6.计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{n^2}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{n(1+2n-1)}{2}}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2}=1$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}+2^n}{3\cdot 4^n-3^n}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4+\frac{2^n}{4^n}}{3-\frac{3^n}{4^n}}=\frac{4}{3}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}[\sqrt{n^2+4n+5}-(n-1)]$.

解: 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+4n+5-(n-1)^2}{\sqrt{n^2+4n+5}+n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n+4}{\sqrt{n^2+4n+5}+n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6+\frac{4}{n}}{\sqrt{1+\frac{4}{n}+\frac{5}{n^2}}+1-\frac{1}{n}}=3$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n+2})^n$.

解: 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+2})^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left([1+\frac{1}{-(n+2)}]^{-(n+2)}\cdot[1+\frac{1}{-(n+2)}]^2\right)^{-1}=\frac{1}{e}$

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}})$.

解: $\because \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}$

$\because \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=1$

$\therefore$ 原式 $=1$

(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+\cdots+k}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n+1}=2$

7.用函数极限定义证明:

(1) $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+3)=12$;

证明: $|(x^2+3)-12|=|x^2-9|=|x+3|\cdot|x-3|$

$\because x\to 3$, 不妨设 $\delta<1$, $2<x<4$

要使 $|(x^2+3)-12|<\varepsilon$

只要 $|x+3|\cdot|x-3|<7|x-3|<\varepsilon$, 即 $|x-3|<\frac{\varepsilon}{7}$

取 $\delta=\min\{\frac{\varepsilon}{7},1\}$, 当 $0<|x-3|<\delta$ 时,

$|(x^2+3)-12|<7|x-3|<7\delta\le\varepsilon$ $\quad\therefore \lim\limits_{x\to 3}(x^2+3)=12$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x}{x^2+1}=2$.

证明: $\left|\frac{2x^2+x}{x^2+1}-2\right|=\left|\frac{x-2}{x^2+1}\right|<\left|\frac{x+2}{x^2-4}\right|=\frac{1}{|x-2|}\le\frac{1}{|x|-2}<\varepsilon$, $|x|>2$.

特别 $x=-1$ 这成立吗?

$\therefore \forall\varepsilon>0$, $\left|\frac{2x^2+x}{x^2+1}-2\right|<\varepsilon$.

只要 $\frac{1}{|x|-2}<\varepsilon$, 即 $|x|>\frac{1}{\varepsilon}+2$.

取 $X=\frac{1}{\varepsilon}+2$, 当 $|x|>X$ 时, $\left|\frac{2x^2+x}{x^2+1}-2\right|<\frac{1}{|x|-2}<\varepsilon$

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+x}{x^2+1}=2$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.

证明: $|\sin x-\sin x_0|=2\cdot\left|\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|$

$\because x\to x_0$, 不妨设 $\delta<1$, $x_0-1<x<x_0+1$

要使 $|\sin x-\sin x_0|<\varepsilon$

只要 $|\sin x-\sin x_0|\le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|<\varepsilon$, 即 $|x-x_0|<2\arcsin\frac{\varepsilon}{2}$

取 $\delta=\min\{2\arcsin\frac{\varepsilon}{2},1\}$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,

$|\sin x-\sin x_0|\le 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right|<2\delta<\varepsilon$ $\quad\therefore \lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$.

8.求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+1}{x-2}$.

解: 原式 $=10$.

(2) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-1)(x-2)}{(x+2)(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-1}{x+2}=\frac{1}{4}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^3+2x^2+x}{4x^2+3x}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{5x^2+2x+1}{4x+3}=\frac{1}{3}$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2})$.

解 原式 $=1$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+3x^2}{5x^4+2x}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}{5+\frac{2}{x^3}}=0$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+2x^2+1}{5x^3-3x+2}$.

解: 原式 $=\frac{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}}{5-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}=\frac{4}{5}$

(7) $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3})$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1+x+x^2-3}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(1+x+x^2)}=-\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=-1$

9.求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}=3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=3.$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{\tan x}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x\cdot x}{x\cdot\tan x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$

(或 $x\to 0$, $\arcsin x\sim x$, $\tan x\sim x$)

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}=1$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos 3x}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2\sin^2\frac{3x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{2\sin^2\frac{3x}{2}}\cdot\frac{\sin x}{x}=\frac{2}{9}\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\frac{3x}{2}}{\sin\frac{3x}{2}}\right)^2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{2}{9}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\arctan 3x^2}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2}{3\arctan 3x^2}\cdot\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2}{\arctan 3x^2}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{3}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{2x}$.

