第十一章 无穷级数

一、数项级数：概念和性质、柯西收敛准则

二、正项级数：收敛准则、三个判别法

三、一般项级数：绝对收敛和条件收敛、交错级数、绝对收敛级数

四、幂级数：收敛半径、幂级数运算

五、函数的幂级数展开式：泰勒级数、初等函数的幂级数展开

六、傅里叶级数：三角函数系、正交性、周期函数的傅里叶级数

第四节　幂级数

一、函数项级数的概念

二、幂级数及其收敛性

三、幂级数的运算

求级数的和函数

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=S(x)$$

$$\Rightarrow S(x)=Ce^{x}$$

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} n x^n \qquad (2)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1} \qquad (3)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad (4)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$x\,(x^n)'=n x^{n-1}\cdot x=n x^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n=\sum_{n=1}^{\infty} x\cdot(x^n)'=x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=x\left[\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}} x^n\right]'=x\left[\frac{x}{1-x}\right]' \quad (|x|<1)$$

$$=x\frac{1-x-x(-1)}{(1-x)^2}=\frac{x}{(1-x)^2},\quad (-1<x<1)$$

当 $x=1$ 时 $\sum n$ 发 当 $x=-1$ 时 $\sum(-1)^n\cdot n$ 发散.

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=1+\frac{x}{2}+\cdots \qquad xS(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad (xS(x))'=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$[xS(x)]'=\frac{1}{1-x}, \quad (|x|<1) \quad \Rightarrow \int_0^x (xS(x))'\,dx=\int_0^x\frac{1}{1-x}\,dx$$

$$xS(x)-0S(0)=-\ln(1-x)\Big|_0^x \quad \Rightarrow \quad S(x)=\frac{1}{x}\ln\frac{1}{1-x} \quad (0<|x|<1)$$

当 $x=0$ 时 $S(0)=1$

当 $x=1$ 时 $\frac{1}{n+1}$

$$\therefore \quad S(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\ln\frac{1}{1-x}, & x\in[-1,0)\cup(0,1) \\ 0 & x=0\end{cases}$$

例. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ 的和函数 $S(x)$.

解: 易求出幂级数的收敛半径为 1， $x = \pm 1$ 时级数发散,

$$\text{故当} x \in (-1,1) \text{时},\ S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$= x \sum_{n=1}^{\infty} (x^n)' = x\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)'$$

$$= x \left(\frac{x}{1-x} \right)' = \frac{x}{(1-x)^2}$$

例. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ 的和函数 $S(x)$.

解: 易求出幂级数的收敛半径为 1 , 且 $x=-1$ 时级数收敛 ,

则当 $x\neq 0$ 时, 有

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x x^n\,\mathrm{d}x=\frac{1}{x}\int_0^x\Big(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\Big)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{x}\ln(1-x)\quad\big(0<|x|<1\big)$$

而 $S(0)=1$, 所以 $S(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}\ln(1-x)\,, & x\in[-1,0)\cup(0,1)\\ 1. & x=0\end{cases}$

例. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ 的和函数 .

解: 级数的收敛半径 $R=+\infty$.

设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\quad(-\infty<x<+\infty)$

则 $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=S(x)\qquad(-\infty<x<+\infty)$

故有 $(\ln|S(x)|)'=1$ 因此得 $S(x)=Ce^x$

由 $S(0)=1$ 得 $S(x)=e^x$, 故得 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$.

例: 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{(2n+1)!}$ 的和。

解: 原式= $\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n[(2n+1)+1]}{(2n+1)!}$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right]$$

$$=\frac{1}{2}[\cos 1+\sin 1]$$

例. 求数项级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和.

x^n

幂级数. $\sum a_n x^n$

取幂级数. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)}x^n = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right]x^n = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1}\right.$

$\left.-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}\right] = S(x)$

令 $x=\frac{1}{2}$. $S(\frac{1}{2}) = \cdots$

例. 求数项级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$ 的和.

