四、单摆的运动

根据转动定律 $M_z = J_z \alpha$

对z轴，合外力的力矩 $M_z = lmg\sin\theta$

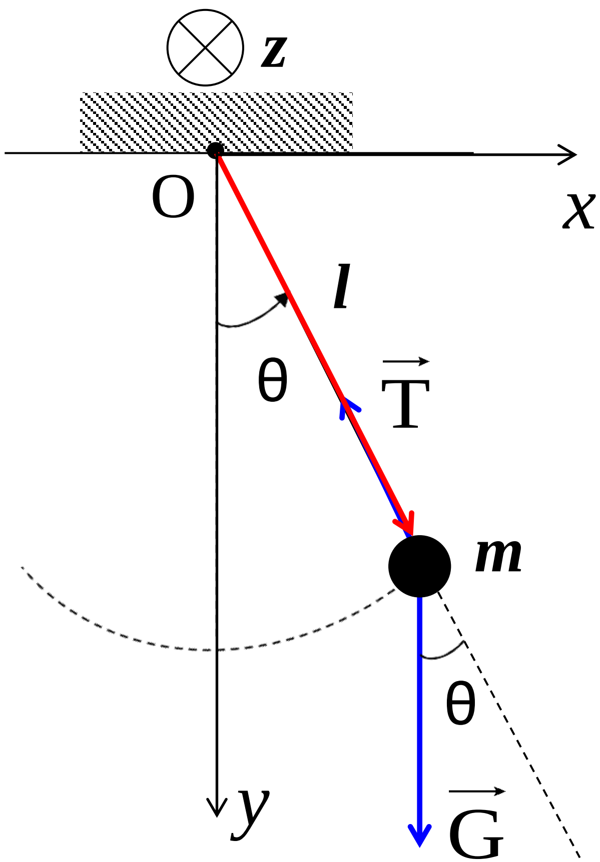
对z轴，转动惯量 $J_z = ml^2$

角加速度 $\alpha = -\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

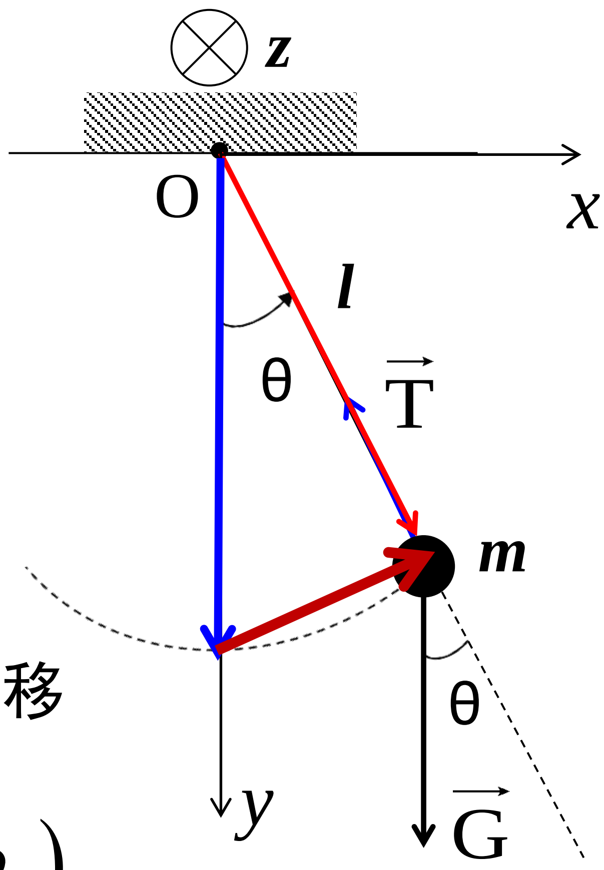
因此得到

$$lmg\sin\theta = -ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

当角位移θ很小时，$\sin\theta \approx \theta$ ，有$\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\dfrac{g}{l}\theta$



