成作用于自变量的次序刚好与合成的原始记号的顺序相反。

注：证明满射：从值域中取一个值，证明在定义域中有一个值与它相对应

证明单射：取 x_1，$x_2\in$ 定义域，且 $f(x_1)=f(x_2)$，证明 $x_1=x_2$

$(\forall x_1,x_2\in A, x_1\neq x_2 \Rightarrow \quad \ldots \quad \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2))$

5、反函数

(1). 反函数存在的充要条件

任给函数 F，它的逆 F^{-1} 不一定是函数，只是一个二元关系.

任给单射函数 f：$A \to B$，则 f^{-1} 是函数，且是从 ranf 到 A 的双射函数，但不一定是从 B 到 A 的双射函数.

对于双射函数 f：$A \to B$, f^{-1}：$B \to A$ 是从 B 到 A 的双射函数.

即：f 存在反函数 $\Leftrightarrow$ f 是双射函数

定理 8.4 设 f：$A \to B$ 是双射的，则 f^{-1}：$B \to A$ 也是双射的.

6、集合的等势

(1) 几个等势的实例： ① $Z \approx N$ ② $N \times N \approx N$ ③ $N \approx Q$

④ $(0,1) \approx R$ ⑤ $[0,1] \approx (0,1)$ ⑥**对任何** $a,b \in R, a < b, [0,,1] \approx [a,b]$