解: 设 $S(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1}$，$x\in(-1,1)$，则

$$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)x^n$$

$$(x\neq 0)\quad =\frac{x}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n-1}-\frac{1}{2x}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\quad-\frac{1}{2x}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

$$S(x)=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}+\frac{1}{2x}(x+\frac{x^2}{2})\quad(x\neq 0)$$

$$S(x)=\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}+\frac{1}{2x}\left(x+\frac{x^2}{2}\right)\quad(x\neq 0)$$

而 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x x^{n-1}\,\mathrm{d}x=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\right)\mathrm{d}x=\int_0^x\frac{\mathrm{d}x}{1-x}=-\ln(1-x)$$

$$\therefore\quad S(x)=\frac{1-x^2}{2x}\ln(1-x)+\frac{2+x}{4}\quad(x\neq 0)$$

$$S(x)=\begin{cases} \underline{\qquad\qquad} & [-1,0)\cup(0,1) \\ 0 & x=0 \\ 1 & x=1 \end{cases}$$

故 $$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2$$

例: 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{a}+\frac{2}{a^2}+\cdots+\frac{n}{a^n}),(a>1).$

解: 令 $S_n=\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a^2}+\cdots+\dfrac{n}{a^n}=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{a^k}$

作幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\,x^n$, 易知其收敛半径为 1, 设其和为 $S(x)$,

则 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\,x^n=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\,x^{n-1}=x(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n)'=x\cdot(\dfrac{x}{1-x})'=\dfrac{x}{(1-x)^2}$, $(|x|<1)$

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}S_n=S(\frac{1}{a})=\frac{a}{(a-1)^2}$$

内容小结

1. 求幂级数收敛域的方法

1) 对标准型幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \ (a_n \neq 0)$ 先求收敛半径, 再讨论端点的收敛性。

2) 对非标准型幂级数(缺项或通项为复合式)

求收敛半径时直接用比式法或根式法, 也可通过换元化为标准型再求。

2. 幂级数的性质

1) 两个幂级数在公共收敛区间内可进行加、减与乘法运算。

2) 在收敛区间内幂级数的和函数连续;

3) 幂级数在收敛区间内可逐项求导和求积分。

第5节 函数的幂级数展开式

一、泰勒 (Taylor) 级数

二、初等函数展开成幂级数

三、函数幂级数展开式的应用

近似计算、欧拉公式

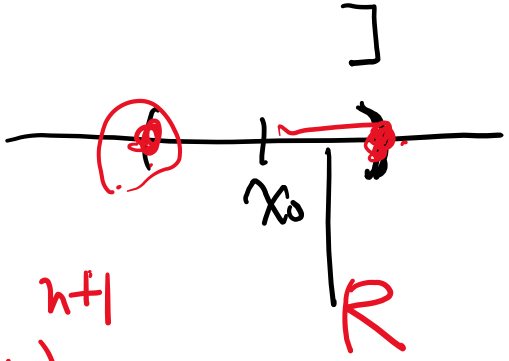
$f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$

① $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ Taylor 级数

$x_0=0$ 麦克劳林 R+端点.

② $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$



③ 证明. $\lim\limits_{n\to\infty}|R_n|\to 0$, $R_n=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

④ $|x-x_0|=R$ 时

二、初等函数展开成幂级数

$$\textbf{展开方法}\begin{cases}\text{直接展开法} \text{ —— 利用泰勒公式} \\ \text{间接展开法} \text{ —— 利用已知其级数展开式的函数展开}\end{cases}$$

1. 直接展开法

由泰勒级数理论可知，函数 $f(x)$ 展开成幂级数的步骤如下：

第一步　求函数及其各阶导数在 $x = 0$ 处的值；

第二步　写出麦克劳林级数，并求出其收敛半径 R；

第三步　判别在收敛区间$(-R, R)$ 内 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)$ 是否为0。

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \cdots, x \in (-\infty,\ +\infty)$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n)!}x^{2n} + \cdots, x \in (-\infty,\ +\infty)$$

$$\exp(x) = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, x \in (-\infty,\ +\infty)$$

$$(-1 < x < 1)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + \cdots$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots \qquad (-1 < x < 1)$$

2. 间接展开法

利用已知的函数展开式及幂级数的运算性质将所给函数展开成幂级数。

例. 将函数 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 展开成 x 的幂级数。

$|x|<1$

解: 因为 $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots \qquad (-1<x<1)$

把 x 换成 x^2, 得 $\dfrac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots$

$(-1<x<1)$ $|x^2|<1$

例. 将函数$f(x)=\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数。

$$[\ln(1+x)]'=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (|x|<1)$$

$$\int_0^x[\ln(1+x)]'dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^n dx$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad (-1<x\le 1), \quad x\in(-1,1]$$

