大学基础物理学

University Fundamental Physics

电子工程系@华东师范大学

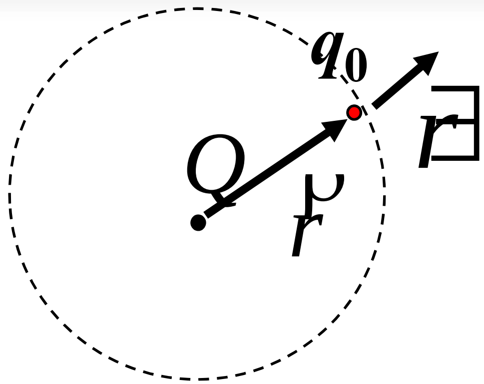
李波

2019年

§ 1.3 库仑定律

静止的点电荷的电场及其叠加

根据库仑定律和场强的定义



由场强定义：

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

由库仑定律：

$$\vec{F} = \frac{Qq_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r}$$

由上述两式得

$$\vec{E} = \frac{q_i \vec{e}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

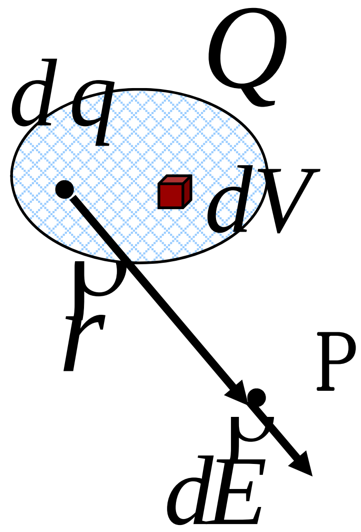
1） $\left|\vec{E}\right| = E = \dfrac{|Q|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ 球对称

2） $\hat{r}$ 为从场源电荷指向场点的单位矢量

➢连续带电体的场强

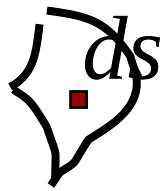
把带电体看作是由许多个电荷元组成

$$\boxed{\vec{E}=\int \mathrm{d}\vec{E}=\int_q \frac{\mathrm{d}q\cdot\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$



电荷分布

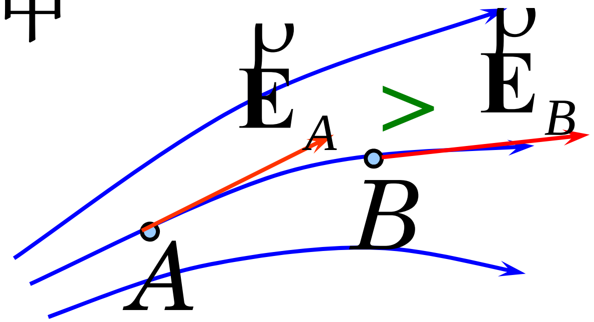
- 体电荷分布 $\boxed{dq=\rho dV}$
- 面电荷分布 $\boxed{dq=\sigma dS}$
- 线电荷分布 $\boxed{dq=\lambda dl}$



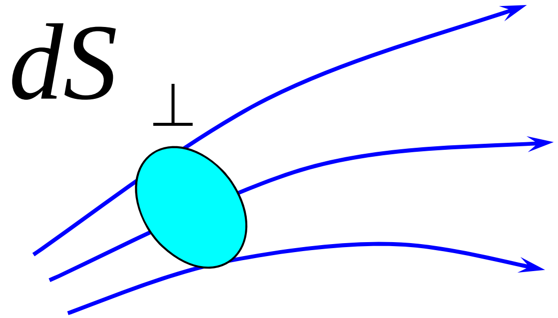
§ 1.4 电场线和电通量

一、电力线 ——用一族空间曲线形象描述场强分布

方向： 各点的切线方向表示电场中该点场强的方向

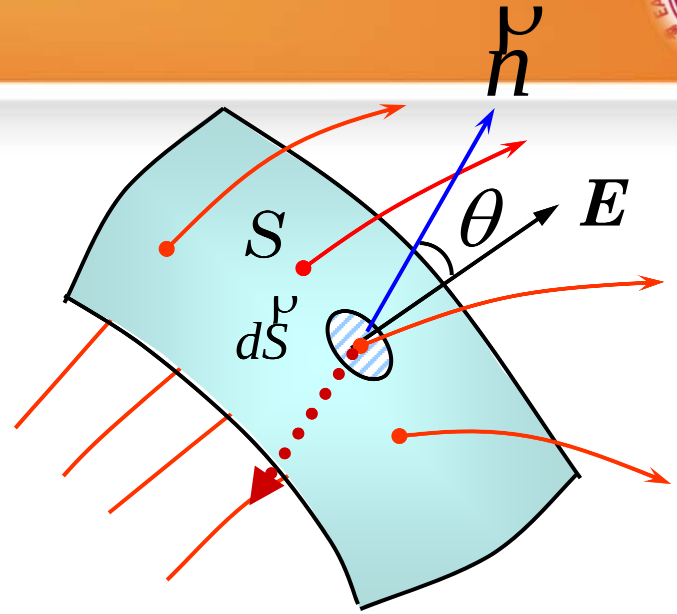


大小： 在垂直于电力线的单位面积上的电力线的条数(数密度)等于该点的场强的大小。



$$E = \frac{d\Phi_e}{dS_\perp}$$

§ 1.4 电场线和电通量



3.通过非均匀电场中任意曲面的电通量怎么计算?

把曲面分成许多个面积元,每一面元处视为匀强电场

$$d\Phi_e = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

取决于面元的法线方向的选取

$\boxed{\text{可正可负}}$

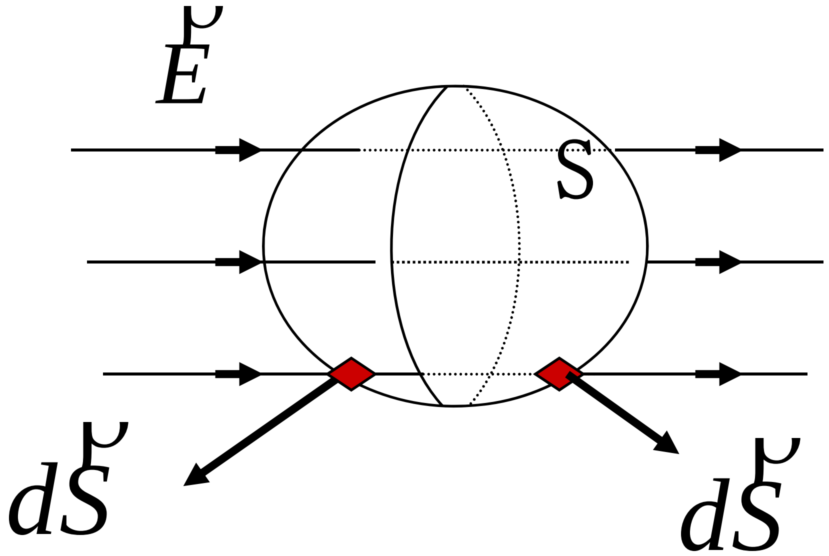
任意曲面电通量:

$$\boxed{\Phi_e = \int_S d\Phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}}$$

