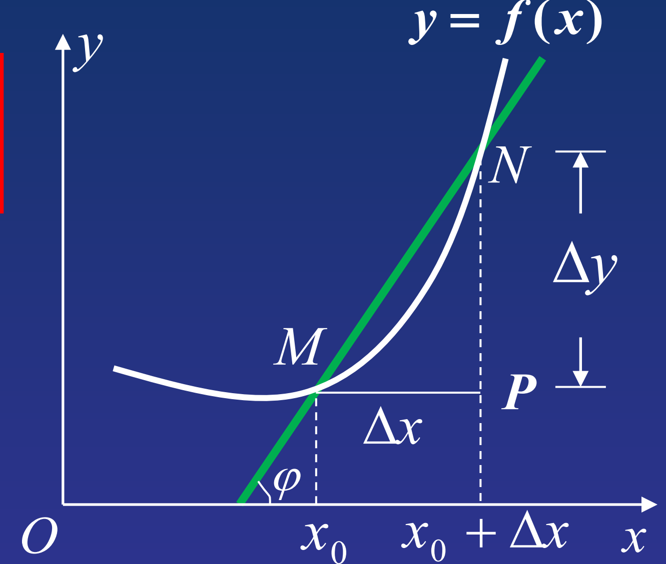
补充知识：

第一章 导数与微分

1.1 导数的概念

1.1.1 引出导数概念的实例

例1 平面曲线的切线斜率



曲线 $y = f(x)$ 的图像如图所示,

在曲线上任取两点M和N，其坐标：

$$M(x_0, y_0)$$

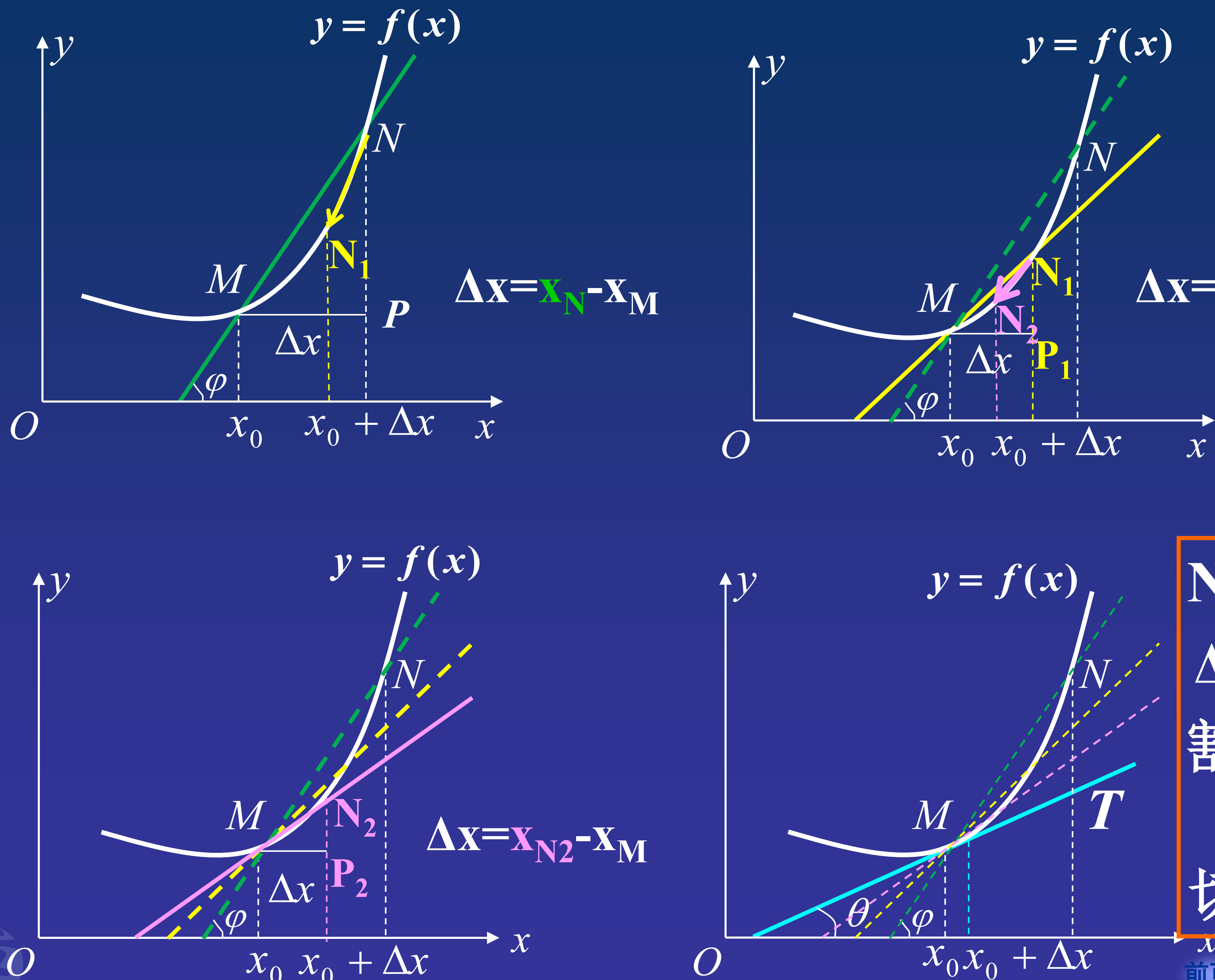
$$N(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$$