⑦ $P(A) \approx \{0,1\}^A \approx 2^A$

(2) 等势具有自反性、对称性、传递性

(3) 康托定理： ① $N \neq R$ ② 对任意的集合 A 都有 $A \neq P(A)$

即：等势： $Z \approx Q \approx N \approx N \times N$

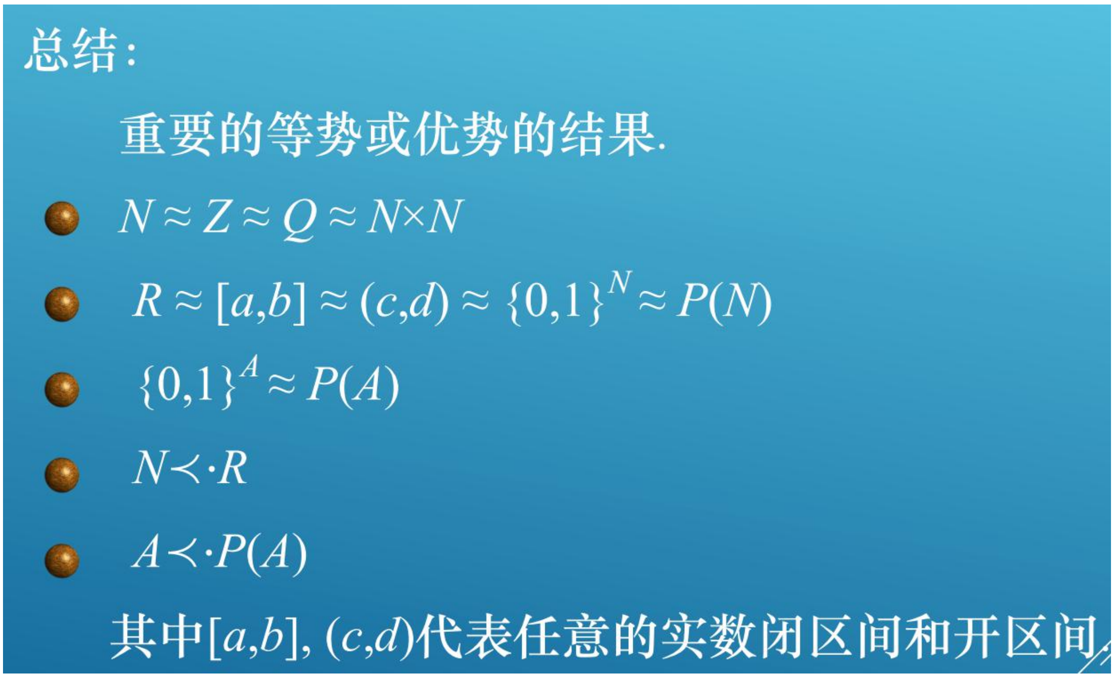
任何实数区间都与集合 R 等势

不等势： ① $N \neq R$ ② 对任意的集合 A 都有 $A \neq P(A)$

7、优势

(1) 定义：设 A,B 是集合，如果存在从 A 到 B 的单射函数，则称 B 优势于 A，记作 $A \preceq\cdot B$

(2) **性质：自反性，对称性，传递性**



8、集合的基数

（1）自然数：归纳集、每个自然数都是一个集合、自然数的歧性

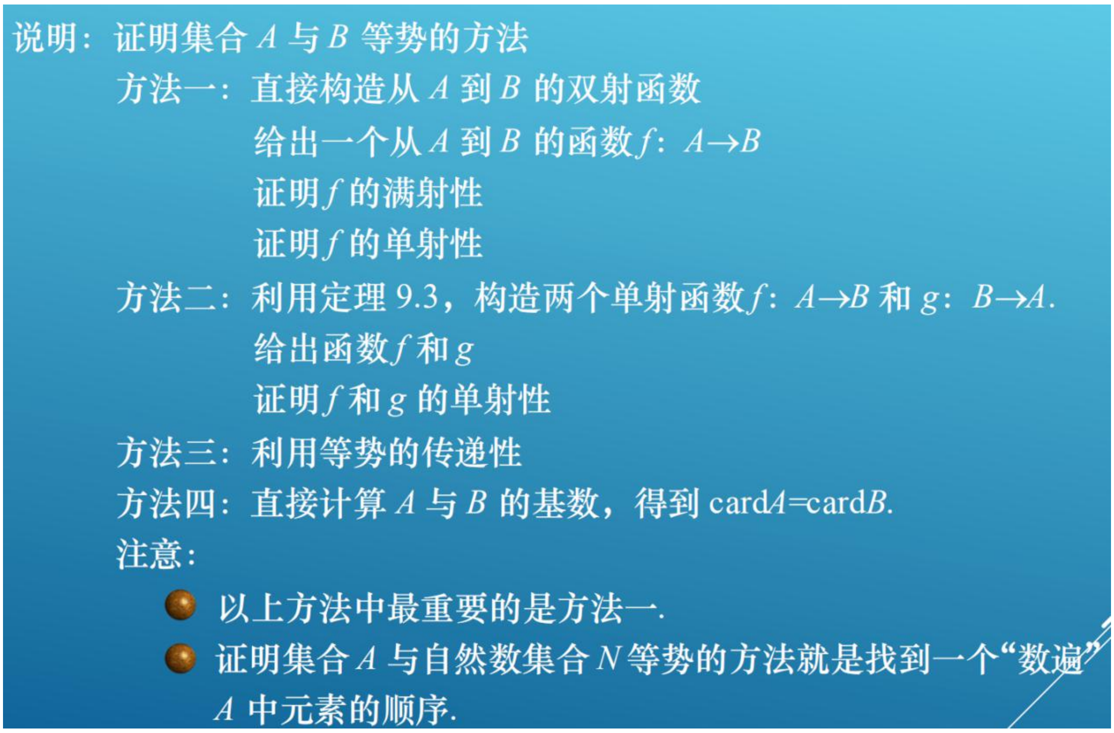
（2）有穷集与无穷集：

任何有穷集都与惟一的自然数等势

(3) 基数：cardA 或者|A|　　阿列夫零是最小的无穷基数

(4) $cardA = cardB \Leftrightarrow A \approx B$

(5) 可数集：若 cardA≤$\aleph_0$，则称 A 为可数集或可列集



四、图的基本概念

1、无序积、多重集合；

定义 1 一个无向图是一个有序的二元组<V，E>,记作 G（有时泛指有向图和无向图），其中

（1）V≠∅称为顶点集，其元素称为顶点或结点。

（2）E 称为边集，它是无序积 V&V 的多重子集，其元素称为无向边，简称边。

定义 2 一个有向图是一个有序的二元组<V，E>，记作 D（只能指有向图），其中

（1）V≠∅称为顶点集，其元素称为顶点或结点。

（2）E 为边集，它是笛卡儿积 V×V 的多重子集，其元素称为有向边，简称边。

2、更多概念

顶点集 V(G)；　边集 E(G)；　n 阶图(n 个顶点)；　有限图(边集和顶点集都有限)

