第六节
方向导数与梯度

一、方向导数

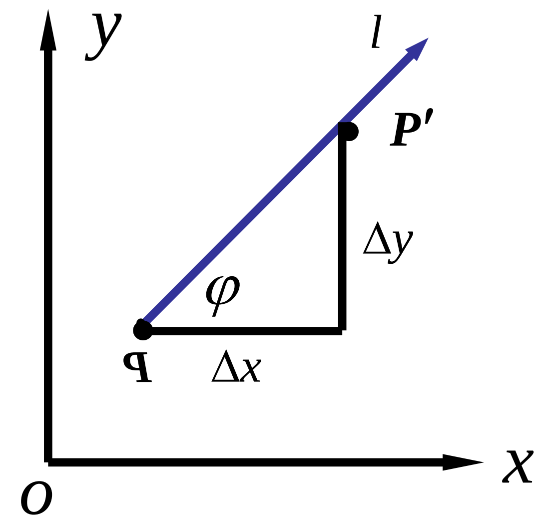
二、梯度

一、方向导数的定义

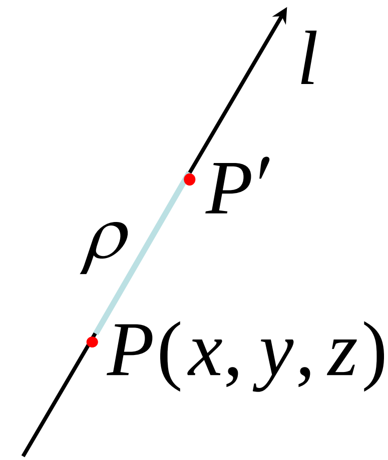
讨论函数$z = f(x, y)$在一点P沿某一方向的变化率问题.

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 的某一邻域 $U(P)$ 内有定义，自点 P 引射线 l.

设 x 轴正向到射线 l 的转角为φ ,并设 $P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$ 为l 上的另一点且 $P' \in U(p)$.（如图）



定义: 若函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 处沿方向 l (方向角为 α, β, γ) 存在下列极限:



$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f}{\rho}$$

$$= \lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\rho} \overset{\text{记作}}{=} \frac{\partial f}{\partial l}$$

$$\left(\begin{array}{l} \rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}, \\ \Delta x = \rho\cos\alpha, \; \Delta y = \rho\cos\beta, \; \Delta z = \rho\cos\gamma \end{array}\right)$$

则称 $\dfrac{\partial f}{\partial l}$ 为函数在点 P 处沿方向 l 的**方向导数**.

对于二元函数 $f(x,y)$, 在点 $P(x,y)$ 处沿方向 l (方向角为 α,β) 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\rho}$$

$$(\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2},\quad \Delta x=\rho\cos\alpha,\ \Delta y=\rho\cos\beta)$$

- 方向导数存在 $\not\rightleftarrows$ 偏导数存在

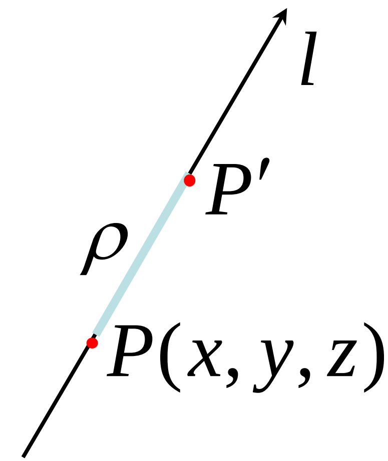
反例 (1) $z=\sqrt{x^2+y^2}$

反例(2) $z=f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

定理: 若函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 处可微，则函数在该点**沿任意方向** l 的方向导数存在，且有

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

其中α,β,γ为l的方向角.



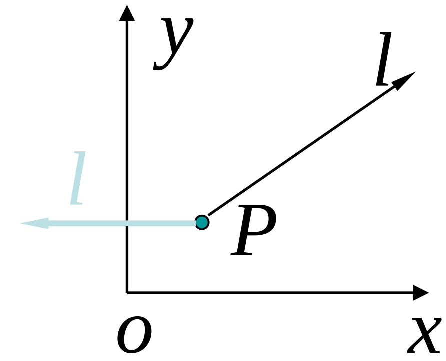
证明: 由函数 $f(x,y,z)$ 在点 P 可微，得

$$\Delta f=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial f}{\partial z}\Delta z+o(\rho)$$

$$=\rho\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right)+o(\rho)$$

故 $$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{\rho\to 0}\frac{\Delta f}{\rho}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

对于二元函数 $f(x,y)$, 在点 $P(x,y)$ 处沿方向 l (方向角为 α, β) 的方向导数为



$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{\rho \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\rho}$$

$$= f_x(x,y)\cos\alpha + f_y(x,y)\cos\beta$$

$$(\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}, \quad \Delta x = \rho\cos\alpha, \Delta y = \rho\cos\beta)$$

特别:

- 当 l 与 x 轴同向 $(\alpha = 0, \beta = \frac{\pi}{2})$时, 有 $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}$
- 当 l 与 x 轴反向 $(\alpha = \pi, \beta = \frac{\pi}{2})$时, 有 $\frac{\partial f}{\partial l} = -\frac{\partial f}{\partial x}$

关系

- 可微 $\overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}$ 方向导数存在 $\overset{\not\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}$ 偏导数存在

例1. 求函数 $u = x^2 yz$ 在点 $P(1, 1, 1)$ 沿向量 $\vec{l} = (2, -1, 3)$ 的方向导数 .

解: 向量 $\vec{l}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}, \quad \cos\beta = \frac{-1}{\sqrt{14}}, \quad \cos\gamma = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$\therefore \left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_P = \left.\left(2xyz \cdot \frac{2}{\sqrt{14}} - x^2 z \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} + x^2 y \cdot \frac{3}{\sqrt{14}}\right)\right|_{(1,1,1)}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{14}}$$

例2. 函数$u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$在点$A(1,0,1)$处沿点A指向$B(3,-2,2)$方向的方向导数是 $\underline{\;\;1/2\;\;}$.

提示: $\overrightarrow{AB}=(2,-2,1)$, 则

$$\vec{l}=\overrightarrow{AB}^{\,0}=\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A=\left.\frac{\mathrm{d}\ln(x+1)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=\frac{1}{2},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A=\left.\frac{\mathrm{d}\ln(1+\sqrt{y^2+1})}{\mathrm{d}\,y}\right|_{y=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ \frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=\frac{1}{2}$$

例 3 求函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在点（1，1）沿与 x 轴方向夹角为 α 的方向射线 $\vec{l}$ 的方向导数.并问在怎样的方向上此方向导 数有

（1）最大值；（2）最小值；（3）等于零？

解 由方向导数的计算公式知

$$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{(1,1)} = f_x(1,1)\cos\alpha + f_y(1,1)\sin\alpha$$

$$=(2x-y)\big|_{(1,1)}\cos\alpha + (2y-x)\big|_{(1,1)}\sin\alpha,$$

$$=\cos\alpha+\sin\alpha \quad =\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4}),$$

故（1）当$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$时，　方向导数达到最大值$\sqrt{2}$;

（2）当$\alpha=\dfrac{5\pi}{4}$时，　方向导数达到最小值$-\sqrt{2}$;

（3）当$\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$和$\alpha=\dfrac{7\pi}{4}$时，　方向导数等于 0.

