第八章 多元函数微分学及其应用

一、 二元函数极限、连续性：概念、计算

二、偏导数：概念、计算

三、全微分：定义、可微条件

四、求导：多元复合函数、隐函数

五、方向导数、梯度

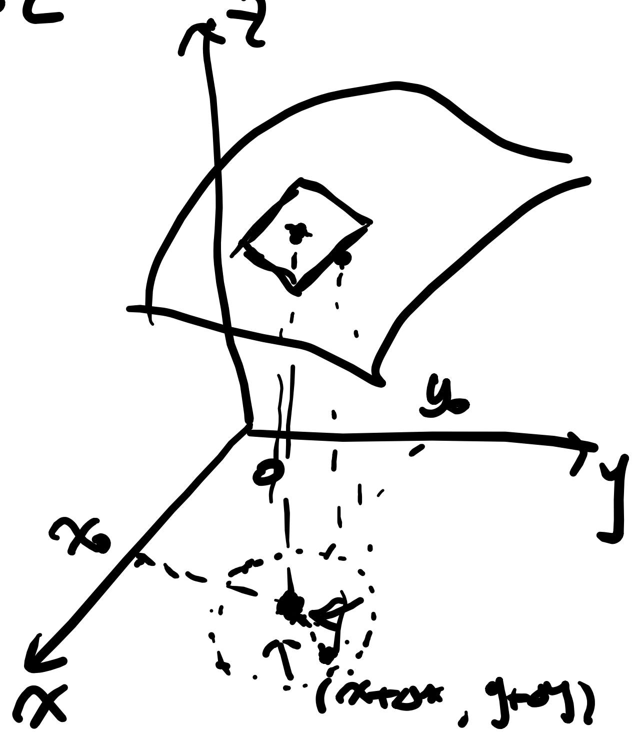
六、几何应用

七、多元函数的极值、最值、条件极值

第三节　全微分

$z=f(x,y)$ ，$x\to \Delta x+x$ ，$y\to y+\Delta y$

$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$　　$z\to z+\Delta z$



☆ $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$

$\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$

z 可微，z 该点可微

☆ $$\lim_{\substack{\rho\to 0\\(\Delta x\to 0,\Delta y\to 0)}} \frac{\Delta z - f_x dx - f_y dy}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = 0$$

以直代曲

一、全微分的定义

定义: 如果函数 $z = f\,(x, y)$在定义域 D 的内点(x, y)处全增量 $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$可表示成

$$\Delta z = \boxed{A\,\Delta x + B\,\Delta y} + o(\rho), \quad \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

其中 A, B 不依赖于$\Delta x, \Delta y$, 仅与 x, y 有关, 则称函数 $f(x, y)$ 在点(x, y) **可微**, $A\Delta x + B\,\Delta y$ 称为函数 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 的**全微分**, 记作

$$\mathrm{d}z = \mathrm{d}f = A\Delta x + B\Delta y$$

若函数在域 D 内各点都可微, 则称此函数**在D 内可微**.

从微分定义出发 $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$

$$= A\Delta x + B\Delta y + O(\rho)$$

求极限

① $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x, y)$

$\Rightarrow f$ 连续

② $\Delta x \to 0$, $\Delta y = 0$ (y不变) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = f_x = A$

③ $\Delta x = 0$ (x不变), $\Delta y \to 0$. $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y} = f_y = B$

函数可微的必要条件

若函数 $z = f(x, y)$ 在点(x, y) **可微**，

（1） 函数在该点连续

（2）函数在该点偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$ 必存在,

且有 $\mathrm{d}\, z = \dfrac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \dfrac{\partial z}{\partial y}\Delta y$

$z = f(x, y, t)$

函数微分公式： $dz = f_x dx + f_y dy + f_t dt$

例. 计算函数 $z = e^{xy}$ 在点 $(2,1)$ 处的全微分.

$$dz = z_x dx + z_y dy$$

$$z_x = ye^{xy}, \quad z_y = xe^{xy}$$

①

$$z_x\Big|_{(2,1)} = e^2, \quad z_y\Big|_{(2,1)} = 2e^2$$

$$dz\Big|_{(2,1)} = e^2 dx + 2e^2 dy$$

②

$$z(x,1) = e^x, \quad z(2,y) = e^{2y}$$

$$z_x\Big|_{(2,1)} = \frac{dz(x,1)}{dx}\Big|_{x=2} = e^2; \quad z_y\Big|_{(2,1)} = 2e^2$$

例. 计算下列函数的全微分.

$$u = x + \sin\frac{y}{2} + e^{yz} \qquad\qquad u = \ln\sin\left(\frac{y}{x}\right)$$

$du = u_x dx + u_y dy + u_z dz$

$= 1 \cdot dx + \left(\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2} + z e^{yz}\right) dy$

$+ y e^{yz} dz$

$du = u_x dx + u_y dy$

$= \frac{1}{\sin\frac{y}{x}} \cos\frac{y}{x} \cdot \frac{-y}{x^2} dx$

$+ \cot\frac{y}{x} \frac{1}{x} dy$

例. 设 $f(x,y,z)=\dfrac{x\cos y+y\cos z+z\cos x}{1+\cos x+\cos y+\cos z}$，求 $\mathrm{d}f\Big|_{(0,0,0)}$.