零图和 n 阶零图(边集为空，记为 N_n，其中 N_1 称为平凡图)

基图(将有向图的有向边改为无向边后的无向图称为原来图的基图)

端点(分为始点和终点)；　关联次数；　环(关联次数为 2)；　孤立点

3、有关邻域

设无向图 G＝<V，E>，　v∈V，

称{u|u∈V∧(u,v)∈E∧u≠v}为 v 的邻域，记做 N_G(v)。

称 N_G(v)∪{v}为 v 的闭邻域，记做 $\overline{N}_G$(v)。

称{e|e∈E∧e 与 v 相关联}为 v 的关联集，记做 I_G(v)。

设有向图 D＝<V，E>， v∈V，

称{u|u∈V∧<v,u>∈E∧u≠v}为 v 的后继元集，记做 $\Gamma^{+}_{D}(v)$。

称{u|u∈V∧<u,v>∈E∧u≠v}为 v 的先驱元集，记做 $\Gamma^{-}_{D}(v)$。

称 $\Gamma^{+}_{D}(v) \cup \Gamma^{-}_{D}(v)$ 为 v 的邻域，记做 $N_G(v)$。

称 $N_D(v) \cup \{v\}$ 为 v 的闭邻域，记做 $\overline{N}_G(v)$。

4、平行边；重数(平行边的条数)； 多重图(含平行边的图) 简单图(不含平行边和环的图)

5、度数 $d(v)$；出度 $d^{+}(v)$；入度 $d^{-}(v)$；

无向图	有向图
度数 $d(v)$；最大度 $\Delta(G) \le (n-1)$；最小度 $\delta(G)$ 环提供二度	度数 $d(v)$；最大出度 $\Delta^{+}(G)$；最小出度 $\delta^{+}(G)$ 最大入度 $\Delta^{-}(G)$；最小入度 $\delta^{-}(G)$

悬挂顶点(度数为 1 的顶点)；悬挂边

6、握手定理：度数和为边数的两倍

推论：在任何图中，奇度顶点的个数为偶数

7、可图化

对于顶点标定的无向图，它的度数列是唯一的。

反之，对于给定的非负整数列 d＝{d1,d2,…,dn}，若存在 V＝{v1,v2,…,vn}为顶点集的 n 阶无向图 G，使得 d(vi)＝di，则称 d 是可图化的。 可简单图化

可图化的充要条件⇔度数和为偶数

图的同构

8、n 阶完全图；n 阶有向完全图；n 阶竞赛图；k-正则图

9、子图；生成子图(V=V1);真子图；V1 导出的子图 G[V1];E1 导出的子图 G[E1]

补图 $\overline{G}$；自补图⇔ $G \cong \overline{G}$

10、设边 e＝(u,v)∈E，用 G\e 表示从 G 中删除 e 后，将 e 的两个端点 u,v 用一个新的顶点 w(或用 u 或 v 充当 w)代替，使 w 关联除 e 外 u,v 关联的所有边，称为边 e 的收缩。(注意与 G-e 区分)

11、回路与通路

	通路	回路
边各异	简单通路	简单回路
点、边各异	初级通路或路径	初级回路或圈
有边重复出现	复杂通路	复杂回路

12、定理

(1) 在 n 阶图 G 中，若从顶点 vi 到 vj（vi≠vj）存在通路，则从 vi 到 vj 存在长度小于或等于 n-1 的(初级)通路。

(2) 在一个 n 阶图 G 中，若存在 vi 到自身的回路，则一定存在 vi 到自身长度小于或等于 n 的(初级)回路。

13、连通图；连通分支；连通分支数 p(G)

