例 1 一曲线通过点(1,2),且在该曲线上任一点 $M(x,y)$处的切线的斜率为$2x$,求这曲线的方程.

解 设所求曲线为 $y=y(x)$

$$\frac{dy}{dx}=2x \qquad \text{其中 } x=1\text{时}, y=2$$

$$y=\int 2x\,dx \quad \text{即 } y=x^2+C, \quad \text{求得} C=1,$$

所求曲线方程为 $y=x^2+1$.

例 2 列车在平直的线路上以 20 米/秒的速度行驶，当制动时列车获得加速度 -0.4 米/秒 ^{2}，问开始制动后多少时间列车才能停住？以及列车在这段时间内行驶了多少路程？

解 设制动后 t 秒钟行驶 s 米，$s = s(t)$

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -0.4 \qquad t = 0 \text{时}, s = 0, v = \frac{ds}{dt} = 20,$$

$$v = \frac{ds}{dt} = -0.4t + C_1 \qquad s = -0.2t^2 + C_1 t + C_2$$

代入条件后知 $C_1 = 20,\quad C_2 = 0$

$$v = \frac{ds}{dt} = -0.4t + 20,$$

故 $s = -0.2t^2 + 20t,$

开始制动到列车完全停住共需 $t = \dfrac{20}{0.4} = 50(\text{秒}),$

列车在这段时间内行驶了

$$s = -0.2 \times 50^2 + 20 \times 50 = 500(\text{米}).$$

例 3 验证:函数$x=C_1\cos kt+C_2\sin kt$是微分方程$\dfrac{d^2x}{dt^2}+k^2x=0$的解. 并求满足初始条件

$$x\big|_{t=0}=A,\ \frac{dx}{dt}\bigg|_{t=0}=0\text{的特解.}$$

解 $\because \dfrac{dx}{dt}=-kC_1\sin kt+kC_2\cos kt,$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-k^2C_1\cos kt-k^2C_2\sin kt,$$

将$\dfrac{d^2x}{dt^2}$和x的表达式代入原方程,

$$-k^2(C_1\cos kt + C_2\sin kt) + k^2(C_1\cos kt + C_2\sin kt) \equiv 0.$$

故 $x = C_1\cos kt + C_2\sin kt$ 是原方程的解.

$$\because\ x\big|_{t=0} = A,\quad \frac{dx}{dt}\bigg|_{t=0} = 0,\qquad \therefore\ C_1 = A,\quad C_2 = 0.$$

所求特解为 $x = A\cos kt$.

补充： 微分方程的初等解法：**初等积分法.**

$\boxed{\text{求解微分方程}} \longrightarrow \boxed{\text{求积分}}$

(通解可用初等函数或积分表示出来)

例1 求解微分方程$\frac{dy}{dx}=2xy$及$\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{1+x^2}$的通解。

解 分离变量$\frac{dy}{y}=2xdx$,两端积分$\int\frac{dy}{y}=\int 2x\,dx$,

$ln|y|=x^2+C_1 \quad \therefore y=ce^{x^2}$为所求通解。

又$\frac{dy}{y}=\frac{xdx}{1+x^2}$,两端积分$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{xdx}{1+x^2}$,

$ln|y|=\frac{1}{2}ln\left(1+x^2\right)+lnC \quad \therefore y=c\sqrt{1+x^2}$为所求通解。

例2　求方程 $f(xy)ydx+g(xy)xdy=0$ 通解.

解　令 $u=xy$,　　则 $du=xdy+ydx$,

$$f(u)ydx+g(u)x\cdot\frac{du-ydx}{x}=0,$$

$$[f(u)-g(u)]\frac{u}{x}dx+g(u)du=0,$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{g(u)}{u[f(u)-g(u)]}du=0,$$

通解为 $\ln|x|+\int\frac{g(u)}{u[f(u)-g(u)]}du=C.$

例 3 衰变问题:衰变速度与未衰变原子含量M 成正比,已知$M\big|_{t=0}=M_0$,求衰变过程中铀含量$M(t)$随时间t变化的规律.