二、梯度

方向导数公式 $\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$

令向量 $\vec{G}=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)$

$$\vec{l}^{\,0}=(\cos\alpha\ ,\cos\beta\ ,\cos\gamma)$$

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\vec{G}\cdot\vec{l}^{\,0}=|\vec{G}|\cos(\vec{G},\vec{l}^{\,0})\quad(|\vec{l}^{\,0}|=1\ )$$

当 $\vec{l}^{\,0}$ 与 $\vec{G}$ 方向一致时, **方向导数取最大值:**

$$\max\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)=|\vec{G}|$$

这说明 $\vec{G}:\begin{cases}\text{方向：}f\ \text{变化率最大的方向}\\\text{模：}f\ \text{的最大变化率之值}\end{cases}$

1. 定义

向量 $\vec{G}$ 称为函数 $f(P)$ 在点 P 处的梯度 (gradient), 记作 $\operatorname{grad} f$, 即

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

同样可定义二元函数 $f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 处的梯度

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

说明: 函数的方向导数为梯度在该方向上的投影.

2. 梯度的几何意义

问题：函数在点 P 沿哪一方向增加的速度最快？

定义 设函数$z=f(x,y)$在平面区域 D 内具有一阶连续偏导数，则对于每一点$P(x,y)\in D$，都可定出一个向量$\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$，这向量称为函数$z=f(x,y)$在点$P(x,y)$的梯度，记为

$$gradf(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}.$$

设$\vec{e}=\cos\varphi\vec{i}+\sin\varphi\vec{j}$是方向 $\vec{l}$ 上的单位向量,

由方向导数公式知

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi=\{\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\}\cdot\{\cos\varphi,\sin\varphi\}$$

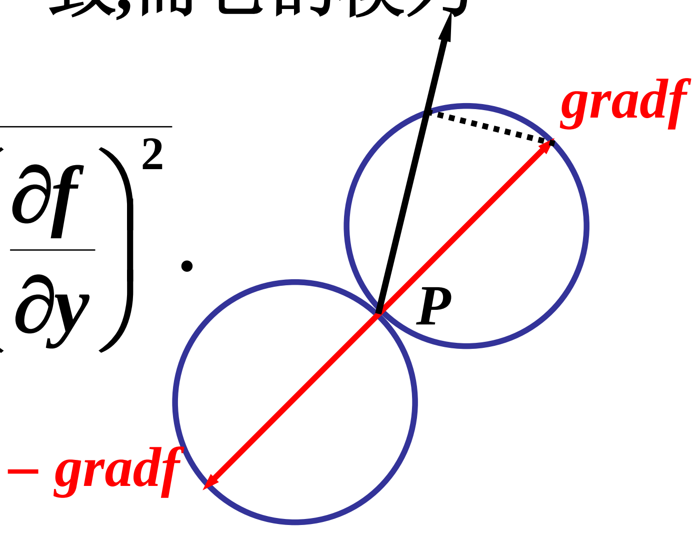
$$=\mathbf{grad}f(x,y)\cdot\vec{e}=|\mathbf{grad}f(x,y)|\cos\theta,$$

其中$\theta=(\mathbf{grad}f(x,y),\vec{e})$

当 $\cos(\mathbf{grad}f(x,y),\vec{e})=1$时, $\frac{\partial f}{\partial l}$有最大值.

结论 函数在某点的梯度是这样一个向量，它的方向与取得最大方向导数的方向一致,而它的模为方向导数的最大值．梯度的模为

$$|\,\mathbf{grad}f(x,y)\,|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$



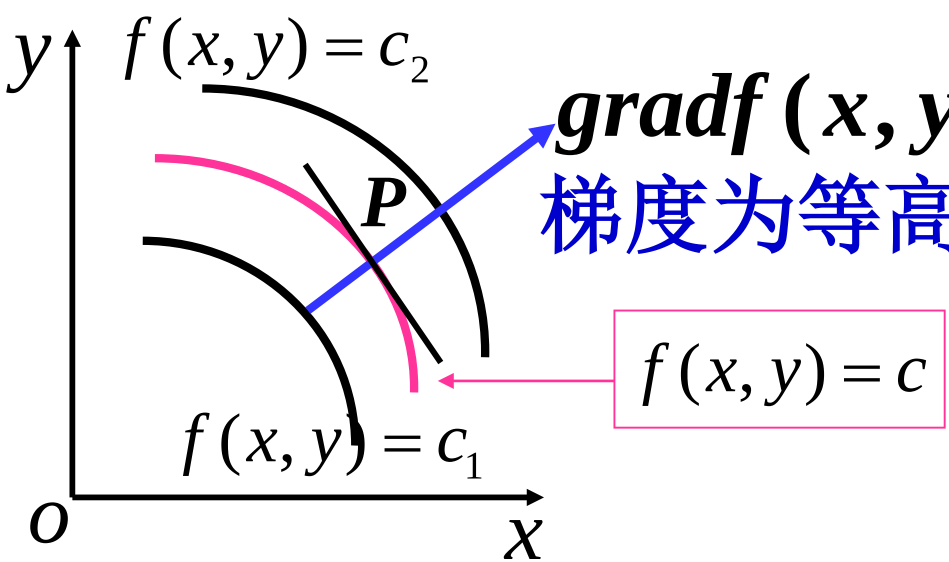
当$\dfrac{\partial f}{\partial x}$不为零时，

x轴到梯度的转角的正切为 $\tan\theta=\dfrac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}}.$

