大学物理

第五章 刚体定轴转动

（Rotation of Rigid Body about a Fixed Axis）

一. 刚体（rigid body）的概念

不能变形的物体称为刚体。

显然，刚体是个理想化的模型，但是它有实际的意义。

刚体是特殊的质点系，其上各质点间的相对位置保持不变。质点系的规律都可用于刚体，而且考虑到刚体的特点，规律的表示还可较一般的质点系有所简化。

二．刚体的运动形式

1.平动（translation）：

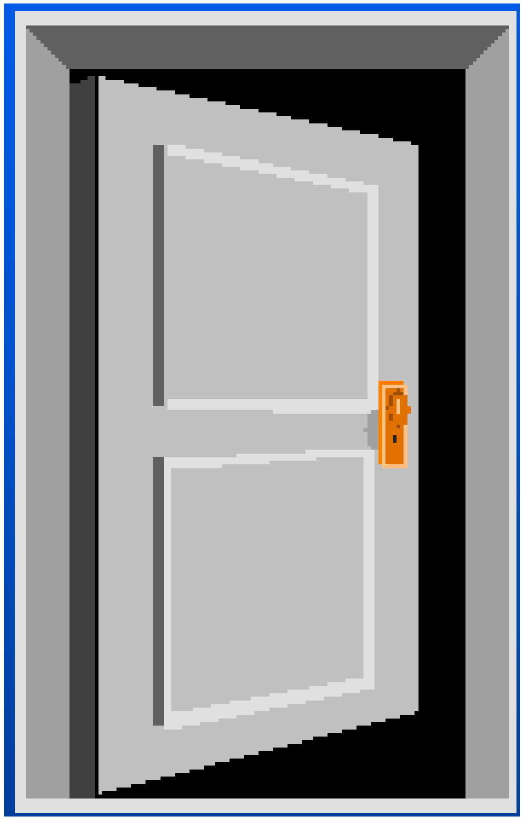
连接刚体内任意两点的直线在运动各个时刻的位置都**彼此平行**。刚体做平动时，刚体内各质元的的运动**轨迹都一样**，而且同一时刻的**速度和加速度都相同**。可用质心或其上任何一点的运动来代表整体的运动。

2.转动（rotation）：

转动也是刚体的基本运动形式之一，它又可分为定轴转动和定点转动。

▲ 定轴转动：

运动中各质元均做圆周运动，且各圆心都在同一条固定的直线（转轴）上。



3.一般运动：

刚体不受任何限制的的任意运动。它可分解为以下两种刚体的基本运动：

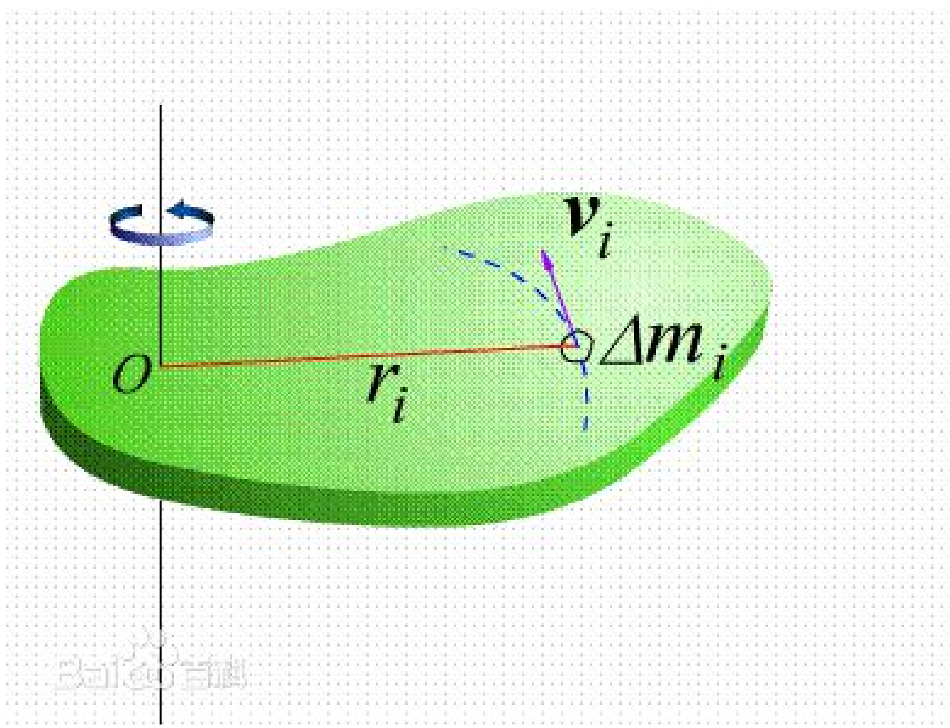
▲ 随基点O（可任选）的平动

▲ 绕通过基点O的瞬时轴的定点转动

三．刚体转动的描述（运动学问题）

定轴转动（rotation about a fixed axis）

刚体绕某一固定转轴转动时，各质元的线速度和加速度是不同的。



为反映转动方向及刚体转动的快慢和转向，引入角速度 $\vec{\omega}$。

$$\boxed{L_z = J_z \cdot \omega}$$

转动惯量 $J = \sum \Delta m_i r_{i\perp}^2$

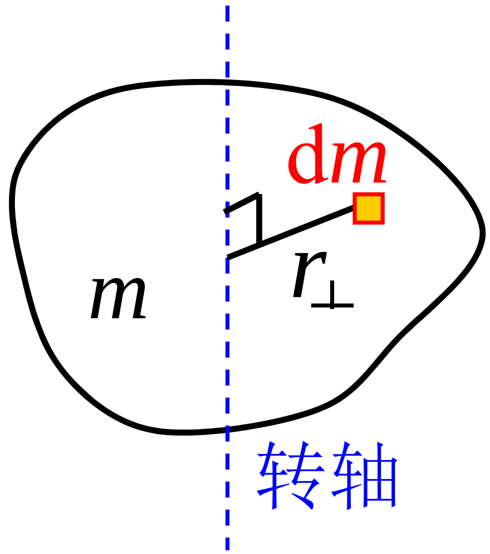
$$M_{外z} = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = J_z \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{M_{外z} = J_z \alpha}$$

