第五节

函数的微分

一、微分的概念

二、微分运算法则

三、微分在近似计算中的应用

四、微分在估计误差中的应用

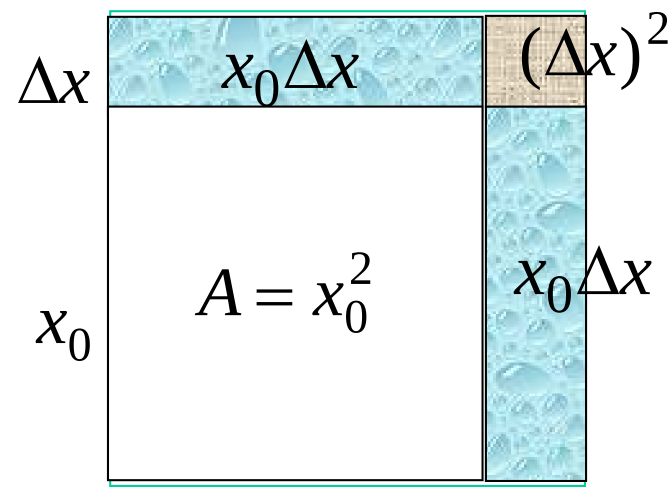
一、微分的概念

引例: 一块正方形金属薄片受温度变化的影响, 其边长由x_0变到$x_0+\Delta x$, 问此薄片面积改变了多少?

设薄片边长为 x, 面积为 A, 则 $A=x^2$, 当 x 在 x_0 取得增量Δx 时, 面积的增量为

$$\Delta A=(x_0+\Delta x)^2-{x_0}^2$$

$$=\underbrace{2x_0\Delta x}_{\text{关于}\Delta x\text{ 的线性主部}}+\underbrace{(\Delta x)^2}_{\Delta x\to 0\text{ 时为高阶无穷小}}$$



故 $\Delta A\approx \underline{2x_0\Delta x}$

称为函数在 x_0 的微分

二、微分的定义

定义: 若函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的增量可表示为

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x)$$

(A 为不依赖于 Δx 的常数)

则称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 **可微,** 而 $A\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 的**微分**, 记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f$, 即

$$\mathrm{d}y = A\Delta x$$

由定义知:

(1) dy是自变量的改变量Δx的线性函数;

(2) $\Delta y - dy = o(\Delta x)$是比$\Delta x$高阶无穷小;

(3) 当$A \neq 0$时,dy与Δy是等价无穷小;

$$\because \frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{o(\Delta x)}{A \cdot \Delta x} \to 1 \quad (x \to 0).$$

(4) A是与Δx无关的常数,但与$f(x)$和x_0有关;

(5) 当$|\Delta x|$很小时,$\Delta y \approx dy \quad$ (线性主部).

三、可微的条件

定理 函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微的充要条件是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，且 $A = f'(x_0)$.

证 (1) 必要性 $\because f(x)$ 在点 x_0 可微，

$$\therefore \Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \qquad \therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

则 $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A.$$

即函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，且 $A = f'(x_0)$.

(2) 充分性　$\because$ 函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导,

$\therefore \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$,　　即 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$,

从而 $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot (\Delta x)$,　$\because \alpha \to 0 \quad (\Delta x \to 0)$,

$$= f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x),$$

$\because$ 函数 $f(x)$ 在点 x_0 可微, 且 $f'(x_0) = A$.

$\therefore$ 可导 $\Leftrightarrow$ 可微.　　$A = f'(x_0)$.

函数 $y = f(x)$ 在任意点 x 的微分, 称为函数的微分, 记作 dy 或 $df(x)$, 即 $\underline{dy = f'(x)\Delta x}$.

例1 求函数 $y=x^3$ 当 $x=2$, $\Delta x=0.02$时的微分.

解 $\because dy=(x^3)'\Delta x=3x^2\Delta x.$

$$\therefore dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}}=3x^2\Delta x\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}}=0.24.$$

通常把自变量x的增量Δx称为自变量的微分,记作dx, 即$dx=\Delta x$.

