# 4.2 动能定理

**(kinetic energy theorem)**

## 1. 质点的动能定理

**动能定理:** 合外力对质点做的功等于质点动能的增量。

——功能定理

动能定理 $\left\{ \begin{array}{l} \boxed{dA = dE_k} \\ \\ \boxed{A_{12} = E_{k2} - E_{k1}} \end{array} \right.$

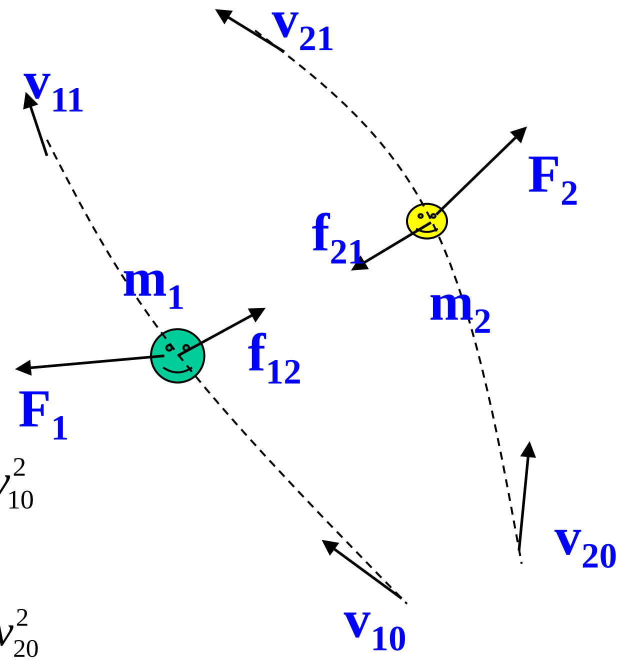
动能—— $\boxed{E_k = \frac{1}{2} m v^2}$

$$\left.\begin{array}{r} dA = \vec{F} \bullet d\vec{r} \\ \\ \text{牛顿第二定律}\ \vec{F} = \dfrac{d(m\vec{v})}{dt} \end{array}\right\} dA = m\frac{d\vec{v}}{dt} \bullet \vec{v}dt = mvdv = d(\frac{1}{2}mv^2)$$

## 2. 质点系的动能定理

$$\boxed{A_{外}+A_{内}=E_{k2}-E_{k1}}$$

——质点系动能定理




研究对象：$m_1$ $$\int_0^1 \vec{F}_1 \bullet d\vec{r}_1+\int_0^1 \vec{f}_{12} \bullet d\vec{r}_1=\frac{1}{2}m_1v_{11}^2-\frac{1}{2}m_1v_{10}^2$$

研究对象：$m_2$ $$\int_0^1 \vec{F}_2 \bullet d\vec{r}_2+\int_0^1 \vec{f}_{21} \bullet d\vec{r}_2=\frac{1}{2}m_2v_{21}^2-\frac{1}{2}m_2v_{20}^2$$

质点系：$m_1+m_2$

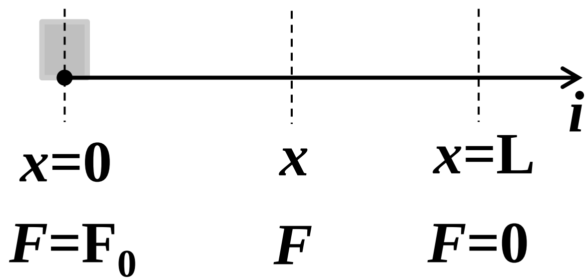
$$\int_0^1 \vec{F}_1 \bullet d\vec{r}_1+\int_0^1 \vec{f}_{12} \bullet d\vec{r}_1+\int_0^1 \vec{F}_2 \bullet d\vec{r}_2+\int_0^1 \vec{f}_{21} \bullet d\vec{r}_2=\left(\frac{1}{2}m_1v_{11}^2+\frac{1}{2}m_2v_{21}^2\right)-\left(\frac{1}{2}m_2v_{20}^2+\frac{1}{2}m_1v_{10}^2\right)$$

