例 1 讨论等比级数(几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots \quad (a \neq 0)$$

的收敛性.

解 如果$|q| \neq 1$时

$$s_n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}$$

$$= \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q},$$

当$|q|<1$时, $\because \lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad \therefore \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$ 收敛

当$|q|>1$时, $\because \lim_{n\to\infty} q^n = \infty \quad \therefore \lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ 发散

如果$|q| = 1$时

当$q=1$时, $s_n = na \to \infty$ 发散

当$q=-1$时, 级数变为$a-a+a-a+\cdots$

$\therefore \lim_{n\to\infty} s_n$不存在 发散

综上 $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \begin{cases} 当|q|<1时, 收敛 \\ 当|q|\geq 1时, 发散 \end{cases}$

例2　判别无穷级数

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}+\cdots$$ 的收敛性.

解 $\because\quad u_n=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right),$

$$\therefore\ s_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right),$$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2},$$

$\therefore$ 级数收敛，和为$\frac{1}{2}$.

对于无穷级数我们关心的是级数是否收敛，即:和是否存在(S_n的极限是否存在)?

判断级数敛散的步骤

1、求出s_n并化简

2、求$\lim\limits_{n\to\infty} s_n$

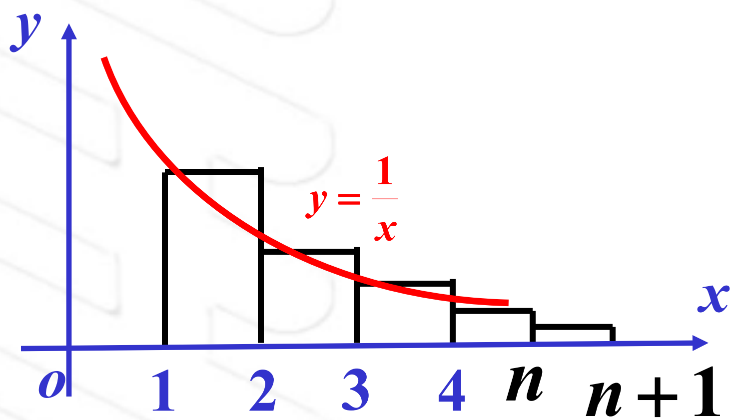
例3: 判断调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{n}+\cdots$ 的敛散性。

解: $s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$

设$y=\frac{1}{x}$　　由图可知

当 $x=1,2,3,\cdots,n,\cdots$

$$y=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$$



$$s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

$$\geq\int_1^{n+1}\frac{dx}{x}=\ln(n+1)$$

$\therefore \lim_{n\to\infty}s_n=+\infty\Rightarrow\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散

例4：判断级数$\sum_{1}^{\infty}(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})$的敛散性。

证明：$\because \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$收敛，$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$收敛

$\therefore$ 据性质（2）$\sum_{1}^{\infty}(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})$收敛。

例5：判断级数$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots$的敛散性。

解：$s_{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}$

$$=\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{3}(1-\frac{1}{3^n})}{1-\frac{1}{3}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} s_{2n}=\frac{3}{2}\Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}(s_{2n}+\frac{1}{2^{n+1}})=\frac{3}{2}$$

则$\lim\limits_{n\to\infty} s_n=\frac{3}{2}$，级数收敛。

例6：判断级数$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots$
$\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\cdots$的敛散性。

解 $$\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)+\cdots=\sum_{2}^{\infty}\frac{2}{\sqrt{n}^{2}-1}=\sum_{2}^{\infty}\frac{2}{n-1}$$

故：级数发散。