例1. $y^{(4)} = \sin x + x$

解：对上式进行四次积分得原方程的解为

$$y = \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{6}C1x^3 + \frac{1}{2}C2x^2 + C3x + C4 + \sin x$$

例2. $(1 + x^2)y'' - (y')^2 = 1$

解：令$y' = p$,则原方程为$(1 + x^2)\frac{dp}{dx} - p^2 - 1 = 0$,解得

$$\arctan p = \arctan x + C$$

故原方程的解为$y = -\frac{x}{C} - (1 + C^2)\ln(Cx - 1) + C1$

例3. $y'' = \frac{1+y'^2}{2y}$

解：令$y' = p$,则$y'' = p\frac{dp}{dy}$,故原方程转化为$p\frac{dp}{dy} = \frac{1+p^2}{2y}$,得 $1+p^2 = Cy$,故$1+y'^2 = Cy$,则$y' = \sqrt{Cy-1}$,或$y' = -\sqrt{Cy-1}$,银次原方程的解$x - \frac{2\sqrt{Cy-1}}{C} + C1 = 0$.

例4 已知曲线,它的方程y=f(x)满足微分方程 $yy''+y'^2=1$ 并且与另一条曲线$y=e^x$ 相切于点(0,1), 求此曲线的方程.

解 ∵ 曲线满足初值问题

$$yy''+y'^2=1,\ y\big|_{x=0}=1,\ y'\big|_{x=0}=-1$$

令 $y'=p$, $y''=p\dfrac{dp}{dy}$, 则 $yp\dfrac{dp}{dy}+p^2=1$. 分离变量、积分

$$-\frac{1}{2}\ln(1-p^2)=\ln y+\ln c_1\ ,\quad 即\ \frac{1}{\sqrt{1-p^2}}=yc_1\ ,\ p\neq\pm1$$

∵ 上式中无满足初始条件的解,

∴考虑 $p=\pm1$, 即 $\dfrac{dy}{dx}=\pm1$, $y=\pm x+c$

满足初始条件的解为

$y=1-x$

华东师范大学 EAST CHINA NORMAL UNIVERSITY 计算机科学与软件工程学院 School of Computer Science and Software Engineering

例5 求方程 $xy^{(5)} - y^{(4)} = 0$ 的通解.

解 设 $y^{(4)} = P(x)$, $\quad y^{(5)} = P'(x)$

代入原方程 $\quad xP' - P = 0$,（$P \neq 0$）

解线性方程, 得 $P = C_1 x \qquad$ 即 $y^{(4)} = C_1 x$,

两端积分,得 $y''' = \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2$, $\cdots\ \cdots$,

$$y = \frac{C_1}{120}x^5 + \frac{C_2}{6}x^3 + \frac{C_3}{2}x^2 + C_4 x + C_5\ ,$$

原方程通解为 $y = d_1 x^5 + d_2 x^3 + d_3 x^2 + d_4 x + d_5$

例6 求方程 $yy''-y'^2=0$ 的通解.

解 设 $y'=p(y)$, 则 $y''=p\dfrac{dP}{dy}$,

代入原方程得 $y\cdot P\dfrac{dP}{dy}-P^2=0$, 即 $P(y\cdot\dfrac{dP}{dy}-P)=0$,

由 $y\cdot\dfrac{dP}{dy}-P=0$, 可得 $P=C_1y$,

$\therefore \dfrac{dy}{dx}=C_1y$, 原方程通解为 $y=C_2e^{c_1x}$.

例 7 求方程 $yy'' + y'^2 = 0$ 的通解.

解 将方程写成 $\dfrac{d}{dx}(yy') = 0,$

故有 $yy' = C_1,$ 即 $ydy = C_1 dx,$

积分后得通解 $y^2 = C_1 x + C_2.$

注意: 这一段技巧性较高, 关键是配导数的方程.

得新函数$z(x)$的$(n-1)$阶方程

$$f(x,z,z',\cdots,z^{(n-1)})=0.$$

例 8 求方程 $x^2yy''=(y-xy')^2$ 的通解.

解 设 $y=e^{\int z dx}$, 代入原方程,得 $z'+\frac{2}{x}z=\frac{1}{x^2}$,

解其通解为 $z=\frac{1}{x}+\frac{C_1}{x^2}$,

原方程通解为 $y=e^{\int(\frac{1}{x}+\frac{C_1}{x^2})dx}=C_2xe^{-\frac{C_1}{x}}$.

解法小结 通过代换将其化成较低阶的方程来求解.

例 9 求方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解.

解 两端同乘不为零因子 $\dfrac{1}{y^2}$,

$$\frac{yy'' - y'^2}{y^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y}\right) = 0,$$ 故 $y' = C_1 y$,

从而通解为 $y = C_2 e^{C_1 x}$.

另解 原方程变为 $\dfrac{y''}{y'}=\dfrac{y'}{y}$,

两边积分,得 $\ln y'=\ln y+\ln C_1$, 即 $y'=C_1y$,

原方程通解为 $y=C_2e^{C_1x}$.

补充题: 求方程 $xyy''-xy'^2=yy'$ 的通解.

解 设 $y=e^{\int zdx}$, 代入原方程, 得 $z'x=z$,

解其通解为 $z=C\,x$,

原方程通解为 $y=e^{\int Cxdx}=C_2e^{C_1x^2}$.