高等数学例题与习题集(一)

一 元 微 积 分

[俄] И .И .利亚什科
А .К .博亚尔丘克
Я .Г .加伊
Г .П .戈洛瓦奇 编著

高策理 蔡大用 王小群 译

清 华 大 学 出 版 社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

《高等数学例题与习题集》是一本目前在俄国具有广泛影响的高等数学辅导用书．在我国，无论是高等数学教材的编写方面，还是高等数学的教学方面，都与俄国的高等数学教育有着很深的渊源．因此将这套书译成中文，介绍给国内读者．

本书为《高等数学例题与习题集》的第一卷，内容是关于一元微积分的例题与习题，具体包括分析引论、一元函数微分学、不定积分、定积分四章内容．每章开始给出必要的理论材料，然后是各类典型例题的演算，最后是为读者安排的练习题，书末给出练习题的答案．

北京市版权局著作权合同登记号　图字 01-2001-0653 号

书　　名：高等数学例题与习题集(一)·一元微积分
作　　者：И.И.利亚什科等 编著　蔡大用等 译
出 版 者：清华大学出版社(北京清华大学学研大厦，邮编 100084)
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
责任编辑：刘　颖
版式设计：刘　路
印 刷 者：北京牛山世兴印刷厂
发 行 者：新华书店总店北京发行所
开　　本：787×960 1/16　印张：28.5　字数：604 千字
版　　次：2002 年 8 月第 1 版　2002 年 8 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 7-302-05064-3/O·272
印　　数：0001～5000
定　　价：36.00 元

译 者 序

数学,无论从其对其他学科的影响上看,还是从数学自身发展上看,它的重要性都是不言而喻的 .高等数学,作为大多数理工科大学生的必修课,在锻炼同学的逻辑思维,以及为后续专业课程的学习打好基础方面,其重要性更是不言而喻的 .如何学好高等数学,仁者见仁,智者见智,但数学习题的作用是大家公认的 .

《高等数学例题与习题集》是由四位俄国数学家所编写的一套高等数学辅导书,全书共 5 册,其中第 1 册包括分析引论,一元函数微分学,不定积分,定积分 4 章内容;第 2 册包括级数,多元函数微分学两部分内容;第 3 册包括含参变量积分,重积分与曲线积分两部分内容;第 4 册是关于复变函数的内容,包括数学分析基础,复数与复变函数,复平面上的初等函数,复平面上的积分,解析函数级数、孤立奇点,解析延拓,留数及其应用,解析函数几何理论的一些问题共 8 章内容;第 5 册是关于微分方程理论的内容,包括一阶微分方程,高阶微分方程,微分方程组,一阶偏微分方程,微分方程解的逼近方法,稳定性与相轨道,解线性微分方程的 Laplace 积分变换法共 7 章内容 .

作者曾编写过高等数学习题集,本书的前 3 册是他们两卷本辅导书《数学分析例题与习题》的修改与补充 .本套书从 1997 开始出版发行,历时两年于 1999 年完成 .并已被翻译成西班牙文出版发行 .

本套书采用统一风格,每章的开始给出必要的理论材料,然后给出各种类型的例题,最后是为读者准备的习题,书末给出习题答案 .全书共演算例题 2823 道,其中第 1 册 805 道,第 2 册 497 道,第 3 册 369 道,第 4 册 363 道,第 5 册 789 道;收录习题 1998 道,其中第 1 册 923 道,第 2 册 328 道,第 3 册 238 道,第 4 册 193 道,第 5 册 316 道 .这些例题涵盖了各部分内容的典型习题和较难处理的习题,这样既有利于帮助读者尽快地掌握解决典型题目的方法,促进对基本概念和基本定理的理解,也可以通过一些较难题目的解法来提高知识的综合运用能力,用以强化和锻炼综合运用数学知识分析问题和解决问题的能力 .本书参考了许多知名的俄文版习题集,其中包括在国内久负胜名的吉米多维奇的《数学分析习题集》(人民教育出版社 1958 年翻译出版),沃尔科维斯基等的《复变函数论习题集》(上海科学技术出版社 1981 年翻译出版),菲利波夫等的《微分方程习题集》(上海科学技术出版社 1981 年翻译出版) .例如,前 3 册中所演算的例题就包括了《数学分析习题集》中的绝大多数典型题和难题 .

我国近代的高等教育,无论是在教材的编写方面,还是在教学方法方面,都与俄罗斯(前苏联)的高等教育有着很深的渊源 .因此,我们将此套辅导书翻译成中文,一方面给读者提供一套辅导书,另一方面,也将俄罗斯当代的高等数学教学水准介绍给国内高校的学

生和数学教师 .

本套书并没有局限于高等数学教科书的内容,而是站在较高的角度来梳理高等数学中各部分内容之间以及它们与其他相关分支之间的关系,并且将一些相关分支的内容纳入到高等数学的背景下来讨论(反映在理论材料、例题演算和习题中) . 例如,书中涉及到了集合论、线性空间、矩阵、函数逼近论等方面的内容 . 这样有利于读者从全局上把握高等数学的知识,以加深对这些知识的理解和认识 .

本套书的读者对象主要为工科院校的学生以及理科或师范院校数学系的学生 . 对于广大的高等院校中的数学教师来讲,它也是非常有用的参考书 .

本套书已由清华大学出版社自俄罗斯引进中文版权,准备分 4 册出版发行(原书第 2 册和第 3 册合并为一册) . 清华大学数学系组织了多名教授、副教授翻译 . 第 1 册的翻译分工为: 第 1 章由蔡大用教授翻译,高策理副教授校对; 第 2 章由高策理翻译,苏宁教授校对; 第 3 章、第 4 章由王小群副教授翻译,高策理校对 . 在翻译过程中,对原书中的一些印刷错误直接进行了修改,而没有加脚注说明 .

本书的责任编辑为清华大学出版社的刘颖同志,他在文稿编辑、成稿校对等环节上花费了大量心血,做了很好的工作; 另外数学科学系的萧树铁教授、谭泽光教授、白峰杉教授等对本书的翻译给予了很多支持与鼓励,在此向他们表示感谢 . 北京大学俄语系的王辛夷老师、林百学老师在联系俄罗斯出版社及其他事情上给了译者很多帮助,在此表示感谢 .

由于译者的水平所限,书中自有很多错误或者不妥之处,敬请读者批评指正 .

译 者

2001 年岁末

前　言

您手头的《高等数学例题与习题集》第一卷《一元微积分》,对于俄国读者来讲不是完全陌生的．本书的前三卷是两卷本《数学分析例题与习题》(作者相同)的修改与补充,这些作者在大学生中被称为"反吉米多维奇"学派．本书的第四卷和第五卷是首次出版,内容是关于复变函数与微分方程理论的．

本书参考了很多知名的习题集,其中有吉米多维奇的《数学分析习题集》,沃尔科维斯基等的《复变函数论习题集》,菲利波夫等的《微分方程习题集》．全部五卷保持同一种风格:每章开始给出必要的理论材料,然后演算各种类型的例题,最后给出为读者准备的习题,书末给出习题答案．

本书适用于工程师、应用数学专家、高等学校教师、大学生以及自学高等数学者．

目　　录

第1章　分析引论

1　集合论初步

1.1　逻辑符号

在数学中常常直接用一些符号代替文字描述. 例如,符号 " 表示"对于任意的"或者"对于每一个"或者"随便哪一个",而符号v 表示"存在"或者"能找到". 符号 " 和v 称之为量词.

写法 A　B(蕴含)意味着由命题 A 的正确性可以导出命题 B 的正确性. 此外,如果从 B 的正确性还能得出 A 的正确性时,就写成 A　B. B 是 A 成立的必要和充分条件.

如果假设 A 和 B 同时成立,则写成 $A \wedge B$. 又如果假设 A 和 B 中至少有一个正确时就写成 $A \vee B$.

1.2　集合上的运算

集合的数学定义认为是直觉的,集合由规则或特性给出,根据这些特性或规则可以确定一个元素属于或者不属于这个集合.

集合用 $A = \{x\}$ 表示,其中 x 是集合 A 的一般属性的元素. 集合也往往写成 $A = \{a, b, c, \cdots\}$ 的形式,这里把集合 A 的元素写在花括号内.

下面将用到如下的记号:

N —所有自然数的集合;

Z —所有整数的集合;

Q —所有有理数的集合;

R —所有实数的集合;

C —所有复数的集合;

Z_0 —所有非负整数的集合.

写法 $a \in A$(或 A瓠a)代表元素 a 属于集合 A.

写法 $a|$　A(或 A鼸a)代表元素 a 不属于集合 A.

如果集合 B 的所有元素都属于集合 A,就称 B 是 A 的子集,表示为 B　A (或 A　B)(图 1). 永远有 A　A,这是因为集合 A 的每个元素仍然属于 A. 空集,即不包含任何一个元素的集合,表示为　. 任何一个集合都包含空集,把它作为自己的子集.

图　1

定义 1　如果 A　$B \wedge B$　A,则称 A 和 B 是相等的集,并记为 $A = B$.

定义 2　如果 $A\quad T$,那些集合 T 中不属于 A 的元素所组成的集合称为 A 关于 T 的余集(图 2) . 集合 A 关于集合 T 的余集用符号 $C_T A$ 表示,或者,当对于哪个集合取余集是显然的时候,常常简记为 CA . 这样

$$C_T A = \{x: x \in T \wedge x \mid \quad A\} .$$

如果 $A\quad T$, $B\quad T$, 集合 B 关于集合 A 的余集称为 A 与 B 的差集,记做 $A \setminus B$(图 3) ,即

$$A \setminus B = \{x: x \in A \wedge x \mid \quad B\} .$$

2

3

令 A 和 B 是集合 T 的子集 .

定义 3　集合

$$A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$$

称为集合 A 和 B 的并集(图 4) .

类似地,如果 $A_j(j = 1, \cdots, n)$是集合 T 的子集,则它们的并集是集合

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \{x: x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \cdots \vee x \in A_n\} .$$

定义 4　集合

$$A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$$

称为集合 A 和 B 的交集(图 5) .

4

5

类似地,符号 $\bigcap_{j=1}^{n} A_j$ 代表集合 T 的子集 $A_j(j = 1, \cdots, n)$的交集,即

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j = \{x: x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \cdots \wedge x \in A_n\} .$$

如果对于每一个 $\mu \in M$ 对应某个集合 A_μ,则称给出了一个集合族$\{A_\mu\}$, $\mu \in M$. 在这个情况下集合

$$\bigcup_{\mu \in M} A_\mu = \{x: \text{存在 } \mu \in M \text{ 使得 } x \in A_\mu\}$$

称为集合族 A_μ 的并 . 而集合 $\bigcap_{\mu \in M} A_\mu = \{x: x \in A_\mu, " \mu \in M\}$ 称为集合族 A_μ 的交 .

定义 5　由两个集合的差集 $A \setminus B$ 和 $B \setminus A$ 的并集定义的集合,称为集合 A 和 B 的对称差集(图 6) .

图　6

用符号 $A \Delta B$ 表示对称差 .

定义 6　a 和 b 是两个元素,如果指定了哪一个是第一个,哪一个是第二个,且((a, b)

$= (c, d)) \quad (a = c \wedge b = d)$,则称其为一个有序对.

用符号(a, b)表示元素 a 和 b 的有序对.

同样可以定义 n 个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 形成的有序组,并用符号$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$表示.元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 称为有序组的坐标.

定义 7 所有可能的有序对(a, b)的总体,其中 $a \in A, b \in B$,称为集合 A 和 B 的积,并用符号 $A \times B$ 表示.

同样,符号 $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ 表示集合 $A_j \quad T (j = 1, \cdots, n)$的积,即所有可能的有序组$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$的总体,其中 $a_j \in A_j (j = 1, \cdots, n)$.

1.3 布尔代数

令 A 和 B 是集合 T 的任意两个子集.那么由并集、交集和余集运算的定义可以直接地得出下列命题:

1) $A \cup B \quad T, A \cap B \quad T$.(并与交集运算的封闭性)

2) $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$.(并与交集运算的可交换性)

3) $A \cup (B \cup D) = (A \cup B) \cup D; A \cap (B \cap D) = (A \cap B) \cap D$.(并集与交集运算的可结合性)

4) $A \cup (B \cap D) = (A \cup B) \cap (A \cup D)$.(并集关于交集运算的可分配性)

5) $A \cup A = A \cap A = A$.

6) $(A \cup B = B) \quad (A \cap B = A)$.

7) $A \cup \quad = A, A \cap T = A, A \cap \quad = \quad , A \cup T = T$.

8) $A \cup \complement A = T, A \cap \complement A = \quad$.

如果对于集合 $\sigma = \{A, B, C, \cdots\}$上的元素定义了并$(\cup)$以及交$(\cap)$,它们满足关系 1)—8),那么三元组$(\sigma, \cup, \cap)$称为一个布尔代数.这样,如果 σ 是 T 的所有子集形成的族,则$(\sigma, \cup, \cap)$是一个布尔代数.

1.4 对偶性原则

对于集合 T 的任意两个子集恒有等式

$$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B, \quad \complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B. \tag{1}$$

等式(1)给出的性质称为对偶性原则.可以用下面说法表述:并集的余集等于余集的交集,交集的余集等于余集的并集.不难把对偶性原则推广到任意个子集 A_μ 上去.这时

$$\complement \bigcup_\mu A_\mu = \bigcap_\mu \complement A_\mu, \quad \complement \bigcap_\mu A_\mu = \bigcup_\mu \complement A_\mu. \tag{2}$$

在这种情况下余集符号 $\complement$ 与符号$\cup$或者$\cap$可以交换位置,同时要把$\cup$和$\cap$这两个符号互换.

1.5　集合代数

令 T 是某个集合, $P(T)$ 是集合 T 中所有可能子集的集合.

定义 1　非空的集合族 $R \quad P(T)$, 它关于并集、交集以及差集运算封闭, 称为一个集合环.

定义 2　如果集合 $E\in\Sigma$ 而且 " $A\in\Sigma$ 恒有 $A\cap E=A$, 则称集合 E 为 Σ 的单位元.

定义 3　含有单位元的集合环称为一个集合代数.

定义 4　集合 $S \quad P(T)$, 如果它包含空集, 而且如果 " $A\in S$ 和 " $A_1 \quad A$ 存在集合 $A_2, A_3, \cdots, A_n\in S$ 使得

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n,$$

其中符号∪表示不相交集合的并集, 就称 S 是一个半环.

1　证明 1.3 节中的关系式 1)—8).

1) 根据 1.2 节的定义 3 得

$$A \cup B = \{x \in T: x \in A \vee x \in B\},$$

因此, 从 $x\in A\cup B$ 就得知 $x\in T$, 即 $A\cup B \quad T$.

类似地, 根据 1.2 节的定义 4 得

$$A \cap B = \{x \in T: x \in A \wedge x \in B\},$$

所以从 $x\in A\cap B$ 也就得知 $A\cap B \quad T$.

2) 因为命题 $x\in A\vee x\in B$ 等价于 $x\in B\vee x\in A$,

故
$$\begin{aligned} A\cup B &= \{x\in T: x\in A\vee x\in B\} = \{x\in T: x\in B\vee x\in A\} \\ &= B\cup A. \end{aligned}$$

可以类似地证明第二个等式.

3) 根据逻辑符号∨的性质, 可知

$$\begin{aligned} A \cup (B \cup D) &= \{x \in T: x \in A \vee x \in (B \cup D)\} \\ &= \{x \in T: x \in A \vee (x \in B \vee x \in D)\} \\ &= \{x \in T: (x \in A \vee x \in B) \vee x \in D\} \\ &= \{x \in T: x \in (A \cup B) \vee x \in D\} \\ &= (A \cup B) \cup D. \end{aligned}$$

可以类似地证明 3) 中第二个等式.

4) 我们有

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap D) &= \{x \in T: x \in A \vee x \in (B \cap D)\} \\ &= \{x \in T: x \in A \vee (x \in B \wedge x \in D)\} \\ &= \{x \in T: (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in D)\} \\ &= \{x \in T: (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup D)\} \\ &= (A \cup B) \cap (A \cup D). \end{aligned}$$

可以类似地证明第二个等式.

5) 令 $x\in A\cup A$, 则有 $x\in A\vee x\in A$, 即 $x\in A$, 于是 $A\cup A\subset A$ 成立. 反过来的关系 $A\subset A\cup A$ 可以直接从蕴含的定义得到, 从这两个蕴含关系得出 $A\cup A=A$.

可以类似地证明 $A\cap A=A$.

6) 假设等式 $A\cap B=A$ 成立, 则

$$(A\cap B=A)\Rightarrow(A\subset A\cap B)\Rightarrow(A\subset B).$$

利用得到的蕴含关系, 得出

$$A\cup B=\{x\in T: x\in A\vee x\in B\}\subset\{x\in T: x\in B\vee x\in B\}=B.$$

又因为 $A\cup B\supset B$, 则 $A\cup B=B$. 这样

$$(A\cap B=A)\Rightarrow(A\cup B=B). \tag{1}$$

利用蕴含关系 $A\subset B$ 得知

$$A\cap B=\{x\in T: x\in A\wedge x\in B\}\supset\{x\in T: x\in A\wedge x\in A\}=A.$$

又因为该式及反向蕴含关系 $A\cap B\subset A$, 则 $A\cap B=A$, 从而有

$$(A\cup B=B)\Rightarrow(A\cap B=A). \tag{2}$$

从式(1)和式(2)得出 $(A\cap B=A)\Leftrightarrow(A\cup B=B)$.

7) 如果 $x\in A\cup\varnothing$, 则 $x\in A\vee x\in\varnothing$. 因为集合 $\varnothing$ 不包含任何元素, 由 $x\in A\cup\varnothing$ 得知 $x\in A$, 即 $A\cup\varnothing\subset A$. 它与蕴含关系 $A\cup\varnothing\supset A$ 合在一起等价于等式 $A\cup\varnothing=A$.

其次, 从 $\varnothing\subset A\cap\varnothing\subset\varnothing$ 直接得到等式 $A\cap\varnothing=\varnothing$.

因为 $A\subset T$, 则 $A\cap T=\{x\in T: x\in A\wedge x\in T\}\supset\{x\in T: x\in A\wedge x\in A\}=A$, 连同蕴含关系 $A\cap T\subset A$ 就得出等式 $A\cap T=A$.

最终可以从 $T\subset A\cup T\subset T$ 直接得到等式 $A\cup T=T$.

8) 根据性质 1)

$$A\cup \complement A\subset T. \tag{3}$$

令 $x\in T$, 如果 $x\in A$, 则 $x\in A\cup\complement A$; 如果 $x\notin A$, 则 $x\in\complement A$, 从而 $x\in A\cup\complement A$. 这样, 从 $x\in T$ 得出 $x\in A\cup\complement A$, 即

$$T\subset A\cup\complement A. \tag{4}$$

从式(3)和式(4)得到等式

$$A\cup\complement A=T. \tag{5}$$

为了证明等式 $A\cap\complement A=\varnothing$, 应该指出集合 $A\cap\complement A$ 不包含任何元素. 实际上, 根据等式(5)集合 T 的任一元素属于 A 或者 $\complement A$. 如果 $x\in A$, 则 $x\notin\complement A$, 并有 $x\notin A\cap\complement A$. 如果 $x\in\complement A$, 则 $x\notin A$(因为不然的话 $x\in A$, 则 $x\notin\complement A$), 又得到 $x\notin A\cap\complement A$. 因为集合 $A\cap\complement A$ 不包含任何一元素, 所以这个集合是空的, 也就是说 $A\cap\complement A=\varnothing$.

2　证明对偶性原则

$$\complement(A\cup B)=\complement A\cap\complement B, \tag{1}$$

$$\complement(A\cap B)=\complement A\cup\complement B. \tag{2}$$

(见 1 .4 节等式(1)) .

证明等式(1)(可以类似地证明等式(2)) .

令 $x\in \complement(A\cup B)$,则根据前一问题的等式(5)及 $A\cap \complement A =$ 得知 x廄$A\cup B$,即 x廄 $A\wedge x$廄B .从而 $x\in \complement A\wedge x\in \complement B$,因此 $x\in \complement A\cap \complement B$. 这样,就有

$$\complement(A\cup B)\quad \complement A\cap \complement B . \tag{3}$$

现在假设 $x\in \complement A\cap \complement B$,则 $x\in \complement A\wedge x\in \complement B$,即 x廄$A\wedge x$廄B,它意味着 x廄$A\cup B$,即 $x\in \complement(A\cup B)$,由此得知

$$\complement A\cap \complement B\quad \complement(A\cup B) . \tag{4}$$

由(3)和(4)得出等式(1) .

3 证明等式

$$A\cup (A\cap B) = A\cap (A\cup B) = A . \tag{1}$$

利用问题 1 的 4)和 5),得到等式(1)的第一部分

$$A\cup (A\cap B) = (A\cup A)\cap (A\cup B) = A\cap (A\cup B) .$$

剩下只要证明 $A\cap (A\cup B) = A$. 如果 $x\in A\cap (A\cup B)$,则 $x\in A\wedge x\in A\cup B$,因此

$$A\cap (A\cup B)\quad A . \tag{2}$$

如果 $x\in A$,则 $x\in A\cup B$,给出 $x\in A\cap (A\cup B)$,即

$$A\quad A\cap (A\cup B) . \tag{3}$$

由(2)和(3)得到等式(1)的第二部分 .

4 证明等式:

1) $\complement\complement A = A$; 2) $\complement T =$; 3) $\complement$ $= T$.

1) 如果 $x\in \complement\complement A$,则 x廄$\complement A$,所以 $x\in A$. 因此关系 $\complement\complement A$ A 成立 . 反之,若 $x\in A$,则 x廄$\complement A$,所以 $x\in \complement\complement A$,又得到了 A $\complement\complement A$. 由这两个给出的关系得到等式 1) .

2) 集合 $\complement T$ 是空的,因为对于任何 $x\in T$ 其反命题 x廄$\complement T$ 都成立 .

3) 如果 $x\in T$,则 x廄 ,所以 $x\in \complement$,从而有 T $\complement$. 又因为永远有 $\complement$ T,由最后两个蕴含关系得到等式 3) .

5 证明如下关系成立:

$$(A\setminus B)\quad (A\setminus D)\cup (D\setminus B) .$$

令 $x\in (A\setminus B)$则 $x\in A\wedge x$廄B . 当 x廄D 时,有 $x\in (A\setminus D)$,因而有 $x\in (A\setminus D)\cup (D\setminus B)$.又假设 $x\in D$,因为 x廄B,得到 $x\in (D\setminus B)$,所以 $x\in (A\setminus D)\cup (D\setminus B)$,这样,无论 $x|\ D$ 或 $x\in D$,均可由 $x\in (A\setminus B)$得出 $x\in (A\setminus D)\cup (D\setminus B)$,这个关系式证明了结论 .

6 确定集合 $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $A\Delta B$ 如果

1) $A = \{x: 0 < x < 2\}$, $B = \{x: 1\leq x\leq 3\}$;

2) $A = \{x: x^2 - 3x < 0\}$, $B = \{x: x^2 - 4x + 3\geq 0\}$;

3) $A = \{x: |x - 1| < 2\}$, $B = \{x: |x - 1| + |x - 2| < 3\}$.

利用并集、交集、差集和对称差集的定义得出

1) $A\cup B=\{x:(0<x<2)\vee(1\leq x\leq 3)\}=\{x:0<x\leq 3\}$;

$A\cap B=\{x:(0<x<2)\wedge(1\leq x\leq 3)\}=\{x:1\leq x<2\}$;

$A\setminus B=\{x:(0<x<2)\wedge x\notin[1,3]\}=\{x:0<x<1\}$;

$B\setminus A=\{x:(1\leq x\leq 3)\wedge x\notin(0,2)\}=\{x:2\leq x\leq 3\}$;

$A\Delta B=\{x:(A\setminus B)\cup(B\setminus A)\}=\{x:(0<x<1)\vee(2\leq x\leq 3)\}$.

2) 由 $x^2-3x<0$ 得 $0<x<3$,即 $A=\{x:0<x<3\}$. 而当 $-\infty<x\leq 1$ 和 $3\leq x<+\infty$ 时不等式 $x^2-4x+3\geq 0$ 成立. 取 $D=\{x:-\infty<x\leq 1\}$, $E=\{x:3\leq x<+\infty\}$, 那么 $B=D\cup E$. 利用集合运算的性质得到:

$$\begin{aligned}A\cup B&=A\cup(D\cup E)=A\cup D\cup E\\&=\{x:(0<x<3)\vee(-\infty<x\leq 1)\vee(3\leq x<+\infty)\}\\&=\{x:-\infty<x<+\infty\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A\cap B&=A\cap(D\cup E)=(A\cap D)\cup(A\cap E)\\&=\{x:(0<x\leq 1)\vee x\in\ \ \}=\{x:0<x\leq 1\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A\setminus B&=A\setminus(D\cup E)=\{x:x\in A\wedge(x\notin D\vee x\notin E)\}\\&=\{x:(x\in A\wedge x\notin D)\vee(x\in A\wedge x\notin E)\}\\&=(A\setminus D)\cup(A\setminus E)=\{x:1<x<3\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B\setminus A&=(D\cup E)\setminus A=\{x:(x\in D\vee x\in E)\wedge x\notin A\}\\&=\{x:(x\in D\wedge x\notin A)\vee(x\in E\wedge x\notin A)\}=(D\setminus A)\cup(E\setminus A)\\&=\{x:(-\infty<x\leq 0)\vee(3\leq x<+\infty)\};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A\Delta B&=A\Delta(D\cup E)=(A\setminus(D\cup E))\cup((D\cup E)\setminus A)\\&=\{x:(1<x<3)\vee(-\infty<x\leq 0)\vee(3\leq x<+\infty)\}\\&=\{x:(-\infty<x\leq 0)\vee(1<x<+\infty)\}.\end{aligned}$$

3) 写出集合 A 的明显表达式为 $A=\{x:-2<x-1<2\}=\{x:-1<x<3\}$. 然后,解不等式

$|x-1|+|x-2|<3$ 得到集合 B 的明显表达式 $B=\{x:0<x<3\}$. 因此

$$A\cup B=\{x:(-1<x<3)\vee(0<x<3)\}=\{x:-1<x<3\};$$

$$A\cap B=\{x:(-1<x<3)\wedge(0<x<3)\}=\{x:0<x<3\};$$

$$A\setminus B=\{x:(-1<x<3)\wedge x\notin(0,3)\}=\{x:-1<x\leq 0\};$$

$$B\setminus A=\{x:(0<x<3)\wedge x\notin(-1,3)\}=\ \ ;$$

$$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=A\setminus B=\{x:-1<x\leq 0\}.$$

7 取 $A=\{(x,y):|x|+|y|<\delta\}$(图 7), $B=\{(x,y):\ \ x^2+y^2<\delta\}$(图 8), $D=\{(x,y):\max\{|x|,|y|\}<\delta\}$(图 9). 指出 $A\quad B\quad D$.

7 9

8

令$(x, y)\in A$,则$|x|+|y|<\delta$,从而

$$x^2+y^2 \leq \quad x^2+2|x||y|+y^2 = |x|+|y| < \delta,$$

即$(x, y)\in B$. 它同时也导出不等式

$$\max\{|x|, |y|\} \leq \quad x^2+y^2 < \delta .$$

从而有蕴含关系$(x, y)\in D$. 这样得到 $A \quad B \quad D$.

8 令 $A=\{x: 2\leq x\leq 4\}$, $B=\{y: 1\leq y\leq 3\}$. 在 xOy 平面上给出集合 $A\times B$的点 .

因为 $A\times B=\{(x, y): (2\leq x\leq 4)\wedge(1\leq y\leq 3)\}$, 则 $A\times B$是由边为直线 $x=2$, $x=4$, $y=1$, $y=3$ 所围成矩形内点的全体(图 10) .

图 10

9 指出对于并和差封闭的族 R 是一个环 .

如果 A 和 B 是集合族 R 中任意的集合,因为 $A\cap B=A\setminus(A\setminus B)$,而 $A \quad R$, $A\setminus B \quad R$,则 $A\cap B \quad R$. 因此,族 R 关于并、交和差封闭,即它构成一个环 .

10 族 $R=\{\alpha, \quad\}$是由非空集 α和空集 构成的 . 证明它是一个环 . 这个环是否为一个代数 ?

族 R 包含自身元素的并集$\alpha\cup \quad =\alpha$和差集$\alpha\setminus \quad =\alpha$, $\quad\setminus\alpha= \quad$. 所以 R 关于并与差封闭,从前例得知它是一个环 . 又因为元素 $\alpha\in R$, R 包括了族 R 的全部成员,则 α是族 R 的单位元,所以 R 是一个代数 .

11 令集合 $T=\{\alpha, \beta, \gamma\}$由三个元素组成,而 $P(T)$是 T的所有子集的族 .

1) 写出由 $P(T)$中元素所有可能构成的代数并指出其单位元 .

2) 写出由 $P(T)$中元素可能构成的环 .

3) 写出由 $P(T)$元素可能构成的半环,且说明那些不是环 .

1) 最简单的代数是族$\{\quad\}$,它由唯一空集构成;三个代数

$$\{\{\alpha\}, \quad\}, \{\{\beta\}, \quad\}, \{\{\gamma\}, \quad\},$$

均由两个元素构成,相应的单位元是$\{\alpha\}$, $\{\beta\}$, $\{\gamma\}$(见前例);6 个代数

$$\{\{\alpha, \beta\}, \{\alpha\}, \{\beta\}, \quad\}, \{\{\alpha, \gamma\}, \{\alpha\}, \{\gamma\}, \quad\},$$

$$\{\{\beta, \gamma\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \quad\}, \{\{\alpha, \beta\}, \quad\}, \{\{\alpha, \gamma\}, \quad\}, \{\{\beta, \gamma\}, \quad\},$$

它们相应的单位元是$\{\alpha, \beta\}$, $\{\alpha, \gamma\}$, $\{\beta, \gamma\}$, $\{\alpha, \beta\}$, $\{\alpha, \gamma\}$, $\{\beta, \gamma\}$. 不难看出,这些族中任何一个对于并集和差集封闭: 4 个代数

$$\{T, \{\alpha, \beta\}, \{\gamma\}, \quad\}, \{T, \{\alpha, \gamma\}, \{\beta\}, \quad\}, \{T, \{\beta, \gamma\}, \{\alpha\}, \quad\}, \{T, \quad\},$$

它们的单位元是 T . 最后,所有列出代数的并集

$$\{T, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \gamma\}, \{\beta, \gamma\}, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \quad\}$$

也是以 T 为单位元的代数 .

2) 所有在 1)中给出的代数自然都是环,没有其他环存在 .

3) 所有的环都是半环 . 其实,从 A 和 $A_1 \quad A$ 属于环 R 的条件得到 $A=A_1\cup A_2$,其中

$A_2 = A \setminus A_1 \quad R$.

此外,在此情况下可以构造出不是环的半环例子,例如:

$$\{\{\alpha\},\{\beta\}, \quad \},\{\{\alpha\},\{\gamma\}, \quad \},\{\{\beta\},\{\gamma\}, \quad \},$$
$$\{\{\alpha,\beta\},\{\gamma\}, \quad \},\{\{\alpha,\gamma\},\{\beta\}, \quad \},\{\{\beta,\gamma\},\{\alpha\}, \quad \} .$$

事实上,上面给出的 6 个族里,任意两个元素的交集属于该族 . 其次,族中每一个非空的元素都作为族本身的一个子集 . 例如,对族$\{\{\beta,\gamma\},\{\alpha\}, \quad \}$有

$$\{\beta,\gamma\} = \{\beta,\gamma\} \cup \quad = \{\beta,\gamma\},\{\alpha\} = \{\alpha\} \cup \quad = \{\alpha\},$$

即确定半环的第二个条件得以满足 . 包含$\{\alpha\},\{\beta\},\{\gamma\}, \quad$ 的任何一个族是半环,且不重合于 $P(T)$:

$\{\{\alpha,\beta\},\{\alpha\},\{\beta\},\{\gamma\}, \quad \},\{\{\alpha,\gamma\},\{\alpha\},\{\beta\},\{\gamma\}, \quad \}$等等 .

例如,让我们指出族 $S=\{\{\alpha,\beta\},\{\alpha\},\{\beta\},\{\gamma\}, \quad \}$为一个半环 . 事实上, S 中任何两个元素的交集又是 S 的元素 . 进而有,所有 S 的元素都可以分解为不相交的集合: $\{\alpha,\beta\}=\{\alpha\}\cup\{\beta\},\{\alpha\}=\{\alpha\},\{\beta\}=\{\beta\},\{\gamma\}=\{\gamma\}$. 这样,族 S 是一个半环 .

12 给定三个数 a, b 和 c 满足不等式 $a < c < b$. 证明由闭区间和半闭区间形成的集合

$$S = \{[a,b],[a,c],[c,b],[a,c),[c,c],(c,b], \quad \}$$

是半环但不是环 .

族 S 中任何两个元素的交集是 S 中的元素,即 S 关于交集运算是封闭的 . 其次 S 中任何元素可以分解成属于 S 的不相交集合的并集 .

例如:

$$\begin{aligned}[a,b] &= [a,c] \cup (c,b] = [a,c) \cup [c,c] \cup (c,b] \\ &= [a,c) \cup [c,b], \\ [a,c] &= [a,c) \cup [c,c] .\end{aligned}$$

等等 . 族 S 不是环,因为它关于并集运算不封闭 . 例如$[a,c)\cup(c,b]$不属于 S .

13 证明

$$(A \cap B) \times (D \cap E) = (A \times D) \cap (B \times E) . \tag{1}$$

令$(x,y)\in(A\cap B)\times(D\cap E)$,则有 $x\in A\cap B$ 和 $y\in(D\cap E)$,它等价于 $x\in A\wedge x\in B$和 $y\in D\wedge y\in E$. 又因为 $x\in A\wedge y\in D$,得知$(x,y)\in A\times D$. 类似地,由 $x\in B\wedge y\in E$ 得到$(x,y)\in B\times E$,于是$(x,y)\in(A\times D)\cap(B\times E)$和

$$(A \cap B) \times (D \cap E) \quad (A \times D) \cap (B \times E) . \tag{2}$$

现假设$(x,y)\in((A\times D)\cap(B\times E))$,那么$(x,y)\in(A\times D)\wedge(x,y)\in(B\times E)$,从而有 $x\in A\wedge y\in D$ 和 $x\in B\wedge y\in E$.由此得出 $x\in A\cap B$ 和 $y\in D\cap E$,即$(x,y)\in((A\cap B)\times(D\cap E))$. 所以蕴含关系

$$(A \times D) \cap (B \times E) \quad (A \cap B) \times (D \cap E) \tag{3}$$

成立.**由**(2)**和**(3)**得到**(1).

练 习 题

1 证明等式: 1) $\mathrm{C}\bigcup\limits_{\mu} A_\mu = \bigcap\limits_{\mu} \mathrm{C}A_\mu$; 2) $\mathrm{C}\bigcap\limits_{\mu} A_\mu = \bigcup\limits_{\mu} \mathrm{C}A_\mu$, (**见** 1.4 **节等式**(2))**其中** μ**属于任意集合**.

2 令 $A \quad B$ **且** D **为任意集合**.**证明蕴含关系**: 1) $A\cap D \quad B\cap D$; 2) $A\cup D \quad B\cup D$.

3 证明: **如果** $A \quad B\wedge A \quad D$, **则** $A \quad B\cap D$. **4 证明**: **如果** $A \quad D\wedge B \quad D$, **则** $A\cup B \quad D$.

5 证明等式: 1) $A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$; 2) $A\cup B=(A\Delta B)\Delta(A\cap B)$; 3) $A\setminus B=A\Delta(A\cap B)$.

6 证明下面的关系对于对称差成立

$$A\Delta B \quad ((A\Delta D)\cup(B\Delta D)).$$

7 设 A_1, A_2, B_1, B_2 **为集合** T **的子集**.**证明下式**: 1) $(A_1\cup A_2)\setminus(B_1\cup B_2) \quad (A_1\setminus B_1)\cup(A_2\setminus B_2)$; 2) $(\mathrm{C}A_1\cup\mathrm{C}A_2)\Delta(\mathrm{C}B_1\cup\mathrm{C}B_2) \quad \mathrm{C}((\mathrm{C}A_1\Delta\mathrm{C}B_1)\cap(\mathrm{C}A_2\Delta\mathrm{C}B_2))$.

8 设 A_1, A_2, B_1, B_2 **为集合** T **的子集**.**证明**: 1) $(A_1\cup A_2)\Delta(B_1\cup B_2) \quad (A_1\Delta B_1)\cup(A_2\Delta B_2)$; 2) $(A_1\cap A_2)\Delta(B_1\cap B_2) \quad (A_1\Delta B_1)\cap(A_2\Delta B_2)$; 3) $(A_1\setminus A_2)\Delta(B_1\setminus B_2) \quad (A_1\Delta B_1)\setminus(A_2\Delta B_2)$.

9 确定集合 $A\cup B, A\cap B, A\setminus B, B\setminus A, A\Delta B$, **如果**:

1) $A=\{x: -4<x<1\}, B=\{x: 0<x<4\}$;

2) $A=\{x: x^2-x-2>0\}, B=\{x: 6x-x^2\geq 0\}$;

3) $A=\{x: \sin\pi x=0\}, B=\left\{x: \cos\dfrac{\pi x}{2}=0\right\}$.

10 确定集合 $A\cup B, A\cap B, A\setminus B, B\setminus A, A\Delta B$, **如果**:

1) $A=\{(x,y): x^2+y^2\leq 1\}, B=\{(x,y): |x|+|y|\leq 1\}$;

2) $A=\{(x,y): \max(|x|,|y|)\leq 1\}, B=\{(x,y): |x|+|y|\leq 1\}$;

3) $A=\{(x,y): |x|+|y|<2\}, B=\{(x,y): \sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}<2\}$;

4) $A=\{(x,y): \sqrt{x^2+y^2}\leq 2\}, B=\{(x,y): \max(|x+1|,|y+1|)\leq 2\}$.

11 确定集合 $A\times B$, **如果**:

1) $A=\{x: -2<x\leq 1\}, B=\{y: -3\leq y<1\}$;

2) $A=\{x: 0\leq x\leq 1\}, B=D\times E$, **其中** $D=\{y: 0\leq y\leq 2\}, E=\{z: 0\leq z\leq 3\}$;

3) $A=\{x: -\infty<x<+\infty\}, B=\{y: \sin\pi y=0\}$;

4) $A=\{x: \sin\pi x=0\}, B=\{y: -\infty<y<+\infty\}$.

12 令集合 T **由** 4 **个元素** α, β, γ **和** δ **构成**, $P(T)$**是集合** T **中所有子集的集合**(**包括空集在内**).

1) **构造以下列元素为其单位元的代数**:

$$\{\alpha\}, \{\alpha, \beta\}, \{\alpha, \beta, \gamma\}, \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}.$$

2) **构造包含下列元素的环**.**这些环是代数吗**?

$$\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}, \{\alpha\}, \{\beta\}, \{\gamma\}, \{\delta\}.$$

3) **构造包含**$\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$**的半环**(**但不是环**).

13 证明数轴上的所有闭区间,**半闭区间和开区间构成的集合是半环而不是环**.

14 证明所有形如 $\Pi=\{(x,y): a<x\leq b, c<y\leq d\}$ **的矩形**(**其中** a, b, c **和** d **是实数**,**且** $a<b$, $c<d$)**是半环但不是环**.

15 在 14 题给出的集合中补充什么元素可以使其构成环 .

16 证明: 1) $(A\cup B)\times D=(A\times D)\cup(B\times D)$; 2) $A\times(B\cup D)=(A\times B)\cup(A\times D)$.

17 证明: 1) $(A\setminus B)\times D=(A\times D)\setminus(B\times D)$; 2) $A\times(B\setminus D)=(A\times B)\setminus(A\times D)$.

18 证明: $(A\cup B)\times(D\cup E)=(A\times D)\cup(B\times D)\cup(A\times E)\cup(B\times E)$.

2 函数与映射

2.1 函数

定义 把集合 E 的每一个元素 x 对应于一个确定的元素 $f(x)\in F$ 的规则或者规律称为从集合 E 到集合 F 的一个映射,或者定义在 E 上而取值在 F 中的一个函数 .

E 的元素 x 称为独立变量或函数 f 的自变量 . 元素 $f(x)\in F$ 称为函数 f 的值,或者反过来, $x\in E$ 称为函数 $f(x)\in F$ 的原像 .

一般用 f 或符号 $f: E\to F$ 表示函数,它指出 f 把集合 E 映射到 F 中 . 使用 $x\mapsto f(x)$ 这样的符号时,代表元素 x 对应于 $f(x)$,有时用表达对应关系的等式给出函数是很方便的 . 例如,可以说“函数 f 由等式 $f(x)=\quad x^2+1$, $x\in[a,b]$ 给出” . 如果将集合 F 中任意元素记为 y,即 $F=\{y\}$,则映射 $f: E\to F$ 写成等式 $y=f(x)$,并说这个映射是显式给出的 .

2.2 在给定映射下集合的像和原像

令给定映射 $f: E\to F$ 和集合 $D\quad E$.

定义 1 F 中元素构成的集合,其中每一个至少是在映射 f 下集合 D 中一个元素的像,就称其为集合 D 的像,并表示为 $f(D)$.

显然
$$f(D)=\{f(x)\in F: x\in D\} .$$

如果给出集合 $Y\quad F$.

定义 2 集合 E 中使得 $f(x)\in Y$ 的所有 x 的集合称为集合 Y 在映射 f 下的原像集合,并表示为 $f^{-1}(Y)$.

显然
$$f^{-1}(Y)=\{x\in E: f(x)\in Y\} .$$

如果 $y\in F$,则 $f^{-1}(y)=\{x\in E: f(x)=y\}$. 如果对于每一个 $y\in F$ 集合 $f^{-1}(y)$ 中的元素不超过一个,则称 f 为从 E 到 F 的一对一的映射 .

定义 3 给定映射 $f: E\to F$.

如果 $(x\neq x')\quad f(x)\neq f(x')$,或者如果 " $y\in F$,方程 $f(x)=y$ 有不多于一个解,则称映射 f 是单射(或者从集合 E 到 F 一对一的映射) .

如果 $f(E)=F$ 或者 " $y\in F$ 方程 $f(x)=y$ 至少有一个解,则称映射 f 是满射(或映上映射,或者集合 E 到 F 上的映射)

如果它既是单射又是满射,或对 " $y\in F$,方程 $f(x)=y$ 存在唯一的解,则称映射 f 是

1-1 的(或双射,或从集合 E 到 F 单值的映上映射).

2.3 复合映射、逆,参数化的映射和隐映射

定义 1 令 $f: E\to F$, $g: F\to G$. 因为 $f(E)\subset F$, 则映射 g 把每个元素 $f(x)\in f(E)\subset F$ 对应于一个确定的元素 $g(f(x))\in G$.

这样,每个 $x\in E$ 按照规则 $g\circ f$ 对应于 $(g\circ f)(x)=g(f(x))$, $g(f(x))\in G$, 这就定义了一个新的映射(或新函数),并称其为复合映射,或者叠合映射.

定义 2 令 $f: E\to F$ 是一个双射且 $F=\{y\}$. 由于 f 的双射性,每个 $y\in F$ 对应唯一的 $x\in E$. 用 $x=f^{-1}(y)$ 表示 $f(x)=y$. 这样就定义了一个映射 $f^{-1}: F\to E$. 它被称为 f 的逆映射或者函数 f 的反函数.

显然 f 是 f^{-1} 的逆映射,所以映射 f 和 f^{-1} 称为互逆的. 对于它们有如下关系:

$$f(f^{-1}(y)) = y,\ \forall y\in F;\ f^{-1}(f(x)) = x,\ \forall x\in E.$$

定义 3 令 $\varphi: \Omega\to X$, $\psi: \Omega\to Y$, 并且至少其中之一,比如说 φ 是双射. 则存在逆映射 $\varphi^{-1}: X\to\Omega$. 并且 $\psi\circ\varphi^{-1}: X\to Y$.

这样定义的映射称为借助于映射 $\varphi: \Omega\to X$, $\psi: \Omega\to Y$ 给出的参数化的映射,而且 Ω 中的变量称为参数.

定义 4 令在集合 $G=X\times Y$ 上定义了映射 $F: G\to\Delta$, 其中集合 Δ 包含零元素. 假设存在集合 $E\subset X$, $B\subset Y$ 使得对于每一个固定的 $x\in E$ 方程 $F(x,y)=0$ 有唯一解 $y\in B$, 在集合 E 上就可以定义映射 $f: E\to B$, 它把每个 $x\in E$ 对应于值 $y\in B$. y 是关于给定 x 时方程 $F(x,y)=0$ 的解.

关于这样定义的映射 $y=f(x)$, $x\in E$, $y\in B$, 称其为由 $F(x,y)=0$ 隐式定义的.

定义 5 给定映射 $f: E\to F$, $g: D\to F$. 如果 $E\supset D$, 且 $f(x)=g(x)\ \forall x\in D$, 则称 f 是 g 的延拓, g 是 f 的限制.

映射 $f: E\to F$ 在集合 $D\subset E$ 上的限制记为 $f|_D$.

定义 6 集合

$$G=\{(x, f(x)): x\in E, f(x)\in F\}$$

称为映射 $f: E\to F$ 的图形.

显然, $G\subset E\times F$.

14 令映射 $f: R\to[-1,1]$ 由 $f(x)=\sin x$ 定义,求出:

1) $f(0)$; 2) $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$; 3) $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$; 4) $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$; 5) $f\ \ -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\ \ $;

6) $f\ \ -\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\ \ $; 7) $f\ \ 0,\frac{\pi}{6}\ \ $; 8) $f([0,2\pi])$; 9) $f^{-1}(0)$;

10) $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$; 11) $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 12) $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

13) $f^{-1}([-1,1])$; 14) $f^{-1}((-1,1))$; 15) $f^{-1}\ \ 0,\frac{1}{2}\ \ $.

利用三角函数表得出:

1) $f(0)=\sin 0=0$; 2) $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$;

3) $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; 4) $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5) 因为 $f\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$,并且正弦函数的自变量从 $-\frac{\pi}{2}$ 变到 $\frac{\pi}{2}$ 时,其函数值从 -1 达到 $+1$. 因此, $f\left(\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)=\left\{\sin x: -\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}\right\}=[-1,1]$.

类似地可以求出:

6) $f\left(\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)=\left\{\sin x: x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right\}=(-1,1)$;

7) $f\left(\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\right)=\left\{\sin x: x\in\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\right\}=\left[0,\frac{1}{2}\right]$;

8) $f([0,2\pi])=\{\sin x: x\in[0,2\pi]\}=[-1,1]$.

9) 因为如果 $x=k\pi(k\in\mathrm{Z})$, $\sin x=0$, 则

$$f^{-1}(0)=\{x:\sin x=0\}=\{k\pi, k\in\mathrm{Z}\}.$$

10) 如果 $\sin x=\frac{1}{2}$, 则 $x=(-1)^n\arcsin\frac{1}{2}+n\pi=(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi$, $n\in\mathrm{Z}$. 所以 $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\left\{(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi, n\in\mathrm{Z}\right\}$.

类似于前面得出:

11) $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\left\{x:\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}=\left\{(-1)^n\frac{\pi}{4}+n\pi, n\in\mathrm{Z}\right\}$;

12) $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\left\{x:\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}=\left\{(-1)^n\frac{\pi}{3}+n\pi, n\in\mathrm{Z}\right\}$.

13) 根据 2.2 节定义 2, 有

$$f^{-1}([-1,1])=\{x: f(x)=\sin x\in[-1,1]\}.$$

让我们指出 $f^{-1}([-1,1])=\mathrm{R}$. 事实上, 令 $x\in f^{-1}([-1,1])$ 和 $\alpha=\sin x$, 那么 $f(x)=\alpha, \alpha\in[-1,1]$. 所以 $x=((-1)^n\arcsin\alpha+n\pi)$, $x\in\mathrm{R}$, 于是 $f^{-1}([-1,1])$ R. 如果 $x\in\mathrm{R}$, 则 $\sin x\in[-1,1]$ 和 $x\in f^{-1}([-1,1])$, 即 $\mathrm{R}\in f^{-1}([-1,1])$, 这样 $f^{-1}([-1,1])=\mathrm{R}$.

14) 由等式 $\sin x=\pm 1$, 得出不属于 $f^{-1}((-1,1))$ 的那些 x 值的集合

$A=\left\{x: x=\frac{\pi}{2}+n\pi, n\in\mathrm{Z}\right\}$. 所以, 再考虑前题的结果, 有 $f^{-1}((-1,1))=\mathrm{R}\setminus A$.

15) 由等式 $f^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)=\left\{x:\sin x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\right\}$，令 $x\in f^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)$ 和 $\alpha=\sin x$，那么 $\alpha\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 和 $x=(-1)^n\arcsin x+n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$.

令 $n=2k$ 是个固定的数，则 $x=\arcsin\alpha+2k\pi$，并且当 α 从 0 变到 $\frac{1}{2}$ 时，变量 x 从 $2k\pi$ 变到 $\left(2k+\frac{1}{6}\right)\pi$，即 $x\in\left[2k\pi,\left(2k+\frac{1}{6}\right)\pi\right]$.

令 $n=2k+1$ 是一个固定的数，则 $x=-\arcsin\alpha+(2k+1)\pi$，而且当 α 从零变到 $\frac{1}{2}$ 时，变量 x 从 $(2k+1)\pi$ 变到 $\left(2k+\frac{5}{6}\right)\pi$，即 $x\in\left[\left(2k+\frac{5}{6}\right)\pi,(2k+1)\pi\right]$. 这样

$$f^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)\subset\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[2k\pi,\left(2k+\frac{1}{6}\right)\pi\right]\right)\cup\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[\left(2k+\frac{5}{6}\right)\pi,(2k+1)\pi\right]\right)$$

正反两方面的蕴含关系给出当 $x\in\left[2k\pi,\left(2k+\frac{1}{6}\right)\pi\right]$ 或 $x\in\left[\left(2k+\frac{5}{6}\right)\pi,(2k+1)\pi\right]$ 时 $\sin x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$. 所以

$$f^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)=\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[2k\pi,\left(2k+\frac{1}{6}\right)\pi\right]\right)\cup\left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[\left(2k+\frac{5}{6}\right)\pi,(2k+1)\pi\right]\right).$$

15 证明：如果 $f:E\to F$ 且 $A\subset E, B\subset E$，则有等式

$$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B). \tag{1}$$

根据 2.2 节定义 1 有

$$f(A\cup B)=\{f(x):x\in A\cup B\}.$$

令 $f(x)\in f(A\cup B)$，那么 $x\in(A\cup B)$，即 $x\in A\vee x\in B$. 如果 $x\in A\vee x\in B$，则 $f(x)\in f(A)\vee f(x)\in f(B)$，即 $f(x)\in(f(A)\cup f(B))$. 这证明了下面关系式

$$f(A\cup B)\subset(f(A)\cup f(B)). \tag{2}$$

令 $f(x)\in(f(A)\cup f(B))$，那么 $f(x)\in f(A)\vee f(x)\in f(B)$，因此 $x\in A\vee x\in B$，即 $x\in(A\cup B)$，所以 $f(x)\in f(A\cup B)$ 从而

$$(f(A)\cup f(B))\subset f(A\cup B). \tag{3}$$

由(2)和(3)直接得到(1) .

16 证明：如果 $f:E\to F$ 且 $A\subset F, B\subset F$，则下列等式成立：

1) $f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$;　　2) $f^{-1}(A\setminus B)=f^{-1}(A)\setminus f^{-1}(B)$;

3) $f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$.

1) 令 $x\in f^{-1}(A\cap B)$，则 $f(x)\in(A\cap B)$，即 $f(x)\in A\wedge f(x)\in B$. 如果 $x\in f^{-1}(A)\wedge x\in f^{-1}(B)$，则 $x\in(f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B))$. 这样就证明了蕴含关系

$$f^{-1}(A\cap B)\subset(f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)).$$

为了证明反向的蕴含关系，假设 $x\in(f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B))$，则有 $x\in f^{-1}(A)\wedge x\in$

$f^{-1}(B)$,由此得出 $f(x)\in A\wedge f(x)\in B$,即 $f(x)\in(A\cap B)$,于是 $x\in f^{-1}(A\cap B)$.因而有

$$(f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B))\qquad f^{-1}(A\cap B).$$

由上面给出的蕴含关系得到等式 1).

2) 令 $x\in f^{-1}(A\setminus B)$,那么 $f(x)\in(A\setminus B)$,即 $f(x)\in A\wedge f(x)\notin B$.又因为 $x\in f^{-1}(A)\wedge x\notin f^{-1}(B)$,所以 $x\in(f^{-1}(A)\setminus f^{-1}(B))$.这样

$$f^{-1}(A\setminus B)\qquad(f^{-1}(A)\setminus f^{-1}(B)).$$

如果 $x\in(f^{-1}(A)\setminus f^{-1}(B))$,则 $x\in f^{-1}(A)\wedge x\notin f^{-1}(B)$,从而 $f(x)\in A\wedge f(x)\notin B$,即 $f(x)\in(A\setminus B)$.这就证明了蕴含关系

$$(f^{-1}(A)\setminus f^{-1}(B))\qquad f^{-1}(A\setminus B)$$

的正确性.再利用相反方面的蕴含关系,就得到等式 2).

3) 如果 $x\in f^{-1}(A\cup B)$则 $f(x)\in(A\cup B)$,从而 $f(x)\in A\vee f(x)\in B$,那么 $x\in f^{-1}(A)\vee x\in f^{-1}(B)$,即 $x\in(f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B))$.于是

$$f^{-1}(A\cup B)\qquad(f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)).$$

同样,如果假设 $x\in(f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B))$,则 $x\in f^{-1}(A)\vee x\in f^{-1}(B)$,即 $f(x)\in A\vee f(x)\in B$,或者 $f(x)\in(A\cup B)$,因此 $x\in f^{-1}(A\cup B)$.从而有

$$(f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B))\qquad f^{-1}(A\cup B).$$

和此蕴含关系的相反方面一起就给出了等式 3).

17 令 $f: E\to F$, P 是集合 E 的一个子集族, Q 是集合 F 的一个子集族,并用下列表示方式:

$$f(P)=\{f(A)\in Q: A\in P\},$$
$$f^{-1}(Q)=\{f^{-1}(B)\in P: B\in Q\}.$$

证明 1) 如果 Q 是环,则 $f^{-1}(Q)$也是环;

2) 如果 P 是环,则 $f(P)$不一定是环.

1) 因为 Q 是环,则由 $B_1\in Q$ 和 $B_2\in Q$ 可得出$(B_1\cup B_2)\in Q$,$(B_1\setminus B_2)\in Q$.又根据前一个例子

$f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)=f^{-1}(B_1\cup B_2)\in f^{-1}(Q)$; $f^{-1}(B_1)\setminus f^{-1}(B_2)=f^{-1}(B_1\setminus B_2)\in f^{-1}(Q)$,即 $f^{-1}(Q)$是一个环.

2) 令 $E=\{a,b,c,d\}$, $F=\{a',b',d'\}$, $f(a)=a'$, $f(b)=f(c)=b'$, $f(d)=d'$.集合族

$$P=\{\{a,b,c,d\},\{a,b\},\{c,d\},\quad\}$$

是一个环,但 $f(\{a,b\})\setminus f(\{c,d\})=\{a',b'\}\setminus\{b',d'\}=\{a'\}\notin f(P)=\{\{a',b',d'\},\{a',b'\},\{b',d'\},\quad\}$,即 $f(P)$不是环.

18 下列函数 $f:[0,1]\to[0,3]$中的哪一个是单射、满射和双射.画出这些函数的图形

1) $x\mapsto 3\sin\dfrac{\pi x}{2}$; 2) $x\mapsto\tan\dfrac{\pi x}{4}$; 3) $x\mapsto 3^x$;

4) $x \mapsto 12\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$; 5) $x \mapsto 3-\frac{16}{3}\left(x-\frac{1}{4}\right)^2$; 6) $x \mapsto 2|x+2|-3$.

1) 因为对于任何 $y\in[0,3]$，方程 $y=3\sin\frac{\pi x}{2}$有属于闭区间$[0,1]$的唯一解 $x=\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{y}{3}$，所以函数 $x\mapsto 3\sin\frac{\pi x}{2}$是双射(图 11).

