第 2 章 极限与连续

1. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \iff$ 对任意的 $\varepsilon > 0$，数列 $\{x_n\}$ 中只有有限项 x_n 在 a 的 ε 领域 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 之外.

证明：充分性：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，即对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N\in N^+$，使 $n>N$ 时，$|x_n - a| < \varepsilon$，~~故~~ 即 $a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon$，故 $n<N$ 时不成立，则数列 $\{x_n\}$ 中只有有限项 x_n 在 a 的 ε 邻域 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 之外.

必要性：只有有限项 x_n 在 $U(a;\varepsilon)$ 之外，则 $n>N$ 时，所有项都在 $U(a;\varepsilon)$ 之内，越接近 a，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

2. 用数列极限定义证明:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n) = 0.$

对 $\forall \varepsilon>0$，因为

$$\left|\sqrt{n^2+1}-n-0\right| = \sqrt{n^2+1}-n = \frac{(\sqrt{n^2+1}+n)(\sqrt{n^2+1}-n)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} < \frac{1}{n}$$

所以只要 $\frac{1}{n}<\varepsilon$，就有 $|\sqrt{n^2+1}-n-0|<\varepsilon$.

故可取 $N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1$，当 $n>N$ 时，有 $\left|\sqrt{n^2+1}-n-0\right|<\frac{1}{n}<\varepsilon$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)=0$.

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+1}{3n^2+4n} = \frac{2}{3}.$

对 $\forall\varepsilon>0$，因为 $\left|\frac{2n^2+1}{3n^2+4n}-\frac{2}{3}\right| = \left|\frac{2n^2+1}{3n^2+4n}-\frac{2n^2}{3n^2}\right| < \left|\frac{2n^2+1}{3n^2+4n}-\frac{2n^2}{3n^2+4n}\right| = \left|\frac{1}{3n^2+4n}\right|$

$< \frac{1}{3n+4n} = \frac{1}{7n}$　　故只要 $\frac{1}{7n}<\varepsilon$，就有 $\left|\frac{2n^2+1}{3n^2+4n}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$.

所以取 $N=[\frac{1}{7\varepsilon}]+1$，当 $n>N$ 时，就有 $\left|\frac{2n^2+1}{3n^2+4n}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+4n}=\frac{2}{3}$.

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{q^n} = 0, (q>1).$

对 $\forall\varepsilon\in(0,1)$ 因为 $\left|\frac{1}{q^n}-0\right| = (\frac{1}{q})^n = q^{-n} < \varepsilon$

两边同时取对数，有：$-n\ln q < \ln\varepsilon$

$N > -\frac{\ln\varepsilon}{\ln q}$ 的任一自然数 ~~$n>$~~ $\frac{\ln\varepsilon}{\ln q}$

所以取 $N=[-\frac{\ln\varepsilon}{\ln q}]+1$，当 $n>N$ 时，则 $\left|\frac{1}{q^n}-0\right|<\varepsilon$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{q^n}=0$.

3. 对于数列 $\{x_n\}$，若 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1}=a$, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{2k}=a$, 试证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

证明：由题可得：$\forall \varepsilon>0$.

$\exists N_1>0$ 当 $k>N_1$ 时，有 $|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$

$\exists N_2>0$. 当 $k>N_2$ 时，有 $|x_{2k}-a|<\varepsilon$

故取 $N=\max\{N_1, N_2\}$，当 $k>N$ 时，

$|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$ 和 $|x_{2k}-a|<\varepsilon$ 同时成立.

即 $|x_n-a|<\varepsilon$ 成立.（$n=2k'$）

故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

4. 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$, 试用定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a$.

证明：

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-a=\frac{(x_1-a)+(x_2-a)+(x_3-a)+\cdots+(x_n-a)}{n} \quad ①$$

令 $a_n=x_n-a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$. ①式可化为 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

即证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=0$. $\forall\varepsilon>0$. $\exists N_1\in N^+$. 当 $n>N_1$ 时. $|a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}+a_{N_1+1}+\cdots+a_n}{n}\right|\leq\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}\right|+\left|\frac{a_{N_1+1}+\cdots+a_n}{n}\right|\leq\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}\right|+\frac{(n-N_1)\varepsilon}{2n}$$

$$\leq\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}\right|+\frac{\varepsilon}{2} \qquad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}\right|=0$$

$\therefore \exists N_2\in N^+$，当 $n>N_2$ 时 $\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$

令 $N=\max\{N_1, N_2\}$. 当 $n>N$ 时 $\frac{|a_1+a_2+\cdots+a_n|}{n}<\varepsilon$ 则得证.

5. 设 $x_1>-6$， $x_{n+1}=\sqrt{x_n+6}(n=1,2,\cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 极限存在，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

解：① 当 $x_1=3$ 时，显然 该数列 $x_n=3$，极限存在并为 3.

② 当 $x_1>3$ 时 $x_2=\sqrt{x_1+6}>\sqrt{3+6}=3$

假设 $x_k>3$，则 $x_{k+1}=\sqrt{x_k+6}>\sqrt{3+6}=3$

故 $x_n>3$. 则该数列有下界.

证单调性 $x_n-x_{n+1}=x_n-\sqrt{x_n+6}=\frac{x_n^2-x_n-6}{x_n+\sqrt{x_n+6}}=\frac{(x_n-3)(x_n+2)}{x_n+\sqrt{x_n+6}}>0$

$\therefore \{x_n\}$ 单调递减. 又由于其有下界 因此 $\{x_n\}$ 有极限.

③ 当 $-6<x_1<3$ 时，$x_2=\sqrt{x_1+6}<\sqrt{3+6}=3$

假设 $x_k<3$，则 $x_{k+1}=\sqrt{x_k+6}<\sqrt{3+6}=3$

$\therefore x_n<3$

又 $x_n-x_{n+1}=x_n-\sqrt{x_n+6}=\frac{x_n^2-x_n-6}{x_n+\sqrt{x_n+6}}=\frac{(x_n-3)(x_n+2)}{x_n+\sqrt{x_n+6}}<0$

$\therefore \{x_n\}$ 单调递增 有上界 故有极限

令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$ 解得：$\begin{cases} a=-2 (舍) \\ a=3 \end{cases}$