例. 将函数 $\dfrac{1}{(2-x)^2}$ 展开成 x 的幂级数.

$$\frac{1}{1-x}=\sum x^n \quad |x|<1$$

$$\left(\frac{1}{2-x}\right)'=\frac{-(-1)}{(2-x)^2}=\frac{1}{(2-x)^2}$$

$$\frac{1}{(2-x)^2}=\left[\frac{1}{2-x}\right]'=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\boxed{\frac{x}{2}}}\right]'=\frac{1}{2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]' \quad \left(\left|\frac{x}{2}\right|<1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{x}{2}\right)^n\right]'=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^{n+1}}x^{n-1} \quad (-2<x<2)$$

例. 将 $\sin x$ 展成 $x-\frac{\pi}{4}$ 的幂级数。

解: $\sin x=\sin\left[\frac{\pi}{4}+(x-\frac{\pi}{4})\right]=\sin\frac{\pi}{4}\cos(x-\frac{\pi}{4})+\cos\frac{\pi}{4}\sin(x-\frac{\pi}{4})$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\cos(x-\frac{\pi}{4})+\sin(x-\frac{\pi}{4})\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left(1-\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2+\frac{1}{4!}(x-\frac{\pi}{4})^4-\cdots\right)\right.$$

$$\left.+\left((x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3+\frac{1}{5!}(x-\frac{\pi}{4})^5-\cdots\right)\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+(x-\frac{\pi}{4})-\frac{1}{2!}(x-\frac{\pi}{4})^2-\frac{1}{3!}(x-\frac{\pi}{4})^3+\cdots\right)\quad(-\infty<x<+\infty)$$

例. 将 $\dfrac{1}{x^2+4x+3}$ 展成 $x-1$ 的幂级数。

$(x-1)^2+2x-1+4x+3=(x-1)^2+6(x-1)+8=((x-1)+2)((x-1)+4)$

令 $x-1=t$, $x=t+1$

原式 $=\dfrac{1}{(t+1)^2+4(t+1)+3}=\dfrac{1}{t^2+6t+8}=\dfrac{1}{(t+2)(t+4)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{t+2}-\dfrac{1}{t+4}\right]$

$=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2(1+\frac{t}{2})}-\dfrac{1}{4(1+\frac{t}{4})}\right]=\dfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{t}{2}\right)^n-\dfrac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\dfrac{t}{4}\right)^n$, $(|t|<2)$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\dfrac{1}{2^{n+2}}-\dfrac{1}{2^{2n+3}}\right](x-1)^n$ $(|x-1|<2 \Rightarrow -1<x<3)$

例. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$，将 $f(x)$展开成 x 的幂级数，

并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和。 $(1+2n)(1-2n)$

$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}$

$\sum a_n x^n$ $\parallel$

$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n$, $(|x^2|<1)$

$\int_0^x(\arctan x)'dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^{2n}dx$

$\therefore f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{(1+x^2)x^{2n}}{2n+1}$ $(|x|\leq 1)$

$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(-1\leq x\leq 1)$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}+\sum_{n=0}^{n}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+1}$

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right]x^{2n}$$

$$=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}x^{2n},\qquad x\in[-1,1]$$

$$\therefore\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}=\frac{1}{2}[f(1)-1]=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$$

$f(1)=\frac{\pi}{2}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}+1$

$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{2n+1}$

$\boxed{n=m-1}$, $m=n+1$

$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{2m}}{2m-1}$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n-1}$

练习 1. 将下列函数展开成 x 的幂级数 $f(x) = \arctan\dfrac{1+x}{1-x}$

解: $$f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\,\mathrm{d}x, \quad x \in (-1,1)$$

$$\therefore\ f(x) - \cancel{f(0)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^{2n}\,\mathrm{d}\,x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} + C$$

$x = \pm 1$ 时, 此级数收敛, $\boxed{f(0) = \dfrac{\pi}{4}}$,

$$x = 0 \Longrightarrow C = \frac{\pi}{4}$$

因此 $$f(x) = \boxed{\frac{\pi}{4}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}, \quad x \in [-1,1]$$

