三、函数极限的性质

1.有界性

定理　若在某个过程下，$f(x)$有极限，则存在过程的一个时刻，在此时刻以后$f(x)$有界.

2.唯一性

定理　若$\lim f(x)$存在,则极限唯一.

3.不等式性质

定理(保序性) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B.$

若 $\exists\delta>0, \forall x\in U^0(x_0,\delta)$,有 $f(x)\le g(x)$,则 $A\le B.$

推论 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$,且 $A<B$

则 $\exists\delta>0, \forall x\in U^0(x_0,\delta)$,有 $f(x)<g(x).$

定理(保号性) 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,且$A>0$(或$A<0$),

则$\exists\delta>0$,当$x\in U^0(x_0,\delta)$时, $f(x)>0$(或$f(x)<0$).

推论 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,且$\exists\delta>0$,当$x\in U^0(x_0,\delta)$时,

$f(x)\geq 0$(或$f(x)\leq 0$),则$A\geq 0$(或$A\leq 0$).

4.子列收敛性(函数极限与数列极限的关系)

定义 设在过程$x \to a$(a可以是x_0, x_0^+,或x_0^-)中有数列$x_n(\neq a)$,使得$n \to \infty$时$x_n \to a$.则称数列$\{f(x_n)\}$,即$f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n), \cdots$为函数$f(x)$当$x \to a$时的子列.

定理 若$\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$,数列$f(x_n)$是$f(x)$当$x \to a$时的一个子列,则有$\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

证 $\because \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

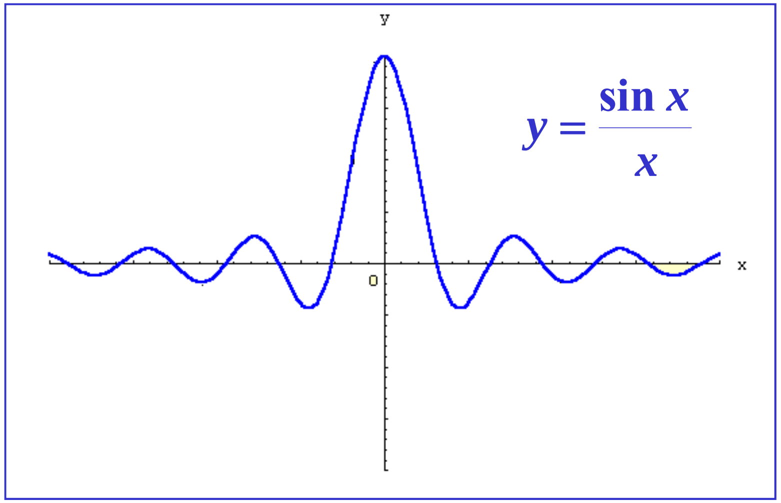
$\therefore \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,$使当$0<|x-x_0|<\delta$时,恒有
$|f(x)-A|<\varepsilon.$

又$\because \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ 且 $x_n \neq x_0$,

$\therefore$对上述$\delta>0,\exists N>0,$使当$n>N$时,恒有
$0<|x_n-x_0|<\delta.$

从而有 $|f(x_n)-A|<\varepsilon,$ 故 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n)=A.$

例如，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$



$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n}=1,$$

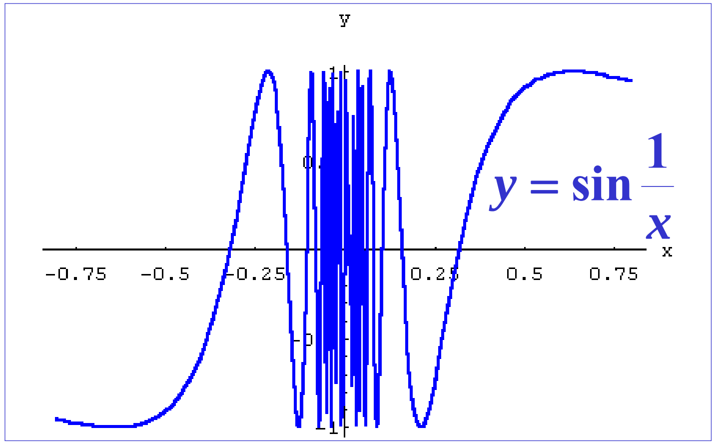
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+1}\sin\frac{n+1}{n^2}=1$$

函数极限与数列极限的关系

函数极限存在的充要条件是它的任何子列的极限都存在, 且相等.

例7 证明 $\lim\limits_{x \to 0} \sin \dfrac{1}{x}$ 不存在.