§ 5.3 转动惯量的计算

质点系 $J=\sum \Delta m_i r_{i\perp}^2$

连续体 $J=\int_m r_\perp^2 \cdot \mathrm{d}\,m$



J 由质量对轴的分布决定。

1：总质量

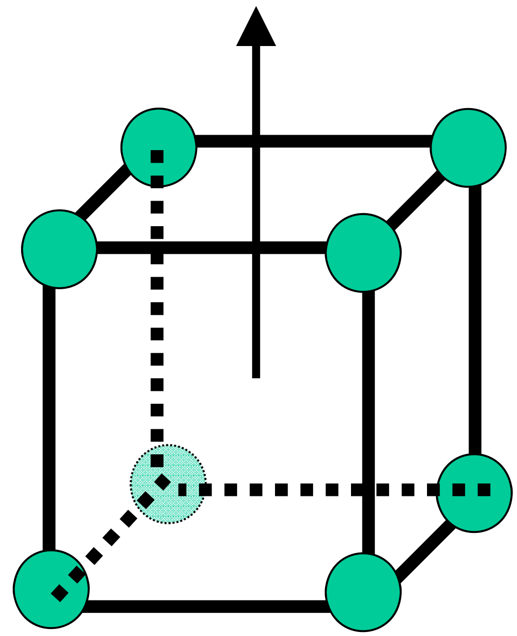
2：质量分布

3：转轴

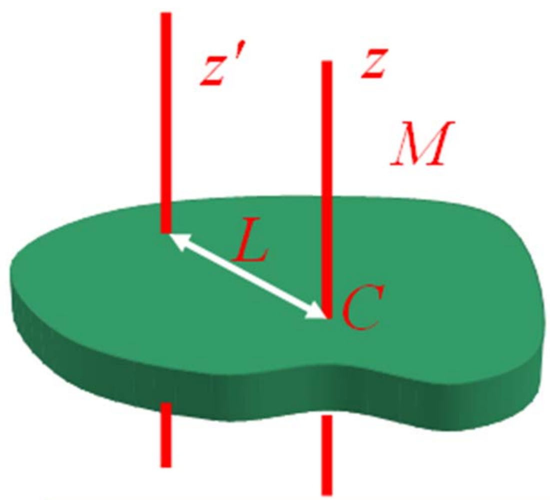
计算转动惯量的几条规律

1.对同一轴J具有可叠加性

$$\boxed{J=\sum J_i} \qquad J=\Delta m_i r_i^2$$



2.平行轴定理



$$\boxed{J_{z'}=J_z+ML^2}$$

平行轴定理

§ 5.4 刚体定轴转动的角动量定理和角动量守恒定律

讨论力矩对时间的积累效应。

质点系：

对轴： $$\int_{t_1}^{t_2} M_{外z}\,\mathrm{d}t = L_{2z} - L_{1z}$$

刚体： $$L_z = J_z\omega$$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} M_{外z}\,\mathrm{d}t = J_z\omega_2 - J_z\omega_1}$$

——刚体定轴转动的角动量定理

刚体定轴转动的角动量守恒定律：

$$\boxed{M_{外z}=0\text{，则 } J_z\omega=\text{const}.}\quad\begin{cases}\text{大小不变}\\\text{正、负不变}\end{cases}$$

对刚体系， $M_{外z}=0$ 时

$$\sum J_{iz}\omega_i=\text{const}.$$

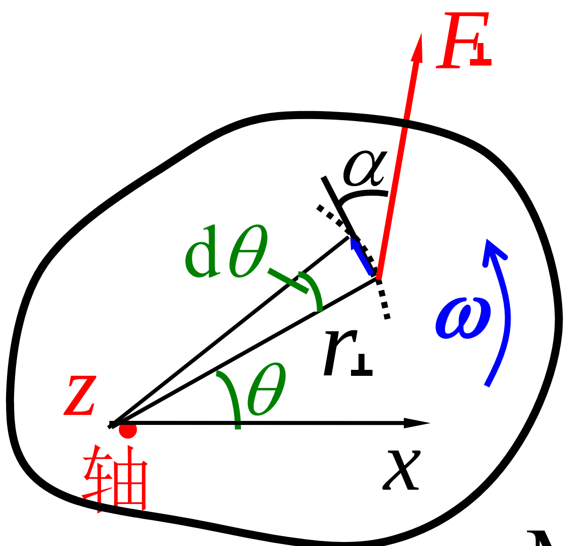
此时角动量可在系统内部各刚体间传递，

而却保持刚体系对转轴的总角动量不变。

§ 5.5 定轴转动中的功能关系

一. 力矩的功

力矩的空间积累效应：



$$\mathrm{d}A = \vec{F}_\perp \bullet \mathrm{d}\vec{r} = F_\perp \mathrm{d}r\cos\alpha$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{F}_\perp \cos\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{r}_\perp \mathrm{d}\boldsymbol{\theta})$$

$$= (\boldsymbol{F}_\perp \cos\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{r}_\perp)\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}$$

$$= \boldsymbol{M}\,\mathbf{d}\boldsymbol{\theta}$$

$$\mathrm{M} = \vec{r}_\perp \times \vec{F}_\perp = F_\perp r_\perp \sin(90^\circ - \alpha)$$