u，v 之间是连通的⇔ u~v

若 u～v，称 u,v 之间长度最短的通路为 u,v 之间的短程线，短程线的长度称为 u,v 之间的距离，记作 d(u,v)。

当 u,v 不连通时，规定 d(u,v)＝∞。 （在有向图中称为可达）

14、点割集

点割集是若删去它们就会使图不连通的顶点的集合，而割点是若删去此一顶点就会使图不连通的顶点。

边割集是若删去它们就会使图不连通的边的集合，而割边是若删去此一边就会使图不连通的边。

15、连通度

点连通度即为最小点割集的元素个数，记为κ(G)；若κ(G)≥k，则称 G 是 k-连通图，k 为非负整数

边连通度（λ(G)）同理

对于任何无向图 G，有

$\kappa(G)\le\lambda(G)\le\delta(G)$

在有向图中：弱连通图（基图为连通图）；单向连通图（vi,vj∈V，vi→vj 与 vj→vi 至少成立其一）⇔ 有向图中存在经过每个顶点至少一次的通路；强连通图（每两点都相互可达）⇔ 有向图中存在经过每个顶点至少一次的回路

16、扩大路径法

极大路径：极大路径的长度大于等于最小度

17、二部图

将二部图 G 记为<V1,V2,E>；n 阶零图为二部图；完全二部图；

一个无向图 G＝<V,E>是二部图当且仅当 G 中无奇数长度的回路

18、图的矩阵表示

关联矩阵（点与边）；有向图的关联矩阵（1，0，-1）；有向图的邻接矩阵（点与点之间的边数）；

有向图的可达矩阵

19、图的运算

设 G1＝<V1,E1>，G2＝<V2,E2>为两个图。

若 V1∩V2＝∅，则称 G1 与 G2 是不交的。

若 E1∩E2＝∅，则称 G1 与 G2 是边不交的或边不重的。

说明：不交的图，必然是边不交的，但反之不真。

以边进行运算：并图，交图，差图，环合（对称差）

20、邻接矩阵及其性质

B= A^2，bij 表示 vi 两步到达 vj 的路径数目

在有向图中，C= AA^T，cij 表示以 vi ,vj 为始点的终点数目

在有向图中，D= A^TA，dij 表示以 vi ,vj 为始点的终点数目

五、欧拉图

1、欧拉图，半欧拉图

定义 15.1

（1）欧拉通路——经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的通路.

（2）欧拉回路——经过图中每条边一次且仅一次行遍所有顶点的回路.

（3）欧拉图——具有欧拉回路的图.

（4）半欧拉图——具有欧拉通路而无欧拉回路的图.

几点说明：

规定平凡图为欧拉图.

欧拉通路是生成的简单通路，欧拉回路是生成的简单回路.

环不影响图的欧拉性.

无向图 G 为欧拉图 ⇔ G 连通且无奇度数顶点

欧拉图是若干个边不重的圈的并

无向图 G 为半欧拉图 ⇔ G 连通且恰好有两个奇度数顶点

有向图 D 是欧拉图 ⇔ D 是强连通的且每个顶点的入度都等于出度.

有向图 D 是半欧拉图 ⇔ D 是单向连通的，且 D 中恰有两个奇度顶点，其中一个的入度比出度大 1，另一个的出度比入度大 1，而其余顶点的入度都等于出度.

2、Fleury 算法（求欧拉回路）

3、梅管谷的结论

定理 2 若 W 是图 G 中一条包含所有边的回路，则 W 在这样的回路中具有最短的长度当且仅当下列两个条件被满足

(1) 每一条边最多重复经过一次；

(2) 在 G 的每一个圈上，重复经过的边的条数不超过圈长的一半。

做法：连奇度点；删重复经过的边的条数超过圈长一半的边，加边；再由 fleury 算法可得最优回路

4、非负权值的赋权图的最优欧拉回路

(1)、 在两个奇数度顶点间求出一条最短路 P; (最短路算法)

(2)、 在最短路 P 上，给每条边添加一条平行边得 G 的欧拉母图 G*;

(3)、 在 G 的欧拉母图 G* 中用 Fleury 算法求出一条欧拉回路。

六、哈密顿图

定理 15.6 设无向图 $G=<V,E>$是哈密顿图，对于任意 $V_1 \subset V$ 且 $V_1 \neq \varnothing$，均有 $p(G-V_1) \leq |V_1|$ （常用来证明某个图不是哈密顿图，如含割点或桥的图）

