第二节

洛必达法则

一、$\dfrac{0}{0}$ 型不定式

二、$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式

三、其他不定式

洛必达，G.-F.-A. de

微分中值定理 $\left\{\begin{array}{l}\text{函数的性态}\\ \quad\downarrow\uparrow\\ \text{导数的性态}\end{array}\right.$

本节研究:

函数之商的极限 $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ ($\dfrac{0}{0}$ 或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型)

转化

$\boxed{\textbf{洛必达法则}}$

导数之商的极限 $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

一、$\frac{0}{0}$ 型不定式

定理 1.

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$

2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $\mathring{U}(a)$ 内可导，且 $g'(x)\neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为 ∞)

$\Longrightarrow \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (洛必达法则)

定理条件: 1) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$

2) $f(x)$与$g(x)$ 在$\overset{\circ}{U}(a)$内可导, 且$g'(x)\neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为∞)

证: 不妨假设 $f(a)=g(a)=0$, 在指出的邻域内任取 $x\neq a$, 则 $f(x), g(x)$ 在以 x, a 为端点的区间上满足柯西定理条件, 故

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (\,\xi\text{在}\,x\,,\,a\,\text{之间})$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\overset{3)}{=\!=}\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

洛必达法则 $\boxed{\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$

推论1. 定理 1 中 $x\to a$ 换为

$$x\to a^{+},\ x\to a^{-},\ x\to\infty,\ x\to+\infty,\ x\to-\infty$$

之一, 条件 2) 作相应的修改 , 定理 1 仍然成立.

推论 2. 若 $\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 仍属 $\frac{0}{0}$ 型, 且 $f'(x), g'(x)$ 满足定理1条件, 则

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\frac{f''(x)}{g''(x)}$$

例1. 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.

$\dfrac{0}{0}$型

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}=\frac{3}{2}$$

注意: 不是不定式不能用洛必达法则！

$$\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}\neq\lim_{x\to 1}\frac{6}{6}=1$$

例2. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$.

$\dfrac{0}{0}$ 型

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}$

$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型

$=\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\frac{1}{x^2}+1}=1$

思考: 如何求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{\pi}{2}-\arctan n}{\frac{1}{n}}$ (n 为正整数) ?

二、$\dfrac{\infty}{\infty}$型不定式

定理 2.

1) $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=\lim\limits_{x\to a}|g(x)|=\infty$

2) $f(x)$与$g(x)$在$\mathring{\bigcup}(a)$内可导，且$g'(x)\neq 0$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在 (或为∞)

$$\Longrightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$ (洛必达法则)

证: 仅就极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 存在的情形加以证明 .

1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}\neq 0$的情形

$\dfrac{0}{0}$型

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\boxed{\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{1}{g(x)}}{\dfrac{1}{f(x)}}}=\lim_{x\to a}\frac{\dfrac{-1}{g^2(x)}g'(x)}{\dfrac{-1}{f^2(x)}f'(x)}$$

$$=\lim_{x\to a}\left[\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2\frac{g'(x)}{f'(x)}\right]=\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^2\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}$$

$$\therefore\quad 1=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\lim_{x\to a}\frac{g'(x)}{f'(x)}$$

从而 $$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$ 的情形. 取常数 $k\neq 0$,

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}+k\right)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)+kg(x)}{g(x)}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)+kg(x)}{g(x)}=k\neq 0,$$ 可用 1) 中结论

$$=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)+kg'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to a}\left[\frac{f'(x)}{g'(x)}+k\right]$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\infty$ 时, 结论仍然成立. (证明略)

说明: 定理中 $x\to a$ 换为

$x\to a^+$, $x\to a^-$, $x\to\infty$,

$x\to+\infty$, $x\to-\infty$

之一, 条件 2) 作相应的修改 , 定理仍然成立.

例3. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}\ (\alpha>0).$

$\boxed{\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}}$

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\alpha x^{\alpha}}=0$

例4. **求** $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\alpha}}{e^{\lambda x}}\ (\alpha>0\ ,\lambda>0).$

$\boxed{\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}}$

解: (1) $\alpha=n$ 为正整数的情形.

$$\text{原式}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}}$$

$$=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}}=0$$

例4. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\alpha}}{e^{\lambda x}}\ (\alpha>0\,,\lambda>0)$.

(2) α 不为正整数的情形.