2) 令 $y\in[0,1]$，则方程

$$y=\tan\frac{\pi x}{4} \tag{1}$$

在闭区间$[0,1]$中有唯一解 $x=\frac{4}{\pi}\arctan y$. 再假设 $y\in(1,3]$，则方程(1)在$[0,1]$中没有解，从而方程(1)对于任意的 $y\in[0,3]$没有多于一个解 $x\in[0,1]$，因此函数 $x\mapsto\tan\frac{\pi x}{4}$是单射(图 12).

3) 如果 $y\in[0,3]$，则方程 $y=3^x$ 在 $x\in[0,1]$中没有多于一个的解. 其实当 $y\in[1,3]$时，它的解是 $x=\log_3 y$. 当 $y\in[0,1)$时无解. 所以 $x\mapsto 3^x$ 是单射(图 13).

11 12 13

4) 从方程 $y=12\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$，$y\in[0,3]$得到 $x_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{3}}$，$x_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{3}}$. 并且，如果 $0<y\leq 3$，则两个根均属于$(0,1]$，如果 $y=0$ 则两根重合 $x_1=x_2=\frac{1}{2}$并属于$[0,1]$. 所以，$\forall y\in[0,3]$方程 $y=12\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ 在$[0,1]$上至少有一个解. 从而所研究的函数是满射(图 14).

5) 令 $y\in[0,3]$，方程 $y=3-\frac{16}{3}\left(x-\frac{1}{4}\right)^2$ 有解. $x_1=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\sqrt{9-3y}$，$\frac{8}{3}\leq y\leq 3$，它属于 $\left[0,\frac{1}{4}\right]$. 而解 $x_2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\sqrt{9-3y}$，$0\leq y\leq 3$，它属于 $\left[\frac{1}{4},1\right]$. 于是 $\forall y\in[0,3]$存在一个或者两个原像，因此它是满射(图 15).

6) 令 $y\in[0,3]$. 当 $y\in[1,3]$时方程 $y=2|x+2|-3$ 有唯一解 $x=\frac{y-1}{2}$；如果 $y\in[0,1)$，则该方程在闭区间$[0,1]$中无解. 所以 $x\mapsto 2|x+2|-3$ 是单射(图 16).

14 15 16

19　**给定函数** $f(x) = \tan x, \frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{2}$. **求出它的反函数** .

首先指出所给出的函数是双射 $f: \ \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \ \to \mathrm{R}$. **为此我们取** $x = 2\pi + \gamma, \ -\frac{\pi}{2} < \gamma < \frac{\pi}{2}$. **对于** " $y \in \mathrm{R}$ **方程** $y = \tan x$ **可写成** $y = \tan\gamma, \gamma \in \ -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$,**从而** $\gamma = \arctan y$. **再利用** $x = 2\pi + \gamma$**就得出** $x = 2\pi + \arctan y$;**并且如果** $y \in \mathrm{R}$,**则** $x \in \ \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$,**即函数的双射性成立** .

又因为每一个 $y \in \mathrm{R}$ **对应唯一的** $x \in \ \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$,**则反函数** $f^{-1}: \mathrm{R} \to \ \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ **确立了关系式**

$$y \mapsto 2\pi + \arctan y \qquad y \in \mathrm{R} \ .$$

20　**写出下列参数化函数的显式表达式**:

1) $x = a\cos t, \ y = a\sin t, 0 \leq t \leq \pi$;

2) $x = a\cos t, \ y = a\sin t, \pi \leq t \leq 2\pi (a > 0)$.

1) **因为函数** $t \mapsto a\cos t, t \in [0, \pi]$**是双射**$[0, \pi] \to [-a, a]$,**则** " $x \in [-a, a]$**从等式** $x = a\cos t$**得到唯一解** $t = \arccos\frac{x}{a}$,**它属于闭区间**$[0, \pi]$. **把这个值代入第二个等式得到**

$$y = a\sin \ \arccos\frac{x}{a} \ = a \ \ 1 - \cos^2 \ \arccos\frac{x}{a} \ = a \ \ 1 - \frac{x^2}{a^2},$$

即 $y = \ \ a^2 - x^2, x \in [-a, a]$.

2) **取** $\pi + \gamma = t$,**则当** $\gamma \in [0, \pi]$**时**, $t \in [\pi, 2\pi]$**这时第一个等式变为** $x = -a\cos\gamma$.

函数 $\gamma \mapsto -a\cos\gamma$ **是双射** $[0, \pi] \to [-a, a]$,**所以** " $x \in [-a, a]$ **得出** $\gamma = \arccos \ -\frac{x}{a} \ = \pi - \arccos\frac{x}{a}$**和** $t = 2\pi - \arccos\frac{x}{a}$. **把得到的** t**值代入第二个等式就有**

$$y = - \ \ a^2 - x^2, x \in [-a, a] \ .$$

21　**写出由下面等式隐式给出的函数** $f: \ \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \ \mapsto [4\pi, 5\pi]$

$$\sin x - \cos y = 0, x \in \ \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \ , y \in [4\pi, 5\pi] \ . \tag{1}$$

的显式表达式 .

对于任意固定的 $x \in \ \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}$ **均有** $\sin x = q, q \in [-1, 1]$. **所以**(1)**式等同于方程** $\cos y = q$,**它在闭区间**$[4\pi, 5\pi]$**上有唯一解** . **这样就证明了存在函数**

$$f: \ \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \ \to [4\pi, 5\pi] \ .$$

为了写出 f 的解析表达式,将等式(1)改写成

$$\sin x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=0.$$

由此

$$2\sin\frac{x-\frac{\pi}{2}+y}{2}\cos\frac{x+\frac{\pi}{2}-y}{2}=0.$$

令每一个因子等于零,就找到 y 的两个值

$$y=x-\frac{\pi}{2}+2n\pi,\ n\in\mathbb{Z},\tag{2}$$

$$y=-x+\frac{\pi}{2}+2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}.\tag{3}$$

考虑情形(2)时,从 $x\in\left[\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$ 得到 $y\in[(2n+1)\pi,(2n+2)\pi]$,对 $\forall n\in\mathbb{Z}$ 它不属于 $[4\pi,5\pi]$,即 $y=x-\frac{\pi}{2}+2n\pi$ 对于任何 $n\in\mathbb{Z}$ 都不属于函数 f 的值域.

在情形(3)时,由条件 $x\in\left[\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]$ 得到当 $n=3$ 时,$y\in[(2n-2)\pi,(2n-1)\pi]\subset[4\pi,5\pi]$.在 n 取这个值时,从(3)得到函数 f 的显式表达式为

$$y=-x+\frac{13\pi}{2},\ x\in\left[\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right].$$

练 习 题

19 令映射 $f:\mathbb{R}\to[-1,1]$ 由等式 $f(x)=\cos x$ 给出.求出:

1) $f(0)$; 2) $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$; 3) $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$; 4) $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$; 5) $f\left(\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\right)$;

6) $f\left(\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)$; 7) $f\left(\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\right)$; 8) $f([0,2\pi])$; 9) $f^{-1}(0)$;

10) $f^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$; 11) $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; 12) $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 13) $f^{-1}([-1,0])$;

14) $f^{-1}\left(\left[0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\right)$; 15) $f^{-1}\left(\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]\right)$.

20 映射 $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$,由下面等式给出:

1) $f(x)=\tan x$; 2) $f(x)=\cot x$,

求出: $f\left(\left(0,\frac{\pi}{6}\right)\right)$, $f\left(\left(0,\frac{\pi}{4}\right]\right)$, $f\left(\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]\right)$, $f^{-1}((0,1])$, $f^{-1}\left(\left[\frac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right]\right)$, $f^{-1}\left(\left[\frac{1}{\sqrt{3}},1,\sqrt{3}\right]\right)$.

21 证明如果 $f:E\to F$, $A\subset E$, $B\subset E$,则:

1) $f(A\cap B)\quad (f(A)\cap f(B))$; 2) $(f(A)\setminus f(B))\quad f(A\setminus B)$.

22 令 $f: E\to F, A\quad F, B\quad F$. 证明: 如果 $A\quad B$, 则 $f^{-1}(A)\quad f^{-1}(B)$.

23 证明: 如果 $f: E\to F$ 且 $A\quad E, B\quad F$, 则有:

1) $A\quad f^{-1}(f(A))$; 2) $f(f^{-1}(B)) = B$; 3) $f(A)\cap B = f(A\cap f^{-1}(B))$;

4) $(f(A)\cap B = \quad)\quad (A\cap f^{-1}(B) = \quad)$; 5) $(f(A)\quad B)\quad (A\quad f^{-1}(B))$.

24 下列函数 $f: [-1,1]\to[0,1]$ 中哪一个是单射、满射或双射. 画出图形.

1) $x\mapsto\cos\dfrac{\pi x}{2}$; 2) $x\mapsto -x^2+1$; 3) $x\mapsto |x|$;

4) $x\mapsto\dfrac{x+1}{2}$; 5) $x\mapsto\dfrac{x+1}{3}$; 6) $x\mapsto 2^{x-1}$.

25 求出下列函数的双射限制:

1) $f(x) = x^2, x\in\mathbf{R}$; 2) $f(x) = \sin x, x\in\mathbf{R}$; 3) $f(x) = \cos x, x\in\mathbf{R}$;

4) $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}, x>0$; 5) $f(x) = 10^x, x\in\mathbf{R}$; 6) $f(x) = x^3+x+1, x\in\mathbf{R}$.

26 求出下列函数的反函数:

1) $f(x) = \sin x,\ x\in\ -\dfrac{5\pi}{2}, -\dfrac{3\pi}{2}$; 2) $f(x) = \sin x, x\in\ \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$;

3) $f(x) = \cos x, x\in[2\pi, 3\pi]$; 4) $f(x) = \cos x, x\in[-7\pi, -6\pi]$;

5) $f(x) = \tan x, x\in\ \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$; 6) $f(x) = \cot x, x\in(-\pi, 0)$.

27 求出下列参数形式给出函数的显式表达式:

1) $x = \dfrac{2at}{1+t^2}, y = \dfrac{2at^2}{1+t^2}, 0\leq t< +\infty$; 2) $x = \dfrac{2at}{1+t^2}, y = \dfrac{2at^2}{1+t^2}, -\infty< t\leq 0\quad (a>0)$.

28 求出函数 $f: [\pi, 2\pi]\to\ \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}$ 的显式表达式, 它由下面隐式表达式给出

$$\cos x+\sin y = 0,\ x\in[\pi, 2\pi], y\in\ \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\ .$$

29 求出函数 $f: [\pi, 2\pi]\to\ \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}$ 的显式表达式, 它由下面隐式表达式给出

$$\cos x+\sin y = 0,\ x\in[\pi, 2\pi],\ y\in\ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\ .$$

3 实 数

3.1 二元关系和二元运算

定义 1 积空间 $E\times E$ 中任意的子集 B 称为集合 E 上的一个二元关系.

定义 2 二元关系 R 称为在集合 E 上的等价关系, 如果子集 R 满足:

1) **自反的**: $(a, a)\in R\quad " a\in E$;

2) **对称的**: $((a, b)\in R)\quad ((b, a)\in R)$;

3) **传递的**: $((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R)$ $((a, c) \in R)$.

常常把$(a, b) \in R$ **写成为** $a \sim b$ **或者** $a = b$.

定义 3 **一个二元关系 Ω称为在集合** E **上的序关系,如果它满足**:

1) **自反的**: $(a, a) \in \Omega$, " $a \in E$;

2) **传递的**: $((a, b) \in \Omega \wedge (b, c) \in \Omega)$ $((a, c) \in \Omega)$;

3) **反对称的**: $((a, b) \in \Omega \wedge (b, a) \in \Omega)$ $(a = b)$.

这时就说关系 Ω在 E **上有序 . 常常把**$(a, b) \in \Omega$**写成** $a \leq b$ **或者** a b .

如果 " $a, b \in E$, **恒有**$(a, b) \in \Omega$**或者**$(b, a) \in \Omega$,**则称集合** E **有全序** .

定义 4 **映射** $f: E \times E \to E$ **称为集合** E **上的内部二元运算** .

设给定两个集合 E **和** F .

定义 5 **映射** $f: E \times F \to E$ **称为集合** E **上的外部二元运算** .

定义 6 **有内部二元运算⊥的集合** E **称为一个群 . 如果**:

1) **运算是可结合的**: $(a \perp b) \perp c = a \perp (b \perp c)$, " $a, b, c \in E$;

2) **有单位元**: v $e \in E$ **使得对** " $a \in E$, **等式** $a \perp e = e \perp a = a$ **成立**;

3) **所有的元素有其对称元素**: " $a \in E$, v 瑢$\in E$, **使得** $a \perp$瑢$=$瑢$\perp a = e$.

如果还有

4) **运算⊥是可交换的,则称为可交换群或者阿贝尔群** .

如果运算⊥是加法,则群称为加法群 . 如果运算⊥是乘法,则群称为乘法群 .

3.2 实数域公理

定义 1 **集合**$\mathrm{R} = \{a, b, c, \cdots\}$**称为实数域,如果对于它的元素确定了二元关系,并服从下列公理的二元运算** .

加法公理

A.0 **在集合**R **中定义了内部二元运算——加法**

$$\mathrm{R} \times \mathrm{R} \to \mathrm{R} : (a, b) \mapsto a + b,$$

它把每一对元素 $a, b \in \mathrm{R}$ **单值地对应于**R **中的某个元素,称为它们的和并用符号** $a + b$ **表示 . 同时满足下列公理**:

A.1 $(a + b) + c = a + (b + c)$ **(结合律)** .

A.2 **在**R **中存在称为零元的元素,用符号** 0 **表示,使得** " $a \in \mathrm{R}$

$$a + 0 = a .$$

A.3 " $a \in \mathrm{R}$ **存在这样的数**$(-a) \in \mathrm{R}$,**满足等式**

$$a + (-a) = 0 .$$

A.4 " $a, b \in \mathrm{R}$ $a + b = b + a$.

于是集合R **称为加法阿贝尔群** .

乘法公理

M.0　在集合$\mathbb{R}$中定义了内部二元运算——乘法

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}:(a,b)\mapsto a\cdot b,$$

它把每一对元素 $a,b\in\mathbb{R}$ 单值地对应于集合$\mathbb{R}$的某个元素,称为它们的积,并用 $a\cdot b$ 表示.同时满足下列公理:

M.1　$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$　$\forall a,b,c\in\mathbb{R}$　(结合律).

M.2　在$\mathbb{R}$中存在称为单位元的元素,并记为1,使得 $\forall a\in\mathbb{R}$ 有等式

$$a\cdot 1=a.$$

M.3　$\forall a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$存在 $a^{-1}\in\mathbb{R}$,称为 a 的逆元,使得 $a\cdot a^{-1}=1$.

M.4　$a\cdot b=b\cdot a$　$\forall a,b\in\mathbb{R}$.

从而集合$\mathbb{R}$中非零元素的集合是一个乘法阿贝尔群.

D.1　乘法运算对于加法运算可分配,即

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad\forall a,b,c\in\mathbb{R}.$$

满足公理A,M,D的集合称为数域.没有公理M.4的集合称为体.

次序公理

O.0　在集合$\mathbb{R}$给定关系$\leq$,它使得$\mathbb{R}$有全序:

O.1　$a\leq a$　$\forall a\in\mathbb{R}$　(自反性).

O.2　$(a\leq b\wedge b\leq a)\Rightarrow(a=b)$　(反对称性).

O.3　$(a\leq b\wedge b\leq c)\Rightarrow(a\leq c)$　(传递性).

O.4　$\forall a,b\in\mathbb{R}$ 或者 $a\leq b$,或者 $b\leq a$,两者必居其一.

下面的两个公理把序关系和二元运算联系起来:

OO.1　如果 $a,b,c\in\mathbb{R}$ 和 $a\leq b$,则 $a+c\leq b+c$.

OO.2　从 $0\leq a$ 和 $0\leq b$ 得出 $0\leq ab$,$\forall a,b\in\mathbb{R}$.

上界公理

定义 2　集合 $A\subset\mathbb{R}$,如果存在 $M\in\mathbb{R}$,使得 $a\leq M$,$\forall a\in A$,则称集合 A 有上界,且称 M 是集合 A 的上界.

定义 3　如果集合 A 的所有上界 M 都不小于集合 A 的上界 M^*,则称 M^* 为 A 的上确界.

用符号 $\sup A$ 代表集合 A 的上确界.

S.0　所有有上界的集合 $A\in\mathbb{R}$ 有上确界.

3.3　扩展的实数集

定义　集合$\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$由实数集$\mathbb{R}$和两个符号$-\infty$和$+\infty$构成,称为扩展的实数集,并满足下列条件:

1)　$-\infty<a<+\infty$,$a+(-\infty)=-\infty$,$a+(+\infty)=+\infty$,$\dfrac{a}{-\infty}=\dfrac{a}{+\infty}=0$,$\forall a\in\mathbb{R}$;

2) 如果 $a>0$,则 $a\cdot(-\infty)=-\infty$, $a\cdot(+\infty)=+\infty$;

3) 如果 $a<0$,则 $a\cdot(-\infty)=+\infty$, $a\cdot(+\infty)=-\infty$.

符号 $-\infty(+\infty)$称为负(正)无穷大.

3.4　实数的基本特性

为了简单起见,我们用R 同时代表所有实数的集合、有序的实数空间和有序的实数域.按照上下文的含意区分它所代表的不同内含.例如,我们写 $x\in R$,则在这里R 是实数集合;如果说在R 中 $x\leq y$,则把R 理解成有序空间;最后,如果写在R 中 $x+y<z$,则R 意味着是一个有序的实数域.在某些情况下,如按上下文不能表达含意,我们将利用更复杂的表述方法.

对于实数 x,我们引进如下的特征:$|x|$——x 的模,$\operatorname{sgn}x$——x 的符号,x^+——x 的正数部分,x^-——x 的负数部分.按习惯他们是:

$$|x|=\begin{cases}x, & \text{如果 } x\geq 0,\\ -x & \text{如果 } x<0;\end{cases}\qquad \operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & \text{如果 } x>0,\\ 0, & \text{如果 } x=0,\\ -1, & \text{如果 } x<0;\end{cases}$$

$$x^+=\begin{cases}x, & \text{如果 } x>0,\\ 0, & \text{如果 } x\leq 0;\end{cases}\qquad x^-=\begin{cases}0, & \text{如果 } x\geq 0,\\ -x, & \text{如果 } x<0.\end{cases}$$

" $x\in R$ 的这些特征之间显然有如下关系:

$$x=|x|\operatorname{sgn}x,\quad |x|=x\operatorname{sgn}x,\quad x=x^+-x^-,$$

$$|x|=x^++x^-,\quad x^+=\frac{|x|+x}{2},\quad x^-=\frac{|x|-x}{2}. \tag{1}$$

在解决问题时常常用到不等式

$$-|x|\leq -x^-\leq x\leq x^+\leq |x|,\ |x|\geq 0,\ x^+\geq 0,\ x^-\geq 0. \tag{2}$$

把这些特征看成函数$R\to R$: $x\mapsto |x|$, $x\mapsto \operatorname{sgn}x$, $x\mapsto x^+$, $x\mapsto x^-$ 也是很有益处的.它们的图形如图 17～20 所示.第一和第二个函数是可乘函数,所以从这些函数的定义可得下述等式:

$$|xy|=|x||y|,\quad \operatorname{sgn}(xy)=(\operatorname{sgn}x)(\operatorname{sgn}y),\ "(x\in R,y\in R).$$

17　　18

19　　20

除函数“sgn”外,每个函数具有如下性质:平面上在函数图形上方的点形成的点集是凸的.即如果平面上在图形上方有两个点,则连接这两个点线段上的所有点都位于图形

上方.这种函数称为凸函数.如果定义在数轴R上的函数 f 是凸的,则 $\forall(x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R})$ 有不等式

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}. \tag{3}$$

这个不等式显然成立:它的左边是图形上横坐标是 $\frac{x_1 + x_2}{2}$ 点的纵坐标,而右边是在图形上方点的横坐标对应的纵坐标(见图 21).第 7 章第 5 节将对凸函数进行详细研究.

把不等式(3)用于凸函数 $x \mapsto |x|$, $x \mapsto x^+$, $x \mapsto x^-$ 得出重要的估计

图　21

$$|x + y| \leq |x| + |y|, (x + y)^+ \leq x^+ + y^+,$$
$$(x + y)^- \leq x^- + y^-, \tag{4}$$

对于 $\forall(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})$ 成立.

前面给出的实数各种特征中最为重要的是它的模.根据数模的基本性质有下面结果:

1) $\forall x \in \mathbb{R}\ (|x| = 0) \quad (x = 0)$;

2) $\forall(\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R})\ |\lambda x| = |\lambda||x|$;

3) $\forall(x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R})\ |x + y| \leq |x| + |y|$.

最后一个不等式称为三角不等式,因为当 $x \in \mathbb{C}$, $y \in \mathbb{C}$ 时,它有几何意义(见第 4 节).

3.5　数学归纳法

令 $A(k)$ 表示命题 A 对于指定的 $k \in \mathbb{N}$ 正确.数学归纳法的实质如下:

$$(A(1) \wedge A(k) \quad A(k+1)\ \forall k \in \mathbb{N}) \quad (A(n)\ \forall n \in \mathbb{N}).$$

22　证明集合R有唯一的零元和单位元.

假设集合R有两个零元 0_1 和 0_2,那么根据公理 A.2 和 A.4 得到

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2.$$

同样,如果 1_1 和 1_2 是R中的单位元,则根据 M.2 和 M.4 得

$$1_1 = 1_1 \cdot 1_2 = 1_2 \cdot 1_1 = 1_2.$$

23　证明:

1) 方程 $a + x = b$ 有唯一解 $x = -a + b$.

2) 方程 $ax = b$ 有唯一解 $x = a^{-1}b$.

1) 数 $-a + b$ 满足方程 $a + x = b$.事实上 $a + (-a + b) = (a + (-a)) + b = 0 + b = b$.设有另外的解,其实如果 $x \in \mathbb{R}$ 是另外的一个解,则

$$-a + b = -a + b,$$
$$-a + (a + x) = -a + b,$$
$$(-a + a) + x = -a + b,$$

$$0 + x = x = - a + b .$$

2) 同样,数 $a^{-1} b$满足方程 $ax = b$:

$$a(a^{-1} b) = (a \cdot a^{-1}) \cdot b = 1 \cdot b = b \cdot 1 = b .$$

如果 $x \in \mathrm{R}$ 是方程 $ax = b$的任何一个其他解,则

$$a^{-1} b = a^{-1} b, a^{-1}(ax) = a^{-1} b, (a^{-1} a) x = a^{-1} b,$$

$$1 \cdot x = a^{-1} b, x = a^{-1} b .$$

24 元素 $a \in E$称为关于内部二元运算⊥是正则的,如果" $x, y \in E$,

$$(a \perp x = a \perp y) \wedge (x \perp a = y \perp a) \quad x = y .$$

证明: 所有的元素 $c \in \mathrm{R}$ 关于加法是正则的,而所有的非零元素 $c \in \mathrm{R}$ 关于乘法是正则的 .

首先证明任意元素 $c \in \mathrm{R}$ 关于加法是正则的,由于加法的交换律$(c + a = c + b)$ $(a + c = b + c)$,所以只要证明$(c + a = c + b) \quad (a = b)$就可以了 .

基于前面的例子和加法结合律得到

$$a = - c + (c + b) = (- c + c) + b = b .$$

类似地可以证明" $c \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$关于乘法是正则的 .

25 $E = \{ f \}$代表函数 $f: A \to A, A \quad \mathrm{R}$ 的集合 .在这个集合上定义了内部二元运算

$$E \times E \to E: (f, g) \hookrightarrow f \quad g .$$

1) 证明这个运算有结合律 .

2) 求出这个运算的正则元 .

1) 为了证明等式

$$(f \quad g) \quad h = f \quad (g \quad h),$$

只要指出任意元素 $x \in A$ 的两个像重合 . 令 $x \in A, u = h(x), v = g(u)$. 则有

$$((f \quad g) \quad h)(x) = (f \quad g)(h(x)) = (f \quad g)(u) = f(g(u)) = f(v),$$

$$(g \quad h)(x) = g(h(x)) = g(u) = v .$$

所以$(f \ (g \ h))(x) = f((g \ h)(x)) = f(v)$,即两个像元素重合,从而结合律得以证明 .

2) 如果$(f \ g = f \ h) \quad (g = h)$就称映射 f是左正则的;如果$(g \ f = h \ f) \quad (g = h)$就称其为右正则的 .显然如果它是左、右正则的,则映射是正则的 .

首先指出,当且仅当映射 f是单射,则它是左正则的 .

事实上,如果 f是单射,且 $f \ g = f \ h$,则对任意的 $x \in A$,有

$$(f(g(x)) = f(h(x))) \quad (g(x) = h(x)) \quad (g = h) .$$

如果 f不是单射,则在集合 A上存在不同的数 x 和 y,它们的像重合,即 $f(x) = f(y)$.选出映射 g和 h,使得对于某个 $a \in A$ 有 $g(a) = x, h(a) = y$. 因为 $x \neq y$,那么由 $f \ g = f \ h$得不到等式 $g = h$,即 f不是左正则的 .

现在指出当且仅当函数 f是满射,它是右正则的 .

如果 f是满射,则" $x \in A$ 存在这样的 $u \in A$ 使得 $f(u) = x$,那么

$$(g \quad f = h \quad f) \quad (g(x) = h(x)) \quad " x \in A .$$

如果 f 不是满射,则对于在集合 $f(A)$ 上与 f 的限制重合的那种映射 g 和 h 有 $g\ f = h\ f$.但是 g 和 h 可能是不同的,所以在集合 $A\setminus f(A)$ 上可能取不同的值.

这样,使得映射 f 是正则的必要和充分条件为它是双射.

26 如果 $\exists\, m\in \mathrm{R}$ 使得 $\forall\, a\in A$ 都有不等式 $m\leq a$,则称集合 $A\in \mathrm{R}$ 有下界,同时称 m 为其下界.如果集合 A 的所有其他的下界 m 不大于它的下界 m^*,则称 m^* 为其下确界.用符号 $\inf A$ 代表集合 A 的下确界.

证明:所有有下界的集合有下确界,并且 $\inf A = -\sup\{-A\}$,其中 $-A=\{-x\}$,$x\in A$.

根据已知条件,$\exists\, m\in\mathrm{R}$ 使得 $x\geq m$,$\forall\, x\in A$,由此得知 $-x\leq -m$,即集合 $-A$ 有上界.根据公理 S.0,$\exists\, \sup\{-A\}=M^*$,且有 $-x\leq M^*$,$\forall\, x\in A$.所以 $-M^*\leq x$,$\forall\, x\in A$,所以 $-M^*$ 是集合 A 的下界.如果 N 是集合 A 的任何一个下界,则 $-N$ 是集合 $-A$ 的上界,所以 $-N\geq M^* = \sup\{-A\}$.从而 $N\leq -M^*$,也就是 $-M^* = -\sup\{-A\}$ 是集合 A 的下确界.

27 证明阿基米德定理:如果 $a>0$,a, b 是任意的实数,则存在 $n\in\mathrm{Z}$ 使得 $(n-1)a\leq b$,$na>b$.

首先证明 $\exists\, n\in\mathrm{Z}$ 使得 $nb>a$.为了证明,假设结论不对,即 $ka\leq b$ $\forall\, k\in\mathrm{Z}$.那么集合 $\{ka\}$ 有上界.又根据公理 S.0,它有上确界 $\sup\{ka\}=M^*\leq b$.因为 M^*-a 不是集合 $\{ka\}$ 的上界,所以 $\exists\, pa\in\{ka\}$ 使得 $M^*-a<pa\leq M^*$.从而 $(p+1)a>M^*$,$(p+1)\in\mathrm{Z}$,这和 M^* 的定义不一致.矛盾的根源在于假设 $ka\leq b$,$\forall\, k\in\mathrm{Z}$,所以存在数 $k\in\mathrm{Z}$.使得 $ka>b$.

类似地可以证明 $\exists\, m\in\mathrm{Z}$,使得 $ma<b$.闭区间 $[ma, ka]$ 包含 b 点,用点 $(m+1)a$,$(m+2)a,\cdots,(k-1)a$ 把这个区间分成 $k-m$ 个闭区间,点 b 属于其中之一.从而存在 $n\in\mathrm{Z}$ 使得 $(n-1)a\leq b\leq na$.

28 证明:对于任意给定的正数 ε 存在这样的自然数 n,使得

$$\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

在阿基米德定理中设 $b=\dfrac{1}{\varepsilon}$,$a=1$ 就有不等式 $n_0\cdot 1>\dfrac{1}{\varepsilon}$,$n_0\in\mathrm{Z}$.但因为 $\dfrac{1}{\varepsilon}>0$.所以 $n_0\in\mathrm{N}$.对于 $\forall\, n>n_0$,$n\in\mathrm{N}$,不等式 $n>n_0>\dfrac{1}{\varepsilon}$ 或者 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$ 成立.

29 令 α 和 β 是两个任意给定的实数,且 $\alpha<\beta$.证明:存在有理数 γ 位于 α 和 β 之间.

取 $h=\beta-\alpha$,根据前例,$\exists\, n\in\mathrm{N}$ 使得

$$\frac{1}{n}<h. \tag{1}$$

根据阿基米德定理,存在 $m\in\mathrm{Z}$ 使得

$$\frac{m}{n} \leq \alpha < \frac{m+1}{n}.$$

从这个不等式及不等式(1)得到

$$\alpha < \frac{m+1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} < \alpha + h = \alpha + \beta - \alpha = \beta.$$

所以
$$\alpha < \frac{m+1}{n} < \beta.$$

30　指出所有有理真分式$\frac{m}{n}$(其中 m 和 n 是自然数,且 $0 < m < n$)构成的集合中没有最大和最小的元素.求出这个集合的下确界和上确界.

令 m 和 $n(0 < m < n)$是任意的自然数.则由显而易见的不等式

$$\frac{m}{n} = \frac{2m}{2n} > \frac{2m-1}{2n} > 0, \quad \frac{m}{n} = \frac{2m}{2n} < \frac{2m+1}{2n} < 1.$$

得到有理真分式的集合没有最小和最大的元素.

现在给出 $\inf\left\{\frac{m}{n}\right\} = 0$, $\sup\left\{\frac{m}{n}\right\} = 1$.

根据阿基米德定理,对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ 和 $m \in \mathrm{N}$,可以找到这样的 $n \in \mathrm{N}$, $n > m$. 使得 $n > \frac{m}{\varepsilon}$,那么$\frac{m}{n} < \varepsilon$. 根据这一事实和$\frac{m}{n} > 0$ 得出 $\inf\left\{\frac{m}{n}\right\} = 0$. 同样对于任意给定的 $\varepsilon > 0$ 和 $p \in \mathrm{N}$,可以找到自然数 m,使得 $m > \frac{p(1-\varepsilon)}{\varepsilon}$. 从而$\frac{m}{p+m} > 1 - \varepsilon$,即当 $n = p + m$ 时$\frac{m}{n} > 1 - \varepsilon$. 连同不等式$\frac{m}{n} < 1$ 就得出 $\sup\left\{\frac{m}{n}\right\} = 1$.

31　令$\{x + y\}$是所有和式 $x + y$ 构成的集合,其中 $x \in \{x\}$, $y \in \{y\}$. 证明下列等式:

1) $\inf\{x + y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}$;　2) $\sup\{x + y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}$.

1) 从 $x \geq m$, $x \in \{x\}$和 $y \geq m_1$, $y \in \{y\}$得出 $x + y \geq m + m_1$, $(x + y) \in \{x + y\}$. 由 $\inf\{x\} = m^*$ 和 $\inf\{y\} = m_1^*$ 的存在性给出 $\inf\{x + y\}$的存在性. 显然, $x + y \geq m^* + m_1^*$. 其次,对于任意的 $\varepsilon > 0$,存在元素 $x' \in \{x\}$和 $y' \in \{y\}$,使得 $m^* \leq x' < m^* + \frac{\varepsilon}{2}$和 $m_1^* \leq y' < m_1^* + \frac{\varepsilon}{2}$. 所以$(x' + y') \in \{x + y\}$,而且有 $m^* + m_1^* \leq x' + y' < m^* + m_1^* + \varepsilon$.

故
$$\inf\{x + y\} = m^* + m_1^* = \inf\{x\} + \inf\{y\}.$$

建议读者独立地证明等式 2).

32　令$\{xy\}$是所有乘积 xy 的集合,其中 $x \in \{x\}$, $y \in \{y\}$,并且 $x \geq 0$, $y \geq 0$. 证明等式:

1) $\inf\{xy\} = \inf\{x\}\inf\{y\}$;　　2) $\sup\{xy\} = \sup\{x\}\sup\{y\}$.

这里证明等式 2)(建议读者独立地证明等式 1)).

从 $x\le M, x\in\{x\}, x\ge 0$ 和 $y\le M_1, y\in\{y\}, y\ge 0$ 得知 $xy\le MM_1$,又从 $\sup\{x\}=M^*$ 和 $\sup\{y\}=M_1^*$ 的存在性得到 $\sup\{xy\}$的存在性.从不等式 $M^*-\varepsilon<x\le M^*$, $M_1^*-\varepsilon<y\le M_1^*$ 得到 $M^*M_1^*-(\varepsilon M_1^*+\varepsilon M^*-\varepsilon\varepsilon)<xy\le M^*M_1^*$.因为 $\varepsilon M_1^*+\varepsilon M^*-\varepsilon\varepsilon$ 可以任意地小,则

$\sup\{xy\}=M^*M_1^*=\sup\{x\}\sup\{y\}$.

33　令 $X=\left\{\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{n}{2n+1}\right\}$, $n\in\mathrm{N}$.证明: $\inf X=0, \sup X=1$.

令 $\varepsilon>0$ 是任意给定的数,由不等式

$$0<\frac{1}{2}-\frac{n}{2n+1}<\varepsilon, 1-\varepsilon<\frac{1}{2}+\frac{n}{2n+1}<1,$$

对所有的 $n>\dfrac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}$都成立,可得出 $\inf X=0, \sup X=1$.

34　证明不等式:

1) $|x-y|\ge||x|-|y||$;

2) $|x+x_1+x_2+\cdots+x_n|\ge|x|-(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)$.

1) 对于$(x-y)+y$使用三角不等式,导出

$$|x|=|(x-y)+y|\le|x-y|+|y|,$$

从它得到

$$|x|-|y|\le|x-y|. \tag{1}$$

交换 x 和 y 的位置就有

$$|y|-|x|\le|y-x|=|x-y|.$$

所以

$$-|x-y|\le|x|-|y|. \tag{2}$$

从不等式(1)和(2)就得出 1).

2) 利用三角不等式得到

$$\begin{aligned}|x|&=|(x+x_1+x_2+\cdots+x_n)-(x_1+x_2+\cdots+x_n)|\\&\le|x+x_1+x_2+\cdots+x_n|+|x_1+x_2+\cdots+x_n|\\&\le|x+x_1+x_2+\cdots+x_n|+|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|,\end{aligned}$$

这就直接给出了不等式 2).

35　解方程$|x|+|x-1|+|x-2|-2.5=0$.

由于

$$|x|+|x-1|+|x-2|-2.5=\begin{cases}-3x+0.5=0, & \text{如果 } x\in(-\infty,0),\\ -x+0.5=0, & \text{如果 } x\in[0,1),\\ x-1.5=0, & \text{如果 } x\in[1,2),\\ 3x-5.5=0, & \text{如果 } x\in[2,+\infty).\end{cases}$$

于是可以有如下结论: 在$(-\infty,0)$, $[2,+\infty)$之中无解;在$[0,1)$中有解 $x=0.5$;而在$[1,2)$中有解 $x=1.5$.

36 求和

$$S_n=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{8}+\arctan\frac{1}{18}+\cdots+\arctan\frac{1}{2n^2}.$$

使用数学归纳法,因为

$$S_1=\arctan\frac{1}{2},\ S_2=\arctan\frac{1}{2}+\arctan\frac{1}{8}=\arctan\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}}=\arctan\frac{2}{3},$$

$$S_3=\arctan\frac{2}{3}+\arctan\frac{1}{18}=\arctan\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{18}}{1-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{18}}=\arctan\frac{3}{4},$$

则可设

$$S_n=\arctan\frac{n}{n+1},\ n\in\mathbf{N}. \tag{1}$$

又因

$$S_{n+1}=\arctan\frac{n}{n+1}+\arctan\frac{1}{2(n+1)^2}=\arctan\frac{\frac{n}{n+1}+\frac{1}{2(n+1)^2}}{1-\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{2(n+1)^2}}=\arctan\frac{n+1}{n+2}$$

及当 $n=1$ 时等式(1)成立,所以按归纳法,等式对所有的 n 成立.

37 用数学归纳法证明对任意的自然数 n,下列等式成立:

1) $1^2+2^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

2) $1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2$.

1) $n=1$ 时等式成立.假设等式在 n 处成立.证明它在 $n+1$ 时的正确性.其实

$$\begin{aligned}1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2\\&=\frac{n(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.\end{aligned}$$

于是证明了结论.

2) 当 $n=1$ 时等式显然成立,从假设它在 n 时成立得出

$$1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3=(1+2+\cdots+n)^2+(n+1)^3$$
$$=(1+2+\cdots+n)^2+2\frac{n(n+1)}{2}(n+1)+(n+1)^2.$$

利用等式 $1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, **得到**

$$1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3=(1+2+\cdots+n+(n+1))^2,$$

即结论当 $n+1$ **时正确**.

38　证明牛顿二项公式

$$(a+b)^n=\sum_{m=0}^{n}\mathrm{C}_n^m a^{n-m}b^m,$$

其中 $\mathrm{C}_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$(**从** n **个元素中取出** m **个的组合数**), $k!=1\cdot2\cdots k$, **并设** $0!=1$.

当 $n=1$ **时**

$$(a+b)=\sum_{m=0}^{1}\mathrm{C}_1^m a^{1-m}b^m=\frac{1!}{0!1!}a+\frac{1!}{1!0!}b=a+b.$$

剩下只要假设在 n **时等式成立, 并得出**

$$(a+b)^{n+1}=\sum_{m=0}^{n+1}\mathrm{C}_{n+1}^m a^{n+1-m}b^m.$$

事实上

$$(a+b)^{n+1}=(a+b)(a+b)^n=(a+b)\sum_{m=0}^{n}\mathrm{C}_n^m a^{n-m}b^m$$
$$=\sum_{m=0}^{n}\mathrm{C}_n^m a^{n+1-m}b^m+\sum_{m=0}^{n}\mathrm{C}_n^m a^{n-m}b^{m+1}$$
$$=\sum_{m=0}^{n}\mathrm{C}_n^m a^{n+1-m}b^m+\sum_{m=1}^{n+1}\mathrm{C}_n^{m-1}a^{n+1-m}b^m$$
$$=a^{n+1}+\sum_{m=1}^{n}(\mathrm{C}_n^m+\mathrm{C}_n^{m-1})a^{n+1-m}b^m+b^{n+1}.$$

利用关系

$$\mathrm{C}_n^m+\mathrm{C}_n^{m-1}=\frac{n!}{m!(n-m)!}+\frac{n!}{(m-1)!(n+1-m)!}$$
$$=\frac{(n+1)!}{m!(n+1-m)!}=\mathrm{C}_{n+1}^m,\ \mathrm{C}_{n+1}^0=\mathrm{C}_{n+1}^{n+1}=1,$$

最终得到

$$(a+b)^{n+1}=a^{n+1}+\sum_{m=1}^{n}\mathrm{C}_{n+1}^m a^{n+1-m}b^m+b^{n+1}=\sum_{m=0}^{n+1}\mathrm{C}_{n+1}^m a^{n+1-m}b^m.$$

39　证明伯努利不等式

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)\geq1+x_1+x_2+\cdots+x_n,$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是大于 -1 的同符号数.

当 $n=1,2$ 时不等式显然成立.令当 n 时不等式成立,现在指出 $n+1$ 时不等式的正确性.因为 $x_i > -1$,有

$$\begin{aligned}(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)(1+x_{n+1}) &\geq (1+x_1+x_2+\cdots+x_n)(1+x_{n+1}) \\ &= 1+x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}+ \\ &\quad (x_1+x_2+\cdots+x_n)x_{n+1} \\ &\geq 1+x_1+x_2+\cdots+x_n+x_{n+1}.\end{aligned}$$

这里用到了对任意的同符号数 x_i 成立不等式 $(x_1+x_2+\cdots+x_n)x_{n+1}\geq 0$.

40 证明:如果 $x>-1$,则有不等式

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad n>1,$$

且等式仅当 $x=0$ 时成立.

如果设 $x_1=x_2=\cdots=x_n=x$.所需不等式可直接由上例得到.如果 $x=0$,则对 $\forall n>1$ 有等式成立.要指出的是,当 $n>1$ 和 $x>-1$ 时得出严格不等式 $(1+x)^n>1+nx$.当 $n=2$ 时,这显然正确: $(1+x)^2=1+2x+x^2>1+2x$.其次,如果 $(1+x)^n>1+nx$,则

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) > (1+nx)(1+x) \\ &= 1+nx+x+nx^2 > 1+(n+1)x.\end{aligned}$$

41 证明:如果 $x_i>0\ \forall i=1,\cdots,n$ 且 $x_1x_2\cdots x_n=1$,则

$$x_1+x_2+\cdots+x_n \geq n, \tag{1}$$

同时

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n=n) \Leftrightarrow (x_i=1\ \forall i=1,\cdots,n).$$

用数学归纳法证明.当 $n=1$ 时不等式(1)成立同时只有等式成立.如果 $n=2$ 且 $x_1x_2=1$,只考虑一种情况,例如 $x_1\geq 1$, $x_2\leq 1$,则由显然的恒等式

$$x_1+x_2=x_1x_2+1+(x_1-1)(1-x_2) \tag{2}$$

和条件 $x_1x_2=1$ 得到不等式 $x_1+x_2\geq 2$ 和条件 $(x_1+x_2=2) \Leftrightarrow (x_1=x_2=1)$.

现在假设:对任意 k 个正数 $x_1, x_2, \cdots, x_k$,它们的乘积等于 1,不等式 $\sum_{i=1}^{k} x_i \geq k$ 成立.并且

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = k \Leftrightarrow (x_i=1, \forall i=1,\cdots,k).$$

研究 $k+1$ 个正数 $x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}$,它们满足

$$x_1x_2\cdots x_{k+1}=1.$$

如果不是所有的 x_i 都等于 1,就可以找出其中大于 1 和小于 1 的数.不失一般性,将认为 $x_1>1$, $x_2<1$,对于 k 个正数 $(x_1x_2), x_3, \cdots, x_{k+1}$,它们的积仍为 1,根据假设成立不等式

$$(x_1x_2)+x_3+\cdots+x_{k+1} \geq k, \tag{3}$$

并且

$$((x_1x_2) + x_3 + \cdots + x_{k+1} = k) \quad (x_1x_2 = x_3 = \cdots = x_{k+1} = 1). \tag{4}$$

把不等式(3)加上恒等式(2),得到不等式

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1} \geq k + 1 + (x_1 - 1)(1 - x_2) \geq k + 1$$

和条件

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1} = k + 1 + (x_1 - 1)(1 - x_2)) \quad ((x_1x_2) = x_3 = \cdots = x_{k+1} = 1),$$

由它可以得出

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_{k+1} = k + 1) \quad (x_i = 1 \quad \forall\, i = 1, \cdots, k + 1).$$

42 设 $x_i > 0$, $x_i \in \mathrm{R}$, $\forall\, i = 1, \cdots, n$ 及

$$\gamma_n = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \text{ (调和平均值)},$$

$$\eta_n = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \text{ (几何平均值)},$$

$$\xi_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \text{ (算术平均值)}.$$

证明: $\gamma_n \leq \eta_n \leq \xi_n$ 且同时有 $(\gamma_n = \eta_n = \xi_n) \quad (x_1 = x_2 = \cdots = x_n)$.

n 个正数的乘积

$$\frac{x_1}{\eta_n} \cdot \frac{x_2}{\eta_n} \cdots \frac{x_n}{\eta_n} = 1,$$

所以根据前面的例子,它们的和

$$\frac{x_1}{\eta_n} + \frac{x_2}{\eta_n} + \cdots + \frac{x_n}{\eta_n} \geq n.$$

由此得出 $\eta_n \leq \xi_n$. 同时当且仅当 $\frac{x_1}{\eta_n} = \frac{x_2}{\eta_n} = \cdots = \frac{x_n}{\eta_n}$ 时,也即 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时,取得等号.

按照刚才证明的结果有

$$\frac{1}{\eta_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdots \frac{1}{x_n}} \leq \frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n} = \frac{1}{\gamma_n},$$

由此得出 $\gamma_n \leq \eta_n$,且如果 $\frac{1}{x_1} = \frac{1}{x_2} = \cdots = \frac{1}{x_n} = 1$,即 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时 $\gamma_n = \eta_n$.

43 证明柯西-布尼雅科夫斯基不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right),$$

其中 $x_i\, y_i\ (i = 1, \cdots, n)$ 是任意的实数,在什么条件下给出的不等式取等号?

由显然的不等式 $\sum_{i=1}^{n} (x_i t + y_i)^2 \geq 0$ 得到对所有的 t,二次三项式 $t^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 +$

$2t\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \ge 0$, 所以

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i{}^{2} - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \le 0 .$$

当且仅当 $x_i t + y_i = 0(i=1,2,\cdots,n)$时等式成立.即存在 $\lambda\neq 0$ 使得 $y_i=\lambda x_i(i=1,\cdots,n)$,或者当所有的 $x_i(i=1,\cdots,n)$或者所有的 $y_i(i=1,\cdots,n)$都等于 0.

证明不等式:

44 1) $n! < \frac{n+1}{2}{}^{n}, n>1$; 2) $(n!)^2 < \frac{(n+1)(2n+1)}{6}{}^{n}, n>1$;

3) $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{2n+1}$.

不等式 1)和 2)分别是 42 题中当 $x_k = k$和 $x_k = k^2(k=1,\cdots,n)$时 $\eta_n \le \xi_n$ 的推论.现在利用数学归纳法证明不等式 3).

当 $n=1$ 时不等式显然成立.假设当 n时它成立,证明当 $n+1$ 时它也成立.事实上

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} < \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}$$

$$= \frac{1}{2n+3}\cdot\frac{2n+3}{2n+1}\cdot\frac{2n+1}{2n+2}$$

$$= \frac{1}{2n+3}\quad\frac{4n^2+8n+3}{4n^2+8n+4} < \frac{1}{2n+3} .$$

45 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} > n, n\ge 2$.

当 $n\ge 2$ 时

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} > n\frac{1}{n} = n .$$

46 $n^{n+1} > (n+1)^n, n\ge 3$.

当 $n=3$ 时不等式显然成立,假设对于 n 不等式成立,证明 $n+1$ 时它的正确性,即证明:如果 $n^{n+1} > (n+1)^n$,则有$(n+1)^{n+2} > (n+2)^{n+1}$.

把不等式 $n^{n+1} > (n+1)^n$ 两边乘以$\frac{(n+1)^{n+2}}{n^{n+1}}$得到

$$(n+1)^{n+2} > \frac{(n+1)^{2(n+1)}}{n^{n+1}} .$$

因为$\frac{(n+1)^{2(n+1)}}{n^{n+1}} = \frac{n^2+2n+1}{n}{}^{n+1} > (n+2)^{n+1}$,于是要求的不等式得证.

47 $\left|\sin\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \le \sum_{k=1}^{n}\sin x_k \quad 0\le x_k\le\pi,\ k=1,\cdots,n$.

当 $n=1$ 时,不等式显然成立. 假设对于 n 不等式成立, 证明 $\left|\sin\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right| \le \sum_{k=1}^{n+1}\sin x_k$,从而得到所需不等式的正确性.

实际上,如果 $0\le x_k\le\pi$,则

$$\begin{aligned}\left|\sin\sum_{k=1}^{n+1} x_k\right| &= \left|\sin\sum_{k=1}^{n} x_k\cos x_{n+1}+\cos\sum_{k=1}^{n} x_k\sin x_{n+1}\right|\\ &\le \left|\sin\sum_{k=1}^{n} x_k\right|\cdot|\cos x_{n+1}|+\left|\cos\sum_{k=1}^{n} x_k\right|\sin x_{n+1}\\ &\le \left|\sin\sum_{k=1}^{n} x_k\right|+\sin x_{n+1}\le\sum_{k=1}^{n}\sin x_k+\sin x_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\sin x_k.\end{aligned}$$

48　$(2n)!<2^{2n}(n!)^2,\ n>1$.

当 $n=2$ 时,不等式显然成立. 从 n 时不等式的正确性得到 $n+1$ 时它的正确性. 实际上,

$$\begin{aligned}(2n+2)! &= (2n)!(2n+1)(2n+2)\\ &< 2^{2n}(n!)^2(2n+1)(2n+2)\\ &< 2^{2n}(n!)^2(2n+2)^2=2^{2n+2}((n+1)!)^2.\end{aligned}$$

练　习　题

30　设$\{-x\}$是由 $x\in\{x\}$的反号数构成的集合. 证明:

1) $\inf\{-x\}=-\sup\{x\}$,　　2) $\sup\{-x\}=-\inf\{x\}$.

31　应用数学归纳法证明下列不等式:

1) $n!>n^{\frac{n}{2}},\ n>2$;　　2) $(2n-1)!<n^{2n-1},\ n>1$;　　3) $\sum_{k=1}^{n}k^p<\frac{(n+1)^{p+1}}{p+1},\ n,p\in\mathbb{N}$.

32　1) 证明: 对于任意的凸 n边形有等式 $D_n=\frac{n(n-3)}{2}$,其中 D_n 是对角线数目.

2) 证明: 对于任意的凸多面体有等式 $n+B_n-P_n=2$,其中 B_n 是顶点数, P_n 是棱数, n是面数.

33　证明不等式:

1) $|x_1+x_2+\cdots+x_n|\le\sqrt{n(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)}$;

2) $(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\ge n^2,\ x_i>0,\ i=1,\cdots,n$;

3) $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}$.

34　求和: 1) $1\cdot1!+2\cdot2!+\cdots+n\cdot n!$; 2) $1^4+2^4+\cdots+n^4$; 3) $1^5+2^5+\cdots+n^5$.

35　证明:

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)\cdots(k+m-1)=\frac{1}{m+1}n(n+1)\cdots(n+m),$$

其中 m 是自然数 . 再利用这个公式求和:

1) $1\cdot 2+2\cdot 3+\cdots+n(n+1)$; 2) $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\cdots+n(n+1)(n+2)$;

3) $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+\cdots+n(n+1)(n+2)(n+3)$.

36 证明

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+m)}=\frac{1}{m}\ \frac{1}{m!}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\cdots(n+m-1)},$$

其中 m 是自然数 . 再利用该公式计算下列诸和:

1) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$; 2) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

3) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$.

37 解方程: 1) $|x+1|+|x|+|x-1|=6$; 2) $x|x+2|-|x+1|-(x+1)|x|+1=0$.

4 复 数

4.1 复数及其运算

定义 一对有序的实数 x 和 y 形成的数偶称为复数 z . 同时有序数偶的相等、加法、乘法以及实数集合到复数上的映射按下面的方法定义:

1) 如果 $x_1=x_2\wedge y_1=y_2$ 就称两个复数 $z_1=(x_1,y_1)$ 和 $z_2=(x_2,y_2)$ 相等 .

2) 形如

$$z=(x_1+x_2,y_1+y_2)$$

的复数称为复数 z_1 和 z_2 的和 .

3) 复数

$$z=(x_1x_2-y_1y_2,x_1y_2+x_2y_1)$$

称为复数 z_1 和 z_2 的乘积 .

4) 复数集合 $(x,0)$, $x\in\mathrm{R}$ 是从实数集合到复数集合的映射 .

由 $z_2+z=z_1$ 定义的复数 z 称为复数 z_1 和 z_2 的差 . 由此得出 $z=z_1-z_2=(x_1-x_2,y_1-y_2)$

由 $z_2\cdot z=z_1$ 定义的复数 z 称为复数 z_1 和 z_2 的商 . 由此得出

$$z=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2},\ \frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2} .$$

用 $\mathrm{i}=(0,1)$ 代表复数 $(0,1)$, 那么 $(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)$, 即 $\mathrm{i}^2=-1$. 任意复数 z 可以写成

$$z=(x,y)=(x,0)+(0,y)$$

$$= (x,0) + (0,1)(y,0) = x + \mathrm{i}y.$$

这种写法称为复数的代数形式 . 复数 $\bar z = (x, -y) = x - \mathrm{i}y$ 称为复数 $z = (x, y) = x + \mathrm{i}y$ 的共轭数 .

4.2　复数的几何解释

所有的复数 $z = (x, y)$ 可以画成平面上坐标为 x 和 y 的一个点 . 复数所在的平面称为复平面 . 同时 Ox 轴称为实轴, 而 Oy 轴称为虚轴 .

点 z 到零点的距离 r, 即数 $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar z}$ 称为复数 z 的模, 并表示为 $|z|$.

数

$$\theta = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, & \text{如果 } x > 0, \\ \arctan\dfrac{y}{x} + \pi, & \text{如果 } x < 0, y \geq 0, \\ \arctan\dfrac{y}{x} - \pi, & \text{如果 } x < 0, y < 0, \\ \dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn} y, & \text{如果 } x = 0 . \end{cases}$$

称为复数 z 的辐角, 并表示为 $\theta = \arg z$. 对于已知的 r, 相差 $2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$ 的角度的复数对应于同一个数 . 在这种情况下, 我们记为 $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$. 且 $\arg z$ 称为辐角的主值 .

数 r 和 θ 称为复数 z 的极坐标 . 这时

$$z = (x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$$

称为复数的三角形式 .

如果 $z_1 = (r_1\cos\theta_1, r_1\sin\theta_1)$, $z_2 = (r_2\cos\theta_2, r_2\sin\theta_2)$, 则

$$z_1 z_2 = (r_1 r_2\cos(\theta_1 + \theta_2), r_1 r_2\sin(\theta_1 + \theta_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\cos(\theta_1 - \theta_2), \frac{r_1}{r_2}\sin(\theta_1 - \theta_2)\right).$$

利用所谓的棣莫弗公式给出复数 $z = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ 的乘幂

$$z^n = (r^n\cos n\theta, r^n\sin n\theta).$$

复数 z 的 n 次方根可按下面的公式计算

$$\sqrt[n]{z} = \left(\sqrt[n]{r}\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n}, \sqrt[n]{r}\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \cdots, n - 1. \tag{1}$$

49　证明:

1) $\overline{z_1 + z_2} = \bar z_1 + \bar z_2$;　2) $\overline{z_1 z_2} = \bar z_1 \cdot \bar z_2$;　3) $\overline{(z^n)} = \bar z^n$, $n \in \mathbf{N}$.

令 $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$.

1) 按共轭数的定义有

$$\overline{z_1+z_2} = \overline{(x_1+x_2, y_1+y_2)} = (x_1+x_2, -y_1-y_2)$$
$$= (x_1, -y_1) + (x_2, -y_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 .$$

2)
$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)}$$
$$= (x_1x_2 - y_1y_2, -x_1y_2 - x_2y_1)(x_1, -y_1)(x_2, -y_2)$$
$$= \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 .$$

3) 把复数写成三角形式 $z = (r\cos\theta, r\sin\theta)$,那么 $\bar{z} = (r\cos(-\theta), r\sin(-\theta))$ 利用棣莫弗公式得到

$$(\bar{z})^n = (r^n\cos(-n\theta), r^n\sin(-n\theta)) = (r^n\cos n\theta, -r^n\sin n\theta)$$
$$= \overline{(r^n\cos n\theta, r^n\sin n\theta)} = \overline{(z^n)} .$$

50　完成指定的运算:

1) $(2-i)(2+i)^2 - (3-2i) + 7$;　2) $(1+i)^4$; 3) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^6$.

用写成代数形式的复数完成加法和减法 . 而乘法可以像对实数偶同样的算法完成,同时利用 $i^2 = -1, i^3 = i^2 \cdot i = -i, i^4 = i^3 \cdot i = -i^2 = 1$ 等等 .

1)
$$(2-i)(2+i)^2 - (3-2i) + 7 = (2-i)(2+i)^2 + 4 + 2i$$
$$= (2+i)((2-i)(2+i) + 2)$$
$$= (2+i)(4+1+2) = 14 + 7i .$$

2) 根据牛顿二项公式得
$$(1+i)^4 = 1 + 4i + 6i^2 + 4i^3 + i^4 = 1 + 4i - 6 - 4i + 1 = -4 .$$

3) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^6 = \frac{27}{64} + i\frac{54\sqrt{3}}{64} - \frac{135}{64} - i\frac{60\sqrt{3}}{64} + \frac{45}{64} + i\frac{6\sqrt{3}}{64} - \frac{1}{64} = -1$.