证 取 $\{x_n\} = \left\{ \dfrac{1}{n\pi} \right\}$,



$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$, 且 $x_n \neq 0$;

取 $\{x'_n\} = \left\{ \dfrac{1}{\dfrac{4n+1}{2}\pi} \right\}$, $\lim\limits_{n \to \infty} x'_n = 0$, 且 $x'_n \neq 0$;

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin n\pi=0,$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x'_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{4n+1}{2}\pi$

$=\lim\limits_{n\to\infty}1=1,$

二者不相等， 故 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

四、小结

函数极限的统一定义

$$\lim_{n\to\infty} f(n)=A;$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A; \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=A; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=A;$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A; \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x)=A; \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x)=A.$$

$\lim f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$,$\exists$时刻,从此时刻以后,

恒有$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon.$ (见下表)

过　程	$n \to \infty$	$x \to \infty$	$x \to +\infty$	$x \to -\infty$
时　刻	N或者X			
从此时刻以后	$n > N$	$\lvert x \rvert > X$	$x > X$	$x < -X$
$f(x)$	$\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$			

过　程	$x \to x_0$	$x \to x_0^+$	$x \to x_0^-$
时　刻	δ		
从此时刻以后	$0 < \lvert x - x_0 \rvert < \delta$	$0 < x - x_0 < \delta$	$-\delta < x - x_0 < 0$
$f(x)$	$\lvert f(x) - A \rvert < \varepsilon$		

一、极限的运算法则

定理 设 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$,则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B;$

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B;$

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B},\quad$ 其中$B\neq 0.$

推论1 如果$\lim f(x)$存在,而c为常数,则

$$\lim[cf(x)] = c\lim f(x).$$

常数因子可以提到极限记号外面.

推论2 如果$\lim f(x)$存在,而n是正整数,则

$$\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n.$$

例1 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+5}$.

解 $\because \lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5) = \lim\limits_{x\to 2}x^2 - \lim\limits_{x\to 2}3x + \lim\limits_{x\to 2}5$

$= (\lim\limits_{x\to 2}x)^2 - 3\lim\limits_{x\to 2}x + \lim\limits_{x\to 2}5$

$= 2^2 - 3\cdot 2 + 5 = 3 \neq 0,$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{x^3-1}{x^2-3x+5} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}x^3 - \lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)} = \frac{2^3-1}{3} = \frac{7}{3}.$$

小结: 1. 设 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$, 则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a_0(\lim_{x\to x_0} x)^n+a_1(\lim_{x\to x_0} x)^{n-1}+\cdots+a_n$$

$$=a_0x_0{}^n+a_1x_0{}^{n-1}+\cdots+a_n = f(x_0).$$

2. 设 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 且 $Q(x_0)\neq 0$, 则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = f(x_0).$$

若 $Q(x_0)=0$, 则商的法则不能应用.

小结: 当$a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, m$和$n$为非负整数时有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, \text{当} n = m, \\ 0, \text{当} n > m, \\ \infty, \text{当} n < m, \end{cases}$$

无穷小分出法: 以分母中自变量的最高次幂除分子,分母,以分出无穷小,然后再求极限.

极限存在准则与两个重要极限

一　极限存在的两个准则

二　两个重要极限

三　小结与思考判断题

一　极限存在准则

1. 夹逼准则(两边夹定理)

定理Ⅰ　如果数列 x_n, y_n 及 z_n 满足下列条件:

(1) $y_n \le x_n \le z_n \quad (n = 1,2,3\cdots)$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a, \quad \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a,$

那末数列 x_n 的极限存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

准则 I′　如果当 $x \in \overset{0}{U}_{\delta}(x_0)$（或 $|x| > M$）时，有

(1) $g(x) \le f(x) \le h(x)$,

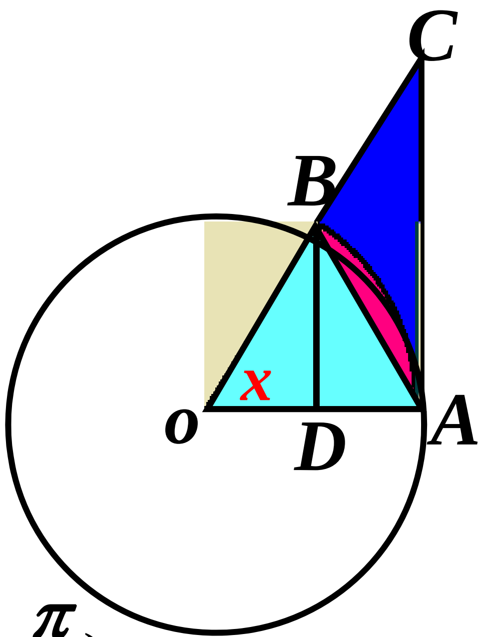
(2) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} g(x) = A$,　$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} h(x) = A$,

那末 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x)$ 存在，且等于 A .

准则 I 和准则 I' 称为夹逼准则.