力矩的功： $\boxed{\boldsymbol{A} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{d\theta}}$

二. 定轴转动动能定理

对于刚体中的每一个小质元

$$\frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2 \xrightarrow{v_i = r_i \omega} \frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2 \omega^2$$

$$E_K = \sum \frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2}\Delta m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} J \omega^2$$

令转动动能：

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} J \omega^2}$$

转动惯量：

$$J = \Delta m_i r_i^2$$

质点动能：

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2} m v^2}$$

质点系动能定理:

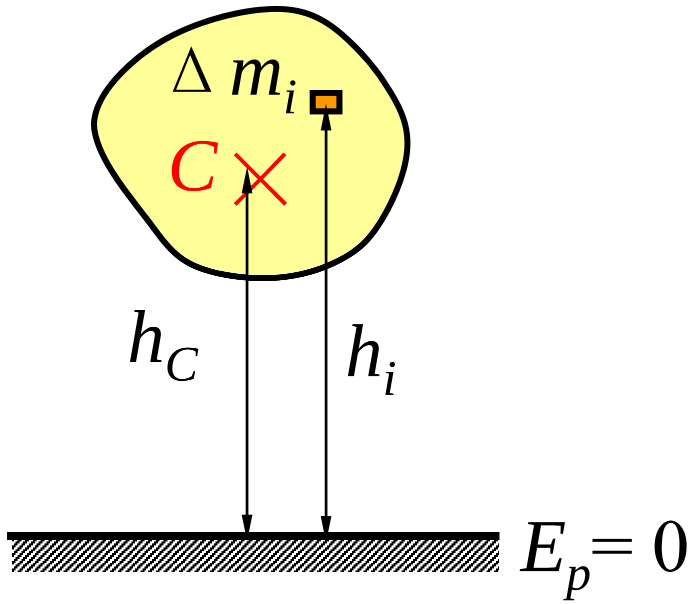
$$\boxed{A = E_{k2} - E_{k1}}$$

$$\boxed{A_{ext} + A_{\text{int}} = E_{k2} - E_{k1}}$$

$$= \frac{1}{2}J\omega_2^2 - \frac{1}{2}J\omega_1^2$$

刚体定轴转动动能定理

三. 刚体的重力势能



$$E_p = \sum \Delta m_i g h_i$$

$$= mg \frac{\sum \Delta m_i h_i}{m}$$

$$= mgh_C$$

全部质量集中在质心的重力势能

四. 刚体的机械能守恒

对于刚体系统，如果在运动过程中，只有保守内力做功，则该系统的机械能守恒

[例]如图，一质量为M,半径为R的水平均匀圆盘可绕通过中心的光滑竖直轴自由转动，在盘边缘上站一个质量为m的人，二者最初都相对地面静止，当人在盘上沿盘边走一周时，盘对地面转过的角度有多大?

$$L = j\omega - J\Omega = 0$$

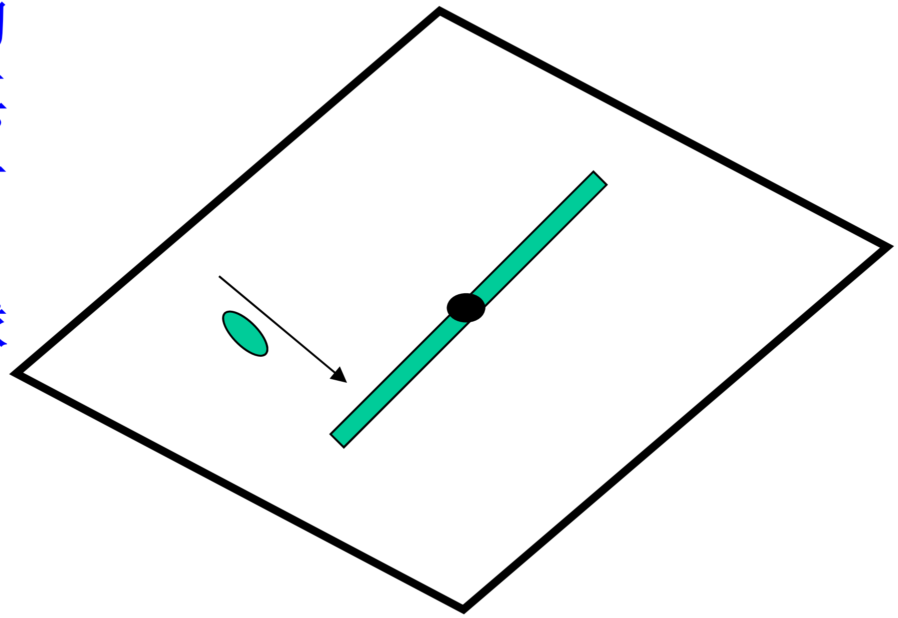
$$j = mR^2, \qquad J = \frac{1}{2}MR^2$$

$$mR^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2}MR^2\frac{d\Theta}{dt} \qquad \int_0^{\theta} mR^2 d\theta = \int_0^{\Theta} \frac{1}{2}MR^2 d\Theta$$

$$m\theta = \frac{1}{2}M\Theta \qquad \theta + \Theta = 2\pi$$

$$\Theta = \frac{2m}{2m+M}2\pi$$

[例]如图，一根长L，质量为M的均匀细棒静止在一光滑水平面上，其中点有一固定的光滑固定平轴，一个质量为m的小球以速度v0垂直于棒冲击其一端而沾上，求碰撞后球的速度v和棒的角速度以及由碰撞而损失的机械能