51　求复数的商:

1) $\frac{1}{i}$;　2) $\frac{1}{1+i}$;　3) $\dfrac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}$.

计算复数 z_1 和 z_2 商的公式可写为

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2} .$$

利用这个公式得到

1) $\frac{1}{i} = \frac{-i}{|i|^2} = -i$;　2) $\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{|1+i|^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}$;

3) $$\frac{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left|\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|^2} = \frac{-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} .$$

52　把下列复数写成三角形式:

1) -3;　　2) $-i$;　　3) $1+i$;　　4) $-1+i\sqrt{3}$.

1) $|-3|=3,\theta=\pi,\ -3=3(\cos\pi+i\sin\pi)$;

2) $|-i|=1,\theta=-\dfrac{\pi}{2},\ -i=\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$;

3) $|1+i|=\sqrt{2},\theta=\dfrac{\pi}{4},1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$;

4) $|-1+i\sqrt{3}|=2,\theta=\dfrac{2\pi}{3},\ -1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

53　计算:

1) $(1+i\sqrt{3})^{30}$;　　2) $(\sqrt{2}-i\sqrt{2})^{20}$;　　3) $\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{12}$;

4) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-3i}\right)^{11}$;　　5) $(2+2i)^{41}$;　　6) $(-\sqrt{3}-i)^{7}$.

1) **把复数写成三角形式**

$$1+i\sqrt{3}=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

然后利用棣莫弗公式得到

$$(1+i\sqrt{3})^{30}=2^{30}\left(\cos\frac{30\pi}{3}+i\sin\frac{30\pi}{3}\right)=2^{30}.$$

2) **类似前例得到**

$$\sqrt{2}-i\sqrt{2}=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right);$$

$$(\sqrt{2}-i\sqrt{2})^{20}=2^{20}\left(\cos\left(-\frac{20\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{20\pi}{4}\right)\right)=-2^{20}.$$

3) **把分子分母都改写成三角形式,再计算商**

$$\frac{1-i}{1+i}=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right),$$

再利用棣莫弗公式,得到

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{12}=\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)^{12}=\cos\left(-\frac{12\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{12\pi}{2}\right)=1.$$

4)
$$\frac{1+i}{\sqrt{3}-3i}=\frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}{2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right);$$

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{3}-3i}\right)^{11}=\frac{1}{6^{5}\sqrt{6}}\left(\cos\frac{77\pi}{12}+i\sin\frac{77\pi}{12}\right)$$

$$= \frac{1}{6^5\sqrt{6}}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{6^5\cdot 4}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} + i\,\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}}\right).$$

5) $(2+2i)^{41} = (\sqrt{8})^{41}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{41} = (\sqrt{8})^{41}\left(\cos\frac{41\pi}{4} + i\sin\frac{41\pi}{4}\right) = 8^{20}(2+2i)$.

6) $(-\sqrt{3}-i)^7 = 2^7\left(\cos\frac{-5\pi}{6} + i\sin\frac{-5\pi}{6}\right)^7 = 2^7\left(\cos\left(-\frac{35\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{35\pi}{6}\right)\right)$

$$= 2^7\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2^7\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,\frac{1}{2}\right) = 2^6(\sqrt{3}+i).$$

54　**求出全部根**: 1) $\sqrt[4]{1}$; 2) $\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}}$.

1) **把复数 1 写成三角形式**

$$1 = \cos 0° + i\sin 0°,$$

然后按 4.2 节公式(1)得到

$$\sqrt[4]{1} = \cos\frac{2k\pi}{4} + i\sin\frac{2k\pi}{4},\ k = 0,1,2,3.$$

所以

$$\sqrt[4]{1} = \cos 0° + i\sin 0° = 1,\ k=0,\quad \sqrt[4]{1} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i,\ k=1,$$

$$\sqrt[4]{1} = \cos\pi + i\sin\pi = -1,\ k=2,\quad \sqrt[4]{1} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i,\ k=3.$$

2) **把复数** $-1-i\sqrt{3}$ **写成三角形式**

$$-1-i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right),$$

得出

$$\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{3} + i\sin\frac{-\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{3}\right),\quad k = 0,1,2.$$

由此可知

$$\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{9}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{9}\right)\right),\quad k = 0,$$

$$\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{4\pi}{9} + i\sin\frac{4\pi}{9}\right),\quad k = 1,$$

$$\sqrt[3]{-1-i\sqrt{3}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{10\pi}{9} + i\sin\frac{10\pi}{9}\right),\quad k = 2.$$

55　**解方程** $z^6 + 1 = 0$.

$z = \sqrt[6]{-1}$. **为了计算** $\sqrt[6]{-1}$ **的全部值,利用 4.2 节的公式(1)**,

$$z_k = \sqrt[6]{-1} = \cos\frac{-\pi+2k\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi+2k\pi}{6},\ k = 0,1,\cdots,5.$$

从而 $z_0 = \cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\mathrm{i}}{2}$, $\quad z_1 = \cos\dfrac{\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\mathrm{i}}{2}$,

$z_2 = \cos\dfrac{\pi}{2} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{2} = \mathrm{i}$, $\quad z_3 = \cos\dfrac{5\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{\mathrm{i}}{2}$,

$z_4 = \cos\dfrac{7\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\dfrac{7\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\mathrm{i}}{2}$, $\quad z_5 = \cos\dfrac{9\pi}{6} + \mathrm{i}\sin\dfrac{9\pi}{6} = -\mathrm{i}$.

练 习 题

38 证明:

1) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$; 2) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$; 3) $\overline{P(z)} = P(\bar{z})$, 其中 $z \mapsto P(z)$ 是一个实系数代数多项式.

39 完成指定的运算:

1) $(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})^6$; 2) $\dfrac{2 + \mathrm{i}4}{-3 + \mathrm{i}5}$; 3) $\dfrac{x + \mathrm{i}y}{x - \mathrm{i}y}\ (x^2 + y^2 \neq 0)$.

40 求出下列复数的实部和虚部:

1) $\left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 2) $\left(\dfrac{\mathrm{i}^5 + 2}{\mathrm{i}^{15} + 1}\right)^2$; 3) $\dfrac{(1 + \mathrm{i})^5}{(1 - \mathrm{i})^3}$.

41 证明在复数集合上引进加法和乘法运算后, 它构成域.

42 求出下列复数的模和辐角:

1) $(-4 + 3\mathrm{i})^3$; 2) $(1 + \mathrm{i})^8 (1 - \mathrm{i}\sqrt{3})^{-6}$; 3) $1 + \cos\dfrac{\pi}{7} + \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{7}$.

求出下列根式的全部值:

43 $\sqrt[3]{\mathrm{i}}$. **44** $\sqrt[3]{-1 + \mathrm{i}}$. **45** $\sqrt[6]{-64}$. **46** $\sqrt[6]{64}$.

求方程的根:

47 $z^2 + (5 - \mathrm{i}2)z + 5(1 - \mathrm{i}) = 0$. **48** $z^2 + (1 - \mathrm{i}2)z - \mathrm{i}2 = 0$. **49** $(z + \mathrm{i})^n + (z - \mathrm{i})^n = 0$.

50 证明复数的模是绝对值, 即 $|z|$ 满足如下条件:

1) $|z| \geq 0 \wedge (|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0)$; 2) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$;

3) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|\ \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

51 证明复数的模满足不等式

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

5 向量与度量空间

5.1 向量空间

定义 1 集合 $E = \{x, y, z, \cdots\}$ 称为在域 $\mathbb{K} = \{\lambda, \mu, \nu, \cdots\}$ 上的向量空间, 如果在其上定义了

Ⅰ 集合 E 关于内部的二元运算 $E \times E \to E: (x, y) \mapsto x + y$ 是一个阿贝尔群;

1) $x+(y+z)=(x+y)+z$;　　2) $x+\theta=x$;

3) $x+(-x)=\theta$;　　4) $x+y=y+x$.

(这里 θ 是群的零元素).

Ⅱ　外部的二元运算 $\mathbb{K}\times E\to E:(\lambda,x)\mapsto\lambda x$,满足下面的公理:

5) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$;　　6) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$;

7) $(\lambda\mu)x=\lambda(\mu x)$;　　8) $1\cdot x=x$.

向量空间 E 的元素称为向量(或者点)而域 $\mathbb{K}$ 的元素称为纯量.

如果 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$,则 E 称为实向量空间,如果 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$,E 称为复向量空间.

定义 2　向量空间 E 中任意的子集合 V,如果它也具有空间 E 上的两个二元运算,而且也构成域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间,称其为空间 E 中的向量子空间.

在任意的向量空间中均有如下性质:

1) $\lambda\theta=\theta$;　　2) $0\cdot x=\theta$;　　3) $(-1)x=-x$.

5.2　赋范向量空间

把绝对值的概念推广到在数域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间.

定义　映射

$$E\to\mathbb{R}^{+}:x\mapsto\|x\|,\ \mathbb{R}^{+}=\{a\in\mathbb{R}:0\leq a<+\infty\}$$

称为向量空间的范数.如果它们满足下述范数公理:

1) $(\|x\|=0)\quad(x=\theta)$;

2) $\|\lambda x\|=|\lambda|\cdot\|x\|$, " $x\in E$;

3) $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ " $x,y\in E$(三角不等式).

5.3　欧几里得空间

定义 1　令 E 是 $\mathbb{R}$ 上的向量空间.映射 $E\times E\to\mathbb{R}:\varphi(x,y)=\langle x,y\rangle$ 称为纯量积,它把 E 中每两个元素 x 和 y 对应于一个实数,表示为 $\langle x,y\rangle$.对于 " $x,y,z\in E$ 和 " $\lambda\in\mathbb{R}$,它必须满足下列公理.

1) $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$;

2) $\langle x+y,z\rangle=\langle x,z\rangle+\langle y,z\rangle$;

3) $\langle\lambda x,y\rangle=\lambda\langle x,y\rangle$;

4) $\langle x,x\rangle\geq0\wedge(\langle x,x\rangle=0)\quad(x=\theta)$.

定义 2　定义了纯量积的向量空间称为欧几里得空间.

5.4　度量空间

定义　集合 $E=\{x,y,z,\cdots\}$ 称为度量空间,如果定义了映射 $E\times E\to\mathbb{R}^{+}:(x,y)\mapsto\rho(x,y)$,对于任意的 x 和 y 都对应着非负实数 ρ,且满足下列公理:

1) $(\rho(x, y) = 0)$ $(x = y)$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, " $x, y \in E$(对称公理);

3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$, " $x, y, z \in E$(三角不等式).

度量空间的元素称为点,数 $\rho(x, y)$称为点 x 和 y 之间的距离或称为空间 E 的度量.

度量空间 E 的每部分 F,在其上定义了映射 $F \times F \to \mathbb{R}^{+}$,它是映射 $E \times E \to \mathbb{R}^{+}$: $(x, y) \mapsto \rho(x, y)$在其上的限制,称为度量子空间.定义其上的度量称为诱导度量,度量子空间本身也是度量空间.

5.5 邻域

定义 1 集合

$$\{x \in E: \rho(x, x_0) < r\}(\{x \in E: \rho(x, x_0) \leq r\})$$

称为度量空间 E 中以 x_0 为中心, r 为半径的开(闭)球.

用 $S(x_0, r)$(或$\bar{S}(x_0, r)$)表示开(闭)球.

类似地可以定义赋范向量空间中的开(闭)球.

定义 2 集合

$$\{x \in E: \| x - x_0 \| < r\} (\{x \in E: \| x - x_0 \| \leq r\})$$

称为赋范向量空间 E 中以 x_0 为中心,以 r 为半径的开(闭)球.

定义 3 以 x_0 为中心以 δ为半径的开球称为 x_0 的 δ-邻域.

在数轴$\mathbb{R}$ 上半径为 δ的开(闭)球是开区间$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$(或相应的闭区间$[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$).

56 令$\mathbb{R}^m$是所有可能的由 m 个实数构成的有序集合$(x_1, x_2, \cdots, x_m)$,并在$\mathbb{R}^m$上定义了内部二元运算$\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$,对集合$\mathbb{R}^m$中任意两个元素 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$和 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$都对应着元素

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_m + y_m),$$

称为两个元素 $\boldsymbol{x}$和 $\boldsymbol{y}$ 之和;还有一个外部二元运算$\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$,对于任何 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$和任意 $\lambda \in \mathbb{R}$ 构成元素

$$\lambda \boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_m),$$

称为 λ和 $\boldsymbol{x}$ 之积.

证明$\mathbb{R}^m$是在域$\mathbb{R}$ 上的向量空间.

首先指出集合$\mathbb{R}^m$是加法的阿贝尔群.实际上,对于任意的 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$和 $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_m)$,由实数加法的结合律,则有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z}) &= (x_1 + (y_1 + z_1), \cdots, x_m + (y_m + z_m)) \\
&= ((x_1 + y_1) + z_1, \cdots, (x_m + y_m) + z_m) \\
&= (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z}.
\end{aligned}$$

取 $\theta = \mathbf{0} = (0, 0, \cdots, 0)$,则对 " $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$满足等式 $\boldsymbol{x} + \mathbf{0} = (x_1 + 0, x_2 + 0, \cdots, x_m + 0) =$

$(x_1, x_2, \cdots, x_m) = \boldsymbol{x}$.

设 $-\boldsymbol{x} = (-x_1, -x_2, \cdots, -x_m)$**,那么**

$$\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x}) = (x_1 - x_1, x_2 - x_2, \cdots, x_m - x_m) = (0, 0, \cdots, 0) = \boldsymbol{0}.$$

最后,由于实数加法的交换律,有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} &= (x_1 + y_1, \cdots, x_m + y_m) = (y_1 + x_1, \cdots, y_m + x_m) \\ &= (y_1, \cdots, y_m) + (x_1, \cdots, x_m) = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}. \end{aligned}$$

所以阿贝尔群的 4 个公理都满足 .

其次,从内、外二元运算和实数运算的性质直接得到下面等式对$\mathbb{R}^m$**中任意的** $\boldsymbol{x}$ **和** $\boldsymbol{y}$ **及**$\mathbb{R}$ **中任意的** λ**和** μ **都成立:**

$$\begin{aligned} \lambda(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) &= \lambda(x_1 + y_1, \cdots, x_m + y_m) = (\lambda(x_1 + y_1), \cdots, \lambda(x_m + y_m)) \\ &= (\lambda x_1 + \lambda y_1, \cdots, \lambda x_m + \lambda y_m) = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_m) + (\lambda y_1, \cdots, \lambda y_m) \\ &= \lambda(x_1, \cdots, x_m) + \lambda(y_1, \cdots, y_m) = \lambda\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)\boldsymbol{x} &= (\lambda - \mu)(x_1, \cdots, x_m) = ((\lambda + \mu)x_1, \cdots, (\lambda + \mu)x_m) \\ &= (\lambda x_1 + \mu x_1, \cdots, \lambda x_m + \mu x_m) = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_m) + (\mu x_1, \cdots, \mu x_m) \\ &= \lambda(x_1, \cdots, x_m) + \mu(x_1, \cdots, x_m) = \lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{x}; \end{aligned}$$

$$(\lambda\mu)\boldsymbol{x} = ((\lambda\mu)x_1, \cdots, (\lambda\mu)x_m) = (\lambda(\mu x_1), \cdots, \lambda(\mu x_m)) = \lambda(\mu x_1, \cdots, \mu x_m) = \lambda(\mu\boldsymbol{x});$$

$$1 \cdot \boldsymbol{x} = (1 \cdot x_1, \cdots, 1 \cdot x_m) = (x_1, \cdots, x_m) = \boldsymbol{x},$$

于是定义向量空间的公理都满足,从而$\mathbb{R}^m$**是域**$\mathbb{R}$ **上的向量空间 .**

57 令 m **是有如下形状矩阵的全体构成的集合**

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}),$$

其中 $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, m$, $j = 1, \cdots, n$.

矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$**和** $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$**的和是矩阵**

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix},$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$**和数** $\lambda \in \mathbb{R}$ **之积为矩阵**

$$\lambda\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

证明 M 是域R 上的向量空间 .

$m\times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 的集合 M 可以通过彼此单值的对应关系 $(a_{ij})\backslash(a_{11},\cdots,a_{1n},\cdots,a_{m1},\cdots,a_{mn})$ 从 $\mathrm{R}^{m\times n}$ 维向量空间 $\boldsymbol{x}=(a_{11},\cdots,a_{1n},\cdots,a_{m1},\cdots,a_{mn})$ 得到,于是对于任意的 $(a_{ij})\in M,(b_{ij})\in M$ 和 $\lambda\in\mathrm{R}$,有

$$(a_{ij})+(b_{ij})\backslash(a_{11}+b_{11},\cdots,a_{1n}+b_{1n},\cdots,a_{m1}+b_{m1},\cdots,a_{mn}+b_{mn}),$$

$$\lambda(a_{ij})\backslash(\lambda a_{11},\cdots,\lambda a_{1n},\cdots,\lambda a_{m1},\cdots,\lambda a_{mn}).$$

(即空间 M 关于 m 中元素的加法以及与域R 的乘法同构于空间 $\mathrm{R}^{m\times n}$.)所以 M 是域R 上的向量空间 .

58 如果对于任意的 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_m),\boldsymbol{x}\in\mathrm{R}^m$,设

$$\|\boldsymbol{x}\| = \quad x_1^2+x_2^2+\cdots+x_m^2 . \tag{1}$$

证明空间 R^m 成为一个赋范向量空间 .

只要证明 5 .2 节中的公理 1)～3)成立就够了 .

1) 显然,$\|\boldsymbol{x}\|>0$ 且$(\|\boldsymbol{x}\|=0)\quad(\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0})$.

2) 对于任意的 $\boldsymbol{x}\in\mathrm{R}^m$ 和 " $\lambda\in\mathrm{R}$,有

$$\|\lambda\boldsymbol{x}\| = \quad (\lambda x_1)^2+(\lambda x_2)^2+\cdots+(\lambda x_m)^2 = \lambda^2 \quad x_1^2+x_2^2+\cdots+x_m^2 = |\lambda|\cdot\|\boldsymbol{x}\| .$$

3) 现在证明,对于任意的 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 和 $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_m)$

$$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\| . \tag{2}$$

把不等式(2)写成坐标形式

$$\sum_{i=1}^m (x_i+y_i)^2 \leq \quad \sum_{i=1}^m x_i^2 + \quad \sum_{i=1}^m y_i^2 ,$$

两边平方然后化简得到不等式

$$\sum_{i=1}^m x_i y_i \leq \quad \sum_{i=1}^m x_i^2 \quad \sum_{i=1}^m y_i^2 , \tag{3}$$

它等价于不等式(2) . 不等式(3)称为柯西-布尼雅科夫斯基不等式,已经证明了它的正确性(见例 43) . 从而等式(1)给出了 R^m 中的范数 .

59 向量空间 M 的元素是 $m\times n$ 的矩阵,如果对任意的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij}),i=1,\cdots,m,j=1,\cdots,n$,设

$$\|\boldsymbol{A}\| = \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n |a_{ij}| . \tag{1}$$

证明 M 是赋范向量空间 .

范数的第一个公理成立是显然的 . 其次 " $\lambda\in\mathrm{R}$ 和 " $\boldsymbol{A}\in M$,则有

$$\|\lambda\boldsymbol{A}\| = \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n |\lambda a_{ij}| = \sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n |\lambda||a_{ij}| = |\lambda|\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^n |a_{ij}| = |\lambda|\cdot\|\boldsymbol{A}\| ,$$

即第二个公理成立 .

剩下只要三角不等式成立就可以了 . 令 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in M$ 是任意给定的 $m\times n$ 矩阵,则

$$\|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\| = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}+b_{ij}| \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(|a_{ij}|+|b_{ij}|)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}| = \|\boldsymbol{A}\| + \|\boldsymbol{B}\|.$$

这样,所有的公理均成立,所以等式(1)给出了 M 上的范数,它使 M 成为域R 上的赋范向量空间.

60 令 C 是所有有界函数 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 的集合.如果对于任意的函数 f,设

$$\|f\| = \sup_{x\in[a,b]}|f(x)|. \tag{1}$$

证明集合 C 构成域R 上的赋范向量空间.

容易看出,如果等式

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x),\ x\in[a,b]$$

定义了 C 中的加法,而

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

是域R 上的纯量积,则 C 是域R 上的向量空间.

只要证明由等式(1)确定的数满足所有的范数公理就可以了.

1) 因为 $|f(x)|\geq 0$,则 $\|f\| = \sup|f(x)|\geq 0$;此外,当且仅当 $|f(x)|\equiv 0$ 时,即当 $f:[a,b]\to 0$ 时,$\|f\|=0$.这样的映射是向量空间 C 的零元素.

2) 对于任意的函数 $f\in C$ 和任意的 $\lambda\in\mathbf{R}$ 均有

$$\|\lambda f\| = \sup_{x\in[a,b]}|\lambda f(x)| = \sup_{x\in[a,b]}|\lambda||f(x)| = |\lambda|\sup_{x\in[a,b]}|f(x)| = |\lambda|\,\|f\|.$$

3) 从关于绝对值的三角不等式以及上确界的性质得出不等式

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)|+|g(x)| \leq \sup_{x\in[a,b]}|f(x)| + \sup_{x\in[a,b]}|g(x)|$$

$$= \|f\| + \|g\|\quad \forall f,g\in C,\ \forall x\in[a,b].$$

因而集合 $\{|f(x)+g(x)|\},\ x\in[a,b]$ 以 $\|f\|+\|g\|$ 为上界,根据等式(1)得该集合的上确界等于 $\|f+g\|$,所以它也应当以同一个数为上界.

所以

$$\sup_{x\in[a,b]}|f(x)+g(x)| = \|f+g\| \leq \|f\|+\|g\|.$$

这正好得到前面的范数的公理.

61 证明对任意的赋范向量空间 $E=\{x,y,z,\cdots\}$ 成立不等式

$$|\,\|x\| - \|y\|\,| \leq \|x-y\|. \tag{1}$$

根据三角不等式

$$\|x\| = \|(x-y)+y\| \leq \|x-y\| + \|y\|,$$

得出

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x-y\|. \tag{2}$$

交换 x 和 y 的位置,则有

$$\| y\| - \| x\| \leq \| y - x\| = \| (-1)(x - y)\|$$
$$= |-1| \| x - y\| = \| x - y\|,$$

或者

$$-\| x - y\| \leq \| x\| - \| y\| . \qquad (3)$$

由(2)和(3)直接得出(1).

62　如果在向量空间 M(见例 59)中对于任何两个元素 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$和 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$设

$$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} . \qquad (1)$$

证明 M 是一个欧几里得空间.

只要证明等式(1)定义的数 $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\rangle$ 满足纯量积的 4 个公理就可以了(见 5.3 节).前 3 个公理成立可以直接由 $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\rangle$ 的定义得出.

1) $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} a_{ij} = \langle \boldsymbol{B}, \boldsymbol{A}\rangle$;

2) 对任意的矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$和 $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$有

$$\langle \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_{ij}) c_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} c_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij} c_{ij} = \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{C}\rangle + \langle \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}\rangle;$$

3) 令 $\forall \boldsymbol{A} \in M$ 和 $\forall \lambda \in \mathbf{R}$,则

$$\langle \lambda \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \lambda a_{ij} b_{ij} = \lambda \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} = \lambda \langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\rangle;$$

4) 对任意的矩阵 $\boldsymbol{A} \in M$ 我们有

$$\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 ,$$

由此得出 $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}\rangle \geq 0$ 且当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的所有元素均为零时,即 $\boldsymbol{A} = \theta$(这里 θ 是向量空间 M 的零元素),才有 $\langle \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}\rangle = 0$.所以纯量积的全部公理得到满足.即等式(1)给出了向量空间 M 中的纯量积.于是 M 是欧几里得空间.

63　如果在赋范向量空间 $E = \{x, y, z, \cdots\}$中,对于 E 中的任何元素 x 和 y,规定

$$\rho(x, y) = \| x - y\| .$$

证明空间 E 是度量空间.

让我们证明度量公理成立(见 5.4 节).事实上,由范数的性质得出:

1) $\rho(x, y) = \| x - y\| \geq 0$,且 $\rho(x, y) = 0$ 当且仅当 $x - y = \theta$,即 $x = y$;

2) $\rho(x, y) = \| x - y\| = \| (-1)(y - x)\| = |-1| \cdot \| y - x\| = \| y - x\| = \rho(y, x)$;

3) $\rho(x, y) = \| x - y\| = \| x - z + z - y\| \leq \| x - z\| + \| z - y\| = \rho(x, z) + \rho(z, y)$ $\forall x, y, z \in E$.

这样全部度量公理得到满足,所以 E 为一度量空间.

练　习　题

52　如果集合 $C\{f, g, h, \cdots\}$是定义在域K 上向量空间 F中集合 E 上的全体映射,证明其本身也构成同一个域K 上的向量空间 .

53　证明复数集合C 形成实数域R 上的向量空间 .

54　如果在$\mathbf{R}^m$中对任意的元素 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$用下面等式之一定义其范数:

1) $\|\boldsymbol{x}\| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_m|$ (八面体范数);　2) $\|\boldsymbol{x}\| = \max\limits_{1\le i\le m} |x_i|$ (立方体范数) .

证明其构成赋范空间 .

55　下列等式中哪些给出了向量空间$\mathbf{R}^m$中的范数:

1) $\|\boldsymbol{x}\| = \sum\limits_{k=1}^{m} k\cdot|x_k|$;　　2) $\|\boldsymbol{x}\| = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i x_i^2, \alpha_i > 0, i = 1, \cdots, m$;

3) $\|\boldsymbol{x}\| = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_{m-1}|$;　　4) $\|\boldsymbol{x}\| = \max\limits_{1\le i\le m} \alpha_i |x_i|, \alpha_i > 0$;

5) $\|\boldsymbol{x}\| = \max\limits_{1\le i\le m-1} |x_i|$.

56　证明下列等式中的每一个都可以成为向量空间 M 中的范数,M 是由 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$构成的 .

1) $\|\boldsymbol{A}\| = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2$;　　2) $\|\boldsymbol{A}\| = \max\limits_{1\le i\le m}\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$;

3) $\|\boldsymbol{A}\| = \max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^{m} |a_{ij}|$;　　4) $\|\boldsymbol{A}\| = \max\limits_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} |a_{ij}|$.

57　设 M和上例中的一样,指出下列等式中哪些是空间 M中的范数:

1) $\|\boldsymbol{A}\| = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} a_{ij}^2, \alpha_{ij} > 0$;　　2) $\|\boldsymbol{A}\| = \sum\limits_{i=1}^{m-1}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}^2$;

3) $\|\boldsymbol{A}\| = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} |a_{ij}|, \alpha_{ij} > 0$;　　4) $\|\boldsymbol{A}\| = \max\limits_{1\le i\le m} \alpha_{ij} |a_{ij}|, \alpha_{ij} > 0$;

5) $\|\boldsymbol{A}\| = \max\limits_{1\le j\le n} \alpha_{ij} |a_{ij}|, \alpha_{ij} < 0$;　　6) $\|\boldsymbol{A}\| = \max\limits_{2\le i\le m} \alpha_{ij} |a_{ij}|, \alpha_{ij} > 0, m > 2$.

58　从度量的定义出发,证明空间$\mathbf{R}^m$中两点 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$和 $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$之间的距离可以由下列等式之一定义:

1) $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum\limits_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2$;　　2) $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum\limits_{i=1}^{m} |x_i - y_i|$;

3) $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\limits_{1\le i\le m} |x_i - y_i|$;　　4) $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i (x_i - y_i)^2, \alpha_i > 0$;

5) $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i |x_i - y_i|, \alpha_i > 0$;　　6) $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\limits_{1\le i\le m} (\alpha_i |x_i - y_i|), \alpha_i > 0$.

59　通过直接验证度量公理证明:在由 $m\times n$矩阵构成的向量空间中任意两点(矩阵)

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \text{ 和 } \boldsymbol{B} = (b_{ij})$$

之间的距离可由下列等式之一给出:

1) $\rho(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} (a_{ij} - b_{ij})^2$;　　2) $\rho(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \max\limits_{1\le i\le m}\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij} - b_{ij}|$;

3) $\rho(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \max\limits_{1\leq j\leq n}\sum\limits_{i=1}^{m} | a_{ij} - b_{ij} |$; 4) $\rho(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}) = \max\limits_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}} | a_{ij} - b_{ij} |$.

60 设 E 为一度量空间,其度量为 $\rho: E\times E\to \mathbf{R}^{+}$. 证明:如果 E 同时还是个向量空间,则它是以 $\| x\| = \rho(x,\theta)$ 为范数的赋范空间,其中 x 是任意的,θ 是空间 E 的零元素.

61 如果由下式之一构成度量 ρ,画出在度量空间 $\mathbf{R}^2$ 中闭(开)球代表的点集:

1) $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$; 2) $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = | x_1 - y_1 | + | x_2 - y_2 |$;

3) $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \max\limits_{1\leq i\leq 2} | x_i - y_i |$; 4) $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \sqrt{\dfrac{(x_1 - y_1)^2}{4} + \dfrac{(x_2 - y_2)^2}{9}}$;

5) $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \dfrac{| x_1 - y_1 |}{2} + \dfrac{| x_2 - y_2 |}{3}$; 6) $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \max\left\{\dfrac{| x_1 - y_1 |}{2}, \dfrac{| x_2 - y_2 |}{3}\right\}$.

6 序列的极限

6.1 序列的概念

定义 映射

$$\mathbf{N}\to E: n\mapsto x_n$$

称为集合 E 上的序列,即它是一个函数,把每个自然数 $n\in\mathbf{N}$ 对应一个相应的元素 $x\in E$.

序列的通用写法是 (x_n) 或者 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 或者 $x_n = f(n), n\in\mathbf{N}$. 元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 称为序列的项,而 x_n 称为其通项.

集合 E 可以是各种各样的,如:$\mathbf{R}, \mathbf{R}^m, C[a,b], M$ 等等. 如果 $E = \mathbf{R}$,那么序列称为数列;如果 $E = \mathbf{R}^m$,则称为向量序列;如果 $E = C[a,b]$,则称为函数序列;如果 $E = M$,则称为矩阵序列等等. 在这里列出的任何一种情况下,所有可能的序列形成的集合构成赋范向量空间,因而是度量空间.

6.2 收敛的序列及其性质

首先研究数列.

定义 如果存在实数 a 并对于任何 $\varepsilon > 0$,存在自然数 m 使得对于所有的 $n > m$ 都有不等式 $| x_n - a| < \varepsilon$. 则称数列 (x_n) 是收敛的. 这时 a 称为数列 (x_n) 的极限,用符号表示为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad 或者 \quad x_n \to a \quad 当 \ n\to\infty.$$

该定义借助于逻辑符号可表述如下:如果

$$\exists\, a\in\mathbf{R}\wedge \forall\varepsilon > 0\ \exists\, m\in\mathbf{N}: \forall\, n > m \Rightarrow | x_n - a | < \varepsilon.$$

则称数列 (x_n) 是收敛的.

如果数列不是收敛的,则称其为发散的.

定理 如果数列 (x_n) 和 (y_n) 收敛,并且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. 则

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b, \lim_{n\to\infty} x_n y_n = ab,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{a}{b}\left(y_n\neq 0\ \forall n\in\mathrm{N},\ b\neq 0\right).$$

6.3 极限存在准则

1. 如果 $y_n\leq x_n\leq z_n\ \forall n>n_0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$, 则 $\exists\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

2. 单调有界序列有极限.

3. 数列 (x_n) 有有限的极限当且仅当

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\ m\in\mathrm{N}:\forall n>m\wedge\forall p\in\mathrm{N}\quad |x_{n+p}-x_n|<\varepsilon$$

(柯西准则).

6.4 数值 e

数列 $n\mapsto\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n\in\mathrm{N}$ 的有限极限称为 e, 即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}=2.718281828459045\cdots.$$

6.5 反常意义下的极限

定义 1 R 中满足不等式

$$\Delta<x<+\infty\quad(-\infty<x<\Delta)$$

的集合称为“点 $+\infty$”(“点 $-\infty$”)的 Δ-邻域. R 中不属于闭区间 $[-\Delta,\Delta]$ 所有数的集合称为“点 ∞”的 Δ-邻域.

定义 2 如果

$$\forall\Delta>0\ \exists\ m\in\mathrm{N}:\forall n>m\quad x_n>\Delta$$

$$(\forall\Delta>0\ \exists\ m\in\mathrm{N}:\forall n>m\quad x_n<-\Delta).$$

则称数列 (x_n) 有极限 $+\infty(-\infty)$ 或者趋向于 $+\infty(-\infty)$.

如果 $\forall\Delta>0\ \exists\ m\in\mathrm{N}:\forall n>m\quad |x_n|>\Delta$, 则称数列 (x_n) 有极限 ∞.

6.6 部分极限、上极限和下极限

定义 1 如果子序列 (x_{n_k}) 收敛, 则它的极限称为数列 (x_n) 的部分极限.

定义 2 如果数 $a\in\mathrm{R}$ 的任何邻域包含数列 (x_n) 的无穷多点, 则称 a 为它的聚点.

序列的部分极限同时是它的聚点.

定义 3 数列 (x_n) 的最大(最小)部分极限称为它的上(下)极限并且用符号记为

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n\ (\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n).$$

定理 任何数列有上极限和下极限.

6.7 度量空间中的收敛序列

定义 如果存在 $a\in E$,并对任何 $\varepsilon>0$ 都有自然数 m 使得 $\forall n>m$ 不等式 $\rho(x_n, a)<\varepsilon$ 成立.则称度量空间 E 中的序列(x_n)收敛.

在这个定义中自然数 m 可以用正实数 α 代替.这是因为从不等式 $n>\alpha$ 可以得到 $n>[\alpha]=m$.

如果在$\mathbf{R}^m$中给定通项为 $\boldsymbol{x}_n=(x_{1n}, x_{2n}, \cdots, x_{mn})$ $n\in\mathbf{N}$ 的序列.当存在极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_{in}$, $i=1,\cdots,m$,则该序列是收敛的,而且定义下述等式:

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n=\left(\lim_{n\to\infty}x_{1n}, \lim_{n\to\infty}x_{2n}, \cdots, \lim_{n\to\infty}x_{mn}\right).$$

同样,如果在空间 M 中给定序列

$$\boldsymbol{A}_k=\begin{pmatrix} a_{11}^{(k)} & a_{12}^{(k)} & \cdots & a_{1n}^{(k)} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1}^{(k)} & a_{m2}^{(k)} & \cdots & a_{mn}^{(k)} \end{pmatrix},\quad k\in\mathbf{N},$$

当$\exists\lim\limits_{k\to\infty}a_{pq}^{(k)}$ $(p=1,\cdots,m, q=1,\cdots,n)$,则这个序列收敛而且定义下述等式:

$$\lim_{k\to\infty}\boldsymbol{A}_k=\begin{pmatrix} \lim\limits_{k\to\infty}a_{11}^{(k)} & \lim\limits_{k\to\infty}a_{12}^{(k)} & \cdots & \lim\limits_{k\to\infty}a_{1n}^{(k)} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \lim\limits_{k\to\infty}a_{m1}^{(k)} & \lim\limits_{k\to\infty}a_{m2}^{(k)} & \cdots & \lim\limits_{k\to\infty}a_{mn}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

64 证明序列$(x_n)=\left(\dfrac{2n+1}{n}\right)$收敛到 2.

因为$|x_n-2|=\left|\dfrac{2n+1}{n}-2\right|=\dfrac{1}{n}$.对于每个 $\varepsilon>0\ \exists\ m\in\mathbf{N}$ 使得$\dfrac{1}{m}<\varepsilon$(见例 28).当$\forall n>m$ 时不等式$\dfrac{1}{n}<\varepsilon$成立,从而$|x_n-2|<\varepsilon$,即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$.

65 证明:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$ 其中$|q|<1$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\infty$其中$|q|>1$.

1) 如果 $q=0$,则等式 1)显然成立.令 $\varepsilon>0$ 且 $0<|q|<1$.利用伯努利不等式得到

$$\frac{1}{|q|^n}=\left(1+\left(\frac{1}{|q|}-1\right)\right)^n>1+n\left(\frac{1}{|q|}-1\right)>n\left(\frac{1}{|q|}-1\right).$$

从而有

$$|q|^n=|q^n|<\frac{|q|}{n(1-|q|)}<\varepsilon\quad\forall n>\frac{|q|}{\varepsilon(1-|q|)}.$$

2) 令$|q|>1$ 和任意的 $\Delta>0$.由不等式

$$|q|^n=(1+(|q|-1))^n>1+n(|q|-1)>n(|q|-1)>\Delta$$

得到

$$|q|^n > \Delta \quad " \quad n > \frac{\Delta}{|q|-1}.$$

求下列极限:

66 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$.

设 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$,**则有**

$$S_n-\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{5}{2^3}-\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}-\frac{2n-3}{2^n}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2n-1}{2^{n+1}},$$

$$S_n=1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}=1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}.$$

因而

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty} 1+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{2n-1}{2^n}=\lim_{n\to\infty} 1+2-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}3-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-2}}-2\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=3.$$

这里用到了对于任意的 $\varepsilon>0$,**如果** $n>1+\frac{2}{\varepsilon}$,**则**

$$\left|\frac{n}{2^n}\right|=\frac{n}{(1+1)^n}=\frac{n}{1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\cdots+1}<\frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}}=\frac{2}{n-1}<\varepsilon$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$.

67 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$.

代替

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

$$=1-\frac{1}{n+1}.$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\lim_{n\to\infty}1-\frac{1}{n+1}=1.$$

68 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$.

因为 $\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=2^{1-\frac{1}{2^n}}=\dfrac{2}{2^{\frac{1}{2^n}}}$,而且当 $n>2$ 时,有

$$2=\left(2^{\frac{1}{2^n}}\right)^{2^n}=\left(1+\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)\right)^{2^n}>\left(1+\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)\right)^{n}$$
$$=1+n\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)+\cdots+\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right)^n>n\left(2^{\frac{1}{2^n}}-1\right),$$

即 $0<2^{\frac{1}{2^n}}-1<\dfrac{2}{n}$. 当 $n\to\infty$ 时 $2^{\frac{1}{2^n}}\to1$,所以该极限等于 2 .

证明下列等式:

69 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$.

由下面的不等式

$$0<\frac{2^n}{n!}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdots\frac{2}{n}\leq2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}=\frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

和当 $n\to\infty$ 时 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\to0$(见例 65)就得到上面的等式 .

70 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0,\ a>1$.

令 m 为一个整数而且 $m\geq k$,则

$$0<\frac{n^k}{a^n}\leq\frac{n^m}{a^n}=\left(\frac{n}{(\sqrt[m]{a})^n}\right)^m=\left(\frac{n}{b^n}\right)^m,$$

(这里 $b=\sqrt[m]{a}>1$) . 当 $n\to\infty$ 时

$$0<\frac{n}{b^n}=\frac{n}{(1+(b-1))^n}$$
$$=\frac{n}{1+n(b-1)+\frac{n(n-1)}{2}(b-1)^2+\cdots+(b-1)^n}<\frac{2n}{n(n-1)(b-1)^2}\to0 .$$

利用有关极限乘积的定理得到当 $n\to\infty$ 时 $\left(\dfrac{n}{b^n}\right)^m\to0$. 根据这个结果就可以得到结论 .

71 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$.

对于任意的 $\varepsilon>0$ 和 $m+1>|a|$,只要 n 充分大,从下面显然成立的不等式

$$0<\left|\frac{a^n}{n!}\right|=\frac{|a|}{1}\cdot\frac{|a|}{2}\cdots\frac{|a|}{m}\cdot\frac{|a|}{m+1}\cdots\frac{|a|}{n}<\frac{|a|^m}{m!}\left(\frac{|a|}{m+1}\right)^{n-m}<\varepsilon,$$

就可以得出极限为 0 .

72 $\lim\limits_{n\to\infty}nq^n=0$,如果 $|q|<1$.

可由下式得到证明

$$|nq^n| = \frac{n}{\left|\frac{1}{q}\right|^n} = \frac{n}{b^n}, b > 1 \quad (\text{见例 } 70).$$

73 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$.

当 $a = 1$ 时等式显然成立. 令 $a > 1$, 则 $\sqrt[n]{a} > 1$ 而且(见例 40)

$$a = (1 + (\sqrt[n]{a} - 1))^n > 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1) > n(\sqrt[n]{a} - 1),$$

从而得到当 $n > \frac{a}{\varepsilon}(\varepsilon > 0)$时, $0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \frac{a}{n} < \varepsilon$成立, 即当 $n\to\infty$时$\sqrt[n]{a}\to 1$.

如果 $0 < a < 1$, 则$\frac{1}{a} > 1$, 就可以证明当 $n\to\infty$时 $\sqrt[n]{\frac{1}{a}}\to 1$, 那么

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}}} = 1.$$

74 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n} = 0, a > 1$.

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{b^n} = 0, b > 1$(见例 70 的答案).

对于充分大的 n则有$\frac{1}{b^n} < \frac{n}{b^n} < 1$. 设 $b = a^{\varepsilon}$, 其中 $a > 1, \varepsilon > 0$ 为任意数, 那么$\frac{1}{a^{\varepsilon n}} < \frac{n}{a^{\varepsilon n}} < 1$ 或者 $1 < n < a^{\varepsilon n}$.

把最后一个不等式取对数, 得到 $0 < \log_a n < \varepsilon n$, 从而当 n 充分大时 $0 < \frac{\log_a n}{n} < \varepsilon$. 最后一个不等式给出了结论.

75 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1$.

从显而易见的不等式

$$n = (1 + (\sqrt[n]{n} - 1))^n = 1 + n(\sqrt[n]{n} - 1) + \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 + \cdots + (\sqrt[n]{n} - 1)^n > \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2$$

得出对于任意的 $\varepsilon > 0$ 和所有的 $n > 1 + 2\varepsilon^{-2}$ 都有 $|\sqrt[n]{n} - 1| < \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon$, 这就得到了结论.

76 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

首先让我们利用数学归纳法给出

$$n! > \left(\frac{n}{3}\right)^n.$$

当 $n=1$ 时不等式成立．其次如果对于 n 它成立，对于 $n+1$ 则有

$$(n+1)!=n!(n+1)>\left(\frac{n}{3}\right)^n(n+1)=\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}\cdot\frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>\left(\frac{n+1}{3}\right)^{n+1}.$$

最后一个不等式之所以成立是因为

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n&=1+\frac{n}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}\\&=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\\&<1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\\&<1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots=1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3.\end{aligned}$$

极限的存在性和等于 0 可由下式给出：

对于任意的 $\varepsilon>0$ 和所有的 $n>\dfrac{3}{\varepsilon}$ 成立

$$0<\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}<\frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3}\right)^n}}=\frac{3}{n}<\varepsilon.$$

77 证明数列

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

单调增加且有上界，而数列

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

单调减少且有下界．所以它们有共同的极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\mathrm{e}.$$

从例 40 中的不等式得知

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}\frac{n+1}{n}>\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\frac{n+1}{n}=1,$$

$$\begin{aligned}\frac{y_n}{y_{n-1}}&=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n}\cdot\frac{n+1}{n}<\frac{1}{1+\frac{n}{n^2-1}}\cdot\frac{n+1}{n}\\&=\frac{n^3+n^2-n-1}{n^3+n^2-n}<1,\end{aligned}$$

即 $x_n\nearrow$, $y_n\searrow$. 其次当 $n\to\infty$时 $x_n<y_n$ 且 $0<y_n-x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{n}<\frac{3}{n}\to 0$, 因此, 当 $n\to\infty$时 $y_n-x_n\to 0$.

所以, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\mathrm{e}$.

78 证明

$$0<\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{3}{n},\quad n\in\mathbf{N}\ .$$

对于哪些指数 n, 表达式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 与 e 的差将小于 0 .001 ?

根据例 77, 则有 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>\mathrm{e}$. 那么

$$0<\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{n}<\frac{3}{n}<\frac{1}{1000}$$

当 $n>3000$ 时成立 .

79 令(p_n)为一个任意的收敛于 $+\infty$的数列, 而(q_n)为一任意的收敛于 $-\infty$的数列 . 证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=\mathrm{e}\ .$$

令(n_k)为一个任意的收敛于 $+\infty$的整数数列, 由不等式: 当 $n>N(\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ 时

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\mathrm{e}\right|<\varepsilon .$$

得到当 $n_k>N(\varepsilon)$时 $\left|\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}-\mathrm{e}\right|<\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{n_k\to\infty}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}=\mathrm{e}$.

如果任意的数列(p_k), $p_k>1$ 趋向于 $+\infty$, 则存在这样的整数数列(n_k), 使得 $n_k\leq p_k<n_{k+1}$ 且 $n_k\to+\infty$. 又因为不等式

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n_k+1}\right)^{n_k+1}}{1+\frac{1}{n_k+1}}<\left(1+\frac{1}{p_k}\right)^{p_k}<\left(1+\frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\left(1+\frac{1}{n_k}\right)$$

左、右两部分趋于 e . 所以 $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_k}\right)^{p_k}=\mathrm{e}$.

如果任意的数列(q_k), $(-q_k>1)$趋向于 $-\infty$, 则设 $q_k=-\alpha_k$ 得到当 $k\to\infty$时

$$\left(1+\frac{1}{q_k}\right)^{q_k}=\left(1-\frac{1}{\alpha_k}\right)^{-\alpha_k}=\left(1+\frac{1}{\alpha_k-1}\right)^{\alpha_k-1}\left(1+\frac{1}{\alpha_k-1}\right)\to\mathrm{e}\ .$$

80 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$, 证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2\,!}+\frac{1}{3\,!}+\cdots+\frac{1}{n\,!}\right)=\mathrm{e}\ .$$

从而推导出公式

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n \cdot n!},$$

其中 $0 < \theta_n < 1$. **并计算** e **的值(精确到** 10^{-5} **)**.

对下面的不等式取 $n \to \infty$ **时的极限**

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots +$$

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n}$$

$$> 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

得到不等式

$$e \geq 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{k!} = y_k,$$

对任意的 k **成立**. **因为集合** $\{y_k\}$ **中没有最大的元素**,

当 $k = n$ **时**

$$y_n = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < e,$$

也就是等式不可能成立. **此外**

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = y_n.$$

于是 $x_n < y_n < e$ **和** $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = e$. **因此得出** $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = e$.

对于固定的 n, **取** $m \to \infty$ **时下式的极限**

$$y_{m+n} - y_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \cdots + \frac{1}{(n+m)!}$$

$$< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \frac{n+2}{n+1} < \frac{1}{n \cdot n!}$$

得到

$$0 < e - y_n < \frac{1}{n \cdot n!}.$$

记 $\theta_n = \dfrac{e - y_n}{\dfrac{1}{n \cdot n!}}$, $0 < \theta_n < 1$. **就得出所需结论**.

不等式 $0 < e - y_n < \dfrac{1}{n \cdot n!} < 10^{-5}$ **当** $n \geq 8$ **时成立**. **从而**

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} \approx 2.71828.$$

81 **证明不等式**

$$\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{n} < n! < \mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^{n}.$$

当 $n=1$ **时不等式左一半成立;其次,按归纳法,有**

$$(n+1)! = n!(n+1) > \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{n}(n+1) = \left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}\frac{(n+1)\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{n}}{\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1}} > \left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{n+1},$$

于是不等式 $(n+1)\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^{n}\left(\frac{n+1}{\mathrm{e}}\right)^{-n-1}>1$ **等价于不等式** $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<\mathrm{e}$ (**最后一个不等号的正确性可由例** 77 **得出**).

右半部分不等式可由

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n} = \mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^{n}\frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^{n}}{\mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^{n}} = \mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^{n}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{\mathrm{e}} < \mathrm{e}\left(\frac{n}{2}\right)^{n}$$

得到(**见例** 42).

82 **证明不等式**:

1) $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$,**其中** n **为任意自然数**;

2) $1+\alpha<\mathrm{e}^{\alpha}$,**其中** α **是不为零的实数**.

1) **把不等式**(**见例** 77)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

取对数得到 $n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\ln\mathrm{e}<(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$,**由此得出** 1) **中的不等式**.

2) **首先指出**

$$\frac{r}{1+r} < \ln(1+r) < r,$$

其中 r **是任意一个不等于零且大于** -1 **的有理数**. **令** $r=\frac{m}{n}>0$,**从** 1) **中的不等式得到**

$$\begin{aligned}\ln(1+r) &= \ln\left(1+\frac{m}{n}\right) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n+1}\cdots\frac{n+m}{n+m-1}\right)\\ &= \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n+m-1}\right)\\ &< \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+m-1} < \frac{m}{n} = r,\end{aligned}$$

$$\ln(1+r) > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+m} > \frac{m}{n+m} = \frac{\frac{m}{n}}{1+\frac{m}{n}} = \frac{r}{1+r},$$

由此得出 1)中的不等式当 $r>0$ 时成立.

如果 $-1<r_1<0$,则设 $-r_1=r, 0<r<1$,就有

$$\ln(1+r_1) = \ln(1-r) = -\ln\frac{1}{1-r} = -\ln\left(1+\frac{r}{1-r}\right),$$

从而有 $-\frac{r}{1-r}<\ln(1+r_1)<-r$,即 $\frac{r_1}{1+r_1}<\ln(1+r_1)<r_1$.

取 α 为一大于 -1,且不为零的任意实数,则存在这样的有理数 r,使得

$$\frac{r}{2}+\frac{r}{2+r}<\alpha<r$$

(例如,介于实数 α 和 $\sqrt{\alpha^2+4}+\alpha-2$ 之间的任何有理数).那么

$$\ln(1+\alpha) < \ln(1+r) = \ln\left(\frac{r+2}{2}\cdot\frac{2+2r}{2+r}\right)$$

$$= \ln\left(1+\frac{r}{2+r}\right)+\ln\left(1+\frac{r}{2}\right) < \frac{r}{2}+\frac{r}{2+r} < \alpha.$$

因此,$\ln(1+\alpha)<\alpha(\alpha>-1, \alpha\neq0)$ 和 $(1+\alpha)<e^{\alpha}(\alpha>-1, \alpha\neq0)$.如果 $\alpha<-1$,不等式 $1+\alpha<e^{\alpha}$ 显然成立.所以不等式 $(1+\alpha)<e^{\alpha}$ 对所有的 $\alpha\neq0$ 成立.

83 证明

$$\lim_{n\to\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right) = \ln a, \quad a>0,$$

其中 $\ln a$ 是以 $e=2.718$ 为底 a 的对数.

由不等式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$ 得到 $1<n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)<1+\frac{1}{n-1}$, $n>1$,从而

$$\lim_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right) = 1.$$

当 $a>1$ 时,有 $y_n = n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right) = n\left(e^{\frac{\ln a}{n}}-1\right) = z_n\left(e^{\frac{1}{z_n}}-1\right)\ln a$,其中当 $n\to\infty$ 时,$z_n = \frac{n}{\ln a}\to+\infty$.取 $\alpha_n=[z_n]$(整数部分),那么 $\alpha_n\leq z_n<\alpha_n+1$ 即 $\frac{1}{\alpha_n+1}<\frac{1}{z_n}\leq\frac{1}{\alpha_n}$.从而得到不等式

$$\ln a\cdot\alpha_n\left(e^{\frac{1}{\alpha_n+1}}-1\right) < y_n < \ln a\cdot(\alpha_n+1)\left(e^{\frac{1}{\alpha_n}}-1\right),$$

$$-\ln a\cdot\left(e^{\frac{1}{\alpha_n+1}}-1\right)+\ln a\cdot(\alpha_n+1)\left(e^{\frac{1}{\alpha_n+1}}-1\right) < y_n < \ln a\cdot\alpha_n\left(e^{\frac{1}{\alpha_n}}-1\right)+\ln a\cdot\left(e^{\frac{1}{\alpha_n}}-1\right).$$

因为数列 $\left\{\alpha_n\left(e^{\frac{1}{\alpha_n}}-1\right)\right\}$ 是收敛数列 $\left\{n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)\right\}$ 的一个子数列,则

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n\left(e^{\frac{1}{\alpha_n}}-1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right) = 1.$$

应用 6.3 节的结论 1 得到

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty}\left(\ln a\cdot \alpha_n\left(e^{\frac{1}{\alpha_n}}-1\right)+\ln a\cdot\left(e^{\frac{1}{\alpha_n}}-1\right)\right)=\ln a,\quad a>1.$$

如果 $0<a<1$,则

$$y_n = n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=n\left(\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}-1\right)=\frac{n\left(1-b^{\frac{1}{n}}\right)}{b^{\frac{1}{n}}}=-\frac{1}{b^{\frac{1}{n}}}\cdot n\left(b^{\frac{1}{n}}-1\right),$$

其中 $b=\frac{1}{a}>1$. 又因为 $b^{\frac{1}{n}}\to 1$ 和 $n\left(b^{\frac{1}{n}}-1\right)\to\ln b$ 当 $n\to\infty$ 时成立,则

$$\lim_{n\to\infty} y_n = -\ln b = -\ln\frac{1}{a}=\ln a,\quad 0<a<1.$$

84　利用单调有界的序列存在极限的定理,证明序列(x_n)的收敛性 . 其中

$$x_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{2^n}\right).$$

因为$\frac{x_{n+1}}{x_n}=1+\frac{1}{2^{n+1}}$,从而序列是单调增加的 . 从下面的不等式可以得出它的有界性 .

$$\begin{aligned}\ln x_n &= \ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)\\ &<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\\ &=\frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1,\ x_n<e.\end{aligned}$$

这样,根据 6 .3 节结论 2 可知该序列收敛 .

利用柯西准则证明下列数列的收敛性:

85　$x_n=\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n},\ n\in\mathbf{N}$.

令 $\forall\varepsilon>0$. 则对 $n>-\log_2\varepsilon$和所有的自然数 p 都有

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n| &= \left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}}+\frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right|\\ &\le\frac{|\sin(n+1)|}{2^{n+1}}+\frac{|\sin(n+2)|}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{|\sin(n+p)|}{2^{n+p}}\\ &\le\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{2^{n+p}}+\cdots\\ &=\frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2^n}<\varepsilon.\end{aligned}$$

86　$x_n=\frac{\cos 1!}{1\cdot 2}+\frac{\cos 2!}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{\cos n!}{n(n+1)},\ n\in\mathbf{N}$.

对于任意的 $\varepsilon > 0$ 和所有的自然数 p,

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|\frac{\cos(n+1)!}{(n+1)(n+2)} + \frac{\cos(n+2)!}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{\cos(n+p)!}{(n+p)(n+p+1)}\right|$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots + \frac{1}{(n+p)(n+p+1)}$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+p} - \frac{1}{n+p+1}$$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+p+1} < \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

对于 $\forall n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = N(\varepsilon)$ 成立.

87 如果存在这样的常数 c,使得

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_n - x_{n-1}| < c, n \in \mathrm{N}.$$

则称数列 (x_n) 有有界变差.证明有有界变差的数列收敛.

构造一个收敛的数列,但它没有有界变差.

从条件得出数列

$$y_n = |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_n - x_{n-1}|$$

收敛(因为它有界而且单调增加).其次,因为序列 (y_n) 收敛,当 $n > N(\varepsilon)$ $\forall p > 0$ 时

$$|x_{n+p} - x_n| = |x_{n+1} - x_n + x_{n+2} - x_{n-1} + \cdots + x_{n+p} - x_{n+p-1}|$$

$$\leq |x_{n+1} - x_n| + |x_{n+2} - x_{n-1}| + \cdots + |x_{n+p} - x_{n+p-1}|$$

$$= |y_{n+p} - y_n| < \varepsilon$$

即序列 (x_n) 收敛.

显然,序列

$$x_n = \frac{1 - (-1)^n}{2n}, n \in \mathrm{N}$$

收敛,但它没有有界变差,因为对于任意的 $A > 0$,当 $n > e^A - 1$ 时成立不等式

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \cdots + |x_{2n} - x_{2n-1}|$$

$$= 1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \cdots + \frac{2}{2n-1} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$> \ln(1+1) + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdots \frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) > A.$$

88 利用柯西准则证明下列数列的发散性:

1) $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, $n \in \mathrm{N}$; 2) $x_n = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \cdots + \frac{1}{\ln n}$, $n \in \mathrm{N}$.

令 $\varepsilon > 0$ 是区间 $0, \frac{1}{2}$ 中的任意数 .

1) 因为

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p} > \frac{p}{n+p},$$

而当 $p = n$ 时

$$|x_{n+p} - x_n| > \frac{1}{2} > \varepsilon$$

对于所有的 n 成立,故该数列发散 .