**注意：**

(1)内力虽成对出现，但内力功的和不一定为零(各质点位移不一定相同)。

(2)内力能改变系统的总动能，但不能改变系统的总动量。

**例3：质量是m的质点在外力作用下沿着x轴运动。已知t=0时，质点位于坐标原点，且初速度为0. 力F随距离线性减小，x=0时，$F=F_0$，x=L时，F=0. 求质点在x=L时刻的速率。**




根据题意，物体受力 $F = F_0 - \frac{F_0}{L}x$

根据牛顿第二定律，

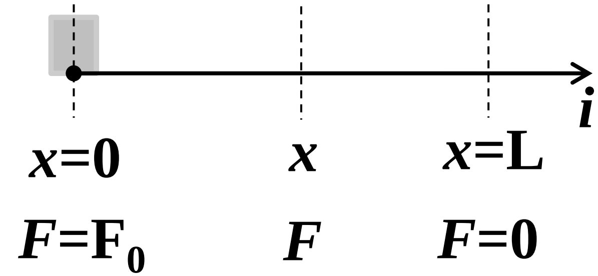
$$\left.\begin{aligned} &F = m\frac{dv}{dt} = F_0 - \frac{F_0}{L}x \\ &a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\bullet\frac{dx}{dt} = v\frac{dv}{dx} \end{aligned}\right\} mv\frac{dv}{dx} = F_0 - \frac{F_0}{L}x$$

分离变量得到 $mvdv = \left(F_0 - \frac{F_0}{L}x\right)dx$

在x处，物体的速度 $\int_0^v mvdv = \int_0^x \left(F_0 - \frac{F_0}{L}x\right)dx$ $\quad v^2 = \frac{F_0}{m}\left(2x - \frac{x^2}{L}\right)$

在L处，物体的速度 $v_L = \sqrt{\frac{F_0 L}{m}}$

**例3：质量是m的质点在外力作用下沿着x轴运动。已知t=0时，质点位于坐标原点，且初速度为0. 力F随距离线性减小，x=0时，$F=F_0$，x=L时，F=0. 求质点在x=L时刻的速率。**




**解法二：**

根据题意，物体受力 $F=F_0-\dfrac{F_0}{L}x$

从0到L处，力F的作功

$$A=\int_0^L Fdx=\int_0^L\left(F_0-\frac{F_0}{L}x\right)dx$$

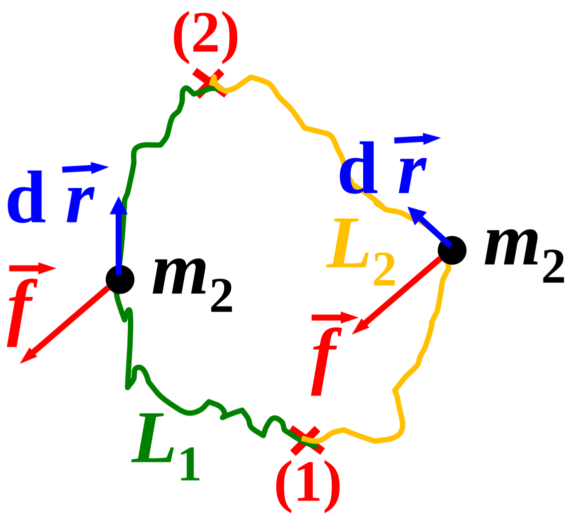
根据动能定理 $A=\dfrac{1}{2}mv_L^2-0$

因此得到x=L处，物体的速度 $v_L=\sqrt{\dfrac{F_0L}{m}}$

# 4.3 保守力与势能

## 一. 保守力的定义

如果一力的功与相对移动的路径无关，而只决定于相互作用物体的始末相对位置，这样的力称为**保守力**。



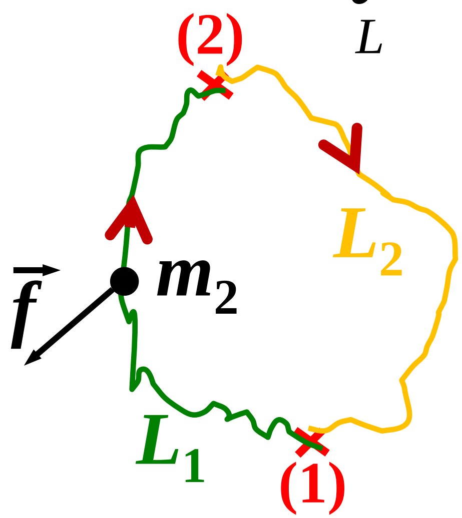

若 $\vec{f}$ 为保守力，则：

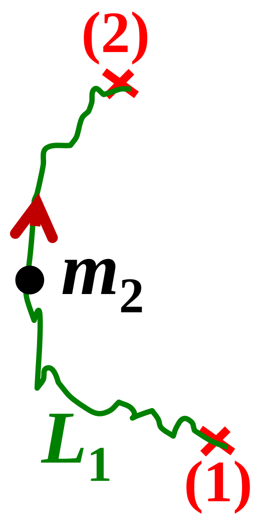
$$\int_{L_1(1)}^{(2)} \vec{f} \cdot d\vec{r} = \int_{L_2(1)}^{(2)} \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