注意: 利用夹逼准则求极限关键是构造出 y_n 与 z_n,
并且 y_n 与 z_n 的极限是容易求的 .

二、两个重要极限



1、 $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1}$

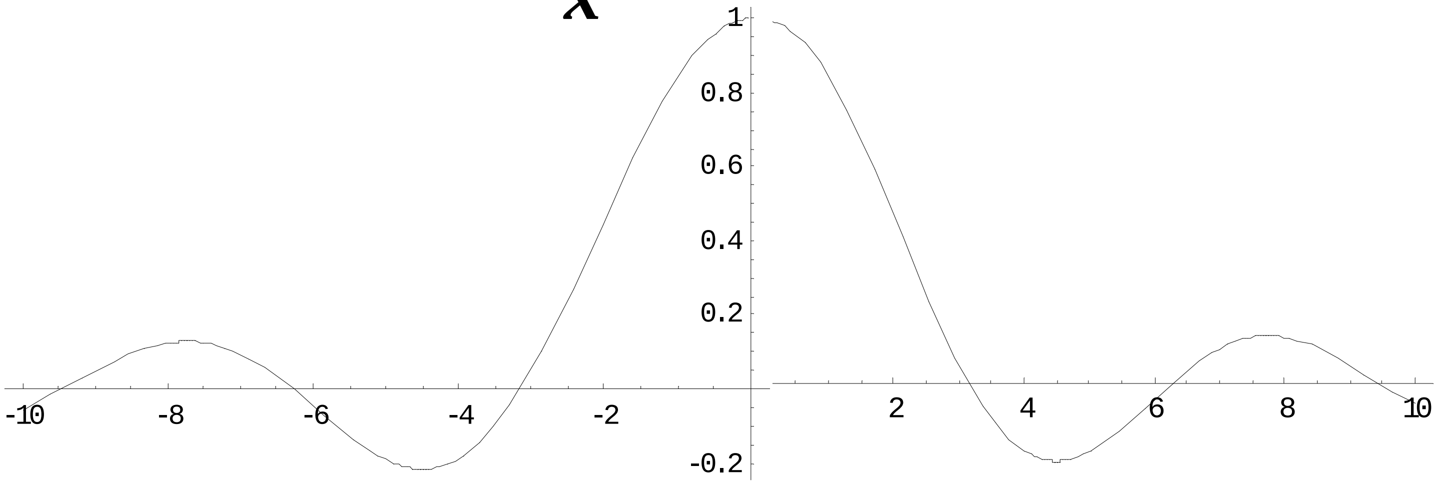
设单位圆 O, 圆心角$\angle AOB = x$, $(0 < x < \dfrac{\pi}{2})$

作单位圆的切线，得ΔACO.

扇形OAB的圆心角为x， ΔOAB的高为BD,

于是有$\sin x = BD$, $x =$ 弧 AB, $\tan x = AC$,

$\dfrac{\sin x}{x}$的图象



利用变量代换可导出上 述极限的一般形式:

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1;$$

例3　（1）求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解　$\text{原式}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$$

（2）求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos 2x\sin x}{x}$

$$=2\cdot\lim_{x\to 0}\cos 2x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$$

$$=2\cdot 1\cdot 1=2.$$

例5 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2^2}\cos\frac{\varphi}{2^3}\cdots\cos\frac{\varphi}{2^n}$， $\varphi\neq 0.$

解 $\because\ \sin\varphi = 2\cos\frac{\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2} = 2^2\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2^2}\sin\frac{\varphi}{2^2}$

$$= 2^3\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2^2}\cos\frac{\varphi}{2^3}\sin\frac{\varphi}{2^3}$$

$$= \cdots = 2^n\cos\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2^2}\cos\frac{\varphi}{2^3}\cdots\cos\frac{\varphi}{2^n}\sin\frac{\varphi}{2^n}$$

$$\therefore\ \text{原式} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\varphi}{2^n\sin\frac{\varphi}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\varphi}{\varphi}\frac{\frac{\varphi}{2^n}}{\sin\frac{\varphi}{2^n}} = \frac{\sin\varphi}{\varphi}.$$

2、 $$\boxed{\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e}$$

$$\therefore \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e.$$

令 $t=-x$,

$$\therefore \lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=\lim_{t\to+\infty}(1-\frac{1}{t})^{-t}=\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^{t}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^{t-1}(1+\frac{1}{t-1})=e.$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$$

令 $t=\frac{1}{x}$, $\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^{t}=e.$

$$\boxed{\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$$

利用变量代换可导出上 述极限的一般形式：

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e$$

例4　求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{x}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{-x})^{-x}]^{-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{-x})^{-x}}$

$$=\frac{1}{e}.$$

例5　求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3+x}{2+x})^{2x}$.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{x+2})^{x+2}]^{2}(1+\frac{1}{x+2})^{-4}=e^{2}$.