推论 设无向图 $G=<V,E>$是半哈密顿图，对于任意的 $V_1 \subset V$ 且 $V_1 \neq \varnothing$均有

$$p(G-V_1) \leq |V_1|+1$$

定理 15.7 设 G 是 n 阶无向简单图，若对于任意不相邻的顶点 v_i,v_j，均有

$$d(v_i)+d(v_j) \geq n-1 \qquad (*)$$

则 G 中存在哈密顿通路. （是半哈密顿图的充分条件）

推论 设 G 是 n 阶无向简单图，若对于任意不相邻的顶点 v_i,v_j，均有

$$d(v_i)+d(v_j) \geq n$$

则 G 中存在哈密顿回路. （是哈密顿图的充分条件）

定理 15.8 设 u,v 为 n 阶无向简单图 G 中两个不相邻的顶点，且 $d(u)+d(v) \geq n$，则 G 为哈密顿图当且仅当 $G \cup (u,v)$为哈密顿图.

定理 15.9 若 D 为 n（n≥2）阶竞赛图，则 D 中存在哈密顿通路

最短路算法 Dijkstra 算法+Dial's algorithm 演示

七、树

1、树的定义

无向树（连通无回路的无向图）；树叶（一度顶点）；平凡树（平凡图）；

分支点（度数大于 2 的顶点）；森林（至少由两个连通分支（每个都是树）组成）

无向树的等价定义与性质

定理 16.1 设 $G=<V,E>$是 n 阶 m 条边的无向图，则下面各命题是等价的：

（1）G 是树

（2）G 中任意两个顶点之间存在惟一的路径.

（3）G 中无回路且 $m=n-1$.

（4）G 是连通的且 $m=n-1$.

（5）G 是连通的且 G 中任何边均为桥.

（6）G 中没有回路，但在任何两个不同的顶点之间加一条新边，在所得图中得到惟一的一个含新边的圈.

离心率：$e(v)=\max\{d(u,v)|u\in V(G)\}$

半径（最小离心率）；直径（最大离心率）；中心点：离心率等于半径的点

中心：中心点的集合

2、定理

（1）n 阶非平凡的无向树至少由两片树叶

（2）具有 k 个分支的森林由（n-k）条边

（3）定理 1 设 S = ｛d1, d2 ,⋯, dn｝ 是 n 个正整数序列，它们满足：
d1≧d2≧⋯≧dn ,∑di=2(n-1).则存在一颗树 T，其度序列为 S。

（4）定理 2 每棵树的中心由一个点或两个相邻点组成。

3、生成树

（1）定义

定义 16.2 设 G 为无向图

（1）G 的树——T 是 G 的子图并且是树

（2）G 的生成树——T 是 G 的生成子图并且是树

（3）生成树 T 的树枝——T 中的边

（4）生成树 T 的弦——不在 T 中的边

（5）生成树 T 的余树 $\overline{T}$ ——全体弦组成的集合的导出子图

注意：$\overline{T}$ 不一定连通，也不一定不含回路

（2）无向图 G 具有生成树 ⇔ G 是连通的

推论 1 G 为 n 阶 m 条边的无向连通图，则 $m\geq n-1$.

推论 2 $\overline{T}$ 的边数为 $m-n+1$.

推论 3 $\overline{T}$ 为 G 的生成树 T 的余树，C 为 G 中任意一个圈，则 C 与 $\overline{T}$ 一定有公共边.