$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}\theta$$



单摆的角位移 $\theta=\theta_0\cos\left(\omega t+\varphi_0\right)$

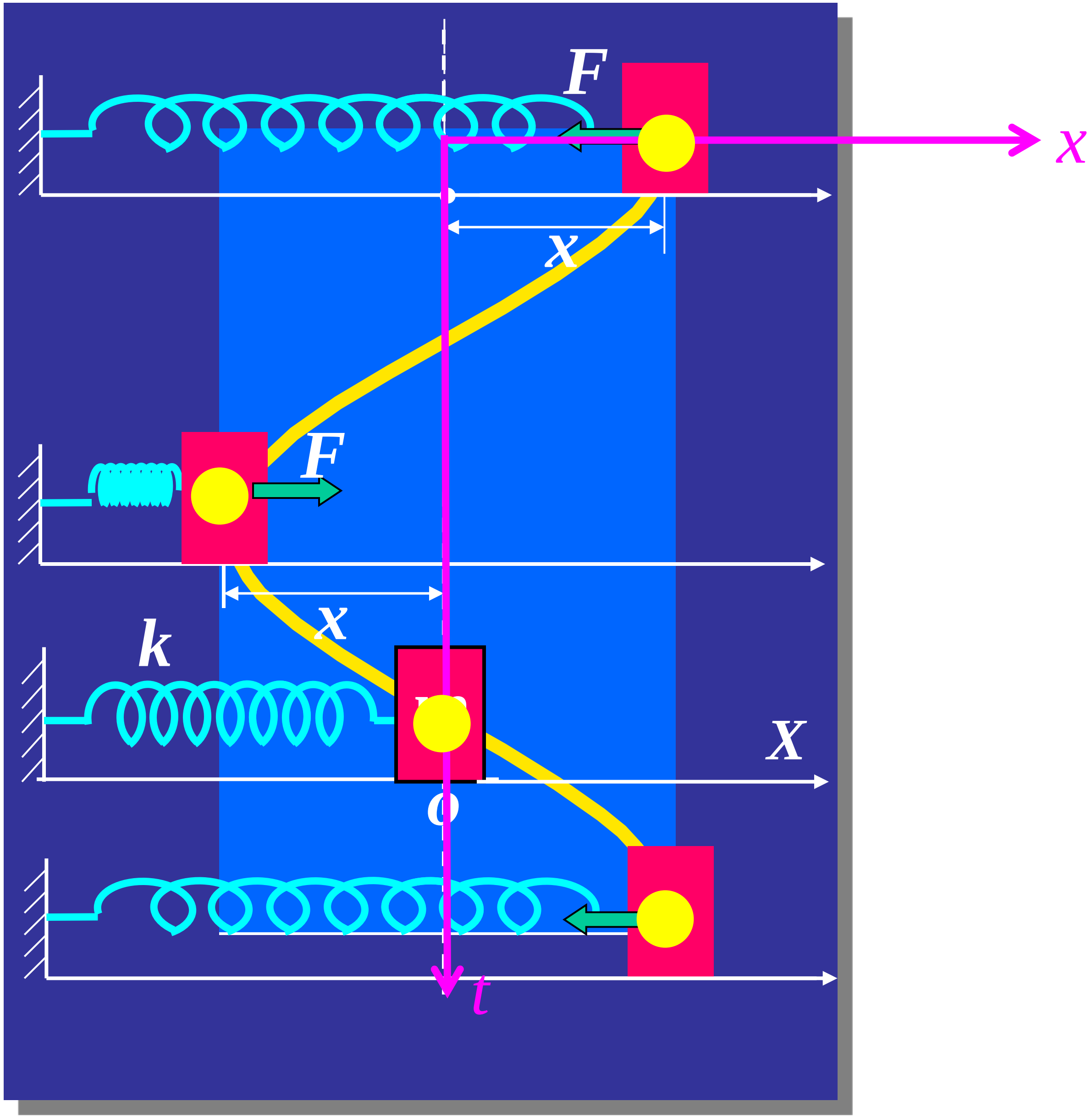
当角位移θ很小时，**单摆离开平衡位置的位移**