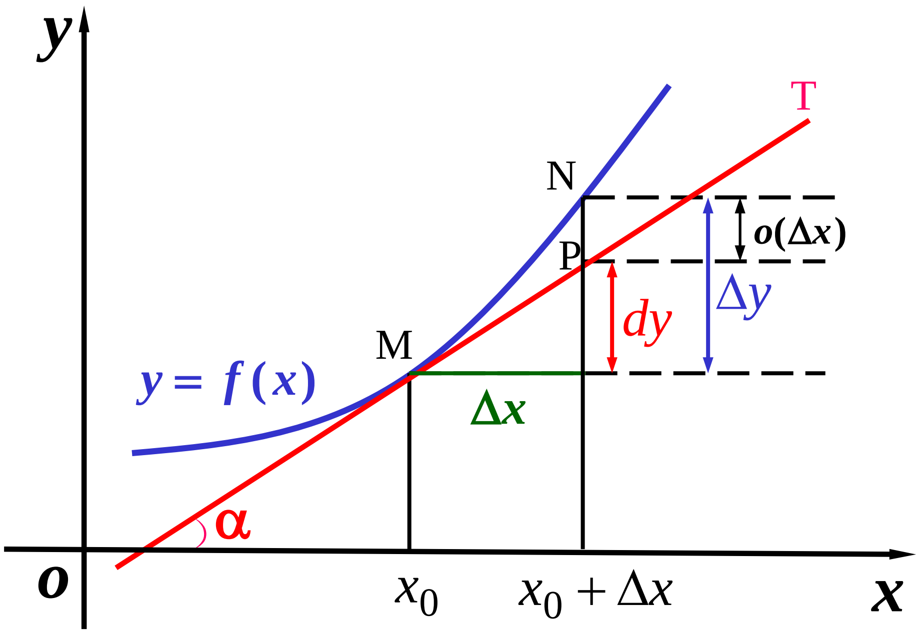
$$\therefore dy=f'(x)dx. \longrightarrow \frac{dy}{dx}=f'(x).$$

即函数的微分dy与自变量的微分dx之商等于该函数的导数. 导数也叫"微商".

四、微分的几何意义

几何意义:(如图)

当Δy是曲线的纵坐标增量时，dy就是切线纵坐标对应的增量.



当$|\Delta x|$很小时，在点M的附近，

切线段MP可近似代替曲线段MN.

五、微分的求法

$$dy = f'(x)dx$$

求法： 计算函数的导数，乘以自变量的微分.

1.基本初等函数的微分公式（见课本）

2. 函数和、差、积、商的微分法则

$$d(u \pm v) = du \pm dv \qquad d(Cu) = Cdu$$

$$d(uv) = vdu + udv \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

例2 设 $y=\ln(x+e^{x^2})$, 求dy.

解 $\because y'=\dfrac{1+2xe^{x^2}}{x+e^{x^2}}$, $\quad\therefore dy=\dfrac{1+2xe^{x^2}}{x+e^{x^2}}dx$.

六、微分形式的不变性

设函数 $y = f(x)$有导数 $f'(x)$,

(1) 若x是自变量时， $dy = f'(x)dx$;

(2) 若x是中间变量时，即另一变量 t 的可微函数 $x = \varphi(t)$, 则 $dy = f'(x)\varphi'(t)dt$

$\because \varphi'(t)dt = dx$, $\therefore dy = f'(x)dx$.

结论: 无论 x是自变量还是中间变量，函数 $y = f(x)$的微分形式总是 $\boxed{dy = f'(x)dx}$

微分形式的不变性

例3　设 $y=\sin(2x+1)$, 求dy.

解　$\because\ y=\sin u,\ u=2x+1.$

$$\therefore dy=\cos u du\ \ =\cos(2x+1)d(2x+1)$$

$$=\cos(2x+1)\cdot 2dx=2\cos(2x+1)dx.$$

例4　设 $y=e^{-ax}\sin bx$, 求dy.

解　$dy=e^{-ax}\cdot\cos bx d(bx)+\sin bx\cdot e^{-ax}d(-ax)$

$$=e^{-ax}\cdot\cos bx\cdot bdx+\sin bx\cdot e^{-ax}\cdot(-a)dx$$

$$=e^{-ax}(b\cos bx-a\sin bx)dx.$$

例5 在下列等式左端的括号中填入适当的函数,使等式成立.

