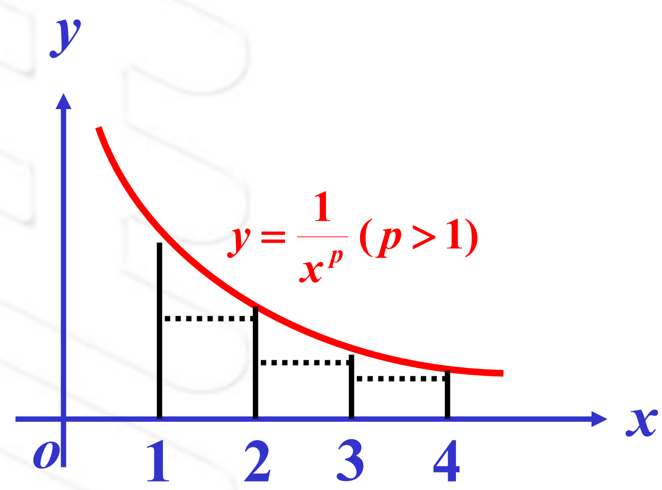
例1 讨论 P–级数

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$ 的收敛性. $(p>0)$

解 设 $p\le 1$, $\because \frac{1}{n^p}\ge\frac{1}{n}$, 则 $P-$级数发散.

设 $p>1$, 由图可知 $\frac{1}{n^p}<\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{x^p}$



$$s_n=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}$$

$$\le 1+\int_1^2\frac{dx}{x^p}+\cdots+\int_{n-1}^{n}\frac{dx}{x^p}$$

$$=1+\int_1^n \frac{dx}{x^p}=1+\frac{1}{p-1}(1-\frac{1}{n^{p-1}})<1+\frac{1}{p-1}$$

即s_n有界， 则$P-$级数收敛.

$$P-级数\begin{cases} 当p>1时，\quad 收敛 \\ 当p\le 1时，\quad 发散 \end{cases}$$

重要参考级数： 几何级数， P-级数， 调和级数.

例 2 证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$是发散的.

证明 $\because \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{n+1},$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$发散,

$\therefore$ 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$发散.

例3 判定下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-n}$;

解 (1) $\because \lim_{n\to\infty} n\sin\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1,$ 原级数发散.

(2) $\because \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3^n-n}}{\frac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-\frac{n}{3^n}}=1,$

$\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$收敛, 故原级数收敛.

例4　判别下列级数的收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$;　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$;　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}$.

解　(1) $\because \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\frac{1}{n+1}\to 0 \quad (n\to\infty)$,

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 收敛.

(2) $\because \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)!}{10^{n+1}} \cdot \dfrac{10^n}{n!} = \dfrac{n+1}{10} \to \infty \quad (n \to \infty),$

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{10^n}$ 发散.

(3) $\because \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n-1)\cdot 2n}{(2n+1)\cdot(2n+2)} = 1,$

比值审敛法失效, 改用比较审敛法

$\because \dfrac{1}{(2n-1)\cdot 2n} < \dfrac{1}{n^2},\quad \because$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ 收敛,

故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n\cdot(2n-1)}$ 收敛.

例 5 判别级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$的收敛性.

解 $\because \left(\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right)' = \frac{-(1+x)}{2\sqrt{x}(x-1)^2} < 0 \quad (x \geq 2)$

故函数$\frac{\sqrt{x}}{x-1}$单调递减， $\therefore u_n > u_{n+1}$，

又$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-1} = 0.$ 原级数收敛.

例 6　判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ 的收敛性.

解　$\because \left|\frac{\sin n}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛,

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n^2}\right|$ 收敛,

故由定理知原级数绝对收敛.