φ是割线MN的倾角

作割线MN, 割线的斜率为

$$k_{MN} = \tan\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

当N点沿着$f(x)$趋于M点时，割线MN怎样变化？斜率呢？



$N \longrightarrow M$

$\Delta x \longrightarrow 0$

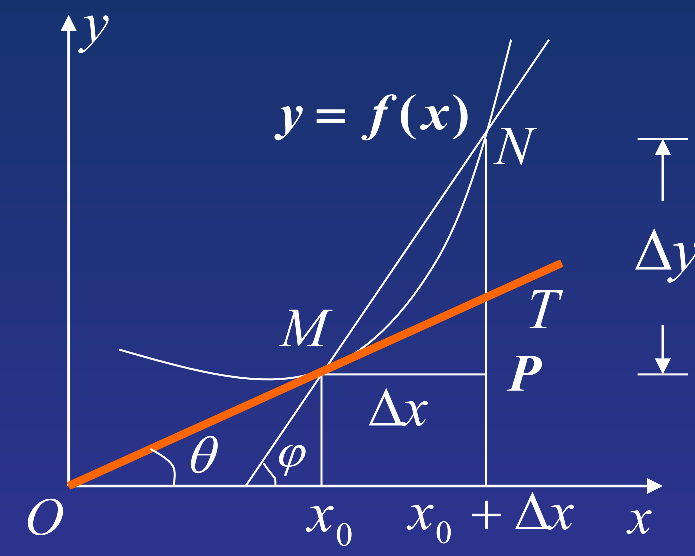
割线MN

$\downarrow$

切线MN

当$\Delta x \to 0$ 时，点N沿曲线趋于点M，割线MT就是过M点$f(x)$曲线的切线。

切线MT的斜率表示为 $k = \tan\theta$



切线MT的斜率也可以表示为

$$k = \tan\theta = \lim_{\Delta x \to 0} \tan\varphi$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

θ是切线MT的倾角

割线MN斜率的极限

1.1.2 导数的概念

设$y=f(x)$在点x_0的某邻域内有定义，且 $x_0+\Delta x$ 属于该邻域，记$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$,

若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在,

则称其极限值为$y=f(x)$在点x_0 处的导数，记为

$$f'(x_0)\text{或}y'|_{x=x_0},\text{或}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}|_{x=x_0},\text{或}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}|_{x=x_0}.$$