(1) $d(\quad) = \cos\omega t dt$;　　(2) $d(\sin x^2) = (\quad)d(\sqrt{x})$.

解 (1) $\because d(\sin\omega t) = \omega\cos\omega t dt$,

$$\therefore \cos\omega t dt = \frac{1}{\omega}d(\sin\omega t) = d(\frac{1}{\omega}\sin\omega t);$$

$$\therefore d(\frac{1}{\omega}\sin\omega t + C) = \cos\omega t dt.$$

(2) $$\because \frac{d(\sin x^2)}{d(\sqrt{x})} = \frac{2x\cos x^2 dx}{\frac{1}{2\sqrt{x}}dx} = 4x\sqrt{x}\cos x^2,$$

$$\therefore d(\sin x^2) = (4x\sqrt{x}\cos x^2)d(\sqrt{x}).$$

七、计算函数增量的近似值

若$y = f(x)$在点x_0处的导数$f'(x_0) \neq 0$,且$|\Delta x|$很小时,

$$\Delta y\Big|_{x=x_0} \approx dy\Big|_{x=x_0} = f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

例1 半径10厘米的金属圆片加热后,半径伸长了0.05厘米,问面积增大了多少?

解 设$A = \pi r^2$, $r = 10$厘米, $\Delta r = 0.05$厘米.

$\therefore$ $\Delta A \approx d = 2\pi r\cdot\Delta r = 2\pi\times 10\times 0.05 = \pi$ (厘米^2).

八、计算函数的近似值

1.求$f(x)$在点$x = x_0$附近的近似值;

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x. \qquad (|\Delta x| \text{很小时})$$

例1 计算$\cos 60^\circ 30'$的近似值.

解 设$f(x) = \cos x$, $\therefore f'(x) = -\sin x$, ($x$为弧度)

$$\because x_0 = \frac{\pi}{3}, \quad \Delta x = \frac{\pi}{360},$$

$$\therefore\ f(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2},\qquad f'(\frac{\pi}{3})=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\therefore \cos 60^{\circ}30'=\cos(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{360})\approx\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\pi}{360}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{360}\approx 0.4924.$$

2.求$f(x)$在点$x=0$附近的近似值;

令 $x_0=0, \Delta x=x.$

$$\because\ f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x,$$

$$\therefore\ f(x)\approx f(0)+f'(0)\cdot x.$$

常用近似公式 $(|x|$很小时$)$

(1) $\sqrt[n]{1+x} \approx 1+\dfrac{1}{n}x$; (2) $\sin x \approx x$ (x为弧度);

(3) $\tan x \approx x$ (x为弧度); (4) $e^{x} \approx 1+x$;

(5) $\ln(1+x) \approx x$.

证明 (1) 设 $f(x)=\sqrt[n]{1+x}$, $f'(x)=\dfrac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1}$,

$$f(0)=1,\ f'(0)=\frac{1}{n}.$$

$$\therefore f(x) \approx f(0)+f'(0)x = 1+\frac{x}{n}.$$

例2 计算下列各数的近似值.

$$(1)\ \sqrt[3]{998.5};\qquad (2)\ e^{-0.03}.$$

解 (1) $\sqrt[3]{998.5}=\sqrt[3]{1000-1.5}$

$$=\sqrt[3]{1000\left(1-\frac{1.5}{1000}\right)}=10\sqrt[3]{1-0.0015}$$

$$\approx 10\left(1-\frac{1}{3}\times 0.0015\right)=9.995.$$

(2) $e^{-0.03}\approx 1-0.03=0.97.$

九、误差估计

由于测量仪器的精度、测量的条件和测量的方法等各种因素的影响，测得的数据往往带有误差，而根据带有误差的数据计算所得的结果也会有误差，我们把它叫做间接测量误差.

定义： 如果某个量的精度值为A,它的近似值为a,那末$|A-a|$叫做a的绝对误差.

而绝对误差与$|a|$的比值$\dfrac{|A-a|}{|a|}$叫做a的相对误差.

问题:在实际工作中,绝对误差与相对误差无法求得?