§ 1.4 电场线和电通量

➢通过闭合面的电通量

规定：面元方向 ----由闭合面内指向面外
简称外法线方向



电力线穿入 $\vec{E}\cdot d\vec{S}<0$

电力线穿出 $\vec{E}\cdot d\vec{S}>0$

$$\boxed{\Phi_e=\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}}$$

几何含义：净穿出闭合曲面的电力线条数

§ 1.5 高斯定律

高斯定理表述：

在真空中的静电场内，通过任意封闭曲面的电通量等于这闭合面所包围的电荷电量的代数和除以 ε_0 。

数学表达式

$$\boxed{\Phi_e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum_i q_{\mathrm{int}}}{\varepsilon_0}}$$

§1.5 高斯定律

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0}$$

应用

- 求解电场，分析电场（分析对称性）
- 由场强求电荷分布

对 Q 的分布具有某种对称性的情况下

利用高斯定理解 $\vec{E}$ 较为方便

常见的电量分布的对称性：

	球对称	柱对称	面对称
均匀带电的	球面	无限长带电线	无限大平面（无厚度）
	球体	无限长柱面	无限大平板（有厚度）
		无限长柱体	

$\boxed{\text{小结}}$ 应用高斯定理求场强的要点：

适用对象：有球、柱、平面对称的某些电荷分布。

方法要点：（1）分析 $\vec{E}$ 的对称性；

（2）选取高斯面的原则：

1）需通过待求的区域；

2）在 S 上待求 $\vec{E}$ 处，$\vec{E} \parallel \mathrm{d}\vec{s}$ 且等大，

使得 $\int \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = E\int \mathrm{d}s$，其余处必须有

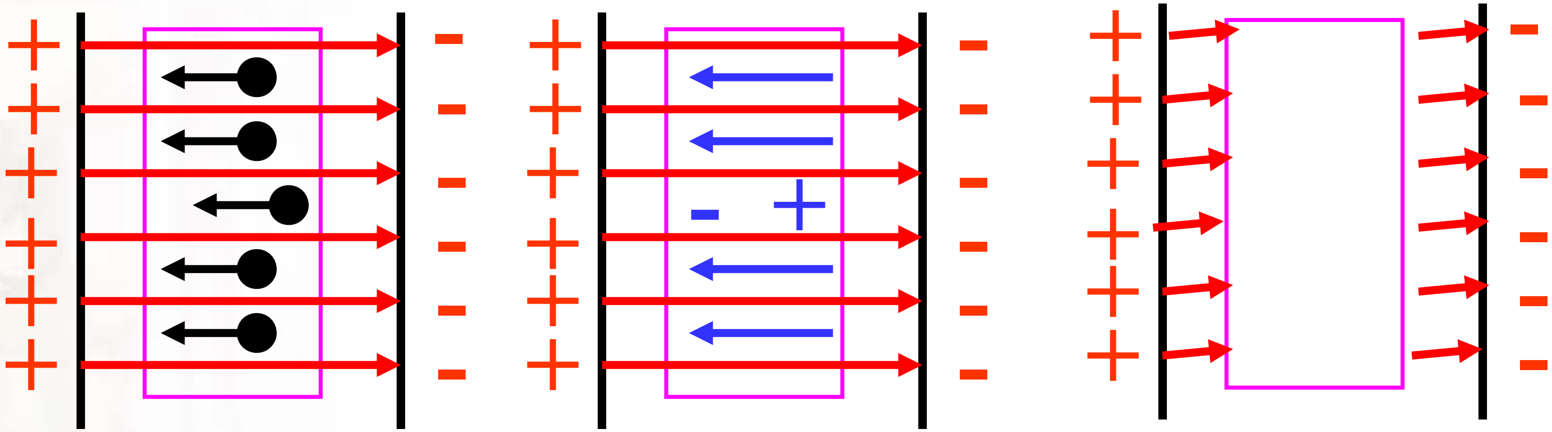
$$\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0 \begin{cases} \text{或} \quad E = 0, \\ \text{或} \quad \vec{E} \perp \mathrm{d}\vec{s}\text{。} \end{cases}$$

不具有特定对称性的电荷分布，其电场不能直接由高斯定理求出。但高斯定理依然成立。

对带电体系来说，如果其中每个带电体上的电荷分布都具有对称性，那么可用高斯定理求出每个带电体的电场，然后应用电场叠加原理求出带电体系的总电场分布

§ 1.7 导体的静电平衡

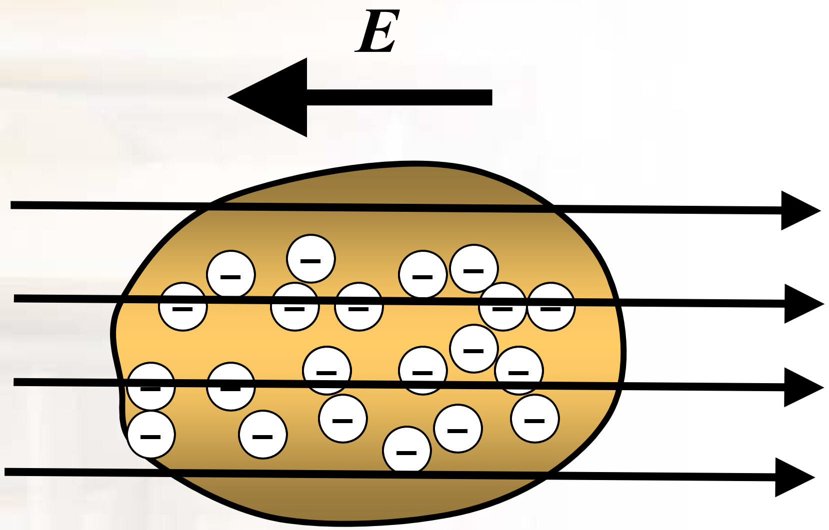
导体的静电平衡状态：导体内部和表面没有电荷定向移动（导体内部的场强*E* 就是*E*' 和*E*0 的叠加）



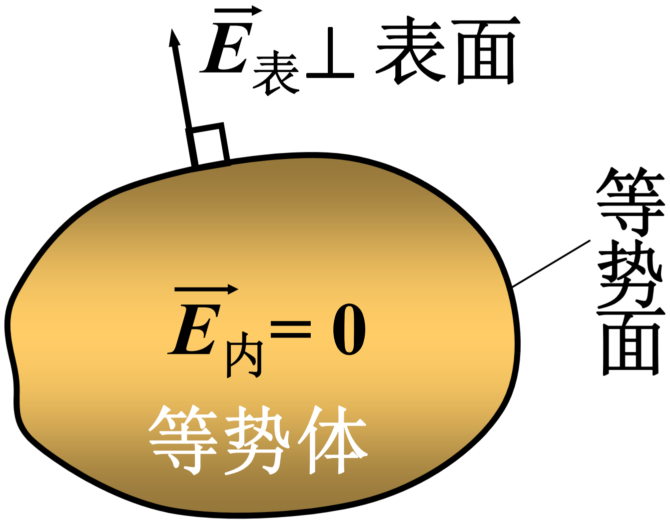
开始，$E' < E_0$，导体内部场强不为零，自由电子继续运动，E' 增大。到$E' = E_0$ 即导体内部的场强为零，此时导体内没有电荷作定向运动，导体处于静电平衡状态。