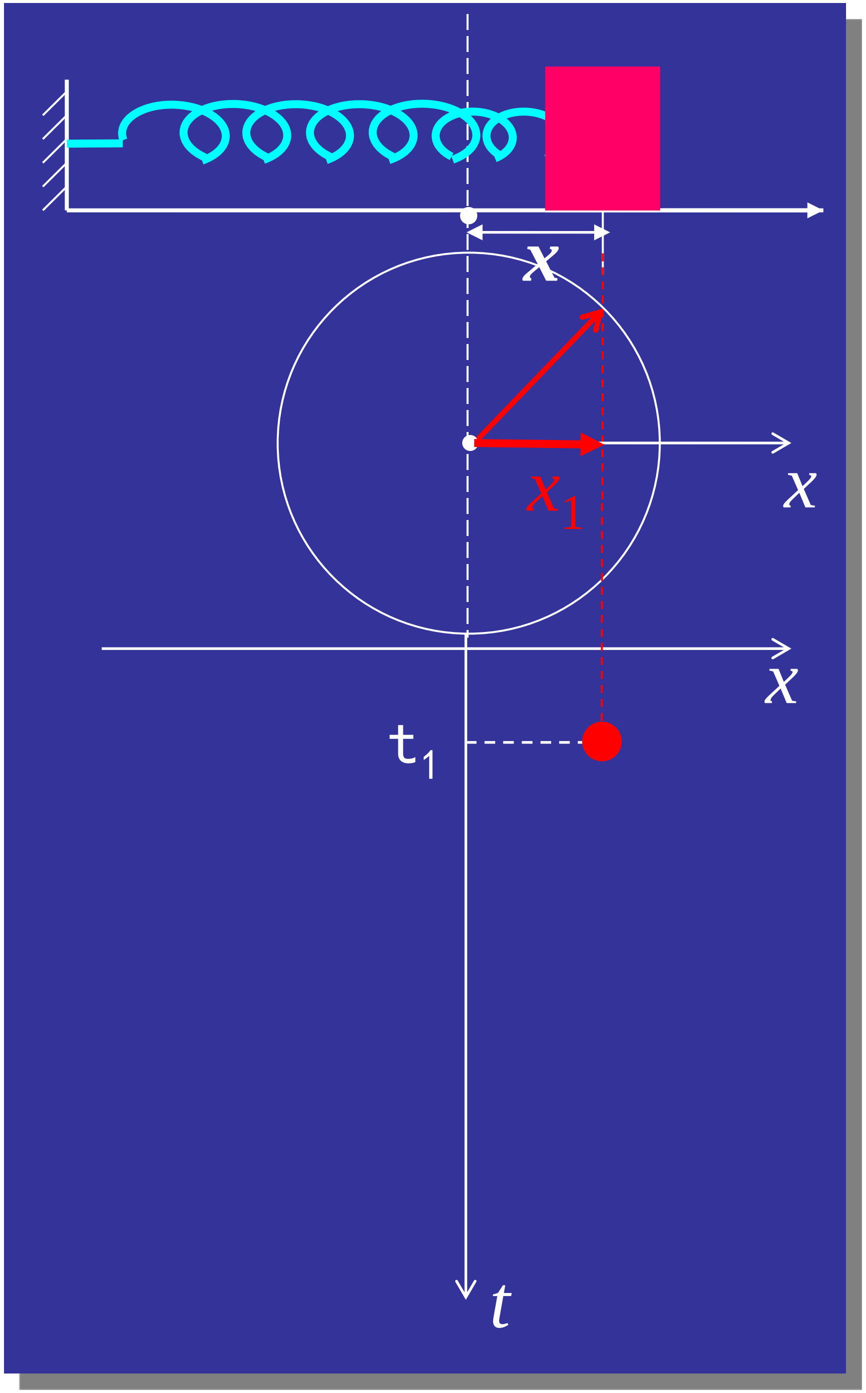
$$x=l\theta=l\theta_0\cos\left(\omega t+\varphi_0\right)$$

$\boxed{\text{——简谐振动}}$

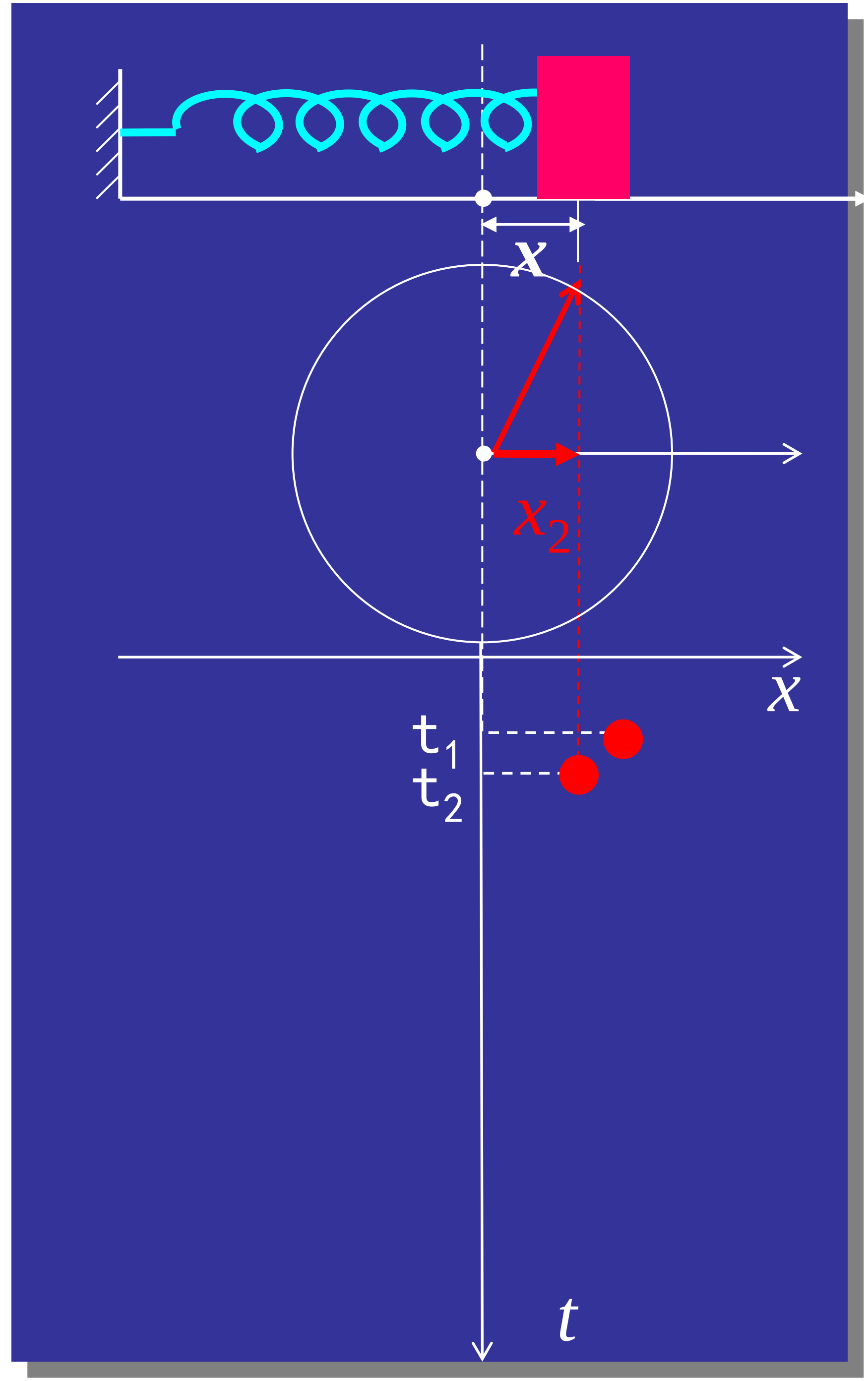
单摆的**周期** $T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