（3）生成树的计数

①Cayley 递推计数法（不断删边并收缩边（写两部分），直至所有图均为树）

②关联矩阵计数法（取非孤立点作为参考点（即不写入矩阵中），求出非零主子阵的个数）

③矩阵树定理

(矩阵树定理) 设 G 是顶点集合为 V(G)=｛v1,v2,…,vn｝,的图，设 A=(aij)是 G 的邻接矩阵，C=(cij)是 n 阶方阵，其中：

$$c_{ij}=\begin{cases}d(v_i),i=j\\-a_{ij},i\neq j\end{cases}$$

则 G 的生成树棵数为 C 的任意一个余子式的值。

4、基本回路系统与基本割集系统

基本回路（由一条弦和树上的边构成的回路）

基本回路系统（一个图中各基本回路构成的集合）

基本割集（一棵树删去一条边后分成两棵小树，基本割集就是两个端点分别在两棵不同的小树上的边的集合）

基本割集系统（一个图中各基本割集的集合）

5、最小生成树

（1）定义

定义 16.5　*T* 是 *G*=<*V*,*E*,*W*>的生成树

（1）*W*(*T*)——*T* 各边权之和

（2）最小生成树——*G* 的所有生成树中权最小的

（2）求最小生成树的算法

①避圈法（从小到大遍历所有边，把不构成回路的边加进来）

②破圈法（从任意圈开始，去掉权值最大的边，称为破圈，直至图中没有圈）

③prim 算法（以任意点 u 为起点，选择与 u 关联的权最小的边为生成树的第一条边，在与已经选择的边相邻接的边中选择权值最小的边，直至所有点都被包含进来）

6、根数及其应用

（1）定义

根树的定义

定义 16.6　*T* 是有向树（基图为无向树）

（1）*T* 为根树——*T* 中一个顶点入度为 0，其余的入度均为 1.

（2）树根——入度为 0 的顶点

（3）树叶——入度为 1，出度为 0 的顶点

（4）内点——入度为 1，出度不为 0 的顶点

（5）分支点——树根与内点的总称

（6）顶点 *v* 的层数——从树根到 *v* 的通路长度

（7）树高——*T* 中层数最大顶点的层数

（8）平凡根树——平凡图

以 v 为根的根子树

（2）最优二叉树

哈夫曼算法（任意两片树叶权值相加记为 w，在 w 和剩下的树叶的权值中找出两个最小的相加，重复此操作，加完为止）

实例：最佳前缀码

（3）波兰符号法（前缀符号法）

逆波兰符号法（后缀符号法）注意除数与被除数，减数与被减数

八、平面图

1、平面图，平面嵌入

2、定理：（1）平面图各面次数之和等于边数的两倍.

（2）(欧拉公式）设 G=(n, m)是连通平面图，ϕ是 G 的面数，则：

$$n - m + \phi = 2$$

（3）设 G 是具有ϕ个面 k 个连通分支的平面图，则：

$$n-m+\phi=k+1$$

（4）设 G 是具有 n 个点 m 条边 ϕ 个面的连通平面图，如果对 G 的每个面 f，

有：deg (f) ≥ l ≥3,则：$m \le l \times (n-2)/(l-2)$

（5）设 G 是具有 n 个点 m 条边 ϕ 个面的简单平面图，则：$m \le 3n-6$

（6）设 G 是具有 n 个点 m 条边的简单平面图，则 $\delta \le 5$

（7）一个连通平面图是 2 连通的，当且仅当它的每个面的边界是圈。

推论　若一个平面图是 2 连通的，则它的每条边恰在两个面的边界上。

3、极大平面图

一个简单平面图 G 加一条边就变成非平面图，则 G 为极大平面图

完全图是极大平面图

引理 设 G 是极大平面图，则 G 必然连通；若 G 的阶数大于等于 3，则 G 无割边。

定理 1 设 G 是至少有 3 个顶点的平面图，则 G 是极大平面图，当且仅当 G 的每个面的次数是 3 且为简单图。

推论：设 G 是 n 个点，m 条边和ϕ个面的极大平面图，且 n≥3.则：(1) m=3n-6; (2) ϕ=2n-4.

