(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n^2}{n+1}$.

解: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n^2}{n+1}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{-\frac{1}{3}}\cdot\sin n^2}{1+\frac{1}{n}}$

$=0$.

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(4x+1)^{10}(3x-1)^{20}}{(4x-3)^{30}}$.

解: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(4x+1)^{10}(3x-1)^{20}}{(4x-3)^{30}}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x+1}{4x+3}\right)^{10}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{4x-3}\right)^{20}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4+\frac{1}{x}}{4+\frac{3}{x}}\right)^{10}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3-\frac{1}{x}}{4-\frac{3}{x}}\right)^{20}=\left(\frac{3}{4}\right)^{20}$.

(8) $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}$.

解: $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}$

$=\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{2\cos\frac{x+\alpha}{2}\sin\frac{x-\alpha}{2}}{x-\alpha}$

$=\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{2\times\frac{1}{2}\cos\frac{x+\alpha}{2}(x-\alpha)}{x-\alpha}=\cos\alpha$.

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$, 其中 $|x|<1$.

解: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2n})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2n})\frac{1}{1-x}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-x^{4n}}{1-x}$

$=\frac{1}{1-x}$

(10) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{x}{|x|}\right)$.

解: $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+1\right)=1$.

$\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{x}{-x}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}-1\right)=1$.

$\therefore\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{x}{|x|}\right)=1$

13.函数 $y=x\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是否有界？当 $x\to+\infty$ 时这个函数的极限是否为无穷大？为什么？

解：∵ $y=x\sin x$ 的定义域为 R.

∴对 $\forall M>0$, $\exists\ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

使 $|f(x)|=\frac{\pi}{2}+2k\pi>M$.

∴ $y=x\sin x$ 在 R 内无界.

取 $x=n\pi$, $f(x)=n\pi\sin n\pi=0$.

∴ $x\to+\infty$ 时，这个函数的极限不是无穷大.

14.若函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，求 a 的值。

解：∵ $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin2x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 R 上连续

∴ $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin2x+e^{2ax}-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin2x}{x}+\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{2ax}-1}{x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x}{x}+\lim\limits_{x\to0}\frac{2ax}{x}$

$=2+2a$

∵ $f(0)=a$

∴ $2+2a=a$

∴ $a=-2$.

15.求出下列函数的间断点并给出间断点的类型：

(1) $y=\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x^2(x-1)}$.

解：$y=\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x^2(x-1)}$ 的间断点为 $x=0$，$x=1$.

∵ $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x^2(x-1)}$ 与 $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x^2(x-1)}$ 均不存在.

故 $x=0$ 为该函数的第二类间断点. 具体

∵ $\lim\limits_{x\to1}\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x^2(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}{x^2(x-1)}=-\frac{\pi}{2}$，又∵ $y=\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x^2(x-1)}$ 在 $x=1$ 处无定义.

∴ $x=1$ 为该函数的可去间断点.

(2) $y=\arctan\frac{1}{x}$.

解：$y=\arctan\frac{1}{x}$ 的间断点为 $x=0$.

∵ $\lim\limits_{x\to0^-}\arctan\frac{1}{x}=-\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to0^+}\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$

∴ $\lim\limits_{x\to0^-}\arctan\frac{1}{x}\neq\lim\limits_{x\to0^+}\arctan\frac{1}{x}$

∴ $x=0$ 为该函数的跳跃间断点.

(3)$y=\frac{1-2^{\frac{1}{x-1}}}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$.

解：$y=\frac{1-2^{\frac{1}{x-1}}}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$ 的间断点为 $x=1$.

$\because \lim\limits_{x\to1^-}\frac{1-2^{\frac{1}{x-1}}}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=1 \neq \lim\limits_{x\to1^+}\frac{1-2^{\frac{1}{x-1}}}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=-1$.

$\therefore x=1$ 为该函数的跳跃间断点.

(4)$f(x)=\begin{cases}2x+6, & x<-1,\\ \frac{1}{x}, & x\geq -1.\end{cases}$

解：$f(x)$ 的间断点为 $x=-1$，$x=0$.

$\because \lim\limits_{x\to-1^-}2x+6=4 \neq \lim\limits_{x\to-1^+}\frac{1}{x}=-1$.

$\therefore x=-1$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

$\because f(x)$ 在 $x=0$ 处无定义，且 $f(0-0)$ 与 $f(0+0)$ 均不存在

$\therefore x=0$ 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

具体

16. 证明方程 $x-2\sin x=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有实根。

证明：令 $f(x)=x-2\sin x$. $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续，

当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，$f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}-2\sin\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-2<0$.