1、谐振子——旋转矢量

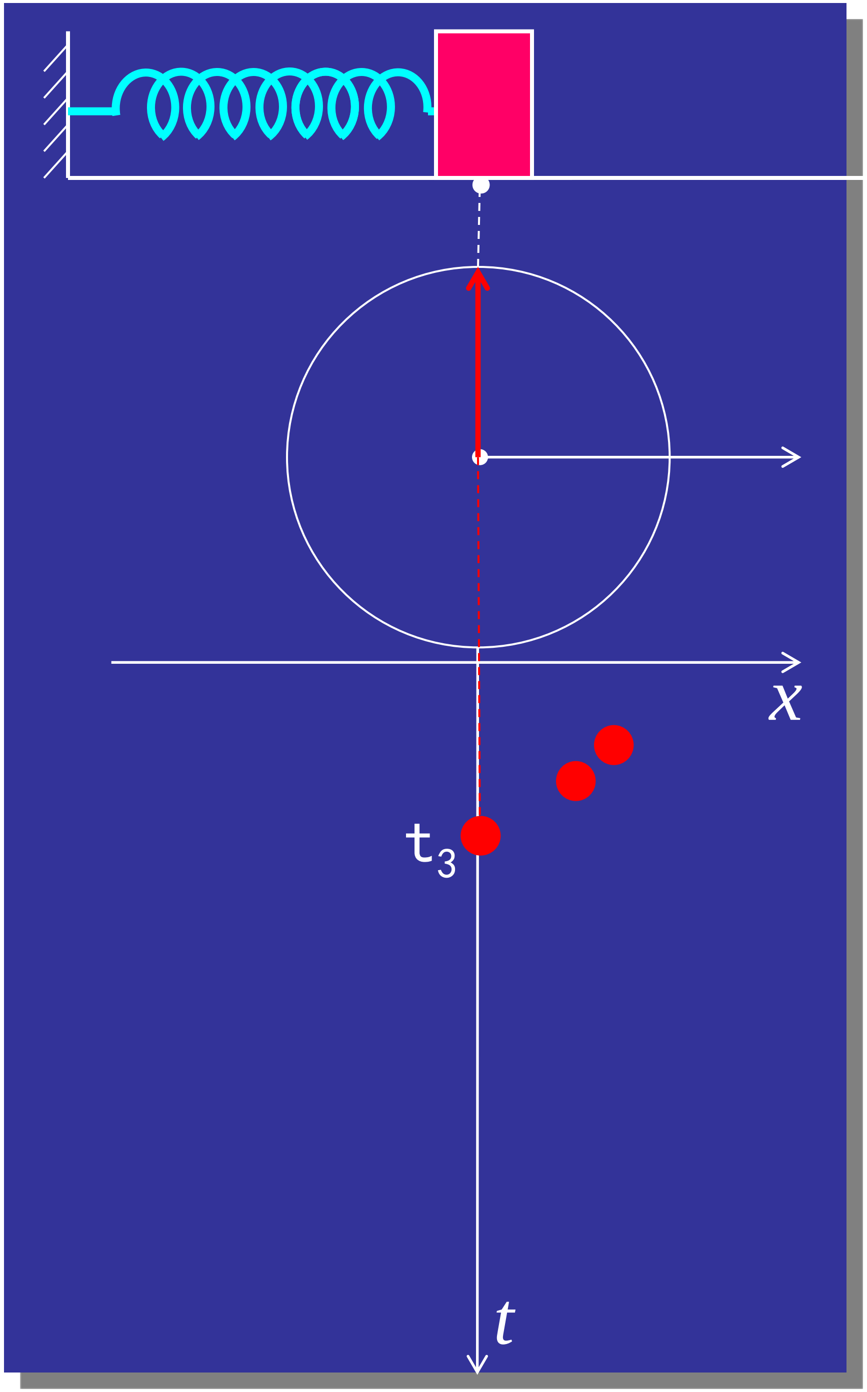


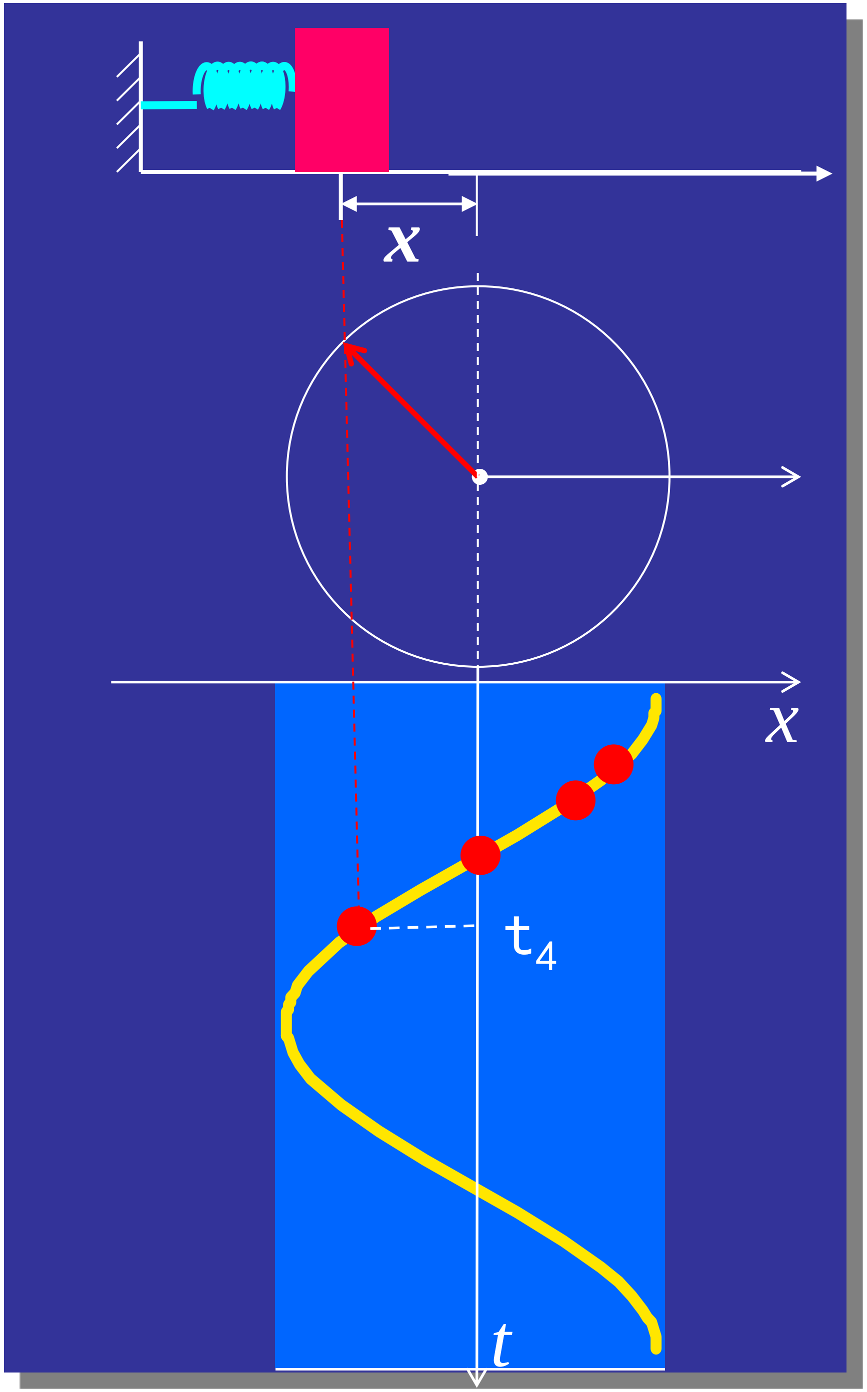


x
x
x
x
t
t
1



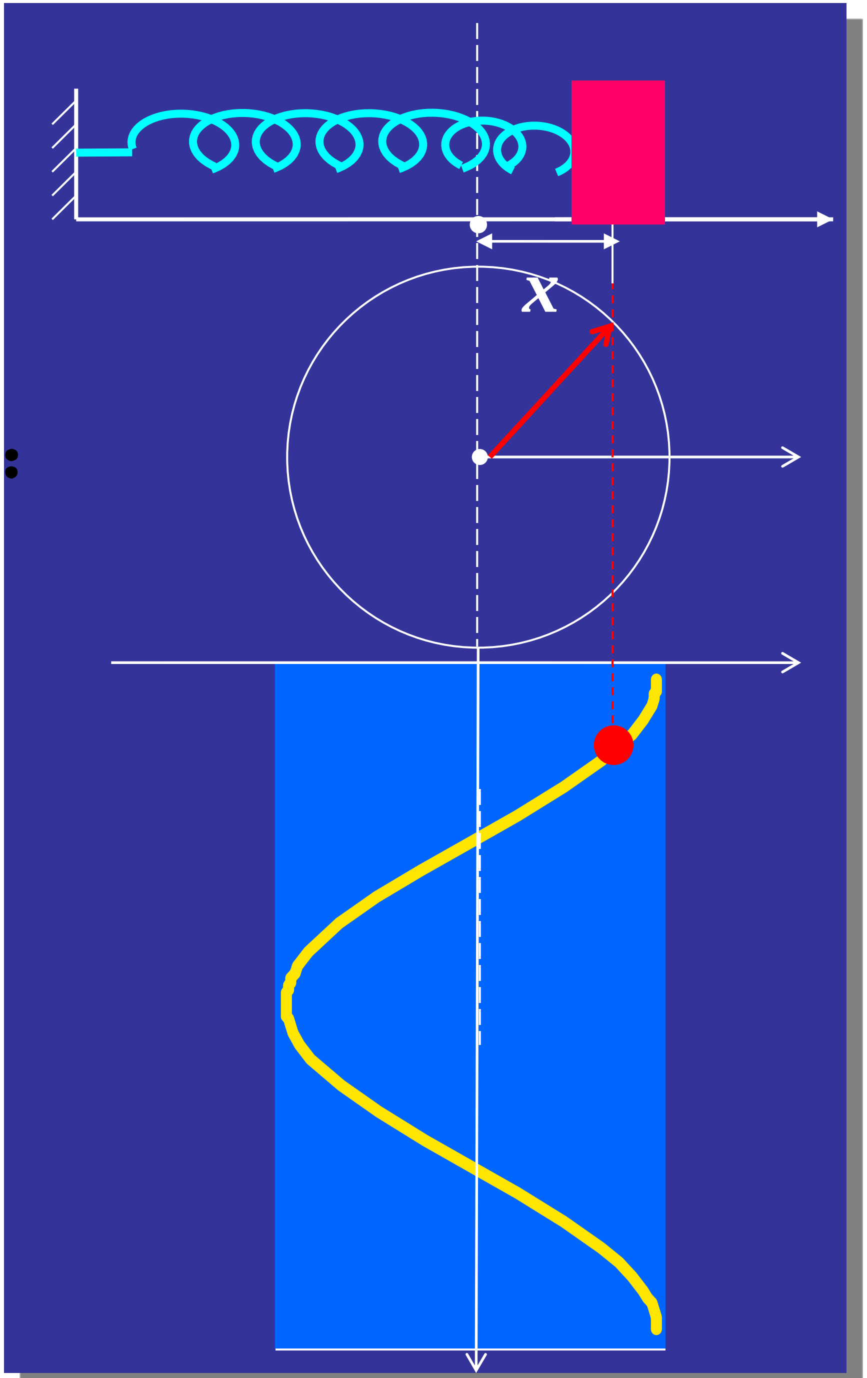
x
x
x
t
t
1
t
2


x
t3
t


x
x
t4
t

旋转矢量的端点在x轴上的投影:

$$x = \vec{A} \cdot \vec{x}_{\mathrm{n}} = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$