§ 1.7 导体的静电平衡

静电场内的的导体



静电平衡时的导体



场描述：

$\mathbf{E}_{内}=0$；$\mathbf{E}_{表}\perp$表面

与导体形状无关

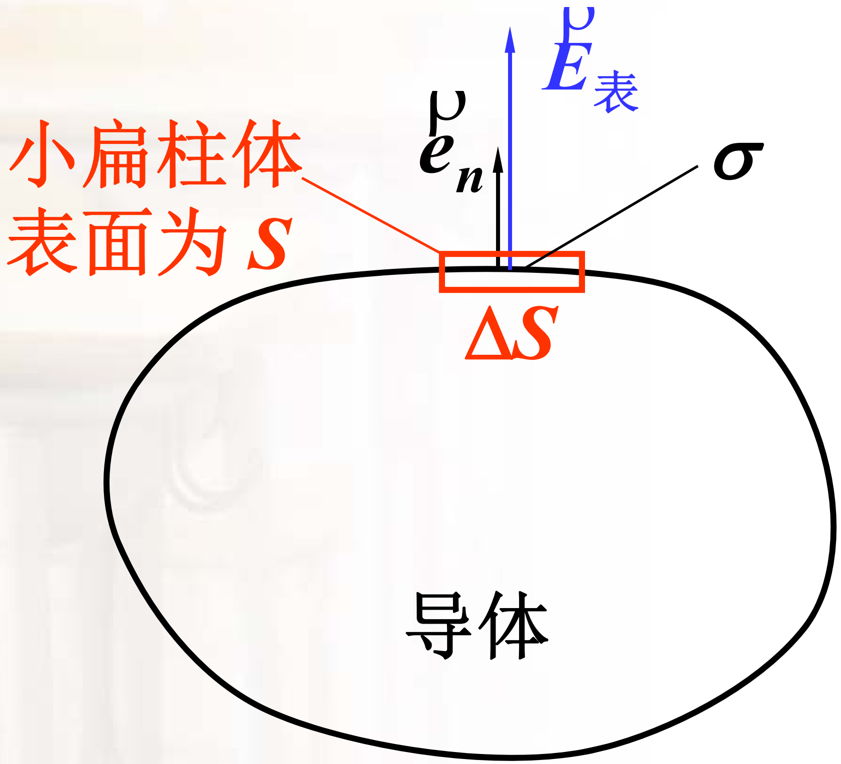
势描述：

导体是等势体；表面是等势面

与导体形状无关

§ 1.7 导体的静电平衡

二. 表面场强与面电荷密度的关系



$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = E_{表}\cdot \Delta S \underset{(高)}{=} \frac{\sigma\,\Delta S}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore E_{表} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},\ \vec{E}_{表} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{e}_n$$

