第四节　幂级数

一、函数项级数的一般概念

1. 定义:

设$u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots$是定义在$I \subseteq R$上的函数, 则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$

称为定义在区间I上的(函数项)无穷级数.

例如级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots,$

2. 收敛点与收敛域:

如果$x_0 \in I$, 数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$收敛,

则称x_0为级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的收敛点, 否则称为发散点.

函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的所有收敛点的全体称为收敛域,

所有发散点的全体称为发散域.

3. 和函数:

在收敛域上, 函数项级数的和是x的函数$s(x)$,
称$s(x)$为函数项级数的和函数.

$$s(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$ (定义域是?)

函数项级数的部分和 $s_n(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x)=s(x)$

余项 $r_n(x)=s(x)-s_n(x)$

$\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x)=0$ (x在收敛域上)

注意 函数项级数在某点x的收敛问题,实质上是数项级数的收敛问题.

例 1　求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(\frac{1}{1+x})^n$的收敛域.

二、幂级数及其收敛性

1. 定义: 形如$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$的级数称为幂级数.

当$x_0 = 0$时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 其中$a_n$为幂级数系数.

2. 收敛性:

例如级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots$,

当$|x| < 1$时, 收敛; 当$|x| \geq 1$时, 发散;

收敛域$(-1,1)$; 发散域$(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$;

定理 1（Abel 定理）

如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = x_0 (x_0 \neq 0)$处收敛，则

它在满足不等式$|x| < |x_0|$的一切x处绝对收敛;

如果级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = x_0$处发散，则它在满足

不等式$|x| > |x_0|$的一切x处发散.

证明　(1) $\because \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$收敛，　$\therefore \lim_{n \to \infty} a_n x_0^n = 0$,

$\exists M$，使得 $\left|a_n x_0^n\right| \le M \quad (n = 0,1,2,\cdots)$

$$\left|a_n x^n\right| = \left|a_n x_0^n \cdot \frac{x^n}{x_0^n}\right| = \left|a_n x_0^n\right| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n \le M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

$\because$ 当 $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ 时，等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$ 收敛，

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\left|a_n x^n\right|$ 收敛，即级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛；

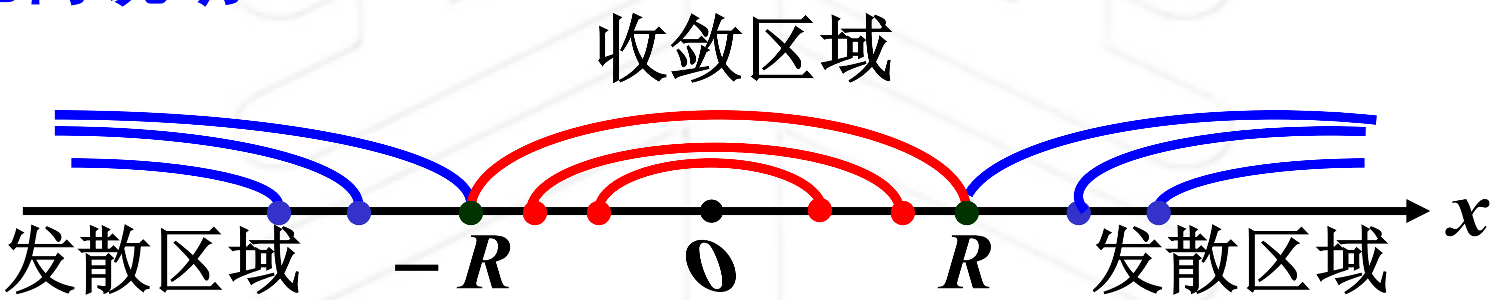
(2) 假设当$x = x_0$时发散，

而有一点x_1适合$|x_1| > |x_0|$使级数收敛，

由(1)结论　则级数当$x = x_0$时应收敛，

这与所设矛盾.

几何说明



推论

如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$不是仅在$x=0$一点收敛, 也不是在整个数轴上都收敛, 则必有一个完全确定的正数R存在, 它具有下列性质:

当$|x|<R$时, 幂级数绝对收敛;

当$|x|>R$时,幂级数发散;

当$x=R$与$x=-R$时, 幂级数可能收敛也可能发散.