$\boldsymbol{v_\tau}$ **在*x*轴上的投影：**

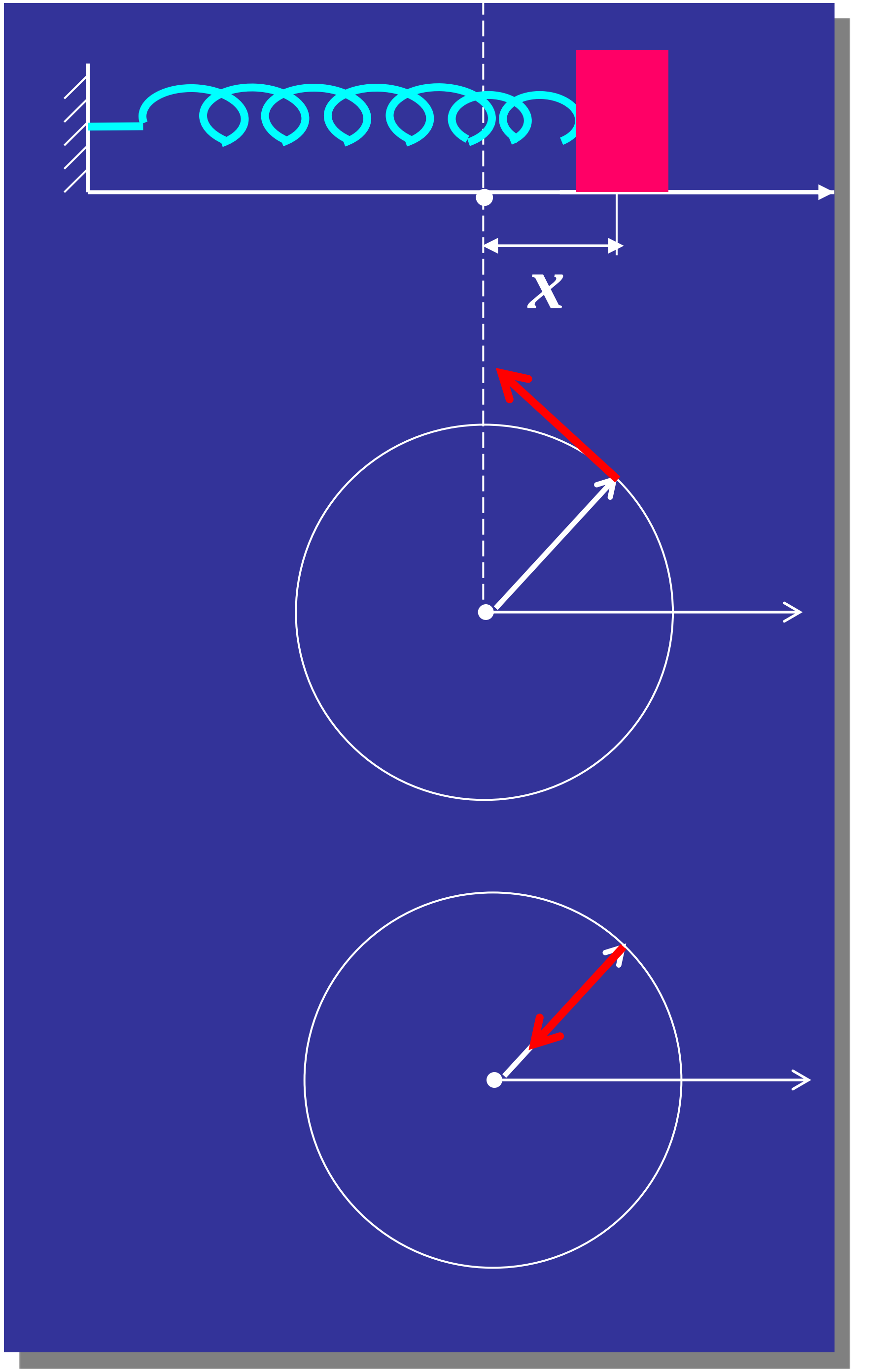
$$v = \vec{v}_\tau \cdot \vec{x}_n$$

$$= \omega_0 A\cos(\omega_0 t + \phi + \frac{\pi}{2})$$

$\boldsymbol{a_n}$**在*x*轴上的投影：**

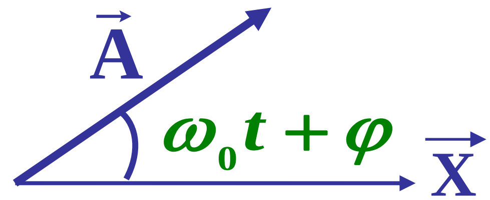
$$a = \vec{a}_n \cdot \vec{x}_n$$

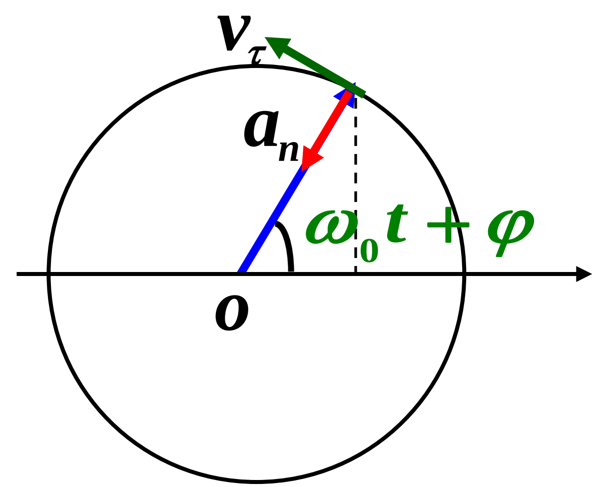
$$= \omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \phi + \pi)$$



2、旋转矢量与相位

$$(\omega_0 t+\varphi)=(\widehat{\vec{A},\vec{X}})$$





旋转矢量与x轴的夹角 ＝ t时刻简谐运动的相位

简谐振动的位移 $x=\vec{A}\cdot\vec{x}_n=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$

简谐振动的速度 $v=\omega_0 A\cos(\omega_0 t+\phi+\dfrac{\pi}{2})$

简谐振动的加速度 $a=\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t+\phi+\pi)$

简谐振动的位移 $x=\vec{A}\cdot\vec{x}_n=A\cos(\omega_0 t+\varphi)$

简谐振动的速度 $v=\omega_0 A\cos(\omega_0 t+\phi+\dfrac{\pi}{2})$

简谐振动的加速度 $a=\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t+\phi+\pi)$

利用旋转矢量的位置可推出振动系统的状态：

$\omega_0 t+\varphi=0$	$x=A$	$v=0$	$a=-\omega_0^2 A$
$\omega_0 t+\varphi=\pi$	$x=-A$	$v=0$	$a=\omega_0^2 A$
$\omega_0 t+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$	$x=0$	$v=-\omega_0 A$	$a=0$
$\omega_0 t+\varphi=\dfrac{3\pi}{2}$	$x=0$	$v=\omega_0 A$	$a=0$