或

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.}$$

关于导数的几点说明：

（1）导数定义与下面的形式等价：

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

若$y=f(x)$在$x=x_0$的导数存在，则称$y=f(x)$在点x_0处**可导**，反之称$y=f(x)$在$x=x_0$**不可导**。

函数的可导性是描述函数在某一点处的性态，**导数的大小**反映了函数在一点处变化(增大或减小)的快慢。

（2）导数的几何意义

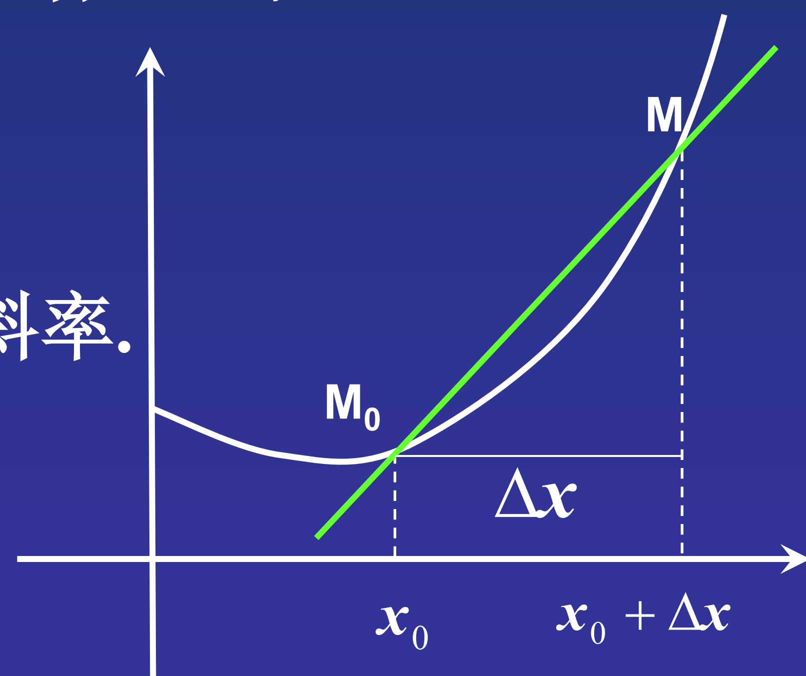
当自变量 x_0从变化到 $x_0+\Delta x$ 时，曲线$y=f(x)$

上的点由$M_0(x_0, f(x_0))$. 变到$M(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$.

Δx 是割线两端点M_0，M的横坐标之差；

Δy 是M_0，M 的纵坐标之差；

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 是过M_0，M两点的割线的斜率.

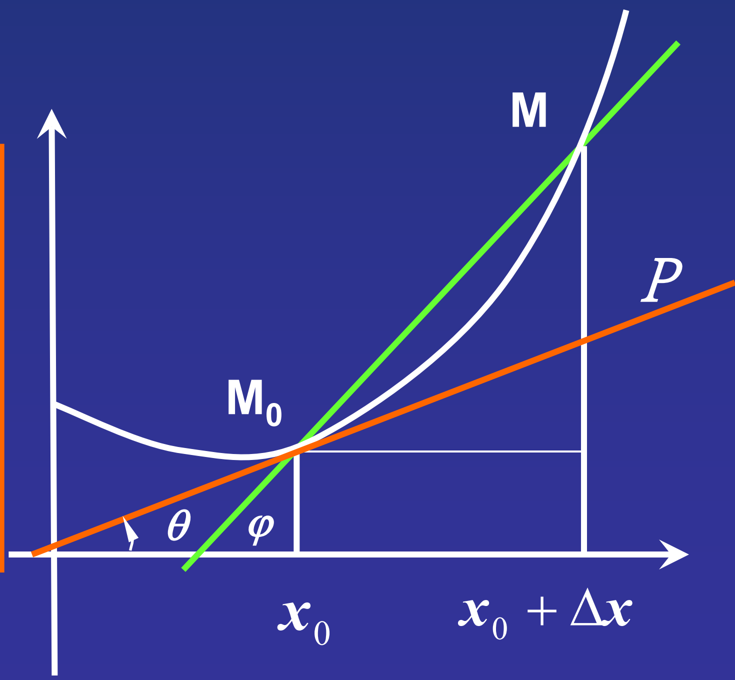


曲线$y=f(x)$在点M_0处的切线即为割线M_0M当M沿曲线$y=f(x)$无限接近M_0时的极限位置M_0P。

当 $\Delta x\to 0$ 时，割线斜率的极限值就是切线的斜率.

即：

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\varphi\to\theta}\tan\varphi=\tan\theta=k$$



导数 $f'(x_0)$ 的几何意义:

曲线$y=f(x)$ 在点$M_0(x_0, f(x_0))$处的切线斜率.

例1　求函数 $y = x^2$ 的导数

解：(1) 求增量：

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

$$= (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

(2) 算比值：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

(3) 取极限：

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x$$

同理可得：$(x^n)' = nx^{n-1}$（n为正整数）

特别地，$(x)' = 1 \quad (n = 1)$.