2) 数列的发散性可由下式得出

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{\ln(n+1)} + \frac{1}{\ln(n+2)} + \cdots + \frac{1}{\ln(n+p)} > \frac{p}{\ln(n+p)} > \frac{p}{n+p}$$

当 $n = p$ 时 $\frac{p}{n+p} = \frac{1}{2}$.

89　证明收敛的序列或者取得其上确界,或者取得其下确界,也许同时取得两者 . 给出这三种类型序列的例子 .

令 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 先假设 $x_n < a(x_n > a)$ " $n \in \mathrm{N}$,则一定存在序列的最小(最大)元素,它就是其下(上)确界 . 如果序列中既包含比 a 小的元素,也包含比 a 大的元素,或者某些元素就等于 a . 在所有这些情形下,那个最小和最大的元素也就是该序列的下、上确界 .

让我们给出这三种类型的序列:

1) $(x_n) = \frac{n-1}{n}$, $x_1 = 0 = \inf\{x_n\}$;　2) $(x_n) = \frac{1}{n}$, $x_1 = 1 = \sup\{x_n\}$;

3) $(x_n) = \frac{(-1)^n}{n}$, $x_1 = -1 = \inf\{x_n\}$, $x_2 = \frac{1}{2} = \sup\{x_n\}$.

求出下列序列的最大项:

90　$x_n = \frac{n^2}{2^n}$.

我们约定用 $\max x_n$ 代表序列(x_n)的最大项 . 当 $n > 2$ 时不等式

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 < 1$$

成立,从而得知序列(x_n)单调减少 . 因此最大项必然在 x_1, x_2, x_3 三个数之中,我们发现

$$\max x_n = x_3 = \frac{9}{8} .$$

91　$x_n = \frac{1000^n}{n!}$.

因为 $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1000}{n+1}$, 则当 $n > 999$ 时序列单调减少 . 而 $n < 999$ 时序列单调增加,所以

$$\max x_n = x_{1000} = \frac{1000^{1000}}{1000!} \approx 2.49 \times 10^{452}.$$

给出下列各序列(x_n)的 $\inf\{x_n\}$, $\sup\{x_n\}$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ **和** $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$:

92 $x_n = (-1)^{n-1}\left(2+\frac{3}{n}\right)$.

因为序列(x_n)的所有元素被包含在序列 $x_{2n-1} = 2+\frac{3}{2n-1}$**和** $x_{2n} = -2-\frac{3}{2n}$**之中,并且** $x_{2n} < x_{2n-1}$,**另外序列(x_{2n-1})单调减少而序列(x_{2n})单调增加,所以**

$$x_1 = \sup\{x_n\} = 5, \varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{2n-1} = 2,$$

$$x_2 = \inf\{x_n\} = -\frac{7}{2}, \varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{2n} = -2.$$

93 $x_n = 1+\frac{n}{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$.

我们有 $x_{4n-2} < x_{2n-1} < x_{4n}$,**并且$(x_{4n-2})$减少,而$(x_{4n})$增加.所以**

$$\inf\{x_n\} = \varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{4n-2} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{4n-2}{4n-1}\right) = 0,$$

$$\sup\{x_n\} = \varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{4n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{4n}{4n+1}\right) = 2.$$

求$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ **和**$\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$,**如果**:

94 $x_n = \frac{n^2}{1+n^2}\cos\frac{2\pi n}{3}$.

因为 $x_{3n-2} < x_{3n-1} < x_{3n}$**以及序列$(x_{3n-2})$,$(x_{3n-1})$和$(x_{3n})$收敛,故**

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{3n-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{-(3n-2)^2}{2(1+(3n-2)^2)} = -\frac{1}{2},$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{3n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(3n)^2}{1+(3n)^2} = 1.$$

95 $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n(-1)^n + \sin\frac{n\pi}{4}$.

把整个给定序列的项分成 8 个子序列

$$(x_{8n-j}), \quad j = 0,1,\cdots,7.$$

不难确认,下面的子序列有最小、最大的部分极限.

$$x_{8n-3} = -\left(1+\frac{1}{8n-3}\right)^{8n-3} - \frac{1}{2}, x_{8n-6} = \left(1+\frac{1}{8n-6}\right)^{8n-6} + 1.$$

所以

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{8n-3} = \lim_{n\to\infty}\left(-\left(1+\frac{1}{8n-3}\right)^{8n-3} - \frac{1}{2}\right) = -e-\frac{1}{2},$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{8n-6} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{8n-6}\right)^{8n-6}+1\right] = e+1 .$$

96 $x_n = \dfrac{n}{n+1}\sin^2\dfrac{n\pi}{4}$.

从 $x_{4n} < x_{4n-3} \leq x_{4n-1} < x_{4n-2}$ 可以得到

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{4n} = 0, \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{4n-2} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n-2}{4n-1} = 1 .$$

求部分极限:

97 $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{8},\dfrac{7}{8},\cdots,\dfrac{1}{2^n},\dfrac{2^n-1}{2^n},\cdots$

给出序列的各项由两个收敛的子序列构成 $\underline{x}_n = \dfrac{1}{2^n}$ 和 $\overline{x}_n = \dfrac{2^n-1}{2^n}$. 它们的极限

$$\lim_{n\to\infty}\underline{x}_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\overline{x}_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n} = 1$$

将是其部分极限 .

因为所有其他的收敛的子序列都可以归纳为这两者之一, 所以没有其他的部分极限 .

98 $1,\dfrac{1}{2},1+\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},1+\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},1+\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{5},\cdots,\dfrac{1}{n},1+\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n},\cdots,\dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n+1},\cdots$.

该序列各项构成收敛的子序列 $x_n = \dfrac{1}{n}$ 和 $x_{kn} = \dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k+n}$ $(k, n\in \mathrm{N})$ 它们有相应的极限 $0,\dfrac{1}{k}$ $(k\in \mathrm{N})$.

99 $\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{4},\dfrac{2}{4},\dfrac{3}{4},\dfrac{1}{5},\dfrac{2}{5},\dfrac{3}{5},\dfrac{4}{5},\cdots$.

显然, 全体有理数 $r(0<r<1)$ 都是该序列中的一项 . 令 α 是任意实数且 $0\leq\alpha<1$, 对于足够大的自然数 m 和任意的 $n\in \mathrm{N}$ 都有

$$\alpha+\frac{1}{n+m} < 1 .$$

对于每一个自然数 n 在给定的序列各项中可以找到这样的有理数 r_n, 使得

$$\alpha < r_n < \alpha+\frac{1}{n+m} .$$

由此得出 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \alpha$, 即 α 是部分极限 . 如果 $0<\alpha\leq 1$ 也可以进行类似的分析 .

100 构造一个数列, 它以给定的数 $a_1, a_2, \cdots, a_p$ 为其部分极限 .

令 $x_{kn}=a_k+\dfrac{1}{n}, k=1,\cdots,p, n\in\mathbf{N}$. 因为序列 x_{kn} 收敛到 a_k, $k\in\mathbf{N}$, 那么所找的序列可以是

$$a_1+1, a_2+1,\cdots,a_p+1, a_1+\frac{1}{2}, a_2+\frac{1}{2},\cdots,a_p+\frac{1}{2},\cdots,a_1+\frac{1}{n},a_2+\frac{1}{n},\cdots,a_p+\frac{1}{n},\cdots$$

所构成的数列 (x_{kn}), $k\in\mathbf{N}$.

101　构造数列, 它以一个给定的序列 $a_1, a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 的每一项为其部分极限, 给定的序列还肯定有什么样的部分极限?

由数列 $x_n=a_n$, $x_{kn}=a_k+\dfrac{1}{n+k}(n, k\in\mathbf{N})$ 构造出数列

$$a_1, a_1+\frac{1}{2}, a_2, a_1+\frac{1}{3}, a_2+\frac{1}{3}, a_3, a_1+\frac{1}{4}, a_2+\frac{1}{4}, a_3+\frac{1}{4}, a_4,\cdots$$

它的部分极限是: 1) 序列 (x_{kn}) 的极限, 即序列 (a_n) 的各项, 2) 序列 (a_n) 的部分极限.

102　构造序列, 使其:

1) 没有有限的部分极限;

2) 有唯一的部分极限但它不收敛;

3) 有无穷多部分极限;

4) 每一个实数均为其部分极限.

1) 例如 $x_n=n$.

2) 令 (x_n) 收敛于有限极限 a, (y_n) 是个无穷大序列, 则 $x_1, y_1, x_2, y_2,\cdots,x_n,y_n,\cdots$ 是发散的但有唯一的有限部分极限.

3) 例 99 和例 100.

4) 构造包含所有形如 $\pm\dfrac{p}{q}$ 的有理数序列, 其中 p 和 q 是自然数.

$$1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{3}{1}, -\frac{3}{1}, \frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}, \frac{2}{n},$$

$$-\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n}, -\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n-1}, -\frac{n}{n-1},\cdots,\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{n}{1}, -\frac{n}{1},\cdots.$$

可以类似于例 99 的解法证明任一实数均为其部分极限这一事实.

103　证明: 序列 (x_n) 和 $(y_n)=(x_n\sqrt[n]{n})$ 有完全相同的部分极限.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$ (见例 75), 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[p_n]{p_n}=1$, 其中 (p_n) 是任何一个自然数序列.

令 α 是序列 (x_n) 的部分极限且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{p_n})=\alpha$. 那么, 应用关于极限乘积的定理得到

$$\lim_{n\to\infty}y_{p_n}=\lim_{n\to\infty}x_{p_n}\sqrt[p_n]{P_n}=\lim_{n\to\infty}x_{p_n}\lim\sqrt[p_n]{p_n}$$
$$=\alpha.$$

即 α 也是序列 (y_n) 的部分极限.

现在令 β是序列(y_n)的部分极限,且$\lim\limits_{n\to\infty} y_{q_n}=\beta$. 既然$\sqrt[n]{n}>0$,那么可以定义序列$(x_n)=(y_n n^{-\frac{1}{n}})$以及其子序列$(x_{q_n})=(y_{q_n}(q_n)^{-\frac{1}{q_n}})$,它就有其自身的极限 β.

104　设序列(x_n)收敛,而序列(y_n)发散 . 关于下面的序列的收敛性能下什么结论:

1) (x_n+y_n);　2) $(x_n y_n)$.

对情况 2)给出相应的实例 .

1) 序列(x_n+y_n)发散 . 如果它收敛,则序列(x_n)和(x_n+y_n)之差也应收敛,但因$(x_n-(x_n+y_n))=-(y_n)$,而(y_n)发散,所以这是不可能的 .

2) 序列既可能收敛也可能发散 . 例如:

i) 序列$(x_n)=\dfrac{1}{n}$收敛,序列$(y_n)=((-1)^n)$发散,但它们的乘积$(x_n y_n)=\dfrac{(-1)^n}{n}$形成收敛的序列 .

ii) 序列$(x_n)=\dfrac{n}{n+1}$收敛,而$(y_n)=\dfrac{(-1)^n n}{n+1}$发散,它们的乘积$(x_n y_n)=\dfrac{(-1)^n n^2}{(n+1)^2}$也发散 .

105　证明:

1) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n+\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n\leq\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leq\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$;

2) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n\leq\varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)\leq\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$.

举例说明什么时候在这些关系中严格不等式成立 .

注: 如果从一个序列抽出一个子序列(x_{k_n})则

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n\leq\varliminf_{n\to\infty} x_{k_n} .$$

既然序列的下极限是它的极限点,则

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}(x_{r_n}+y_{r_n}),\quad \varliminf_{n\to\infty} x_{r_n}=\lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}} .$$

由前面的注解得到

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n+\varliminf_{n\to\infty} y_n\leq\varliminf_{n\to\infty} x_{r_n}+\varliminf_{n\to\infty} y_{r_n}=\lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}}+\varliminf_{n\to\infty} y_{r_n}\leq\lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}}+\varliminf_{n\to\infty} y_{m_{r_n}} .$$

其次,序列$(x_{m_{r_n}}+y_{m_{r_n}})$是收敛序列$(x_{r_n}+y_{r_n})$的子序列,则

$$\lim_{n\to\infty}(x_{r_n}+y_{r_n})=\lim_{n\to\infty}(x_{m_{r_n}}+y_{m_{r_n}}) .$$

又因为序列$(x_{m_{r_n}})$收敛,同时序列$(y_{m_{r_n}})$也收敛,那么

$$\varliminf_{n\to\infty} y_{m_{r_n}}=\lim_{n\to\infty} y_{r_n} ,$$

所得到的不等式可改写成

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n+\varliminf_{n\to\infty} y_n\leq\lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}}+\lim_{n\to\infty} y_{m_{r_n}}=\lim_{n\to\infty}(x_{m_{r_n}}+y_{m_{r_n}})=\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n) .$$

于是证明了不等式 1)的左半部分 . 考虑如下事实

$$\varliminf_{n\to\infty}(-y_n) = -\varlimsup_{n\to\infty} y_n .$$

得到

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n) - \varlimsup_{n\to\infty} y_n = \varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n) + \varliminf_{n\to\infty}(-y_n)$$
$$\le \varliminf_{n\to\infty}((x_n+y_n)+(-y_n)) = \varliminf_{n\to\infty} x_n .$$

由这个式子得出不等式 1)的右半部分 .

不等式 2)的证法类似 .

现在构造严格不等式成立的例子,令

$$x_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\sin^2\frac{n\pi}{2},\ y_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\cos^2\frac{n\pi}{2},\ n\in\mathrm{N} .$$

那么 $x_n + y_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$ 且

$\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -1,\ \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1,\ \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n = -1,\ \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n = 1,\ \varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n) = -1,\ \varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n) = 1 .$

106 令 $x_n\ge 0$ 和 $y_n\ge 0$, $n\in\mathrm{N}$. 证明:

1) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n\cdot\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \le \varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) \le \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n\cdot\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$;

2) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n\cdot\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \le \varlimsup\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) \le \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n\cdot\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$.

给出这些关系中严格不等式成立的例子 .

证明情况 1) (情况 2)的证明类似) .

如果 $x_n = 0$, $n\in\mathrm{N}$ 或者 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = 0$,则 1)式显然成立 . 剩下只要研究当 $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n > 0$ 的情形,那么一定从某个下标起有 $x_n > 0$.

利用例 105 里的注解有表示式

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_{r_n} y_{r_n}),$$

$$\varliminf_{n\to\infty} x_{r_n} = \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}} .$$

得到

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n\cdot\varliminf_{n\to\infty} y_n \le \varliminf_{n\to\infty} x_{r_n}\cdot\varliminf_{n\to\infty} y_{r_n} = \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}}\cdot\varliminf_{n\to\infty} y_{r_n} \le \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}}\cdot\varliminf_{n\to\infty} y_{m_{r_n}} .$$

既然$(x_{m_{r_n}} y_{m_{r_n}})$是收敛序列$(x_{r_n} y_{r_n})$的子序列,则

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty}(x_{r_n} y_{r_n}) = \lim_{n\to\infty}(x_{m_{r_n}} y_{m_{r_n}}) .$$

又因为序列$(x_{m_{r_n}})$收敛到一个不为零的极限,那么序列$(y_{m_{r_n}})$同样收敛,即$\varliminf\limits_{n\to\infty} y_{m_{r_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} y_{m_{r_n}}$.所以

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n\cdot\varliminf_{n\to\infty} y_n \le \lim_{n\to\infty} x_{m_{r_n}}\cdot\lim_{n\to\infty} y_{m_{r_n}} = \lim_{n\to\infty}(x_{m_{r_n}} y_{m_{r_n}}) = \varliminf_{n\to\infty}(x_n y_n) .$$

这样就证明了不等式 1)的左半部分 . 如果$\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n = 0$,则不等式 1)右半部分显然成立 . 因为在这个情况下,由$\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ 得出$\varliminf\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = 0$. 令$\varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n > 0$,根据证明过的事实$\varliminf\limits_{n\to\infty}\frac{1}{y_n} =$

$\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n}$,得到不等式

$$\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} y_n}\cdot\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n)=\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{y_n}\cdot\underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n)\le\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{y_n}(x_n y_n)=\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n,$$

由这个不等式就得到 1)的右半部分 .

给出严格不等式成立的例子 .令

$$x_n=2+(-1)^n,\ y_n=2-(-1)^n+\frac{1}{2}(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

则
$$x_n y_n=3+\frac{2+(-1)^n}{2}\cdot(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}},$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n=1,\ \overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=3,\ \underline{\lim_{n\to\infty}}y_n=\frac{1}{2},\ \overline{\lim_{n\to\infty}}y_n=\frac{7}{2},\ \underline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n)=\frac{3}{2},\ \overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n y_n)=\frac{9}{2}.$$

107 证明:如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在,则不管序列$(y_n)$如何,总有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n.$$

因为(见例 105)

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\ge\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n,\ \overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n+y_n)\le\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n.$$

既然$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$,前面的关系式中只可能取等号 .

108 证明:如果有序列(x_n),不管序列(y_n)如何,只要它至少满足下面等式中的一个,则(x_n)收敛 .

1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$

或者

2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n y_n)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n,\ x_n\ge0$.

令条件 1)满足 .(y_n)是一个序列且 $y_n=-x_n$.从条件 1)得到

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n)&=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n-\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n\\&=\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n-x_n)=0.\end{aligned}$$

从而$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$,即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在 .

当条件 2)成立时,设 $y_n=-1$,则从条件 2)得出$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(-x_n)=-\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$或者$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$这又确认了序列$(x_n)$的极限存在 .

109 证明:如果 $x_n>0$ 且

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{x_n}=1,$$

那么序列(x_n)收敛 .

根据条件以及$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{1}{x_n}=\dfrac{1}{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n}$,得到$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$,即$(x_n)$是收敛的序列.

110 证明:如果序列(x_n)有界,而且

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0.$$

那么该序列的部分极限稠密地分布在它的下、上极限

$$l=\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n,\quad L=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n$$

之间,即区间(l,L)中的任何数都是给定序列的部分极限.

要证明区间(l,L)中的任何一个数a都是序列(x_n)的部分极限,也就是要指出a的任何一个ε-邻域中都包含序列(x_n)的无穷多项.

如果ε是一个给定的这样的数,使得l的ε-邻域,a和L没有公共点.根据已知条件存在数$N(\varepsilon)$,使得当$n>N(\varepsilon)$时$|x_{n+1}-x_n|<2\varepsilon$.

既然l是部分极限,那么在l的ε-邻域内可以找到x_{p_1},其下标大于$N(\varepsilon)$.根据同样的理由在L的ε-邻域里有x_{q_1},其下标q_1大于p_1.又因为$n>N(\varepsilon)$时相邻两项的距离小于2ε,那么在$p_1<n<q_1$中的自然数中至少存在一个r_1,使得x_{r_1}属于a的ε-邻域.

其次,存在x_{p_2}其下标大于q_1,使得x_{p_2}属于l的ε-邻域.所以在$q_1<n<q_2$的编号中可以选出r_2,使得x_{r_2}属于a的ε-邻域.把这个过程进行下去直到无穷,就可以断言存在无穷个数的子序列(x_{r_n})属于a的ε-邻域.所以a是一个极限点.而a是区间(l,L)的任意点,这也就证明了所要的结论.

111 令数列(x_n)满足条件$0\leq x_{m+n}\leq x_m+x_n$, $m,n\in\mathbf{N}$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n}$存在.

因为$0\leq x_n\leq x_1+x_1+\cdots+x_1=nx_1$,

$$0\leq\frac{x_n}{n}\leq x_1,\quad n=2,3,\cdots,$$

从而序列$\left(\dfrac{x_n}{n}\right)$有界并存在有限的下确界$\alpha=\inf\left(\dfrac{x_n}{n}\right)$.令$\varepsilon>0$是任意的,那么就存在一个编号$m$使得$\alpha\leq\dfrac{x_m}{m}<\alpha+\dfrac{\varepsilon}{2}$.

所有整数n可以写成$n=qm+r$,其中r等于$0,1,2,\cdots,m-1$中的一个.为了更一般地表示,设$x_0=0$,则有

$$\begin{aligned}x_n&=x_{qm+r}\leq x_m+x_m+\cdots+x_m+x_r\\&=qx_m+x_r,\end{aligned}$$

$$\frac{x_n}{n}=\frac{x_{qm+r}}{qm+r}\leq\frac{qx_m+x_r}{qm+r}=\frac{x_m}{m}\cdot\frac{qm}{qm+r}+\frac{x_r}{n},$$

$$\alpha\leq\frac{x_n}{n}<\left(\alpha+\frac{\varepsilon}{2}\right)\frac{qm}{qm+r}+\frac{x_r}{n}<\alpha+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{x_r}{n}.$$

既然$0\leq r\leq m-1$,则x_r有界且存在这样的数$N(\varepsilon)$,当$n>N(\varepsilon)$时,$0\leq\dfrac{x_r}{n}<\dfrac{\varepsilon}{2}$.所以当

$n > N(\varepsilon)$时,$\alpha \leq \dfrac{x_n}{n} < \alpha + \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \alpha + \varepsilon$,也就是$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{n} = \alpha$.

112 证明特普利茨(Teoplitz)定理:

假设 1) $P_{nk} \geq 0$; 2) $\sum\limits_{k=1}^{n} P_{nk} = 1$; 3) 对每个固定的 k 成立$\lim\limits_{n\to\infty} P_{nk} = 0$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

则序列 $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} P_{nk} x_k$ 收敛,且$\lim\limits_{n\to\infty} t_n = a$.

从条件 4)可以得知存在这样的数 $N = N(\varepsilon)$,使得对于所有的 $n > N(\varepsilon)$都有

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

其次也根据同一条件得知存在 $M > 0$,对于所有的 n都有

$$|x_n| \leq M, \quad |x_n - a| \leq 2M.$$

最后,由条件 3)得到存在这样的数 $n_0 = n_0(\varepsilon) > N$,使得对于所有的 $n > n_0$ 有

$$P_{nk} < \frac{\varepsilon}{4NM}, \quad k = 1, 2, \cdots, N.$$

利用这些不等式及定理中的条件 1)和 2)就有,对于所有的 $n > n_0$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} P_{nk} x_k - a\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} P_{nk} x_k - \sum_{k=1}^{n} P_{nk} a\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} P_{nk}(x_k - a)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} P_{nk} |x_k - a|$$

$$= P_{n1}|x_1 - a| + P_{n2}|x_2 - a| + \cdots + P_{nN}|x_N - a| + P_{nN+1}|x_{n+1} - a| + \cdots + P_{nn}|x_n - a|$$

$$\leq N \cdot \frac{\varepsilon}{4NM} \cdot 2M + \frac{\varepsilon}{2}(P_{nN+1} + \cdots + P_{nn}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} P_{nk} x_k = a$.

113 1) 证明如果序列(x_n)收敛,则算术平均值序列(ξ_n)也收敛,而且$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$,其中

$$\xi_n = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n).$$

2) 证明如果序列(y_n)收敛且 $y_n > 0$ " $n \in \mathrm{N}$,则调和平均值序列

$$\gamma_n = \frac{n}{\dfrac{1}{y_1} + \dfrac{1}{y_2} + \cdots + \dfrac{1}{y_n}}$$

也收敛,而且$\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

3) 证明如果$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$,则

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_n = +\infty, \lim_{n\to\infty}\xi_n = +\infty,$$

其中 γ_n 和 ξ_n 分别是 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的算术平均值和调和平均值.

1) 如果设 $P_{nk}=\dfrac{1}{n}(k=1,\cdots,n;\ n\in\mathbb{N})$则对 P_{nk}和 x_n 将满足例 112 的所有条件,并且 $t_n=\sum\limits_{k=1}^{n}P_{nk}x_k=\xi_n$,因此$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

2) 令 $P_{nk}=\dfrac{\dfrac{1}{y_k}}{\dfrac{1}{y_1}+\dfrac{1}{y_2}+\cdots+\dfrac{1}{y_n}}\quad(k=1,\cdots,n),\ x_n=y_n$.

则例 112 的所有条件也都满足,并且 $t_n=\gamma_n$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n$.

3) 让我们指出,如果$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{y_n}=0$,则有$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\gamma_n}=0$.这等价于$\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=+\infty$.利用例 112 并设

$$P_{nk}=\frac{1}{n}\quad(k=1,2,\cdots,n),\ x_n=\frac{1}{y_n},$$

得到 $t_n=\sum\limits_{k=1}^{n}P_{nk}x_k=\dfrac{1}{\gamma_n}$ 和$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\gamma_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{y_n}=0$.

至于$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=+\infty$的结论可以从不等式(见例 42) $\gamma_n\leq\xi_n$ 和$\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=+\infty$得到.

114 证明:如果序列(x_n)收敛且 $x_n>0$,则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

从(见例 42)

$$\gamma_n=\frac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}}\leq\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leq\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\xi_n.$$

又有$\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$(见例 113),则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

115 证明:如果 $\forall n\in\mathbb{N}$, $x_n>0$,则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n-1}},$$

假设等式右边的极限存在.

可由下式得到证明:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_3}{x_2}\cdots\frac{x_n}{x_{n-1}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n-1}}$$

(见例 114).

116 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=e$.

作代换

$$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}=\sqrt[n]{x_n},$$

其中 $x_n=\dfrac{n^n}{n!}$. 既然 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{x_{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}=\mathrm{e}$, 则根据例 115 得到所需的证明 .

117 证明施托里茨(Штольца)定理: 如果

1) $\forall\, n\in\mathbf{N}\ y_{n+1}>y_n$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}$存在, 那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}.$$

令$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a$($a$ 为有限数). 如果认为 $y_0=0$ 和 $x_0=0$ 且

$$P_{nk}=\frac{y_k-y_{k-1}}{y_n},\quad k=1,\cdots,n.$$

$$X_n=\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}},$$

则可知 P_{nk}和 X_n 满足特普利兹定理的条件(例 112), 而且 $t_n=\dfrac{x_n}{y_n}$. 所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}t_n=\lim_{n\to\infty}X_n=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=a.$$

如果$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{y_n-y_{n-1}}=+\infty$, 则先断定从某个 $n_0\in\mathbf{N}$ 开始 $x_n>x_{n-1}$, 而且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, 之后就可以重复上面推理过程 .

118 证明: 如果 p 是自然数, 则

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\dfrac{1}{p+1}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^p}-\dfrac{n}{p+1}\right)=\dfrac{1}{2}$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+3^p+\cdots+(2n+1)^p}{n^{p+1}}=\dfrac{2^p}{p+1}$.

应用施托里茨定理(见例 117)证明本例 . 只证明 2), (1)和 3)可类似地证明).

2) 如果设 $x_n=(p+1)(1^p+2^p+\cdots+n^p)-n^{p+1}$, $y_n=(p+1)n^p$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(p+1)(n+1)^p-(n+1)^{p+1}+n^{p+1}}{(p+1)((n+1)^p-n^p)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(p+1)\left(n^p+pn^{p-1}+\dfrac{p(p-1)}{2}n^{p-2}+\cdots+1\right)}{(p+1)\left(n^p+pn^{p-1}+\dfrac{p(p-1)}{2}n^{p-2}+\cdots+1-n^p\right)}+$$

$$\frac{-n^{p+1}-(p+1)n^p-\dfrac{(p+1)p}{2}n^{p-1}-\cdots-1+n^{p+1}}{(p+1)\left(n^p+pn^{p-1}+\cdots+\dfrac{p(p-1)}{2}n^{p-2}+\cdots+1-n^p\right)}.$$

合并 n 的同次幂的系数,然后分子分母同时除以 n^{p-1} 再用 $o\frac{1}{n}$ 表示所有次数不超过 -1 的所有项之和就得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{p(p+1)}{2}+o\frac{1}{n}}{p(p+1)+o\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}.$$

119 证明序列(x_n)收敛,其中

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n,$$

从而有公式

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n,$$

其中 $C=0.577216\cdots$为所谓的欧拉(Euler)常数,且当 $n\to\infty$时 $\varepsilon_n\to 0$.

因为 $x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n=\frac{1}{n+1}-\ln\ 1+\frac{1}{n}\ <0$(见例 82,1)).所以序列单调减少,此外它有下界

$$\begin{aligned}x_n&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\\&>\ln(1+1)+\ln\ 1+\frac{1}{2}\ +\ln\ 1+\frac{1}{3}\ +\cdots+\ln\ 1+\frac{1}{n}\ -\ln n\\&=\ln\ 2\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n}\ =\ln\frac{n+1}{n}>\frac{1}{n+1}>0.\end{aligned}$$

所以存在有限的极限 C,那么表达式

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n=C+\varepsilon_n$$

是正确的,其中当 $n\to\infty$时,$\varepsilon_n\to 0$.

120 求$\lim\limits_{n\to\infty}\ \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\ $.

令 $z_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.则有

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}=z_{2n}-z_n=\ln 2n+\varepsilon_{2n}-\ln n-\varepsilon_n=\ln 2+(\varepsilon_{2n}-\varepsilon_n)$$

(见例 119)且

$$\lim_{n\to\infty}\ \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}\ =\ln 2.$$

121 序列(x_n)由下面的公式给出

$$x_1=a,\ x_2=b,\ x_n=\frac{x_{n-1}+x_{n-2}}{2}\quad(n=3,4,\cdots).$$

求出$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

$x_k - x_{k-1} = \dfrac{x_{k-1} + x_{k-2}}{2} - x_{k-1} = -\dfrac{x_{k-1} - x_{k-2}}{2}$.把这个表达式代入一个显然的等式

$$x_n = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1})$$

得到

$$x_n = a + (b - a) - \frac{b-a}{2} + \frac{b-a}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{b-a}{2^{n-2}}$$

$$= a + \frac{2(b-a)}{3} + \frac{b-a}{3}\frac{(-1)^n}{2^{n-2}},$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \quad a + \frac{2(b-a)}{3} + \frac{b-a}{3}\frac{(-1)^n}{2^{n-2}}$$

$$= \frac{a+2b}{3}.$$

122　令(x_n)是由下面公式定义的序列:

$$x_0 > 0,\ x_{n+1} = \frac{1}{2} \quad x_n + \frac{1}{x_n} \quad, n \in \mathrm{Z}_0 .$$

证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

因为 $x_0 > 0$ 和 $x_n + \dfrac{1}{x_n} > 2$, 所以序列(x_n)以 1 为下界 . 由不等式 $x_{n+1} = \dfrac{1}{2} \quad x_n + \dfrac{1}{x_n} \quad \leq x_n$ 对于 $x_n \geq 1$ 成立可以得出给定的序列单调减少 .所以存在有限的极限 a, 且 $a \geq 1$. 把等式

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \quad x_n + \frac{1}{x_n}$$

两端取极限得出 $a = \dfrac{1}{2} \quad a + \dfrac{1}{a}$,由此得到 $a^2 = 1$ 或者 $a = \pm 1$. 因为 " $n \in \mathrm{N}$, $x_n \geq 1$, 所以 $a = 1$.

123　证明由下面公式给定的序列(x_n)和(y_n)有共同极限 $\mu(a, b) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ (a 和 b 的算术—几何平均值):

$$x_1 = a, y_1 = b, \quad x_{n+1} = \quad x_n y_n, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} .$$

从给定的条件得到 " $n \in \mathrm{N}$, $x_n \geq 0$, $y_n \geq 0$. 利用不等式

$$ab \leq \frac{a+b}{2}, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0$$

得到

$$y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \geq \quad x_n y_n = x_{n+1} .$$

又因为 $x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n} \geq \sqrt{x_n^2} = x_n$, $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \leq y_n$ 以及 $x_n \leq y_n \leq y_1$, $y_n \geq x_n \geq x_1$, 从 6.3节的结论 2 可以知道序列(x_n)和(y_n)分别有有限的极限 A 和 B. 在等式

$$y_n = \frac{x_n + y_n}{2}$$

中取极限得到 $A = B$. 一般把这个极限称为算术—几何平均值,并用符号 $\mu(a, b)$表示.

求极限:

124 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

由于

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}, k = 2, \cdots, n,$$

改写为乘积形式

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n},$$

得到

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}.$$

125 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right)$.

因为

$$1 - \frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}} = \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}, \quad k = 2, \cdots, n,$$

所以

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{6}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}\cdot\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}\cdots\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{n+2}{n} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

求出向量序列$(\boldsymbol{x}_n)$的极限,其中:

126 $\boldsymbol{x}_n = \left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n, \left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right)$.

由于每一个坐标序列都收敛,则根据 6.7 节,得到

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n=\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n,\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right)=(\mathrm{e},\mathrm{e}^{-1}).$$

127 $\boldsymbol{x}_n=\left(\frac{n+1}{n},\frac{n+1}{2n},\cdots,\frac{n+1}{mn}\right)$.

和前面的例子一样,得到

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n},\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n},\cdots,\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{mn}\right)=\left(1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{m}\right).$$

128 $\boldsymbol{x}_n=(\sqrt[n]{2+2^n},\sqrt[n]{2+2^{-n}},\sqrt[n]{2+2^{-n^2}})$.

首先指出每一个坐标序列都有极限. 从不等式 $2<\sqrt[n]{2+2^n}<2\sqrt[n]{2}$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$ 得出 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+2^n}=2$. 其次从不等式

$$1<\sqrt[n]{2+2^{-n}}<\sqrt[n]{3},1<\sqrt[n]{2+2^{-n^2}}<\sqrt[n]{3}$$

得到

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+2^{-n}}=1,\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+2^{-n^2}}=1.$$

因为坐标序列的极限存在,则向量序列的极限也存在. 所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n&=\left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+2^n},\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+2^{-n}},\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2+2^{-n^2}}\right)\\&=(2,1,1).\end{aligned}$$

129 $\boldsymbol{x}_n=(x_{1n},x_{2n},\cdots,x_{mn})$,其中

$$x_{in}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+in},\ i=1,\cdots,m,\ m\in\mathrm{N}.$$

用记号 $y_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$,从例 119 得到

$$y_n=C+\ln n+\gamma_n,$$

其中 C 是欧拉常数,而当 $n\to\infty$ 时 $\gamma_n\to 0$,那么

$$x_{in}=y_{(1+i)n}-y_n=C+\ln((1+i)n)+\gamma_{(1+i)n}-C-\ln n-\gamma_n=\ln(1+i)+\gamma_{(i+1)n}-\gamma_n.$$

因为当 $n\to\infty$ 时 $\gamma_n\to 0,\gamma_{(1+i)n}\to 0$,故

$$\lim_{n\to\infty}x_{in}=\ln(1+i),i=1,\cdots,m,$$

从而有

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n=\left(\lim_{n\to\infty}x_{1n},\lim_{n\to\infty}x_{2n},\cdots,\lim_{n\to\infty}x_{mn}\right)=(\ln 2,\ln 3,\cdots,\ln(m+1)).$$

130 已知向量序列 $(\boldsymbol{x}_n)$,其中

$$\boldsymbol{x}_n=(x_{1n},x_{2n},\cdots,x_{mn})$$

的欧氏范数趋向于无穷大,是否可以断言一定存在一个坐标序列 (x_{in}) 趋于无穷大?

研究例子

$$\boldsymbol{x}_n=\left(\frac{(1-(-1)^n)n^2}{n+1},\frac{(1+(-1)^n)n^2}{n+1}\right).$$

否,不是必然.在上面的例子中其欧氏范数

$$\|\boldsymbol{x}_n\| = \frac{(1-(-1)^n)^2 n^4}{(n+1)^2} + \frac{(1+(-1)^n)^2 n^4}{(n+1)^2} = \frac{2n^2}{n+1}$$

当 $n\to\infty$时趋向于无穷大,但坐标序列

$$x_{1n} = \frac{(1-(-1)^n)n^2}{n+1},\ x_{2n}\ \frac{(1+(-1)^n)n^2}{n+1}$$

中没有一个趋向于无穷大.

实际上,坐标序列

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_{1n} = +\infty, \underline{\lim_{n\to\infty}} x_{1n} = 0;$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_{2n} = +\infty, \underline{\lim_{n\to\infty}} x_{2n} = 0.$$

所以∞不是这序列中任何一个的极限点.

131 求序列$(\boldsymbol{A}_n) = (a_{ij}^{(n)})(i=1,\cdots,p,j=1,\cdots,q)$的极限,其中

$$a_{ij}^{(n)} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+in+1} + \dfrac{1}{n+in+2} + \cdots + \dfrac{1}{n+jn}, & \text{如果 } j > i, \\ \dfrac{1}{n}, & \text{如果 } i = j, \\ \dfrac{1}{n+jn+1} + \dfrac{1}{n+jn+2} + \cdots + \dfrac{1}{n+in}, & \text{如果 } i > j. \end{cases}$$

首先证明每个序列 $n\mapsto a_{ij}^{(n)}(i=1,\cdots,p,j=1,\cdots,q)$收敛.当 $j>i$时,有(见例129)

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(n)} &= \frac{1}{n+in+1} + \frac{1}{n+in+2} + \cdots + \frac{1}{n+jn} \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+jn} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+in} \\ &= x_{jn} - x_{in}, \end{aligned}$$

其中,当 $n\to\infty$时,$x_{ln}\to\ln(1+l)$.从而当 $n\to\infty$时

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(n)} &= x_{jn} - x_{in} \to \ln(1+j) - \ln(1+i) \\ &= \ln\frac{1+j}{1+i}. \end{aligned}$$

类似地得到当 $i>j$ 且 $n\to\infty$时,有

$$a_{ij}^{(n)} = x_{in} - x_{jn} \to \ln\frac{1+i}{1+j}.$$

最后,当 $i=j$ 且 $n\to\infty$时,$a_{ij}^{(n)} = \dfrac{1}{n}\to 0$.

这样,所有的序列$(a_{ij}^{(n)})$收敛,所以

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{A}_n = \lim_{n\to\infty}\left(a_{ij}^{(n)}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \ln\frac{3}{2} & \ln\frac{4}{2} & \cdots & \ln\frac{q}{2} \\ \ln\frac{3}{2} & 0 & \ln\frac{4}{3} & \cdots & \ln\frac{q}{3} \\ \ln\frac{4}{2} & \ln\frac{4}{3} & 0 & \cdots & \ln\frac{q}{4} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ \ln\frac{p}{2} & \ln\frac{p}{3} & \ln\frac{p}{4} & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

132 求出

$$\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} \frac{n}{n+1} & \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} & \frac{1}{(\sqrt{2})^n} \\ \frac{\lg n}{n} & \frac{n+\sin n}{2n} & 4 \end{pmatrix}.$$

所有矩阵元素的序列均收敛,所以

$$\lim_{n\to\infty}\begin{pmatrix} \frac{n}{n+1} & \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} & \frac{1}{(\sqrt{2})^n} \\ \frac{\lg n}{n} & \frac{n+\sin n}{2n} & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} & \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} & \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{(\sqrt{2})^n} \\ \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\lg n}{n} & \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+\sin n}{2n} & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

练 习 题

证明下列等式:

62 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \cdots + n\cdot n!}{(n+1)!} = 1$.

63 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)\cdots(k+m-1)}{n(n+1)\cdots(n+m)} = \frac{1}{m+1}$, **其中** m **是自然数** .

64 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = 1$.

65 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{(n+1)^p} = \frac{1}{p+1}$, **其中** p **是自然数** .

66 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)\cdots(k+m+1)} = \frac{1}{m\cdot m!}$, **其中** m **是自然数** .

67 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k(k+1)\cdots(k+m-1)}{\sum\limits_{k=1}^{n}k^m}=1$. **68** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\ln(n!)-2\ln(2!\,3!\cdots n!)}{n^2+n}=\dfrac{1}{2}$.

69 令 $x_0>0$ 为任意数

$$x_{n+1}=\frac{1}{3}\left(2x_n+\frac{a}{x_n^2}\right),\ n\in \mathbf{Z}_0.$$

证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt[3]{a}$.

70 序列(x_n)由关系式 $x_{n+1}=px_n+q$定义,其中,$p\neq 0$ 给出,x_1 是任意的.在什么条件下(x_n)收敛?当它收敛时求出其极限.

71 证明不等式 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}>\mathrm{e}$.

72 证明不等式

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{mn+k}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{mn+k-1}.$$

73 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^{\lambda}}$,$0<\lambda<1$.

利用单调有界序列存在极限的定理,证明下列序列的收敛性,其中:

74 $x_n=\dfrac{1}{1^2+1}+\dfrac{1}{2^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+1}$. **75** $x_n=\left(1+\dfrac{1}{1^2+1}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^2+1}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{n^2+1}\right)$.

利用柯西准则,研究下列序列的收敛性,其中:

76 $x_n=\dfrac{1}{2\ln^2 2}+\dfrac{1}{3\ln^2 3}+\cdots+\dfrac{1}{n\ln^2 n}$,$n=2,3,\cdots$. **77** $x_n=\dfrac{1}{\ln^2 2}+\dfrac{1}{\ln^2 3}+\cdots+\dfrac{1}{\ln^2 n}$,$n=2,3,\cdots$.

78 设 $a_1\geq a_2\geq a_3\geq\cdots\geq 0$.证明序列$(S_n)$和$(\sigma_n)$或同时收敛,或同时发散,其中

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,\quad \sigma_n=a_1+2a_2+\cdots+2^n a_{2^n},$$

79 证明序列(S_n)当 $p>1$ 时收敛,而 $p\leq 1$ 时发散,其中

$$S_n=\frac{1}{2\ln^p 2}+\frac{1}{3\ln^p 3}+\cdots+\frac{1}{n\ln^p n},\ n=2,3,\cdots.$$

80 证明对于任何正项数列(a_n)下述不等式成立:

1) $\varliminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\leq\varliminf\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$; 2) $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\leq\varlimsup\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

求下列向量序列$(\boldsymbol{x}_n)$的极限,其中:

81 $\boldsymbol{x}_n=\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n,\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n,\cdots,\left(1+\dfrac{m}{n}\right)^n\right)$.

82 $\boldsymbol{x}_n=\left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1},\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{n+2},\cdots,\left(1+\dfrac{1}{mn}\right)^{n+m}\right)$.

83 $\boldsymbol{x}_n=\left(\dfrac{\ln(2^n+1)}{n},\dfrac{\ln(3^n+1)}{n},\cdots,\dfrac{\ln((m+1)^n+1)}{n}\right)$.

84 $\boldsymbol{x}_n=\left(\sqrt[n]{3^n+2^n},\sqrt[n]{3^n+4^n},\sqrt[n]{3^n+6^n}\right)$.

85 $\boldsymbol{x}_n=\left(\sqrt[n]{\dfrac{C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n}{n+1}},\sqrt[n(n+1)]{C_n^0C_n^1\cdots C_n^n}\right)$,这里 $C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

求下列矩阵序列$(\boldsymbol{A}_n)$的极限,其中:

86 $\boldsymbol{A}_n = \left(\left(1+\frac{i}{n}\right)^{jn}\right)$, $i=1,\cdots,p,\ j=1,\cdots,q$.

87 $\boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix} \frac{(n+1)^2-n^2}{n} & \frac{(n+2)^3-n^3}{n^2} & \frac{(n+3)^4-n^4}{n^3} \\ \frac{(n-1)^2-n^2}{n} & \frac{(n-2)^3-n^3}{n^2} & \frac{(n-3)^4-n^4}{n^3} \end{pmatrix}$.

88 $\boldsymbol{A}_n = \begin{pmatrix} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n & 1 \\ 1 & \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} \end{pmatrix}$.

89 **证明如果矩阵序列的极限都存在而且所有数列是同阶的矩阵,则**

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{B}_n = \lim\boldsymbol{A}_n \cdot \lim\boldsymbol{B}_n .$$

90 **设矩阵序列**$(\boldsymbol{A}_n)$**和**$(\boldsymbol{B}_n)$**及向量序列**$(\boldsymbol{x}_n)$**,其中** $\boldsymbol{A}_n = (a_{ij}^{(n)})$, $\boldsymbol{B}_n = (b_{jk}^{(n)})$, $\boldsymbol{x}_n = (x_{1n}, x_{2n}, \cdots, x_{qn})$**收敛,并且**

$$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{A}_n = \boldsymbol{A},\ \lim_{n\to\infty}\boldsymbol{B}_n = \boldsymbol{B},\ \lim_{n\to\infty}\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{x},$$

而且矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$, $\boldsymbol{G}=(g_{jk})$**和向量**

$$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_q) \quad (i = 1,\cdots,p,\ j = 1,\cdots,q,\ k = 1,\cdots,r)$$

是给定的.

证明:

1) $\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{B}_n = \boldsymbol{AB}$; 2) $\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}_n = \boldsymbol{CB}$; 3) $\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{G} = \boldsymbol{AG}$;

4) $\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{Ax}$; 5) $\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{A}_n\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Ay}$.

7 函数的极限

7.1 集合的聚点,函数在一点的极限

定义 1 **令** $X \subset \mathbb{R}$. **如果**

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists y \in X, y \neq x_0 : |y - x_0| < \varepsilon .$$

则称 $x_0 \in \mathbb{R}$ **是集合** X **的聚点**.

由定义得出 x_0 **的任何邻域包含集合** X **中不同于** x_0 **的点**.

定义 2 **如果** $\forall M\in\mathbb{R}\ \exists y\in X: y> M$,**则** $+\infty$**是集合** X **的聚点**.

如果 $\forall M\in\mathbb{R}\ \exists y\in X: y< M$,**则** $-\infty$**是集合** X **的聚点**.

定义 3 $x\in X$ **但不是集合** X **的聚点,称其为集合** X **的孤立点,即**

$$\exists\delta > 0: S(x,\delta) \cap X = \{x\} .$$

定义 4 **如果在集合中可以找到一个由不同点构成且收敛于** x_0 **的序列**(x_n),**则称** $x_0 \in \mathbb{R}$ **是集合** X **的聚点**.

定义 1 **和** 4 **等价**.

令 $f: x\to\mathbb{R}$ **且** x_0 **是该集合的聚点**.

定义 5(**海涅**(Heine)) **如果存在数** $A\in \mathbf{R}$,**对于取值** $x\in((a,b)\setminus\{x_0\})$**的任何一个序列**$(x_n)$,**它收敛到** x_0,**相应的函数值序列收敛到** A,**则称当** $x\to x_0$ **时**(**或在** x_0)**函数** f **有极限**.

定义 6(**柯西**(Cauchy)) **如果**

$$\exists A\in \mathbf{R} \wedge \forall \varepsilon>0 \exists \delta>0: 0<|x-x_0|<\delta$$

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

则称当 $x\to x_0$ **时函数** f **有极限**.

这时,A **称为函数** f **在** x_0 **的极限**(**或极限值**)**并记为**

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \text{ 或 } f(x)\to A \quad \text{当 } x\to x_0 .$$

海涅和柯西的定义等价.

现在引进单边极限的概念.

定义 7(**海涅**) **如果存在这样的数** $A\in\mathbf{R}$,**对任意取值在** $a<x_n<x_0$ $(x_0<x_n<b)$**并当** $n\to\infty$**时收敛到** x_0 **的序列**(x_n),**相应的函数值序列**$(f(x_n))$**收敛到点** A.**则称函数** f **在** x_0 **有左**(**右**)**极限**.

定义 8(**柯西**) **如果**

$$\exists A\in\mathbf{R}\wedge \forall\varepsilon>0 \exists \delta>0: 0<x_0-x<\delta (0<x-x_0<\delta)$$

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

则称函数 f **在点** x_0 **有左**(**右**)**极限**.

数 A **称为函数** f **在** x_0 **的左**(**右**)**极限**,**并表示为**

$$f(x_0-0)\ (f(x_0+0)) \text{ 或 } \lim_{x\to x_0-0} f(x)\ \left(\lim_{x\to x_0+0} f(x)\right).$$

当且仅当函数 f **在** x_0 **有彼此相等的左极限和右极限时它在该点才有极限**.

定理(**柯西准则**) **当且仅当**

$$\forall\varepsilon>0 \exists\delta>0: (0<|x-x_0|<\delta\wedge 0<|y-x_0|<\delta)$$

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

时函数 f **在** x_0 **有有限的极限**.

下面两个极限起着特别重要的作用:

1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$; 2) $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$,**则**

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = A+B; \lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = AB;$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (g(x)\neq 0, B\neq 0).$$

7.2 函数的有界性

如果存在数 m **和** M,**使得** $m\leq f(x)\leq M$, $x\in X$,**则称函数** $f: X\to\mathbf{R}$, $X\subset\mathbf{R}$ **在集合** X

上是有界的 .

数 $m_0 = \inf_{x\in X}\{ f(x)\}$称为函数 f 在集合 X 的下确界,数 $M_0 = \sup_{x\in X}\{ f(x)\}$称为函数 f 在集合 X 的上确界 . 差 $M_0 - m_0$ 称为函数 f 在集合 X 上的振幅 .

如果函数 $f: X\to \mathrm{R}$ 在点 $x_0 \in X$ 有有限的极限,则它在该点的某个邻域内有界 .

7 .3 兰道(Landau)符号,等价函数

令 $x_0 \in \mathrm{R}$,而 $B = \{X, Y, Z, \cdots\}$是空间R 中的区间集合,其中它们或者把 x_0 作为内点,或者 B 中的每个区间把 x_0 做为自己的左端点,也可能做为右端点 . 那么" $X\in B\wedge$ " $Y\in B \quad X\cap Y\in B, X\in B\wedge Z\in X \quad Z\in B$.

令 $F = \{ f, g, h, \cdots\}$是具有下列性质之一的函数族:

1) 对于任何一个在集合 B 上的函数 $f\in F$,存在有一个区间 X 的内点 x_0 ,在其上函数可能除去 x_0 点外有定义 .

2) 对于任何一个在集合 B 上的函数 $f\in F$,存在把 x_0 作为自己端点的区间,在其上 f 有定义 .

定义 1 如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$,则称当 $x\to x_0$ 时 f 为无穷小;如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$,则称当 $x\to x_0$ 时 f 是无穷大 .

定义 2 如果函数 $f, g\in F$, $f: X\to \mathrm{R}$, $g: Y\to \mathrm{R}$,存在区间 $Z \quad X\cap Y$, $X\in B$, $Y\in B$ 和有限数 $A > 0$,使得" $x\in Z$,可能除去 x_0 本身外下面的不等式成立

$$| g(x) | \leq A | f(x) |,$$

则写成,当 $x\to x_0$ 时

$$g = O(f) .$$

这时称当 $x\to x_0$ 时函数 f 和 g 是同阶函数 .

如果" $\varepsilon > 0$v $Z \quad X\cap Y\in B$,那么对于可能除 x_0 本身外的" $x\in Z$,不等式

$$| g(x) | < \varepsilon | f(x) |$$

成立,则写成,当 $x\to x_0$ 时

$$g = o(f) .$$

这时如果当 $x\to x_0$ 时 $g(x)\to 0$, $f(x)\to 0$,则称 g 是 f 的高阶无穷小;如果当 $x\to x_0$ 时 $g(x)\to\infty$, $f(x)\to\infty$, g 是 f 的低阶无穷大 .

如果存在区间 $Z\in B$使得" $x\in Z\setminus\{x_0\}$ $f(x)\neq 0$,则记号 $g = O(f)$表示比值$\dfrac{g(x)}{f(x)}$在 $x\in Z\setminus\{x_0\}$上有界,记号 $g = o(f)$表示当 $x\to x_0$ 时$\dfrac{g(x)}{f(x)}\to 0$.

记号 O和 o 称为兰道符号 .

同时,把 $f = g + o(g)$记为 $f\sim g$,并称之为渐近等式 .

令 $f, g\in F$ 且" $x\in Y\in B$, $g(x) > 0$,

则 $$f\sim g \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1 .$$

正规的渐近等式有

当 $x\to 0$ 时, $\sin x = x + o(x)$, $\tan x = x + o(x)$.

7 .4 部分极限

如果函数 f 自变量的某个序列 (x_n) 收敛到 x_0 且有等式 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, 则数 A 称为在 x_0 点函数 f 的部分极限 . 用 $\overline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x)$ 和 $\underline{\lim\limits_{x\to x_0}} f(x)$ 表示最大和最小的部分极限并称之为函数在 x_0 的上极限和下极限 .

显然

$$\text{v} \quad \lim_{x\to x_0} f(x) \qquad \overline{\lim_{x\to x_0}} f(x) = \underline{\lim_{x\to x_0}} f(x) .$$

7 .5 复变量函数的极限

定义 1 如果

$$\text{v}\ z\in \mathrm{C} \wedge \text{"}\,\varepsilon > 0\,\text{v}\ m \in \mathrm{N} : \text{"}\, n > m$$
$$| z_n - z | < \varepsilon .$$

则称序列 $\mathrm{N}\to\mathrm{C} : n\mapsto z_n$ 收敛 .

类似地, 如果

$$\text{"}\, N\text{v}\ m \in \mathrm{N} : \text{"}\, n > m \quad | z_n | > N .$$

则称复数序列 (z_n) 收敛到 ∞ .

序列 (z_n), 其中 $z_n = x_n + \mathrm{i}\, y_n$ 收敛到点 $z = a + \mathrm{i} b$, 当且仅当成立

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \text{ 且 } \lim_{n\to\infty} y_n = b .$$

令 z_0 是集合 $D \quad \mathrm{C}$ 的聚点 .

定义 2(海涅) 如果

$$\text{v}\ A\in \mathrm{C} \wedge \text{"}\,(z_n) \qquad D\setminus\{z_0\} : \lim_{n\to\infty} z_n = z_0$$
$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A ,$$

则称当 $z\to z_0$ 时函数 $z\mapsto f(z)$, $z\in D$, $D \quad \mathrm{C}$ 有极限 .

定义 3(柯西) 如果

$$\text{v}\ A \in \mathrm{C} \wedge \text{"}\,\varepsilon > 0\,\text{v}\ \delta > 0 : 0 < | z - z_0 | < \delta \quad | f(z) - A | < \varepsilon ,$$

则称当 $z\to z_0$ 时函数 $z\mapsto f(z)$ 有极限 .

133 证明函数

$$f(x) = \begin{cases} n, & \text{如果 } x = \dfrac{m}{n}, \text{其中 } m \text{ 和 } n \text{ 是互素整数}, \\ 0, & x \text{ 是无理数} . \end{cases}$$

在每个点有限但无界(即在每个点的任一邻域中无界).

令 $x=\dfrac{p}{q}$是任意的有理数,当 $k\to\infty$时,$r_k=\dfrac{kp+1}{kq}\to\dfrac{p}{q}$,即可以落在点 $x=\dfrac{p}{q}$时任一邻域中.然而当 $k\to\infty$时,$f(r_k)=kq\to\infty$所以函数在 x 的任一邻域中无界.

进一步,令 $x=\alpha$,其中 α 是一个无理数,则存在有理数序列 $r_i=\dfrac{p_i}{q_i}(i\in\mathrm{N})$,使得 $\lim\limits_{i\to\infty}\dfrac{p_i}{q_i}=\alpha$.同时$\lim\limits_{i\to\infty}q_i=+\infty$,然而当 $i\to\infty$时,$f\;\dfrac{p_i}{q_i}\;=q_i\to\infty$序列 $\dfrac{p_i}{q_i}$ 的点可以落入 α 的任一邻域,因此函数无界.

134　如果函数 f 在:1) 开区间,2) 闭区间上每个点有定义而且局部有界.那么该函数是否在给定的开区间或相应的闭区间上有界?给出相应的例子.

1) 一般说来,不是.例如函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$在区间$(0,1)$上每个点的邻域内有界,但它在该区间上不是有界的,因为当 $x_n=\dfrac{1}{n}\to 0$ 时 $f(x_n)\to+\infty$,而且当 $n=2,3,\cdots$时 $0<x_n<1$.

2) 函数有界.我们用反证法证明.假设函数无界,那么对任意的自然数 n 存在 $x_n\in[a,b]$,这里$[a,b]$是问题里条件中的闭区间,使得

$$f(x_n)>n.$$

因为 $a\leq x_n\leq b$(即(x_n)有界),则存在子序列(x_{k_n}),(x_{k_n})　(x_n)使得

$$\lim_{n\to\infty}x_{k_n}=c\in[a,b].$$

根据条件,f 在任意点的邻域局部有界,即存在这样的 $\delta>0$ 和 $E>0$,使得

$$|f(x)|\leq E,\quad x\in(c-\delta,c+\delta).$$

另一方面,存在这样的数 N,当 $n>N$ 时 $k_n>E$ 并且 $x_{k_n}\in(c-\delta,c+\delta)$,这时 $f(x_{k_n})>k_n>E$.

得出的矛盾就证明了我们的断言.

135　证明函数

$$f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}$$

在区间$(-\infty,+\infty)$上有界.