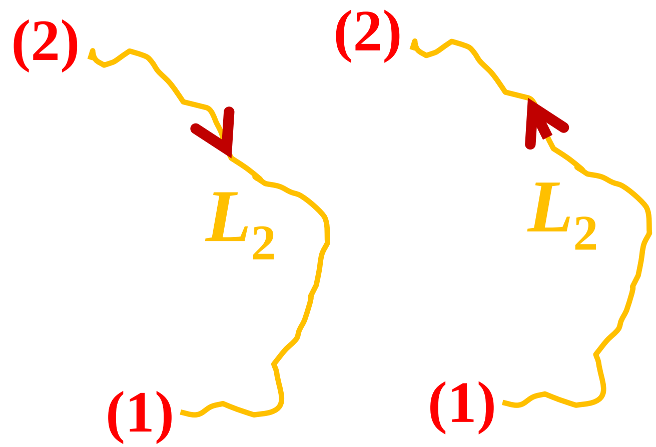
$$\oint_L \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0$$

$L$：沿着$L_1$ 从(1)到(2)，再沿着$L_2$ 从(2)到(1)，即L是一个闭合路径。

$$\oint_L \vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{L_1\,(1)}^{(2)} \vec{f}\bullet d\vec{r} + \int_{L_2\,(2)}^{(1)} \vec{f}\bullet d\vec{r} = 0$$



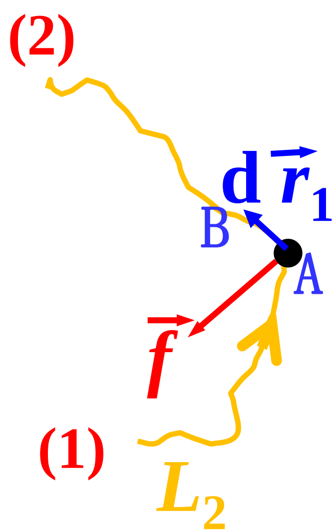




$$\int_{L_2\,(2)}^{(1)} \vec{f}\bullet d\vec{r} = -\int_{L_2\,(1)}^{(2)} \vec{f}\bullet d\vec{r}$$

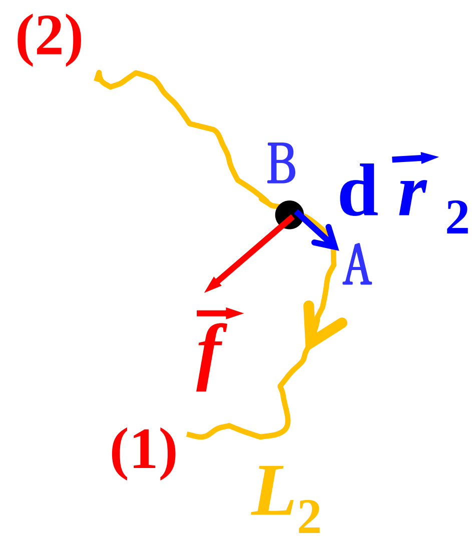
$$\int_{L_2\,(2)}^{(1)} \vec{f}\bullet d\vec{r} = -\int_{L_2\,(1)}^{(2)} \vec{f}\bullet d\vec{r} = -\int_{L_1\,(1)}^{(2)} \vec{f}\bullet d\vec{r}$$