角动量守恒

$$mv_0\frac{L}{2}=mv\frac{L}{2}+\frac{1}{12}ML^2\omega$$

$$\omega=\frac{6mv_0}{(3m+M)L},$$

$$v=\frac{L}{2}\omega$$

$$v=\frac{3mv_0}{3m+M}$$

$$-\Delta E=\frac{1}{2}mv_0^2-\frac{1}{2}\left(\frac{mL^2}{4}+\frac{1}{12}ML^2\right)\omega^2=\frac{m}{3m+M}\frac{1}{2}mv_0^2$$

小　　结

1：运动学

（V, a）

2：动力学

($F=ma$)

3：动量

($p=mV$)

4：能量

($E=mv^2/2$)

1：刚体运动学

(V, a), (ω,α)

2：刚体动力学

($M=J\alpha$)

3：刚体动量

($L=J\omega$)

4：刚体能量

($E=J\omega^2/2$)

总　结

1：速度　$v = \frac{dr}{dt}$

2：加速度　$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2}$

3：质量　m

4：力　F

5：运动定理　F=ma

6：动量　p=mv

7：角动量　$L = r \times p$

8：动量定理　$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d(mv)}{dt}$

9：动量守恒　$\sum F = 0$　$\sum p = const.$

10：力的功　dA=Fdr

11：动能　$E_K = mv^2/2$

12：重力势能　$E_P = mgh$

13：机械能守恒：只有保守力做功

$E_K + E_P = Const.$

1：角速度　$\omega = \frac{d\theta}{dt}$

2：角加速度　$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$

3：转动质量　$dJ = r^2 dm$

4：力距　$M = r \times F$

5：转动定理　$M = J\alpha$

6：动量　$p = \sum \Delta mv$

7：角动量　$L = J\omega$

8：角动量定理　$M = \frac{dL}{dt} = \frac{d(J\omega)}{dt}$

9：角动量守恒　M=0, L=const.