解 衰变速度 $\dfrac{dM}{dt}$, 由题设条件

$$\frac{dM}{dt}=-\lambda M \qquad (\lambda>0\text{衰变系数}) \qquad \frac{dM}{M}=-\lambda dt$$

$$\int\frac{dM}{M}=\int-\lambda dt,\quad \ln M=-\lambda t+\ln c,\quad \text{即}M=ce^{-\lambda t},$$

代入$M\big|_{t=0}=M_0$ 得 $M_0=ce^0=c$,

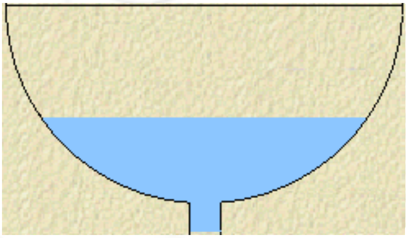
$$\therefore M=M_0e^{-\lambda t}$$

衰变规律

华东师范大学 EAST CHINA NORMAL UNIVERSITY 计算机科学与软件工程学院 School of Computer Science and Software Engineering

例 4 有高为1米的半球形容器, 水从它的底部小孔流出, 小孔横截面积为1平方厘米(如图). 开始时容器内盛满了水, 求水从小孔流出过程中容器里水面的高度h(水面与孔口中心间的距离)随时间t的变化规律.

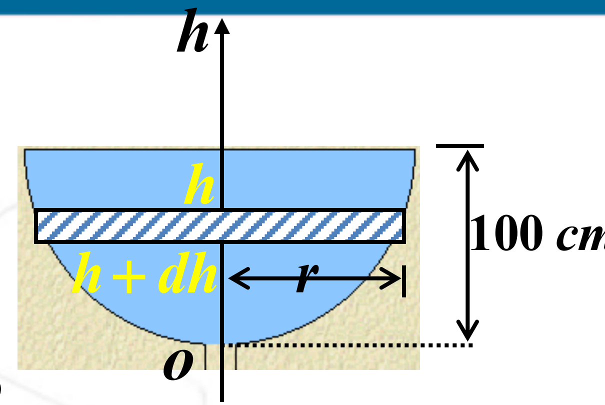
解 由力学知识得,水从孔口流出的流量为



$$Q=\frac{dV}{dt}=\underbrace{0.62}_{\text{流量系数}}\cdot\underbrace{S}_{\text{孔口截面面积}}\sqrt{2\underbrace{g}_{\text{重力加速度}}h},$$

$\because S = 1\,\text{cm}^2,$

$\therefore dV = 0.62\sqrt{2gh}\,dt, \qquad (1)$



设在微小的时间间隔 $[t,\ t+\Delta t]$,

水面的高度由h降至 $h+\Delta h$, 则 $dV = -\pi r^2 dh$,

$\because r = \sqrt{100^2 - (100-h)^2} = \sqrt{200h - h^2},$

$\therefore dV = -\pi(200h - h^2)dh, \qquad (2)$

比较(1)和(2)得: $-\pi(200h - h^2)dh = 0.62\sqrt{2gh}\,dt,$

$$-\pi(200h-h^2)dh = 0.62\sqrt{2gh}\,dt,$$

可分离变量

即为未知函数的微分方程.

$$dt = -\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}(200\sqrt{h}-\sqrt{h^3})dh,$$

$$t = -\frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\left(\frac{400}{3}\sqrt{h^3}-\frac{2}{5}\sqrt{h^5}\right)+C,$$

$$\because h|_{t=0}=100, \qquad \therefore C = \frac{\pi}{0.62\sqrt{2g}}\times\frac{14}{15}\times 10^5,$$

所求规律为$t = \dfrac{\pi}{4.65\sqrt{2g}}(7\times10^5-10^3\sqrt{h^3}+3\sqrt{h^5}).$

华东师范大学 EAST CHINA NORMAL UNIVERSITY

计算机科学与软件工程学院 School of Computer Science and Software Engineering

例5 某车间体积为12000立方米, 开始时空气中含有0.1%的CO_2, 为了降低车间内空气中CO_2的含量, 用一台风量为每秒2000立方米的鼓风机通入含0.03%的CO_2的新鲜空气, 同时以同样的风量将混合均匀的空气排出, 问鼓风机开动6分钟后, 车间内CO_2的百分比降低到多少?