显然 $f(x)>0$.即函数有下界.其次,由不等式$(1-x^2)^2\geq 0$ 得出$\dfrac{x^2}{1+x^4}\leq\dfrac{1}{2}$,又由于 $1+x^4\geq 1$,则$\dfrac{1+x^2}{1+x^4}=\dfrac{1}{1+x^4}+\dfrac{x^2}{1+x^4}\leq 1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.从而 $0<f(x)\leq\dfrac{3}{2}$,$-\infty<x<+\infty$.

136　证明函数

$$f(x) = \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$

在 $x=0$ 的任何邻域无界,但当 $x\to 0$ 时不是无穷大.

令 $x_n = \frac{2}{n\pi}$. 显然当 $n\to\infty$ 时, x_n 的值可以落在 $x=0$ 的任一邻域. 所要求的结论可由如下事实得到 $\lim\limits_{n\to\infty}|f(x_{2n})| = \infty$, 但

$$\lim_{n\to\infty} f(x_{2n-1}) = 0,\ n\in \mathbf{N}.$$

137　研究函数 $f(x) = \ln x\cdot \sin^2\frac{\pi}{x}$ 在区间 $(0,\varepsilon)$ 内的有界性.

因为 $0\leq \sin^2\frac{\pi}{x}\leq 1$, 但函数 $\ln x$ 单调增加, 所以 $f(x)\leq \max\{0,\ln\varepsilon\}$, 即函数 f 有上界.

其次, 设 $x_n = \frac{2}{2n+1}$, 从某个数 n_0 开始, 所有的 x_n 都落在区间 $(0,\varepsilon)$ 内, 这时当 $n\to\infty$ 时, $f(x_n) = \ln\frac{2}{2n+1} = -\ln\left(1+\left(n-\frac{1}{2}\right)\right) > -\left(n-\frac{1}{2}\right)\to -\infty$, 即 f 无下界.

138　证明函数

$$f(x) = \frac{x}{1+x}$$

在域 $0\leq x<\infty$ 上有下确界 $m=0$ 和上确界 $M=1$.

显然, $0\leq\frac{x}{1+x}$, $0\leq x<\infty$, 令 ε 是任意的数并且 $0<\varepsilon<1$, 则当 $0<x<\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$ 时, $f(x) = \frac{x}{1+x}<\varepsilon$. 从而 $\inf\limits_{0\leq x<\infty}\{f(x)\} = 0$.

其次, 显然 $\frac{x}{1+x}<1$, $0\leq x<\infty$, 另一方面对于前面给定的 ε, 当 $x>\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ 时, $f(x) = \frac{x}{1+x}>1-\varepsilon$, 即 $\sup\limits_{0\leq x<\infty}\{f(x)\} = 1$.

139　函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义且单调增加, 在该区间上函数的下确界和上确界等于什么?

因为函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上单调增加, 所以 $f(a)\leq f(x)\leq f(b)$　$\forall x\in[a,b]$.

令 $\varepsilon>0$ 是一个任意的数且 $f(a)+\varepsilon<f(b)$. 那么就存在 $x'\in[a,b]$ 使得

$$f(a)\leq f(x')<f(a)+\varepsilon$$

(例如 $x'=a$), 即 $\inf\limits_{a\leq x\leq b}\{f(x)\} = f(a)$.

同样, 如果 $f(b)-\varepsilon<f(b)$, 那么存在 $x''\in[a,b]$ 使得 $f(b)-\varepsilon<f(x'')\leq f(b)$ (例如 $x''=b$). 所以

$$\sup_{a\leq x\leq b}\{f(x)\} = f(b).$$

140　**确定函数** $f(x)=x^2$, $x\in\mathrm{R}$ **在下列区间上的振幅**:

1) $(1,3)$;　2) $(1.9,2.1)$;　3) $(1.99,2.01)$;　4) $(1.999,2.001)$.

在每个指定区间上已知函数单调增加并在这些区间端点有有限的极限值．因此它是有界的．从而:

1) $M_0-m_0=f(3-0)-f(1+0)=9-1=8$;

2) $M_0-m_0=f(2.1-0)-f(1.9+0)=4.41-3.61=0.8$;

3) $M_0-m_0=f(2.01-0)-f(1.99+0)=4.0401-3.9601=0.08$;

4) $M_0-m_0=f(2.001-0)-f(1.999+0)=4.004001-3.996001=0.008$.

141　**令** $m[f]$**和** $M[f]$**分别代表函数** f **在**(a,b)**上的下确界和上确界．**

如果 f_1 **和** f_2 **是定义在**(a,b)**上的函数,证明**:

1) $m[f_1+f_2]\geq m[f_1]+m[f_2]$;

2) $M[f_1+f_2]\leq M[f_1]+M[f_2]$.

我们只证明不等式 1)(**不等式** 2)**可以类似地证明**)．**令** $m_1=\inf\limits_{a<x<b}\{f_1(x)\}$; $m_2=\inf\limits_{a<x<b}\{f_2(x)\}$．**那么** $f_1(x)\geq m_1$ **和** $f_2(x)\geq m_2$, $x\in(a,b)$．**把两个不等式求和得到** $f_1(x)+f_2(x)\geq m_1+m_2$, $x\in(a,b)$．**从而** $m[f_1+f_2]\geq m_1+m_2=m[f_1]+m[f_2]$.

142　**指出函数** $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$, $x\in\mathrm{R}\setminus\{0\}$,**当** $x\to0$ **时无极限．**

所需结论可由下面的事实得出,序列 $x_n=\dfrac{2}{\pi(1+2n)}$ $(n\in\mathrm{N})$**当** $n\to\infty$**时趋于** 0,**但** $f(x_n)=(-1)^n$ **根本没有极限．**

143　**借助于"**ε-δ**"论述方法,证明**$\lim\limits_{x\to2}x^2=4$ **并填写下面的表格**:

ε	0.1	0.01	0.001	0.0001	…
δ					

令 $\varepsilon>0$ **是任意的．要求**

$$|x^2-4|=|(x-2)^2+4(x-2)|\leq|x-2|^2+4|x-2|\leq\varepsilon,$$

只要 $0<|x-2|<\ 4+\varepsilon-2=\dfrac{\varepsilon}{\ 4+\varepsilon+2}$**就可以了．**

如果

$$\frac{\varepsilon}{\ 4+\varepsilon+2}>\frac{\varepsilon}{2\ \ 4+\varepsilon}>\frac{\varepsilon}{2\ \ 4+4\varepsilon+\varepsilon^2}=\frac{\varepsilon}{2(2+\varepsilon)}=\delta(\varepsilon)>|x-2|,$$

后面的一个不等式就更能成立．

令 $\varepsilon=\dfrac{1}{10^n}$,**则** $\delta\ \dfrac{1}{10^n}\ =\dfrac{1}{4\cdot10^n+2}$,**而且**

$$\delta(10^{-1})=\frac{1}{42};\ \delta(10^{-2})=\frac{1}{402};\ \delta(10^{-3})=\frac{1}{4002};$$

$$\delta(10^{-4}) = \frac{1}{40002}.$$

144 用“E-δ”语言证明

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2} = +\infty.$$

填写下面的表格:

E	10	100	1000	10000	…
δ					

令 $E>0$ 是任意的,只要 $(x-1)^2<\frac{1}{E}$ 或 $0<|x-1|<\frac{1}{E}=\delta(E)$,就有

$$\frac{1}{(x-1)^2} > E.$$

从这个结果可以找出

$$\delta(10) = \frac{1}{10};\ \delta(100) = \frac{1}{10};\ \delta(1000) = \frac{1}{10\quad 10};$$

$$\delta(10000) = \frac{1}{100}.$$

145 令 $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$,其中 $a_i\ (i=0,1,\cdots,n)$ 是实数. 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}|P(x)| = +\infty$.

不失一般性,将认为 $a_0\neq 0$. 对于充分大的 $|x|$,则有

$$|P(x)| = |x^n|\left|a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}\right| \geq |x^n|\cdot\frac{|a_0|}{2}.$$

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}|x^n|\cdot\frac{|a_0|}{2} = +\infty$,所以 $\lim\limits_{x\to\infty}|P(x)| = +\infty$.

146 令

$$R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \cdots + b_m},\ x\in\mathrm{R},$$

其中 $a_0\neq 0, b_0\neq 0$. 证明:

$$\lim_{x\to\infty}R(x) = \begin{cases}\infty, & \text{如果 } n>m;\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{如果 } n=m;\\ 0, & \text{如果 } n<m.\end{cases}$$

若 $n>m$,当 $|x|$ 充分大时,有

$$|R(x)| = |x|^{n-m}\left|\frac{a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n}}{b_0 + \frac{b_1}{x} + \cdots + \frac{b_m}{x^m}}\right| > |x|^{n-m}\left|\frac{a_0}{2b_0}\right|.$$

由于$\lim\limits_{x\to\infty}|x|^{n-m}\left|\dfrac{a_0}{2b_0}\right|=\infty$，所以$\lim\limits_{x\to\infty}R(x)=\infty$.

如果 $n=m$，则当 $x\to\infty$时，有

$$R(x)=\frac{a_0+\dfrac{a_1}{x}+\cdots+\dfrac{a_n}{x^n}}{b_0+\dfrac{b_1}{x}+\cdots+\dfrac{b_n}{x^n}}\to\frac{a_0}{b_0}.$$

最后，若 $n<m$，对于充分大的$|x|$，则有

$$|R(x)|<\frac{1}{|x|^{m-n}}\left|\frac{2a_0}{b_0}\right|.$$

由此得出$\lim\limits_{x\to\infty}R(x)=0$.

147　令 $x\to0$. 证明下列等式：

1) $x\sin\sqrt{x}=x^{\frac{3}{2}}+o(x^{\frac{3}{2}})$；　　2) $\ln x=o(x^{-\varepsilon})$，$\varepsilon>0$；

3) $(1+x)^n=1+nx+o(x)$；　　4) $\arctan\dfrac{1}{x}=O(1)$.

列出的等式可由下面的事实得到 .

1) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x\sin\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}}=1$；　　2) $\lim\limits_{x\to+0}x^{\varepsilon}\ln x=\lim\limits_{t\to\infty}\dfrac{-\ln t}{t^{\varepsilon}}=0$，$t=\dfrac{1}{x}$；

3) $(1+x)^n=1+nx+C_n^2x^2+\cdots+x^n=1+nx+(C_n^2x+\cdots+x^{n-1})x$

$\qquad=1+nx+\alpha(x)x$.

其中当 $x\to0$ 时，$\alpha(x)=C_n^2x+\cdots+x^{n-1}\to0$；

4) $\left|\arctan\dfrac{1}{x}\right|<\dfrac{\pi}{2}$.

148　令 $x\to0$，分出下列函数中形如 Cx^n（C是常数）的主项，并确定相对于无穷小变量 x 的阶：

1) $x\mapsto(2x-3x^2+x^5)$；

2) $x\mapsto(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})$；

3) $x\mapsto(\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x})$；

4) $x\mapsto(\tan x-\sin x)$.

1) 从 $2x-3x^2+x^5=2x+(-3x+x^4)x=2x+\alpha(x)x$，且当 $x\to0$ 时 $\alpha(x)\to0$. 得到 $2x-3x^2+x^5=2x+o(x)$，即 $Cx^n=2x$，$n=1$.

2) 由等式 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=1$ 得到 $Cx=x$，$n=1$，即 $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}\sim x$.

3) 既然

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{1-2x}-(1-x)}{x^2}+\frac{(1-x)-\sqrt[3]{1-3x}}{x^2}\right.$$

$$= -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2},$$

则 $Cx^n = \frac{1}{2}x^2$, $n = 2$.

4) 因为有 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2}$,所以

$$Cx^3 = \frac{1}{2}x^3,\ n = 3.$$

149 令 $x\to+\infty$,分出下列函数中形如 Cx^n 的主项,并确定相对于无穷大 x 的阶:

1) $x \mapsto \sqrt[3]{x^2 - x + \sqrt{x}}$; 2) $x \mapsto \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

1) 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2 - x + \sqrt{x}}}{x^{\frac{2}{3}}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{1 - x^{-1} + x^{-\frac{1}{6}}} = 1,$$

所以 $Cx^n = x^{\frac{2}{3}}$, $n = \frac{2}{3}$.

2) 我们有

$\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}} = x^{\frac{1}{8}}\sqrt{\sqrt{x^{-4}} + \sqrt{x^{-1}} + 1} \sim x^{\frac{1}{8}}$,所以

$$Cx^n = x^{\frac{1}{8}},\ n = \frac{1}{8}.$$

求解下面各题(求解其中某些题时,用与其等价的无穷小函数代替它们):

150 1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m - 1}{x^n - 1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n}\right)$.

(m, n 为自然数).

1) 按照牛顿二项式展开,得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(C_n^2 m^2 - C_m^2 n^2)x^2 + o(x^2)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(C_n^2 m^2 - C_m^2 n^2 + \frac{o(x^2)}{x^2}\right) = C_n^2 m^2 - C_m^2 n^2$$

$$= \frac{mn(n-m)}{2}.$$

2) 设 $x = 1 + t$(当 $x\to 1$ 时, $t\to 0$),并利用除去无穷小的原则,得到

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^m - 1}{(1+t)^n - 1} = \lim_{t\to 0}\frac{mt + o(t)}{nt + o(t)}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{mt}{nt} = \frac{m}{n}.$$

3) **令** $x = 1 + t$(**当** $x\to 1$ **时**, $t\to 0$),**得到**

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n}\right) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{n}{(1+t)^n - 1} - \frac{m}{(1+t)^m - 1}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(\frac{n}{nt + \mathrm{C}_n^2 t^2 + o(t^2)} - \frac{m}{mt + \mathrm{C}_m^2 t^2 + o(t^2)}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{(n\mathrm{C}_m^2 - m\mathrm{C}_n^2)t^2 + o(t^2)}{mnt^2 + o(t^2)} = \frac{n\mathrm{C}_m^2 - m\mathrm{C}_n^2}{mn} = \frac{m-n}{2}.$$

151 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\left(x+\frac{a}{n}\right)^2 + \left(x+\frac{2a}{n}\right)^2 + \cdots + \left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)^2\right]$.

利用例 37,1)**的结果**,**得到**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(nx^2 + \frac{2ax}{n}(1+2+\cdots+(n-1)) + \frac{a^2}{n^2}(1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2)\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(nx^2 + \frac{2ax}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2} + \frac{a^2}{n^2}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\right)$$

$$= x^2 + ax + \frac{a^2}{3}.$$

152 $\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+\cdots+(2n)^2}$.

因为

$$2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2 = 4(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3},$$

$$1^2 + 2^2 + \cdots + (2n)^2 = \frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}.$$

(**见例** 37,1))**由第二个等式减去第一个等式**,**得到**

$$1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n+1)(4n+1)}{3} - \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$$

$$= \frac{n(4n^2-1)}{3}.$$

于是 $\lim_{n\to\infty}\frac{1^2+3^2+\cdots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+\cdots+(2n)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n(4n^2-1)}{2n(n+1)(2n+1)} = 1$.

153 $\lim_{n\to\infty}\frac{1^3+4^3+7^3+\cdots+(3n-2)^3}{(1+4+7+\cdots+(3n-2))^2}$.

因为(**见例** 37,2))

$$1^3 + 4^3 + 7^3 + \cdots + (3n-2)^3 = (3\cdot 1-2)^3 + (3\cdot 2-2)^3 + (3\cdot 3-2)^3 + \cdots + (3n-2)^3$$

$$= 27(1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) - 54(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) +$$

$$36(1 + 2 + \cdots + n) - 8n$$

$$=27\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-54\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+36\frac{n(n+1)}{2}-8n;$$

$$(1+4+7+\cdots+(3n-2))^2=\frac{n^2(3n-1)^2}{4}.$$

既然在分子和分母中 n **的最高次幂都等于** 4, **则分式的极限等于** n^4 **相应系数的比值**, **即为** 3 .

154 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{x}$.

设 $x_0>0$, **令** $x=x_0+t$, **显然当** $x\to x_0$ **时** $t\to 0$. **考虑** $|t|<x_0$, **则有**

$$\sqrt[n]{x_0}\sqrt[n]{1-\frac{|t|}{x_0}}<\sqrt[n]{x_0+t}=\sqrt[n]{x_0}\sqrt[n]{1+\frac{t}{x_0}}<\sqrt[n]{x_0}\sqrt[n]{1+\frac{|t|}{x_0}},$$

由此得出 $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt[n]{x}=\lim\limits_{t\to 0}\sqrt[n]{x_0+t}=\sqrt[n]{x_0}$.

155 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

用 $\sqrt{x}$ **分别除分子和分母**, **得到**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=1.$$

156 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim_{x\to a}\left(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}+\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to a}\left(\frac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}+\frac{1}{\sqrt{x+a}}\right)$$

$$=\lim_{x\to a}\left(\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}+\frac{1}{\sqrt{x+a}}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

157 $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

显然

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}=\lim_{x\to 8}\frac{(9+2x-25)(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{(x-8)(\sqrt{9+2x}+5)}$$

$$=2\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt{9+2x}+5}=\frac{12}{5}.$$

158 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ (n 为整数) .

设 $\sqrt[n]{1+x}-1=t$, 则 $x=(1+t)^n-1$. 考虑 $|x|<1$, 则 $1-|x|<\sqrt[n]{1+x}<1+|x|$, 由此得 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[n]{1+x}=1$, 即当 $x\to 0$ 时 $t\to 0$. 于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{(1+t)^n-1}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{nt+o(t)}=\frac{1}{n}.$$

从而得到: 当 $x\to 0$ 时, $\sqrt[n]{1+x}=1+\dfrac{x}{n}+o(x)$.

159 $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$.

当 $x\to 7$ 时

$$\sqrt{x+2}=3\sqrt{1+\frac{x-7}{9}}=3\left(1+\frac{x-7}{18}\right)+o(x-7),$$

$$\sqrt[3]{x+20}=3\sqrt[3]{1+\frac{x-7}{27}}=3\left(1+\frac{x-7}{81}\right)+o(x-7),$$

$$\sqrt[4]{x+9}=2\sqrt[4]{1+\frac{x-7}{16}}=2\left(1+\frac{x-7}{64}\right)+o(x-7).$$

所以

$$\lim_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}=\lim_{x\to 7}\frac{3\left(1+\frac{x-7}{18}\right)-3\left(1+\frac{x-7}{81}\right)+o(x-7)}{2\left(1+\frac{x-7}{64}\right)+o(x-7)-2}$$

$$=\frac{112}{27}.$$

160 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$.

设 $\sqrt[5]{1+5x}=1+t$. 显然 $x=\dfrac{1}{5}((1+t)^5-1)$, 且如果 $x\to 0$, 则 $t\to 0$. 于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}=\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{25}((1+t)^5-1)^2}{t-\frac{1}{5}((1+t)^5-1)}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{25}(5t+o(t))^2}{t-\frac{1}{5}(5t+10t^2+o(t^2))} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2+o(t^2)}{-2t^2+o(t^2)} = -\frac{1}{2}.$$

161 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$ (m **和** n **为整数**) .

利用例 158 **的结果**,**得到**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\beta x}(\sqrt[n]{1+\alpha x}-1)+\sqrt[m]{1+\beta x}-1}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\sqrt[m]{1+\beta x}\cdot\alpha\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+\alpha x}-1}{\alpha x}+$$

$$\beta\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+\beta x}-1}{\beta x} = \frac{\alpha}{n}+\frac{\beta}{m}.$$

162 **令** $P(x)=a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n$ **且** m **为整数** . **证明**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{x} = \frac{a_1}{m}.$$

因为当 $x\to 0$ **时**, $P(x)\to 0$, **则**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{P(x)}\cdot\frac{P(x)}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{P(x)}\cdot\lim_{x\to 0}(a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1})$$

$$= \frac{a_1}{m}.\text{(见例 158)}.$$

求极限:

163 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ (m **和** n **为整数**) .

设 $x=(1+t)^{mn}$, **则当** $x\to 1$ **时** $t\to 0$, **而且**

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1} = \lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^n-1}{(1+t)^m-1} = \frac{n}{m}.\text{(见例 150, 2))}.$$

164 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})\cdot(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

设 $1-x=t$(**当** $x\to 1$ **时** $t\to 0$), **得到**

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-\sqrt{x})\cdot(1-\sqrt[3]{x})\cdots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{1-\sqrt{1-t}}{t}\cdot\frac{1-\sqrt[3]{1-t}}{t}\cdots\frac{1-\sqrt[n]{1-t}}{t}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdots\frac{1}{n} = \frac{1}{n!}.$$

完成下面各题(165—168 **题中去掉分子中的根号,并借助于简单的变量置换改变表达式**).

165 $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\frac{2x(\sqrt{x^2+2x}-x-1)}{\sqrt{x^2+2x}+x+2\sqrt{x^2+x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2}{(\sqrt{x^2+2x}+x+2\sqrt{x^2+x})(\sqrt{x^2+2x}+x+1)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-2}{\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+2\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1+\frac{1}{x}\right)} = -\frac{1}{4}.$$

166 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x})$.

加上和减去 x **后得到**

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}) = \lim_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3-3x^2}-x)+\lim_{x\to+\infty}(x-\sqrt{x^2-2x})$$

$$= 1+1 = 2.$$

167 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)}-x)$.

设 $\frac{1}{x}=t$, **当** $x\to+\infty$ **时** $t\to+0$, **而且**

$$\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)}-x = \frac{\sqrt[n]{1+P(t)}-1}{t},$$

其中 $P(t)=(a_1+a_2+\cdots+a_n)t+(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{n-1}a_n)t^2+\cdots+a_1a_2\cdots a_nt^n$.

利用例 162 **的结果得到所求极限等于**

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

168 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2-1})^n+(x+\sqrt{x^2-1})^n}{x^n}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2-1})^n+(x+\sqrt{x^2-1})^n}{x^n}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x(x+\sqrt{x^2-1})}\right)^n+\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)^n = 0+2^n = 2^n.$$

169 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x^2}+x)^n-(\sqrt{1+x^2}-x)^n}{x}$ (n **为自然数**).

展开后合并同类项得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n-\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x}\left[nx\left(\sqrt{1+x^2}\right)^{n-1}+o(x)\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}2\left[n\left(\sqrt{1+x^2}\right)^{n-1}+\frac{o(x)}{x}\right]=2n.$$

求极限:

170 $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$.

设 $x=\pi+t,\ t\to 0$. 则

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin mx}{\sin nx}=\lim_{t\to 0}\frac{\sin(m\pi+mt)}{\sin(n\pi+nt)}=\lim_{t\to 0}\frac{(-1)^m\sin mt}{(-1)^n\sin nt}$$

$$=(-1)^{m-n}\frac{m}{n}\lim_{t\to 0}\frac{\sin mt}{mt}\cdot\frac{nt}{\sin nt}=(-1)^{m-n}\cdot\frac{m}{n}.$$

171 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

利用前面给出的极限,得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

于是当 $x\to 0$ 时, $1-\cos x=\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)$.

172 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$.

由不等式 $|1-\cos x|=2\sin^2\dfrac{x}{2}<|x|$ 得出

$$\lim_{x\to 0}\cos x=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=1.$$

所以当 $x\to 0$ 时, $\tan x=x+o(x)$.

173 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$.

利用渐近展开式,得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x-3x+o(x)}{x+o(x)}=2.$$

174 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$.

因为当 $x\to 0$ 时, $1-\cos x=o(x)$, $1-\cos px=o(x)$, $\sin x=x+o(x)$, $\sin px=px+o(x)$, 则

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}=\lim_{x\to 0}\frac{x+o(x)}{px+o(x)}=\frac{1}{p}.$$

175 证明等式:

1) $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$; 2) $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$; 3) $\lim\limits_{x\to a}\tan x=\tan a$, $a\neq\frac{2n-1}{2}\pi$, $n\in\mathbf{Z}$.

1) $0\leq|\sin x-\sin a|=\left|2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\right|\leq 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|\leq|x-a|$, $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$.

2) **同样**

$0\leq|\cos x-\cos a|=\left|2\sin\frac{x-a}{2}\sin\frac{x+a}{2}\right|\leq|x-a|$, **故** $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$.

3) **如果** $\cos a\neq 0$, **即** $a\neq\frac{2n-1}{2}\pi$, $n\in\mathbf{Z}$, $\lim\limits_{x\to a}\tan x=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}\sin x}{\lim\limits_{x\to a}\cos x}=\dfrac{\sin a}{\cos a}=\tan a$.

求极限:

176 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

显然

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}=1\cdot\cos a=\cos a.$$

(**这里用到了当** $x\to b$ **时** $\cos x\to\cos b$).

177 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cot x-\cot a}{x-a}$.

利用反正切差的公式得到

$$\lim_{x\to a}\frac{\cot x-\cot a}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sin(a-x)}{\sin x\cdot\sin a}\cdot\frac{1}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\left(-\frac{\sin(a-x)}{a-x}\right)\cdot\frac{1}{\sin a}\cdot\lim_{x\to a}\frac{1}{\sin x}=-\frac{1}{\sin^2 a},\ a\neq k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$$

178 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+2x)-2\cos(a+x)+\cos a}{x^2}$.

把分子中和化成积的形式,得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(a+2x)-2\cos(a+x)+\cos a}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(-2\sin\frac{x}{2}\sin\left(a+\frac{3x}{2}\right)+2\sin\frac{x}{2}\sin\left(a+\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{x^2}\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos(a+x)\right)=-\cos a.$$

179 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cot(a+2x)-2\cot(a+x)+\cot a}{x^2}$.

和上题类似

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\cot(a+2x)-2\cot(a+x)+\cot a}{x^2}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\big((\cot(a+2x)-\cot(a+x))-(\cot(a+x)-\cot a)\big)\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{-\sin x}{\sin(a+2x)\sin(a+x)}+\frac{\sin x}{\sin(a+x)\sin a}\right)\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sin(a+x)}\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{2\cos(a+x)}{\sin a\sin(a+2x)}\\
&=\frac{2\cos a}{\sin^3 a},\ a\neq k\pi,\ k\in \mathrm{Z}\ .
\end{aligned}
$$

180 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$.

将分子、分母分解为乘积,得到

$$
\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{(\sin x+1)(2\sin x-1)}{(\sin x-1)(2\sin x-1)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x+1}{\sin x-1}=-3\ .
$$

181 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\tan^3 x-3\tan x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$.

把分子分解为乘积,则有

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\tan^3 x-3\tan x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}&=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\tan x\left(\tan^2 x-\tan^2\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}\\
&=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\tan x\left(\tan x+\tan\frac{\pi}{3}\right)\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos x\cos\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}\\
&=\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\tan x\left(\tan x+\tan\frac{\pi}{3}\right)\frac{-1}{\cos x\cos\frac{\pi}{3}}=-24\ .
\end{aligned}
$$

182 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(a+x)\tan(a-x)-\tan^2 a}{x^2}$.

在显而易见的变形后,得到

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\tan(a+x)\tan(a-x)-\tan^2 a}{x^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\tan^2 a-\tan^2 x}{1-\tan^2 a\tan^2 x}-\tan^2 a\right)\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x^2}(\tan^4 a-1)=\tan^4 a-1=-\frac{\cos 2a}{\cos^4 a}\ .
\end{aligned}
$$

183 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

分母有理化后,得到

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}=\lim_{x\to0}\frac{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1+x\sin x-\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\sin x}{x}}.$$

如果 $x\to0$, **则** $1+x\sin x\to1$, **这时(见例** 144) $\sqrt{1+x\sin x}\to\sqrt{1}=1$. **同样当** $x\to0$ **时**, $\sqrt{\cos x}\to1$. **其次当** $x\to0$ **时**, $\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\to\frac{1}{2}$. **所以**

$$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\frac{1-\cos x}{x^2}+\frac{\sin x}{x}}=\frac{4}{3}.$$

184 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

把分子加上和减去 1,**得到**

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}&=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sqrt{\cos x}-1}{\sin^2 x}+\frac{1-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}\right)\\&=\lim_{x\to0}\left(\frac{\cos x-1}{\sin^2 x(\sqrt{\cos x}+1)}+\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}\cdot\frac{1}{1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}}\right)\\&=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\left(-\frac{1}{\sqrt{\cos x}+1}+\frac{1}{1+\sqrt[3]{\cos x}+\sqrt[3]{\cos^2 x}}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=-\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

这里用到了当 $x\to0$ **时**, $\sqrt[n]{\cos x}\to1$, **而这一结果是从例** 175 **和例** 154 **得出的**.

185 **证明** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0$.

事实上,当 $x>\frac{1}{4\varepsilon^2}=E(\varepsilon)$**时**

$$\begin{aligned}|\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}|&=\left|2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\\&\leq2\left|\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\right|<\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\frac{1}{2\sqrt{x}}<\varepsilon.\end{aligned}$$

证明下述结论:

Ⅰ) $\lim\limits_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}$, $a>0$; Ⅱ) $\lim\limits_{x\to x_0}\ln x=\ln x_0$;

Ⅲ) $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}=a^b$ **附加如下条件**"$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: 0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow(0<|u(x)-a|<\varepsilon)\wedge(0<|v(x)-b|<\varepsilon)$".

Ⅰ) 只要考虑 $a>1$ 的情形就足够了. 这时

$$|a^x - a^{x_0}| = a^{x_0} |a^{x-x_0} - 1|.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1$, 对于任意的 $\varepsilon>0$ 存在这样的 n_0, 使得

$$1 - \frac{\varepsilon}{a^{x_0}} < a^{-\frac{1}{n_0}} < a^{\frac{1}{n_0}} < 1 + \frac{\varepsilon}{a^{x_0}}.$$

当 $|x - x_0| < \frac{1}{n_0}$ 时, 有

$$1 - \frac{\varepsilon}{a^{x_0}} < a^{-\frac{1}{n_0}} < a^{x-x_0} < a^{\frac{1}{n_0}} < 1 + \frac{\varepsilon}{a^{x_0}},$$

即当 $|x - x_0| < \frac{1}{n_0}$ 时, $|a^x - a^{x_0}| = a^{x_0} |a^{x-x_0} - 1| < \varepsilon$.

Ⅱ) 当 $n>1$ 时

$$\frac{1}{n+1} < \ln 1 + \frac{1}{n} < \frac{1}{n}, \quad -\frac{1}{n-1} < \ln 1 - \frac{1}{n} < -\frac{1}{n}.$$

于是当 $n>1$ 时

$$-\frac{1}{n-1} < \ln 1 - \frac{1}{n} < \ln 1 + \frac{1}{n} < \frac{1}{n}.$$

令 $\varepsilon>0$ 是不超过 $\frac{1}{2}$ 的任意数, 则存在这样的 n_0, 使得

$$-\varepsilon < \ln 1 - \frac{1}{n_0} < \ln 1 + \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

如果取

$$-\frac{1}{n_0} < \frac{x - x_0}{x_0} < \frac{1}{n_0},$$

则关于差 $\ln x - \ln x_0 = \ln 1 + \frac{x - x_0}{x_0}$ 我们有如下估计式:

$$-\varepsilon < \ln 1 - \frac{1}{n_0} < \ln 1 + \frac{x - x_0}{x_0} < \ln 1 + \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

或者如果仅当 $|x - x_0| < x_0\varepsilon$ 时, $|\ln x - \ln x_0| < \varepsilon$.

Ⅲ) 根据Ⅱ)的条件和结论有当 $x\to x_0$ 时,

$$v(x)\ln u(x) \to b\ln a$$

根据Ⅰ)则有

$$\lim_{x\to x_0} (u(x))^{v(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{v(x)\ln u(x)} = e^{b\ln a} = a^b = \lim_{x\to x_0} u(x)^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)}.$$

求极限:

186 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+2}{2x+1}^{x^2}$.

从结论Ⅰ)—Ⅲ), 有

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\exp\left(x^2\ln\frac{x+2}{2x+1}\right).$$

对于充分大的 $x,\ln\frac{x+2}{2x+1}<0$,**而** $\lim_{x\to\infty}x^2=+\infty$,**则所求极限等于** 0 .

注意:**完成例** 187—192, 200, 201, 208, 209, 210 **要依据关于** 1^∞ **不确定性的简单例子** .

令 $\lim_{x\to x_0}u(x)=1,\lim_{x\to x_0}v(x)=\infty$. **根据Ⅱ)的结论得到**

$$\lim_{x\to x_0}u^v=\lim_{x\to x_0}\left((1+(u-1))^{\frac{1}{u-1}}\right)^{(u-1)v}=\exp\left(\lim_{x\to x_0}(u-1)v\right).$$

187 $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$.

在这个情况下 $u=\frac{x^2+1}{x^2-2};\ v=x^2;\ (u-1)v=\frac{3x^2}{x^2-2}$. **因此**

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}=\exp\left(\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2}{x^2-2}\right)=e^3.$$

188 $\lim_{x\to0}(1+x^2)^{\cot^2x}$.

和上题类似

$$\lim_{x\to0}(1+x^2)^{\cot^2x}=\exp\left(\lim_{x\to0}x^2\cot^2x\right)=\exp\left(\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\tan x}\right)^2\right)=e.$$

189 $\lim_{x\to1}(1+\sin\pi x)^{\cot\pi x}$.

显然

$$\lim_{x\to1}(1+\sin\pi x)^{\cot\pi x}=\exp\left(\lim_{x\to1}\sin\pi x\cot\pi x\right)=\exp\left(\lim_{x\to1}\cos\pi x\right)=e^{-1}.$$

190 $\lim_{x\to0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=\exp\left(\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{\sin x}\right)$$

$$=\exp\left(\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{\cos x(1+\sin x)}\right)=e^0=1.$$

191 $\lim_{x\to0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3x}}$.

基于计算幂-指表达式 u^v **时得到的关于形如** 1^∞ **的不确定性,则有**

$$(u-1)v=\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{\sin^3x}.$$

因为当 $x\to 0$ **时**, $\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim\frac{x^3}{2}$, $1+\sin x\sim 1$, $\sin^3 x\sim x^3$, **那么**

$$\lim_{x\to 0}(u-1)v=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

于是

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$$

192 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$.

当 $x\to\infty$**时**, $\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}=\frac{1}{x}+1+o\left(\frac{1}{x}\right)$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)=1$, **所以**

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x=\exp\left\{\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]x\right\}=e.$$

193 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$.

根据结论Ⅱ)，得到

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\ln\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln e=1.$$

所以当 $x\to 0$ **时**, $\ln(1+x)=x+o(x)$.

194 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$.

分出分子、分母中 x **的最高次幂并利用结论Ⅱ)，得到**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x+\ln\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{10\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}}\right)}=\frac{1}{5}.$$

195 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\lg(x+h)+\lg(x-h)-2\lg x}{h^2}$, $x>0$.

根据对数的性质和结论Ⅱ)，得到

$$\lim_{h\to 0}\frac{\lg(x+h)+\lg(x-h)-2\lg x}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\lg\left(1-\frac{h^2}{x^2}\right)$$

$$=-\frac{\lg e}{x^2}\cdot\lim_{h\to 0}\ln\left[\left(1-\frac{h^2}{x^2}\right)^{-\frac{x^2}{h^2}}\right]=-\frac{\lg e}{x^2}.$$

196 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$.

利用渐近展开式(见例 178 **和例** 193**)，得到**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\ 1-\frac{a^2x^2}{2}+o(x^2)}{\ln\ 1-\frac{b^2x^2}{2}+o(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{a^2x^2}{2}+o(x^2)}{-\frac{b^2x^2}{2}+o(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{a^2x^2}{b^2x^2}=\frac{a^2}{b^2}.$$

197 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$, $a>0$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\mu-1}{x}$($\mu$**为实数**).

1) **令** $a^x-1=t$. **当** $x\to 0$ **时** $t\to 0$,**所以**

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t\ln a}{\ln(1+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\ln a}{\ln(1+t)^{1/t}}=\ln a.$$

于是当 $x\to 0$ **时** $a^x=1+x\ln a+o(x)$($e^x=1+x+o(x)$).

2) **显然**$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\mu-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\mu\ln(1+x)}-1}{\mu\ln(1+x)}\dfrac{\mu\ln(1+x)}{x}=\mu$,**因为当** $x\to 0$ **时**,$\mu\ln(1+x)\to 0$,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\mu\ln(1+x)}}{\mu\ln(1+x)}=1$,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$(**根据结论Ⅱ**),**例** 197,1)**和例** 193). **于是当** $x\to 0$ **时**,$(1+x)^\mu=1+\mu x+o(x)$.

198 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^\mu x}{x^2}$($\mu$**为实数**).

利用上例的结果,**有**

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^\mu x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+(\cos x-1))^\mu-1}{\cos x-1}\cdot\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{\mu}{2}.$$

199 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-(\cos x)^2}{x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$, $a>0$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x^2}\cos^{2\alpha}x-1}{x^2}$, $\alpha\neq 0$.

1)

$$\frac{e^{x^2}-(\cos x)^2}{x^2}=\frac{e^{x^2}-1}{x^2}+\frac{1-(\cos x)^2}{x^2}.$$

根据例 197,1)**和例** 198,**所求极限值为** $1+\dfrac{2}{2}$.

2) **经过显而易见的变换得到**

$$\frac{a^x-x^a}{x-a}=a^a\frac{a^{x-a}-1}{x-a}-a^{a-1}\frac{\left(1+\frac{x-a}{a}\right)^a-1}{\frac{x-a}{a}}.$$

第一项的极限(**见例** 197,1))**等于** $a^a\ln a$. **第二项的极限**(**见例** 197,2))**等于** a^a. **所以**

$$\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a}=a^a\ln a-a^a=a^a\ln\frac{a}{e}.$$

3) $$\frac{e^{\alpha x^2}\cos^{2\alpha}x-1}{x^2}=\frac{(e^{\alpha x^2}-1)\cos^{2\alpha}x+\cos^{2\alpha}x-1}{x^2}=\frac{e^{\alpha x^2}-1}{\alpha x^2}\alpha\cos^{2\alpha}x-\frac{1-\cos^{2\alpha}x}{x^2}.$$

因为$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x^2}-1}{\alpha x^2}\alpha\cos^{2\alpha}x=\alpha$,$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^{2\alpha}x}{x^2}=\alpha$,**整个表达式的极限等于** 0.

200 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}$, $a>0$.

设函数 $\dfrac{x^x-a^a}{x-a}=\varphi(x)$ **为两项和的形式**, $\varphi(x)=\dfrac{x^x-x^a}{x-a}+\dfrac{x^a-a^a}{x-a}=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)$.

显然

$$\varphi_1(x)=\frac{e^{a\ln x}\left(e^{(x-a)\ln x}-1\right)}{(x-a)\ln x}\cdot\ln x.$$

因为当 $x\to a$ **时** $e^{a\ln x}\to a^a$, $\dfrac{e^{(x-a)\ln x}-1}{(x-a)\ln x}\to 1$, $\ln x\to\ln a$, **则** $\lim\limits_{x\to a}\varphi_1(x)=a^a\ln a$. **其次**

$$\lim_{x\to a}\varphi_2(x)=\lim_{x\to a}\frac{a^a\left[\left(1+\dfrac{x-a}{a}\right)^a-1\right]}{\dfrac{x-a}{a}\cdot a}=a^a\lim_{x\to a}\frac{\left(1+\dfrac{x-a}{a}\right)^a-1}{\dfrac{x-a}{a}}\cdot\frac{1}{a}=a^a.$$

最终得到 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}=a^a\ln a+a^a=a^a\ln(ae)$.

201 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{\cot^3 x}$.

从幂-指函数表达式 u^v **的极限,得到**(当 $x\to 0$ 时)

$$(u-1)v=\frac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{1+\sin x\cos\beta x}\cdot\frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{\left(\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{2}x^2+o(x^2)\right)\left(1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\right)^3}{\left(1+(x+o(x))\left(1-\dfrac{\beta^2x^2}{2}+o(x^2)\right)\right)(x^2+o(x^2))}=\frac{\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{2}x^2+o(x^2)}{x^2+o(x^2)}.$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{\cot^3 x}=\exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\beta^2-\alpha^2}{2}x^2}{x^2}\right)=\exp\left(\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}\right).$$

202 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(\pi x^\alpha)}{\sin(\pi x^\beta)}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(\pi x^\alpha)}{\sin(\pi x^\beta)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi((x^\alpha-1)+1)}{\sin\pi((x^\beta-1)+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin\pi(x^\alpha-1)}{\sin\pi(x^\beta-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\pi(x^\alpha-1)}{\pi(x^\beta-1)}=\lim_{t\to 0}\frac{(1+t)^\alpha-1}{(1+t)^\beta-1}=\lim_{t\to 0}\frac{\alpha t+o(t)}{\beta t+o(t)}=\frac{\alpha}{\beta}$$

(**这里用到了例** 197, 2) **解里的结果**.)

203 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin^2(\pi 2^x)}{\ln(\cos(\pi 2^x))}$.

设 $\sin^2(\pi 2^x)=t$, **得到**

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin^2(\pi 2^x)}{\ln(\cos(\pi 2^x))}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\frac{1}{2}\ln(1-t)}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{-\frac{t}{2}+o(t)}=-2$$

(这里用到公式 $\ln(1-t)=-t+o(t)$).

204 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}$, $a>0$.

设 $x-a=t$ **并利用例** 197,2)**的结果,得到**

$$\lim_{x\to a}\frac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}=\lim_{t\to 0}a^{\alpha-\beta}\frac{\left(1+\frac{t}{a}\right)^\alpha-1}{\left(1+\frac{t}{a}\right)^\beta-1}=a^{\alpha-\beta}\lim_{t\to 0}\frac{\alpha\cdot\frac{t}{a}+o(t)}{\beta\cdot\frac{t}{a}+o(t)}=\frac{\alpha}{\beta}a^{\alpha-\beta}.$$

205 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}$, $a>0$.

利用例 197,1)**的结果,给出**

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}=\lim_{h\to 0}a^{x-h}\left(\frac{a^h-1}{h}\right)^2=a^x\ln^2 a.$$

206 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$.

利用著名的极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$,**经简单变换得出**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}=\lim_{x\to+\infty}\left(\left(1+\frac{b}{x+a}\right)^{\frac{x+a}{b}}\right)^{-b}\left(\left(1+\frac{a}{x+b}\right)^{\frac{x+b}{a}}\right)^{-a}=\mathrm{e}^{-a-b}.$$

207 $\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})$, $x>0$.

从例 197,1)**得知**

$$\lim_{n\to\infty}n^2(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x})=\lim_{n\to\infty}x^{\frac{1}{n+1}}\frac{x^{\frac{1}{n^2+n}}-1}{\frac{1}{n^2+n}}\cdot\frac{n^2}{n^2+n}=\ln x.$$

208 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$, $a>0$, $b>0$.

类似于上一个例子,有

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)n\right)$$

$$=\exp\left(\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}}+\frac{\sqrt[n]{b}-1}{\frac{1}{n}}\right)\right)=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\ln(ab)}=\sqrt{ab}.$$

209 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a>0$, $b>0$, $c>0$.

记 $f(x)=\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}$. **显然当** $x\to0$ **时,有** $f(x)\to1$. **这时**

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{\frac{1}{x}}=\exp\left(\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}\right).$$

由于

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}=\frac{1}{a+b+c}\lim_{x\to0}\left(a\frac{a^x-1}{x}+b\frac{b^x-1}{x}+c\frac{c^x-1}{x}\right)$$

$$=\frac{a\ln a+b\ln b+c\ln c}{a+b+c}=\ln\left(a^ab^bc^c\right)^{\frac{1}{a+b+c}},$$

则所求极限等于 $\left(a^ab^bc^c\right)^{\frac{1}{a+b+c}}$.

210　$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a>0$, $b>0$.

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{\frac{1}{x}}=\exp\left(\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}\right),$$

其中 $f(x)=\dfrac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\to1$, **因为** $\lim\limits_{x\to0}a^{x^2}=1$, $\lim\limits_{x\to0}b^{x^2}=1$, $\lim\limits_{x\to0}a^x=1$, $\lim\limits_{x\to0}b^x=1$ (**见结论 I**)).

然而

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{a^{x^2}+b^{x^2}-a^x-b^x}{x(a^x+b^x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{a^x+b^x}\left(\frac{a^{x^2}-1}{x^2}x+\frac{b^{x^2}-1}{x^2}x-\frac{a^x-1}{x}-\frac{b^x-1}{x}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}(\ln a+\ln b),$$

则所求极限等于 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)}=\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$.

211　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}$, $a>0$, $b>0$.

由于(见例 197, 1)) $a^{x^2}-b^{x^2}=x^2\ln\dfrac{a}{b}+o(x^2)$, $(a^x-b^x)^2=\left(x\ln\dfrac{a}{b}+o(x)\right)^2=x^2\ln^2\dfrac{a}{b}+o(x^2)$, **则**

$$\lim_{x\to0}\frac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\ln\dfrac{a}{b}+o(x^2)}{x^2\ln^2\dfrac{a}{b}+o(x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2\ln\dfrac{a}{b}}{x^2\ln^2\dfrac{a}{b}}=\left(\ln\frac{a}{b}\right)^{-1}.$$

212　$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$.

利用例 193 的渐近等式得出

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\frac{3}{x}\right) &= \lim_{x\to+\infty}(x\ln 2+\ln(1+2^{-x}))\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}(x\ln 2+2^{-x}+o(2^{-x}))\left(\frac{3}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\ &= 3\ln 2=\ln 8.\end{aligned}$$

213　证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^k}{a^x}=0,\ a>1,\ k>0.$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$, $a>1$(见例 70),那么同时有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k}{a^n}=0.$$

因此,对于给定的 $\varepsilon>0$ 可以找到这样的自然数 N,当 $n>N$ 时,有

$$\frac{(n+1)^k}{a^n}<\varepsilon.$$

令 $x>N+1$,设 $n=[x]$(x 的整数部分).只要 $n>N$ 且 $n\leq x<n+1$,就有

$$0<\frac{x^k}{a^x}<\frac{(n+1)^k}{a^n}<\varepsilon.$$

这就恰好证明了我们的结论.

214　证明

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\varepsilon}=0,\ a>1,\ \varepsilon>0.$$

设 $x^\varepsilon=t$.则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x^\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon}\lim_{t\to+\infty}\frac{\log_a t}{t}.$$

由于等式(见例 74)$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n}=0$,则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a(n+1)}{n}=0.$$

令 $\varepsilon>0$ 为任意数.存在这样的自然数 N,当 $n>N$ 时

$$0<\frac{\log_a(n+1)}{n}<\varepsilon.$$

对于 $t>N+1$ 设 $n=[t]$,只要 $n>N$ 且 $n\leq t<n+1$,就有

$$0<\frac{\log_a t}{t}<\frac{\log_a(n+1)}{n}<\varepsilon,$$

即$\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{\log_a t}{t}=0$,这正是$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log_a x}{x^\varepsilon}=0$.

完成下面的例子(当完成例 215,216 时利用公式

$$\operatorname{sh} x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2};\ \operatorname{ch} x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2};\ \operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x},$$

和某些双曲三角函数的公式):

215 1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{sh} x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{ch} x-1}{x^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{th} x}{x}$.

1) 根据例 197,1)得到

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sh} x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x}-e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to0}e^{-x}\cdot\frac{e^{2x}-1}{2x}=1.$$

由此,当 $x\to0$ 时,$\operatorname{sh} x=x+o(x)$.

2) 根据 1)得出

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{ch} x-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\operatorname{sh}^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

于是当 $x\to0$ 时,$\operatorname{ch} x=1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)$.

3) 利用 1)的结果和结论 Ⅰ)得到

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{th} x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sh} x}{x}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch} x}=1.$$

216 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{sh}^2 x}{\ln(\operatorname{ch}3x)}$.

利用例 215 答案中的结果,得出

$$\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sh}^2 x}{\ln(\operatorname{ch}3x)}=\lim_{x\to0}\frac{(x+o(x))^2}{\ln\left(1+\frac{9}{2}x^2+o(x^2)\right)}=\lim_{x\to0}\frac{(x+o(x))^2}{\frac{9}{2}x^2+o(x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{\frac{9}{2}x^2}=\frac{2}{9}.$$

证明下列等式:

217 $\lim\limits_{x\to x_0}\arctan x=\arctan x_0$.

令 $x_0>0$ 和 $x>0$. 设 $\arctan x-\arctan x_0=t$. 对于任意的 $\varepsilon>0$ 则有

$$|\arctan x-\arctan x_0|=|t|\leq|\tan t|=\left|\frac{x-x_0}{1+xx_0}\right|<|x-x_0|<\varepsilon,$$

只要 $|x-x_0|<\delta(\varepsilon)=\varepsilon$. 于是,对于 $x_0>0$ 结论得以证明. 如果 $x_0<0$,证明可以归结到研究过的情形. 因为 $\arctan(-x)=-\arctan x$. 当 $x_0=0$ 时,所需结论的正确性可以从显然的不等式

$$0\leq|\arctan x-\arctan0|=|\arctan x|<|x|$$

得到.

218 $\lim\limits_{x\to x_0}\operatorname{arccot} x=\operatorname{arccot} x_0$.

利用恒等式 $\operatorname{arctan} x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}$ **对于所有的** x **成立,得到**

$$\lim_{x\to x_0}\operatorname{arccot} x=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctan} x\right)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctan} x_0=\operatorname{arccot} x_0 .$$

219 $\lim\limits_{x\to x_0}\arcsin x=\arcsin x_0,\ -1\leq x_0\leq 1$.

注意到如果 $0\leq x<1$,**则** $\arcsin x=\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$,**如果** $0<x\leq 1$,**则** $\arcsin x=\operatorname{arccot}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.**所以对于** $x_0\in(0,1)$**有**

$$\lim_{x\to x_0}\arcsin x=\lim_{x\to x_0}\arctan\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\arctan\frac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2}}=\arcsin x_0 .$$

在点 $x_0=1$ **处有(见例** 218)

$$\lim_{x\to 1-0}\arcsin x=\lim_{x\to 1-0}\operatorname{arccot}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}=\operatorname{arccot}0=\frac{\pi}{2}=\arcsin 1 .$$

$-1\leq x_0<0$ **的情形,归结到已经研究过的情形,因为** $\arcsin(-x)=-\arcsin x$.**既然在点** $x_0=0$ **左右极限值相等,这就完成了证明** .

220 $\lim\limits_{x\to x_0}\arccos x=\arccos x_0,\ -1\leq x_0\leq 1$.

类似于上例的推导并利用恒等式

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2},$$

就得到所需的关系 .

221 1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$; 2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$;

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot} x=0$; 4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot} x=\pi$.

1) **令** $\varepsilon>0$ **为任意的实数** .**由不等式** $x>\tan\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon\right)=E(\varepsilon)$**得出** $\arctan x>\frac{\pi}{2}-\varepsilon$,**即**

$$0<\frac{\pi}{2}-\arctan x<\varepsilon\quad\forall x>E(\varepsilon) .$$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$.

3) **同样利用** $\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}-\arctan x$,**得到**

$$\lim_{x\to+\infty}\operatorname{arccot} x=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=0 .$$

4) **类似地**

$$\lim_{x\to-\infty}\operatorname{arccot}x=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi.$$

求极限:

222 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin ax}{x}$, $a\neq 0$.

因为$\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x=0$ **和**$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{\sin(\arcsin x)}=1$,**所以**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin ax}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin ax}{ax}\cdot a=a.$$

223 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan ax}{x}$, $a\neq 0$.

从$\lim\limits_{x\to 0}\arctan x=0$,**得到**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan ax}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\arctan ax}{\tan(\arctan ax)}\cdot a=a.$$

224 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\arctan(x+h)-\arctan x}{h}$.

既然$\lim\limits_{h\to 0}(\arctan(x+h)-\arctan x)=0$,**那么**

$$\lim_{h\to 0}\frac{\arctan(x+h)-\arctan x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\tan(\arctan(x+h)-\arctan x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(1+x^2+hx)}=\frac{1}{1+x^2}.$$

225 1) $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$; 2) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

1) **如果** $x\to-0$,**那么**$\dfrac{1}{x}\to-\infty$,**而且** $e^{\frac{1}{x}}\to 0$,**所以**$\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}=1$.

2) **如果** $x\to+0$,**那么**$\dfrac{1}{x}\to+\infty$**而且**$\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}\to 0$,**即所求极限等于** 0.

226 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

把序列 $y_n=\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$**写成** $y_n=\sin(\pi(\sqrt{n^2+1}-n+n))$,**得到**

$$\lim_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\lim_{n\to\infty}\sin((\pi\sqrt{n^2+1}-\pi n)+\pi n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin(\pi(\sqrt{n^2+1}-n))$$

$$=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}=0.$$

227 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

类似于例 226,**则有**

$$\lim_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})=\lim_{n\to\infty}\sin^2((\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi)+n\pi)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sin^2(\pi(\sqrt{n^2+n}-n))=\lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=1.$$

228　如果$\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A$和$\lim\limits_{x\to A}\psi(x)=B$,由此是否能够得出$\lim\limits_{x\to a}\psi(\varphi(x))=B$?

研究例子:当 $x=\frac{p}{q}$时,其中 p 和 q 为两个互素数,$\varphi(x)=\frac{1}{q}$;当 x 是无理数时,$\varphi(x)=0$;当 $x\neq0$ 时,$\psi(x)=1$;而当 $x=0$ 时,$\psi(x)=0$;并设 $x\to0$.

由例中的条件得到,对于任意的 $\varepsilon>0$,存在这样的 $\sigma=\sigma(\varepsilon)>0$,当

$$0<|u-A|<\sigma \tag{1}$$

时有

$$|\psi(u)-B|<\varepsilon, \tag{2}$$

即对于 A 点 σ 邻域中的所有 u,除去 A 点本身,不等式(2)成立.

其次,根据问题的条件,对于任意的 $\sigma>0$ 也包括不等式(1)中的 σ,存在这样的 $\delta(\sigma(\varepsilon))=\delta(\varepsilon)>0$,对所有满足条件

$$0<|x-a|<\delta(\varepsilon) \tag{3}$$

的所有 x,函数 $u=\varphi(x)$满足不等式

$$|\varphi(x)-A|<\sigma, \tag{4}$$

并且不排除 $\varphi(x)=A$ 的情形.

但当 $u=\varphi(x)=A$ 时,函数 $\psi(u)=\psi(\varphi(x))$可能根本没有定义,即使有定义,但它的值 $\psi(A)\neq\lim\limits_{u\to A}\psi(u)$.而这两种情况下不等式(3)不能保证不等式 2)成立.为了从条件$\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=A$,$\lim\limits_{x\to A}\psi(x)=B$得出等式$\lim\limits_{x\to a}\psi(\varphi(x))=B$只要当 $x\neq a$,$\varphi(x)\neq A$就足够了,在上面的例子中这个条件不满足.

229　令对所有的 $x\in(x_0,x_0+1)$,其中 x_0 是固定的且满足:

1) $P_{nk}(x)\geq0$, $k=1,\cdots,n$;　　2) $\sum\limits_{k=1}^{n}P_{nk}(x)\equiv1$;

3) 对每个固定的 k 有$\lim\limits_{n\to\infty}P_{nk}(x)=0$;　　4) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x)=l$.

证明$\lim\limits_{n\to\infty}t_n=l$,其中 $t_n=\sum\limits_{k=1}^{n}P_{nk}(x)u_k(x)$.

令 $\varepsilon>0$ 是任意的实数.由条件 4)得出存在这样的数 $N=N(\varepsilon,x)>0$,对于所有 $n>N$ 有$|u_n(x)-l|<\frac{\varepsilon}{2}$.根据同样理由得到存在 $M>0$,使得

$$|u_n(x)|\leq M,\quad |u_n(x)-l|\leq 2M\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

由条件 3)得到存在 $n_0=n_0(\varepsilon,x)>N$,使得

$$P_{nk}(x) < \frac{\varepsilon}{4MN}, \quad k = 1, \cdots, N, \ " n > n_0 .$$

由这些不等式和条件 1),2)**得到不等式**

$$|t_n - l| = \left|\sum_{k=1}^{n} P_{nk}(x)u_k(x) - l\sum_{k=1}^{n} P_{nk}(x)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} P_{nk}(x)\,|u_k(x) - l|$$

$$= P_{n1}(x)\,|u_1(x) - l| + P_{n2}(x)\,|u_2(x) - l| + \cdots + P_{nN}(x)\,|u_N(x) - l| +$$

$$P_{n(N+1)}\,|u_{n+1}(x) - l| + \cdots + P_{nn}(x)\,|u_n(x) - l| < \frac{\varepsilon}{4NM}N2M +$$

$$\frac{\varepsilon}{2}(P_{n(N+1)}(x) + \cdots + P_{nn}(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad " n > n_0 .$$

因此 $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = l$.

230 证明柯西定理: **如果函数** $f: (a, +\infty)\to \mathrm{R}$ **在每个有限区间** (a, b) **上有界,则**

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x+1) - f(x))$;

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x))^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x+1)}{f(x)}$, $f(x)\geq c > 0$;

假设等式前部分极限都存在.