10：力距的功　$dA = M d\theta$

11：转动动能　$E_K = Jw^2/2$

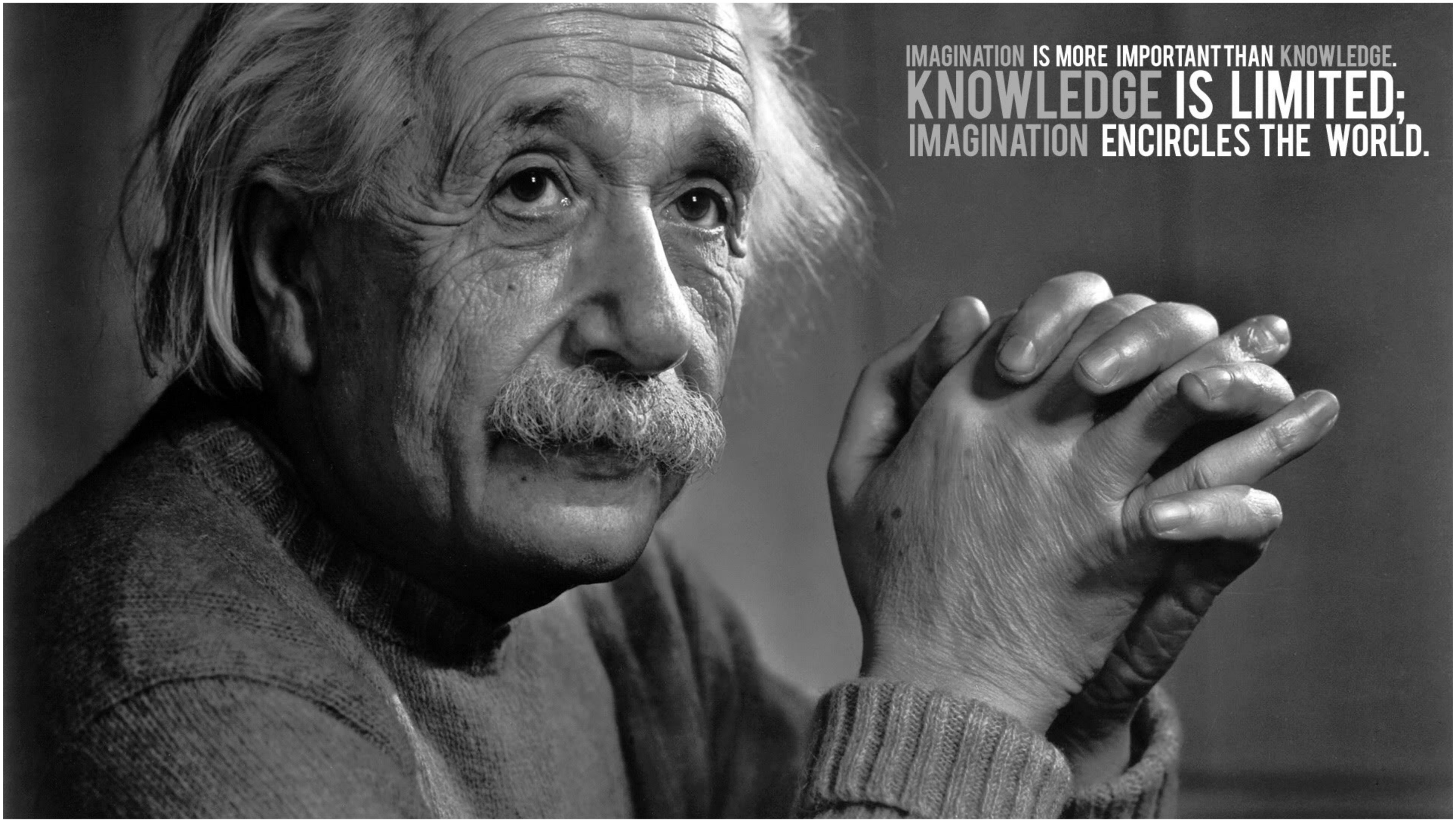
12：重力势能　$E_P = mgh_C$

13：机械能守恒：只有保守力做功

$E_K + E_P = Const.$

习题

5.2 & 5.9 & 5.10 & 5.13 & 5.16 & 5.20


IMAGINATION IS MORE IMPORTANT THAN KNOWLEDGE.
KNOWLEDGE IS LIMITED;
IMAGINATION ENCIRCLES THE WORLD.

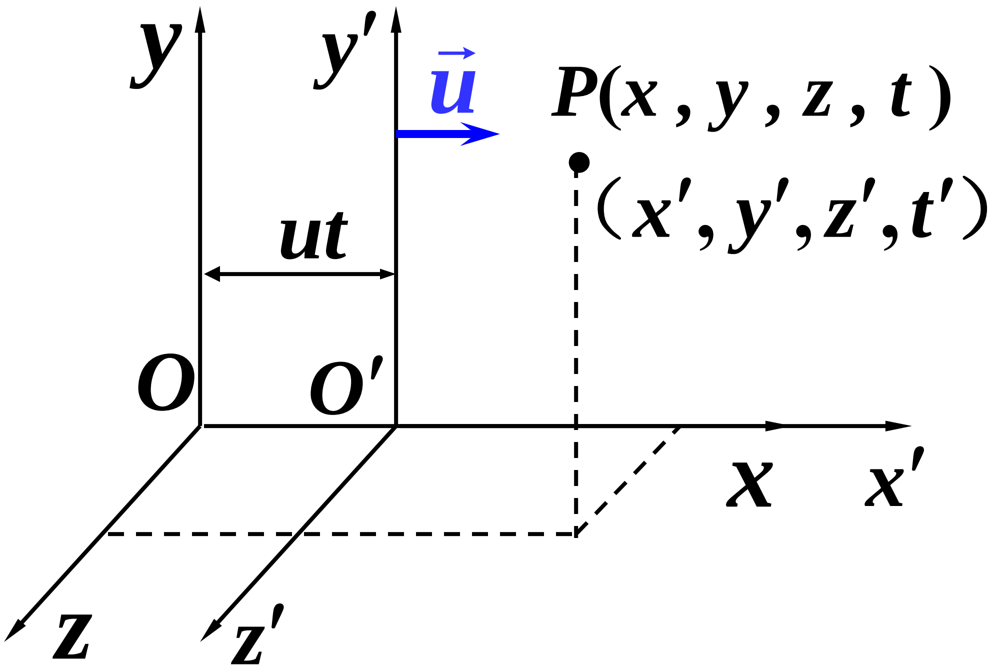
△ § 6.1 牛顿相对性原理和伽利略变换（principle of relativity in mechanics and Galilean transformation）

牛顿相对性原理（力学相对性原理）：

一切力学规律在不同的惯性系中应有相同的形式。 无法说谁是绝对静止的。

牛顿相对性原理源于牛顿的时空观。

牛顿的时空观可通过以下坐标和时间变换来体现：



$x' // x,\ y' // y,\ z' // z,$

$\vec{u} = u\vec{i}x = \text{const}.$

且 O'与 O 重合时，

$t = 0\ ,\quad t' = 0$。

由时空间隔的绝对性，有：

$$\left.\begin{cases} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases}\right\}$$

— 伽利略变换

(Galilean transformation)

对时间求导，得：

$$\left\{\begin{array}{l} v'_x = v_x - u \\ v'_y = v_y \\ v'_z = v_z \end{array}\right. \rightarrow \boxed{\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}}$$

—伽利略速度变换

$$\because \quad \vec{u} = \text{const.} \qquad \therefore \quad \frac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \vec{a}' = \vec{a}$$

牛顿力学中力和质量都与参考系的选择无关，所以在不同惯性系中 $\vec{F} = m\vec{a}$ 的形式不变。这表明伽利略变换和力学相对性原理是一致的。用力学实验无法判定一个惯性系的运动状态。

牛顿相对性原理（力学相对性原理）：

一切力学规律在不同的惯性系中应有相同的形式。

长度和时间的量度与参考系无关

------绝对时空观

在狭义相对论建立之前，科学家们普遍认为：时间和空间都是绝对的。可以脱离物质运动而存在，并且时间与空间没有任何联系。

牛顿说：“绝对的、真正的和数学的时间自身在流逝着，而且由于其本性，在均匀地、与任何其他外界事物无关地流逝着”；

“绝对空间就其本质而言，是与任何外界事物无关、而且是永远相同和不动的。”——绝对时空观

显然，绝对时空观符合人们日常的经验和习惯。

§ 6.2 爱因斯坦相对性原理和光速不变原理
（Einstein′s principle of relativity and principle of constant speed of light）