解: ~~原式~~ $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}{2x}=\frac{\sqrt{2}}{4}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-\sqrt{2}\sin\frac{x}{2}}{2x}=-\frac{\sqrt{2}}{4}\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$

$\because\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{2x}\neq\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{2x}$ ∴极限不存在.

(6) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left([1+(-2x)]^{-\frac{1}{2x}}\right)^{-2}=\frac{1}{e^2}$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{2x+1}{2x+3})^x$.

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x+\frac{3}{2}}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x+\frac{3}{2}}\right)^{x+\frac{3}{2}}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x+\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{e}$

(8) $\lim\limits_{x\to0}(1-x)^{\frac{2}{x}}$.

解：原式 $= \lim\limits_{x\to0}\left[(1-x)^{-\frac{1}{x}}\right]^{-2} = \frac{1}{e^2}$

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{x+1}{x-1})^{5x}$.

解：原式 $= \lim\limits_{x\to\infty}\left[(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}})^{\frac{x-1}{2}}\cdot(1+\frac{1}{\frac{x-1}{2}})^{\frac{1}{2}}\right]^{10} = e^{10}$

(10) $\lim\limits_{x\to0}(\frac{x+1}{1-x})^{\frac{5}{x}}$.

解：原式：$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-1}\right)^{\frac{5}{x}} = \lim\limits_{x\to0}\left[(1+\frac{1}{\frac{\frac{1}{x}-1}{2}})^{\frac{\frac{1}{x}-1}{2}}\cdot(1+\frac{1}{\frac{\frac{1}{x}-1}{2}})^{\frac{1}{2}}\right]^{5} = e^{10}$.

10. 将下列 $x\to0^+$ 的无穷小按低阶到高阶的次序排列

(1)$\sin\sqrt{x}$ (2)$(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1$ (3)$\cos(x^2)-1$ (4)$\tan(x^3)$

解：$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=1 \Rightarrow \sin\sqrt{x}\sim\sqrt{x}$

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow (1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1\sim\frac{1}{2}x^2$

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\cos(x^2)-1}{x^4} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{-2\sin^2(\frac{x^2}{2})}{x^4} = -\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to0^+}\left[\frac{\sin(\frac{x^2}{2})}{\frac{x^2}{2}}\right]^2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos(x^2)-1\sim-\frac{1}{2}x^4$

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\tan(x^3)}{x^3} = 1 \Rightarrow \tan(x^3)\sim x^3$

∴ 从低阶到高阶依次为 $\sin\sqrt{x}$, $(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1$, $\tan(x^3)$, $\cos(x^2)-1$

11. 当 $x\to0^+$ 时，下列函数分别是 x 的几阶无穷小：

(1)$1-\cos x$ (2)$x+x^2$ (3)$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ (4)$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$

解：(1) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，$1-\cos x$ 是 x 的2阶无穷小.

(2) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x+x^2}{x} = \lim\limits_{x\to0^+}(x+1)=1 \Rightarrow x+x^2\sim x$，$x+x^2$ 是 x 的1阶无穷小.

(3) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt[8]{x}} = \lim\limits_{x\to0^+}\sqrt{x^{\frac{3}{4}}+\sqrt{x^{\frac{1}{2}}+1}} = 1 \Rightarrow \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt[8]{x}$，$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ 是 x 的 $\frac{1}{8}$ 阶无穷小.

(4) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = 1 \Rightarrow \sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\sim x$，$\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$ 是 x 的1阶无穷小.

12.求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\sin x}{2x+3}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}}\cdot\sin x=0$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\cos x}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{\sin x}{x}}{1+\frac{\cos x}{x}}=1$

(3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x\tan^2 3x}{x^2\ln(1-2x)}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x\cdot(3x)^2}{x^2\cdot(-2x)}=-9$.

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{\arctan^2\frac{2}{x}}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{(\frac{2}{x})^2}=\frac{1}{4}$

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+x)-\ln x}{x}$.

解：原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$.