第 4 章 微分中值定理与导数的应用

1. 验证函数$f(x)=\begin{cases}1+x^2, 0\le x\le 1.\\ 1-x^2. -1\le x\le 0.\end{cases}$ 在$-1\le x\le 1$ 上是否满足拉格朗日定理条件？如满足，求出满足定理的 ξ.

解：∵ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$

$f(0)=1$

∴ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$

∴ $f(x)$在$[-1,1]$上连续

∵ $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{1-x^2-1}{x}=0$

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{1+x^2-1}{x}=0$

$f'_-(0)=f'_+(0)$

∴ $f(x)$在$x=0$处可导

∴ $f(x)$在$(-1,1)$上可导

∴ $f(x)$满足拉格朗日中值定理

$2\xi=1$ 或 $-2\xi=1$ $\quad f'(\xi)=\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=1$

$\xi=\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$

2. 若 $\frac{a_n}{n+1}+\frac{a_{n-1}}{n}+\ldots+a_0=0$, 求证: 方程 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0=0$ 在$(0,1)$内至少有一实根.

解：令 $f(x)=\dfrac{a_n}{n+1}x^n+\dfrac{a_{n-1}}{n}x^{n-1}+\cdots+a_0$

∵ $f(x)$ 在$[0,1]$上连续

在$(0,1)$内可导

$f(0)=f(1)$

∴ 由罗尔定理

在$(0,1)$内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$

∴ $a_n\xi^n+a_{n-1}\xi^{n-1}+\cdots+a_0=0$

∴ 方程 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0=0$ 在$(0,1)$内至少有一实根

3. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$ 连续, 在(a,b) 二阶可导, 且 $f(a)=f(b)=0$, $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$, 求证: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f''(\xi)<0$.

解：∵ $f(x)$在$[a,b]$连续，在(a,b)上可导，$f(a)=f(b)$

∴ 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得

$f'(\xi)=0$

∵ $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$

∴ $\exists\, c\in(a,\xi)$，$\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}>0$.

∵ $f(x)$在$[a,c]$上连续，(a,c)上可导

∴ $\exists\,\xi_1\in(a,c)$ 使 $f'(\xi_1)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}>0$

$\exists\,\xi_2\in(c,b)$ 使 $f'(\xi_2)=\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}<0$

∵ $f(x)$ 在$[\xi_1,\xi_2]$上连续，(ξ_1,ξ_2)上可导

∴ $f''(\xi)=\dfrac{f'(\xi_1)-f'(\xi_2)}{\xi_1-\xi_2}<0$.

18. 求由方程$2y - x = (x-y)\ln(x-y)$ 所确定的函数 $y = y(x)$的微分dy.

解：方程两边求微分可得

$2dy - dx = (dx-dy)\ln(x-y) + (x-y)\cdot\frac{dx-dy}{x-y}$

$2dy - dx = (dx-dy)\ln(x-y) + dx - dy$

$[3+\ln(x-y)]dy = [2 + \ln(x-y)]dx$

$dy = \frac{2+\ln(x-y)}{3+\ln(x-y)}dx$

19. 计算下列各式近似值（精确到0.0001）：

(1) $\sin 1^o$.

解：$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x$

$f(x) = \sin x$ $\Delta x = 1° = \frac{\pi}{180}$ $x_0 = 0$

$\sin 1° = \sin\frac{\pi}{180} \approx \frac{\pi}{180} \approx 0.0175$

(2) $\sqrt[3]{998}$.

解：$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x$

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ $x_0 = 1000$ $\Delta x = -2$.

$\sqrt[3]{998} = \sqrt[3]{1000-2} \approx \sqrt[3]{1000} + \frac{1}{3}\cdot(1000)^{-\frac{2}{3}}\cdot(-2) = 10 - \frac{1}{150} \approx 9.9933$

20. 求曲线$y = x^2$上一点$P_0(x_0, y_0)$, 使得过P_0的切线与$2x - 6y + 5 = 0$ 垂直.

解：$y' = 2x_0 = -3$

$x_0 = -\frac{3}{2}$ $y_0 = \frac{9}{4}$

$\therefore P_0(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4})$