1905年爱因斯坦在《论动体的电动力学》一书中提出如下两条基本原理：

1. 物理规律对所有惯性系都是一样的。

这后来被称为爱因斯坦相对性原理。

2. 任何惯性系中，真空中光的速率都为 c 。

这一规律称为光速不变原理。

光速不变原理与伽利略变换是彼此矛盾的，若保持光速不变原理，就必须抛弃伽利略变换，也就是必须抛弃绝对的时空观。

1、*Einstein* 的相对性原理 是 ***Newton***理论的发展

一切物理规律

力学规律

2：光速不变原理---时空观的革命！ ！

牛顿力学

时间标度
长度标度
质量的测量

与参考系无关
速度与参考系有关
（相对性）

狭义相对论力学

光速不变

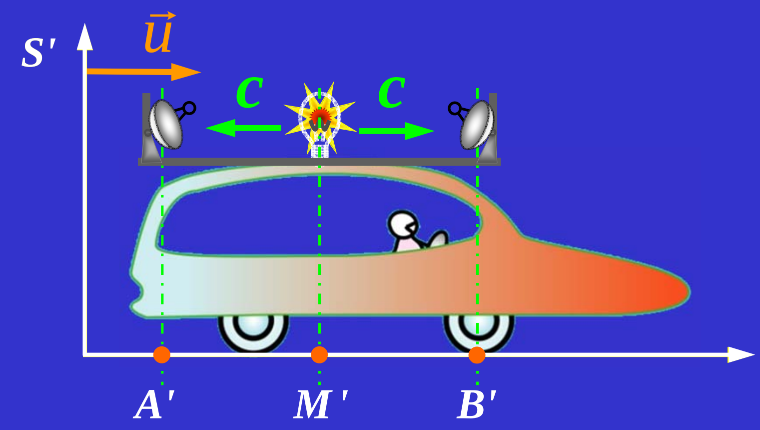
长度 时间 质量
与参考系有关
（相对性）

同时性的相对性

以一个假想火车为例

S 地面参考系

S' 假想火车
(车上放置一套装置)