思考　$\vec{E}_{表}$是小柱体内电荷的贡献还是导体表面全部电荷的贡献？

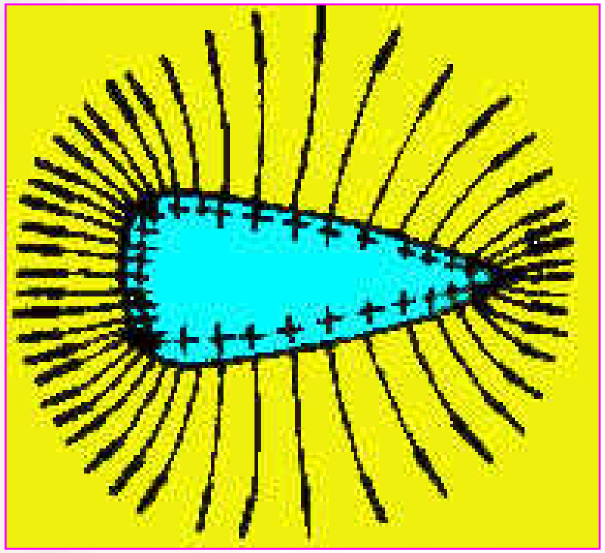
§ 1.7 导体的静电平衡

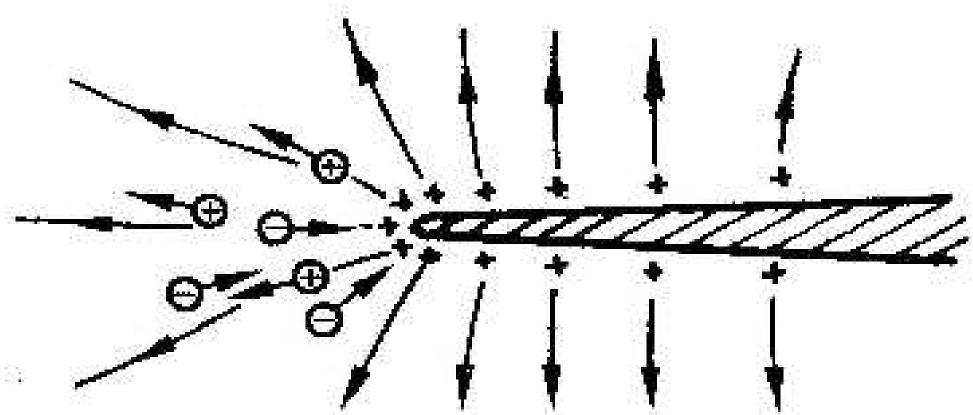
三. 孤立导体表面电荷分布的特点

孤立导体表面曲率大处面电荷密度也大，
但不存在单一函数关系。

尖端放电（point discharge）：

带电的尖端电场强，使附近的空气电离，因而产生放电。





§ 1.8 电场对电荷的作用力

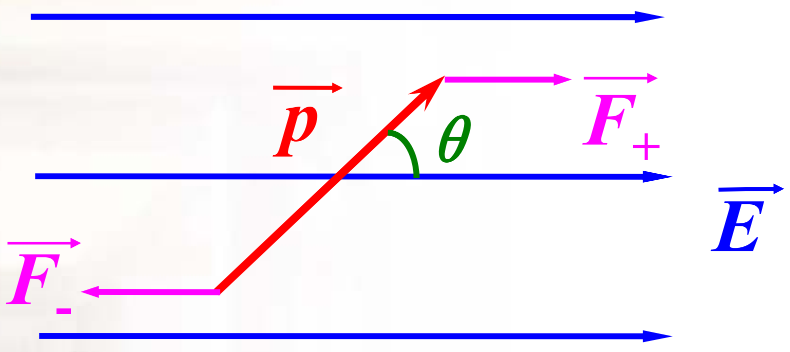
$$E = \frac{F}{q}$$

$$F = qE,$$

电荷与运动速率无关　&　电场力与运动速率无关

§ 1.8 电场对电荷的作用力

例：电偶极子在均匀电场中所受的力矩



$$F_+ = qE\ ,$$

$$F_- = -qE\ ,$$

$$F = F_+ + F_- = 0$$

力矩 $$M = M_+ + M_- = qE\frac{l}{2}\sin\theta \times 2$$

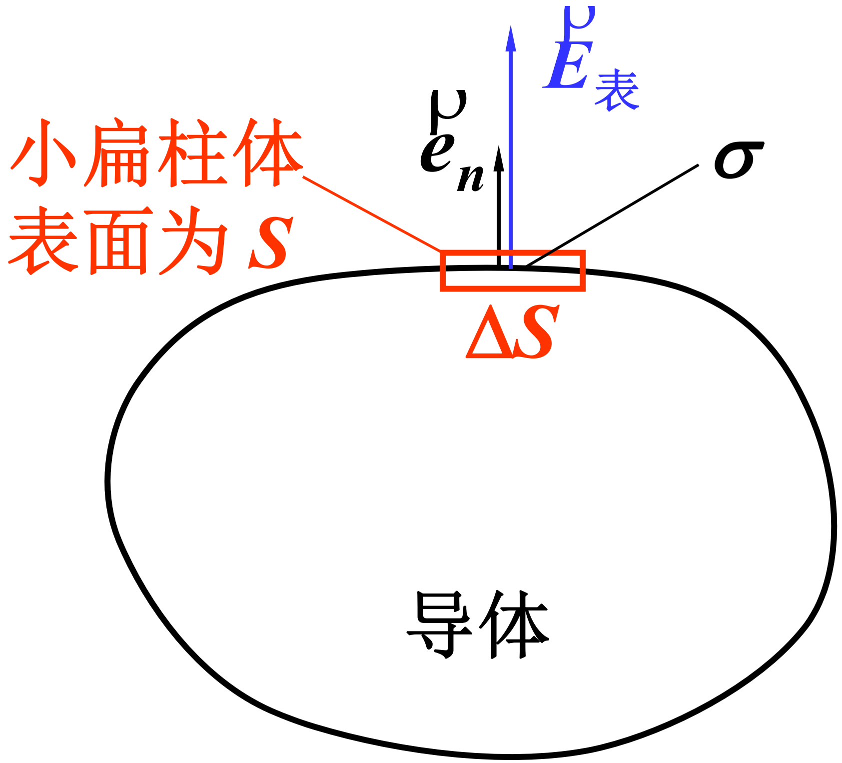
$$= qlE\sin\theta = pE\sin\theta$$

$$\boxed{\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}}$$

电偶极矩, 电矩

§ 1.8 电场对电荷的作用力

单位面积受力 $\vec{f} = \dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\vec{e}_n$



受力来自哪里？ $E_{其他}$

$$\vec{E}_{外} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_n \quad \vec{E}_{内} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{e}_n$$

$$E_{其他} + E_{内} = 0$$

$$\therefore E_{其他} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \qquad \vec{f} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}\vec{e}_n$$

不管正点负电
方向指向外部

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}}$$

$$\boxed{F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}}$$

$$\vec{E} = \frac{q\vec{e}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E} = \frac{-\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\boxed{\Phi_e = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}}$$

$$\boxed{\Phi_e = \oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sum_i q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}}$$

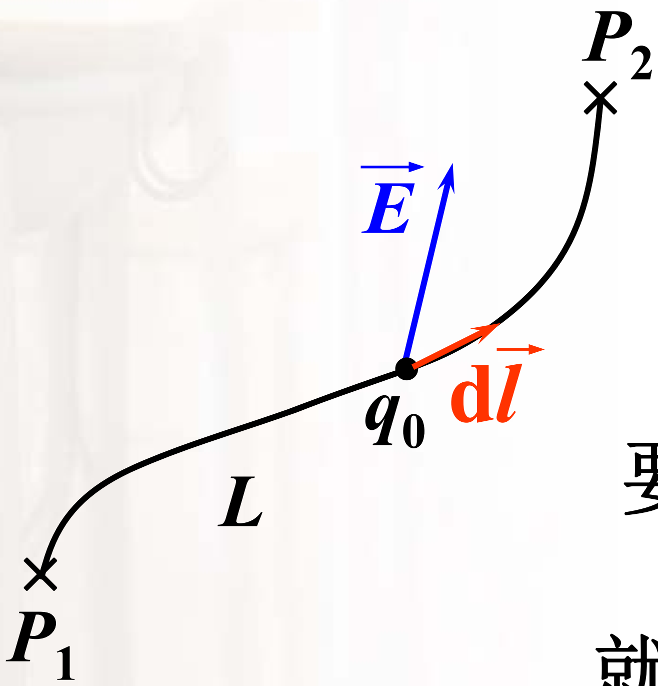
$$\boxed{\vec{M} = \vec{p}\times\vec{E}}$$

第二章　电 势

§ 2.1 静电场的保守性

一. 静电力作功的特点

移动 实验点电荷q_0，电场力作功：



$$A_{12} = \int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{(P_1)}^{(P_2)} q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

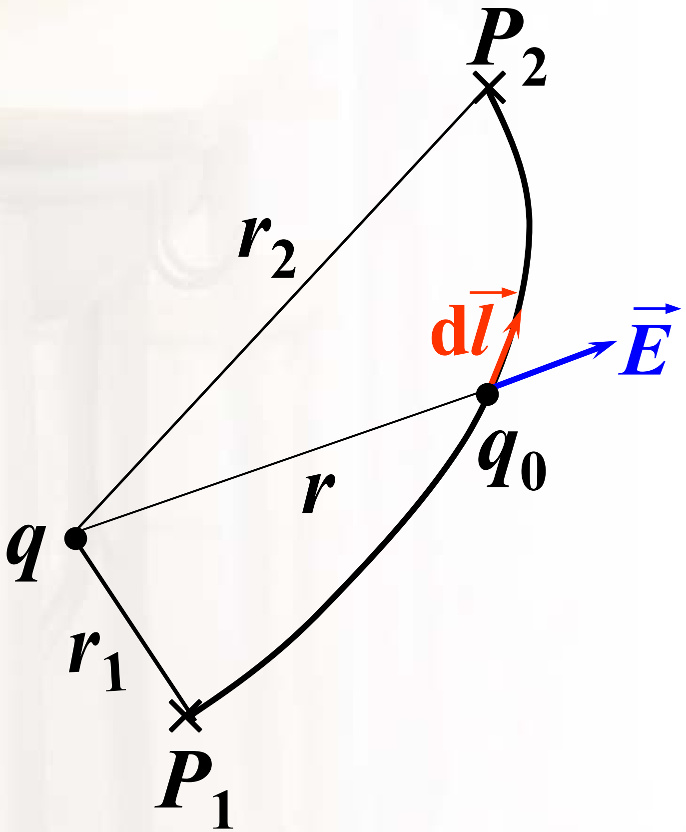
$$= q_0 \int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

要搞清静电力作功的规律，

就要研究 $\underset{(L)}{\int_{(P_1)}^{(P_2)}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 的特点：

§ 2.1 静电场的保守性

- 对点电荷：$\int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{(P_1)}^{(P_2)} \frac{q\vec{e}_r \cdot \mathrm{d}\vec{l}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \int_{(P_1)}^{(P_2)} \frac{q\vec{r} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$



$$\boxed{\vec{r} \bullet \mathrm{d}\vec{l} = r\,\mathrm{d}r}$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} \frac{q\,\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

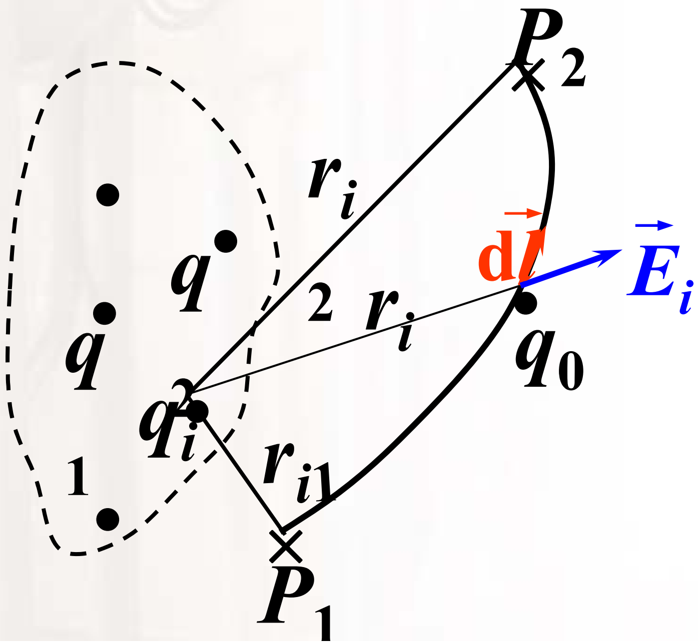
—— 只与P_1、P_2位置有关，而与L无关。

§ 2.1 静电场的保守性

- 对点电荷系：

$$\int_{(P_1)\,(L)}^{(P_2)} \vec{E}\cdot\mathbf{d}\vec{l} = \int_{(P_1)\,(L)}^{(P_2)} \Big(\sum_i \vec{E}_i\Big)\cdot\mathbf{d}\vec{l}$$

$$= \int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{E}_1\cdot\mathrm{d}\vec{l} + \int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{E}_2\cdot\mathrm{d}\vec{l} + \cdots + \int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{E}_n\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \sum_i \int_{(P_1)\,(L)}^{(P_2)} \vec{E}_i\cdot\mathbf{d}\vec{l}$$



$$= \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\Big(\frac{1}{r_{i1}} - \frac{1}{r_{i2}}\Big)$$