3) **证明**: **如果** $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x+1) - f(x)) = +\infty$ **且** f **在每个有限区间** (a, b) **上有下界,则**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty .$$

1) **证明要用到例** 229,**这时设**

$$P_{n1}(x) = \frac{x+1}{x+n}, \quad P_{nk}(x) = \frac{1}{x+n}, \ k = 2, \cdots, n, \ 0 < x_0 < x \leq x_0 + 1, \ x_0 > a,$$

$$u_1(x) = \frac{f(x+1)}{x+1}, \ u_n(x) = f(x+n) - f(x+n-1), \ n = 2, 3, \cdots .$$

那么 $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} P_{nk}(x)u_k(x) = \dfrac{f(x+n)}{x+n}$. **定理的条件都得以满足,所以**

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x+n)}{x+n} = \lim_{n\to\infty}(f(x+n) - f(x+n-1)) = l .$$

因为 l **不依赖于** x,**由最后一个等式得出**

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} (f(x+1) - f(x)) = l .$$

2) **由于** $f(x)\geq c > 0$,**则** $F(x) = \ln f(x)$ **有定义**. **令** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x+1)}{f(x)} = l$. **利用定理中的** 1) **和极限过程有指定的阶,就得到所需的**

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x))^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \exp \frac{\ln f(x)}{x} = \exp \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln f(x)}{x}$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to+\infty}(\ln f(x+1) - \ln f(x))\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)}{f(x)} = l.$$

3) **对于任意的** $E>0$ **存在这样的数** $x_0>0$, **使得当** $x>x_0$ **时**

$$f(x+1) - f(x) > 2E.$$

由此得出 $f(x+n) - f(x) > 2nE$ **和**

$$\frac{f(x+n)}{x+n} > \frac{f(x)+2nE}{x+n}.$$

因为当 $x_0 < x < x_0+1$ **时** $f(x)\geq c>0$, **则存在这样的数** n_0, **使得对于** $\forall\, n>n_0$

$$\frac{f(x+n)}{x+n} > E,$$

即如果 $t=x+n$, $x_0 < x \leq x_0+1$, $n>n_0$, **则**

$$\frac{f(t)}{t} > E,$$

这等价于所求的结论.

231　求极限:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$;　　2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

1) **利用例** 230, 2), **得到**

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\ln x}\right) = 1.$$

2) **类似于** 1) **有**

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x}} = 1.$$

232　证明: **如果** 1) **函数** f **在** $x>a$ **上有定义**; 2) **在每个** $a<x<b$ **上有界**; 3) **存在有限或无穷的极限**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x+1)-f(x)}{x^m} = l$$

则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^{m+1}} = \frac{l}{m+1}.$$

令 l **是有限的**. **则由条件得出**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+n)-f(x+n-1)}{(x+n)^{m+1}-(x+n-1)^{m+1}} = \frac{l}{m+1}.$$

利用例 229, **设**

$$P_{n1}(x)=\frac{(x+1)^{m+1}}{(x+n)^{m+1}},\quad P_{nk}(x)=\frac{(x+k)^{m+1}-(x+k-1)^{m+1}}{(x+n)^{m+1}},$$

$$k=2,\cdots,n,\ 0<x_0<x\leq x_0+1,\ x_0>a,$$

$$u_1(x)=\frac{f(x+1)}{(x+1)^{m+1}},\ u_n(x)=\frac{f(x+n)-f(x+n-1)}{(x+n)^{m+1}-(x+n-1)^{m+1}},\ n=2,3,\cdots,$$

得到 $t_n=\dfrac{f(x+n)}{(x+n)^{m+1}}$. 例 229 的全部条件满足,所以

$$\lim_{n\to\infty}t_n=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x+n)}{(x+n)^{m+1}}=\lim_{n\to\infty}u_n(x)=\frac{l}{m+1},$$

因为极限$\dfrac{l}{m+1}$不依赖于 x,则最后一个等式等价于

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{f(t)}{t^{m+1}}=\frac{l}{m+1}.$$

令 $l=+\infty$. 由条件 3)得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(x+n)^{m+1}-(x+n-1)^{m+1}}{f(x+n)-f(x+n-1)}=0,$$

因为序列

$$((x+n)^{m+1}-(x+n-1)^{m+1})_{n=1}^{\infty},$$

单调增加趋于 $+\infty$,下面的序列有同样性质

$$(f(x+n)-f(x+n-1))_{n=1}^{\infty}.$$

设

$$P_{n1}(x)=\frac{f(x+1)}{f(x+n)},\quad P_{nk}(x)=\frac{f(x+k)-f(x+k-1)}{f(x+n)},$$

$$k=2,\cdots,n,\ 0<x_0<x\leq x_0+1,\ x_0>a,$$

$$u_1(x)=\frac{(x+1)^{m+1}}{f(x+1)},\ u_n(x)=\frac{(x+n)^{m+1}-(x+n-1)^{m+1}}{f(x+n)-f(x+n-1)},\ n=2,3,\cdots,$$

并利用例 229 得到,当 $n\to\infty$时

$$t_n=\sum_{k=1}^{n}P_{nk}(x)u_k(x)=\frac{(x+n)^{m+1}}{f(x+n)}\to 0,$$

于是得到所要的结论.

233 证明$\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(2\pi e n!)=2\pi$.

由(见例 80) $e=1+1+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}+\dfrac{\theta_n}{n\cdot n!}$, $0<\theta_n<1$,

并且当 $n\to\infty$时,

$$\theta_n=\frac{e-y_n}{\dfrac{1}{n\cdot n!}}=n\cdot n!(e-y_n)$$

$$= n\cdot n!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)(n+1)!}-y_n\right)$$

$$= n\cdot n!\left(\frac{1}{(n+1)!}+\frac{\theta_{n+1}}{(n+1)(n+1)!}\right)=\frac{n}{n+1}+\frac{n\theta_{n+1}}{(n+1)^2}\to 1 .$$

利用这一事实,得到

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!)=\lim_{n\to\infty} n\sin\left(2\pi n!y_n+\frac{2\pi\theta_n}{n}\right)=\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{2\pi\theta_n}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{2\pi\theta_n}{n}}{\frac{2\pi\theta_n}{n}}\cdot 2\pi\theta_n = 2\pi .$$

给出下列函数图形:

234　$y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n},\ x>0$.

如果 $0<x\leq 1$,则 $1<\sqrt[n]{1+x^n}\leq\sqrt[n]{2}$,又因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}=1$,那么$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}=1$. 如果 $1<x<+\infty$,则 $\sqrt[n]{1+x^n}=x\sqrt[n]{\frac{1}{x^n}+1}$,而当 $n\to\infty$时, $\sqrt[n]{\frac{1}{x^n}+1}\to 1$,所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}=x .$$

因此 $y=\begin{cases}1, & \text{如果 } 0<x\leq 1,\\ x, & \text{如果 } 1<x<+\infty .\end{cases}$

给读者勾画了一幅图形 .

235　$y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n},\ x\geq 0$.

如果 $0\leq x\leq 1$

$$1\leq\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}<\sqrt[n]{3},$$

如果 $1<x<2$,

$$x<\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=x\sqrt[n]{\left(\frac{1}{x}\right)^n+\left(\frac{x}{2}\right)^n+1}<x\sqrt[n]{3},$$

如果 $2\leq x<+\infty$,

$$\frac{x^2}{2}<\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}=\frac{x^2}{2}\sqrt[n]{\left(\frac{2}{x^2}\right)^n+\left(\frac{2}{x}\right)^n+1}<\frac{x^2}{2}\sqrt[n]{3},$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3}=1$,则显然有

$$y=\begin{cases}1, & \text{如果 } 0\leq x\leq 1,\\ x, & \text{如果 } 1<x<2,\\ \dfrac{x^2}{2}, & \text{如果 } 2\leq x<+\infty .\end{cases}$$

给读者勾画了一幅图形.

236 构造曲线

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x|^n+|y|^n}=1.$$

由于如果$|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 1$, $|x|+|y|\neq 0$, 则 $0<\dfrac{|x|^n+|y|^n}{\max(|x|^n,|y|^n)}\leqslant 2$,则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|^n+|y|^n}{\max(|x|^n,|y|^n)}}=1$$

(见例 73),所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x|^n+|y|^n}=\lim_{n\to\infty}\max(|x|,|y|)\sqrt[n]{\frac{|x|^n+|y|^n}{\max(|x|^n,|y|^n)}}=\max(|x|,|y|),$$

即 $\max(|x|,|y|)=1$ 并且图形是以$(\pm 1,\pm 1)$为顶点的正方形边缘. 这是因为点 $A(\pm 1,|y|)$, $|y|\leqslant 1$, $B(|x|,\pm 1)$, $|x|<1$, 属于图形本身.

求下列极限:

237 $\lim\limits_{n\to\infty}((1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n}))$,如果$|x|<1$.

用 $1-x$ 乘和除极限号下的表达式,得出

$$\lim_{n\to\infty}((1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n}))$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{(n+1)}}}{1-x}=\frac{1}{1-x}.$$

238 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$, $x\neq 0$.

用 $2^n\sin\dfrac{x}{2^n}$乘和除极限号下的函数,得到

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^{n-1}}\cdot 2^{n-1}\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}.$$

239 令$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1$,其中 $\psi(x)>0$ 且当 $n\to\infty$时,$\alpha_{mn}\rightrightarrows 0$, $m\in\mathrm{N}$,即当 $m\in\mathrm{N}$ 和 $n>N(\varepsilon)$时$|\alpha_{mn}|<\varepsilon$.

证明

$$\lim_{n\to\infty}(\varphi(\alpha_{1n})+\varphi(\alpha_{2n})+\cdots+\varphi(\alpha_{nn}))=\lim_{n\to\infty}(\psi(\alpha_{1n})+\psi(\alpha_{2n})+\cdots+\psi(\alpha_{nn})),\qquad(1)$$

假设等式(1)中第一个极限存在.

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1$ 和 $\alpha_{mn}\rightrightarrows 0$, 对于 $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\, N=N(\varepsilon)$, 于是 $\forall\, n>N$

$$1-\varepsilon<\frac{\varphi(\alpha_{mn})}{\psi(\alpha_{mn})}<1+\varepsilon,\ m=1,\cdots,n,$$

又由于条件 $\varphi(x)>0$, 则有

$$1-\varepsilon<\frac{\varphi(\alpha_{1n})+\varphi(\alpha_{2n})+\cdots+\varphi(\alpha_{nn})}{\psi(\alpha_{1n})+\psi(\alpha_{2n})+\cdots+\psi(\alpha_{nn})}<1+\varepsilon.$$

从这个不等式出发, 又知道等式(1)的第一部分极限存在, 就可做出如下结论: 后面的极限存在并等于前面的极限.

利用前例中的等式(1)求下列极限:

240 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\dfrac{k}{n^2}}-1\right)$.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{k}{n^2}}-1}{\dfrac{k}{3n^2}}=1$(见例 158), 而且当 $n\to\infty$ 时, $\dfrac{k}{n^2}\rightrightarrows 0$, 那么

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{3n^2}=\frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{n^2}=\frac{1}{6}.$$

241 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{ka}{n^2}$.

这里 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{ka}{n^2}}{\dfrac{ka}{n^2}}=1$ 且当 $n\to\infty$ 时, $\dfrac{ka}{n^2}\rightrightarrows 0$, 所以有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{ka}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{ka}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{an(n+1)}{2n^2}=\frac{a}{2}.$$

242 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(a^{\frac{k}{n^2}}-1\right),\ a>1$.

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^{\frac{k}{n^2}}-1}{\dfrac{k}{n^2}\ln a}=1$(见例 197, 1)) 且当 $n\to\infty$ 时, $\dfrac{k}{n^2}\rightrightarrows 0$. 因此

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(a^{\frac{k}{n^2}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k\ln a}{n^2}=\ln a\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}\ln a.$$

243 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)$.

由于

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\right),$$

而且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{k}{n^2}\right)}{\dfrac{k}{n^2}}=1$ 并有当 $n\to\infty$时,$\dfrac{k}{n^2}\rightrightarrows 0$,那么

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}\right)=e^{\frac{1}{2}}.$$

244 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\dfrac{ka}{n\sqrt{n}}$.

容易知道

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\cos\dfrac{ka}{n\sqrt{n}}}{-\dfrac{k^2a^2}{2n^3}}=1 \text{ 且当 } n\to\infty \text{ 时},\ \frac{k^2a^2}{2n^3}\rightrightarrows 0$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}=\exp\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}\right)$$

$$=\exp\left(-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2a^2}{2n^3}\right)$$

$$=\exp\left(-\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)a^2}{2\cdot 6\cdot n^3}\right)=e^{-\frac{a^2}{6}}.$$

在例 245 和例 246 中,根据结论 I) 在幂指数下取极限 .

245 序列(x_n). 由等式 $x_1=\sqrt{a}$, $x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}}$, $x_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}}$, …确定,其中$a>0$. 求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

代替 $x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$, $n=2,3,\cdots$. 应用数学归纳法得出序列 $x_n=\sqrt{a+x_{n-1}}$单调增加而且有上界,例如 $A>\dfrac{1}{2}+\sqrt{\dfrac{1}{4}+a}$. 因此得到

$$\lim_{n\to\infty}x_n=l\geq 0,$$

并有 $l=\sqrt{a+l}$,由此得出

$$l=\frac{\sqrt{4a+1}+1}{2}.$$

246 如果 $\omega_h[f]$是函数 f 在闭区间$|x-\xi|\leq h$ 上的振幅, $h>0$,则数

$$\omega[f]=\lim_{h\to 0}\omega_h[f]$$

被称为函数 f 在点 ξ 的振幅 .

确定函数 f 在点 $x=0$ 的振幅,如果:

1) $f(x) = \sin\frac{1}{x}$;　　2) $f(x) = \frac{1}{x^2}\cos^2\frac{1}{x}$;

3) $f(x) = x\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right)$;　　4) $f(x) = \frac{1}{\pi}\arctan\frac{1}{x}$.

根据在一点处函数振幅的定义,得到:

1) $\omega_h[f] = \sup\limits_{|x|\leq h}\left(\sin\frac{1}{x}\right) - \inf\limits_{|x|\leq h}\left(\sin\frac{1}{x}\right) = 1 - (-1) = 2$,

$$\omega[f] = \lim_{h\to 0}\omega_h[f] = \lim_{h\to 0}2 = 2;$$

2) $\omega_h[f] = \sup\limits_{|x|\leq h}\left(\frac{1}{x^2}\cos^2\frac{1}{x}\right) - \inf\limits_{|x|\leq h}\left(\frac{1}{x^2}\cos^2\frac{1}{x}\right) \geq \sup\limits_{\frac{1}{|k|\pi}\leq|x|\leq h}\left(\frac{1}{x^2}\cos^2\frac{1}{x}\right) = k^2\pi^2$,**其中** k **是满足**$|k|\pi\geq\frac{1}{h}$**的整数**.**所以**

$$\omega_h[f] = +\infty,\quad \omega[f] = +\infty;$$

3) $0\leq\omega_h[f] = \sup\limits_{|x|\leq h}\left(x\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right)\right) - \inf\limits_{|x|\leq h}\left(x\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right)\right) \leq 3h - (-3h) = 6h$,

$$\omega_h[f] = 0,\quad \omega[f] = 0;$$

4) $\omega_h[f] = \sup\limits_{|x|\leq h}\left(\frac{1}{\pi}\arctan\frac{1}{x}\right) - \inf\limits_{|x|\leq h}\left(\frac{1}{\pi}\arctan\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$;

$$\omega[f] = \lim_{h\to 0}\omega_h[f] = \lim_{h\to 0}1 = 1.$$

247　**确定** $l = \varliminf\limits_{x\to 0}f(x)$ **和** $L = \varlimsup\limits_{x\to 0}f(x)$,**如果**

$$f(x) = \sin^2\frac{1}{x} + \frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{x}.$$

由于当 $x = x_n = -\frac{1}{n\pi}$, $n\in\mathrm{N}$ **时**, $\inf\left(\sin^2\frac{1}{x}\right) = 0$,**又有**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{x_n} = \inf\left(\frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{x}\right) = -1,$$

则

$$l = \varliminf_{x\to 0}\left(\sin^2\frac{1}{x} + \frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{x}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\sin^2 n\pi + \frac{2}{\pi}\arctan(-n\pi)\right) = -1.$$

类似地,由于当 $x = x_n = \frac{2}{\pi(1 + 2n)}$, $n\in\mathrm{N}$, $\sup\left(\sin^2\frac{1}{x}\right) = 1$ **且** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{x_n} = \sup\left(\frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{x}\right) = 1$,**则**

$$L = \varlimsup_{x\to 0}\left(\sin^2\frac{1}{x} + \frac{2}{\pi}\arctan\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\sin^2\frac{\pi(1+2n)}{2}+\frac{2}{\pi}\arctan\frac{\pi(1+2n)}{2}\right)=1 .$$

248 **令函数** $z\mapsto e^z$,**其中** $z=x+\mathrm{i}y$,**利用下面等式**

$$e^z=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n . \tag{1}$$

证明

$$e^{x+\mathrm{i}y}=e^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y) . \tag{2}$$

由此得到欧拉(Euler)**公式**

$$\cos y=\frac{e^{\mathrm{i}y}+e^{-\mathrm{i}y}}{2},\quad \sin y=\frac{e^{\mathrm{i}y}-e^{-\mathrm{i}y}}{2\mathrm{i}} .$$

把序列 $n\mapsto\left(1+\frac{x+\mathrm{i}y}{n}\right)^n$ **写成三角公式**

$$n\mapsto\left(\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac12}(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)\right)^n,$$

其中 $\varphi=\arctan\frac{y}{n+x}$,**然后利用棣莫弗公式最终把序列写成**

$$n\mapsto\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac n2}(\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi) .$$

由于当 $n\to\infty$**时**, $\left(1+\frac{2x}{n}+o\left(\frac1n\right)\right)^{\frac{1}{2x/n+o(1/n)}}\to e$, $\frac n2\left(\frac{2x}{n}+o\left(\frac1n\right)\right)\to x$,**则当** $n\to\infty$**时**

$$\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac n2}=\left(\left(1+\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{2x/n+o(1/n)}}\right)^{\frac n2\left(\frac{2x}{n}+o\left(\frac1n\right)\right)}\to e^x .$$

其次根据例 223,**得当** $n\to\infty$**时**

$$n\varphi=n\arctan\frac{y}{n+x}=n\left(\frac{y}{n+x}+o\left(\frac1n\right)\right)=y+o(1) .$$

因为(**见例** 175,1),2))**当** $n\to\infty$**时**,$\cos n\varphi\to\cos y$, $\sin n\varphi\to\sin y$,**所以当** $n\to\infty$**时**

$$\left(1+\frac{x+\mathrm{i}y}{n}\right)^n - e^x(\cos y+\mathrm{i}\sin y) .$$

这就证明了等式(2) .

在等式(2)**中取** $x=0$ **得到**

$$e^{\mathrm{i}y}=\cos y+\mathrm{i}\sin y . \tag{3}$$

在最后一个等式中用 $-y$ **代替** y,**就有**

$$e^{-\mathrm{i}y}=\cos y-\mathrm{i}\sin y . \tag{4}$$

由等式(3)**和**(4)**得到**

$$\cos y=\frac{e^{\mathrm{i}y}+e^{-\mathrm{i}y}}{2},\quad \sin y=\frac{e^{\mathrm{i}y}-e^{-\mathrm{i}y}}{2\mathrm{i}} .$$

练 习 题

求函数 $f:E\to F$ **的上、下确界** . **指出点** $x, y\in E$(**如果存在的话**)**使得** $f(x)=\sup\limits_E\{f(x)\}$, $f(y)=$

$\inf\limits_{E}\{f(x)\}$.

91　$f(x)=\dfrac{1}{x-2}, |x|\le 1$.　　**92**　$f(x)=\dfrac{1}{x}, x\in(-1,1)\setminus\{0\}$.

93　$f(x)=x^2, 1<x<2$.　　**94**　$f(x)=x^2, -1\le x\le 2$.

95　$f(x)=\begin{cases} x^3, 0\le x<1, \\ -(x-1)^2, 1\le x<2. \end{cases}$　　**96**　$f(x)=\arcsin(\sin x), x\in\mathbf{R}$.

97　$f(x)=\arccos(\cos x), x\in\mathbf{R}$.　　**98**　$f(x)=\arctan\dfrac{1}{x}, x\ne 0, f(0)=0$.

99　**求函数** $f(x)=\dfrac{1}{x}, x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$, **在下面区间上的振幅**:

1) $(10^{-7},10^{-6})$;　2) $(10^{-n-1},10^{-n})$;　3) $(10^{-n},10^{n})$;

4) $(10^{6}, 10^{7})$;　5) $(10^{n}, 10^{n+1})$.

100　**确定函数** $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ **在下列区间上的振幅**:

1) $\left(\dfrac{1}{40\pi},\dfrac{1}{20\pi}\right)$;　2) $\left(\dfrac{1}{40\pi},\dfrac{1}{39\pi}\right)$;　3) $\left(\dfrac{2}{2n\pi+\pi},\dfrac{1}{n\pi}\right)$;　4) $\left(\dfrac{4}{4n\pi+\pi},\dfrac{1}{n\pi}\right)$.

证明:

101　$(1+x)^n=1+nx+\dfrac{n(n-1)}{2}x^2+o(x^2)$, 若 $x\to 0$.　**102**　$x+\cos x=O(1)$, 若 $x\to 0$.

103　$\mathrm{e}^{-1}(1+x^{-1})^x=1-\dfrac{1}{2}x^{-1}+O(x^{-2}), x\ge 2$.

104　$(1+x+O(x^{-1}))^x=\mathrm{e}x^x+O(x^{x-1}), x\to\infty$.　　**105**　$(x\mathrm{e}^{2x-n})^n=O(\mathrm{e}^{x^2+x}), x>0$.

106　1) $\mathrm{e}^{o(x)}=1+o(x), x\to 0$;　2) $o(f(x)\cdot g(x))=o(f(x))\cdot O(g(x)), x\to x_0$.

107　$\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{x_0}+\dfrac{1}{n}\sqrt[n]{x_0^{1-n}}(x-x_0)+o(x-x_0), x\to x_0$.

求极限:

108　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x}+\sqrt[5]{1+5x}-2}{\sqrt[6]{1+6x}-1}$.　　**109**　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}+\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[5]{1+x}-\sqrt[7]{1+x}}{\sqrt[4]{1+2x}+x-\sqrt[6]{1+x}}$.

110　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{a^2+ax+x^2}-\sqrt[3]{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}$.　　**111**　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax-x}{\arcsin x+x}$.

112　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{\cos\alpha x}-\sqrt[m]{\cos\beta x}}{\sin^2 x}$.　　**113**　$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_m^x}{m}\right)^{\frac{1}{x}}, a_i>0$.

114　$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[m]{1+\dfrac{k^2}{n^4}}-1\right)$.　　**115**　$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[m]{1+\dfrac{k^p}{n^{p+1}}}-1\right), p\in\mathbf{N}$.

116　$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\sin\dfrac{k^p x}{n^{p+1}}, p\in\mathbf{N}$.　　**117**　$\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\dfrac{k^p}{n^{p+1}}\right), p\in\mathbf{N}$.

118　**证明不等式**

$$\frac{1}{\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\lambda_k}{x_k}}\le\prod_{k=1}^{n}x_k^{\lambda_k}\le\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k,$$

其中 $x_k>0, 0\le\lambda_k\le 1(k=1,\cdots,n), \sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$.

119 令 1) $0\le\lambda_{kn}\le 1$; 2) $\sum_{k=1}^{n}\lambda_{kn}=1$; 3) $\lim_{n\to\infty}\lambda_{kn}=0$ 对于任一固定的 k 成立;4) $x_n>0,n\in\mathrm{N}$; 5) $\lim_{n\to\infty}x_n=l$.则 $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}x_k^{\lambda_{kn}}=l$.

求极限:

120 $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{(1-\sin x)(\cos^2 x+1)-\frac{1}{2}\sin 2x}{\cos^2 x}$.

121 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\mathrm{e}^{x^2}}{x^2}$. **122** $\lim_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}\cos x-1}{x^2}$. **123** $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

124 $\lim_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{x}$. **125** $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1+x^3)}$. **126** $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[2]{1+2x}-1}{x}$.

求 $l=\varliminf_{n\to\infty}f(x)$ 和 $L=\varlimsup_{n\to\infty}f(x)$,如果:

127 $f(x)=\sin x+\cos(x\sqrt{2})$. **128** $f(x)=\sin^2(x\sqrt{2})+b^2\cos^2(x\sqrt{2})$.

129 $f(x)=\sin^2(x\sqrt{2})-(1+\sin^2 x)^2$. **130** $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\sin^2 x$.

131 $f(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}+\sin^2 x$. **132** $f(x)=\dfrac{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}{2+\sin^2 x}$.

8 函数的连续性

8.1 函数连续性的定义

定义 1 函数 $f:X\to\mathrm{R}$, $X\subset\mathrm{R}$,如果满足下面等价的条件之一就称其在 $x_0\in X$ 处连续:

1) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:(\forall x\in X)(|x-x_0|<\delta)\Rightarrow$

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon;\tag{1}$$

2) 对于任何一个取值 $x_n\in X$ 的序列(x_n),当 $n\to\infty$ 时它收敛于 x_0,相应的函数值序列$(f(x_n))$收敛到 $f(x_0)$;

3) 当 $x-x_0\to 0$ 时,$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 或者 $f(x)-f(x_0)\to 0$;

4) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ 使得

$$f((x_0-\delta,x_0+\delta))\subset(f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon)$$

或者同样地

$$f:(x_0-\delta,x_0+\delta)\to(f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon).$$

由函数在点 x_0 的连续性可以得出

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(\lim_{x\to x_0}x).$$

定义 2 如果函数 f 在区间(a,b)内的每个点连续,则称函数 f 在该区间上连续.

定义 3 如果函数 $f:(a,x_0]\to\mathbb{R}$ ($f:[x_0,b)\to\mathbb{R}$)满足下列等价条件之一,则称其在 x_0 点左(右)连续:

1) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ 使得仅当 $x_0-\delta<x\leq x_0$ ($x_0\leq x<x_0+\delta$)时满足连续性定义中的(1);

2) 对于任意取值 $x_n\in(a,x_0]$ ($x_n\in[x_0,b)$)的序列 (x_n),当 $n\to\infty$ 时它收敛到 x_0,相应的函数值序列 $(f(x_n))$ 收敛到 $f(x_0)$.

3) $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)=f(x_0)$ ($\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0)$),或者简言之,如果有

$f(x_0-0)=f(x_0)$ ($f(x_0+0)=f(x_0)$);

4) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ 使得

$$f((x_0-\delta,x_0])\subset(f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon)\ (f([x_0,x_0+\delta))\subset(f(x_0)-\varepsilon,f(x_0)+\varepsilon)).$$

当且仅当函数 $f:X\to\mathbb{R}$ 在 X 的内点 x_0 左、右连续时,它在该点连续.

定理 1 如果函数 $g:T\to X$, $T\subset\mathbb{R}$, $X\subset\mathbb{R}$. 在点 $t_0\in T$ 连续,函数 $f:X\to\mathbb{R}$ 在点 $x_0\in X$ 连续,并且 $x_0=g(t_0)$,那么复合函数 $f\circ g:T\to\mathbb{R}$ 在点 t_0 连续.

定理 2 假设函数 $f:X\to\mathbb{R}$ 和 $g:X\to\mathbb{R}$, $X\subset\mathbb{R}$,在点 $x_0\in X$ 连续,则函数

$$f\pm g,\quad fg \text{ 和 } \frac{f}{g}\quad (g(x_0)\neq 0)$$

在点 x_0 连续.

所有的初等函数在其定义区间上连续.

8.2 向量函数和函数矩阵的连续性

定义 函数 $x\mapsto\boldsymbol{f}(x)$, $\boldsymbol{f}(x)=(f_1(x),\cdots,f_n(x))$, $x\in X$,是向量函数. 如果

$$\lim_{x\to x_0}\boldsymbol{f}(x)=\boldsymbol{f}(x_0),$$

则称 $\boldsymbol{f}(x)$在 $x_0\in X$ 连续.

$x\mapsto\boldsymbol{A}(x)$这里 $\boldsymbol{A}(x)=(a_{ij}(x))$ ($i=1,\cdots,m$, $j=1,\cdots,n$)是函数矩阵. 如果

$$\lim_{x\to x_0}\boldsymbol{A}(x)=\boldsymbol{A}(x_0),$$

则称它在点 $x_0\in X$ 连续.

当且仅当每一个函数 $x\mapsto f_i(x)$在点 $x_0\in X$ 连续时,向量函数 $\boldsymbol{f}$ 在该点连续.

当且仅当矩阵的所有元素 $x\mapsto a_{ij}(x)$ ($i=1,\cdots,m$, $j=1,\cdots,n$)在 $x_0\in X$ 连续时,函数矩阵 $x\mapsto\boldsymbol{A}(x)=(a_{ij}(x))$ 在该点连续.

8.3 函数的间断点及其分类,函数的奇点

定义 如果函数 $f:X\to\mathbb{R}$ 在点 $x_0\in X$ 不连续,就说它在该点产生了间断,同时称这样的点 x_0 为函数的间断点.

函数的间断点按下述方法分类:

1 . 令 $x_0 \in X$ 是函数 f 的间断点，并且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，它可以是有限的或无限的 . 同时：

1) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0)$ 有限，则称 x_0 为函数 f 的可去间断点 .

2) 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$，则称 x_0 为 f 的极型间断点 .

2 . 如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在，则称 $x_0 \in X$ 为 f 的本质间断点 . 同时：

1) 如果存在有限的极限 $f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$ $(f(x_0-0)\neq f(x_0+0))$，则称 x_0 为函数 f 的第一类间断点 .

2) 所有其余的本质间断点都称为第二类间断点 .

既然在每一个点 $x_0 \in X$ 函数 $f: X\to \mathbf{R}$ 是连续的，那么它的间断点只可能是 X 的边界点 .

8 .4 连续函数的基本性质

定义 1 如果函数 $f: [a, b]\to \mathbf{R}$ 在开区间 (a, b) 上连续，并且在 a 点右连续，在 b 点左连续，则称它在闭区间 $[a, b]$ 上连续 .

如果函数 $f: [a, b]\to \mathbf{R}$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续，则：1) 它在该闭区间上有界；2) 如果 $m=\inf\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$，$M=\sup\limits_{x\in[a,b]}\{f(x)\}$，则在闭区间上存在点 x_1 和 x_2，使得 $f(x_1)=m$，$f(x_2)=M$ (维尔斯特拉斯 (Weierstrass) 定理)；3) 在每个闭区间 $[\alpha, \beta]$ 上，$[\alpha, \beta]\subset[a, b]$，函数取 $f(\alpha)$ 和 $f(\beta)$ 之间的所有可能的中间值 (柯西 (Cauchy) 定理) . 特别，如果 $f(\alpha) f(\beta)<0$，那就可以找到 $\gamma(\alpha<\gamma<\beta)$，使得 $f(\gamma)=0$.

定义 2 如果函数 $f: (a, b)\to \mathbf{R}$ 除去有限个第一类间断点和有限个可去间断点外，在每个点都连续，则称它在该区间上分段连续 .

249 借助“ $\varepsilon\delta$”论述方法证明下列函数的连续性：

1) $x\mapsto ax+b,\ a\neq 0,\ x\in \mathbf{R}$；
2) $x\mapsto x^2,\quad x\in \mathbf{R}$；
3) $x\mapsto x^3,\quad x\in \mathbf{R}$；
4) $x\mapsto \sqrt{x},\quad x>0$；
5) $x\mapsto \sqrt[3]{x},\quad x\in \mathbf{R}$；
6) $x\mapsto \sin x,\quad x\in \mathbf{R}$；
7) $x\mapsto \cos x,\quad x\in \mathbf{R}$；
8) $x\mapsto \arctan x,\quad x\in \mathbf{R}$.

1) 任意给定 $\varepsilon>0$. 对于任意固定的 $x_0\in \mathbf{R}$，只要 $|x-x_0|<\dfrac{\varepsilon}{|a|}=\delta$，就有 $|ax+b-ax_0-b|=|a||x-x_0|<\varepsilon$.

2) 令 $\varepsilon>0$ 是任意的且 $x_0\in \mathbf{R}$. 只要 $|x-x_0|<\sqrt{|x_0|^2+\varepsilon}-|x_0|=\delta$，就有

$$\begin{aligned}|x^2-x_0^2| &= |(x-x_0)^2+2x_0(x-x_0)| \\ &\leq |x-x_0|^2+2|x_0||x-x_0|<\varepsilon .\end{aligned}$$

3) 对于任意的 $\varepsilon>0$，且满足 $0<\varepsilon<1$. 首先有 $|x^3-x_0^3|=|x^2+xx_0+x_0^2||x-x_0|$.

令$|x-x_0|<1$,这时$|x|<|x_0|+1$,只要

$$|x-x_0|<\frac{\varepsilon}{3|x_0|^2+3|x_0|+1}=\delta,$$

就有$|x^3-x_0^3|<(3|x_0|^2+3|x_0|+1)|x-x_0|<\varepsilon$.

4) 对于任意的$\varepsilon>0$和$x_0>0$.只要$|x-x_0|<\varepsilon\sqrt{x_0}=\delta$,

就有$|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}|=\dfrac{|x-x_0|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}<\dfrac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}}<\varepsilon$.

5) 对于每一个$\varepsilon>0$和$x_0\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$,当$|x-x_0|<\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{x_0^2}\,\varepsilon=\delta$时,就有

$$|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x_0}|=\frac{|x-x_0|}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xx_0}+\sqrt[3]{x_0^2}}=\frac{|x-x_0|}{\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{x_0}\right)^2+\frac{3}{4}\sqrt[3]{x_0^2}}$$

$$\leqslant\frac{|x-x_0|}{\frac{3}{4}\sqrt[3]{x_0^2}}<\varepsilon.$$

当$|x|<\varepsilon^3=\delta$时,$|\sqrt[3]{x}|=\sqrt[3]{|x|}<\varepsilon$.这就得到了函数在$x_0=0$点的连续性.

6) 对于任意的$\varepsilon>0$,当$|x-x_0|<\delta=\varepsilon$时,则有

$$|\sin x-\sin x_0|=\left|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}\right|\leqslant 2\frac{|x-x_0|}{2}$$

$$=|x-x_0|<\varepsilon.$$

7) 和前面一题类似.当$|x-x_0|<\delta=\varepsilon$时,有

$$|\cos x-\cos x_0|=\left|-2\sin\frac{x-x_0}{2}\sin\frac{x+x_0}{2}\right|\leqslant|x-x_0|<\varepsilon.$$

8) 令$|x_0|>0$而且$|h|=|x-x_0|<|x_0|$.如果$\arctan(x_0+h)-\arctan x_0=t$,那么$\tan t=\dfrac{h}{1+x_0^2+x_0h}$,但当$|t|<\dfrac{\pi}{2}$时,$|t|<|\tan t|$.所以,如果$|h|=|x-x_0|<\dfrac{(1+x_0^2)\varepsilon}{1+|x_0|\varepsilon}=\delta$时,有

$$|\arctan(x_0+h)-\arctan x_0|=|t|<|\tan t|=\left|\frac{h}{1+x_0^2+x_0h}\right|$$

$$<\frac{|h|}{1+x_0^2-|h||x_0|}<\varepsilon.$$

函数$x\mapsto\arctan x$在点$x=0$的连续性可由下面的不等式得到:

$$|\arctan x-\arctan 0|=|\arctan x|<|x|.$$

研究下列函数的连续性:

250 $f(x)=(-1)^{\left[\frac{x-\frac{\pi}{4}+\pi}{\pi}\right]}(\cos x+\sin x)+2\sqrt{2}\left[\dfrac{x-\frac{\pi}{4}+\pi}{\pi}\right]$, $x\in\mathbf{R}$.

当 x 属于半开区间 $(n-1)\pi+\frac{\pi}{4},\ n\pi+\frac{\pi}{4}$ 时，$\dfrac{x-\frac{\pi}{4}+\pi}{\pi}=n$．在每个这样的半开区间 $(n-1)\pi+\frac{\pi}{4},\ n\pi+\frac{\pi}{4}$ $(n\in\mathrm{Z})$ 上，函数 f 的简化形式为

$$x\mapsto(-1)^n(\cos x+\sin x)+2\;\;2n \tag{1}$$

显然连续．接下来要论证函数在 $n\pi+\frac{\pi}{4}$，$n\in\mathrm{Z}$ 这些点上的连续性．由(1)得到

$$f\;\;n\pi+\frac{\pi}{4}-0\;\;=\lim_{x\to n\pi+\frac{\pi}{4}-0}\;\;(-1)^n(\cos x+\sin x)+2\;\;2n$$

$$=\;\;2(2n+1),$$

$$f\;\;(n-1)\pi+\frac{\pi}{4}\;\;=(-1)^n\;\;\cos\;\;(n-1)\pi+\frac{\pi}{4}\;\;+$$

$$\sin\;\;(n-1)\pi+\frac{\pi}{4}\;\;+2\;\;2n. \tag{2}$$

进一步，用 $n+1$ 代替(2)中的 n，得到

$$f\;\;n\pi+\frac{\pi}{4}\;\;=(-1)^{n+1}\;\;\cos\;\;n\pi+\frac{\pi}{4}\;\;+\sin\;\;n\pi+\frac{\pi}{4}\;\;+2\;\;2(n+1)$$

$$=\;\;2(2n+1).$$

于是，函数 f 在点 $n\pi+\frac{\pi}{4}$，$n\in\mathrm{Z}$ 的值等于它在该点的左极限值．所以函数 f 在 $n\pi+\frac{\pi}{4}$，$n\in\mathrm{Z}$ 的每个点连续．基于前面断定的它在每个中间点的连续性，于是它在整个数轴上连续．

251 $f(x)=\arctan\dfrac{\tan x}{2}+\pi\;\;\dfrac{2x+\pi}{2\pi}$ ，$x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$，$f\;\;n\pi+\frac{\pi}{2}\;\;=n\pi$，$n\in\mathrm{Z}$，$x\in\mathrm{R}$ ．

如果 $\dfrac{2x+\pi}{2\pi}=n$ 和 $x\neq n\pi+\frac{\pi}{2}$，$n\in\mathrm{Z}$，那么 $x\in\;\;n\pi-\frac{\pi}{2},\ n\pi+\frac{\pi}{2}$ ．在每个区间 $n\pi-\frac{\pi}{2},\ n\pi+\frac{\pi}{2}$ ，$n\in\mathrm{Z}$ 上，f 的简化形式

$$x\mapsto\arctan\frac{\tan x}{2}+n\pi$$

是连续函数．接下来要论证函数在点 $n\pi+\frac{\pi}{2}$，$n\in\mathrm{Z}$ 的连续性．因为有

$$f\;\;n\pi+\frac{\pi}{2}-0\;\;=\lim_{x\to n\pi+\frac{\pi}{2}-0}\;\;\arctan\frac{\tan x}{2}+n\pi\;\;=\;\;n\pi+\frac{\pi}{2},$$

$$f\;\;n\pi+\frac{\pi}{2}+0\;\;=\lim_{x\to n\pi+\frac{\pi}{2}+0}\;\;\arctan\frac{\tan x}{2}+(n+1)\pi\;\;=\;\;n\pi+\frac{\pi}{2}.$$

于是 $f\left(n\pi+\dfrac{\pi}{2}-0\right)=f\left(n\pi+\dfrac{\pi}{2}+0\right)$, $\forall\, n\in \mathrm{Z}$,所以函数 f 在 R 上连续 .

252　$f(x)=[x]([x]-(-1)^{[x]}\cos\pi x)$, $x\in \mathrm{R}$.

当 $n\leq x<n+1$ 时 $[x]=n$. 在半开区间 $[n,n+1)$, $n\in \mathrm{Z}$ 上,函数 f 的简化形式

$$x\mapsto n(n-(-1)^n\cos\pi x)$$

连续 . 函数 $f(n)=n(n-1)$等于左极限值

$$\begin{aligned} f(n-0) &= \lim_{x\to n-0}(n-1)(n-1-(-1)^{n-1}\cos\pi x) \\ &= n(n-1) . \end{aligned}$$

最终得到函数 f 在集合R 上连续 .

253　$f(x)=[x]$, $x\in \mathrm{R}$.

如果 $k\leq x<k+1$, $k\in \mathrm{Z}$,则$[x]=k$,因此 f 连续 . 如果 $x_0=k$,则

$$f(k-0)=\lim_{x\to k-0}[x]=k-1,$$

也就是说函数 f 在 $x_0=k$, $k\in \mathrm{Z}$ 出现了间断 .

确定间断点并研究这些点的性质:

254　$f(x)=\dfrac{x}{(1+x)^2}$, $x\neq -1$, $f(-1)=0$.

已知

$$\lim_{x\to -1-0}f(x)=-\infty,\ \lim_{x\to -1+0}f(x)=-\infty .$$

从而 $x=-1$ 是极型间断点 .

255　$f(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}}$, $x\in \mathrm{R}\setminus\{-1,0,1\}$, $f(-1)=f(0)=f(1)=0$.

函数 f 在 $x\in \mathrm{R}\setminus\{-1,0,1\}$是初等函数,所以连续 . 因为

$$\lim_{x\to -1\pm 0}f(x)=\lim_{x\to -1\pm 0}\frac{x-1}{x+1}=\mp\infty;$$

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x-1}{x+1}=-1;$$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x+1}=0 .$$

所以 $x=-1$ 是极型间断点, $x=0$ 是可去间断点,但在 $x=1$ 函数 f 连续 .

256　$f(x)=\cos^2\dfrac{1}{x}$, $x\neq 0$, $f(0)=1$.

假设 $x_n=\dfrac{1}{n\pi}$, $y_n=\dfrac{2}{(2n+1)\pi}$, $n\in \mathrm{Z}$,那么当 $n\to\infty$时, $x_n\to 0$, $y_n\to 0$,但是,当 $n\to\infty$ 时, $f(x_n)\to 1$,而 $f(y_n)\to 0$. 因此 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在, $x=0$ 为第二类间断点 .

257 $f(x) = \arctan\frac{1}{x}, x\neq 0, f(0) = 0$.

令 $\varepsilon > 0$ 任意给出．存在 $x_0 > 0$ 使得$\frac{1}{x_0} > \tan\ \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ ，从而 $\arctan\frac{1}{x_0} > \frac{\pi}{2} - \varepsilon$．由于反正切函数在 $0 < x < x_0$ 的增加性及 $\arctan\frac{1}{x} > \frac{\pi}{2} - \varepsilon$，也就是$\lim\limits_{x\to+0}\arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$．

同样可以证明$\lim\limits_{x\to-0}\arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$．所以 $x = 0$ 是第一类间断点．

258 $f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}, x\neq 0, x\neq 1, f(0) = f(1) = 0$.

由于

$$\lim_{x\to\pm 0}\frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} = \lim_{x\to\pm 0}\frac{\frac{x}{1-x}}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}\cdot\frac{1-x}{x} = \hat{e}\ \infty,$$

所以 $x = 0$ 是极型间断点．其次

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} = 0,\ \lim_{x\to 1+0}\frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}} = 1,$$

所以 $x = 1$ 是第一类间断点．

259 $f(x) = x[x], x\in\mathrm{R}$.

如果$[x] = n$，那么 $x\in[n, n+1)$，在半开区间上函数 f 的简写形式

$$x\mapsto nx,\ x\in[n, n+1)$$

对于任意 $n\in\mathrm{Z}$ 都连续．而 $f(n) = n^2$，$f(n-0) = \lim\limits_{x\to n-0}(n-1)x = n(n-1)$．所以 $x = n$ 是第一类间断点．

260 $f(x) = [x]\sin\pi x, x\in\mathrm{R}$.

令$[x] = n$，则 $n\leq x < n+1$，函数 f 在$[n, n+1)$上的简化形式

$x\mapsto n\sin\pi x$, $x\in[n, n+1)$, $n\in\mathrm{Z}$ 连续．下面要研究在点 $x = n$, $n\in\mathrm{Z}$ 的连续性．根据

$$f(n) = n\sin n\pi = 0,\ f(n-0) = \lim_{x\to n-0}(n-1)\sin\pi x = (n-1)\sin\pi n = 0,$$

也就是 $f(n) = f(n-0)$，函数 f 在R 上连续．

261 $f(x) = x\ \frac{1}{x}\ , x\neq 0, f(0) = 1$.

函数 f 在每个半开区间$\frac{1}{n+1} < x\leq\frac{1}{n}$, $n\in\mathrm{Z}\setminus\{0\}$上连续．这是因为在这些半开区间上它的简化形式是 $x\mapsto nx$．其次，$f\ \frac{1}{n}\ = 1$，$f\ \frac{1}{n} + 0\ = \lim\limits_{x\to\frac{1}{n}+0} x\ \frac{1}{x}\ = \frac{n-1}{n}$，所以在点 $x = \frac{1}{n}$, $n\in\mathrm{Z}\setminus\{0\}$函数 f 具有第一类间断．

对于 $x\in\ \frac{1}{n+1},\frac{1}{n}\ ,n\in\mathrm{Z}$. 不等式

$$\frac{n}{n+1}<x\ \frac{1}{x}\ <\frac{n+1}{n} \tag{1}$$

成立 . 如果 $n\to\infty$, 则 $x\to+0$, 由(1)可以得到 $\lim\limits_{x\to+0}f(x)=\lim\limits_{x\to+0}x\ \frac{1}{x}\ =1$.

如果 $[x]=-n$, 则 $-n\leq\frac{1}{x}<-n+1$, $-\frac{1}{n+1}<x\leq-\frac{1}{n}$, 并且

$$\frac{-n}{-n+1}<x\ \frac{1}{x}\ <\frac{-n+1}{-n}\ . \tag{2}$$

如果 $n\to\infty$, 那么 $x\to-0$, 由(2)得到 $\lim\limits_{x\to-0}f(x)=\lim\limits_{x\to-0}x\ \frac{1}{x}\ =1$. 于是 $f(0)=f(-0)=f(+0)=1$, 也就是函数在 $x=0$ 连续 .

262　$f(x)=\begin{cases}\sin\pi x, & x\text{ 为有理数时},\\ 0, & x\text{ 为无理数时}.\end{cases}$

取 $x_0\neq n,n\in\mathrm{Z}$ 为任一个数, (x_n)是收敛到 x_0 的一个有理数列, (t_n)是收敛到 x_0 的一个无理数列 . 由等式 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\sin\pi x_n=\sin\pi x_0\neq0$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}f(t_n)=0$ 得出 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在 . 也就是 x_0 是第二类间断点 .

如果 $x_0=n,n\in\mathrm{Z}$. 则当 $|x-x_0|<\frac{\varepsilon}{\pi}=\delta$ 时

$$\begin{aligned}|f(x_0)-f(x)|&\leq|\sin\pi x|=|\sin(n\pi+\pi(x-n))|\\&=|\cos\pi n\sin\pi(x-n)|=|\sin\pi(x-x_0)|\\&<\pi|x-x_0|<\varepsilon,\end{aligned}$$

从而 $x_0=n$ 是函数 f 的连续点 .

263　证明黎曼(Riemann)函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & \text{如果 } x=\frac{m}{n}, m\text{ 和 } n\text{ 是两个互素数},\\ 0, & \text{如果 } x\text{ 是无理数}.\end{cases}$$

在每个有理数 x 处间断, 在每个无理数 x 处连续 .

令 $x_0=\frac{p}{q}$ 为有理数, 那么 $f(x_0)=\frac{1}{q}$. 显然, 当 $n\to\infty$ 时, 有理数序列 $\frac{np+1}{nq}$ 收敛到 $\frac{p}{q}=x_0$, 于是 $\lim\limits_{n\to\infty}f\ \frac{np+1}{nq}\ =\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{nq}=0$. 所以每一个有理点 $\frac{p}{q}$ 都是间断点 .

如果 α 为任意的无理数, $(x_n)=\frac{p_n}{q_n}$ 为任意一个收敛到 α 的有理数序列 . 那么 $\lim\limits_{n\to\infty}q_n=\infty$ 和

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f\left(\frac{p_n}{q_n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{q_n} = 0 = f(\alpha).$$

然而当 x 是无理数时 $f(x)=0$,对任意取值但收敛到无理数 α 的序列 (x_n) 等式 $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\alpha)=0$ 都成立 . 这样函数 f 在每个无理数 x 处连续 .

264 研究函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{nx}{n+1}, & \text{如果 } x \text{ 是不可约分数}\dfrac{m}{n}, n\geq 1,\\ |x|, & \text{如果 } x \text{ 是无理数}.\end{cases}$$

令 x_0 为有理数,即 $x_0=\dfrac{m}{n}$, $n\geq 1$. 根据条件, $f(x_0)=\dfrac{m}{n+1}$. 当 $k\to\infty$时, $x_k=\dfrac{km+1}{kn}\to\dfrac{m}{n}=x_0$,这时 $\lim_{k\to\infty} f(x_k)=\lim\dfrac{km+1}{kn+1}=\dfrac{m}{n}\neq\dfrac{m}{n+1}=f(x_0)$,从而函数在所有有理数点都是间断的 .

现在令 x_0 为无理数,任何一个收敛到 x_0 的有理数序列 $(x_k)=\left(\dfrac{m_k}{n_k}\right)$,当有 $\lim_{k\to\infty}|m_k|=\infty$, $\lim_{k\to\infty}|n_k|=\infty$ 而且

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k)=\lim_{k\to\infty}\frac{m_k}{n_k+1}=\lim_{k\to\infty}\frac{\dfrac{m_k}{n_k}}{1+\dfrac{1}{n_k}}=x_0$$

$$=\begin{cases}|x|=f(x_0), & \text{如果 } x_0\geq 0,\\ -|x_0|, & \text{如果 } x_0<0.\end{cases}\qquad(1)$$

由此可以得到函数在负的无理数点处间断 .

如果当 $k\to\infty$时, $x_k\to x_0$,并取 $x_k\geq 0$ 为无理数,则

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k)=\lim_{k\to\infty}|x_k|=|x_0|=f(x_0).$$

这样,函数 f 仅在正无理数点 x 处连续 .

265 如果函数 f 在区间 $(x_0,+\infty)$ 上连续并有界 . 证明: 对任意的数 T,可以找到序列 $x_n\to\infty$,使得

$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n+T)-f(x_n))=0.$$

令 $T>0$ 为任意的数,研究差 $f(x+T)-f(x)$. 可有两种情况:

1) 存在有限数 $x'\geq x_0$,使得对于所有的 $x>x'$ 差 $f(x+T)-f(x)$ 保持同号;

2) 对于任意的 $E\geq x_0$ 存在 $x^*>E$ 使得

$$f(x^*+T)-f(x^*)=0.$$

在第一种情况下序列 $(f(x'+nT))$ 单调而它又是有界的 . 于是它有有限的极限 $\lim_{n\to\infty} f(x'+nT)=l$,这样

$$\lim_{n\to\infty}(f(x'+(n+1)T)-f(x'+nT)=l-l=0,$$

其中当 $n\to\infty$时, $x_n=x'+nT\to+\infty$.

在第二种情况下存在无穷序列(x_n)且 $x>x_0$, 当 $n\to\infty$时, $x_n\to+\infty$和 $f(x_n+T)-f(x_n)=0$,即

$$\lim_{n\to\infty}(f(x_n+T)-f(x_n))=0.$$

对于 $T<0$ 的情况,利用变换 $x+T=t$ 可以进行同样的分析.

266 令 φ和ψ是在 $x\in\mathbf{R}$ 上定义的连续周期性函数且$\lim\limits_{x\to\infty}(\varphi(x)-\psi(x))=0$. 证明 $\varphi(x)\equiv\psi(x)$, $x\in\mathbf{R}$.

设 T_1 为函数 φ的周期, T_2 为函数 ψ的周期. 假设 $\varphi(x)\not\equiv\psi(x)$,即存在点 $x=t$,使得

$$|\varphi(t)-\psi(t)|=M>0. \tag{1}$$

取 $\varepsilon>0$ 为任一不小于$\frac{M}{2}$的数. 由于函数 φ在点 $x=t$ 的连续性,对于指定的 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta>0$ 使得对于$|h|<\delta$有

$$|\varphi(t)-\varphi(t+h)|<\varepsilon. \tag{2}$$

根据已知条件,存在自然数 k,使得

$$|\varphi(t+kT_2)-\psi(t+kT_2)|<\varepsilon,$$

对于 $\forall m\in\mathbf{N}$,则有

$$|\varphi(t+mkT_2)-\psi(t+mkT_2)|<\varepsilon. \tag{3}$$

由不等式(2), (3)和函数 φ和ψ的周期性得到,只要

$$|mkT_2-nT_1|<\delta, \tag{4}$$

则有不等式

$$\begin{aligned}|\varphi(t)-\psi(t)|&=|\varphi(t)-\varphi(t+mkT_2)+\varphi(t+mkT_2)-\psi(t+mkT_2)|\\&\leq|\varphi(t)-\varphi(t+mkT_2)|+|\varphi(t+mkT_2)-\psi(t+mkT_2)|\\&=|\varphi(t)-\varphi(t+mkT_2-nT_1)|+|\varphi(t+mkT_2)-\psi(t+mkT_2)|\\&<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.\end{aligned} \tag{5}$$

我们选择 ε,使得 $2\varepsilon<M$. 不等式(5)就推翻了等式(1). 这就否定了存在点 $x=t$,在该处$|\varphi(t)-\psi(t)|=M>0$ 的假设,这样的点不存在,即 $\varphi(x)\equiv\psi(x)$, $-\infty<x<+\infty$.

余下来还要指出,对于任意给定的数 T_1, kT_2 和 δ,存在整数 $m>0$ 和 n 满足不等式(4).

如果 T_1 和 T_2 是有理数,这是显然的.

令 T_1 和 T_2 是无理数,如果记$\frac{kT_2}{T_1}=l$, $\frac{\delta}{T_1}=\alpha$,不等式(4)可以写成

$$|ml-n|<\alpha. \tag{6}$$

为了证明下面的不等式,让我们把区间$[0,1]$分成 $\frac{1}{\alpha}+1$ 个相等部分($[a]$为数 a 的整数部分),每部分长度为$\frac{1}{\frac{1}{\alpha}+1}$.并约定每个区间的左端点属于这个区间而右端点不属于此区间.

研究数的集合

$$0,\ l-[l],\ 2l-[2l],\ 3l-[3l],\ \cdots,$$

$$\frac{1}{\alpha}+1\quad l-\quad \frac{1}{\alpha}+1\quad l\ , \tag{7}$$

其中每个数都属于我们构造的子区间之一.既然子区间的个数为 $\frac{1}{\alpha}+1$,而(7)中的数有 $\frac{1}{\alpha}+2$ 个,那么至少有一个区间包含集合(7)的两个数

$$pl-[pl]\ \text{和}\ ql-[ql],\ p<q. \tag{8}$$

因为区间长度是$\frac{1}{\frac{1}{\alpha}+1}$,那么(8)式中两个数的差小于区间长度,即

$$|ql-[ql]-pl+[pl]|=|(q-p)l-([ql]-[pl])|$$

$$<\frac{1}{\frac{1}{\alpha}+1}<\frac{1}{\frac{1}{\alpha}}=\alpha.$$

取 $q-p=m(m>0)$, $[ql]-[pl]=n$,并代入 l 和 α 的值,则有

$$\left|m\frac{k_2T_2}{T_1}-n\right|<\frac{\delta}{T_1}\ \text{或者}\ |mkT_2-nT_1|<\delta.$$

267 证明等式 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

根据

$$-\frac{\pi}{2}\leq\arcsin x+\arccos x\leq\frac{3\pi}{2}.$$

因为 $\sin(\arcsin x+\arccos x)=1$,从而 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}+k\pi$.由此及上个不等式得出 $k=0$.

268 证明正切加法公式

$$\arctan x+\arctan y=\arctan\frac{x+y}{1-xy}+\varepsilon\pi,$$

其中 ε 是 $0,1,-1$ 三个数中的一个.