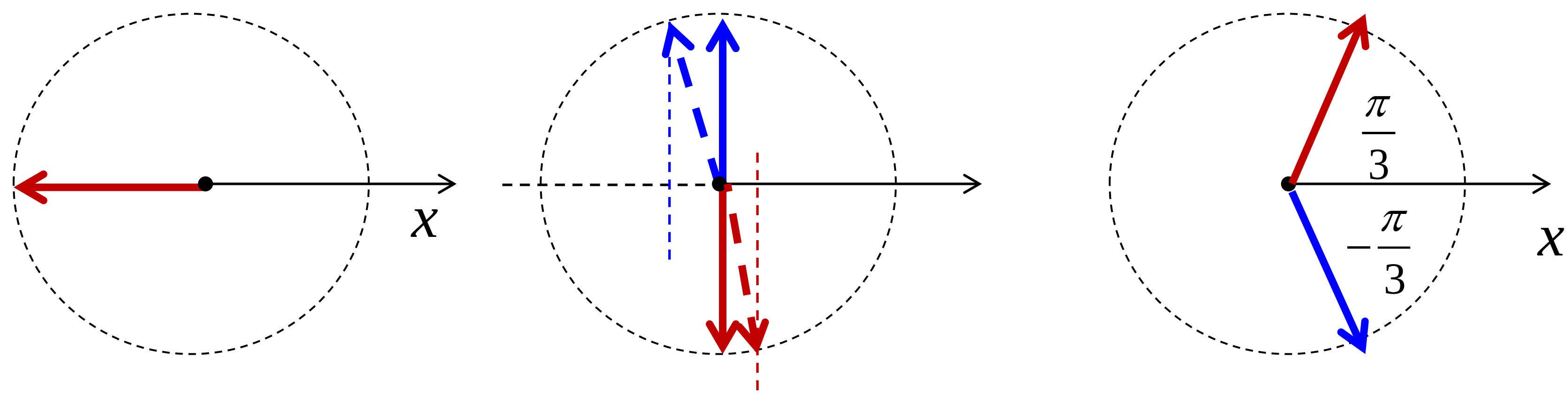
例：有一个和轻弹簧相连的小球，沿x轴做振幅是A的简谐运动。该运动的表达式可以用余弦函数表示。当t=0时，小球的运动状态分别是：

（1）$x_0=-A$；

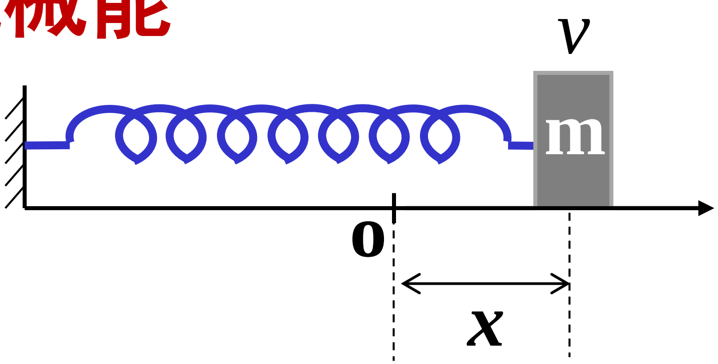
（2）过平衡位置向x轴正方向运动；

（3）过x=A/2，且向x负方向运动；

试用旋转矢量方法确定其初相位。



5.2简谐振动的机械能



一、简谐振动系统的动能和势能

$$E_t = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \overset{?}{=} \text{常量}$$

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$v = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \phi)$$

总机械能

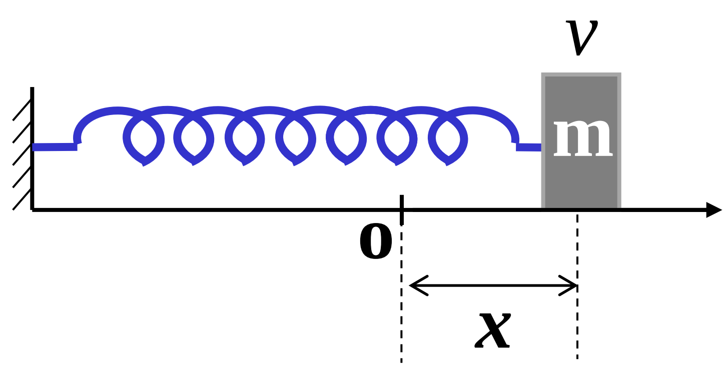
$$E_t = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 = \text{常量}$$

任意时刻 t:

动能 $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi)$

势能 $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi)$

总机械能 $E_{\mathrm{t}} = E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}} = \dfrac{1}{2}kA^2$



$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

动能

$$E_{\mathrm{k}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\boxed{\omega_0^2}A^2\sin^2(\omega_0 t + \phi)$$

$$\boxed{= \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0 t + \phi)}$$

$v = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \phi)$

势能

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}kx^2 = \boxed{\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \phi)}$$

$a = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \phi)$

弹力 $F = -kx = ma$

$$F = -kx = -kA\cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$ma = -m\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$k = m\omega_0^2$$

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2$$

谐振子的机械能 $E_t=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2$

$\frac{dE_{\mathrm{t}}}{dt}=0$ 则得：$\boldsymbol{E_{\mathrm{t}}}$**=常量**

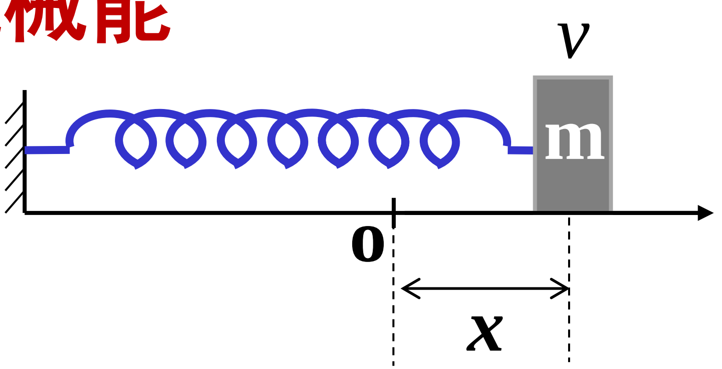
$$\frac{dE_{\mathrm{t}}}{dt}=mv\frac{dv}{dt}+kx\frac{dx}{dt}=m\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x\frac{dx}{dt}$$

$$=m\frac{dx}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x\right)$$

$$=m\frac{dx}{dt}\left(a+\frac{k}{m}x\right)=0$$

$F=-kx=ma$ $\quad a=-\frac{k}{m}x$ $\quad a=\frac{d^2x}{dt^2}$

5.2简谐振动的机械能



一、简谐振动系统的动能和势能

$$E_t = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \overset{?}{=} 常量$$

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$v = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \phi)$$

总机械能

$$E_t = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 = 常量$$

任意时刻 t:

