

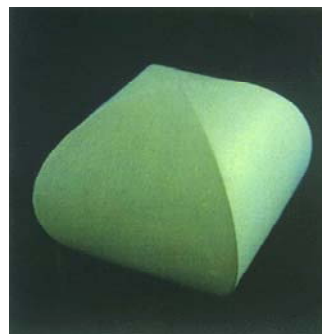
第五节

第二型曲面积分

- 一、有向曲面及曲面元素的投影
- 二、第二型曲面积分的概念与性质
- 三、第二型曲面积分的算法
- 四、两类曲面积分的联系

一、有向曲面及曲面元素的投影

- 曲面分类 $\begin{cases} \text{双侧曲面} \\ \text{单侧曲面} \end{cases}$



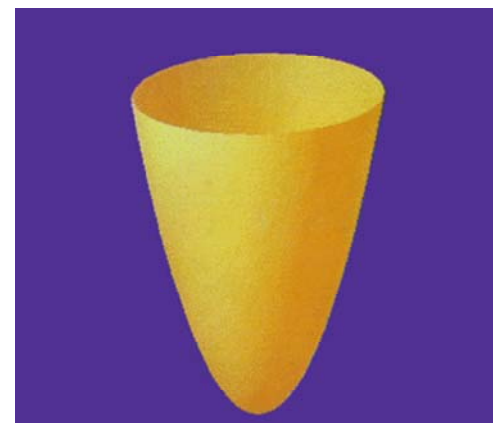
曲面分内侧和
外侧



莫比乌斯带
(单侧曲面的典型)



曲面分左侧和
右侧



曲面分上侧和
下侧

• 指定了侧的曲面叫有向曲面, 其方向用法向量指向表示:

方向余弦	$\cos \alpha$	$\cos \beta$	$\cos \gamma$	封闭曲面
侧的规定	> 0 为前侧	> 0 为右侧	> 0 为上侧	外侧
	< 0 为后侧	< 0 为左侧	< 0 为下侧	内侧

• 设 Σ 为有向曲面, 其面元 ΔS 在 xoy 面上的投影记为 $(\Delta S)_{xy}$, $(\Delta S)_{xy}$ 的面积为 $(\Delta \sigma)_{xy} \geq 0$, 则规定

$$\Delta S \cos \gamma = (\Delta S)_{xy} = \begin{cases} (\Delta \sigma)_{xy}, & \text{当 } \cos \gamma > 0 \text{ 时} \\ -(\Delta \sigma)_{xy}, & \text{当 } \cos \gamma < 0 \text{ 时} \\ 0, & \text{当 } \cos \gamma \equiv 0 \text{ 时} \end{cases}$$

类似可规定 $\Delta S \cos \alpha = (\Delta S)_{yz}$, $\Delta S \cos \beta = (\Delta S)_{zx}$

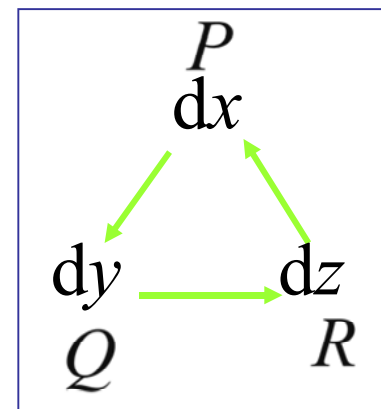
2. 定义. 设 Σ 为光滑的有向曲面, 在 Σ 上定义了一个向量场 $\vec{A} = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$, 若对 Σ 的任意分割和在局部面元上任意取点, 下列极限都存在

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{yz} + Q(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{zx} + R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}]$$

则称此极限为向量场 \vec{A} 在有向曲面上对坐标的曲面积分, 或第二型曲面积分. 记作

$$\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

P, Q, R 叫做**被积函数**; Σ 叫做**积分曲面**.



三、第二型曲面积分的算法

定理: 设光滑曲面 $\Sigma: z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$ 取上侧, $R(x, y, z)$ 是 Σ 上的连续函数, 则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy$$

证: $\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) (\Delta S_i)_{xy}$

$$\left| \begin{array}{l} \because \Sigma \text{ 取上侧, } \therefore (\Delta S_i)_{xy} = (\Delta \sigma_i)_{xy} \\ \zeta_i = z(\xi_i, \eta_i) \end{array} \right. \downarrow$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n R(\xi_i, \eta_i, z(\xi_i, \eta_i)) (\Delta \sigma_i)_{xy}$$

$$= \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy$$

说明: 如果积分曲面 Σ 取下侧, 则

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = -\iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy$$

- 若 $\Sigma: x = x(y, z), (y, z) \in D_{yz}$, 则有

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dy dz$$

(前正后负)

- 若 $\Sigma: y = y(z, x), (z, x) \in D_{zx}$, 则有

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx = \pm \iint_{D_{zx}} Q(x, y(z, x), z) dz dx$$

(右正左负)

例1. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} xyz \, dx \, dy$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 外侧在第一和第五卦限部分.