4、极小平面图

一个非平面图 G 删去一条边后就变成平面图，则 G 为极小非平面图

5、平面图的判定

（1）相关概念：插入 2 度顶点，消去 2 度顶点，收缩边，图之间的同胚（一个图通过插入 2 度顶点或消去 2 度顶点得到另一个图）

（2）库拉托斯基定理：图 G 是非可平面的，当且仅当它含有 K5 或 K3,3 同胚的子图。

（3）没有割点的连通图称为是一个块图，简称块；G 的一个子图 B 称为是 G 的一个块，如果(1)，它本身是块；(2)，若没有真包含 B 的 G 的块存在

（4）定义 2 给定图 G，去掉 G 中的环，用单边代替平行边而得到的图称为 G 的基础简单图

（5）图 G 是可平面的，当且仅当它的基础简单图是可平面的；

（6）图 G 是可平面图当且仅当 G 的每个块是可平面图

（7）(瓦格纳定理)：简单图 G 是可平面图当且仅当它不含有可收缩（边收缩）到 K5 或 K3,3 的子图

（8）至少有 9 个顶点的简单可平面图的补图是不可平面的，而 9 是这个数目中的最小的一个

6、对偶图

（1）平面图才有对偶图，对偶图大多是平面图，同构的平面图的对偶图不一定是同构的

（2）定理 17.17　设 G^*是连通平面图 G 的对偶图，n^*, m^*, r^*和 n, m, r 分别为 G^*和 G 的顶点数、边数和面数，则

（1）$n^*= r$

（2）$m^*=m$

（3）$r^*=n$（若有 k 个连通分支，则 $r^*=n-k+1$）

（4）设 G^*的顶点 v^*_i 位于 G 的面 R_i 中，则 $d_{G^*}(v^*_i)=\deg(R_i)$

（3）平面图 G 的对偶图必然连通

(G*)*不一定等于 G;

（4）边集合 B 是极小边割集 ⇔ B 中对应在对偶图中的边的集合为圈

引理：欧拉图的对偶图是二部图

7、自对偶图

轮图都是自对偶图，轮图分为奇阶轮图和偶阶轮图

九、支配集、覆盖集、独立集与匹配

1、支配集：V^*为支配集——$\forall v_i\in V-V^*,\exists v_j\in V^*$，使得$(v_i,v_j)\in E$

最小支配集和极小支配集可能都不唯一，

支配数$\gamma_0(G)$——最小支配集中的元素个数

2、点独立集

极大点独立集；最大点独立集（最大点独立集中的元素个数称为点独立数，记为β_0）

定理 18.1　设 $G=\langle V,E\rangle$中无孤立点，则 G 的极大点独立集都是极小支配集.

3、点覆盖集与点覆盖数

点覆盖集（一些拎起来能将图中所有边拉起的点的集合）

点覆盖数——$\alpha_0(G)$——最小点覆盖的元素个数

定理 18.2　设 $G=\langle V,E\rangle$无孤立点，$V^*\subset V$，则 V^*是点覆盖当且仅当$\overline{V}^* = V - V^*$为点独立集

$\alpha_0+\beta_0=n$

4、边覆盖集

边覆盖数α_1——最小边覆盖中元素个数

5、边独立集（匹配）

匹配数——最大匹配中的边数，记为β_1

6、关于匹配的其它概念

定义 18.6　设 M 为 G 中一个匹配.

（1）v_i 与 v_j 被 M 匹配——$(v_i,v_j)\in M$

（2）v 为 M 饱和点——有 M 中边与 v 关联

（3）v 为 M 非饱和点——无 M 中边与 v 关联

（4）M 为完美匹配——G 中无 M 非饱和点

（5）M 的交错路径——从 M 与 $E-M$ 中交替取边构成的 G 中的路径

（6）M 的可增广交错路径——起、终点都是 M 非饱和点的交错路径

（7）M 的交错圈——由 M 与 $E-M$ 中的边交替出现构成的 G 中的圈

G 中边覆盖数α_1 与匹配数β_1 满足$\alpha_1+\beta_1=n$

7、最大匹配的判别定理

定理 18.4（贝尔热，1957）M 为 G 中最大匹配当且仅当 G 中不含 M 的可增广交错路径.

8、二部图中的完备匹配

定义 18.7 设 $G=<V_1,V_2,E>$为二部图，$|V_1|\le|V_2|$，M 是 G 中最大匹配，若 V_1 中顶点全是 M 饱和点，则称 M 为 G 中完备匹配.

$|V_1|=|V_2|$ 时完备匹配变成完美匹配

（1）（Hall 定理）设二部图 $G=<V_1,V_2,E>$中，$|V_1|\le|V_2|$. G 中存在从 V_1 到 V_2 的完备匹配当且当 V_1 中任意 k（$k=1,2,\ldots,|V_1|$）个顶点至少与 V_2 中的 k 个顶点相邻.