2. 将 $f(x)=\ln(2+x-3x^2)$ 在 $x=0$处展为幂级数。

解: $f(x)=\ln(1-x)+\ln 2+\ln(1+\frac{3}{2}x)$

$$\ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\quad(-1\le x<1)\qquad \ln(1+\frac{3}{2}x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\frac{3}{2}x)^n$$

$$(-\frac{2}{3}<x\le\frac{2}{3})$$

因此

$$f(x)=\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\frac{3}{2}x)^n$$

$$=\ln 2-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}[1+(-\frac{3}{2})^n]x^n\quad \boxed{(-\frac{2}{3}<x\le\frac{2}{3})}$$

三、应用：近似计算

例. 计算 $\sqrt[5]{240}$ 的近似值，精确到10^{-4}.

解: $\sqrt[5]{240}=\sqrt[5]{243-3}=3(1-\frac{1}{3^4})^{1/5}$

$$=3\left(1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^4}-\frac{1\cdot 4}{5^2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{3^8}-\frac{1\cdot 4\cdot 9}{5^3\cdot 3!}\cdot\frac{1}{3^{12}}-\cdots\right)$$

$$\because |r_2|=3\left(\frac{1\cdot 4}{5^2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{3^8}+\frac{1\cdot 4\cdot 9}{5^3\cdot 3!}\cdot\frac{1}{3^{12}}+\frac{1\cdot 4\cdot 9\cdot 14}{5^4\cdot 4!}\cdot\frac{1}{3^{16}}+\cdots\right)$$

$$<3\cdot\frac{1\cdot 4}{5^2\cdot 2!}\cdot\frac{1}{3^8}\left[1+\frac{1}{81}+\left(\frac{1}{81}\right)^2+\cdots\right]<0.5\times 10^{-4}$$

$$\therefore\quad \sqrt[5]{240}\approx 3(1-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^4})\approx 3-0.00741\approx 2.9926$$

例. 计算 $\ln 2$ 的近似值，使准确到10^{-4}.

解: 已知 $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad (-1 < x \le 1)$

$$\therefore \quad \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots \quad (-1 \le x < 1)$$

故 $\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\left(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots \right) \quad (-1 < x < 1)$

令 $\frac{1+x}{1-x} = 2$ 得 $x = \frac{1}{3}$，于是有 $\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7} + \cdots\right)$

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7} + \cdots\right)$$

在上述展开式中取前四项,

$$\because \ \left|r_4\right| = 2\left(\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^9} + \frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3^{11}} + \frac{1}{13}\cdot\frac{1}{3^{13}} + \cdots\right) < \frac{2}{3^{11}}\left(1 + \frac{1}{9} + (\frac{1}{9})^2 + \cdots\right)$$

$$= \frac{2}{3^{11}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}} = \frac{1}{4\cdot 3^9} = \frac{1}{78732} < 0.2\times 10^{-4}$$

$$\therefore \ \ln 2 \approx 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}\right) \approx 0.6931$$

说明: 在展开式 $\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots\right)$中

令 $x=\frac{1}{2n+1}$ (n为自然数) ,

得 $\ln\frac{n+1}{n}=2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^5+\cdots\right)$

$$\therefore \ln(n+1)=\ln n+2\left(\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^5+\cdots\right)$$

具此递推公式可求出任意正整数的对数。 如

$$\ln 5=2\ln 2+2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{9}\right)^5+\cdots\right)\approx 1.6094$$

例. 利用 $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{3!}$,求 $\sin 9°$ 的近似值，并估计误差。

解: 先把角度化为弧度 $9° = \dfrac{\pi}{180} \times 9 = \dfrac{\pi}{20}$ (弧度)

$$\because \quad \sin\frac{\pi}{20} = \underline{\frac{\pi}{20} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^3} + \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^5 - \frac{1}{7!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^7 + \cdots$$

$$|r_2| < \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^5 < \frac{1}{120}(0.2)^5 < \frac{1}{3} \times 10^{-5}$$

$$\therefore \quad \sin\frac{\pi}{20} \approx \frac{\pi}{20} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^3 \approx 0.157080 - 0.000646 \approx 0.15643$$