——只与P_1、P_2位置有关，

而与L无关。

§ 2.1 静电场的保守性

- 对任意电荷系：$\int_{(P_1)\,(L)}^{(P_2)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 也应与L无关。

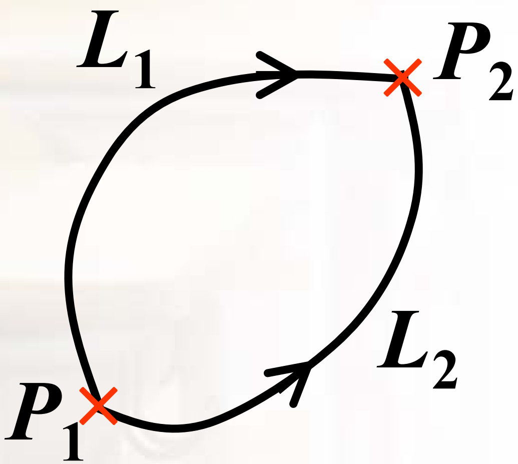
对任何静电场，$\int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 只取决于起点和终点的位置而与起点和终点间的路径无关

----------静电场的保守性

重力做功 ----------重力势能

静电场力做功 ----------静电场力势能（电势）

二. 环路定理（circuital theorem）



$$\underset{(L_1)}{\int_{(P_1)}^{(P_2)}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \underset{(L_2)}{\int_{(P_1)}^{(P_2)}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= -\underset{(L_2)}{\int_{(P_2)}^{(P_1)}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\therefore \quad \boxed{\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0}$$ —— 静电场的环路定理

$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 称为静电场的“环流”（circulation）。

静电场的环路定理说明静电场为保守场，

§ 2.2 电势差和电势

一. 电势差（electric potential difference）

由$\int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$与路径无关，可引入电势差的概念。

定义P_1对P_2的电势差：

$$\boxed{\varphi_{12} = \int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

φ_{12}为移动单位正电荷由$P_1 \to P_2$电场力作的功。

§ 2.2 电势差和电势

二. 电势（electric potential）

设P_0为电势参考点，即$\varphi_0=0$，则任一点

P_1处电势为：

$$\varphi_1=\varphi_{10}=\int_{(P_1)}^{(P_0)}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$\therefore\quad \varphi_1-\varphi_2=\int_{(P_1)}^{(P_0)}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}-\int_{(P_2)}^{(P_0)}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\int_{(P_1)}^{(P_2)}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\varphi_{12}$$

这说明 P_0点的不同选择，不影响电势差。

§ 2.2 电势差和电势

P_0选择有任意性，习惯上如下选取电势零点。

理论中：对有限电荷分布，选 $\varphi_\infty = 0$ 。

对无限大电荷分布，选有限区域中的某适当点为电势零点。

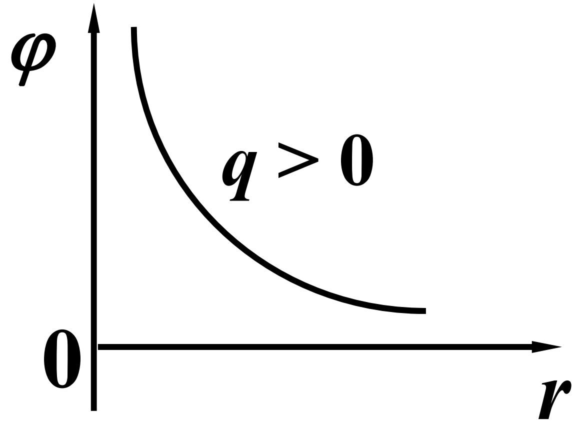
实际中：选大地或机壳、公共线为电势零点。

§ 2.2 电势差和电势

利用电势定义可以求得如下结果:

1）点电荷

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$



$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \propto \frac{1}{r}, \qquad \varphi_\infty = 0 \qquad \left(\varphi = \int_{(r)}^{(\infty)} \vec{E} \cdot d\vec{r}\right)$$

q点电荷电量,可正可负

正电荷: 电势都是正的,越远越低

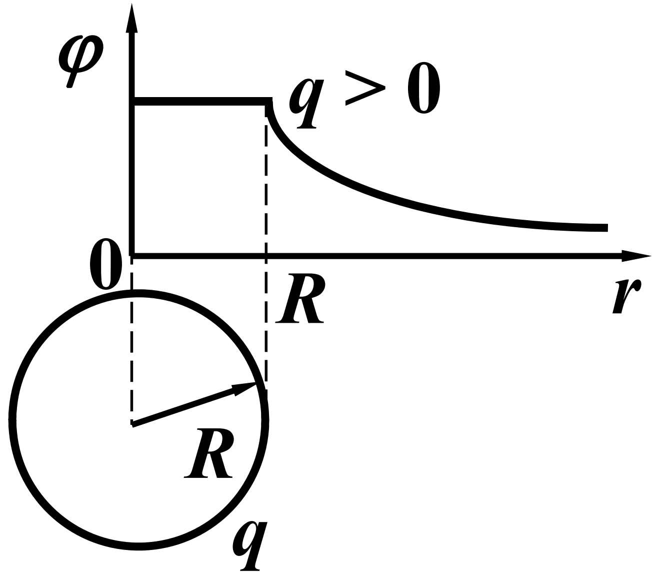
负电荷: 电势都是负的,越远越高

§ 2.2 电势差和电势

2）均匀带电球壳

$$\varphi=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} & （壳内）\\[2ex] \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} & （壳外）\end{cases}$$

$$\varphi_\infty = 0$$



壳外（点电荷）

$$\varphi=\int_{(r)}^{(\infty)}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_{(r)}^{(R)}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\int_{(R)}^{(\infty)}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

壳内

§ 2.3 电势叠加原理

由 $\varphi = \int_{(P)}^{(P_0)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 及 $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$， 得：

$$\varphi = \int_{(P)}^{(P_0)} (\sum_i \vec{E}_i) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum_i \int_{(P)}^{(P_0)} \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum_i \varphi_i$$