在几何上 $z=f(x,y)$ 表示一个曲面

曲面被平面 $z=c$ 所截得 $\begin{cases} z=f(x,y) \\ z=c \end{cases}$,

所得曲线在xoy面上投影如图

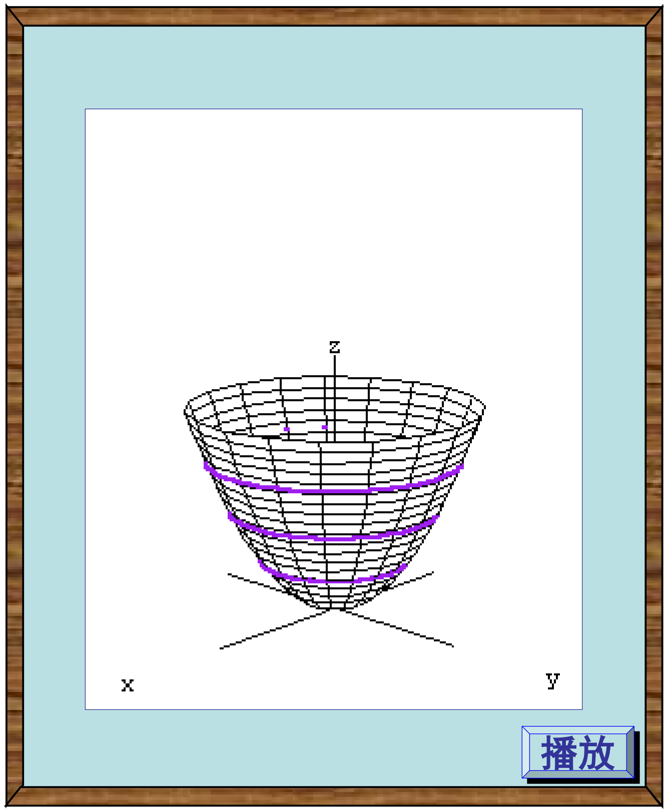


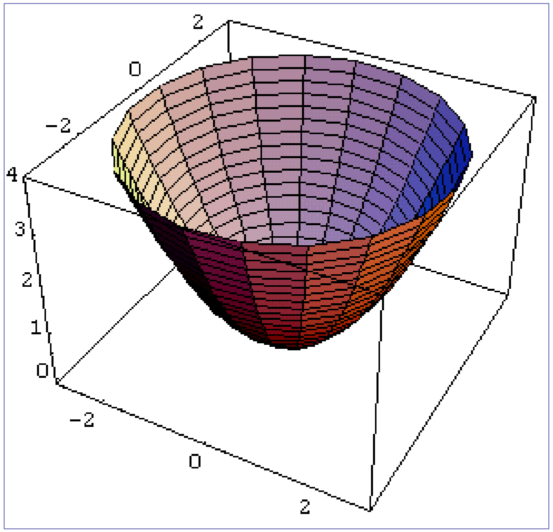
$\boldsymbol{gradf(x,y)}$

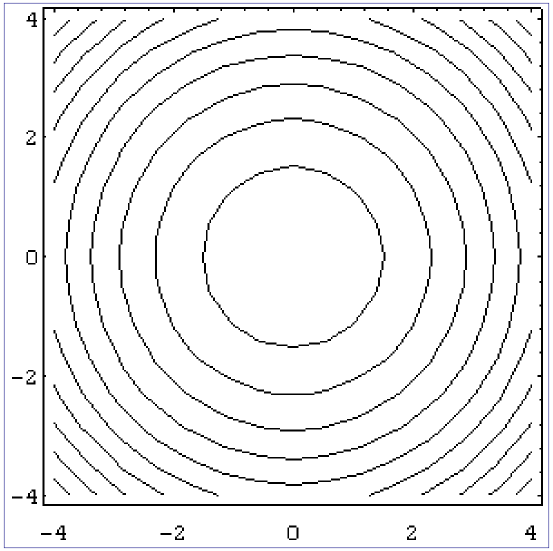
梯度为等高线上的法向量

等高线

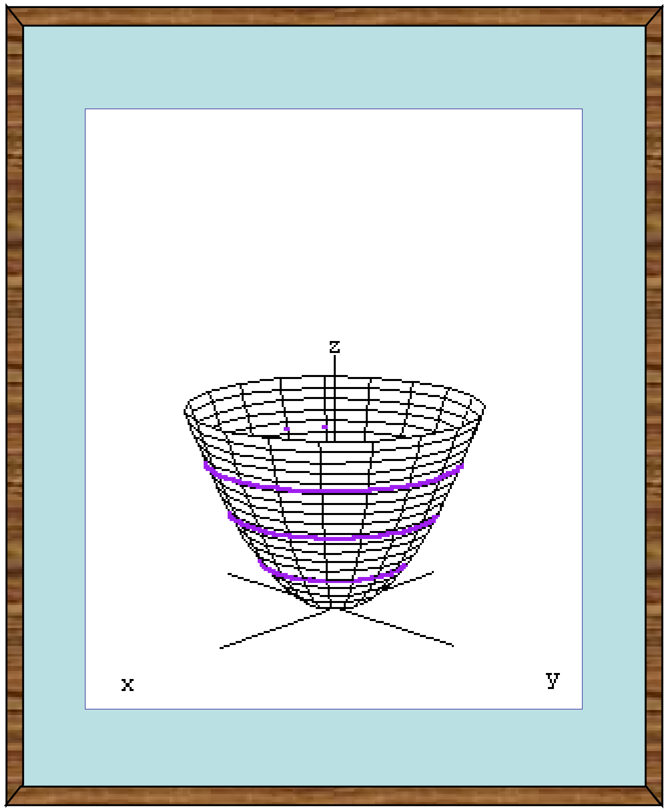
等高线的画法

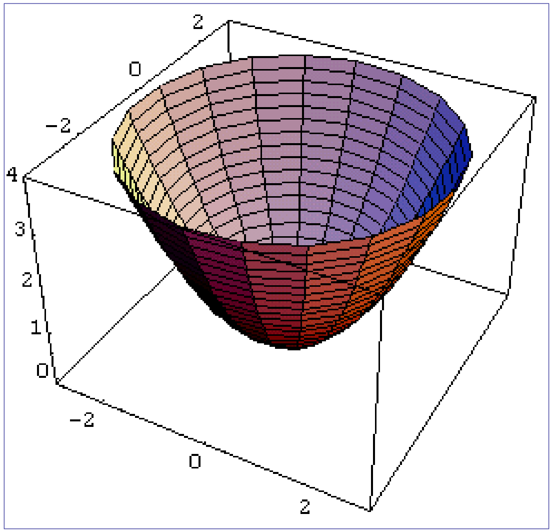


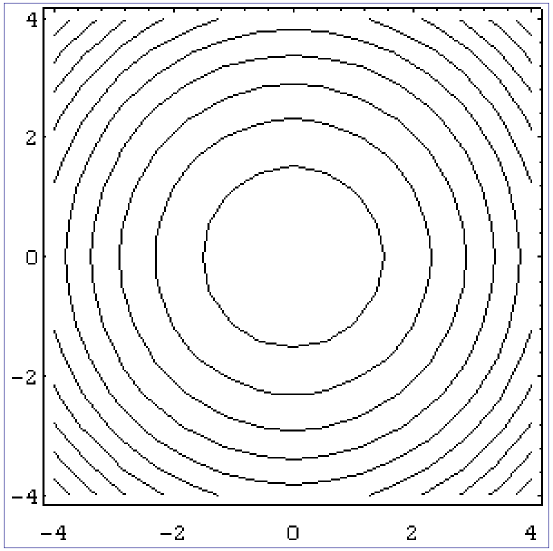




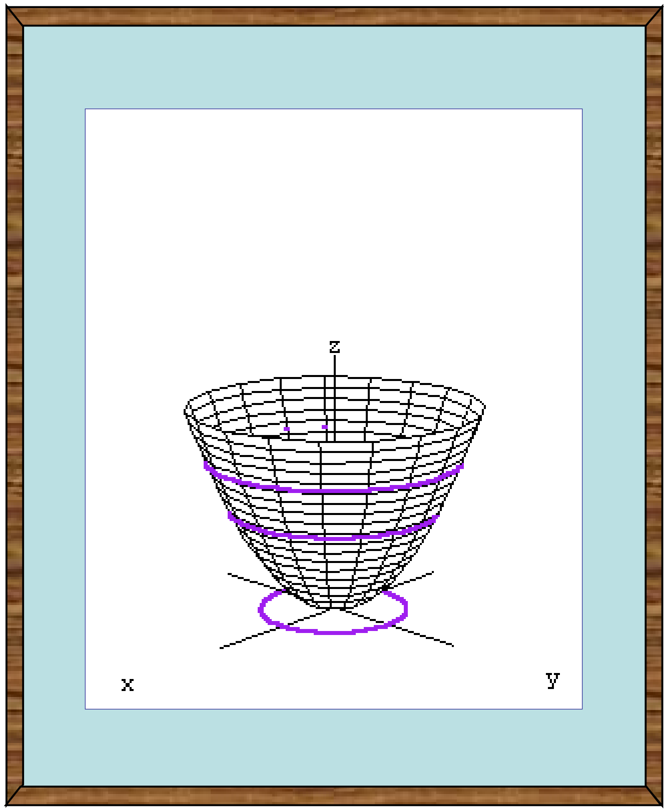
等高线的画法

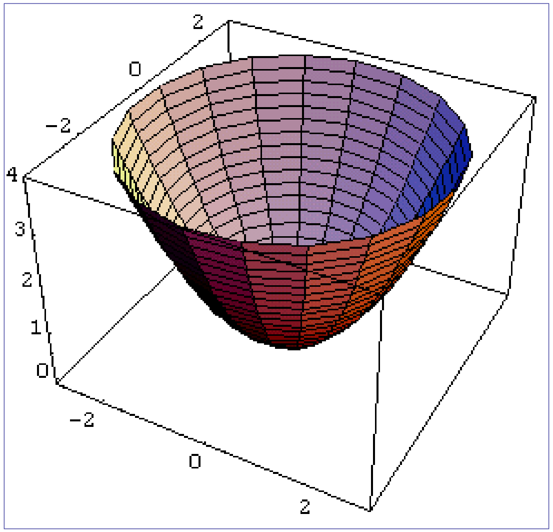


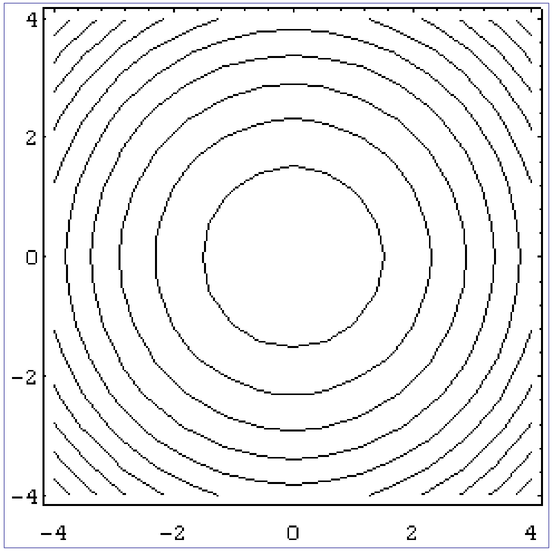




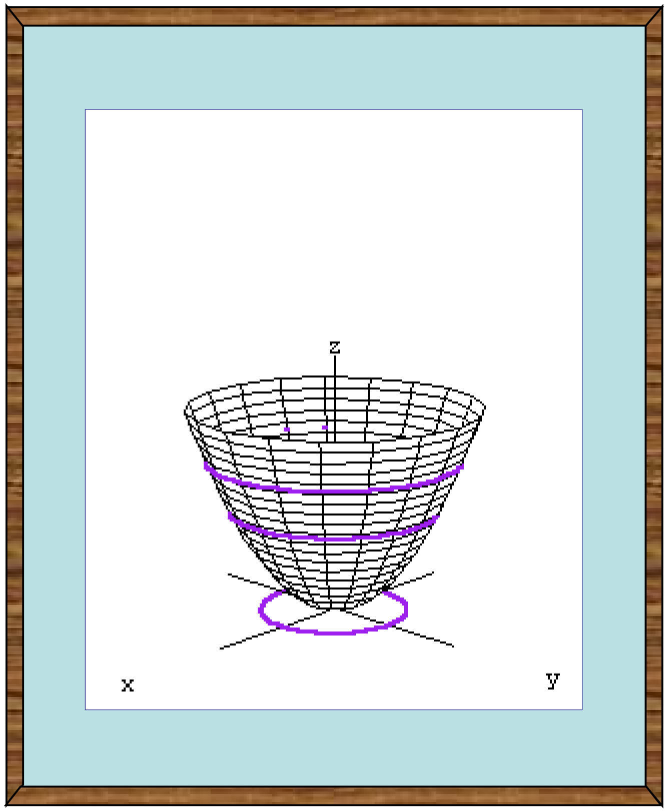
等高线的画法

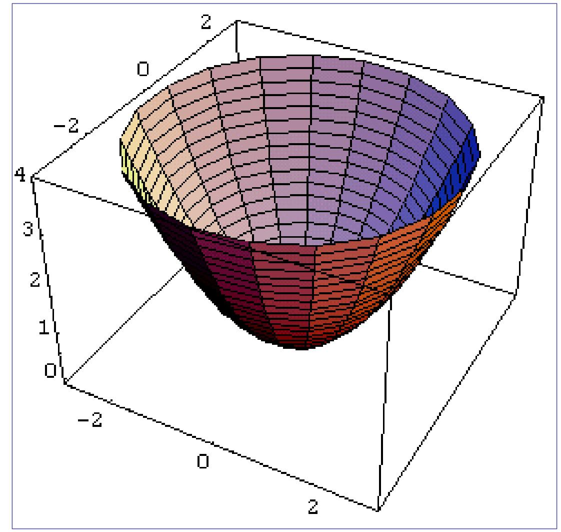


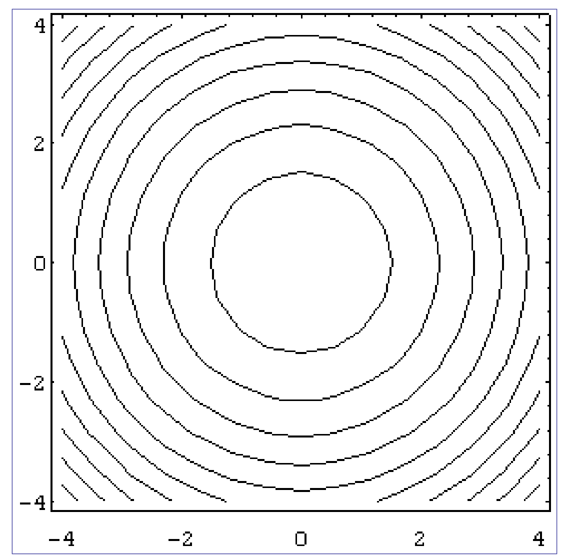




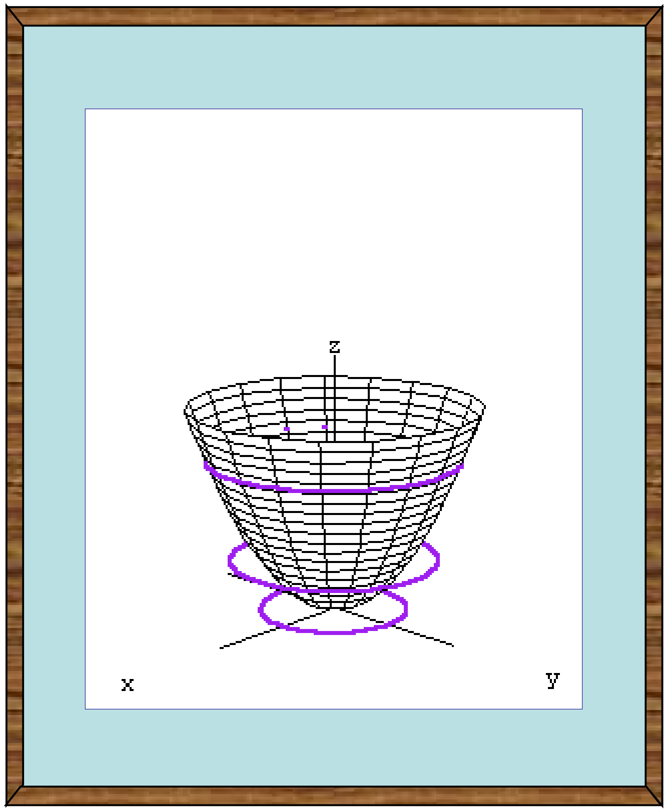
等高线的画法