✓ $f(x,0,0)=\dfrac{x}{3+\cos x}$, $f_x\Big|_{(0,0,0)}=\dfrac{3+\cos x+x\sin x}{(3+\cos x)^2}\Big|_{x=0}$

$=\dfrac{1}{4}$

✓ $f(0,y,0)=\dfrac{y}{3+\cos y}$.

$f_y\Big|_{(0,0,0)}=f_z(0,0,0)=\dfrac{1}{4}$

✓ $f(0,0,z)=\dfrac{z}{3+\cos z}$.

$df\Big|_{(0,0,0)}=\dfrac{d}{dx}f(x,0,0)\Big|_{x=0}dx+\dfrac{d}{dy}f(0,y,0)\Big|_{y=0}dy+\dfrac{d}{dz}f\cdots$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 = f(0,0)$$

不可微.

例: $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在(0, 0)点是否可微?

$$\left|\frac{xy}{r}\right| \le |y| \to 0$$

$(\Delta y = k\Delta x)$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta f - f_x(0,0)dx - f_y(0,0)dy}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$$ 確在

② $f(x,0)=0$; $f(0,y)=0$

$f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$

$f_x(0,0)=0$ $\qquad$ $f_y(0,0)=0$

$$\Delta f = f(0+\Delta x, 0+\Delta y) - f(0,0),$$

① $$f_x = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0$$

注意：定理1 的逆定理不成立，即

偏导数存在函数不一定可微 ！

例: $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

函数可微的充分条件

定理 (充分条件) 若函数$z = f(x, y)$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$在点$(x, y)$连续，则函数在该点可微.

$$\Delta z = z_x \Delta x + z_y \Delta y + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right)$$

$$\underline{\Delta z} = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

$$= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

中值定理. $= f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\cdot\Delta x + f_y(x, \underline{y+\theta_2\Delta y})\cdot\Delta y$

$(0<\theta_1, \theta_2<1)$

$$= \left[\underline{f_x(x,y)} + \alpha(\Delta x, \Delta y)\right]\cdot\underline{\Delta x}$$

$$+\left[\underline{f_y(x,y)} + \beta(\Delta y)\right]\cdot\underline{\Delta y}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f_x(x+\Delta x, y+\Delta y) = f_x(x,y)$$

$$f_x(\quad) = f_x(x,y) + \alpha(\Delta x, \Delta y)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = A$$

$$\underline{f(x) = A + \alpha(x)}$$

$x\to 0 \quad \alpha\to 0$

$$\Delta z - f_x\Delta x - f_y\Delta y = \underline{\alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta x + \beta(\Delta y)\Delta y}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta z - f_x\Delta x - f_y\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\alpha(\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x + \beta(\Delta y)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

$$0 \le \left|\frac{\alpha\Delta x+\beta\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right| \le \left|\frac{\alpha\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right| + \left|\frac{\beta\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right| \le |\alpha|+|\beta| \to 0$$

当 $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ 时 $\alpha\to 0$, $\beta\to 0$

由夹逼准则可知极限 $=0$ ∴ z 可微.

重要关系:

函数连续

一阶偏导存在

函数可微

一阶偏导数连续

$$dz = z_x dx + z_y dy$$

$$z = z(x, y)$$

内容小结

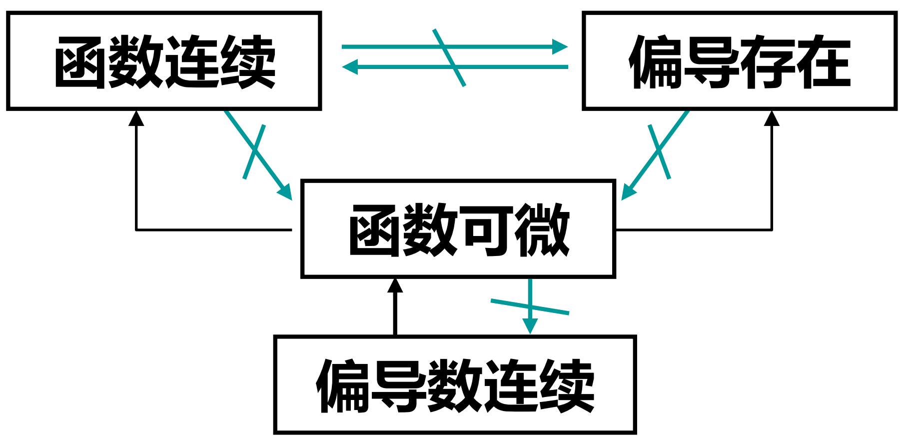
1. 微分定义: ($z = f(x,y)$)

$$\Delta z = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y \ + o(\rho)$$

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\mathrm{d}z = f_x(x,y)\mathrm{d}x + f_y(x,y)\mathrm{d}y$$