解 设鼓风机开动后 t 时刻 CO_2的含量为$x(t)\%$

在$[t, t+dt]$内,

CO_2的通入量 $= 2000 \cdot dt \cdot 0.03$,

CO_2的排出量 $= 2000 \cdot dt \cdot x(t)$,

CO_2的改变量 $=$ CO_2的通入量 $-$ CO_2的排出量

$$12000dx = 2000 \cdot dt \cdot 0.03 - 2000 \cdot dt \cdot x(t),$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{6}(x - 0.03), \quad \Rightarrow x = 0.03 + Ce^{-\frac{1}{6}t},$$

$$\because x|_{t=0} = 0.1, \ \therefore C = 0.07, \quad \Rightarrow x = 0.03 + 0.07e^{-\frac{1}{6}t},$$

$$x|_{t=6} = 0.03 + 0.07e^{-1} \approx 0.056,$$

6分钟后, 车间内CO_2的百分比降低到0.056%.

例 1　求解微分方程

$$(x - y\cos\frac{y}{x})dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0.$$

解　令 $u = \frac{y}{x}$，则 $dy = xdu + udx$，

$$(x - ux\cos u)dx + x\cos u(udx + xdu) = 0,$$

$$\cos u du = -\frac{dx}{x}, \qquad \sin u = -\ln|x| + C,$$

微分方程的解为 $\sin\frac{y}{x} = -\ln|x| + C.$

例 2 求解微分方程 $\dfrac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \dfrac{dy}{2y^2 - xy}$.

解 $$\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2 - xy}{x^2 - xy + y^2} = \frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2},$$

令 $u = \dfrac{y}{x}$, 则 $dy = xdu + udx$,

$$u + xu' = \frac{2u^2 - u}{1 - u + u^2},$$

$$\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u}\right)-\frac{2}{u-2}+\frac{1}{u-1}\right]du=\frac{dx}{x},$$