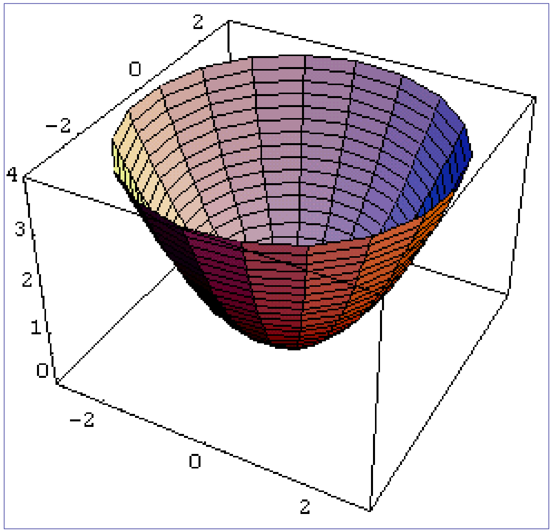


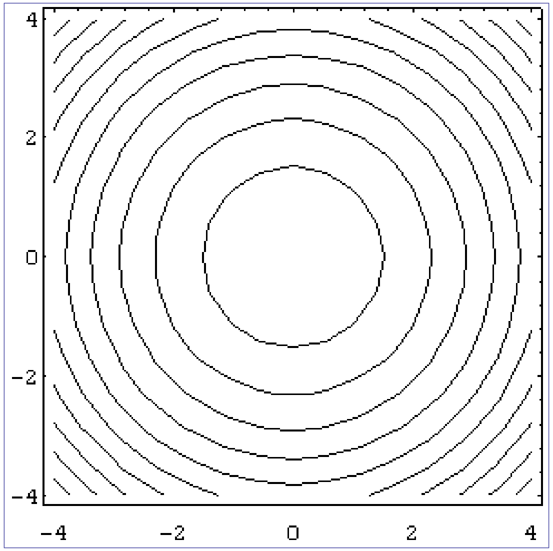




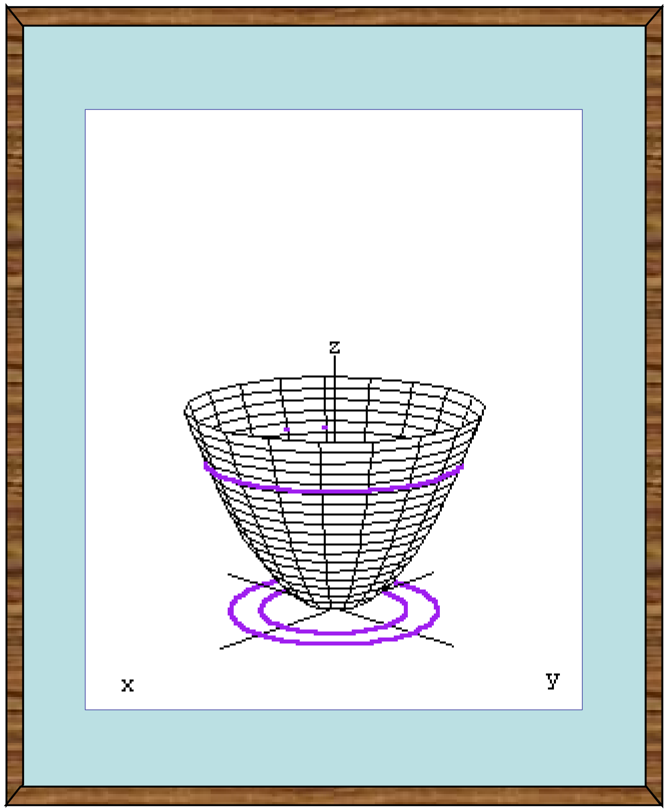
等高线的画法

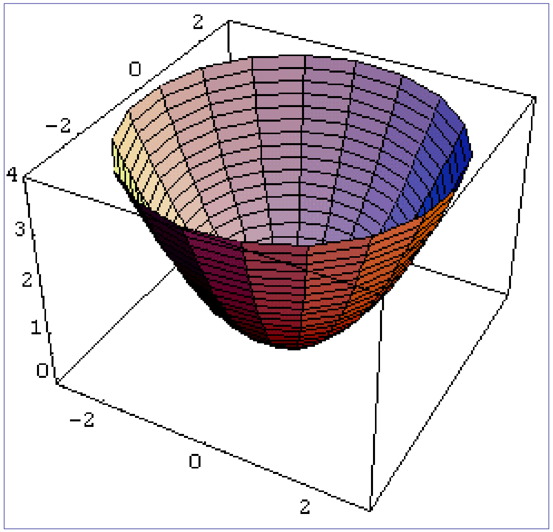


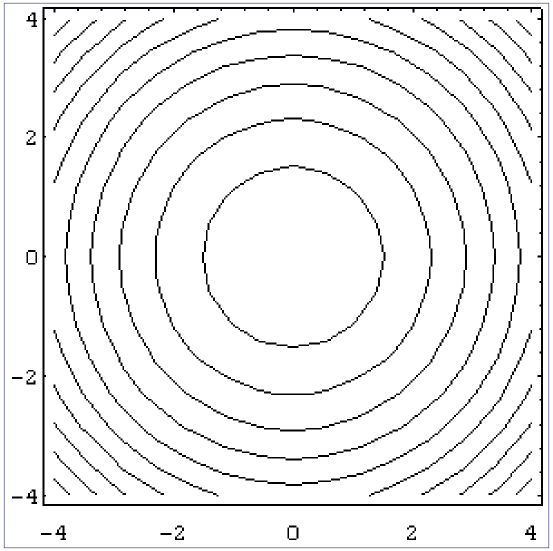




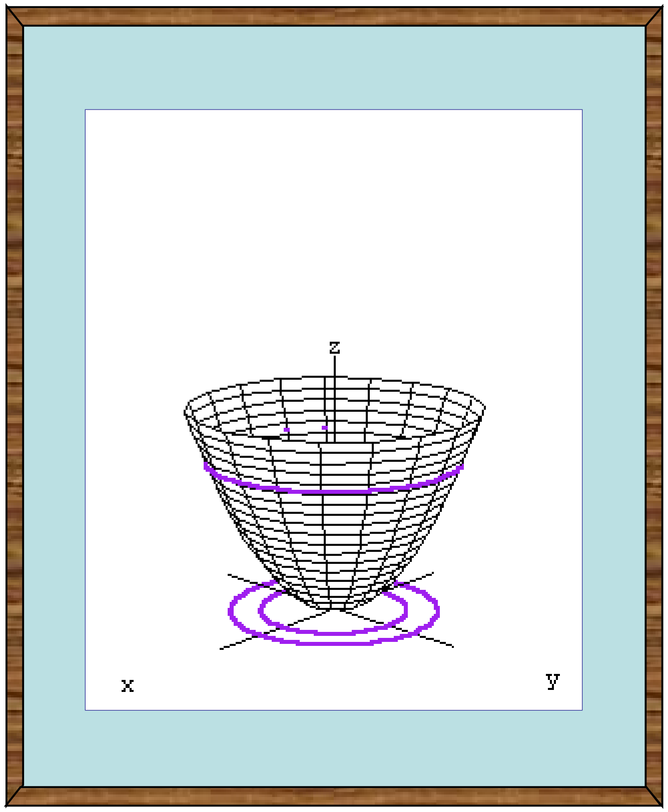
等高线的画法

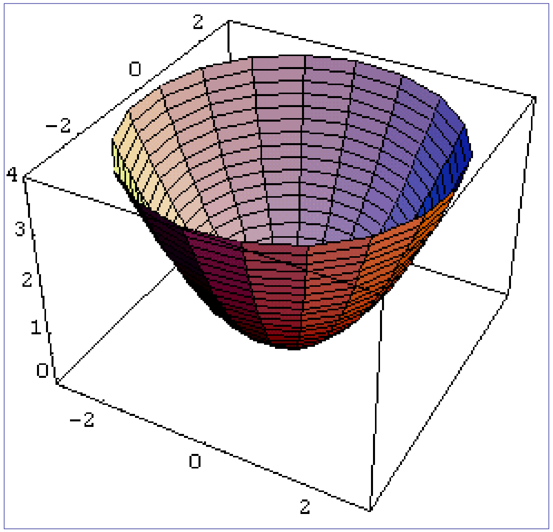


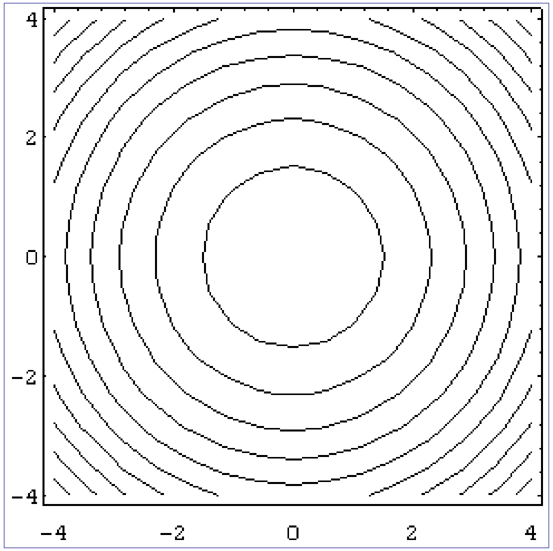




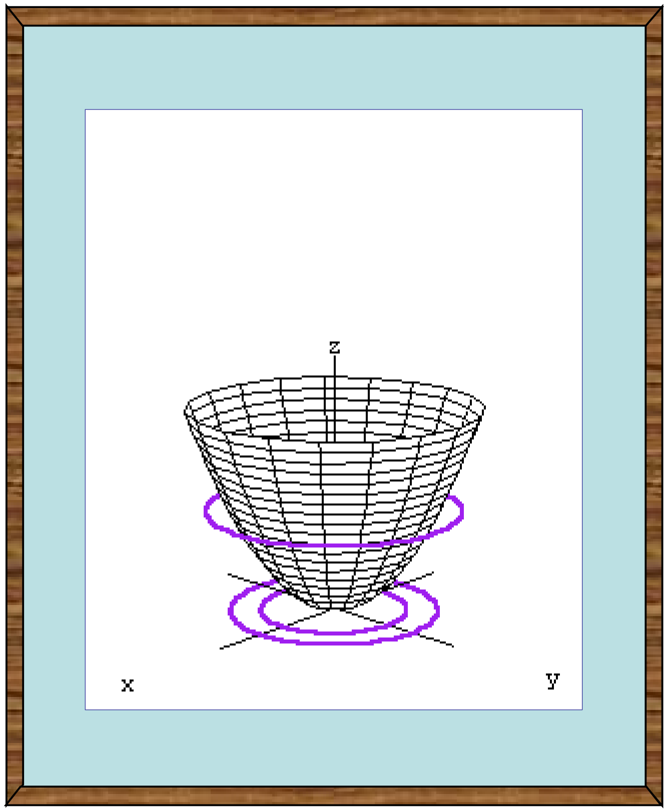
等高线的画法

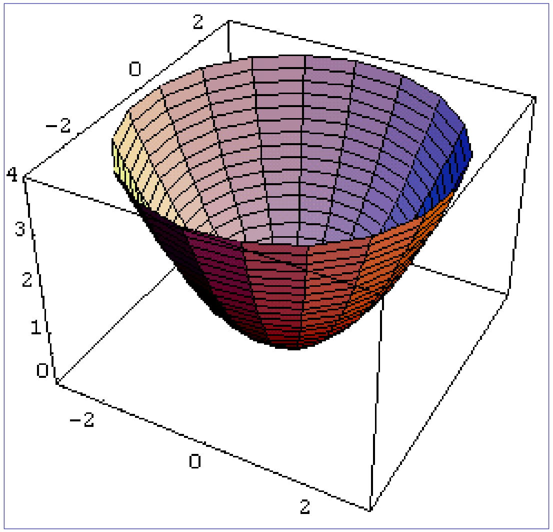


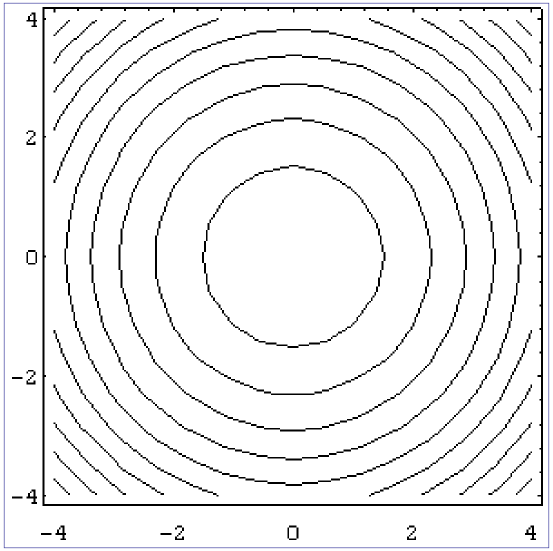




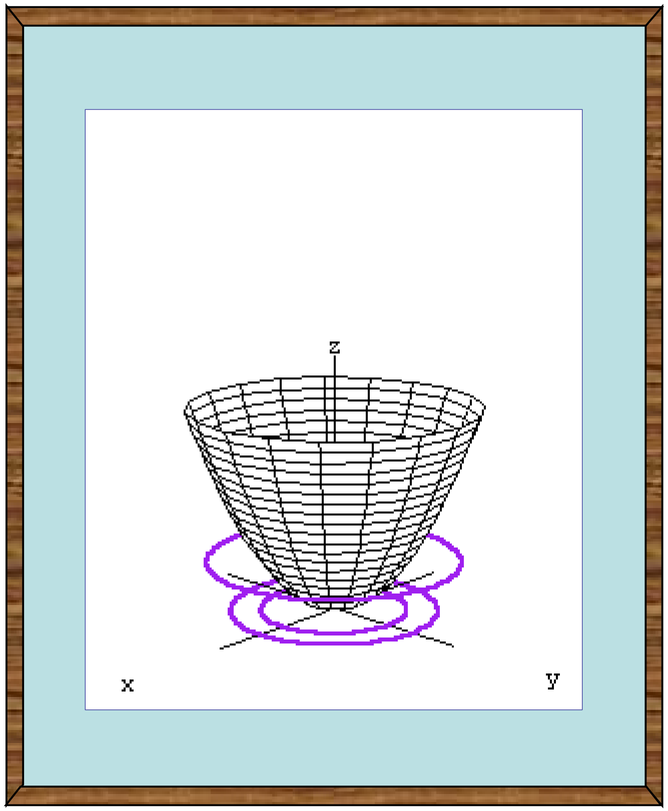
等高线的画法

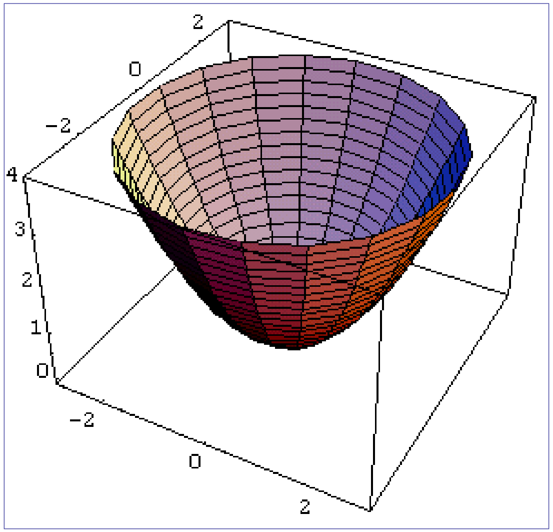


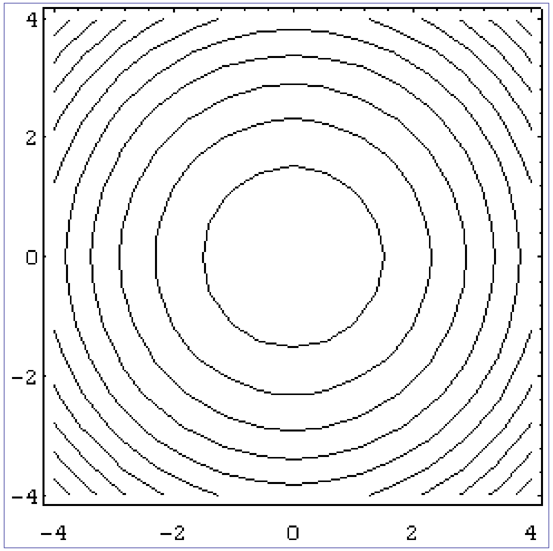




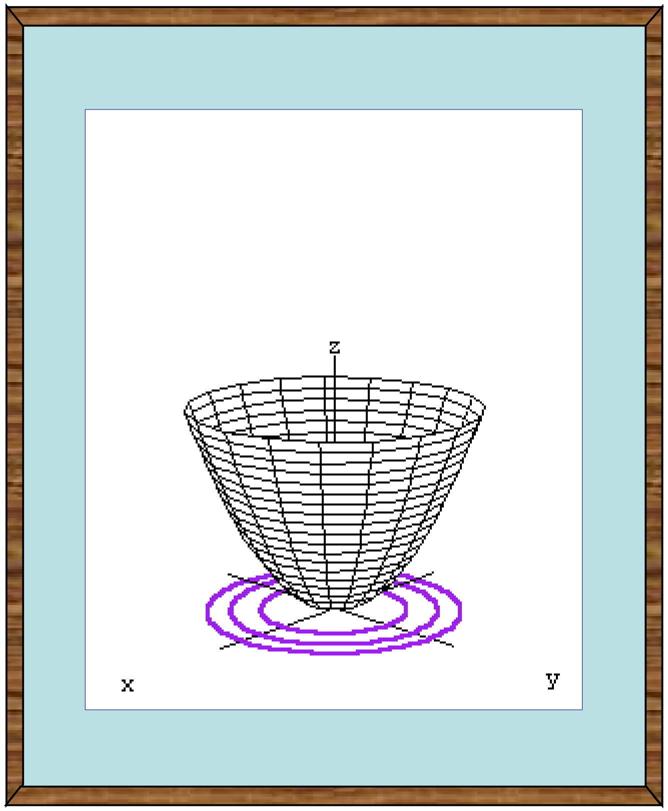
等高线的画法

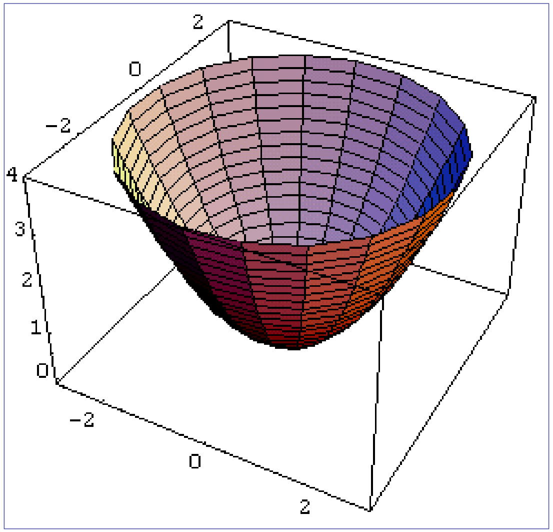


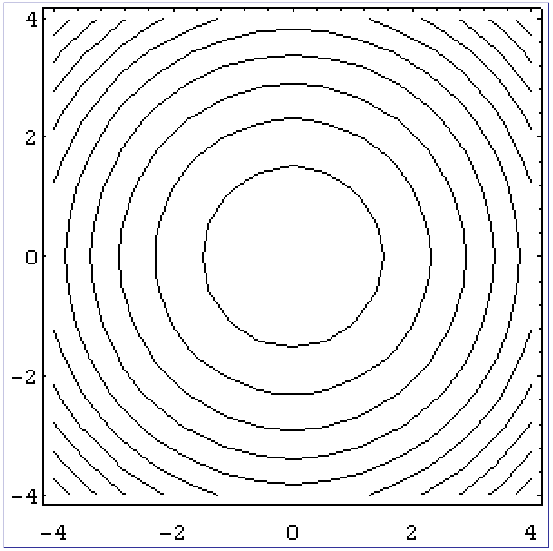