存在正整数 k, 使当 $x>1$ 时,

$$x^{k}<x^{\alpha}<x^{k+1}$$

从而

$$\frac{x^{k}}{e^{\lambda x}}<\frac{x^{\alpha}}{e^{\lambda x}}<\frac{x^{k+1}}{e^{\lambda x}}$$

用夹逼准则

由(1)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{k}}{e^{\lambda x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{k+1}}{e^{\lambda x}}=0$$

$$\therefore\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\alpha}}{e^{\lambda x}}=0$$

说明:

1) 例3 , 例4 表明 $x \to +\infty$ 时,

$$\ln x,\quad x^{\alpha}\ (\alpha > 0),\quad e^{\lambda x}\ (\lambda > 0)$$

后者比前者趋于 $+\infty$ 更快 .

2) 在满足定理条件的某些情况下洛必达法则不能解决计算问题 . 例如,

用洛必达法则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

而

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = 1$$

3) 若 $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在 $(\neq \infty)$ 时,

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} \neq \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

例如, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x+\sin x}{x} \neq \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1+\cos x}{1}$

极限不存在

$$\|$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1$$

三、其他不定式: $0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ 1^\infty,\ \infty^0$型

解决方法:

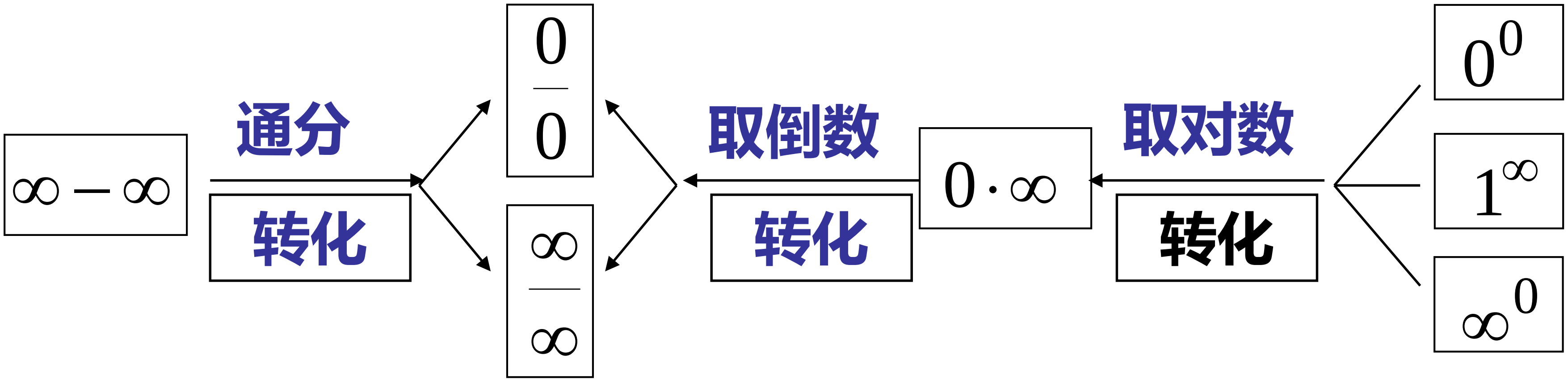
$\boxed{\infty-\infty}$ 通分 $\boxed{\text{转化}}$ $\rightarrow$ $\boxed{\frac{0}{0}}$, $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$ $\leftarrow$ 取倒数 $\boxed{\text{转化}}$ $\boxed{0\cdot\infty}$ $\leftarrow$ 取对数 $\boxed{\text{转化}}$ $\boxed{0^0}$, $\boxed{1^\infty}$, $\boxed{\infty^0}$

例5. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x \quad (\alpha>0).$

$\boxed{0\cdot\infty\text{型}}$

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\alpha\, x^{-\alpha-1}}$

$$=\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{x^\alpha}{\alpha}\right) = 0$$