动能 $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi)$

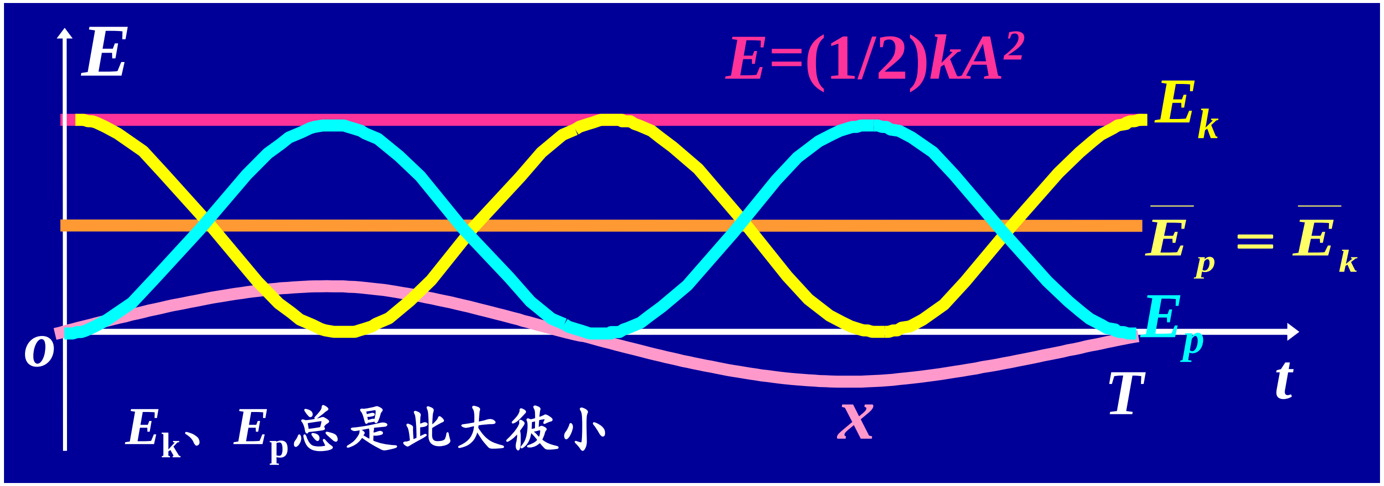
势能 $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi)$

5.2简谐振动的机械能

二、简谐振动系统能量的特点

- E_K、E_p各自随时间作周期性变化

$$E_k = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi) \qquad E_p = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi)$$



- E_t=常量 即:简谐振动的过程正是动能与势能相互转换的过程

5.2简谐振动的机械能

二、简谐振动系统能量的特点 $E_t = \frac{1}{2}kA^2$

- E_t正比于振幅的平方A^2

$$A = \sqrt{\frac{2E_t}{k}} = \sqrt{\frac{2E_0}{k}}$$

结论：

- 任一简谐振动总能量与振幅的平方成正比;
- 振幅不仅给出简谐振动运动的范围，而且还反映了振动系统总能量的大小及振动的强度。

这些结论同样适用于任何简谐振动!!!

例：一弹簧振子，弹簧劲度系数k=25N/m，当物体以初动能0.2J和初势能0.6J振动时，试回答：

（1）其振幅是多大？

（2）当位移是多大时，其动能和势能相等。

（3）当位移是振幅一半时，势能是多大？

解：（1）弹簧振子的机械能

$$E_t = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2 = \text{常数} = 0.8\text{J}$$

因此振幅 $A = \sqrt{2E_t / k}$ =0.25m

(2) $E_k = E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}E_t$ =0.4J　　$x = \pm 0.18m$

（3）$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}kA^2\right) = 0.2J$

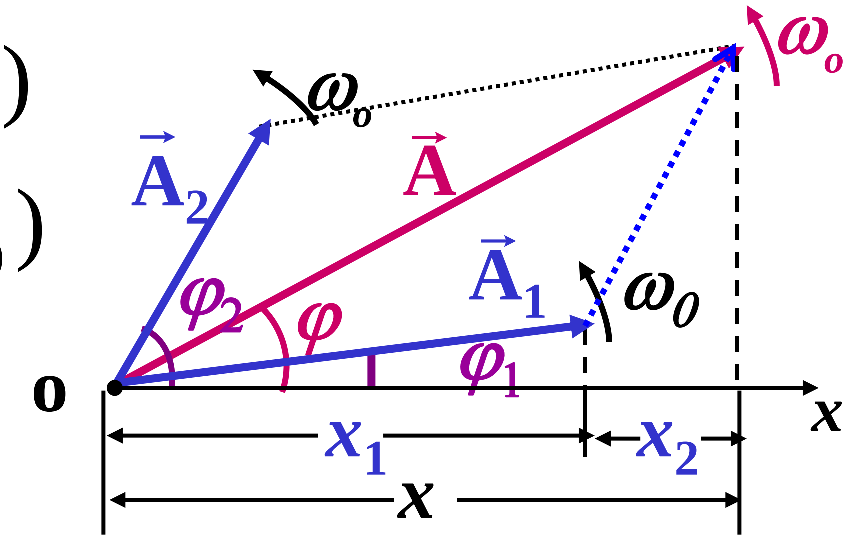
5.3、简谐振动的合成

一、同振动方向、同频率的两个简谐振动的合成

设两简谐振动为：

$$x_1 = A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_{10})$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega_0 t + \varphi_{20})$$



用旋转矢量法：

$$\vec{A}_1 + \vec{A}_2 = \vec{A}$$

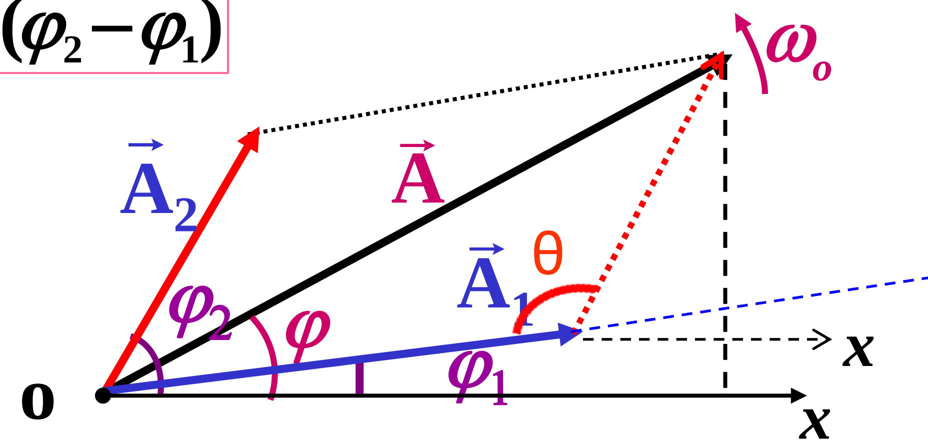
$\vec{A}$在x轴的投影：$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