$L$：沿着$L_1$ 从**(1)**到**(2)**，再沿着$L_2$ 从**(2)**到**(1)**，即L是一个闭合路径。

从（1）到（2）



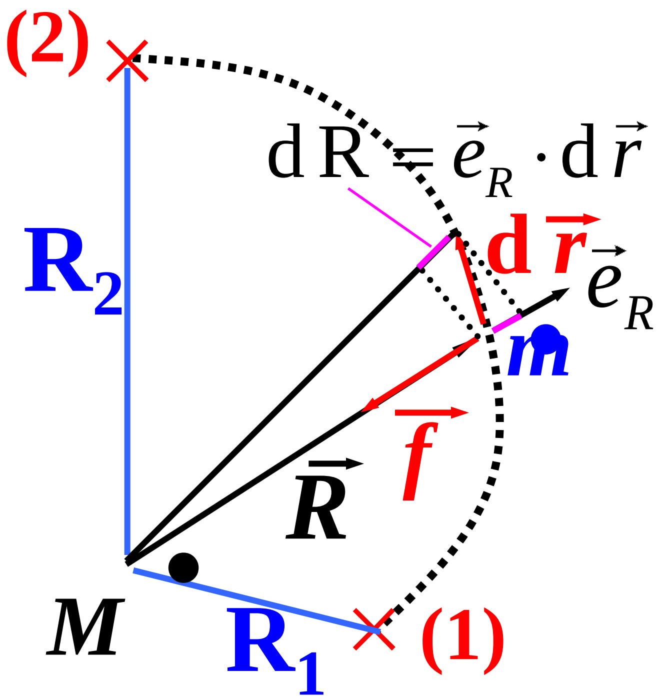

从（2）到（1）




$$\int_{L_2\,(1)}^{(2)} \vec{f} \bullet d\vec{r}_1 = -\int_{L_2\,(2)}^{(1)} \vec{f} \bullet d\vec{r}_2$$

## 二. 几种保守力

### 1. 万有引力




$$A_{12对} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_{(1)}^{(2)} -\frac{GMm}{R^2} \vec{e}_R \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} -\frac{GMm}{R^2} \vec{e}_R \bullet d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} -\frac{GMm}{R^2} dR$$

$$= \frac{GMm}{R_2} - \frac{GMm}{R_1}$$

$$= \left(-\frac{GMm}{R_1}\right) - \left(-\frac{GMm}{R_2}\right)$$

### 2. 弹力

一维运动，弹力 $\vec{f} = -kx \cdot \vec{i}$

## 三. 系统的势能 $E_p$

**定义:** 系统由位形(1)变到位形(2)的过程中，**其势能的减少(增量的负值)等于保守内力的功。**

$$\boldsymbol{E}_{p1}-\boldsymbol{E}_{p2}=-\Delta\boldsymbol{E}_{p}=\boldsymbol{A}_{保12}$$

若规定系统在位形(0)的势能为零,则: $\boldsymbol{E}_{p1}=\int_{(1)}^{(0)}\vec{f}_{保}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$

$$A=\left(-\frac{GMm}{R_1}\right)-\left(-\frac{GMm}{R_2}\right)=E_{p1}-E_{p2}=-\left(E_{p2}-E_{p1}\right)$$

**说明:**

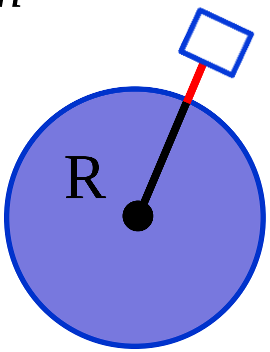
1. 势能属于相互作用的系统;
2. 势能不依赖于参考系的选择，**不要将势能零点的选择与参考系的选择相混淆。**

利用保守力的功与路径无关的特点，可引入**“势能”** **(potential energy)**的概念。

**重力** $\vec{G} = m\vec{g}$

以地面为势能零点，高度h的重力势能 $E_p = mgh$

万有引力作功 $A = \left(-\dfrac{GMm}{R_1}\right) - \left(-\dfrac{GMm}{R_2}\right)$




假设地球半径是R，当物体从高度h到地面时，

万有引力作功

$$A = \left(-\frac{GMm}{R+h}\right) - \left(-\frac{GMm}{R}\right) = \frac{GMmh}{R(R+h)} \approx \boxed{\frac{GMmh}{R^2} = E_{p,R+h} - E_{p,R}}$$

当物体位于地球表面，地球和物体之间的引力 $mg = \dfrac{GMm}{R^2}$

# 4.4 机械能守恒定律

## 一. 功能原理(work-energy theorem)

对质点系有: $\boxed{A_{ex} + A_{in} = E_{k2} - E_{k1}}$

$$A_{in} = A_{in,cons} + A_{in,n-cons} = -(E_{p2} - E_{p1}) + A_{in,n-cons}$$

$$A_{ex} + A_{in,n-cons} = \left(E_{k2} + E_{p2}\right) - \left(E_{k1} + E_{p1}\right)$$

引入系统的**机械能** $\boxed{\boldsymbol{E = E_k + E_p}}$

**功能原理** $\begin{cases} A_{ex} + A_{in,n-cons} = E_2 - E_1 \text{ (积分形式)} \\ \mathrm{d}A_{ex} + \mathrm{d}A_{in,n-cons} = \mathrm{d}E \text{ (微分形式)} \end{cases}$