$$\ln(u-1)-\frac{3}{2}\ln(u-2)-\frac{1}{2}\ln u=\ln x+\ln C,$$

$$\frac{u-1}{\sqrt{u}(u-2)^{\frac{3}{2}}}=Cx.$$

微分方程的解为 $(y-x)^2=Cy(y-2x)^3.$

例 3 抛物线的光学性质

实例：车灯的反射镜面--------旋转抛物面

解 如图 设旋转轴 ox轴

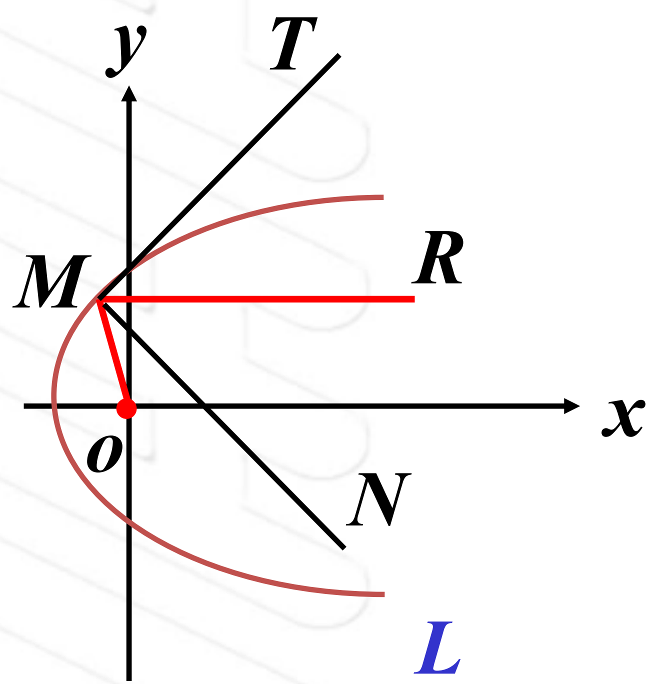
光源在$(0,0)$, $L: y = y(x)$

设$M(x, y)$为上任一点,

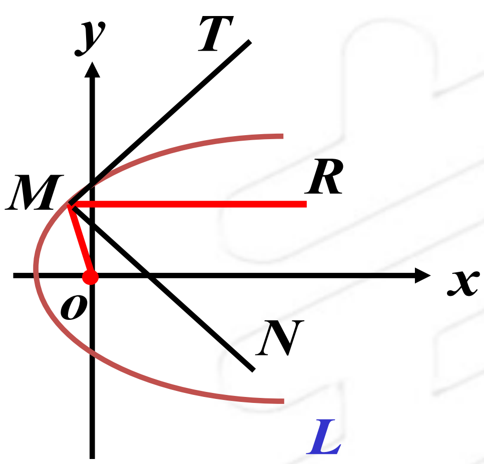
MT为切线, 斜率为 y',

MN为法线, 斜率为 $-\dfrac{1}{y'}$,

$\because \angle OMN = \angle NMR$,



$$\therefore \tan\angle OMN = \tan\angle NMR,$$



由夹角正切公式得

$$\begin{cases} \tan\angle OMN = \dfrac{-\dfrac{1}{y'} - \dfrac{y}{x}}{1 - \dfrac{y}{xy'}} \\ \tan\angle NMR = \dfrac{1}{y'} \end{cases}$$

得微分方程

$$yy'^2 + 2xy' - y = 0, \quad \text{即 } y' = -\frac{x}{y} \pm \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}.$$

令$u=\dfrac{y}{x}$， 得 $u+x\dfrac{du}{dx}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+u^2}}{u}$,

分离变量 $\dfrac{udu}{(1+u^2)\pm\sqrt{1+u^2}}=-\dfrac{dx}{x}$,

令 $1+u^2=t^2$, $\dfrac{tdt}{t(t\pm 1)}=-\dfrac{dx}{x}$,

积分得 $\ln|t\pm 1|=\ln\left|\dfrac{C}{x}\right|$, 即 $\sqrt{u^2+1}=\dfrac{C}{x}\pm 1$,

平方化简得 $u^2 = \frac{C^2}{x^2} + \frac{2C}{x},$

代回 $u = \frac{y}{x}$，得 $y^2 = 2C(x + \frac{C}{2})$

抛物线

所求旋转轴为 ox 轴的旋转抛物面方程为

$$y^2 + z^2 = 2C(x + \frac{C}{2}).$$

例4 求 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x-y+1}{x+y-3}$ 的通解.

解 $\because \Delta=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=2\neq 0,$

方程组 $\begin{cases}h-k+1=0\\ h+k-3=0,\end{cases}\Rightarrow h=1,k=2,$

令 $x=X+1, y=Y+2.$ 代入原方程得

$\dfrac{dY}{dX}=\dfrac{X-Y}{X+Y},$ 令 $u=\dfrac{Y}{X},$

方程变为 $u+X\frac{du}{dX}=\frac{1-u}{1+u}$, 分离变量法得

$X^2(u^2+2u-1)=c$, 即 $Y^2+2XY-X^2=C$,

将 $X=x-1, Y=y-2$ 代回,

得原方程的通解

$$(y-2)^2+2(x-1)(y-2)-(x-1)^2=C,$$

或 $x^2+2xy-y^2+2x+6y=C_1$.

利用变量代换求微分方程的解

例5 求$\dfrac{dy}{dx}=(x+y)^2$的通解.

解 令 $x+y=u$, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dx}-1$ 代入原方程

$\dfrac{dy}{dx}=1+u^2$ 解得 $\arctan u=x+C$,

代回 $u=x+y$,得 $\arctan(x+y)=x+C$,

原方程的通解为 $y=\tan(x+C)-x$.

例6. 求方程 $f(xy)ydx+g(xy)xdy=0$ 通解.

解 令 $u=xy$, 则 $du=xdy+ydx$,

$$f(u)ydx+g(u)x\cdot\frac{du-ydx}{x}=0,$$

$$[f(u)-g(u)]\frac{u}{x}dx+g(u)du=0,$$

$$\frac{dx}{x}+\frac{g(u)}{u[f(u)-g(u)]}du=0,$$

通解为 $\ln|x|+\int\frac{g(u)}{u[f(u)-g(u)]}du=C.$