A'、B' 处分别放置一光信号接收器

中点 M' 处放置一光信号发生器

$t = t' = 0$ 时，M' 发出一光信号

事件1：A' 接收到光信号

事件2：B' 接收到光信号

$\overline{A'M'} = \overline{B'M'}$ ⟶ A'、B' 同时接收到光信号

1、2 两事件同时发生

闪光发生在M 处

光速仍为 c

而这时， A'、B' 处的接收器随 S' 运动。

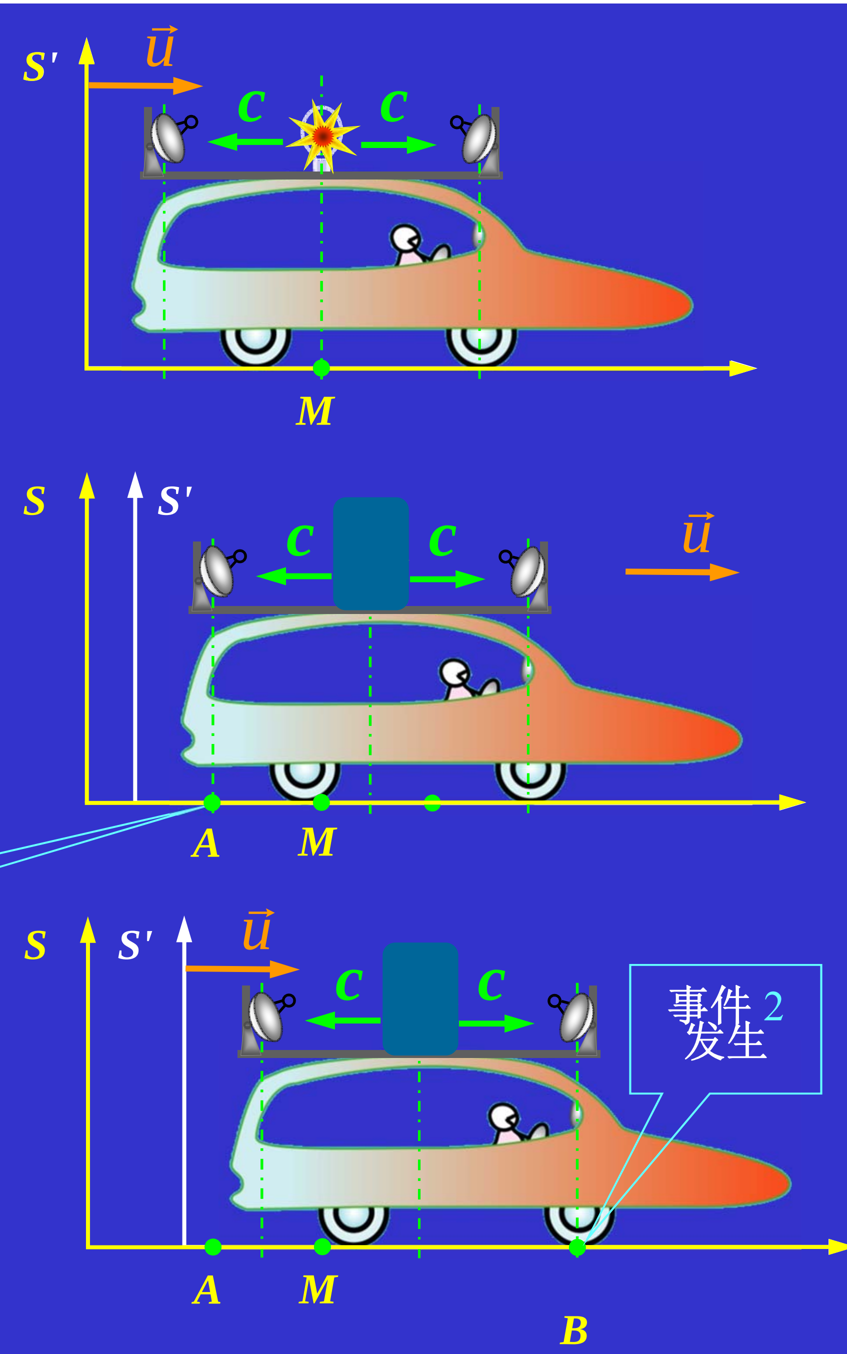
$$\overline{AM} < \overline{A'M'}$$

$$\overline{BM} > \overline{B'M'}$$

事件 1 发生

A' 比 B' 早接收到光信号

1事件先于2 事件发生



S′中的观察者：接收器A、B距光源相同的距离，根据光速不变原理，接收器A、B同时接受到光信号.

$$t'_A = t'_B = \frac{l_0}{2c} \qquad \Delta t' = 0 \qquad \boxed{\text{同时}}$$

S中的观察者：由于光速不变，A面向光源运动，B背离光源运动，因此接收器A先接收到光信号。

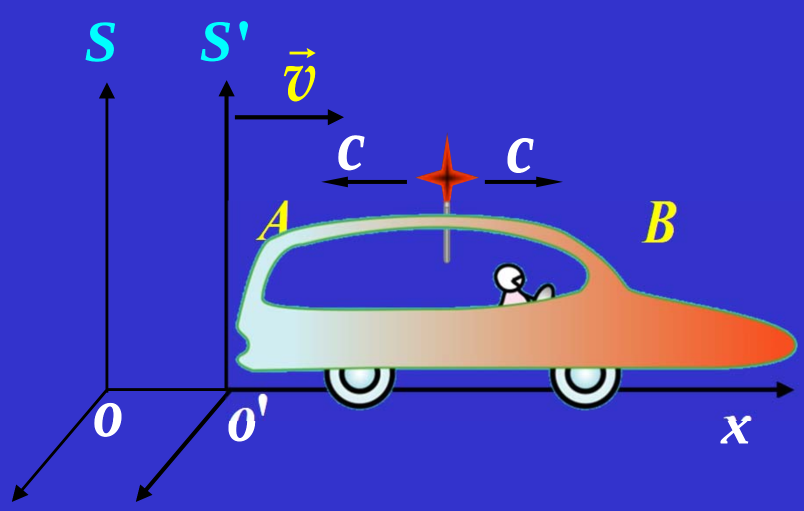
$$t_A = \frac{l/2 - vt_A}{c}, \qquad t_A = \frac{l}{2(c+v)}$$

B背离光源运动，收器B后接收到光信号。

$$t_B = \frac{l/2 + vt_B}{c} \qquad t_B = \frac{l}{2(c-v)}$$

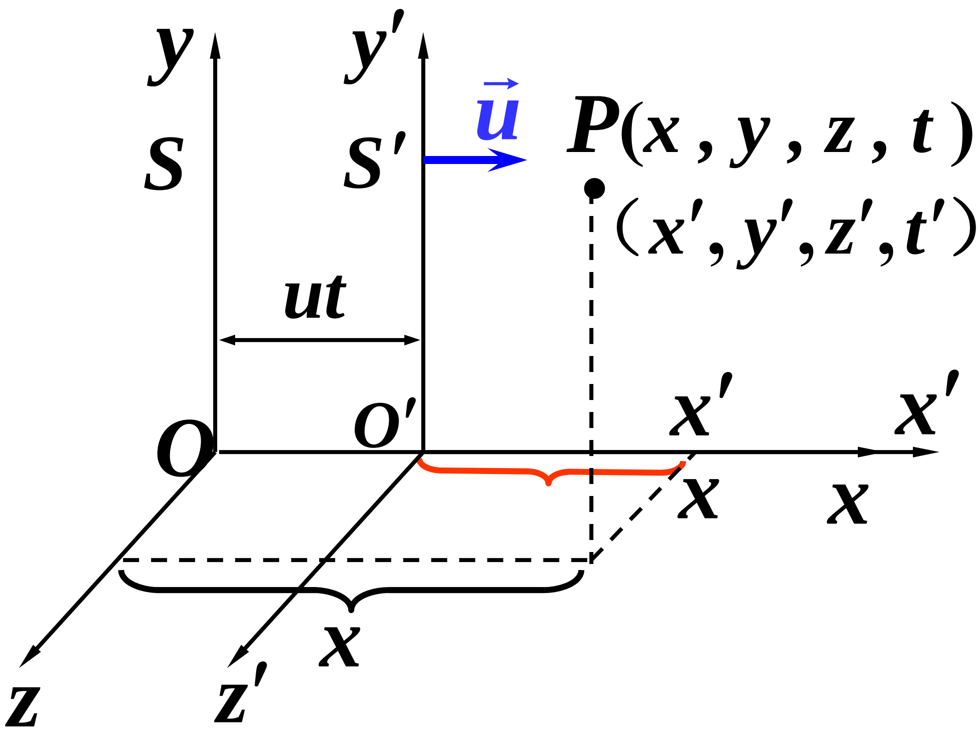
$$\Delta t = t_B - t_A = \frac{l}{2}\left(\frac{1}{c-v} - \frac{1}{c+v}\right)$$