本定理中的条件常称为“相异性条件”.

即是对 对$\forall S\subseteq X$,有$|N(S)|\geq|S|$的另一种表述

（2）设二部图 $G=<V_1,V_2,E>$中，V_1 中每个顶点至少关联 t（$t\ge1$）条边，而 V_2 中每个顶点至多关联 t 条边，则 G 中存在 V_1 到 V_2 的完备匹配.

本定理中的条件常称为“t 条件”

（3）定理（哥尼，1931）在二部图中，最大匹配的边数等于最小覆盖的顶点数

十、顶点着色和边着色

1、顶点着色

（1）定义：G 的色数$\chi(G)=k$——G 是 k-可着色的，但不是$(k-1)$-可着色的.

（2）面着色问题可通过对偶图转化为顶点着色问题

（3）色数为 k 的图称为 k 色图

1） $\chi(G)=1$ 当且仅当 G 为零图

2）$\chi(K_n)=n$

3） 偶圈的色数为 2，奇圈色数为 3， 奇阶轮图$\chi(G)=3$，偶阶轮图$\chi(G)=4$.

4） 若 G 的边集非空，则$\chi(G)=2$ 当且仅当 G 为二部图.

（4）定理 18.7 对于任意无环图 G，均有

$$\chi(G)\le\Delta(G)+1$$

$\Delta(G)+1$ 正常点着色算法（先将所有点标为 $v_1\sim v_n$，色的种类标为 1~k，从 v_1 开始标定 1 号色，对于后一个要标定的点，先将色的种类的集合减去所有与所要标定的点相关联的点所对应的色号，在所得的集合中取最小色号来标定所要标定的点）

算法优化：将 $v_1\sim v_n$ 以度数大小作为排序依据

（5）定理 18.8 (Brooks 定理，1941) 若 G 是连通的简单图，并且它既不是奇圈，又不是完全图，则：$\chi(G)\le\Delta(G)$

（6）设 G 是非空简单图，则：$\chi(G)\le\Delta_2(G)+1$（次大度≠度数第二大）

（7）推论：设 G 是非空简单图，若 G 中最大度点互不邻接，则有：$\chi(G)\le\Delta(G)$

（8）顶点着色的应用：图的正常顶点着色对应的实际问题是“划分”问题

2、边着色

（1）定义 2：设 G 是图，对 G 进行正常边着色需要的最少颜色数，称为 G 的边色数，记为：$\chi'(G)$

（2） (哥尼，1916)若 G 是二部图，则$\chi'(G)=\Delta$

（3）引理：设 G 是简单图，x 与 y1 是 G 中不相邻的两个顶点，π 是 G 的一个正常 k

边着色。若对该着色π，x,y1 以及与 x 相邻点均至少缺少一种颜色，则 G+xy1 是 k 边可着色的

（4） (维津定理，1964) 若 G 是简单图，则：$\chi'(G)=\Delta$ 或 $\chi'(G)=\Delta+1$

（5）三类特殊简单图的边色数

①设 G 是简单图且Δ(G)>0。若 G 中只有一个最大度点或恰有两个相邻的最大度点，则：$\chi'(G)=\Delta(G)$

②设 G 是简单图。若点数 n=2k+1 且边数 m>kΔ,则：$\chi'(G)=\Delta(G)+1$

③设 G 是奇数阶Δ正则简单图,若Δ>0,则：$\chi'(G)=\Delta(G)+1$

总结：图的边色数

Δ	Δ+1
1.二部图	**1.图是奇数阶Δ正则简单图**
2.有一个最大度点或两个相邻的最大度点	**2.点数 n=2k+1 且边数 m>kΔ**

G 可以划分为Δ个 1 因子，则其边色数为，否则其边色数为Δ+1 ？？？

（6）（Vizing 定理）设无环图 G 中边的**最大重数**为 μ，则$\chi'(G)\le\Delta+\mu$

二部图匹配算法（匈牙利算法）