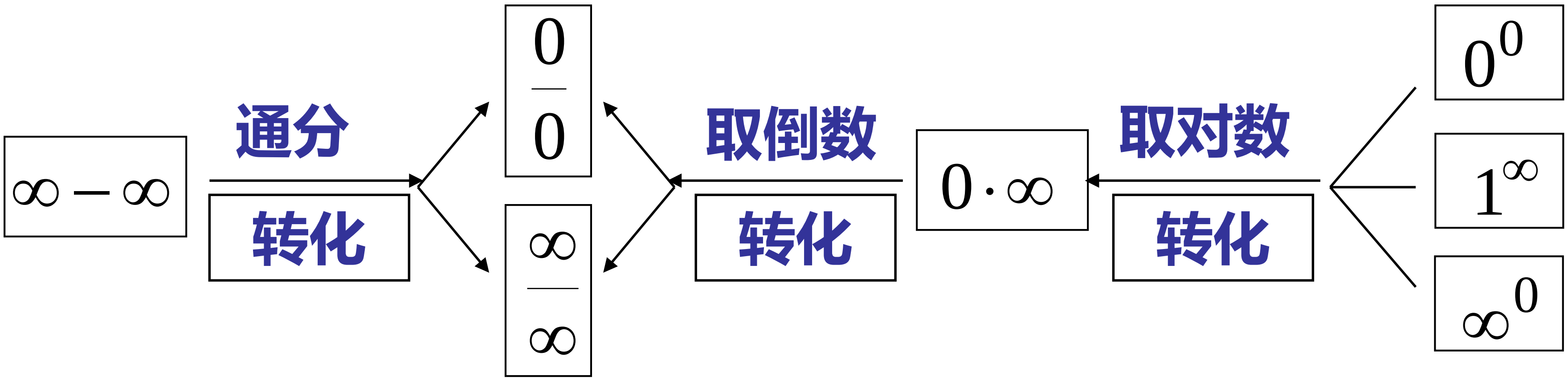


例6. 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sec x-\tan x)$.

$\boxed{\infty-\infty\text{型}}$

解: 原式 $=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\cos x}{-\sin x}=0$$



例7. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

$\boxed{0^0\text{型}}$

解: $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x}$

利用 例5

$= e^0 = 1$

例8. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^2\sin x}$.

$\boxed{\dfrac{0}{0}\text{型}}$

解: 注意到 $\sin x \sim x$

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{3x^2}$$

$\boxed{\sec^2 x = 1 + \tan^2 x}$

$$= \frac{1}{3}$$

例9. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\,(\sqrt[n]{n}-1)$.　　$\boxed{\infty\cdot 0\text{型}}$

法1　用洛必达法则

分析: 为用洛必达法则，必须改求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{2}}(x^{\frac{1}{x}}-1)$.

但对本题用此法计算很繁！

法2　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{2}}(n^{\frac{1}{n}}-1)$　　$\sqrt[n]{n}=e^{\frac{1}{n}\ln n}\to 1$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}\ln n}-1}{n^{-\frac{1}{2}}}\qquad \boxed{e^u-1\sim u}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\ln n}{n^{-\frac{1}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{1}{2}}}=0$$

内容小结

洛必达法则

$0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型

令 $y = f^g$

取对数

$0 \cdot \infty$ 型

$$f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$$

$\frac{0}{0}$ 型

$\frac{\infty}{\infty}$ 型

$\infty - \infty$ 型

$$f - g = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{g} \cdot \frac{1}{f}}$$

思考与练习

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x + x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)} = \underline{\quad\dfrac{3}{2}\quad}$

$\boxed{\ln(1+x)\sim x}$

分析： 原式 $= \dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x + x^2\cos\frac{1}{x}}{x} = \dfrac{1}{2}(3+0)$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$ $\underline{\quad\dfrac{1}{6}\quad}$

分析: 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x\,(x-\sin x)}{x\sin^2 x}$

$\boxed{\sin x\sim x}$

$\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}$$

$\boxed{1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\frac{1}{6}$$

4. 求 $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$

解: 令 $t=\dfrac{1}{x}$, 则

$$\text{原式}=\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+2t}-2\sqrt{1+t}+1}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{(1+2t)^{-\frac{1}{2}}-(1+t)^{-\frac{1}{2}}}{2t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{-(1+2t)^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}(1+t)^{-\frac{3}{2}}}{2}=-\frac{1}{4}$$

备用题 求下列极限：

1) $\lim\limits_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x]$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^{100}}e^{-\frac{1}{x^2}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}$.

解： 1) $\lim\limits_{x\to\infty}[x^2\ln(1+\frac{1}{x})-x]$ (令 $t=\frac{1}{x}$)

$$=\lim_{t\to 0}[\frac{1}{t^2}\ln(1+t)-\frac{1}{t}]=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)-t}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{1+t}-1}{2t}=\lim_{t\to 0}\frac{-t}{2t(1+t)}=-\frac{1}{2}$$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{100}}e^{-\frac{1}{x^2}}$

解: 令 $t=\dfrac{1}{x^2}$, 则

原式 $=\lim\limits_{t\to+\infty}t^{50}e^{-t}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{t^{50}}{e^t}$ (用洛必达法则)

$=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{50t^{49}}{e^t}$ (继续用洛必达法则)

$=\cdots=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{50!}{e^t}=0$

3) $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{\sec x-\cos x}$$

解: 原式 $= \lim_{x\to 0}\frac{\ln[(1+x^2)^2-x^2]}{\sec x-\cos x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2+x^4)}{\sec x-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x^4}{\sec x-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x+4x^3}{\sec x\tan x-(-\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{2+4x^2}{\sec^2 x+1}\right]=1$$