注意：电势零点P_0必须是共同的。

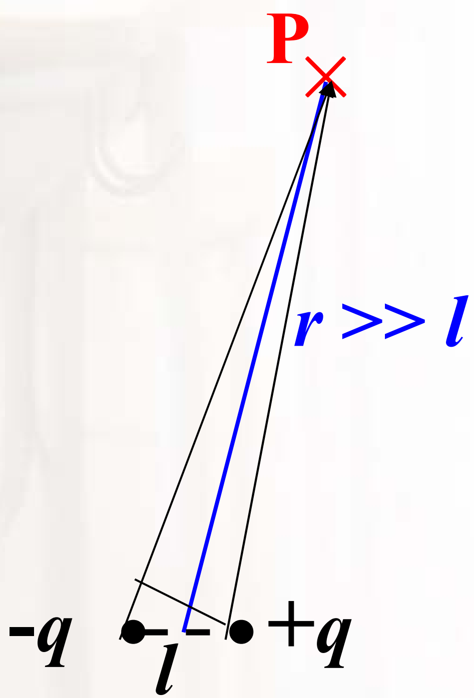
- 对点电荷系： $\varphi = \sum \dfrac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$， $\varphi_\infty = 0$
- 对连续电荷分布：$\varphi = \int_q \dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$， $\varphi_\infty = 0$

§ 2.3 电势叠加原理

电势叠加原理：

一个电荷系的电场中任意一点的电势等于每一个带电体**单独存在**时在该点所产生的电势的**代数和**。

例1: 电偶极子的电场中的电势分布



$$\varphi = \sum \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}, \quad \varphi_\infty = 0$$

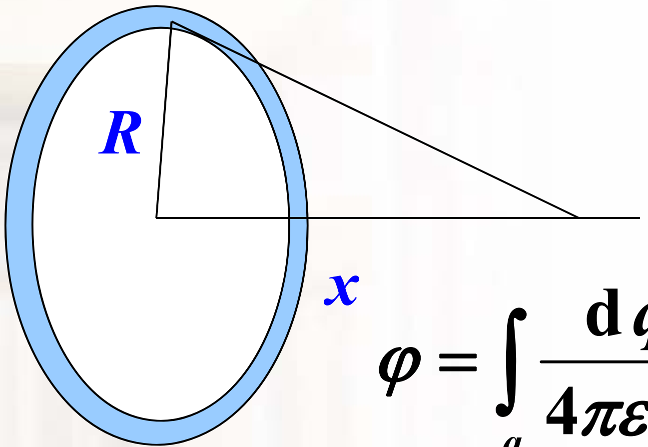
$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_-}$$

$$r_+ r_- = r^2; r_- - r_+ = l\cos\theta$$

$$\varphi = \frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}\bullet\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

例2: 均匀带电圆环(R,q), 求轴线上电势

$$\varphi = \int_q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}, \quad \varphi_\infty = 0$$



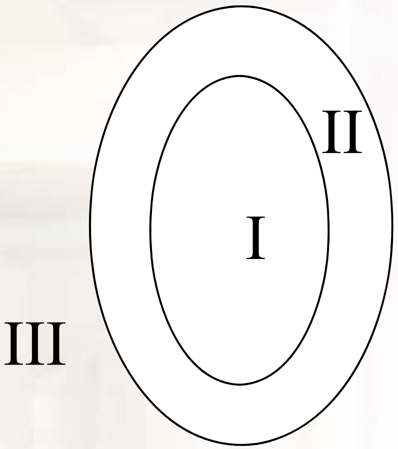
$$\varphi = \int_q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int \mathrm{dq} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

当x=0

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

例3: 两个同心圆的均匀带电球面(R_A, R_B, q_A, q_B), 求电势分布

电势叠加原理! 两个带电球面的叠加



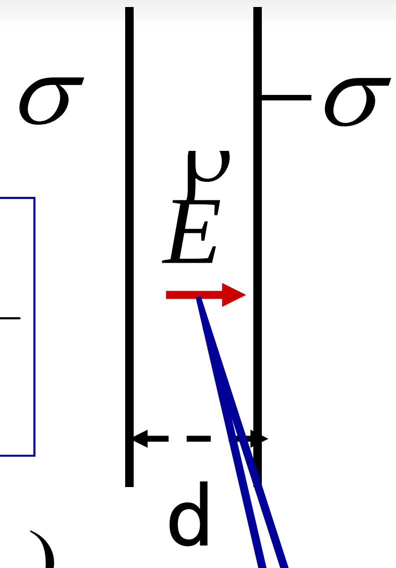
III $$\varphi_3 = \varphi_{A3} + \varphi_{B3} = \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0 r_3} + \frac{q_B}{4\pi\varepsilon_0 r_3}$$

II $$\varphi_2 = \varphi_{A2} + \varphi_{B2} = \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0 r_2} + \frac{q_B}{4\pi\varepsilon_0 R_B}$$

I $$\varphi_1 = \varphi_{A1} + \varphi_{B1} = \frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0 R_A} + \frac{q_B}{4\pi\varepsilon_0 R_B}$$

If qA=qB, 判断大小? $\varphi_1 > \varphi_2 > \varphi_3$

例4. 平行板电容器两板间的电势差



解：平行板电容器内部的场强为两板间的电势差

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$

$$\Delta\varphi = \int_{(+)}^{(-)} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_{(+)}^{(-)} E dl = E\int_{(+)}^{(-)} dl$$