$$\Delta t = \frac{\gamma^2 lv}{c^2} > 0 \qquad \boxed{\text{不同时}}$$



§ 6.3 洛仑兹变换（Lorentz transformation）

目的：寻找适合光速不变原理的新的时空变换。



设 S、S'参考系

$x' \mathbin{//} x$， $y' \mathbin{//} y$， $z' \mathbin{//} z$，

$\vec{u} = u\vec{i}x = \text{const}.$

且O'与 O 重合时，

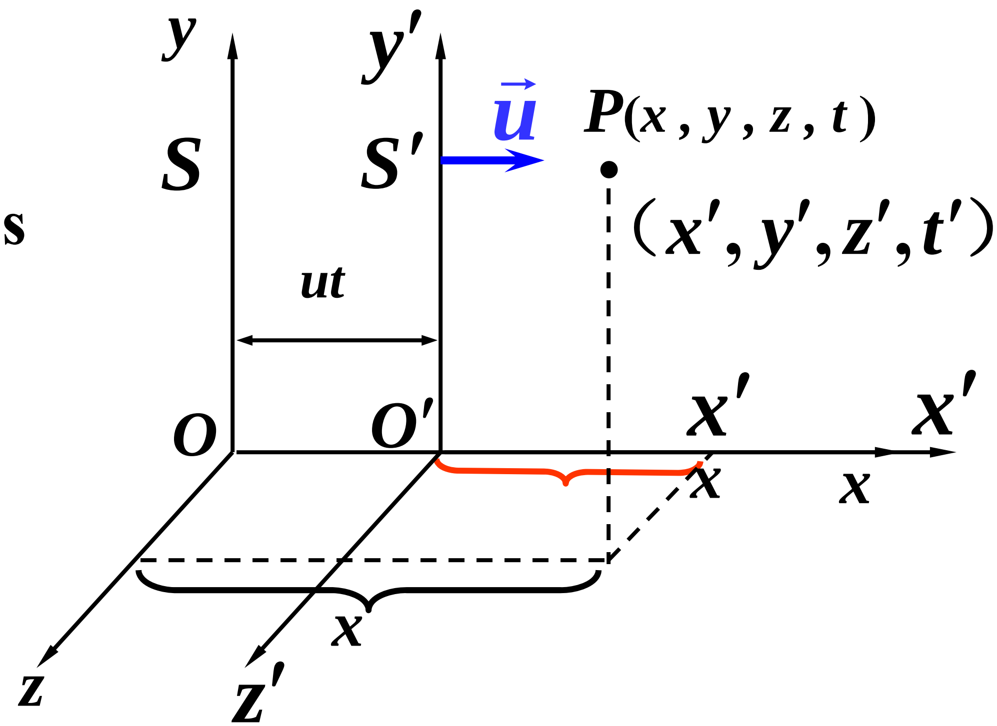
$t = 0$ ， $t' = 0$ 。

两坐标系间需要是线性变换！！！！

初始O'与 O 重合时， $t=0$， $t'=0$。

$$x' = \gamma(x-ut)$$

在s’参考系原点发生的事，在s参考系中发生在x=ut



$$x = \gamma(x'+ut')$$

相对性原理，这两个惯性系是等价的！

$$\Rightarrow \quad x = \gamma(\gamma(x-ut)+ut')$$

$$\Rightarrow \quad t' = \gamma(t - \frac{\gamma^2-1}{\gamma^2}\frac{x}{u})$$

有光速不变原理（测量光脉冲）

x=ct **x'=ct'**

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{ut}) \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{\gamma^2-1}{\gamma^2}\dfrac{x}{\mathrm{u}}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{ct}' = \gamma(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{ut}) \\ t' = \gamma\left(t - \dfrac{\gamma^2-1}{\gamma^2}\dfrac{ct}{\mathrm{u}}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \gamma^2 = \frac{1}{1-\dfrac{\boldsymbol{u}^2}{\boldsymbol{c}^2}} \quad \text{或} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{\boldsymbol{u}^2}{\boldsymbol{c}^2}}}$$

于是有：

洛仑兹变换

$$
\begin{cases}
x' = \dfrac{x - ut}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \\
y' = y \\
z' = z \\
t' = \dfrac{t - \dfrac{u}{c^2} x}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}
\end{cases}
$$

几点讨论与说明：

1. c 为一切可作为参考系的物体的极限速率，即两个物体之间的相对速度只能小于c 。

2. $u << c$时，洛仑兹变换过渡到伽里略变换。

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - ut}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}} \end{cases}$$

$$\begin{Bmatrix} x' = x - ut \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{Bmatrix}$$

伽利略变换

令 $\beta=\frac{u}{c}$ ，$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ ， 则有：

正变换

$$\begin{cases} x'=\gamma(x-ut) \\ y'=y \\ z'=z \\ t'=\gamma(t-\frac{\beta}{c}x) \end{cases}$$

逆变换

$$\begin{cases} x=\gamma(x'+ut') \\ y=y' \\ z=z' \\ t=\gamma(t'+\frac{\beta}{c}x) \end{cases}$$

§ 6.4 相对论时空观

1 同时性的相对性

$$\boxed{t' = \gamma\left(t - \frac{\beta}{c} x\right)} \Rightarrow \boxed{\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{\beta}{c} \Delta x\right)}$$

当$\Delta t=0$时

$$\boxed{\Delta t' = -\gamma\left(\frac{\beta}{c} \Delta x\right)}$$

$$\begin{cases} \text{当}\Delta x=0\text{时} \qquad \Delta t'=0 \\ \text{当}\Delta x\neq 0\text{时} \qquad \Delta t'\neq 0 \end{cases}$$

时间的测量是相对的

谢谢！！！