定义： 正数R称为幂级数的收敛半径.

幂级数的收敛域称为幂级数的收敛区间.

$$(-R, R), \quad [-R, R), \quad (-R, R], \quad [-R, R].$$

规定 (1) 幂级数只在$x = 0$处收敛,

$R = 0$, 收敛区间$x = 0$;

(2) 幂级数对一切x都收敛,

$R = +\infty$, 收敛区间$(-\infty, +\infty)$.

问题 如何求幂级数的收敛半径?

定理 2　如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的所有系数$a_n \neq 0$,

设　$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$　(或 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$)

(1)　则当$\rho \neq 0$时,$R = \frac{1}{\rho}$; (2)　当$\rho = 0$时,$R = +\infty$;

(3)　当$\rho = +\infty$时,$R = 0$.

证明　对级数$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$应用达朗贝尔判别法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x| = \rho|x|,$$

(1) 如果$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho\ (\rho \neq 0)$存在,

由比值审敛法，当$|x| < \dfrac{1}{\rho}$时，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$收敛,

从而级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$绝对收敛.

当$|x| > \dfrac{1}{\rho}$时，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|$发散,

并且从某个 n开始 $|a_{n+1}x^{n+1}| > |a_n x^n|$, $|a_n x^n| \not\to 0$

从而级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$发散. 收敛半径 $R = \dfrac{1}{\rho}$;

(2) 如果$\rho = 0$, $\forall x \neq 0$,

有 $\dfrac{\left|a_{n+1}x^{n+1}\right|}{\left|a_n x^n\right|} \to 0\ (n \to \infty)$, 级数$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$收敛,

从而级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛. 收敛半径 $R = +\infty$;

(3) 如果$\rho = +\infty$,

$\forall x \neq 0$, 级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$必发散.

(否则由定理1知将有点$x \neq 0$使$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$收敛)

收敛半径 $R = 0$. 定理证毕.

例2 求下列幂级数的收敛区间:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-nx)^n$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}(x-\frac{1}{2})^n$.

例 3 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}$ 的收敛区间.

三、幂级数的运算

1. 代数运算性质:

设$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$和$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$的收敛半径各为$R_1$和$R_2$,

$R = \min\{R_1, R_2\}$

(1) 加减法

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \qquad x \in (-R, R)$$

(其中 $c_n = a_n \pm b_n$)

(2) 乘法

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \quad x \in (-R, R)$$

$$(\text{其中 } c_n = a_0 \cdot b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + \cdots + a_n \cdot b_0)$$

柯西乘积

$$\begin{array}{ccccc}
1 & x & x^2 & x^3 & \cdots \\
a_0b_0 & a_0b_1 & a_0b_2 & a_0b_3 & \cdots \\
a_1b_0 & a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots \\
a_2b_0 & a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots \\
a_3b_0 & a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

(3) 除法　　(收敛域内 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \neq 0$)

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

(相除后的收敛区间比原来两级数的收敛区间小得多)

2. 和函数的分析运算性质:

(1)　幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $s(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$ 内连续,在端点收敛,则在端点单侧连续.

(2) 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在收敛区间$(-R, R)$内可积,且对$\forall x \in (-R, R)$可逐项积分.

$$\text{即} \int_0^x s(x)dx = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

(收敛半径不变)

(3) 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$s(x)$在收敛区间$(-R, R)$内可导，并可逐项求导任意次.

即 $s'(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)'$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

(收敛半径不变)

例 4 求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}$的和函数.

例 5 求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{2^n}$的和.

常用已知和函数的幂级数

$$(1)\ \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x};\qquad (2)\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2};$$

$$(3)\ \sum_{n=0}^{\infty} a x^{2n} = \frac{a}{1-x^2};\qquad (4)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x;$$

$$(5)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sin x;$$

$$(6)\ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x);$$

思考题

幂级数逐项求导后，收敛半径不变，那么它的收敛域是否也不变?