$d\vec{l}$

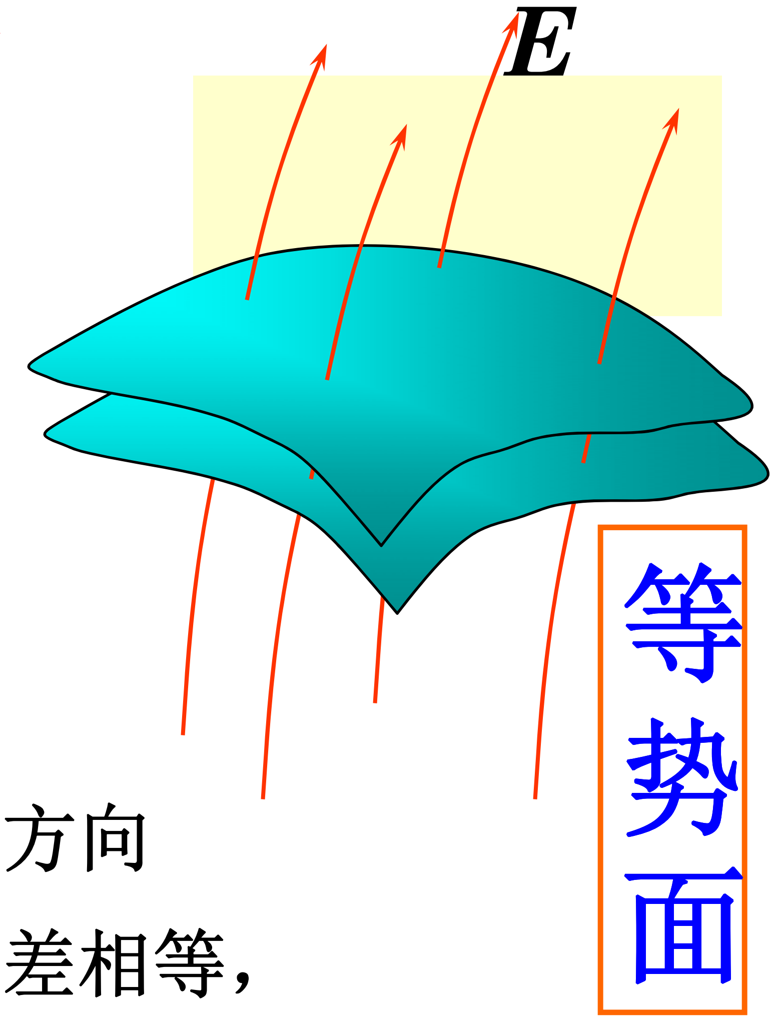
$\vec{E}, d\vec{l}$ 方向一致

均匀场

$$\boxed{\Delta\varphi = Ed}$$

§ 2.4 等势面

1. 等势面：将电场中**电势相等**的点连接起来组成的**曲面**称为等势面。

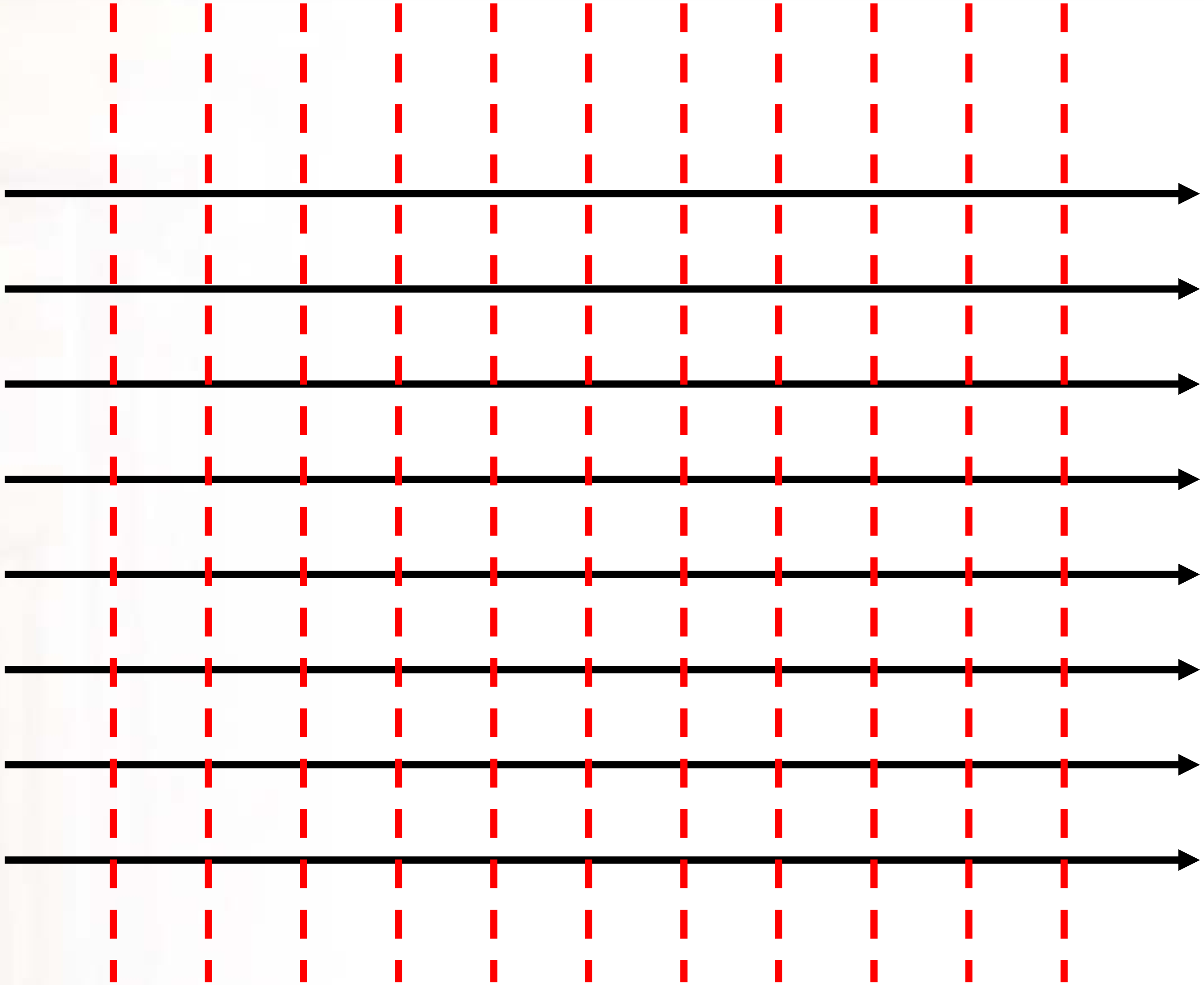


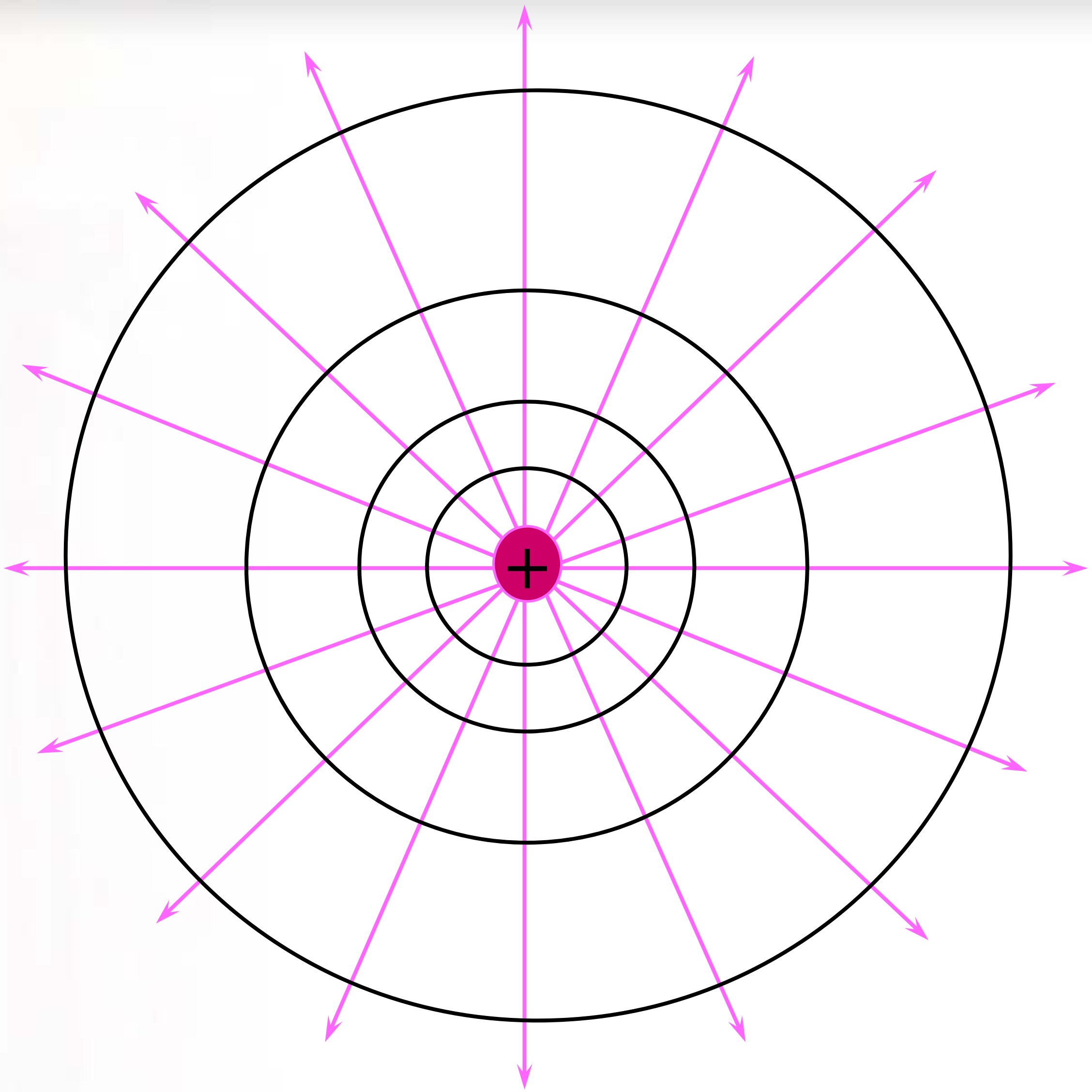
2. 等势面的性质

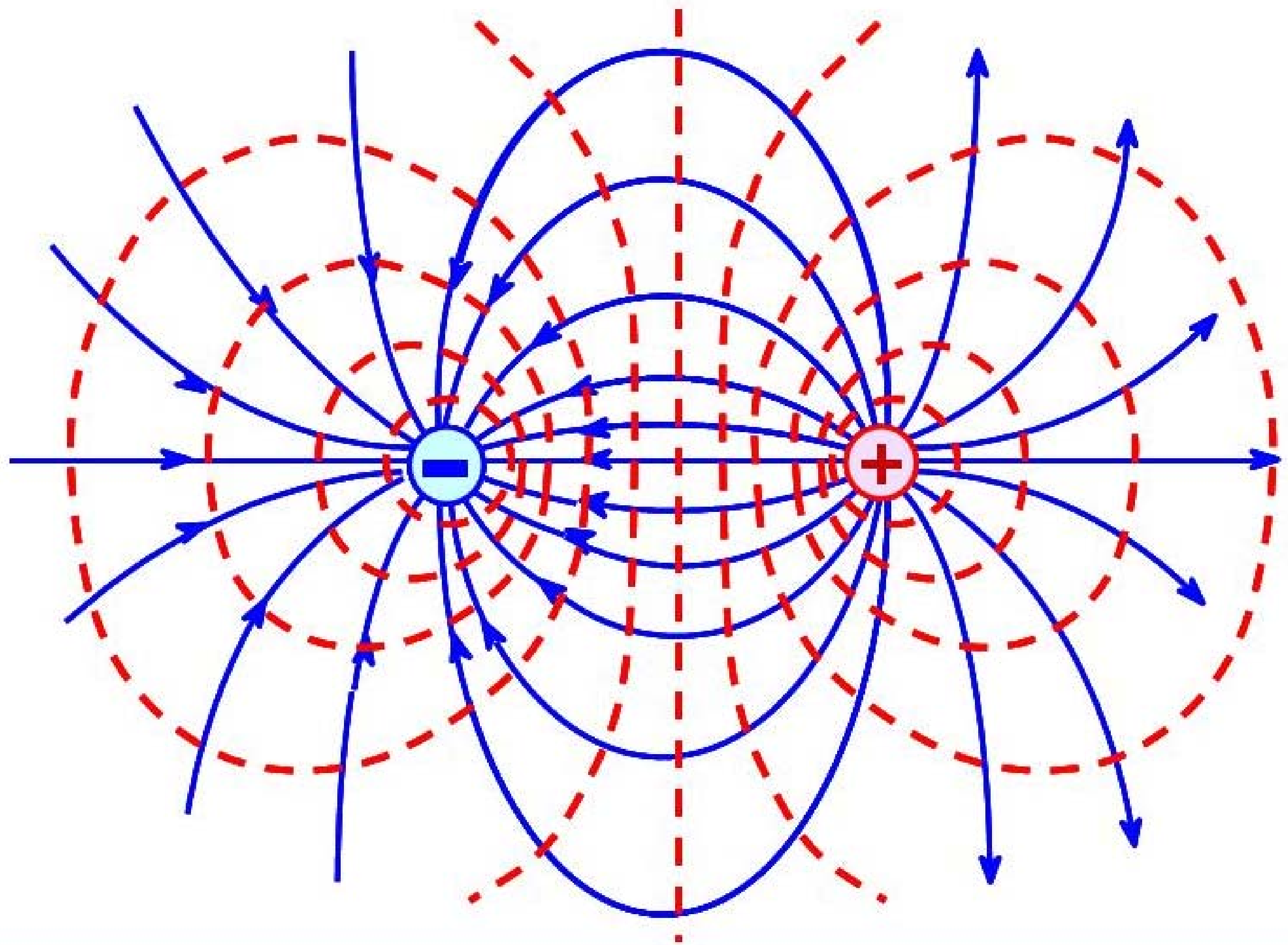
- 电力线与等势面垂直

$$\varphi_{12} = \int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

- 电力线的方向指向电势降落的方向
- 若规定两个相邻等势面的电势差相等，则等势面较密集的地方，场强较大。

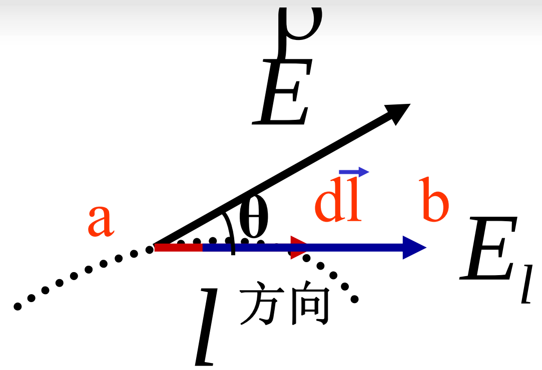






§ 2.5 电势梯度

$$\varphi_a - \varphi_b = \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad \varphi_b - \varphi_a = d\varphi$$



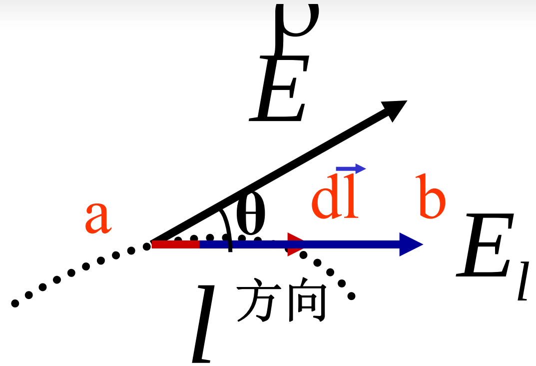
$$\varphi_a - \varphi_b = -d\varphi = \vec{E} \cdot d\vec{l} = Edl\cos\theta$$

$$E_l = E\cos\theta = -\frac{d\varphi}{dl} \qquad \boxed{E_l = -\frac{d\varphi}{dl}}$$