2. 重要关系:



*二、全微分在数值计算中的应用

$dz = f_x dx + f_y dy$

1. 近似计算

$\Delta z \approx dz$

2. 误差估计

$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + f_x dx + f_y dy$

(x_1, y_1)

(x_0, y_0)

例. 计算 $1.04^{2.02}$ 的近似值.

解: 设 $f(x,y)=x^y$, 则 $f_x(x,y)=\ yx^{y-1}$, $\quad f_y(x,y)=x^y\ln x$

取 $x=1,\ y=2,\ \Delta x=0.04,\ \Delta y=0.02$

则 $\quad 1.04^{2.02}=f(1.04,\ 2.02)$

$$\approx f(1,2)+f_x(1,2)\Delta x+f_y(1,2)\Delta y$$

$$=1+2\times 0.04+0\times 0.02=1.08$$

*二、全微分在数值计算中的应用

1. 近似计算

由全微分定义 $\Delta z = \underbrace{f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)}_{\mathrm{d}\,z}\Delta y + o(\rho)$

可知当 $|\Delta x|$ 及 $|\Delta y|$ 较小时，有近似等式:

$$\Delta z \approx \mathrm{d}\,z = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$$

(可用于近似计算; 误差分析)

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x, y) + f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$$

(可用于近似计算)

2. 误差估计

利用 $\Delta z \approx f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$

令 $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ 分别表示 x , y , z 的绝对误差界,

则 z 的绝对误差界约为

$$\delta_z = |f_x(x,y)|\delta_x + |f_y(x,y)|\delta_y$$

z 的相对误差界约为

$$\frac{\delta_z}{|z|} = \left|\frac{f_x(x,y)}{f(x,y)}\right|\delta_x + \left|\frac{f_y(x,y)}{f(x,y)}\right|\delta_y$$

特别注意

(1) $z = xy$ 时， $\frac{\delta_z}{|z|} = \frac{\delta_x}{|x|} + \frac{\delta_y}{|y|}$

(2) $z = \frac{y}{x}$ 时，

$$\frac{\delta_z}{|z|} = \left| \frac{x}{y} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \right| \delta_x + \left| \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{x} \right| \delta_y = \frac{\delta_x}{|x|} + \frac{\delta_y}{|y|}$$

- 乘除后的结果相对误差变大
- 很小的数不能做除数

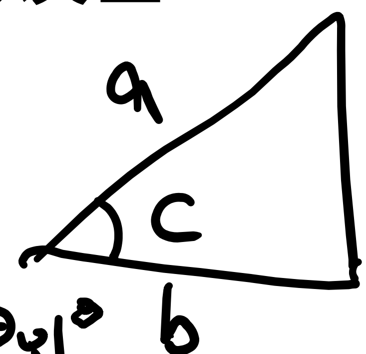
类似可以推广到三元及三元以上的情形.

例. 利用公式 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ 计算三角形面积. 现测得

$a=12.5\pm 0.01$, $b=8.3\pm 0.01$, $C=30^\circ\pm 0.1^\circ$

求计算面积时的绝对误差与相对误差.

$$dS = S_a\, da + S_b\, db + S_c\, dC$$



$da \to 0.01$, $db \to 0.01$, $dC \to 0.1^\circ$

例. 利用公式 $S=\frac{1}{2}ab\sin C$ 计算三角形面积. 现测得

$a=12.5\pm0.01,\ b=8.3\pm0.01,\ C=30^\circ\pm0.1^\circ$

求计算面积时的绝对误差与相对误差.

解: $\delta_S=\left|\frac{\partial S}{\partial a}\right|\delta_a+\left|\frac{\partial S}{\partial b}\right|\delta_b+\left|\frac{\partial S}{\partial c}\right|\delta_c$

$$=\frac{1}{2}\left|b\sin C\right|\delta_a+\frac{1}{2}\left|a\sin C\right|\delta_b+\frac{1}{2}\left|ab\cos C\right|\delta_C$$

$a=12.5,\ b=8.3,\ C=30^\circ,\ \delta_a=\delta_b=0.01,\ \delta_C=\frac{\pi}{1800}$

故绝对误差约为 $\delta_S=0.13$

又 $S=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}\times12.5\times8.3\times\sin30^\circ\approx25.94$

所以 S 的相对误差约为 $\frac{\delta_S}{|S|}=\frac{0.13}{25.94}\approx0.5\,\%$