根据

$$\tan(\arctan x+\arctan y)=\frac{x+y}{1-xy},$$

$$\tan\left(\arctan\frac{x+y}{1-xy}\right)=\frac{x+y}{1-xy},$$

所以
$$\arctan x+\arctan y=\arctan\frac{x+y}{1-xy}+\varepsilon\pi,\tag{1}$$

这里 $\varepsilon\in\mathbf{Z}$.因为 $|\arctan x+\arctan y|=\left|\arctan\frac{x+y}{1-xy}+\varepsilon\pi\right|<\pi$, $\left|\arctan\frac{x+y}{1-xy}\right|<\frac{\pi}{2}$,则 ε只可能是 0,1, -1 三个数之一 .计算等式(1)左、右两边的余弦,得到

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)^2}}\cos\varepsilon\pi,$$

于是

$$\cos\varepsilon\pi=\frac{1-xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}\cdot\frac{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}{|1-xy|}=\frac{1-xy}{|1-xy|}=\begin{cases}1, & \text{如果 } xy<1,\\ -1, & \text{如果 } xy>1.\end{cases}$$

因为,函数 $(x,y)\mapsto\varepsilon(x,y)$在 $y=\frac{1}{x}$处产生间断,其中 x 是任一固定的数,可以看出如果 $xy<1$ 则 $\varepsilon=0$,当 $xy>1$ 时 $\varepsilon=\pm1$(因为 ε 只可能是 0,1, -1 这三个数) .

令 $xy>1$ 且 $x>0$,则 $y>0$,且

$$\arctan x>0,\arctan y>0,\text{且}\arctan\frac{x+y}{1-xy}<0.$$

等式(1)的左边是个连续的正函数 .因此它的右边也应当是正函数,所以 $\varepsilon\pi>0$,即 $\varepsilon=+1$.

同样,如果 $xy>1$ 且 $x<0(y<0)$,则 $\varepsilon=-1$.

269 研究向量函数的连续性

$$\boldsymbol{f}(x)=\left(\frac{\sin x}{x},\frac{e^x-1}{x},\frac{1-\cos x}{x}\right),x\neq0,$$

$$\boldsymbol{f}(0)=(1,1,0).$$

当 $x\neq0$ 时函数 $\boldsymbol{f}$ 连续 .因为它的分量在 $x\neq0$ 处连续 .其次

$$\lim_{x\to0}\boldsymbol{f}(x)=\left(\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x},\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x},\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}\right)$$
$$=(1,1,0),$$

因此,函数 $x\mapsto\boldsymbol{f}(x)$在 $x=0$ 也连续 .

270 研究函数矩阵的连续性

$$\boldsymbol{A}(x)=\begin{pmatrix}[x]\sin\pi x & x\\ -x & 1\end{pmatrix},x\in\mathbf{R}.$$

函数矩阵在R 上连续,因为它的所有元素都是R 上的连续函数 .

练 习 题

研究下列函数的连续性:

133 $f(x)=\arcsin x,\ |x|\leqslant 1$.

134 $f(x)=\arccos x,\ |x|\leqslant 1$.

135 $f(x)=\arctan x,\ x\in\mathbf{R}$.

136 $f(x)=\operatorname{arccot} x,\ x\in\mathbf{R}$.

137 $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x},\ x\neq 0,\ f(0)=1$.

138 $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x},\ x>-1,\ x\neq 0,\ f(0)=0$.

139 $f(x)=\arctan\dfrac{\tan x}{2},\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ f\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)=0,\ k\in\mathbf{Z}$.

140 $f(x)=\sin x\arcsin\dfrac{\tan x}{2},\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ f\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)=0,\ k\in\mathbf{Z}$.

141 $f(x)=\begin{cases}|x|, & |x|>1;\\ x^2, & |x|\leqslant 1.\end{cases}$

142 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}.\end{cases}$

143 $f(x)=(-1)^{\left[\frac{4x+3\pi}{4\pi}\right]}(\sin x+\cos x)+2\sqrt{2}\left[\dfrac{4x+3\pi}{4\pi}\right],\ x\in\mathbf{R}$.

144 $f(x)=\dfrac{1}{2}\arctan\left(\dfrac{x^2-1}{x\sqrt{2}}\right)+\dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn}x,\ x\neq 0,\ f(0)=0$.

145 $f(x)=-\dfrac{[x]}{x^{\lambda}}+1+\dfrac{1}{2^{\lambda}}+\cdots+\dfrac{1}{[x]^{\lambda}},\ x\geqslant 1$.

146 $f(x)=[x]\ln x-\ln([x]!),\ x\geqslant 1$.

147 $f(x)=-x\left[\dfrac{1}{x}\right]+1+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{\left[\dfrac{1}{x}\right]^2},\ x\in(0,1]$.

148 $f(x)=\begin{cases}x-[x], & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}.\end{cases}$

149 $f(x)=[x]\sin\pi x,\ x\in\mathbf{R}$.

150 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x<0,\\ x+1, & x\geqslant 0.\end{cases}$

151 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(1+x)^2-1}{x}, & x>0,\\ 2+x, & x\leqslant 0.\end{cases}$

确定间断点并研究其性质:

152 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x^2},\ x\neq 0,\ f(0)=0$.

153 $f(x)=\arctan\dfrac{\tan x}{2}+\pi\left[\dfrac{2x+\pi}{2\pi}\right],\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+n\pi,\ f\left(\dfrac{\pi}{2}+n\pi\right)=0,\ n\in\mathbf{Z}$.

154 $f(x)=\arctan\dfrac{3\tan(x/2)+1}{5}+\pi\left[\dfrac{x+\pi}{2\pi}\right],\ x\neq(2n+1)\pi,\ f((2n+1)\pi)=0,\ n\in\mathbf{Z}$.

155 $f(x)=\arctan\dfrac{1}{x^2-1},\ x\neq\pm 1,\ f(\pm 1)=\dfrac{\pi}{2}$.

156 $f(x)=\dfrac{1}{\tan x^2-2\tan x+2},\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ f\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)=0,\ k\in\mathbf{Z}$.

157 $f(x)=\tan x,\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ f\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)=0,\ k\in\mathbf{Z}$.

158 $f(x)=\arcsin(\sin x)\arctan\frac{1}{\sin x},\ x\neq n\pi,\ f(n\pi)=1,\ n\in\mathbf{Z}$.

159 $f(x)=\ln\arctan\frac{1}{x},\ x\neq 0,\ f(0)=0$. **160** $f(x)=\tan\frac{1}{x},\ x\neq 0,\ f(0)=0$.

研究向量函数的连续性:

161 $\boldsymbol{f}(x)=(\cos x,\sin x,1),\ x\in\mathbf{R}$.

162 $$\boldsymbol{f}(x)=\begin{cases}\left(\sin\frac{1}{x},x\sin\frac{1}{x},\cdots,x^{m-1}\sin\frac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ (1,0,\cdots,0), & x=0.\end{cases}$$

163 $$\boldsymbol{f}(x)=\begin{cases}\left(\frac{\sin x}{x},|x|,\cos x\right), & x\neq 0,\\ (1,0,1), & x=0.\end{cases}$$

164 $$\boldsymbol{f}(x)=\left(\frac{(1+x)^{\sqrt{2}}-1}{x},\frac{(1+2x)^{\sqrt{2}}-1}{x},\cdots,\frac{(1+mx)^{\sqrt{2}}-1}{x}\right),\ x\in(-1,+\infty)\setminus\{0\},$$

$\boldsymbol{f}(0)=(\sqrt{2},2\sqrt{2},\cdots,m\sqrt{2})$.

165 $\boldsymbol{f}(x)=\left((1+x)^{\frac{1}{x}},(1+2x)^{\frac{1}{x}},\cdots,(1+mx)^{\frac{1}{x}}\right),\ x\in(-1,+\infty)\setminus\{0\},$

$\boldsymbol{f}(0)=(\mathrm{e},\mathrm{e}^2,\cdots,\mathrm{e}^m)$.

研究函数矩阵的连续性:

166 $$\boldsymbol{A}(x)=\begin{pmatrix}1 & \sin x & x\\ \cos x & 1 & 1-x\end{pmatrix},\ x\in\mathbf{R}.$$

167 $$\boldsymbol{A}(x)=\left(\frac{ix+1}{j}\right),\ x\in\mathbf{R}.\ i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n.$$

168 $\boldsymbol{A}(x)=(a_{ij}(x))$,其中

$$a_{ij}(x)=(1+ix)^{\frac{j}{x}},\ i=1,\cdots,m,\ j=1,\cdots,n,\ x\in(-1,\infty)\setminus\{0\},\ \boldsymbol{A}(0)=\boldsymbol{E}.$$

169 $\boldsymbol{A}(x)=(a_{ij}(x))$,其中 $a_{ij}(x)=\left(1+\frac{x^2}{i}\right)^{\frac{(-1)^j}{x^2}},\ x\neq 0,\ \boldsymbol{A}(0)=\boldsymbol{E}$.

170 $$\boldsymbol{A}(x)=\begin{pmatrix}\frac{1}{x} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \frac{1}{x^2} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{x^n}\end{pmatrix},\ x\neq 0,\ \boldsymbol{A}(0)=\boldsymbol{E}.$$

9 函数的一致连续性

9.1 一致连续性的定义

定义 如果

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x, y \in X \wedge |x - y| < \delta$$
$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon .$$

则称函数 $f: X \to \mathrm{R}$ **是一致连续的**.

如果函数 f **不是一致连续的,那么下面的事实成立:**

$$\exists \varepsilon > 0, \ \forall \delta > 0 : \exists x, y \in X \wedge |x - y| < \delta$$
$$|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon .$$

9.2　康托尔定理

定理　**如果函数** $f: [a, b] \to \mathrm{R}$ **在闭区间** $[a, b]$ **上连续,那么它在该区间上一致连续**.

271　**指出函数** $f(x) = \dfrac{1}{x}, x \in (0, 1)$, **在区间** $(0, 1)$ **上连续,但在该区间上不一致连续**.

函数 f **和所有初等函数一样是连续的. 现在让我们指出在区间** $(0, 1)$ **上它不是一致连续的**.

令 $x_n = \dfrac{1}{n+1}, y_n = \dfrac{1}{n+1+\varepsilon}, n \in \mathrm{N}$. **那么当** $n \to \infty$ **时**,

$$|x_n - y_n| = \frac{\varepsilon}{(n+1)(n+1+\varepsilon)} \to 0,$$

所以差 $|x_n - y_n|$ **可以小于任何一个事先给定的正数. 但是** $|f(x_n) - f(y_n)| = |n + 1 - n - 1 - \varepsilon| = \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$. **因此,在区间** $(0, 1)$ **上函数** f **不是一致连续的**.

272　**指出函数** $f(x) = \sin \dfrac{\pi}{x}$ **在区间** $(0, 1)$ **上连续而且有界,但在该区间上不是一致连续的**.

函数 f **的有界性显然,函数** $y \mapsto \sin y, y \in \mathrm{R}$, $x \mapsto \dfrac{\pi}{x}, x \in (0, 1)$ **连续,所以它们的复合函数也连续,从而得到函数** f **的连续性. 令** $x_n = \dfrac{1}{n+1}, y_n = \dfrac{2}{2n+1}, n \in \mathrm{N}$. **那么当** $n \to \infty$ **时**, $|x_n - y_n| = \dfrac{1}{(n+1)(2n+1)} \to 0$. **与此同时** $|f(x_n) - f(y_n)| = 1 \geq \varepsilon, \forall \varepsilon \in (0, 1]$. **所以函数** f **在** $(0, 1)$ **上不一致连续**.

273　**指出函数** $f(x) = \sin x^2$ **在数轴** R **上连续而且有界. 但它在该直线上不是一致连续的**.

有界性和连续性是显然的. 但一致连续性不然,因为

$$|f(x_n) - f(y_n)| = 1 \geq \varepsilon, \forall \varepsilon \in (0, 1],$$

$$\forall x_n = \quad n\pi \text{ 和 } y_n = \quad n\pi + \frac{\pi}{2}, n \in \mathrm{N} .$$

虽然当 $n\to\infty$时,有 $|x_n - y_n| = \left| \quad n\pi - \quad n\pi + \frac{\pi}{2} \right| = \dfrac{\frac{\pi}{2}}{n\pi + \quad n\pi + \frac{\pi}{2}} \to 0$.

274 证明: 如果在 $a \le x < +\infty$ 上函数 f 有定义而且连续,并有有限的极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$,那么函数 f 在该区域上一致连续 .

从极限的存在性得出

$$" \varepsilon > 0, v\ E > a: "\ x, y \in (E, +\infty)$$
$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{1}$$

让我们固定这样的 E 并研究闭区间 $[a, 2E]$. 按康托尔定理可知,函数 f 在 $[a, 2E]$ 上一致连续,也就是说 " $\varepsilon > 0$, 特别对于前面指出的 ε, v $\delta > 0$, 使得 " $x, y \in [a, 2E] \wedge |x - y| < \delta \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. 不失一般性,考虑 $\delta < E$. 从条件 $|x - y| < \delta$ 得出两个数 x 和 y 都大于 E 或者都小于 $2E$. 无论大于 a 的 x 和 y 是哪种情况,从条件 $|x - y| < \delta$ 可以得出不等式 $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$,这就确定了 f 在 $[0, +\infty)$ 上的一致连续性 .

275 证明: 无界函数 $f(x) = x + \sin x$ 在全数轴 R 上一致连续 .

对于任意的 $\varepsilon > 0$,有

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |x - y + (\sin x - \sin y)| \\ &\le |x - y| + |\sin x - \sin y| \\ &= |x - y| + 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\right| \\ &\le |x - y| + 2\left|\frac{x-y}{2}\right| = 2|x - y| < \varepsilon. \end{aligned}$$

对于所有满足不等式 $|x - y| < \frac{\varepsilon}{2} = \delta$ 的 x 和 y 都成立 .

276 下列函数是否一致连续?

1) $f(x) = x^2,\ x \in (-l, l)$;

2) $f(x) = x^2,\ x \in$ R .

1) 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,那么

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |x^2 - y^2| = |x + y||x - y| \\ &\le (|x| + |y|)|x - y| < 2l|x - y| < \varepsilon \end{aligned}$$

当 " $x, y \in (-l, l) \wedge |x - y| < \frac{\varepsilon}{2l}$ 时成立,也就是说 f 在 $(-l, l)$ 上一致连续 .

2) 函数 f 不一致连续,因为当 $x_n = n + \frac{1}{n}$, $y_n = n$, $n \in$ N ,则有当 $n\to\infty$时, $|x_n - y_n| = \frac{1}{n} \to 0$. 但是 $|f(x_n) - f(y_n)| = 2 + \frac{1}{n^2} > 2 \ge \varepsilon$, " $\varepsilon \in (0, 2]$.

研究下面函数的一致连续性:

277　$f(x)=\dfrac{x}{4-x^2},\ x\in[-1,1]$.

根据康托尔定理,函数在$[-1,+1]$上一致连续.

278　$f(x)=\ln x,\ x\in(0,1)$.

一致连续性不成立,因为如果 $x_n=\mathrm{e}^{-n},\ y_n=\mathrm{e}^{-n-1},\ n\in\mathbf{N}$, **那么当** $n\to\infty$**时**, $|x_n-y_n|=\dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}^{n+1}}\to 0$, **但是** $|f(x_n)-f(y_n)|=1\geq\varepsilon,\ \forall\,\varepsilon\in(0,1]$.

279　$f(x)=\dfrac{\sin x}{x},\ x\in(0,\pi)$.

研究函数 $F(x)=f(x)$ (**当** $x\in(0,\pi)$**时**), **而** $F(0)=1,F(\pi)=0$. **既然函数** $F(x)$**在闭区间**$[0,\pi]$**是连续的,那么根据康托尔定理,他在该闭区间上一致连续,从而在**$(0,\pi)$**上也一致连续.**

280　$f(x)=\mathrm{e}^x\cos\dfrac{1}{x},\ x\in(0,1)$.

设 $x_n=\dfrac{1}{2n\pi},\ y_n=\dfrac{1}{(2n+1)\pi},\ n\in\mathbf{N}$. **那么当** $n\to\infty$**时**, $|x_n-y_n|=\dfrac{1}{2n(2n+1)\pi}\to 0$. **但是**

$$|f(x_n)-f(y_n)|=\mathrm{e}^{\frac{1}{2n\pi}}+\mathrm{e}^{\frac{1}{(2n+1)\pi}}>2,\ \forall\,n\in\mathbf{N}.$$

所以函数不一致连续.

281　$f(x)=\arctan x,\ x\in\mathbf{R}$.

一致连续性可由下式得到(**见例** 268), **当** $|x-y|<\delta=\varepsilon$**时**

$$|\arctan x-\arctan y|=\left|\arctan\frac{x-y}{1+xy}\right|\leq\left|\frac{x-y}{1+xy}\right|$$
$$<|x-y|<\varepsilon.$$

282　$f(x)=x\sin x,\ 0\leq x<+\infty$.

令 $x_n=n\pi,\ y_n=n\pi+\dfrac{1}{n},\ n\in\mathbf{N}$. **那么,当** $n\to\infty$**时**, $|x_n-y_n|=\dfrac{1}{n}\to 0$, **但同时**

$$|f(x_n)-f(y_n)|=\left(n\pi+\frac{1}{n}\right)\left|\sin\left(n\pi+\frac{1}{n}\right)\right|$$
$$=\left(n\pi+\frac{1}{n}\right)\sin\frac{1}{n}=\left(\pi+\frac{1}{n^2}\right)\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\to\pi.$$

所以 $|f(x_n)-f(y_n)|>\dfrac{\pi}{2},\ \forall\,n>m$. **因此函数不一致连续.**

283　**对于** $\varepsilon>0$, **求** $\delta>0$ (**如果有的话**) **使得下列函数** f **满足一致连续性定义的要求:**

1) $f(x)=x^2-2x-1,\ -1\leq x\leq 5$;

2) $f(x)=\sqrt[n]{x},\ 0<x<+\infty$.

1) 如果$|x-y|<\frac{\varepsilon}{12}=\delta$,则有

$$|f(x)-f(y)|=|x^2-2x-1-y^2+2y+1|$$
$$=|x^2-y^2-2(x-y)|\le|x+y||x-y|+2|x-y|$$
$$\le(|x|+|y|+2)|x-y|\le 12|x-y|<\varepsilon.$$

2) 令$\varepsilon>0$是任意数,如果x和y取为

$$0\le x<\varepsilon^n,\ 0\le y<\varepsilon^n,\tag{1}$$

则$0\le\sqrt[n]{x}<\varepsilon$,$0\le\sqrt[n]{y}<\varepsilon$和$|x-y|<\varepsilon^n=\delta$.由此得到$|f(x)-f(y)|=|\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{y}|<\varepsilon$当$|x-y|<\varepsilon^n=\delta$时成立.如果(1)不满足,也就是虽然$x$或$y$之一不小于$\varepsilon^n$,那么

$$\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}y}+\sqrt[n]{x^{n-3}y^2}+\cdots+\sqrt[n]{y^{n-1}}>\varepsilon^{n-1}.$$

当$|x-y|<\varepsilon^n=\delta$时,有

$$|f(x)-f(y)|=|\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{y}|$$
$$=\frac{|x-y|}{\sqrt[n]{x^{n-1}}+\sqrt[n]{x^{n-2}y}+\sqrt[n]{x^{n-3}y^2}+\cdots+\sqrt[n]{y^{n-1}}}<\frac{|x-y|}{\varepsilon^{n-1}}<\varepsilon.$$

284　**证明:在区间(a,b)上有限个一致连续函数的和与积依然在该区间上一致连续.**

只要考虑在(a,b)上两个一致连续函数f和g就足够了.

根据已知条件

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_1>0:\forall x,y\in(a,b)\wedge|x-y|<\delta_1\Rightarrow|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2},\tag{1}$$

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta_2>0:\forall x,y\in(a,b)\wedge|x-y|<\delta_2\Rightarrow|g(x)-g(y)|<\frac{\varepsilon}{2}.\tag{2}$$

如果$|x-y|<\delta$,$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,那么不等式(1)和(2)都成立,这时可由下面的不等式得到两个函数和的连续性,只要当$|x-y|<\delta$,对于所有的x,y都有

$$|f(x)+g(x)-f(y)-g(y)|\le|f(x)-f(y)|+|g(x)-g(y)|$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

乘积的一致连续性可以由下面事实给出:

如果$|x-y|<\delta$,$x\in(a,b)$,$y\in(a,b)$

$$|f(x)g(x)-f(y)g(y)|=|f(x)g(x)-f(x)g(y)+f(x)g(y)-f(y)g(y)|$$
$$\le|f(x)||g(x)-g(y)|+|g(y)||f(x)-f(y)|$$
$$<L\frac{\varepsilon}{2}+M\frac{\varepsilon}{2},$$

这里$L=\sup\limits_{x\in(a,b)}|f(x)|$,$M=\sup\limits_{x\in(a,b)}|g(x)|$.

285　**证明:在有限或无限区间(a,b)上的单调有界函数$f:(a,b)\to\mathbf{R}$在该区间上一**

致连续 .

由条件可知,存在有限的极限

$$f(a+0)=\lim_{x\to a+0}f(x),\quad f(b-0)=\lim_{x\to b-0}f(x).$$

如果 a 和 b 都是有限的,那么令 $f(a)=f(a+0)$, $f(b)=f(b-0)$,于是我们得到了在闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数,又根据康托尔定理,它在该区间上一致连续 .

如果 a,b 之一或两个同时等于 $-\infty$ 及 $+\infty$,回顾例 274 的解法就可重新断言函数 f 一致连续 .

286 函数 $f:(a,b)\to\mathbf{R}$ 的连续模是指函数

$$\delta\to\omega_f(\delta),$$

其中 $\omega_f(\delta)=\sup|f(x)-f(y)|$,而 x,y 是满足条件 $|x-y|\leq\delta$ 的任意两点 .

证明:在 (a,b) 区间上的函数 $f(x)$ 一致连续的充分必要条件是

$$\lim_{\delta\to+0}\omega_f(\delta)=0.$$

充分性 . 假设 $\lim\limits_{\delta\to+0}\omega_f(\delta)=0$,则

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:\forall x,y\in(a,b)\wedge\forall\delta<\delta_1\quad\omega_f(\delta)<\varepsilon.$$

因为 $\omega_f(\delta)=\sup\limits_{\substack{x,y\in(a,b)\\|x-y|<\delta}}|f(x)-f(y)|$,那么 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$, $\forall x,y\in(a,b)\wedge|x-y|<\delta$,也就是函数 f 在 (a,b) 上一致连续 .

必要性 . 假设 f 在 (a,b) 上一致连续,则

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0:\forall x,y\in(a,b)\wedge|x-y|<\delta\quad|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

在 x 和 y 满足相同条件时,我们有

$$\omega_f(\delta)=\sup_{\substack{x,y\in(a,b)\\|x-y|<\delta}}|f(x)-f(y)|\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon,$$

也就是 $\lim\limits_{\delta\to+0}\omega_f(\delta)=0$.

练 习 题

研究下列函数的一致连续性:

171 $f(x)=\ x^2+1$, $x\in\mathbf{R}$. **172** $f(x)=\ x^2\ln x$, $1\leq x<+\infty$.

173 $f(x)=\ x^2\ln x$, $0<x<1$. **174** $f(x)=\ x$, $0<x<+\infty$.

175 $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$, $0<x<+\infty$. **176** $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$, $-1<x<0$.

177 $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$, $x\in\mathbf{R}$. **178** $f(x)=x+\ln x$, $1\leq x<+\infty$.

179 $f(x)=x\ln x$, $x\in(0,1)$. **180** $f(x)=e^{-x^2}$, $x\in\mathbf{R}$.

181 $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2+1}$, $x\in\mathbf{R}$. **182** $f(x)=x^2\ln x$, $x\geq1$.

183　$f(x) = x\cos x$,　$x \in \mathbf{R}$.　**184**　$f(x) = x^2\cos x$,　$x \in [0, \pi]$.

185　$f(x) = x^3 + x^2 + 1$,　$x \in \mathbf{R}$.

第 2 章　一元函数微分学

1　显函数的导数

1.1　基本概念

定义 1　设函数 $f:(a,b)\to \mathbb{R}$. **差** $\Delta x = x - x_0\ (x, x_0 \in (a,b))$ **称为自变量在** x_0 **处的增量** .

定义 2　**差** $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ **称为函数值在** x_0 **处的增量** .

定义 3　如果下列极限存在(有限或无穷大),

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0),$$

则称此极限为函数 f **在点** x_0 **的导数** .

定义 4　下列极限(有限或无穷大)

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x\to -0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x},\quad f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x\to +0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

分别称为函数 f **在点** x_0 **的左、右导数** .

在所有极限为无穷大的情形, 把此极限理解为 $+\infty$ **或** $-\infty$ **之一** .

定义 5　如果函数 f **在** x_0 **点为一阶间断, 那么表达式**

$$f'_-(x_0 - 0) = \lim_{\Delta x\to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - 0)}{\Delta x},$$

$$f'_+(x_0 + 0) = \lim_{\Delta x\to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 + 0)}{\Delta x}$$

分别称为函数 f **在** x_0 **点的广义的左、右导数** .

必须注意, 在所有取极限的过程中 Δx **趋向于零是任意的** .

差 Δx **与** $\Delta f(x_0)$ **可以很大, 也可以很小** .

1.2　导数运算法则

如果函数 f, g **对** $x \in (a, b)$ **有有限导数, 则**

1) $(\alpha_1 f + \alpha_2 g)' = \alpha_1 f' + \alpha_2 g'$, α_1, α_2 **为常数**;

2) $(fg)' = fg' + f'g$;　　3) $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$, $g(x) \neq 0$.

1.3　复合函数的导数

如果函数 $f: u\to f(u)$, $\varphi: x\to u=\varphi(x)$有有限导数 f'_u及 φ', 则$(f(\varphi(x)))'=f'_u(\varphi(x))\varphi'$, 这里的下标指明对该变量求导.

1.4　求导公式

设 x为独立变量, 成立如下公式:

1) $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$, $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

2) $(a^x)'=a^x\ln a$, $a>0$, $(e^x)'=e^x$;

3) $(\sin x)'=\cos x$;

4) $(\cos x)'=-\sin x$;

5) $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$;

6) $(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

7) $(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$;

8) $(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$;

9) $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

10) $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

11) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$, $a>0$, $a\neq 1$, $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$;

12) $(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$;

13) $(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$;

14) $(\operatorname{th} x)'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

15) $(\operatorname{cth} x)'=-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$;

16) $(\operatorname{arsh} x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;

17) $(\operatorname{arth} x)'=\dfrac{1}{1-x^2}$, $|x|<1$;

18) $(|x|)'=\operatorname{sgn} x$, $x\neq 0$;

19) $([x])'=0$, $x\neq k$, $k\in \mathbf{Z}$.

1.5　幂-指函数的导数

如果函数 $u: x\to u(x)$及 $v: x\to v(x)$均有有限导数, 则

$$((u(x))^{v(x)})'=(u(x))^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x)+\frac{u'(x)v(x)}{u(x)}\right),\quad u(x)>0.$$

1.6　向量函数与函数矩阵的导数

如果向量函数 $\boldsymbol{f}: x\mapsto(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))$的每个分量都有有限导数, 则

$$\boldsymbol{f}': x\mapsto(f_1'(x), f_2'(x), \cdots, f_n'(x)).$$

类似地, 如果函数矩阵 $\boldsymbol{A}: x\to(a_{ij}(x))$(这里的$(a_{ij}(x))$为 $m\times n$阶函数矩阵)的每个分量均有有限导数, 则有公式

$$\boldsymbol{A}' = (a_{ij}'(x)) = \begin{pmatrix} a_{11}'(x) & a_{12}'(x) & \cdots & a_{1n}'(x) \\ a_{21}'(x) & a_{22}'(x) & \cdots & a_{2n}'(x) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1}'(x) & a_{n2}'(x) & \cdots & a_{nn}'(x) \end{pmatrix}.$$

1.7 实变量复函数的导数

如果 $w: x \mapsto u(x) + \mathrm{i}v(x)$, **且函数** $u(x): x \mapsto u(x)$, $v(x): x \mapsto v(x)$**有有限导数，则** w **的导数公式为**

$$w' = u' + \mathrm{i}v'.$$

1 给定函数 $f: x \mapsto \lg x$. **在点** $x_0 = 1$ **处，如果自变量** x **由** 1 **变到** 1000, **求自变量及函数值的增量**.

由定义有

$$\Delta x = 1000 - 1 = 999, \quad \Delta f(x_0) = \lg 1000 - \lg 1 = 3.$$

2 给定函数 $f: x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$. **在点** $x_0 = 0.01$ **处，如果自变量** x **由** 0.01 **变为** 0.001, **求自变量及函数值的增量**.

同上题可得

$$\Delta x = 0.001 - 0.01 = -0.009,$$

$$\Delta f(x_0) = \frac{1}{(0.001)^2} - \frac{1}{(0.01)^2} = 99 \cdot 10^4.$$

由例 1 **及例** 2 **可以看出，自变量的变化与函数值的变化是任意的**.

3 设自变量 x **在** x_0 **点变化** Δx, **即** $\Delta x = x - x_0$. **如果给出下列函数**:

1) $\boldsymbol{f}(x) = (x, \sin x, \mathrm{e}^x)$; 2) $f(x) = \dfrac{3}{2+x} + \mathrm{i}\dfrac{x}{4-x}$; 3) $\boldsymbol{f}(x) = \begin{pmatrix} x^n & \ln x \\ \operatorname{sh} x & 1 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbf{N}$.

求函数值的增量 $\Delta f(x_0)$.

由定义 2, **有**

1) $$\Delta \boldsymbol{f}(x_0) = \boldsymbol{f}(x) - \boldsymbol{f}(x_0) = (x - x_0, \sin x - \sin x_0, \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{x_0})$$

$$= \left(\Delta x, 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right), \mathrm{e}^{x_0}(\mathrm{e}^{\Delta x} - 1)\right);$$

2) $$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = \frac{3}{2+x} - \frac{3}{2+x_0} + \mathrm{i}\left(\frac{x}{4-x} - \frac{x_0}{4-x_0}\right)$$

$$= \frac{-3\Delta x}{(2+x_0)(2+x_0+\Delta x)} + \mathrm{i}\frac{4\Delta x}{(4-x_0)(4-x_0-\Delta x)}, \quad x_0 \neq 4, \ \Delta x \neq 4 - x_0;$$

3) $$\Delta \boldsymbol{f}(x_0) = \begin{pmatrix} x^n & \ln x \\ \operatorname{sh} x & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0^n & \ln x_0 \\ \operatorname{sh} x_0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{matrix} x^n - x_0^n & \ln \dfrac{x}{x_0} \\ \operatorname{sh} x - \operatorname{sh} x_0 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} (x_0 + \Delta x)^n - x_0^n & \ln\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x_0}\right) \\ 2\operatorname{sh} \dfrac{\Delta x}{2} \operatorname{ch}\left(x_0 + \dfrac{\Delta x}{2}\right) & 0 \end{matrix}.$$

4 对下列函数求 $f'(1)$:

1) $f(x) = (x - 1)\arcsin \dfrac{x}{x+1}$; 2) $\boldsymbol{f}(x) = (\arctan x, 2^x, \ln x)$;

3) $f(x) = \cos x + \mathrm{i}\sin(x - 1)$; 4) $\boldsymbol{f}(x) = \begin{matrix} \dfrac{x}{1+x} & x^2 \\ \tan x & \arcsin(x-1) \end{matrix}$.

由定义 3, **有**

1) $f'(1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta x \arcsin \dfrac{1+\Delta x}{2+\Delta x}}{\Delta x} = \dfrac{\pi}{4}$;

2) $\boldsymbol{f}'(1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\dfrac{\arctan(1+\Delta x) - \arctan 1}{\Delta x}, \dfrac{2}{\Delta x}(2^{\Delta x} - 1), \dfrac{\ln(1+\Delta x)}{\Delta x}\right)$

$= \left(\dfrac{1}{2}, 2\ln 2, 1\right)$;

3) $f'(1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\dfrac{\cos(1+\Delta x) - \cos 1}{\Delta x} + \mathrm{i}\dfrac{\sin \Delta x}{\Delta x}\right) = -\sin 1 + \mathrm{i}$;

4) $\boldsymbol{f}'(1) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{1}{\Delta x} \begin{matrix} \dfrac{1+\Delta x}{2+\Delta x} - \dfrac{1}{2} & (1+\Delta x)^2 - 1 \\ \tan(1+\Delta x) - \tan 1 & \arcsin \Delta x \end{matrix} = \begin{matrix} \dfrac{1}{4} & 2 \\ \dfrac{1}{\cos^2 1} & 1 \end{matrix}$.

以下的例子要说明, 在导数定义中 Δx **趋向于零的任意性是多么重要** .

5 证明, 向量函数

$$\boldsymbol{f}: x \quad (x \sin x, \psi(x), \mathrm{e}^{-x^2})$$

在点 $x = 0$ **没有导数, 其中**

$$\psi(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

向量函数有有限导数的充分必要条件是其每个分量具有有限导数 . 下面证明函数 ψ **在** $x = 0$ **点不可导** .

由定义 3, **有**

$$\psi'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \sin \frac{1}{\Delta x}.$$

如果取 $\Delta x = \dfrac{1}{2k\pi} \to 0$, $k \to \infty$, $k \in \mathbf{N}$, **则** $\sin \dfrac{1}{\Delta x} = \sin 2k\pi = 0$. **但如果取** $\Delta x = \dfrac{1}{2k\pi + \pi/2}$,

则当 $k\to\infty$ 时，$\sin\frac{1}{\Delta x}\to 1$. 因此导数 $\psi'(0)$ 不存在 .

求下列函数的导数:

6 $\boldsymbol{f}(x)=\left(\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3},\ \sin(\cos^2(\sin^3 4x^5)),\ \mathrm{e}^{-4x^3}\right)$.

由于所给向量函数的每个分量都有有限的导数，由 1.6，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}'(x) &= \left(\left(\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}\right)',\ (\sin(\cos^2(\sin^3 4x^5)))',\ (\mathrm{e}^{-4x^3})'\right)\\ &= \left(\frac{x}{\sqrt{2+x^2}}\sqrt[3]{3+x^3}+\sqrt{2+x^2}\frac{x^2}{(\sqrt[3]{3+x^3})^2},\ -\cos(\cos^2(\sin^3 4x^5))\times\right.\\ &\qquad\left.\sin(2\sin^3 4x^5)\cdot 60\sin^2 4x^5\cdot\cos 4x^5\cdot x^4,\ -12x^2\mathrm{e}^{-4x^3}\right).\end{aligned}$$

7 $f(x)=\sin(\cos x)+\mathrm{i}\cos(\sin x)$.

由 1.7，有

$$\begin{aligned}f'(x) &= (\sin(\cos x))'+\mathrm{i}(\cos(\sin x))'\\ &= -\sin x\cos(\cos x)-\mathrm{i}\cos x\sin(\sin x).\end{aligned}$$

8 $\boldsymbol{f}(x)=\begin{pmatrix}\sin 2x & \cos 2x\\ \mathrm{sh}3x & \mathrm{ch}3x\end{pmatrix}$.

由 1.6，有

$$\boldsymbol{f}'(x)=\begin{pmatrix}(\sin 2x)' & (\cos 2x)'\\ (\mathrm{sh}3x)' & (\mathrm{ch}3x)'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cos 2x & -2\sin 2x\\ 3\mathrm{ch}3x & 3\mathrm{sh}3x\end{pmatrix}.$$

9 求向量函数 $\boldsymbol{f}: x\mapsto\left(\arcsin\frac{1}{|x|},\ [x]\sin^2\pi x\right)$ 的导数 .

当 $|x|>1$ 且 $x\neq k$，$k\in\mathrm{Z}$ ，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}'(x) &= \left(\left(\arcsin\frac{1}{|x|}\right)',\ ([x]\sin^2\pi x)'\right)\\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\left(\frac{1}{|x|}\right)',\ ([x])'\sin^2\pi x+\pi[x]\sin 2\pi x\right)\\ &= \left(\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}},\ \pi[x]\sin 2\pi x\right).\end{aligned}$$

当 $|x|>1$ 且 $x=k$，$k\in\mathrm{Z}$ 时，研究函数 $y: x\mapsto[x]\sin^2\pi x$ 的左、右导数 . 由定义 4 有

$$y'_{\pm}(k)=\lim_{x\to k\pm 0}\frac{[x]\sin^2\pi x}{x-k}=\lim_{h\to\pm 0}\frac{[k+h]\pi^2h^2}{h}=0.$$

既然 $y'(k)=\pi[k]\sin 2\pi k=0$，因此 $y'(x)=\pi[x]\sin 2\pi x$ 对所有 x 成立 . 从而

$$\boldsymbol{f}'(x)=\left(-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}},\ \pi[x]\sin 2\pi x\right),\quad |x|>1.$$

10　求函数矩阵

$$f: x \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix},$$

的导数，其中

$$a_{11}(x) = \begin{cases} \arctan x, & \text{当 } |x| \leq 1, \\ \dfrac{\pi}{4}\operatorname{sgn} x + \dfrac{x-1}{2}, & \text{当 } |x| > 1, \end{cases}$$

$$a_{12}(x) = a_{21}(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x^2}, & \text{当 } |x| \leq 1, \\ \dfrac{1}{e}, & \text{当 } |x| > 1, \end{cases}$$

$$a_{22}(x) = |x|.$$

首先计算所给矩阵各元素的导数．当$|x| \neq 1$ 且 $x \neq 0$ 时，有

$$a'_{11}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2}, & \text{当 } |x| < 1, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{当 } |x| > 1, \end{cases}$$

$$a'_{12}(x) = a'_{21}(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2}(1-x^2), & \text{当 } |x| < 1, \\ 0, & \text{当 } |x| > 1, \end{cases}$$

$$a'_{22}(x) = \operatorname{sgn} x.$$

下面求 $a_{ij}(x)$在点 $x=1$，$x=-1$，$x=0$ 处的单侧导数：

$$a'_{11+}(-1) = \lim_{h\to+0} \frac{\arctan(-1+h) + \dfrac{\pi}{4}}{h} = \frac{1}{2};$$

$$a'_{11-}(-1) = \lim_{h\to-0} \frac{\dfrac{\pi}{4}\operatorname{sgn}(-1+h) + \dfrac{1}{2}(-1+h-1) + \dfrac{\pi}{4}}{h} = +\infty;$$

$$a'_{11+}(1) = \lim_{h\to+0} \frac{\dfrac{\pi}{4}\operatorname{sgn}(1+h) + \dfrac{1}{2}(1+h-1) - \dfrac{\pi}{4}}{h} = \frac{1}{2};$$

$$a'_{11-}(1) = \lim_{h\to-0} \frac{\arctan(1+h) - \dfrac{\pi}{4}}{h} = \frac{1}{2};\quad a'_{12-}(-1) = \lim_{h\to-0} \frac{\dfrac{1}{e} - \dfrac{1}{e}}{h} = 0;$$

$$a'_{12+}(-1) = \lim_{h\to+0} \frac{(-1+h)^2 e^{-(-1+h)^2} - \dfrac{1}{e}}{h} = \frac{1}{e}\lim_{h\to+0}\frac{1}{h}((1-2h+h^2)$$
$$\times(1+2h-h^2+o(h^2)) - 1) = 0.$$

同理，$a'_{12\pm}(1) = 0$，$a'_{22\pm}(0) = \pm 1$．**因此，可得**

$$f'(x)=\begin{cases}\begin{pmatrix}\dfrac{1}{1+x^2} & 2xe^{-x^2}(1-x^2)\\ 2xe^{-x^2}(1-x^2) & \operatorname{sgn}x\end{pmatrix}, & \text{当 } 0<|x|<1,\\[2ex] \begin{pmatrix}\dfrac{1}{2} & 0\\ 0 & \operatorname{sgn}x\end{pmatrix}, & \text{当 } |x|>1;\end{cases}$$

$$f'_{\pm}(1)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad f'_{\pm}(0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \pm 1\end{pmatrix},\quad f'_{+}(-1)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{2} & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

由于 $a'_{11\,-}(-1)=+\infty$, **故函数矩阵在** $x=-1$ **没有有限导数**. **在** $x=1$ **点成立等式** $f'_{+}(1)=f'_{-}(1)$, **故** $f'(1)=f'_{+}(1)=f'_{-}(1)$. **在** $x=0$ **点尽管存在单侧导数, 但不相等, 故** $f'(0)$ **不存在**.

11 **证明, 如果函数** $a_{ij}=a_{ij}(x)\,(i,\ j=1,\cdots,n)$ **有有限导数, 那么行列式** $D(x)=\det(a_{ij}(x))$ **的导数可由下列公式之一得到**:

$$D'(x)=\begin{vmatrix}a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x)\\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x)\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x)\end{vmatrix}'=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix}a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x)\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a'_{k1}(x) & a'_{k2}(x) & \cdots & a'_{kn}(x)\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x)\end{vmatrix},\quad(1)$$

$$D'(x)=\begin{vmatrix}a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x)\\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x)\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x)\end{vmatrix}'=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix}a_{11}(x) & \cdots & a'_{1k}(x) & \cdots & a_{1n}(x)\\ a_{21}(x) & \cdots & a'_{2k}(x) & \cdots & a_{2n}(x)\\ \cdots & & \cdots & & \cdots\\ a_{n1}(x) & \cdots & a'_{nk}(x) & \cdots & a_{nn}(x)\end{vmatrix}.\quad(2)$$

根据行列式的定义

$$D(x)=\begin{vmatrix}a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x)\\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x)\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x)\end{vmatrix}=\sum_{s}(-1)^s a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n},$$

其中 s **为排列** $[i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_n]$ **的所有置换, 因此**

$$D'(x)=\left(\sum_{s}(-1)^s a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}\right)'$$

$$=\sum_{s}(-1)^s a'_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}+\sum_{s}(-1)^s a_{i_1 1}a'_{i_2 2}\cdots a_{i_n n}+\cdots+$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{s} (-1)^{s} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a'_{i_n n} \\
&= \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a'_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a'_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a'_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a'_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{vmatrix},
\end{aligned}$$

从而得到公式(2) .

同理, 从定义

$$D(x) = \sum_{s} (-1)^{s} a_{1 i_1} a_{2 i_2} \cdots a_{n i_n}$$

出发, 即可得到公式(1) .

下面介绍一些计算函数在一点及其邻域内导数的例子 .

12　证明: 函数

$$f: x \mapsto \begin{cases} \begin{pmatrix} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & x \\ 0 & e^{x^2} \end{pmatrix}, & x \neq 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & x = 0 . \end{cases}$$

的导数不连续 .

当 $x \neq 0$ 时, 所给矩阵的元素有有限导数, 可以用法则 1.2 及 1.3 求得 . 故由 1.6, 当 $x \neq 0$ 时, 有

$$f': x \mapsto \begin{pmatrix} 2x\sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x} & 1 \\ 0 & 2xe^{x^2} \end{pmatrix} .$$

在 $x = 0$ 点有

$$a'_{11}(0) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin \dfrac{1}{h}}{h} = 0, \quad a'_{12}(0) = 1,$$

$$a'_{21}(0) = 0, \qquad\qquad a'_{22}(0) = 0,$$

其中

$$a_{11}(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$$a_{12}(x) = x, \quad a_{21}(x) = 0, \quad a_{22}(x) = e^{x^2} .$$

因此

$$\boldsymbol{f'}: x \mapsto \varphi(x) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} & 1 \\ 0 & 2xe^{x^2} \end{pmatrix}, & x \neq 0, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, & x = 0 . \end{cases}$$

下面研究函数 φ 的连续性．当 $x \neq 0$ 时，函数 φ 的元素均为初等函数，因此是连续的．考察

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x) = \lim_{x\to 0}\begin{pmatrix} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} & 1 \\ 0 & 2xe^{x^2} \end{pmatrix}.$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}\right)$ **不存在，故** $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)$ **不存在，所以函数 φ 在 $x=0$ 点不连续．**

13　函数

$$f: x \mapsto |x|^n \sin\frac{1}{|x|^m},\quad x \neq 0,\quad f(0) = 0,\quad m > 0$$

在何种条件下满足：

1) **在原点邻域内有有界导数；** 2) **在该邻域内有无界导数？**

1) **当 $x \neq 0$ 时，导数为**

$$f': x \mapsto n|x|^{n-1}\operatorname{sgn}x \cdot \sin\frac{1}{|x|^m} - m|x|^{n-m-1}\operatorname{sgn}x \cdot \cos\frac{1}{|x|^m}, \tag{1}$$

当 $x = 0$ 时，函数 $x \mapsto \sin\dfrac{1}{|x|^m}$ 没有导数，故不能套用上述式子．由定义

$$f'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{|h|^n \sin\dfrac{1}{|h|^m}}{h} = \lim_{h\to 0}|h|^{n-1}\sin\frac{1}{|h|^m}\cdot \operatorname{sgn}h$$

仅当 $n > 1$ 时存在且为 0，因此导数在原点邻域内存在的条件是 $n > 1$．显然，当 $n - m - 1 \geq 0$ 即 $n \geq 1 + m$ 时，导数有界．

2) **仿照公式(1)，如果 $n - 1 < 0$ 或者 $n - m - 1 < 0$，则导数无界，即 $n < 1$ 或者 $n < m + 1$，取 $n < 1 + m$ 就足够了．从另一个角度看，$f'(0)$ 存在必须有 $n > 1$．因此，如果 $1 < n < 1 + m$，则 f' 在所考虑的邻域内无界．**

14　证明：函数

$$f: x \mapsto \begin{cases} x^2\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 . \end{cases}$$

在原点的任一邻域内有导数不存在的点，但在 $x = 0$ 点有有限导数．

函数 $x\mapsto x^2$ 处处可导. 函数 $x\mapsto\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|$ 除了在点 $x=0$ 及 $x=x_k=\frac{2}{2k+1}$, $k\in\mathbb{Z}$ 外处处有导数. 因此函数 f 的导数当 $x\neq 0$ 及 $x\neq x_k$ 时可由乘积求导公式得到. 而在 $x=0$ 及 $x=x_k$ 点, 用定义来求. 由于 $\frac{\Delta f(0)}{h}=h\left|\cos\frac{\pi}{h}\right|$, 故

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}h\left|\cos\frac{\pi}{h}\right|=0,$$

即 f 在 $x=0$ 点有导数. 然而

$$\begin{aligned}
f'_{\pm}\left(\frac{2}{2k+1}\right)&=\lim_{h\to\pm 0}\frac{1}{h}\left(\frac{2}{2k+1}+h\right)^2\left|\cos\frac{\pi(2k+1)}{2+(2k+1)h}\right|\\
&=\frac{4}{(2k+1)^2}\lim_{h\to\pm 0}\frac{1}{h}\left|\cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2}+\frac{\pi(2k+1)}{2+(2k+1)h}-\frac{\pi}{2}(2k+1)\right)\right|\\
&=\frac{4}{(2k+1)^2}\lim_{h\to\pm 0}\frac{1}{h}\left|\sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{2+(2k+1)h}-\frac{\pi(2k+1)}{2}\right)\right|\\
&=\pm\pi,
\end{aligned}$$

即导数 $f'(x_k)$ 不存在. 由于 $\forall\varepsilon>0$, $\exists k\in\mathbb{Z}$, 使 $|x_k|<\varepsilon$, 因此在原点的任意 ε-邻域内存在没有导数的点.

15 证明: 函数

$$f: x\mapsto\begin{cases}\sin^2 x, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$$

仅在点 $x_k=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, 有导数.

函数 f 在 $x\neq x_k$ 时不连续, 故没有导数. 而在 $x=x_k$ 点, 由定义

$$f'(x_k)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_k+h)-f(x_k)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_k+h)}{h}.$$

如果 $x_k+h\in\mathbb{Q}$, 则 $f(x_k+h)=\sin^2(x_k+h)=\sin^2 h$, 从而 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_k+h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin^2 h}{h}=0$.

如果 $x_k+h\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, 则 $f(x_k+h)=0$, 且 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_k+h)}{h}=0$. 总之, $f'(x_k)=0$.

对以下的函数 f 求左导数 f'_- 及右导数 f'_+:

16 $\boldsymbol{f}: x\mapsto\left([x]\sin\pi x,\ \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}\right)$, $x\neq 0$, $\boldsymbol{f}(0)=(0,0)$.

由定义, $\boldsymbol{f}'_{\pm}=(f'_{1\pm}(x), f'_{2\pm}(x))$. 当 $x\neq k$, $k\in\mathbb{Z}$ 时, $f_1'(x)=\pi[x]\cos\pi x$, 故 $f'_{1+}(x)=f'_{1-}(x)=\pi[x]\cos\pi x$, $x\neq k$. 同理, 当 $x\neq 0$ 时, $f_2'(x)=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x(1+e^{\frac{1}{x}})^2}$, 因此, 当 $x\neq 0$ 时 $f'_{2+}(x)=f'_{2-}(x)=f_2'(x)$.

下面计算 $f'_{1\pm}(k)$**及** $f'_{2\pm}(0)$. **有**

$$f'_{1\pm}(k) = \lim_{h\to\pm 0}\frac{f_1(k+h)-f_1(k)}{h} = \lim_{h\to\pm 0}\frac{(-1)^k[k+h]}{h}\sin\pi h,$$

由此

$$f'_{1+}(k) = (-1)^k k\pi,\quad f'_{1-}(k) = (-1)^k(k-1)\pi,$$

$$f'_{2\pm}(0) = \lim_{h\to\pm 0}\frac{f_2(h)-f_2(0)}{h} = \lim_{h\to\pm 0}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{h}}},$$

因此 $f'_{2+}(0)=0$, $f'_{2-}(0)=1$.

综合起来, **当** $x\neq k$, $k\in Z$ **时**,

$$\boldsymbol{f}'_-(x) = \boldsymbol{f}'_+(x) = \pi[x]\cos\pi x,\ \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}+\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x(1+e^{\frac{1}{x}})^2}\ ,$$

当 $k\neq 0$ **时**,

$$\boldsymbol{f}'_+(k) = (-1)^k k\pi,\ \frac{1}{1+e^{\frac{1}{k}}}+\frac{e^{\frac{1}{k}}}{k(1+e^{\frac{1}{k}})^2}\ ,$$

$$\boldsymbol{f}'_-(k) = (-1)^k(k-1)\pi,\ \frac{1}{1+e^{\frac{1}{k}}}+\frac{e^{\frac{1}{k}}}{k(1+e^{\frac{1}{k}})^2}\ ,$$

而当 $k=0$ **时**,

$$\boldsymbol{f}'_+(0) = (0,\ 0),\quad \boldsymbol{f}'_-(0) = (-\pi,\ 1).$$

17 $f:\ x\mapsto\ \ 1-e^{-x^2}$.

当 $u>0$ **时**, **函数** $\varphi:\ u\mapsto\ \ u$**有有限导数**. **函数** $\psi:\ x\mapsto\ \ u=1-e^{-x^2}$ **对所有** x **有导数**. **因此**, **如果** $x\neq 0$, **那么函数** f **有导数**, **并且可以由复合求导法则求出**. **所以**, **当** $x\neq 0$ **时有**

$$f'_+(x) = f'_-(x) = f'(x) = \frac{xe^{-x^2}}{\ \ 1-e^{-x^2}}.$$

在 $x=0$ **点求** $f'_+(0)$**及** $f'_-(0)$**为**:

$$f'_\pm(0) = \lim_{h\to\pm 0}\frac{1}{h}\ \ 1-e^{-h^2} = \lim_{h\to\pm 0}\frac{|h|}{h}\ \ \frac{1-e^{-h^2}}{h^2}$$

$$= \pm\lim_{h\to\pm 0}\ \ \frac{1-e^{-h^2}}{h^2} = \pm 1.$$

18 **证明**: **函数**

$$f:\ x\mapsto\begin{cases}\dfrac{\arcsin x^2}{x}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

在 $x=0$ 点连续,但在该点既无左导数,也无右导数.

由于 $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{\arcsin h^2}{h}\sin\frac{1}{h}\right)=0$,$f(0)=0$,根据连续的定义即知 f 在 $x=0$ 点连续.进一步

$$f'_{\pm}(0)=\lim_{h\to\pm 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to\pm 0}\frac{\arcsin h^2}{h^2}\sin\frac{1}{h}.$$

如果取 $h=h_k=\frac{1}{2k\pi}$,且 $k\to\pm\infty$,则 $\lim\limits_{k\to\pm\infty}\frac{\arcsin h_k^2}{h_k^2}\sin\frac{1}{h_k}=0$;而当 $h=h_k=\frac{1}{2k\pi+\pi/2}$,且 $k\to\pm\infty$时,$\lim\limits_{k\to\pm\infty}\frac{\arcsin h_k^2}{h_k^2}\sin\frac{1}{h_k}=1$.

综上,单侧导数不存在.

19　在下列函数的间断点处作连续延拓,然后求单侧导数 $f'_+(x_0)$及 $f'_-(x_0)$:

1) $f: x\mapsto\frac{x^2+x^3}{x}$;　　2) $f: x\mapsto\operatorname{sgn}(x-x^3)$.

1) $x_0=0$ 为第一类间断点.首先求出 $f(\pm 0)$,

$$f(\pm 0)=\lim_{h\to\pm 0}\frac{h^2+h^3}{h}=\lim_{h\to\pm 0}\frac{|h|}{h}=\pm 1.$$

由导数定义,得

$$f'_{\pm}(0)=\lim_{h\to\pm 0}\frac{h^2+h^3\mp h}{h^2}=\lim_{h\to\pm 0}\frac{h^2+h^3-|h|}{h^2}$$

$$=\lim_{h\to\pm 0}\frac{1+h-1}{|h|}=\lim_{h\to\pm 0}\frac{1+h-1}{h}\cdot\lim_{h\to\pm 0}\frac{h}{|h|}=\pm\frac{1}{2}.$$

2) 间断点为 $x_1=0$,$x_{2,3}=\pm 1$.先求出

$$f(\pm 0)=\lim_{h\to\pm 0}\operatorname{sgn}h(1-h^2)=\pm 1,$$

$$f(1\pm 0)=\lim_{h\to\pm 0}\operatorname{sgn}((1+h)(1-(1+h)^2))=\mp 1,$$

$$f(-1\pm 0)=\lim_{h\to\pm 0}\operatorname{sgn}((-1+h)(1-(-1+h)^2))=\mp 1.$$

由导数定义有

$$f'_{\pm}(0)=\lim_{h\to\pm 0}\frac{\operatorname{sgn}h(1-h^2)\mp 1}{h}=\lim_{h\to\pm 0}\frac{\pm 1\mp 1}{h}=0,$$

$$f'_{\pm}(1)=\lim_{h\to\pm 0}\frac{\operatorname{sgn}((1+h)(1-(1+h)^2))\pm 1}{h}=\lim_{h\to\pm 0}\frac{\operatorname{sgn}(-2h-3h^2-h^3)\pm 1}{h}$$

$$=\lim_{h\to\pm 0}\frac{\mp 1\pm 1}{h}=0,$$

$$f'_{\pm}(-1)=\lim_{h\to\pm 0}\frac{\operatorname{sgn}((-1+h)(1-(-1+h)^2))\pm 1}{h}$$

$$=\lim_{h\to\pm 0}\frac{\operatorname{sgn}(-2h+3h^2-h^3)\pm 1}{h}=\lim_{h\to\pm 0}\frac{\hat{e}\ 1\pm 1}{h}=0.$$

20 试问：函数 f 在其间断点处能否有有限导数，或者无限导数？

众所周知，函数在其导数有限的点处是连续的，因此，在 f 的间断点处不可能有有限导数.

而对于无限导数，是可能的.举例如下：

$f(x)=\operatorname{sgn}x$，在 $x=0$ 点，有

$$f'_-(0)=\lim_{h\to -0}\frac{\operatorname{sgn}h}{h}=-\lim_{h\to -0}\frac{1}{h}=+\infty,\quad f'_+(0)=\lim_{h\to +0}\frac{\operatorname{sgn}h}{h}=+\infty.$$

21 如果：1) 函数 f 在 x_0 点有导数，函数 g 在 x_0 点没有导数；2) 函数 f 和 g 在 x_0 点都没有导数，能否断定和函数 $F(x)=f(x)+g(x)$ 在 x_0 点没有导数？

1) 由定义

$$F'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta F(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\Delta f(x_0)}{h}+\frac{\Delta g(x_0)}{h}\right).\tag{1}$$

由假设函数 f 在 x_0 点有导数，而 g 没有.可设 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{h}=f'(x_0)$，而 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\Delta g(x_0)}{h}$ 不存在.由反证法易知(1)中的极限不存在，即 $F'(x_0)$ 不存在.

2) 在某些情况下，即使 f，g 的导数都不存在，$F'(x_0)$ 还是存在的.例如，取 $F(x)=\psi(x)+(\varphi(x)-\psi(x))$，其中 $\psi(x)$ 在 x_0 点没有导数，而 $\varphi(x)$ 有导数.