1.1.3 基本初等函数的导数

基本导数公式表

1. $(C)' = 0$ (C为常数）

2. $(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$ (μ为常数）

3. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$

4. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

5. $(a^x)' = a^x \ln a$

6. $(e^x)' = e^x$

7. $(\sin x)' = \cos x$

8. $(\cos x)' = -\sin x$

1.2 导数的运算

1.2.1 函数的和、差、积、商的求导法则

定理一　设函数u(*x*)与v(*x*) 在点*x*处均可导，则:

$$(1)[u(x)\pm v(x)]' = u'(x)\pm v'(x);$$

$$(2)[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x),$$

特别地, $v(x)=C$ (C为常数), 则$(Cu)'=Cu'$

$$(3)\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

特别地,如果　$u(x)=1$,

可得公式 $\left[\frac{1}{v(x)}\right]' = \frac{-v'(x)}{[v(x)]^2}$　$(v(x)\neq 0)$

例2　设$y=x^3-e^x+\sin x+\ln 3$，求y'

解：$y'=(x^3-e^x+\sin x+\ln 3)'$

$$=(x^3)'-(e^x)'+(\sin x)'+(\ln 3)'$$

$$=3x^2-e^x+\cos x$$

例3 设 $y=5\sqrt{x}\,2^x$,求y'

解：$y'=(5\sqrt{x}\,2^x)'$

$$=5(\sqrt{x})'2^x+5\sqrt{x}(2^x)'$$

$$=\frac{5\cdot 2^x}{2\sqrt{x}}+5\sqrt{x}\,2^x\ln 2$$

例4 求$y=\tan x$的导数

解： $y'=(\tan x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'$

$$=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

即 $$(\tan x)'=\sec^2 x$$

类似可得 $(\cot x)'=-\csc^2 x$

例5 求 $y=\sec x$ 的导数

解： $$y'=(\sec x)'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'$$

$$=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos x}\cdot\tan x$$

$$=\sec x\cdot\tan x$$

即 $$(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x$$

类似可得 $$(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x$$

1.2.2 复合函数的导数

定理二　如果函数 $u=\varphi(x)$ 在x处可导，而函数 $y=f(u)$在对应的u处可导,那么复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在x处可导，且有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \quad \text{或} \quad y'_x=y'_u\cdot u'_x$$

注：对于多次复合的函数，其求导公式类似，此法则也称链导法

例6　$y=\sin(1+x^2)$,求y'

解：$y=\sin(1+x^2)$可看作$y=\sin u, u=1+x^2$复合而成

$$y'=(\sin u)'_u(1+x^2)'_x$$

$$=\cos u\cdot 2x=2x\cos(1+x^2)$$

例7　$y=\sin\ln\sqrt{x^2+2}$,求y'

解：$$y'=\cos\ln\sqrt{x^2+2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+2}}\cdot 2x$$

$$=\frac{x\cos\ln\sqrt{x^2+2}}{x^2+2}$$

1.3 高阶导数

二阶导数：如果函数$f(x)$的导函数 $y' = f'(x)$ 仍是x的可导函数，就称$y' = f'(x)$ 的导数为$f(x)$的二阶导数，

记作 y'', $f''(x)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 或 $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$

即 $y'' = (y')'$, $f''(x) = [f'(x)]'$ 或 $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$

n阶导数：$\dfrac{d}{dx}\dfrac{d}{dx}\cdots\dfrac{d}{dx}f(x) = \dfrac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x) = y^{(n)}$

二阶及二阶以上的导数统称为高阶导数

高阶导数的计算：运用导数运算法则与基本公式将函数逐次求导

例8 设$y=a^x$,求$y^{(n)}$

解：$y'=a^x\ln a, y''=a^x(\ln a)^2,\ \ldots, y^{(n)}=a^x(\ln a)^n$

特别地 $(e^x)'=e^x,(e^x)''=e^x,\cdots,\ (e^x)^{(n)}=e^x$

例2 设$y=\sin x$,求$y^{(n)}$

解：$y'=(\sin x)'=\cos x=\sin(x+\frac{\pi}{2})$

$$y''=\left[\sin(x+\frac{\pi}{2})\right]'=\cos(x+\frac{\pi}{2})=\sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$y'''=\left[\sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2})\right]'=\sin(x+3\cdot\frac{\pi}{2})$$

$\cdots\cdots$

$y^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$ 即 $(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$

同理 $(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$

1.4参数方程所确定的函数的导数

变量y与x之间的函数关系由参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 确定的，其中t 称为参数。由参数方程所确定的函数$y=f(x)$,可利用参数方程直接求得y对x的导数。

设 $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ 均可导，且 $x=\varphi(t)$ 具有单值连续的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$，则参数方程确定的函数可看成 $y=\psi(t)$ 与 $t=\varphi^{-1}(x)$ 复合而成的函数，根据求导法则有：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\psi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

——参数方程所确定函数的求导公式