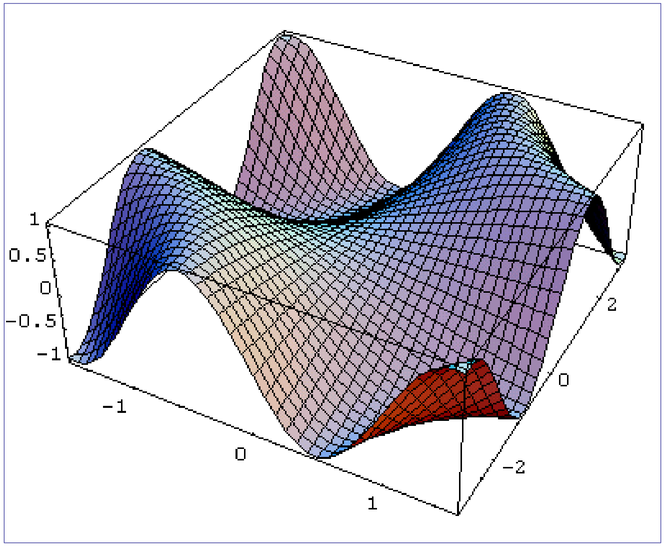
等高线的画法

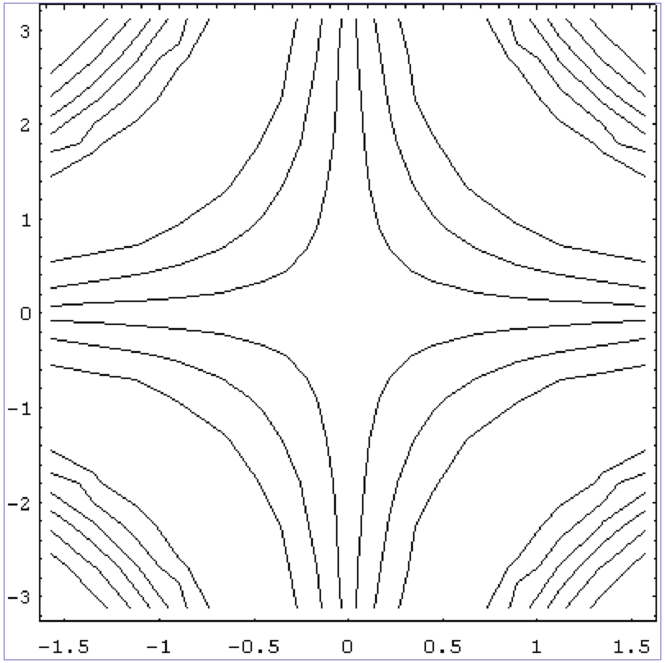






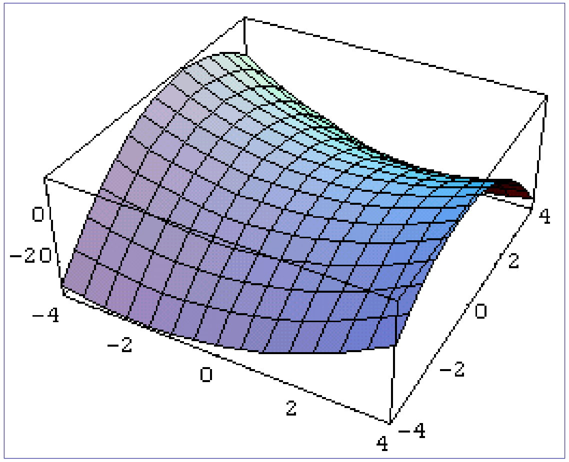
例如， 函数 $z = \sin xy$ 图形及其等高线图形.

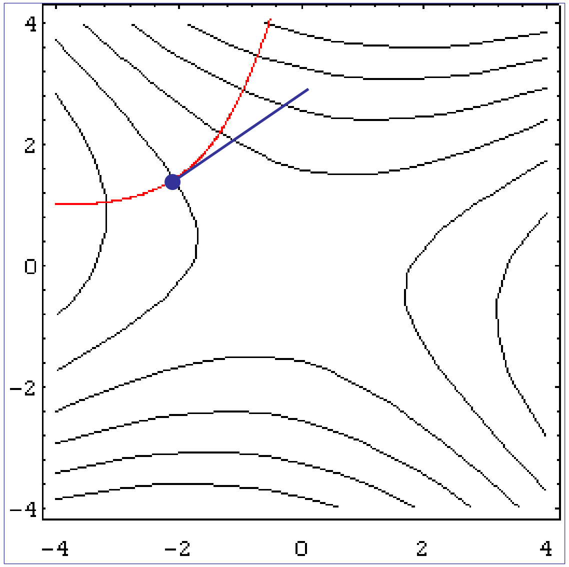




梯度与等高线的关系：

函数 $z = f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的梯度的方向与点 P 的等高线 $f(x,y)=c$ 在这点的法线的一个方向相同，且从数值较低的等高线指向数值较高的等高线，而梯度的模等于函数在这个法线方向的方向导数.





梯度的概念可以推广到三元函数

三元函数$u = f(x, y, z)$在空间区域 G 内具有一阶连续偏导数，则对于每一点$P(x, y, z) \in G$，都可定义一个向量(梯度)

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}.$$

类似于二元函数，此梯度也是一个向量，其方向与取得最大方向导数的方向一致，其模为方向导数的最大值.

3. 梯度的基本运算公式

(1) $\operatorname{grad} C = \vec{0}$

(2) $\operatorname{grad}(C u) = C \operatorname{grad} u$

