20. 若 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，其中 $a>0$ 且 $f(0)=f(2a)$，试证明方程 $f(x)=f(x+a)$ 在 $[0,a)$ 内至少有一个实根。

令 $\varphi(x)=f(x)-f(x+a)$

$\varphi(0)=f(0)-f(a)$，$\varphi(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0)$

(I) $f(0)=f(a)$ 时，0 即为 $\varphi(x)=0$ 的根

(II) $f(0)\neq f(a)$ 时 $\varphi(0)\cdot\varphi(a)=-[f(0)-f(a)]^2<0$

由零点定理得 必∃ $\xi\in(0,a)$，使 $\varphi(\xi)=0$，即 $f(x)=f(x+a)$ 在 $(0,a)$ 中有一实根

故 $f(x)=f(x+a)$ 在 $[0,a)$ 上至少有一个实根

21. 设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$，证明：$f(x)$ 在 $(a+\infty)$ 上有界。

$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A \Rightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，$0<x-a<\delta$ 时 $|f(x)-A|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B \Rightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，$x>X$ 时 $|f(x)-B|<\varepsilon$

取 $\varepsilon=1$ 则 $a<x<a+\delta$ 时，$A-1<f(x)<A+1$，$x>X$ 时 $B-1<f(x)<B+1$

(I) ~~a+δ~~ $a+\delta\geqslant X$ 时，$\min\{A-1,B-1\}<f(x)<\max\{A+1,B+1\}$，$(x\in(a,+\infty))$

(II) $a+\delta<X$ 时，由 $f(x)$ 在 $[a+\delta,X]$ 连续 故必∃ $\xi,\eta\in[a+\delta,X]$

使 $f(\xi)\leq f(x)\leq f(\eta)$ $(x\in[a+\delta,X])$ 即 $f(x)$ 在 $[a+\delta,X]$ 有界

综上：$f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上有界