$\dfrac{d\varphi}{dl}$ 为电势沿 l 方向的空间变化率

电场中某点场强沿某一方向的分量等于电势沿此方向的空间变化率的负值

$$E_l = E\cos\theta = -\frac{d\varphi}{dl} \qquad \vec{E} = -\left.\frac{d\varphi}{dl}\right|_{\max}$$



$$\left.\frac{d\varphi}{dl}\right|_{\max} \longrightarrow \boxed{\text{电势梯度}}$$

电势梯度是一个**矢量**，它的方向是该点附近**电势升高最快**的方向

电场中任一点的场强等于该点电势梯度的**负值**，即场强指向**电势降低**的方向

电势是空间坐标的函数

在直角坐标系中： $\varphi(x,y,z)$

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k}\right)}$$

梯度算符 $\boldsymbol{grad} = \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

$$\boxed{\therefore \vec{E} = -grad\varphi = -\nabla\varphi}$$

$$\vec{E}=-\nabla\varphi=-\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k}\right)$$

电场强度与电势的微分关系

该公式说明，电场中某点的场强决定于电势在该点的空间变化率，而与该点电势值本身无直接关系

给出求电场的又一方法：由电荷分布 $\Rightarrow$ φ $\Rightarrow$ $\vec{E}$

谢谢！