办法:将误差确定在某一个范围内.

如果某个量的精度值是A,测得它的近似值是a,又知道它的误差不超过δ_A,即

$$|A-a| \le \delta_A,$$

那末δ_A叫做测量A的绝对误差限,而$\frac{\delta_A}{|a|}$叫做测量A的相对误差限.

通常把绝对误差限与相对误差限简称为**绝对误差与相对误差**.

例3 正方形边长为 2.41 ± 0.005米,求出它的面积,并估计绝对误差与相对误差.

解 设正方形边长为x,面积为y,则 $y = x^2$.

当$x = 2.41$时, $y = (2.41)^2 = 5.8081(m^2)$.

$$y'\big|_{x=2.41} = 2x\big|_{x=2.41} = 4.82.$$

$\because$ 边长的绝对误差为 $\delta_x = 0.005$,

$\therefore$ 面积的绝对误差为 $\delta_y = 4.82 \times 0.005 = 0.0241\,(m^2)$.

$\therefore$ 面积的相对误差为 $\dfrac{\delta_y}{|y|} = \dfrac{0.0241}{5.8081} \approx 0.4\%$.

十、小结

★ 微分学所要解决的两类问题:

$$\begin{cases} \text{函数的变化率问题} \longrightarrow \text{导数的概念} \\ \text{函数的增量问题} \longrightarrow \text{微分的概念} \end{cases}$$

求导数与微分的方法,叫做<u>微分法.</u>

研究微分法与导数理论及其应用的科学,叫做<u>微分学.</u>

★ 导数与微分的联系: 可导 $\Leftrightarrow$ 可微.

近似计算的基本公式

当$|\Delta x|$很小时,

$$\Delta y\big|_{x=x_0} \approx dy\big|_{x=x_0} = f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0),$$

当$x = 0$时,

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)\cdot x.$$

★ 导数与微分的区别:

1. 函数 $f(x)$ 在点x_0处的导数是一个定数 $f'(x_0)$, 而微分 $dy = f'(x_0)(x - x_0)$ 是x的线性函数,它的定义域是R,实际上,它是无穷小.

$$\because \lim_{x\to x_0} dy = \lim_{x\to x_0} f'(x_0)(x - x_0) = 0.$$

2. 从几何意义上来看, $f'(x_0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处切线的斜率,而微 $dy = f'(x_0)(x - x_0)$是曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线方程在点 x_0 的纵坐标增量.

思考题

因为一元函数$y = f(x)$在x_0的可微性与可导性是等价的，所以有人说“微分就是导数，导数就是微分”，这说法对吗?

思考题解答

说法不对.

从概念上讲，微分是从求函数增量引出线性主部而得到的，导数是从函数变化率问题归纳出函数增量与自变量增量之比的极限，它们是完全不同的概念.

一、 导数和微分的概念及应用

- **导数**： $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

  当 $\Delta x\to 0^+$ 时,为右导数 $f'_+(x)$

  当 $\Delta x\to 0^-$ 时,为左导数 $f'_-(x)$

- **微分**： $\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x$

- **关系**： 可导 $\Longleftrightarrow$ 可微

- 应用：

(1) 利用导数定义解决的问题

1) 推出三个最基本的导数公式及求导法则

$$(C)' = 0; \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}; \quad (\sin x)' = \cos x$$

其他求导公式都可由它们及求导法则推出;

2) 求分段函数在分界点处的导数，及某些特殊函数在特殊点处的导数;

3) 由导数定义证明一些命题.

(2)用导数定义求极限

(3)微分在近似计算与误差估计中的应用

二、 导数和微分的求法

1. 正确使用导数及微分公式和法则

2. 熟练掌握求导方法和技巧

(1) 求分段函数的导数

注意讨论**界点**处左右导数是否存在和相等

(2) 隐函数求导法 $\longrightarrow$ 对数微分法

(3) 参数方程求导法 $\xleftarrow{\text{转化}}$ 极坐标方程求导

(4) 复合函数求导法 (可利用微分形式不变性)

(5) 高阶导数的求法 —— 逐次求导归纳；

直接求导法; 利用莱布尼兹公式.