## 二. 机械能守恒定律 (law of conservation of mechanical energy)

**机械能守恒定律:**

**表述一:在只有保守内力作功时，系统的机械能不变。**

**表述二:若** $\mathrm{d}\,A_{ex}=0$ **且** $\mathrm{d}\,A_{in,n-cons}=0$**，则E=常量。**

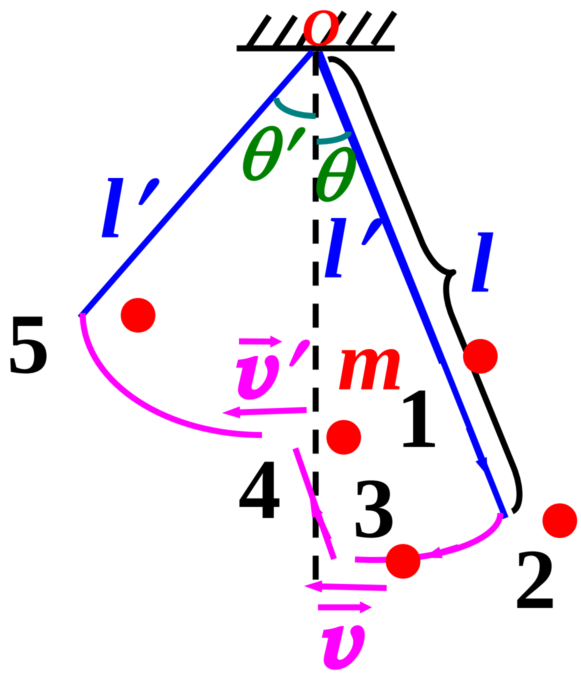
**注:1. 孤立的保守系统机械能守恒。**

2. 当 $\Delta E=0$ 时，$\Delta E_k=-\Delta E_p=A_{in,cons}$，即

$$E_p \underset{A_{in,\,cons}<0}{\overset{A_{in,\,cons}>0}{\rightleftarrows}} E_k$$

保守内力作功是系统势能与动能相互转化的手段和度量。

## 例4:分析荡秋千原理




*m*表示人的质心

过程1→2:

人迅速蹲下，使有效摆长OM由*l*’变为*l*；

过程2→3: (人+地球)系统: 只有重力作功

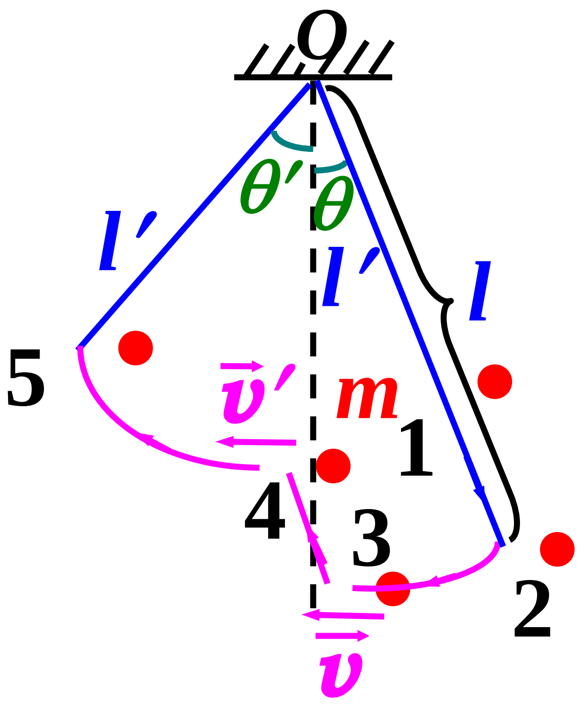
机械能守恒: $\frac{1}{2}mv^2 = mgl(1-\cos\theta)$ (1)

过程3→4: 人 对O点: $M_{外} = 0$

角动量守恒: $mv'l' = mvl$ (2)

过程4→5: (人+地球)系统:

机械能守恒: $\frac{1}{2}mv'^2 = mgl'(1-\cos\theta')$ (3)




(1)、(2)、(3)联立解得：

$$\frac{1-\cos\theta'}{1-\cos\theta}=\frac{l^3}{l'^3}>1$$

整理得到$\cos\theta'<\cos\theta$，即

$\theta'>\theta$ **人越摆越高！**

作业：习题　4.1

4.6

补充：

设两粒子之间存在相互排斥力，其变化规律$f=k/r^2$，k是常数。若取无穷远处是零势能参考位置，求两粒子相距是r时的势能。