(3) $\operatorname{grad}(u \pm v) = \operatorname{grad} u \pm \operatorname{grad} v$

(4) $\operatorname{grad}(u v) = u \operatorname{grad} v + v \operatorname{grad} u$

(5) $\operatorname{grad} f(u) = f'(u) \operatorname{grad} u$

例3. 函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度 $\operatorname{grad} u\big|_M = \underline{\frac{2}{9}(1,2,-2)}$

解: $\operatorname{grad} u\big|_M = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right)\Big|_{(1,2,-2)}$

令 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 则 $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{r^2}\cdot 2x$

注意 x, y, z 具有轮换对称性

$$= \left(\frac{2x}{r^2}, \frac{2y}{r^2}, \frac{2z}{r^2}\right)\Big|_{(1,2,-2)} = \frac{2}{9}(1,2,-2)$$

例4. 设 $f(r)$ 可导，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 为点 $P(x,y,z)$ 处矢径 $\vec{r}$ 的模，试证 $\operatorname{grad} f(r)=f'(r)\vec{r}^{\,0}$.

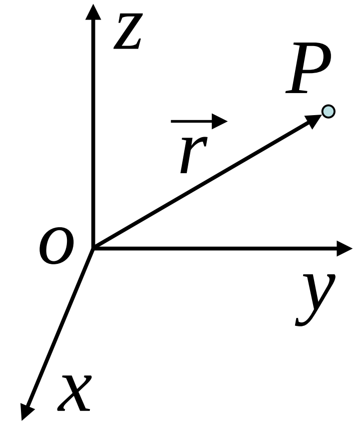
证: $\because \dfrac{\partial f(r)}{\partial x}=f'(r)\dfrac{\partial r}{\partial x}=f'(r)\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=f'(r)\dfrac{x}{r}$

$$\frac{\partial f(r)}{\partial y}=f'(r)\frac{y}{r}, \quad \frac{\partial f(r)}{\partial z}=f'(r)\frac{z}{r}$$

$$\therefore \operatorname{grad} f(r)=\frac{\partial f(r)}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f(r)}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f(r)}{\partial z}\vec{k}$$

$$=f'(r)\frac{1}{r}(x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k})$$

$$=f'(r)\frac{1}{r}\vec{r}=f'(r)\vec{r}^{\,0}$$



内容小结

1. 方向导数

- 三元函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 沿方向 l (方向角为 α,β,γ) 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma$$

- 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 沿方向 l (方向角为 α,β)的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha$$

2. 梯度

- 三元函数 $f(x,y,z)$ 在点 $P(x,y,z)$ 处的梯度为

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

- 二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 处的梯度为

$$\operatorname{grad} f = (f_x(x,y),\ f_y(x,y))$$

3. 关系

- 可微 $\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}$ 方向导数存在 $\underset{\not\Longleftarrow}{\not\Longrightarrow}$ 偏导数存在

- $\dfrac{\partial f}{\partial l} = \operatorname{grad} f \cdot \vec{l}^{\,0}$ 梯度在方向 $\vec{l}$ 上的投影.