误差不超过 10^{-5}

例. 计算积分 $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ 的近似值，精确到10^{-4}.（取$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\approx 0.56419$）

解: $$e^{-x^2}=1+\frac{(-x^2)}{1!}+\frac{(-x^2)^2}{2!}+\frac{(-x^2)^3}{3!}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{\frac{1}{2}} x^{2n}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,(2n+1)}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{1/2} e^{-x^2}dx = \cdots = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}\cdot\frac{1}{2^{2n+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{1}{2^2\cdot 3}+\frac{1}{2^4\cdot 5\cdot 2!}-\frac{1}{2^6\cdot 7\cdot 3!}+\cdots\right)$$

欲使截断误差 $|r_n| < \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{n!(2n+1)\cdot 2^{2n}} < 10^{-4}$

则 n 应满足 $\sqrt{\pi}\cdot n!(2n+1)\cdot 2^{2n} > 10^4 \Longrightarrow n \geq 4$

取 $n=4$, 则所求积分近似值为

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1-\frac{1}{2^2\cdot 3}+\frac{1}{2^4\cdot 5\cdot 2!}-\frac{1}{2^6\cdot 7\cdot 3!}\right) \approx 0.5205$$

例. 计算积分 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 的近似值, 精确到 10^{-4}.

解: 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, 故所给积分不是广义积分。

若定义被积函数在 $x=0$ 处的值为 1, 则它在积分区间上连续,

且有幂级数展开式 : $\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}+\cdots$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \underline{1-\frac{1}{3\cdot 3!}+\frac{1}{5\cdot 5!}}-\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n+1)\cdot(2n+1)!}+\cdots$$

$$|r_3| < \frac{1}{7\cdot 7!}=\frac{1}{35280}<0.3\times 10^{-4}$$

$$\approx 1-0.05556+0.00167 \approx 0.9461$$

第6节 傅里叶级数

一、三角级数及三角函数系的正交性

二、函数展开成傅里叶级数

三、正弦级数和余弦级数

四、一般周期函数的傅里叶级数

一、三角级数及三角函数系的正交性

简单的周期运动：$y = A\sin(\omega t + \varphi)$ (谐波函数)

(A为振幅，ω为角频率, φ为初相)

复杂的周期运动：$y = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$

(谐波迭加)

$$A_n \sin\varphi_n \cos n\omega t + A_n \cos\varphi_n \sin n\omega t$$

令 $\frac{a_0}{2} = A_0$，$a_n = A_n \sin\varphi_n$，$b_n = A_n \cos\varphi_n$，$\omega t = x$

得函数项级数 $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 称该级数为三角级数。

定理 1. 组成三角级数的函数系

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cdots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \cdots$$

在 $[-\pi,\pi]$ 上正交，即任意两个不同的函数之积在 $[-\pi,\pi]$ 上的积分等于 0。

证: $\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx\,\mathrm{d}x$$

$$\cos kx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(k+n)x + \cos(k-n)x\right]$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\cos(k+n)x + \cos(k-n)x\right]\mathrm{d}x = 0 \quad (k \neq n)$$

同理可证： $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin nx\,\mathrm{d}x = 0 \quad (k \neq n)$

但是在三角函数系中两个相同的函数的乘积在$[-\pi, \pi]$上的积分不等于 0， 且有

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 \mathrm{d}x = 2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, \mathrm{d}x = \pi \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, \mathrm{d}x = \pi$$

$$\boxed{\cos^2 nx = \frac{1+\cos 2nx}{2}, \quad \sin^2 nx = \frac{1-\cos 2nx}{2}}$$

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$

组成三角级数的函数系 在 $[-\pi, \pi]$ 上正交，

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, \mathrm{d}x = 0 \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx \, \mathrm{d}x = 0 \qquad (k \neq n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx \, dx = 0 \quad (k \neq n)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin nx \, \mathrm{d}x = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot 1 \, \mathrm{d}x = 2\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, \mathrm{d}x = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, \mathrm{d}x = \pi$$

$(n = 1, 2, \cdots)$

二、函数展开成傅里叶级数

定理 2 . 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，且

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \quad ①$$

右端级数可逐项积分，则有

$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n=0,1,\cdots) \\ b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots) \end{cases} \quad ②$$