由几何关系得：$x = x_1 + x_2$　x_1、x_2的合振动就是x

即：$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega_o t+\varphi)$

合振动的振幅为A：

$$\boxed{A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)}$$



合振动的初位相φ：

$$\boxed{tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}}$$

结论：(1)合振动仍是同频率的简谐振动。

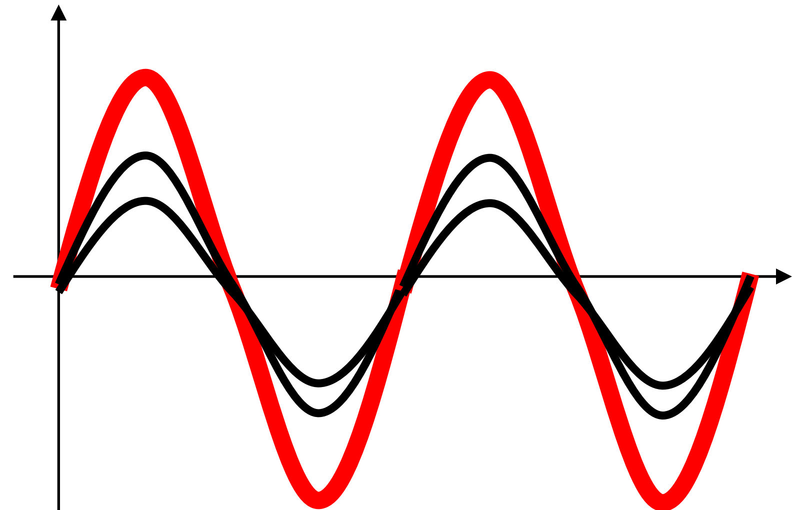
(2)合振幅不仅与分振幅有关还与$\Delta\varphi$有关。

特例：

1：　两个分振动同相

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$$

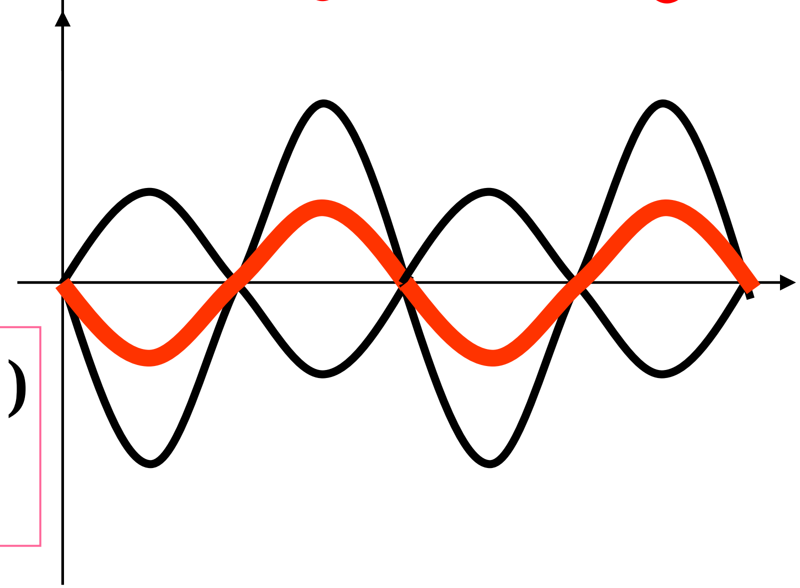
$$A^2 = A_1^{\ 2} + A_2^{\ 2} + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$
$$A = |A_1 + A_2|$$



2：　两个分振动反相

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi$$

$$A^2 = A_1^{\ 2} + A_2^{\ 2} + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$
$$A = |A_1 - A_2|$$



例：两个谐振子做同频率、同振幅的简谐振动。第一个振子的振动表达式 $x_1 = A\cos(\omega t+\varphi)$ ，当第一个振子从振动的正方向回到平衡位置时，第二个振子恰好在正方向位移的端点。求：

（1）第二个振子的振动表达式和二者的相位差；

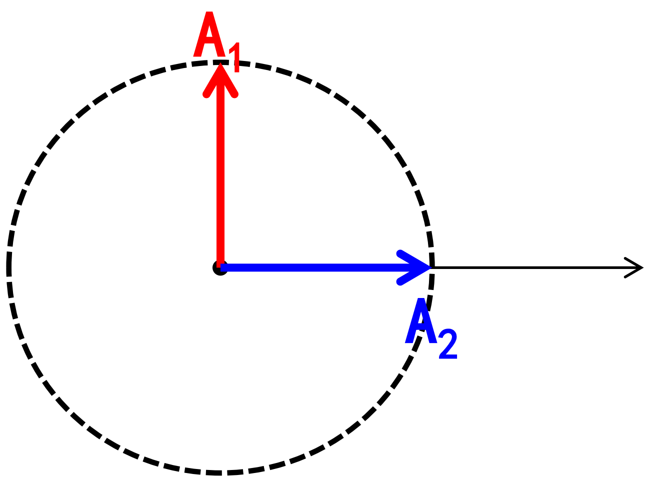
（2）若t=0时刻，x_1=-A/2，并向x轴负方向运动，画出此时二者旋转矢量的位置。

解：（1）**当第一个谐振子的相为π/2时**，第二个振子的相为**0**，

因此 $\varphi_2-\varphi_1=0-\pi/2$

$$\varphi_2=\varphi_1-\pi/2$$

$$x_2=A\cos(\omega t+\varphi_1-\pi/2)$$



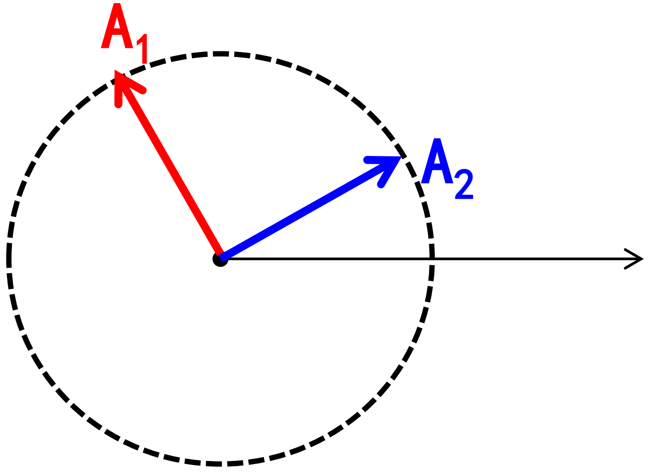
例：两个谐振子做同频率、同振幅的简谐振动。第一个振子的振动表达式 $x_1 = A\cos(\omega t+\varphi)$ ，当第一个振子从振动的正方向回到平衡位置时，第二个振子恰好在正方向位移的端点。求：

（1）第二个振子的振动表达式和二者的相位差；

（2）若t=0时刻，x_1=-A/2，并向x轴负方向运动，画出此时二者旋转矢量的位置。

（2）当t=0时，x_1=-A/2，且v<0，因此得到

$$\varphi_{1,0} = \frac{2}{3}\pi$$



第二个振动的相位角 $\varphi_{2,0} = \frac{\pi}{6}$