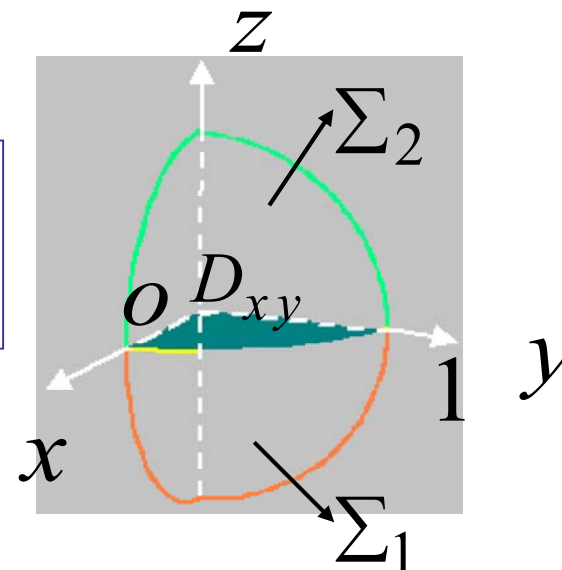
思考: 下述解法是否正确:

$$\text{根据对称性 } \iint_{\Sigma} xyz \, dx \, dy \neq 0$$

解: 把 Σ 分为上下两部分

$$\begin{cases} \Sigma_1 : z = -\sqrt{1-x^2-y^2} \\ \Sigma_2 : z = \sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases}$$

$$(x, y) \in D_{xy} : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned}
\therefore \iint_{\Sigma} xyz \, dx \, dy &= \iint_{\Sigma_1} xyz \, dx \, dy + \iint_{\Sigma_2} xyz \, dx \, dy \\
&= -\iint_{D_{xy}} xy (-\sqrt{1-x^2-y^2}) \, dx \, dy \\
&\quad + \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy \\
&= 2 \iint_{D_{xy}} xy \sqrt{1-x^2-y^2} \, dx \, dy \\
&= 2 \iint_{D_{xy}} r^2 \sin \theta \cos \theta \sqrt{1-r^2} \, r \, dr \, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} 2 \sin 2\theta \, d\theta \int_0^1 r^3 \sqrt{1-r^2} \, dr \\
&= \frac{2}{15}
\end{aligned}$$

计算第二型曲面积分也可以利用对称性:

设有向曲面 Σ 关于 xOy 平面对称 (包括曲面方向对称),
当 $f(x, y, z)$ 是 z 的奇函数时,

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dx dy = 2 \iint_{\Sigma_1} f(x, y, z) dx dy$$

其中 Σ_1 为 Σ 中 $z \geq 0$ 的部分; 当 $f(x, y, z)$ 是 z 的偶函数时,

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) dx dy = 0.$$

在有向曲面 Σ 关于 zOx 及关于 yOz 对称时, 有类似的结果.

特别注意, 由于曲面的方向性, 对称性与以往是不同的!

例2. 计算 $I = \oiint_{\Sigma} (x + y^2 + z^3) \mathrm{d}y \mathrm{d}z$, 其中 Σ 是球面

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, 取外侧.

解: 因 Σ 关于 yOz 平面对称, y^2, z^3 关于 x 都是偶函数,

所以 $\oiint_{\Sigma} (y^2 + z^3) \mathrm{d}y \mathrm{d}z = 0$. 设 Σ_1 为 Σ 中 $x \geq 0$ 的部分,

D_{yz} 为 Σ_1 在 yOz 上的投影, 根据对称性, 有

$$\begin{aligned} \oiint_{\Sigma} (x + y^2 + z^3) \mathrm{d}y \mathrm{d}z &= 2 \iint_{\Sigma_1} x \mathrm{d}y \mathrm{d}z \\ &= 2 \iint_{D_{yz}} \sqrt{R^2 - y^2 - z^2} \mathrm{d}y \mathrm{d}z = 2 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r \mathrm{d}r \\ &= \frac{4}{3} \pi R^3 \end{aligned}$$

例3. 设 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧, 计算

$$I = \iint_S \frac{2dydz}{x \cos^2 x} + \frac{dzdx}{\cos^2 y} - \frac{dxdy}{z \cos^2 z}$$

解: 易证 $\iint_S \frac{dzdx}{\cos^2 y} = 0$

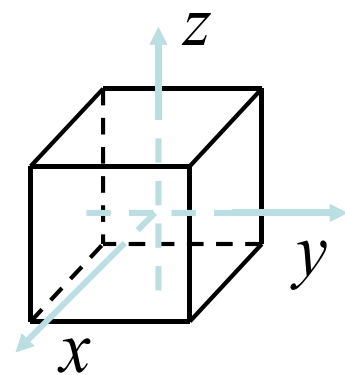
$$\iint_S \frac{2dydz}{x \cos^2 x} = \iint_S \frac{2dxdy}{z \cos^2 z},$$

$$\therefore I = \iint_S \frac{dxdy}{z \cos^2 z} = 2 \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2} \cos^2 \sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{r dr}{\sqrt{1-r^2} \cos^2 \sqrt{1-r^2}} = -4\pi \int_0^1 \frac{d\sqrt{1-r^2}}{\cos^2 \sqrt{1-r^2}}$$

$$= 4\pi \tan 1$$

例4. 计算 $\iint_{\Sigma} (x+y)dydz + (y+z)dzdx + (z+x)dxdy$
 其中 Σ 是以原点为中心, 边长为 a 的正立方体的整个表面的外侧.