证: 由定理条件, 对①在 $[-\pi,\pi]$ 逐项积分, 得

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\,x+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x\right)=a_0\pi \quad \therefore \quad a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos k\,x\,\mathrm{d}\,x=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\,\mathrm{d}\,x+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\,\mathrm{d}x+b_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin nx\,\mathrm{d}x\right]$$

$$=a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 kx\,\mathrm{d}x=a_k\pi$$ (利用正交性)

$$\therefore \quad a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x\ (k=1,2,\cdots)$$

类似地, 用 $\sin k\,x$ 乘 ① 式两边, 再逐项积分可得

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x \quad (k=1,2,\cdots)$$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad ①$$

$$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad (n=0,1,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n=1,2,\cdots) \end{cases} \qquad ②$$

由公式 ② 确定的 a_n , b_n 称为函数 $f(x)$ 的**傅里叶系数**；以 $f(x)$ 的傅里叶系数为系数的三角级数 ① 称为 $f(x)$ 的**傅里叶级数**。

傅里叶，J. -B. -J.

定理3 **(收敛定理, 展开定理)** 设 $f(x)$ 是周期为2π 的周期函数,

并满足**狄利克雷**(Dirichlet)**条件**:

1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点;

2) 在一个周期内只有有限个极值点,

则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛 , 且有

注意: 函数展成傅里叶级数的条件比展成幂级数的条件低得多.

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\begin{cases} f(x), & x \text{ 为连续点} \\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & x \text{ 为间断点} \end{cases}$$

狄利克雷, P.G.L.

其中 a_n, b_n 为 $f(x)$ 的傅里叶系数。

(证明略)

周期为 2π 的周期函数 $f(x)$的满足**狄利克雷**(Dirichlet)**条件**:

1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点;

2) 在一个周期内只有有限个极值点,

傅里叶级数 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

傅里叶系数 $\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x & (n=0,1,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$

则傅里叶级数收敛且有 $$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\begin{cases} f(x), & x\text{ 为连续点} \\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & x\text{ 为间断点} \end{cases}$$

设周期为$2l$ 的周期函数 $f(x)$满足收敛定理条件,

则它的傅里叶展开式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

(在 $f(x)$ 的连续点处)

其中 $\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=0,1,2,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{l}\,\mathrm{d}x & (n=1,2,\cdots) \end{cases}$

在 $f(x)$ 的间断点 x 处, 傅里叶级数收敛于 $\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$.

定义在$[-\pi,\pi]$上的函数 $f(x)$

$$f(x),\quad x\in[-\pi,\pi]$$

周期延拓

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[-\pi,\pi) \\ f(x-2k\pi), & \text{其它} \end{cases}$$

傅里叶展开

$f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅里叶级数

定义在$[0,\pi]$上的函数 $f(x)$

奇延拓

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\pi] \\ 0, & x=0 \\ -f(-x), & x\in(-\pi,0) \end{cases}$$

周期延拓 $F(x)$

$f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上展成正弦级数

偶延拓

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\pi] \\ f(-x), & x\in(-\pi,0) \end{cases}$$

周期延拓 $F(x)$

$f(x)$ 在 $[0,\pi]$上展成余弦级数

当函数定义在任意有限区间上时，其傅**里**叶展开方法:

方法1 $f(x),\ x\in[a,b]$

令 $x=z+\frac{b+a}{2}$，即 $z=x-\frac{b+a}{2}$

$F(z)=f(x)=f(z+\frac{b+a}{2}),\ z\in[-\frac{b-a}{2},\frac{b-a}{2}]$

周期延拓

$F(z)$在$[-\frac{b-a}{2},\frac{b-a}{2}]$上展成傅**里**叶级数

将 $z=x-\frac{b+a}{2}$ 代入展开式

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的傅**里**叶级数

方法2 $f(x),\ x\in[a,b]$

令 $x=z+a$，即 $z=x-a$

$F(z)=f(x)=f(z+a),\quad z\in[0,b-a]$

奇或偶式周期延拓

$F(z)$ 在 $[0,b-a]$

将$z=x-a$ 代入展开式

$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的正弦或余弦级数