当 $x=\pi$ 时，$f(\pi)=\pi-2\sin\pi=\pi>0$.

$\because f(\frac{\pi}{2})\cdot f(\pi)<0$，$\therefore$ 在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 内，必定 $\exists\,\xi$ 使得 $f(\xi)=0$.

$\therefore x-2\sin x=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有实根.

17. 讨论函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$ 的连续性。

解：① $x=0$ 时，$f(x)$ 无意义

② $x=\pm1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-1}{1+1}=0$.

③ $x\in(0,1)\cup(-1,0)$ 时，

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{2n+2}-1}{x^{2n}+1}=-1$.

④ $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 时，

$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^2-x^{-2n}}{1+x^{-2n}}=x^2$

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$；$(0,1)\cup(-1,0)$ 连续.

18. 设$f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}, & -\frac{1}{2}<x<0\\ a, & x=0\\ x^2+b, & 0<x\le 1\end{cases}$

求 a,b使得 $f(x)$在 $x=0$连续。

解: ∵ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x}$

$=2.$

又∵要使$f(x)$在$x=0$连续,则

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=f(0)=\lim\limits_{x\to 0}x^2+b$

∴ $a=2=b.$

∴当$a=b=2$时,$f(x)$在$x=0$连续.

19.设函数 $f(x)$ 在开区间(a,b)连续，且$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$, 则在$[x_1,x_n]$上必存在ξ, 使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

证明: ∵$f(x)$在(a,b)连续

$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$.

∴ $f(x)$在$[x_1,x_n]$也连续,

设$x\in[x_1,x_n]$时, $m\le f(x)\le M$

则 $m\le f(x_1)\le M$

$m\le f(x_2)\le M$

$\vdots$

$m\le f(x_n)\le M$

∴必∃ $\xi\in[x_1,x_n]$,使得

$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$

20.若 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，其中 $a>0$ 且 $f(0)=f(2a)$，试证明方程 $f(x)=f(x+a)$ 在 $[0,a)$ 内至少有一个实根。

证明：令 $F(x)=f(x)-f(x+a)$.

$\therefore F(0)=f(0)-f(a)\quad F(a)=f(a)-f(2a)=f(a)-f(0)$.

$\therefore F(0)\cdot F(a)=-[f(a)-f(0)]^2$

①若 $f(0)=f(a)$，则 $x=0$ 为 $F(x)=0$ 的一个根.

②若 $f(0)\neq f(a)$，则 $F(0)\cdot F(a)=-[f(a)-f(0)]^2<0$.

$\therefore$ 在 $[0,a)$ 内至少存在一点 ξ，使得 $F(\xi)=0$.

$\therefore F(x)=0$ 在 $[0,a)$ 内至少有一个实根.

综上所述：$f(x)=f(x+a)$ 在 $[0,a)$ 内至少有一个实根.

【 】

21.设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=B$，证明：$f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上有界。

证明:

【 】

第 3 章 导数与微分

1. 设 $f(x)=\ln[1+\sin(x-a)]+(x-a)\arctan^2\sqrt[3]{x}$，按定义求 $f'(a)$。

解：$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$=\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln[1+\sin(x-a)]+(x-a)\arctan^2\sqrt[3]{x}}{x-a}$

$=\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln[1+\sin(x-a)]}{x-a}+\lim\limits_{x\to a}\arctan^2\sqrt[3]{x}$

$=\lim\limits_{x\to a}\frac{x+a}{x-a}+\lim\limits_{x\to a}\arctan^2\sqrt[3]{x}$

$=1+\arctan^2\sqrt[3]{a}.$

2. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0}=A$, 求 $f'(x_0)$。

解：∵ $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，

∴ $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0}\cdot(x-x_0)$

$=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}(x-x_0)$

$=A\cdot 0=0.$

∴ $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

$=A.$

3. 设 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=0$, 试证 $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$ 在 $x=0$ 处可导。

证明：∵ $F'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)(1+\sin x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}+\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)\cdot\sin x}{x}$

$=f'(0)+f(0)\cdot 0=f'(0).$

$F'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{F(x)-F(0)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)(1-\sin x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}-\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)\cdot\sin x}{x}$

$=f'(0)-f(0)\cdot 0$

$=f'(0).$

∴ $F'_+(0)=F'_-(0).$

∴ $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导.