解: 利用对称性.

$$\text{原式} = 3 \iint_{\Sigma} (z+x) dx dy$$

↓
 Σ 的顶部 $\Sigma_1 : z = \frac{a}{2} \ (|x| \leq \frac{a}{2}, |y| \leq \frac{a}{2})$ 取上侧

Σ 的底部 $\Sigma_2 : z = -\frac{a}{2} \ (|x| \leq \frac{a}{2}, |y| \leq \frac{a}{2})$ 取下侧

$$= 3 \left[\iint_{\Sigma_1} (z+x) dx dy + \iint_{\Sigma_2} (z+x) dx dy \right]$$

$$= 3 \left[\iint_{D_{xy}} \left(\frac{a}{2} + x \right) dx dy - \iint_{D_{xy}} \left(-\frac{a}{2} + x \right) dx dy \right]$$

$$= 3a \iint_{D_{xy}} dx dy = 3a^3$$

四、两类曲面积分的联系

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \\ &= \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma) dS \end{aligned}$$

$$dS \cos\gamma = dxdy$$

$$dS \cos\beta = dzdx$$

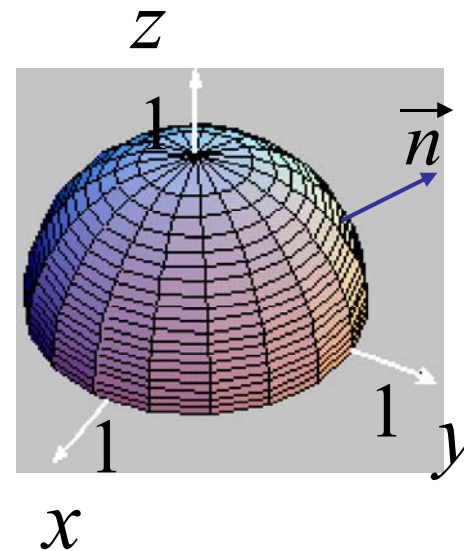
$$dS \cos\alpha = dydz$$

$$\Rightarrow \frac{dydz}{\cos\alpha} = \frac{dxdz}{\cos\beta} = \frac{dxdy}{\cos\gamma}$$

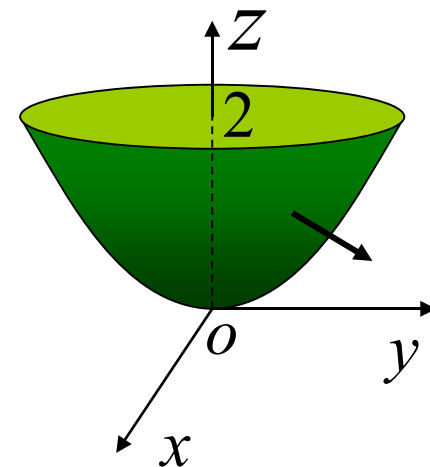
例5. 设 $\Sigma: z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, γ 是其外法线与 z 轴正向夹成的锐角, 计算 $I = \iint_{\Sigma} z^2 \cos \gamma \, dS$.

解:

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} z^2 \cos \gamma \, dS \\ &= \iint_{\Sigma} z^2 \, dx \, dy \\ &= \iint_{D_{xy}} (1 - x^2 - y^2) \, dx \, dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1 - r^2) r \, dr \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



例6. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz - z dx dy$, 其中 Σ 旋转抛物面 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 介于平面 $z = 0$ 及 $z = 2$ 之间部分的下侧.



解: 利用两类曲面积分的联系, 有

$$\begin{aligned} & \iint_{\Sigma} (z^2 + x) dy dz \\ &= \iint_{\Sigma} (z^2 + x) \cos \alpha dS \\ &= \iint_{\Sigma} (z^2 + x) \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} dx dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \\ \cos \gamma &= \frac{-1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{原式} = \iint_{\Sigma} [(z^2 + x)(-x) - z] dx dy$$

将 $z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 代入, 得

$$\text{原式} = -\iint_{D_{xy}} \left\{ \left[\frac{1}{4}(x^2 + y^2)^2 + x \right](-x) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right\} dx dy$$

$$= \iint_{D_{xy}} \left[x^2 + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right] dx dy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (r^2 \cos^2 \theta + \frac{1}{2}r^2) r dr$$

$$= 8\pi$$