22 如果：1) 函数 f 在 x_0 点有导数，函数 g 在 x_0 点没有导数；2) 函数 f 和 g 在 x_0 点都没有导数，能否断定积 $F(x)=f(x)g(x)$ 在 x_0 点没有导数？

1) 一般讲，不能断定.由定义

$$F'(x_0)=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\Delta f(x_0)}{h}g(x_0)+f(x_0+h)\frac{\Delta g(x_0)}{h}\right).\tag{1}$$

分析(1)式，可以得到上述结论.如果函数 g 对 $|x-x_0|<\delta(\delta>0)$ 有定义，$f(x_0)=0$，$\left|\frac{\Delta g(x_0)}{h}\right|\leq M$（$M$ 为常数），则 $F'(x_0)$ 存在.例如，$f(x)=x$，$g(x)=|x|$，$x_0=0$，则 $F'(0)=0$.

2) 如果极限 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{h}$ 与 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\Delta g(x_0)}{h}$ 都不存在，但满足

$$g(x_0)=0,\quad f(x_0)=0,\quad \left|\frac{\Delta g(x_0)}{h}\right|\leq M,$$

函数 f 和 g 在 $x=x_0$ 点连续，则极限(1)存在.例如取 $f: x\mapsto |x|$，$g: x\mapsto |x|$，在 $x=0$ 点两个函数均无导数,但其积 $f(x)g(x)=x^2$，显然有导数，且为 0.

23 设 $f: E\subset\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，其中集合 E 有极限点 $x_0\in E$.有限极限

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\in E)}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_E(x_0) \tag{1}$$

称为函数 f 在点 x_0 处关于集合 E 的导数.

试求下列函数 f 在点 x_0 处关于集合 E 的导数:

1) $f(x)=1$, $E=\left\{x\mid x=0,\ x=1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots\right\}$;

2) $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\end{cases}$ $E=\mathbb{Q}$.

1) 集合 E 有唯一的极限点 $x_0=0$. 由公式(1)

$$f'_E(x_0)=\lim_{\substack{x\to 0\\(x\in E)}}\frac{1-1}{x}=0.$$

2) 集合$\mathbb{R}$中的任意点都是集合$\mathbb{Q}$的极限点. 根据(1), 只考虑位于集合$\mathbb{Q}$中的极限点. 设 $x_0\in\mathbb{Q}$, 则

$$f'_E(x_0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\in\mathbb{Q})}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\in\mathbb{Q})}}\frac{x^2-x_0^2}{x-x_0}=2x_0.$$

24 设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$: $\mathbb{R}\to E^n$, $\boldsymbol{a}=(a_1(x), a_2(x), \cdots, a_n(x))$, $\boldsymbol{b}=(b_1(x), b_2(x), \cdots, b_n(x))$, $x\in(c, d)$. 分量 a_i, b_i 在(c, d)上有有限导数. 证明其标量积$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$也有导数, 且成立公式

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})'=(\boldsymbol{a}', \boldsymbol{b})+(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}').$$

由定义

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})' &=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}((\boldsymbol{a}(x_0+h), \boldsymbol{b}(x_0+h))-(\boldsymbol{a}(x_0), \boldsymbol{b}(x_0)))\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}((\boldsymbol{a}(x_0+h)-\boldsymbol{a}(x_0), \boldsymbol{b}(x_0+h))+(\boldsymbol{a}(x_0), \boldsymbol{b}(x_0+h)-\boldsymbol{b}(x_0)))\\ &=\lim_{h\to 0}\left(\left(\frac{\Delta\boldsymbol{a}(x_0)}{h}, \boldsymbol{b}(x_0+h)\right)+\left(\boldsymbol{a}(x_0), \frac{\Delta\boldsymbol{b}(x_0)}{h}\right)\right)\\ &=(\boldsymbol{a}'(x_0), \boldsymbol{b}(x_0))+(\boldsymbol{a}(x_0), \boldsymbol{b}'(x_0)).\end{aligned}$$

在以上证明过程中用了以下命题:

1) $\boldsymbol{a}'$, $\boldsymbol{b}'$导数的存在性取决于其分量.

2) 标量积具有连续性, 因此可以与极限交换顺序.

3) 标量积具有齐次性, 因此 h^{-1} 可以进入括号内.

4) 向量值函数在 x_0 点连续.

25 设 $\boldsymbol{f}$: $(a, b)\to E$, E 为欧几里得空间. $\boldsymbol{f}$ 在 $x_0\in(a, b)$的导数定义为

$$\boldsymbol{f}'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}(\boldsymbol{f}(x_0+\Delta x)-\boldsymbol{f}(x_0)). \tag{1}$$

证明: 如果 $\boldsymbol{A}(x)$, $\boldsymbol{y}(x)$ 分别是在 (a, b) 上有有限导数的函数矩阵和向量值函数, 则 $\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}(x)$ 的导数满足公式

$$(\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}(x))' = \boldsymbol{A}'(x)\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}'(x).$$

由定义(1)有

$$(\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}(x))'\Big|_{x=x_0} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\boldsymbol{A}(x_0+h)\boldsymbol{y}(x_0+h) - \boldsymbol{A}(x_0)\boldsymbol{y}(x_0)),\ x_0 \in (a, b). \quad (2)$$

由于导数 $\boldsymbol{A}'(x_0)$, $\boldsymbol{y}'(x_0)$ 均存在, 故有极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\Delta\boldsymbol{A}(x_0)}{h} = \boldsymbol{A}'(x_0)$, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\Delta\boldsymbol{y}(x_0)}{h} = \boldsymbol{y}'(x_0)$, 对(2)求极限

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}(x))'\Big|_{x=x_0} &= \lim_{h\to 0}\frac{\Delta\boldsymbol{A}(x_0)}{h}\boldsymbol{y}(x_0+h) + \lim_{h\to 0}\boldsymbol{A}(x_0)\frac{\Delta\boldsymbol{y}(x_0)}{h}\\ &= \boldsymbol{A}'(x_0)\boldsymbol{y}(x_0) + \boldsymbol{A}(x_0)\boldsymbol{y}'(x_0).\end{aligned}$$

26 设 $\boldsymbol{A}(x)$ 为方阵, 有有限导数及逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}(x)$. 证明: $(\boldsymbol{A}^{-1}(x))' = -\boldsymbol{A}^{-1}(x)\boldsymbol{A}'(x)\boldsymbol{A}^{-1}(x)$.

应用 25 题中的定义(1), 可以证明, 对于两个有有限导数的矩阵 $\boldsymbol{A}(x)$, $\boldsymbol{B}(x)$, 其积的导数有公式

$$(\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{B}(x))' = \boldsymbol{A}'(x)\boldsymbol{B}(x) + \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{B}'(x),$$

由此

$$(\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{A}^{-1}(x))' = \boldsymbol{A}'(x)\boldsymbol{A}^{-1}(x) + \boldsymbol{A}(x)(\boldsymbol{A}^{-1}(x))'.$$

由于 $\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{A}^{-1}(x) = \boldsymbol{I}$(单位阵), 从而

$$\boldsymbol{A}'(x)\boldsymbol{A}^{-1}(x) + \boldsymbol{A}(x)(\boldsymbol{A}^{-1}(x))' = \boldsymbol{0}\ (\text{零矩阵}).$$

最后在上式两边同时左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}(x)$, 移项即得所求.

27 设 $\boldsymbol{A}(x)$ 为一方阵, 有有限导数. 下述公式是否总是正确的?

$$(\boldsymbol{A}^n(x))' = n\boldsymbol{A}^{n-1}(x)\boldsymbol{A}'(x),\ n\in\mathrm{N}. \quad (1)$$

当 $n=2$ 时的结果可知, 上述公式一般是不正确的. 事实上,

$$(\boldsymbol{A}^2(x))' = (\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{A}(x))' = \boldsymbol{A}'(x)\boldsymbol{A}(x) + \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{A}'(x).$$

由此可知, 如果 $\boldsymbol{A}(x)$ 与 $\boldsymbol{A}'(x)$ 可交换乘积, 则公式(1)将是正确的. 一般情况下, $\boldsymbol{A}(x)$ 与 $\boldsymbol{A}'(x)$ 可交换是公式(1)成立的充分条件. 由公式(1), 有

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}^{n+1}(x))' &= (\boldsymbol{A}^n(x)\boldsymbol{A}(x))' = (\boldsymbol{A}^n(x))'\boldsymbol{A}(x) + \boldsymbol{A}^n(x)\boldsymbol{A}'(x)\\ &= n\boldsymbol{A}^{n-1}(x)\boldsymbol{A}'(x)\boldsymbol{A}(x) + \boldsymbol{A}^n(x)\boldsymbol{A}'(x)\\ &= n\boldsymbol{A}^{n-1}(x)\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{A}'(x) + \boldsymbol{A}^n(x)\boldsymbol{A}'(x)\\ &= (n+1)\boldsymbol{A}^n(x)\boldsymbol{A}'(x),\end{aligned}$$

由数学归纳法可知, 公式(1) $\forall n\in\mathrm{N}$ 都成立.

28 求和 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$.

由于 $1^3+2^3x+3^3x^2+\cdots+n^3x^{n-1}=(xQ_n(x))'$，其中

$$Q_n(x)=\frac{n^2x^{n+2}-(2n^2+2n-1)x^{n+1}+(n+1)^2x^n-x-1}{(x-1)^3},\quad x\neq 1,$$

因此

$$\begin{aligned}1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3&=\lim_{x\to 1}(xQ_n(x))'\\&=\lim_{x\to 1}Q_n(x)+\lim_{x\to 1}Q_n'(x)\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.\end{aligned}$$

29　设

$$\boldsymbol{A}(x)=\begin{pmatrix}\sin\omega x & \cos\omega x\\ -\cos\omega x & \sin\omega x\end{pmatrix},\ \omega\text{为常数}.$$

证明矩阵 $\boldsymbol{A}(x)$满足微分方程

$$\boldsymbol{A}''(x)+\omega^2\boldsymbol{A}(x)=\boldsymbol{0},\ \text{其中}\ \boldsymbol{A}''(x)=(\boldsymbol{A}'(x))'.$$

求导

$$\boldsymbol{A}'(x)=\omega\begin{pmatrix}\cos\omega x & -\sin\omega x\\ \sin\omega x & \cos\omega x\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}''(x)=-\omega^2\begin{pmatrix}\sin\omega x & \cos\omega x\\ -\cos\omega x & \sin\omega x\end{pmatrix},$$

即知满足方程.

30　设 $\boldsymbol{S}_n(x)=\boldsymbol{I}+x\boldsymbol{A}+\dfrac{x^2\boldsymbol{A}^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n\boldsymbol{A}^n}{n!}$，其中 $\boldsymbol{A}$为常数方阵. 试建立 $S_n(x)$满足的微分方程.

对 $\boldsymbol{S}_n(x)$求导

$$\boldsymbol{S}_n'(x)=\boldsymbol{A}+\frac{x\boldsymbol{A}^2}{1!}+\frac{x^2\boldsymbol{A}^3}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\boldsymbol{A}^n.$$

然后用 $\boldsymbol{A}$乘 $\boldsymbol{S}_n(x)$减去 $\boldsymbol{S}_n'(x)$，即有

$$\boldsymbol{S}_n'(x)-\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}_n+\frac{x^n}{n!}\boldsymbol{A}^{n+1}=\boldsymbol{0},$$

此即要求的方程.

练　习　题

求下列函数的导数:

1　f: x'　$\dfrac{5}{128}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|-\dfrac{5}{64}\arctan x-\dfrac{x^5}{8(x^4-1)^2}-\dfrac{5x}{32(x^4-1)}$.

2　f: x'　4　$x+2-1-2\ \ 2\ \arctan\dfrac{x+2-1}{2}+1$.

3　f: x'　$\ln\left|\tan\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|-\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{3\sin^3 x}+4$.

4 $f: x \mapsto \dfrac{1}{8\sqrt{2}} \ln \dfrac{e^{\frac{x^2}{2}} + \sqrt{2}e^{\frac{x^2}{4}} + 1}{e^{\frac{x^2}{2}} - \sqrt{2}e^{\frac{x^2}{4}} + 1} + \dfrac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \dfrac{e^{\frac{x^2}{2}} - 1}{\sqrt{2}e^{\frac{x^2}{4}}} - e^{\frac{x^2}{4}} (2(e^{x^2} + 1))^{-1} + 3$.

5 $f: x \mapsto \arctan \quad \cos 2x - \quad \cos 2x$.

6 $f: x \mapsto \sin^2(\omega\cos\alpha x) + \cos^2(\omega\sin\alpha x)$.

7 $f: x \mapsto \dfrac{e^{-\alpha x^2}}{1+\beta x^2}$.

8 $f: x \mapsto \dfrac{\operatorname{sh}\alpha x + \sin\alpha x}{\operatorname{ch}\alpha x + \cos\alpha x}$.

9 $f: x \mapsto \arcsin(\cos nx + \sin nx)$.

10 $f: x \mapsto \sin(\arcsin\alpha x + \arccos\alpha x)$.

11 $f: x \mapsto A\sin^{\alpha}(\beta x + \gamma)$.

12 $f: x \mapsto \dfrac{xy}{x^2 + y^2 + 1}$.

13 $f: x \mapsto \dfrac{xt^2}{t + x^2}$.

14 $f: x \mapsto \cot(a\tan(b\arctan(cx)))$.

15 $f: x \mapsto \log_a \dfrac{x+1}{x+b} ^{c}$.

16 $f: x \mapsto e^{-t^2\sin(xy)}$.

17 $f: x \mapsto \ln^a(\ln^b(\ln^c x))$.

18 $f: x \mapsto x^{\sin x} + (\sin x)^x$.

19 $f: x \mapsto x^{x^{x^x}}$.

20 $f: x \mapsto x^{(\ln x)^x}$.

求下列向量值函数的导数:

21 $\boldsymbol{f}: x \mapsto \left(\arccos\dfrac{1}{x},\ \arcsin(\sin x),\ \sin u(x),\ \cos v(x)\right)$.

22 $\boldsymbol{f}: x \mapsto (e^{-u^2(x)},\ \operatorname{th} u^3(x),\ \operatorname{ch} u^4(x),\ \operatorname{sh} u^5(x))$.

23 $\boldsymbol{f}: x \mapsto (2tx,\ 3t - x^3,\ \sin\omega t,\ \cos\omega t)$.

24 $\boldsymbol{f}: t \mapsto \left(e^{\alpha t}\cos t,\ e^{\alpha t}\sin t,\ u\left(\dfrac{1}{t}\right),\ u(\sin t)\right)$.

25 $\boldsymbol{f}: \varphi \mapsto (\rho(\varphi)\sin\varphi,\ \rho(\varphi)\cos\varphi,\ \varphi^2 - x\varphi,\ \varphi^3 - x^2\varphi)$.

26 $\boldsymbol{f}: \rho \mapsto (\rho\sin\varphi(\rho),\ \rho\cos\varphi(\rho),\ \varphi^2(\rho) - x\varphi(\rho),\ \varphi^3(\rho^2) - x^2\varphi(\rho^2))$.

27 $\boldsymbol{f}: x \mapsto (\sin(e^{2x}),\ e^{\sin^2 x},\ \psi(\sin^2 x),\ \varphi(\cos^2 x))$.

28 $\boldsymbol{f}: x \mapsto \left(u(x) + v(x),\ \arctan\dfrac{u(x)}{v(\sin x)},\ e^{-u(x)v(x)}\right)$.

29 $\boldsymbol{f}: x \mapsto \left(f_1\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right),\ f_2(u(x)v(x)),\ f_3(\sin u(v(x)))\right)$.

30 1) $\boldsymbol{f}: x \mapsto \left(\sum_{k=1}^{n} f_k^2(x),\ x\right)$; 2) $\boldsymbol{f}: x \mapsto \left(\dfrac{1}{2}|f(x)|,\ x^2\sin x,\ x^2\cos x\right)$.

31 **在曲线上求点,使过该点的切线与所给向量共线.已知曲线为(在有限维欧氏空间 E 内):**

1) $\boldsymbol{f}: t \mapsto (3\cos t,\ 4\sin t,\ 5t)$, $0 \leq t < 2\pi$, $\boldsymbol{a} = (0, 4, 5)$.

2) $\boldsymbol{f}: t \mapsto (t,\ t^2,\ t^3)$, $0 \leq t \leq 4$, $\boldsymbol{a} = (2, 4, 6)$.

3) $\boldsymbol{f}: t \mapsto (e^t,\ e^{-t},\ \operatorname{sh} t)$, $-\infty < t < +\infty$, $\boldsymbol{a} = (1, -1, 0)$.

32 **求曲线上质点运动的速度,已知运动矢径为:**

1) $\boldsymbol{f}(t) = (\sin t,\ 3\cos t)$, **在** $t = \pi$ **时刻;** 2) $\boldsymbol{f}(t) = (\sin t^2,\ 3\cos t^2)$, **在** $t = \quad \pi$ **时刻;**

3) $\boldsymbol{f}(t) = \left(\sin\dfrac{1}{t},\ \cos\dfrac{1}{t},\ \dfrac{1}{t}\right)$ **在** $t = \dfrac{1}{\pi}$ **时刻.**

33　在下列已给向量值函数的轨道上求平稳点:

1) $\boldsymbol{f}: \mapsto (\sin(t^2x), \cos(tx), \operatorname{ch}t)$;

2) $\boldsymbol{f}: t \mapsto \left(\frac{3}{2}t^2 + (1-x)t,\ 2t^2 - xt + 1,\ \frac{t^3}{3} + x^2t - 17t\right)$;

3) $\boldsymbol{f}: t \mapsto \left(xt + 2t^2 + 3t,\ 2xt + \frac{5}{2}t^2 - 4t + 3\right)$.

34　证明下列向量函数的轨道正交:

1) $\boldsymbol{f}_1: t \mapsto (t\sin t, t\cos t, 1)$, $\boldsymbol{f}_2: t \mapsto (t\cos t, -t\sin t, 2)$;

2) $\boldsymbol{f}_1: t \mapsto \left(\frac{1}{2}|f_1(t)|, u^2(t), u^2(t)\right)$, $\boldsymbol{f}_2: t \mapsto \left(\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}, 1\right)t$.

35　质量为 m_k 的质点系按下列轨道运动, 求动能:

1) $\boldsymbol{f}_k: t \mapsto \left(\frac{t^k}{k}, \sin\omega t, \cos\omega t\right)$ $(k = 1, \cdots, n;\ m_k = 1)$;

2) $\boldsymbol{f}_k: t \mapsto (\arcsin(\sin kt), \arccos(\cos kt))$ $(k = 1, \cdots, n;\ m_k = k\rho)$.

36　求下列复值函数的导数:

1) $f: x \mapsto x\ln x + \mathrm{i}\mathrm{e}^{-x^3}$;　　2) $f: x \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}(\cos\alpha x + \mathrm{i}\sin\alpha x)$;

3) $f: x \mapsto \cos^2(x + \mathrm{i}x^3)$;　　4) $f: x \mapsto \ln^3(2x + \mathrm{i}x^2)$.

求下列函数矩阵的导数:

37　$\boldsymbol{f}: x \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{sh}x^2 & \operatorname{ch}x^2 \\ \operatorname{th}x^2 & \operatorname{cth}x^2 \end{pmatrix}$.　　**38**　$\boldsymbol{f}: x \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{\ln x} & \frac{\sin x}{x} \\ \mathrm{e}^{u(x)} & u(\mathrm{e}^x) \end{pmatrix}$.

39　$\boldsymbol{f}: x \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x^2+y}{x^2-y} & \sin^x(xy) \\ (xy)^{\sin y} & y^{\sin(xy)} \end{pmatrix}$.　　**40**　$\boldsymbol{f}: x \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}|f(x)| & \sin\omega x \\ \cos\omega x & x \end{pmatrix}$.

41　$\boldsymbol{f}: x \mapsto \begin{pmatrix} x + \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x^3} + 1 & \sin^x(\sin^x x) & \ln^x(\ln^x x) \\ \arccos(\arctan(\operatorname{arsh}x^x)) & 1 & |x - |x|| \end{pmatrix}$.

42　$\boldsymbol{f}: x \mapsto \begin{pmatrix} \overbrace{u(u\cdots u(x))}^{n\text{重}} & \frac{u(x)}{1+u^2(x)} & \ln(u(x)\ln u(x)) \\ 0 & \sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left|\cos\frac{x}{2^k}\right| & \sum\limits_{k=1}^{n}u^k(x) \end{pmatrix}$.

求下列函数 f 关于集合 E 的导数:

43　$f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$, 当 $x = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

44　$f(x) = \sin 2x$, 当 $x \in E$, $E = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{4}, \cdots\right\}$.

45　$f(x) = x\ln(1 + x^3)$, 当 $x \in E$, $E = \left\{1, \sqrt{2}, \frac{4}{3}, \sqrt[3]{3}, \frac{7}{6}, \sqrt[4]{4}, \cdots\right\}$.

46　$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, 当 $x \in E$, $E = \mathbb{Q}$.

47　**设** $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(x)$, $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}(x)$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}(x)$ **为向量值函数**, $\boldsymbol{a}(x)$, $\boldsymbol{b}(x)$, $\boldsymbol{c}(x)\in E^3$, **均有有限导数**, **证明**:

1) $[\boldsymbol{a}(x), \boldsymbol{b}(x)]'=[\boldsymbol{a}'(x), \boldsymbol{b}(x)]+[\boldsymbol{a}(x), \boldsymbol{b}'(x)]$;

2) $(\boldsymbol{a}(x)\boldsymbol{b}(x)\boldsymbol{c}(x))'=(\boldsymbol{a}'(x)\boldsymbol{b}(x)\boldsymbol{c}(x))+(\boldsymbol{a}(x)\boldsymbol{b}'(x)\boldsymbol{c}(x))+(\boldsymbol{a}(x)\boldsymbol{b}(x)\boldsymbol{c}'(x))$.

48　**求下列行列式的导数**:

1) $\begin{vmatrix} \sin x^2 & \cos x^2 \\ -\cos x^2 & \sin x^2 \end{vmatrix}$;　2) $\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ x^2 & x^3 & x^4 \\ x^3 & x^4 & x^5 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^{2x} & e^{3x} & e^{4x} \\ e^{3x} & e^{4x} & e^{5x} \end{vmatrix}$;　4) $\begin{vmatrix} \sin x & \sin 2x & \sin 3x & \sin 4x \\ \sin 2x & \sin 3x & \sin 4x & \sin 5x \\ \sin 3x & \sin 4x & \sin 5x & \sin 6x \\ \sin 4x & \sin 5x & \sin 6x & \sin 7x \end{vmatrix}$.

49　**设** $\boldsymbol{A}(x)$, $\boldsymbol{B}(x)$ **为二函数方阵**, **均有有限导数**, **证明**

$$(\det(\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{B}(x)))'=(\det\boldsymbol{A}(x))'\det\boldsymbol{B}(x)+\det\boldsymbol{A}(x)(\det\boldsymbol{B}(x))'.$$

求下列函数的导数:

50　$f(x)=\begin{cases} \sin^2\pi x, & x\in\mathbb{Q}, \\ 0, & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}. \end{cases}$

51　1) $f(x)=\inf\limits_{0\leq\xi\leq x}\{\cos\xi\}$;　2) $f(x)=\sup\limits_{\frac{\pi}{2}\leq\xi\leq x}\{\cos\xi\}$.

52　$f(x)=\cos\dfrac{\pi x}{2}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n^{|x|}}$.

53　1) $f(x)=\varphi(\varphi(x))$;　2) $f(x)=\varphi(\psi(x))$;　3) $f(x)=\psi(\varphi(x))$;

4) $f(x)=\psi(\psi(x))$, **其中**

$$\varphi(x)=\begin{cases} x, & \text{当 } |x|\leq 1, \\ x^2, & \text{当 } |x|>1, \end{cases}\qquad \psi(x)=\begin{cases} e^x, & 0\leq x<+\infty, \\ 1, & -\infty<x<0. \end{cases}$$

54　$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\operatorname{ch}\dfrac{x}{2^k}$.

55　1) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\arctan\dfrac{\pi n^2+4kx^2}{4n^2-\pi kx^2}$;　2) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\sin\dfrac{k^2x}{n^3}\right)$;

3) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\sin\left(\dfrac{k}{n}+x^2\right)$.

求下列函数的左、右导数:

56　1) $f: x\mapsto\varphi\left(\dfrac{1}{x}\right)$, **其中** $\varphi(t)$ **为到最近整数的距离**;

2) $f: x\mapsto\min(\tan x, 2-\sin 2x)$, $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$;

3) $f: x\mapsto\max(4^{|x|-1}, x^2)$.

57　$f: x\mapsto[x^2]|\sin\pi x^2|$.

58　1) $f: x \mapsto \dfrac{1}{1-2^{\frac{x}{1-x}}}$, $x \neq 1$, $f(1)=1$;　2) $f: x \mapsto \left(1-2^{\frac{x}{1-x}}\right)^{-1}$, $x \neq 1$, $f(1)=0$.

59　1) $f: x \mapsto \overline{\lim\limits_{t\to\infty}} e^{x\sin t^2}$;　2) $f: x \mapsto \underline{\lim\limits_{t\to\infty}} e^{x\sin t^2}$.

60　$f: x \mapsto [x]^{[x]}$, $x \geq 1$.　　**61**　$f: x \mapsto \begin{cases} |\sin\pi x|^{\frac{3}{2}}, & x \in \mathrm{Q}, \\ 0, & x \in \mathrm{R} \setminus \mathrm{Q}. \end{cases}$

62　**求函数 f 在间断点 x_0 的左、右导数 $f'_-(x_0)$, $f'_+(x_0)$:**

1) $f(x) = |x|^{|x|}$;　2) $f(x) = \dfrac{1}{1-\ln|\sin x|}$.

63　**在什么条件下函数**

$$f: x \mapsto |x|^{2\alpha}[|x|^{2\beta}], \quad x \neq 0, \quad f(0)=0$$

在 $x=0$ 点有有限导数?

64　**设**

$$f_k(x) = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^k \mathrm{C}_n^i x^i (1-x)^{n-i}, \ k \in \mathrm{N}.$$

确定函数 f_k 的递推关系.

65　**迪尼(Dini)数定义为**

$$D^{\pm} f(x) = \overline{\lim_{h\to\pm 0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}, \quad D_{\pm} f(x) = \underline{\lim_{h\to\pm 0}} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

求下列函数的迪尼数:

1) $f: x \mapsto \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x>0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$　2) $f: x \mapsto \begin{cases} ax\sin^2\dfrac{1}{x} + bx\cos^2\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

66　**设**

$$D_{k+1}(x) = \frac{D_k^2(x)}{(1-x^2D_k^2(x))D_{k-1}}, \ k=1,\cdots,19, \ D_0=1, \ D_1=\frac{1}{2},$$

求 $D'_{20}(x)$.

提示: 函数 D_k 可以写成 $D_k(x) = \dfrac{Aa^k}{1-ba^{2k}}$, A, a, b **待定函数.**

求下列函数的导数:

67　$f: x \mapsto \begin{cases} x, & \text{当} |x| \leq 1, \\ \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{3}\operatorname{sgn} x, & \text{当} |x| > 1. \end{cases}$　**68**　$f: x \mapsto \dfrac{[x]}{\pi}([x]-(-1)^{[x]}\cos\pi x)$, $x \geq 0$.

69　$f: x \mapsto \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{4}\ \ x-[x]-\dfrac{1}{2}\ \ 1-2\left|x-[x]-\dfrac{1}{2}\right|$.

70　**证明, 由函数 f 左右导数不相等的点构成的集合, 至多是可数集.**

71　**举例说明, 一般情况下**

$$f'_+(x_0) \neq f'(x_0+0), \quad f'_-(x_0) \neq f'(x_0-0).$$

72　**能否断言, 如果 $f'(x_0+0) = f'(x_0-0)$, 则函数 f 在点 x_0 连续?**

73　**定义数列(x_n)的导数为**

$$x_n' \stackrel{\text{def}}{=} x_{n+1} - x_n,\quad n \in \mathbf{N},$$

试求: 1) $(x_n y_n)'$; 2) $(\ln x_n)'$; 3) $(e^{x_n})'$; 4) $(x_n + y_n)'$; 5) $(\varphi(x_n))'$;

6) $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)'$; 7) $(2^n)'$; 8) $(\sin n^2)'$; 9) $(\arctan n)'$.

74 **求下列曲线在给定点处的切线方程**:

1) $\boldsymbol{f}(t) = (\sin t, \cos t, 4t)$, $M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \pi\right)$;

2) $\boldsymbol{f}(t) = (\arctan t^2, \arcsin t, \operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t)$, $M(0, 0, 0, 1)$.

75 **求下列曲线在给定点处的法平面方程**:

1) $\boldsymbol{f}(t) = (t, t^2, t^3)$, $M(1, 1, 1)$;

2) $\boldsymbol{f}(t) = \left(\frac{e^{-t^2}}{2}, \ln|f(t)|, \alpha t^2, t\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t\right)$, **当** $t = 1$ **时**, **其中** $\alpha = \frac{e^2}{2} - e^{-2} - 1$.

76 **求曲线** $\boldsymbol{f}_1(t)$, $\boldsymbol{f}_2(t)$**在交点处的夹角**:

1) $\boldsymbol{f}_1(t) = \left(e^{-2t}, \frac{t}{t+1}, \operatorname{th} t\right)$, $\boldsymbol{f}_2(t) = (t+1, \sin 3t, t e^{\operatorname{sh} t})$;

2) $\boldsymbol{f}_1(t) = (t, t^2, t^3, t^4, t^5)$, $\boldsymbol{f}_2(t) = (\sin t, \sin 2t, \sin 3t, \sin 4t, \sin 5t)$.

77 **证明**: **向量值函数** $\boldsymbol{X}$: $t \mapsto (\sin t, -\cos t, e^{-t})^{\mathrm{T}}$ **满足方程**

$$\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{f}(t),$$

其中

$$\boldsymbol{A}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 1 & -\sin t \\ \cos t & \sin t & t^4 \\ \ln|t| & \tan t \ln|t| & t \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ \sin t - t^4 e^{-t} \\ -e^{-t}(1+t) \end{pmatrix}.$$

78 **求向量值函数** $\boldsymbol{f}$, **使得向量值函数** $\boldsymbol{X}$: $t \mapsto (t, t^2, t^3)$**满足方程**

$$\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{f}(t),$$

其中

$$\boldsymbol{A}(t) = \begin{pmatrix} -2t & 2 & t^{-3} \\ 0 & -t & 1 \\ t^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

79 **证明**: **向量值函数** $\boldsymbol{X}$: $t \mapsto \operatorname{diag}\boldsymbol{A}(t)$**满足方程**

$$\boldsymbol{X}'(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{X}(t) + \boldsymbol{f}(t),$$

其中

$$\boldsymbol{A}(t) = \begin{pmatrix} \sin t & \cos t \\ \sin t & -\cos t \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \cos 2t \\ \sin t - 1 \end{pmatrix}.$$

80 **验证**, **下面两个复值函数**

$$f: x \mapsto \cos\lambda x + \mathrm{i}\sin\lambda x, \quad f: x \mapsto \frac{x^2 + 3\mathrm{i}}{x^2 - 3\mathrm{i}},$$

分别满足方程:

1) $f'(x) - \mathrm{i}\lambda f(x) = 0$; 2) $(x^2 + 3\mathrm{i}) f'(x) + 12x\mathrm{i} f^2(x) = 0$.

81 **求矩阵** $\boldsymbol{A}(t)$**的特征值的导数**:

1) $\boldsymbol{A}(t) = \begin{pmatrix} t & t^2 \\ t^3 & t^4 \end{pmatrix}$; 2) $\boldsymbol{A}(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t \\ -\operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t \end{pmatrix}$;

3) $\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}1 & t & t^2\\ t & t^2 & t^3\\ t^2 & t^3 & t^4\end{pmatrix}$; 4) $\boldsymbol{A}(t)=\begin{pmatrix}\sin t & \cos t & 0\\ -\cos t & \sin t & -1\\ 0 & 1 & t\end{pmatrix}$.

82 在下列连续曲线的转折点处,求极限位置的切线的夹角:

1) $\boldsymbol{f}: t \mapsto \left(\sin\dfrac{\pi t}{2}, \cos\dfrac{\pi t}{2}, |t-1|\right)$; 2) $\boldsymbol{f}: t \mapsto \begin{cases}(t, t^2+1, t^3+1, t^4+1), & \text{当} -\infty < t \leqslant 0,\\ (2t, e^{2t}, e^{3t}, e^{4t}), & \text{当} 0 < t < +\infty.\end{cases}$

2 函数的微分

2.1 基本概念

定义 1 函数 $f: E \to \mathbb{R}$ 称为在点 $x_0 \in E$ 是可微的,如果函数值相应于自变量的增量 $\Delta f(x_0)$ 可以写成

$$\Delta f(x_0) = A(x_0)(x - x_0) + \omega(x - x_0), \tag{1}$$

其中当 $x \to x_0$ 时,$\omega(x - x_0) = o(x - x_0)$.

定义 2 映射 $d: h \mapsto A(x_0)h$, $h \in \mathbb{R}$,称为函数 f 在点 x_0 处的微分,值 $A(x_0)h$ 称为在该点的微分值.

对于函数 f 的微分通常简记为 $\mathrm{d}f$.如果需要指明在哪一点进行计算,也记为 $\mathrm{d}f(x_0)$.因此

$$\mathrm{d}f(x_0) = A(x_0)h.$$

在式(1)两端同除 $x - x_0$,令 x 趋向 x_0 求极限,得到 $A(x_0) = f'(x_0)$.因此 $\forall h \in \mathbb{R}$,有

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)h. \tag{2}$$

比较式(1)与式(2),可以看出,当 $f'(x_0) \neq 0$ 时,微分值 $\mathrm{d}f(x_0)$ 是函数 f 在点 x_0 的增量的主要部分,线性且关于 $h: x - x_0$ 一阶.

2.2 函数可微的判别准则

函数 f 在给定点 x_0 可微,当且仅当函数在该点有有限导数.

2.3 一阶微分的形式不变性

如果 x 为独立变量,则 $\mathrm{d}x = x - x_0$(固定增量).此时有

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0)\mathrm{d}x. \tag{3}$$

如果 $x = \varphi(t)$ 为可微函数,则 $\mathrm{d}x = \varphi'(t_0)\mathrm{d}t$.此时

$$\mathrm{d}f(\varphi(t_0)) = (f(\varphi(t_0)))'_t\mathrm{d}t = f'_x(\varphi(t_0))\varphi'(t_0)\mathrm{d}t = f'(x_0)\mathrm{d}x,$$

因此，一阶微分关于自变量变换具有形式不变性．

2.4　小增量近似公式

将式(2)代入式(1)，舍掉 $\omega(x-x_0)$，得近似公式

$$\Delta f(x_0)\approx \mathrm{d}f(x_0),$$

或者

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).\tag{4}$$

可以通过上述公式，对已知的函数及导数在 x_0 的值，当 $x-x_0$ 小时，来近似计算函数 f 在 x 点的值．

2.5　函数微分法

如果标量函数 u，v 可微，则有

1) $\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$;　　2) $\mathrm{d}(uv)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u$;

3) $\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}$，$v\neq 0$;　　4) $\mathrm{d}(f(u))=f'(u)\mathrm{d}u$．

如果向量值函数 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$ 可微，则有

1) $\mathrm{d}(\boldsymbol{u}\pm\boldsymbol{v})=\mathrm{d}\boldsymbol{u}\pm\mathrm{d}\boldsymbol{v}$;　　2) $\mathrm{d}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\mathrm{d}\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})+(\boldsymbol{u},\mathrm{d}\boldsymbol{v})$;

3) $\mathrm{d}(\lambda\boldsymbol{u})=\boldsymbol{u}\mathrm{d}\lambda+\lambda\mathrm{d}\boldsymbol{u}$($\lambda$ 为标量函数)．

如果 u，v 是标量可微函数，则有

$$\mathrm{d}(u\pm \mathrm{i}v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{i}\mathrm{d}v,\quad \mathrm{i}^2=-1.$$

如果 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为可微函数矩阵，$\boldsymbol{u}$ 为可微向量值函数，则有

1) $\mathrm{d}(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})=\mathrm{d}\boldsymbol{A}\pm\mathrm{d}\boldsymbol{B}$;　2) $\mathrm{d}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u})=(\mathrm{d}\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}+\boldsymbol{A}\mathrm{d}\boldsymbol{u}$;　3) $\mathrm{d}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=(\mathrm{d}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\mathrm{d}\boldsymbol{B}$．

讨论下列函数 f 的可微性：

31　$\Delta f(x_0)=2\sin(x-x_0)+\left(\sqrt[3]{1+(x-x_0)^2}-1\right)\psi(x-x_0)$，其中

$$\psi(x-x_0)=\begin{cases}\ln|x-x_0|, & x\neq x_0,\\ 0, & x=x_0.\end{cases}$$

由于存在有限极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{2\sin(x-x_0)}{x-x_0}+\frac{\sqrt[3]{1+(x-x_0)^2}-1}{x-x_0}\ln|x-x_0|\right)$$

$$=2+\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+h^2}-1}{h}\ln|h|=2,$$

因此函数 f 在 x_0 点可微，且

$$\mathrm{d}f(x_0)=2\mathrm{d}x.$$

32　$\Delta f(1)=(x-1)^{\frac{5}{3}}+(x-1)^{\frac{2}{3}}$．

由于

$$\lim_{x\to 1}\frac{\Delta f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left((x-1)^{\frac{2}{3}}+(x-1)^{-\frac{1}{3}}\right)=\infty,$$

因此函数在 $x=1$ **点不可微**.

33 $\Delta \boldsymbol{f}(x_0)=\left(\sin\dfrac{1}{x-x_0}\cdot\ln(1+(x-x_0)^2),\ \mathrm{e}^{x-x_0}-1\right)$.

考虑极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta \boldsymbol{f}(x_0)}{x-x_0}=\left(\lim_{x\to x_0}\frac{\ln(1+(x-x_0)^2)}{x-x_0}\sin\frac{1}{x-x_0},\ \lim_{x\to x_0}\frac{\mathrm{e}^{x-x_0}-1}{x-x_0}\right).$$

由于

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\ln(1+(x-x_0)^2)}{x-x_0}=0,\ \lim_{x\to x_0}\frac{\mathrm{e}^{x-x_0}-1}{x-x_0}=1,$$

因此存在向量值函数 $\boldsymbol{f}$ **的有限导数**:

$$\boldsymbol{f}'(x_0)=(0,1).$$

从而,向量值函数 $\boldsymbol{f}$ **可微,且**

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(x_0)=(0,1)\mathrm{d}x=(0,\mathrm{d}x).$$

34

$$\Delta \boldsymbol{f}(x_0)=\begin{pmatrix}\arcsin \mathrm{e}^{-\frac{1}{(x-x_0)^2}} & |x-x_0|^3+x-x_0\\ (x-x_0)^2\operatorname{sgn}\tan\dfrac{1}{x-x_0} & \left(\dfrac{\sin(x-x_0)^2}{|x-x_0|}\right)^{\frac{1}{(x-x_0)^2}}\end{pmatrix}.$$

计算极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\arcsin \mathrm{e}^{-\frac{1}{h^2}}=\lim_{h\to 0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{h^2}}h^{-1}=0,\ \lim_{h\to 0}\left(\frac{|h|^3}{h}+1\right)=1,\ \lim_{h\to 0}h\operatorname{sgn}\tan\frac{1}{h}=0,$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{\sin h^2}{|h|}\right)^{\frac{1}{h^2}}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin h^2}{h^2}\right)^{\frac{1}{h^2}}\lim_{h\to 0}|h|^{\frac{1}{h^2}-1}\operatorname{sgn}h=0,$$

得到

$$\boldsymbol{f}'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\Delta \boldsymbol{f}(x_0)}{x-x_0}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

即函数矩阵在点 x_0 **可微,且**

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(x_0)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\mathrm{d}x=\begin{pmatrix}0 & \mathrm{d}x\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

计算:

35 1) $\mathrm{d}(x\mathrm{e}^{x^2})$;　　2) $\mathrm{d}\left(\arcsin\dfrac{1}{|x|}\right)$.

方法一: **由定义, 有**

1) $\mathrm{d}(x\mathrm{e}^{x^2}) = (x\mathrm{e}^{x^2})'\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x^2}(2x^2+1)\mathrm{d}x$;

2) $\mathrm{d}\left(\arcsin\frac{1}{|x|}\right) = \left(\arcsin\frac{1}{|x|}\right)'\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

方法二: 1) **根据公式, 有**

$$\mathrm{d}(x\mathrm{e}^{x^2}) = \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x + x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{x^2}).$$

而

$$\mathrm{d}(\mathrm{e}^{x^2}) = \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}(x^2) = \mathrm{e}^{x^2}2x\mathrm{d}x.$$

因此

$$\mathrm{d}(x\mathrm{e}^{x^2}) = \mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x + 2x^2\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{x^2}(2x^2+1)\mathrm{d}x.$$

2) **由公式, 有**

$$\mathrm{d}\left(\arcsin\frac{1}{|x|}\right) = (\arcsin u)'\mathrm{d}u,\quad u = \frac{1}{|x|},$$

$$\mathrm{d}u = \mathrm{d}\left(\frac{1}{|x|}\right) = -\frac{1}{x^2}\mathrm{d}(|x|) = -\frac{\operatorname{sgn}x}{x^2}\mathrm{d}x.$$

因此

$$\mathrm{d}\left(\arcsin\frac{1}{|x|}\right) = \frac{-1}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\cdot\frac{\operatorname{sgn}x}{|x|}\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

36 $\mathrm{d}(uv^{-2})$.

由公式, 有

$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v^2}\right) = \frac{v^2\mathrm{d}u - u\mathrm{d}(v^2)}{v^4} = \frac{\mathrm{d}u}{v^2} - \frac{2u\mathrm{d}v}{v^3},\quad v\neq 0.$$

37 $\mathrm{d}\left(\arctan\frac{u}{v}\right)$.

由公式, 有

$$\mathrm{d}\left(\arctan\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{u^2+v^2}.$$

38 1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(x^3)}(x^3-2x^6-x^9)$; 2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$.

由于

$$f'(u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}f(u) = \frac{\mathrm{d}f(u)}{\mathrm{d}u}, \tag{1}$$

其中 u **是某个变量的可微函数, 本例题可用两种方法求解**.

1) **记** $u = x^3$, **由等式**(1)**的第一个等式, 有**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(x^3)}(x^3-2x^6-x^9)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(u-2u^2-u^3)=(u-2u^2-u^3)'$$

$$=1-4u-3u^2=1-4x^3-3x^6,\quad x\neq 0.$$

而由等式(1)**的第二个等式，可以得到同样的结果**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(x^3)}(x^3-2x^6-x^9)=\frac{\mathrm{d}(x^3-2x^6-x^9)}{\mathrm{d}(x^3)}=\frac{(3x^2-12x^5-9x^8)\mathrm{d}x}{3x^2\mathrm{d}x}$$

$$=1-4x^3-3x^6,\quad x\neq 0.$$

2) **记** $u=x^2$，**由等式**(1)**的第一个等式，有**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\sin\sqrt{u}}{\sqrt{u}}\right)=\left(\frac{\sin\sqrt{u}}{\sqrt{u}}\right)'$$

$$=\frac{\sqrt{u}\cos\sqrt{u}-\sin\sqrt{u}}{2u\sqrt{u}}=\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3},\quad x\neq 0.$$

而运用第二个等式，则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\sin x}{x}\right)}{\mathrm{d}(x^2)}=\frac{\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}\mathrm{d}x}{2x\mathrm{d}x}=\frac{x\cos x-\sin x}{2x^3}.$$

39　用微分代替函数增量，求 $\sin 29°$ **的近似值**．

取 $\alpha=30°$，$f(x)=\sin x$，**应用公式得**，

$$\sin 29°\approx\sin\frac{\pi}{6}-(\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{6}}\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{1}{2}-\frac{\pi\sqrt{3}}{360}=0.484\cdots.$$

40　证明公式　$\sqrt{a^2+x}=a+\dfrac{x}{2a}-r$，$a>0$，$x>0$，**其中** $0<r<\dfrac{x^2}{8a^3}$．

取 x **非常小**($x\ll a^2$)，**由近似公式有**

$$\sqrt{a^2+x}\approx a+\frac{1}{2\sqrt{t}}\Big|_{t=a^2}\cdot x=a+\frac{x}{2a}.$$

该近似公式的误差为

$$r=a+\frac{x}{2a}-\sqrt{a^2+x}=x\left(\frac{1}{2a}-\frac{1}{\sqrt{a^2+x}+a}\right)$$

$$=x\frac{\sqrt{a^2+x}-a}{2a(\sqrt{a^2+x}+a)}=\frac{x^2}{2a(\sqrt{a^2+x}+a)^2},\tag{1}$$

当 $x>0$ **越小，误差越小**．**但对任意** $x>0$，**误差小于** $\dfrac{x^2}{8a^3}$，**因此由等式**(1)，$\sqrt{a^2+x}=a+\dfrac{x}{2a}-r$，**公式得证**．

41　证明近似公式　$\sqrt[n]{a^n+x}\approx a+\dfrac{x}{na^{n-1}}$，$a>0$，**其中** $|x|\ll a^n$．

由于$|x| \ll a^n$，对函数 $f: y \mapsto \sqrt[n]{1+y}$，其中 $y=\dfrac{x}{a^n}$，有近似公式：

$$f(y) \approx f(0)+f'(0)y,$$

从而

$$\sqrt[n]{1+y} \approx 1+\frac{y}{n},$$

即有

$$\sqrt[n]{a^n+x}=a\sqrt[n]{1+\frac{x}{a^n}} \approx a\left(1+\frac{x}{na^n}\right)=a+\frac{x}{na^{n-1}}.$$

42 计算 $\mathrm{d}f(x)$：

1) $\boldsymbol{f}(x)=\left(\mathrm{e}^{-kx^3}, \sin(\alpha x^2), \cos(\alpha x^4), \operatorname{sh}\dfrac{x}{T}\right)$； 2) $f(x)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha x^2}$；

3) $f(x)=\dfrac{x^2+\mathrm{i}}{x^3+3\mathrm{i}x+4\mathrm{i}+5}$； 4) $\boldsymbol{f}(x)=\begin{pmatrix} \arcsin(tx^4) & \arctan x^2 & 1 \\ 0 & \dfrac{1}{2}|\boldsymbol{f}'(0)|2^x & \sin\omega x \end{pmatrix}$.

由公式 $\mathrm{d}f(x)=f'(x)\mathrm{d}x$，有

1) $\mathrm{d}\boldsymbol{f}(x)=\left(-3kx^2\mathrm{e}^{-kx^3}, 2\alpha x\cos(\alpha x^2), -4\alpha x^3\sin(\alpha x^4), \dfrac{1}{T}\operatorname{ch}\dfrac{x}{T}\right)\mathrm{d}x$；

2) $\mathrm{d}f(x)=(\cos(\alpha x^2)+\mathrm{i}\sin(\alpha x^2))'\mathrm{d}x=2\alpha x(-\sin(\alpha x^2)+\mathrm{i}\cos(\alpha x^2))\mathrm{d}x$；

3) $\mathrm{d}f(x)=\left(\dfrac{x^2+\mathrm{i}}{x^3+3\mathrm{i}x+4\mathrm{i}+5}\right)'\mathrm{d}x=\dfrac{-x^4+2x(5+4\mathrm{i})+3}{(x^3+3\mathrm{i}x+4\mathrm{i}+5)^2}\mathrm{d}x$；

4) $\mathrm{d}\boldsymbol{f}(x)=\begin{pmatrix} \dfrac{4tx^3}{\sqrt{1-t^2x^8}} & \dfrac{2x}{1+x^4} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2}|\boldsymbol{f}'(0)|2^x\ln 2 & \omega\cos\omega x \end{pmatrix}\mathrm{d}x$.

对矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$，记值 $|\boldsymbol{A}|$ 为

$$|\boldsymbol{A}|=\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

由于

$$\boldsymbol{f}'(0)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\ln 2}{2}|\boldsymbol{f}'(0)| & \omega \end{pmatrix},$$

故

$$|\boldsymbol{f}'(0)|=\sqrt{\frac{\ln^2 2}{4}|\boldsymbol{f}'(0)|^2+\omega^2},$$

解出 $|\boldsymbol{f}'(0)|=\dfrac{\omega}{\sqrt{1-\dfrac{\ln^2 2}{4}}}$. 因此

$$\mathrm{d}\boldsymbol{f}(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{4tx^3}{1-t^2x^8} & \dfrac{2x}{1+x^4} & 0 \\ 0 & \omega\dfrac{\ln 2}{2}2^x\dfrac{1}{1-\dfrac{\ln^2 2}{4}} & \omega\cos\omega x \end{pmatrix}\mathrm{d}x .$$

43 **假设在计算函数矩阵 $\boldsymbol{A}(t)$时有误差 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}(t)$. 又设 $\boldsymbol{A}^{-1}(t)$存在, 试计算 $\boldsymbol{A}^{-1}(t)$的误差(与 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}(t)$有关).**

由于 $\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{A}^{-1}(t)=\boldsymbol{I}$, 故

$$((\mathrm{d}\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}(\mathrm{d}(\boldsymbol{A}^{-1}))=\boldsymbol{0}) \quad (\mathrm{d}(\boldsymbol{A}^{-1})=-\boldsymbol{A}^{-1}(\mathrm{d}\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1}).$$

44 **设 $\boldsymbol{A}(t)$是方的函数矩阵, 模 $|\boldsymbol{A}|=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}^2(t)$, 其中 a_{ij} 为其元素, 均在某区间上可微. 试估计其特征值的微分的上界.**

$\boldsymbol{A}(t)$的特征向量函数 $\boldsymbol{x}$与特征值λ均是 t 的函数, 满足谱方程

$$\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t)=\lambda(t)\boldsymbol{x}(t). \tag{1}$$

考虑到 $|\boldsymbol{x}(t)|=\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i(t)|^2=1$, 在等式(1)两边与 $\boldsymbol{x}(t)$作内积, 得到

$$(\boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{x}(t))=\lambda(t). \tag{2}$$

对式(2)微分, 有

$$\mathrm{d}\lambda=(\mathrm{d}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x})+(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\ \mathrm{d}\boldsymbol{x})=((\mathrm{d}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})+(\boldsymbol{A}\mathrm{d}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})+(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\ \mathrm{d}\boldsymbol{x}),$$

因此

$$\begin{aligned}|\mathrm{d}\lambda| &\leqslant |(\mathrm{d}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}||\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{A}\mathrm{d}\boldsymbol{x}||\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}||\mathrm{d}\boldsymbol{x}| \\ &\leqslant |\mathrm{d}\boldsymbol{A}||\boldsymbol{x}|^2+|\boldsymbol{A}||\mathrm{d}\boldsymbol{x}||\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{x}||\mathrm{d}\boldsymbol{x}|=|\mathrm{d}\boldsymbol{A}|+2|\boldsymbol{A}||\mathrm{d}\boldsymbol{x}|.\end{aligned}$$

45 **假设可微函数 φ满足 $f(\varphi(t))=t$, $t\in[t_0,\ t_1]$, 其中 f 为可微函数且 f'_φ不为零, 求 $\mathrm{d}\varphi$.**

由于函数 f 及 φ可微, 故复合函数 $f\ \varphi$也可微, 且有

$$(\mathrm{d}(f(\varphi(t)))=\mathrm{d}t) \quad (f'_\varphi(\varphi(t))\mathrm{d}\varphi=\mathrm{d}t) \quad \mathrm{d}\varphi=\frac{\mathrm{d}t}{f'_\varphi(\varphi(t))}.$$

练 习 题

求下列函数的微分:

83 1) $f: x \mapsto \dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{2(1-x)}-\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{3(1+x+x^2)-(x+1)\ 2}{1-x-x^2}+\dfrac{x^2+x+1}{x}+3$;

2) $f: x \mapsto \dfrac{2}{3}\arctan\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^{\frac{3}{2}}+1$; 3) $f: x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{\sin kx}{k}$.

84 1) $f: x \mapsto \dfrac{u(x)+\arctan u(x)}{v(x)+\arctan v(x)}$; 2) $f: x \mapsto \psi\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)$;

3) $f: x \mapsto \ln(u^2(x) + v^2(x))$; 4) $f: x \mapsto u^2(\ln x) + v^2(\ln x)$.

85 1) $f: \varphi \mapsto \rho(\varphi)\cos\varphi$; 2) $f: \varphi \mapsto \rho(\varphi)\sin(\omega(\varphi)\varphi)$.

86 1) $f: t \mapsto \dfrac{t}{e^{xt} + x^4}$; 2) $f: t \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(ktx)}{k}$;

3) $f: t \mapsto t^2 + ty^2 + y^4$; 4) $f: x \mapsto \dfrac{x + e^{xy}}{y^2 + x^2 + 1}$.

87 1) $f: x \mapsto \dfrac{x}{1 + x} + i(x^2 + 3)$; 2) $f: x \mapsto \dfrac{4x + 3x^2 i + 1}{x + 2 - i}$;

3) $f: x \mapsto \cos x^3 + i\sin 3x^2$; 4) $f: x \mapsto e^{i\sin \omega x}$.

88 1) $\mathbf{f}: x \mapsto (1, x, x^2, \cdots, x^n)$; 2) $\mathbf{f}: x \mapsto \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u(x) & v(x) & w(x) \\ \sin x & \cos x & 1 \end{vmatrix}$;

3) $\mathbf{f}: x \mapsto (\sin\omega_1 x, \sin\omega_2 x, \cdots, \sin\omega_n x)$; 4) $\mathbf{f}: x \mapsto u(x)\,(e^{u(x)}, \tan u(x), u(x))$;

5) $\mathbf{f}: x \mapsto \left(\dfrac{1}{4}|f(x)|, u^2(x)\right)$.

89 $\mathbf{f}: x \mapsto \begin{pmatrix} \ln\dfrac{x+1}{x^2+1} & 1 \\ u(x) & \sin u(x) \end{pmatrix}$. **90** $\mathbf{f}: x \mapsto \begin{pmatrix} \operatorname{sgn} x & e^{-\frac{1}{|x|}} \\ [x] & \sin[x] \end{pmatrix}$.

91 $\mathbf{f}: x \mapsto \begin{pmatrix} \dfrac{x-y}{x+y} & \dfrac{x^2+t}{x^2-t} \\ \sin(tx) & \cos(ty) \end{pmatrix}$. **92** $\mathbf{f}: x \mapsto \begin{pmatrix} e^{(\psi,\varphi)} & \tan(\psi,\varphi) \\ \operatorname{sh}(\psi,\varphi) & \operatorname{ch}(\psi,\varphi) \end{pmatrix}$.

93 $\mathbf{f}: t \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \cdots & a_{mn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$.

94 设 $\mathbf{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))$, 其中 f_i, $i = 1, \cdots, n$ 为可微函数, 求 $d(|\mathbf{f}(x)|)$.

95 设 $\mathbf{f}(x) = (a_{ij}(x))$, $i, j = 1, \cdots, n$ 为可微函数矩阵, 求 $d(|\mathbf{f}(x)|)$.

96 求近似值: 1) $\sin 16°$; 2) $\arctan 100$; 3) $\arcsin 0.99$.

97 证明, 对 $x \gg x_0 > 0$ 成立

$$\arctan x \approx \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}.$$

98 运用近似公式

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}, \quad \sin x \approx x + \alpha x^3, \quad |x| \ll 1,$$

求系数 α.

提示: 注意恒等式 $\sin x = 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$.

计算 $df(0)$:

99 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$

100　$f(x) = (u(x))^{v(x)}$, $\mathrm{d}u(0) = 5\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v(0) = -\frac{2}{\mathrm{e}}\mathrm{d}x$, $u(0) = \mathrm{e}$, $v(0) = 1$.

101　$f(x) = \arcsin\frac{u(x)}{v(x)}$, $\mathrm{d}u(0) = 3\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v(0) = \quad 2\mathrm{d}x$, $u(0) = 1$, $v(0) = \quad 2$.

102　$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{\arctan x}x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 . \end{cases}$　　**103**　$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[8]{1+\sin^4 x} + \sqrt[10]{1+3x^4} - 2}{\mathrm{e}^{x^3} - 1}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 . \end{cases}$

104　$\boldsymbol{f}(x) = \left(\frac{\arcsin x^2}{x}, \frac{2^{x^2} + 3^{x^2}}{2x} \right)$, $x \neq 0$, 且 $\boldsymbol{f}(0) = (0, 1)$.

105　$\boldsymbol{f}(x) = \left(x\frac{\mathrm{e}^{\sin x} - 1}{\mathrm{sh}\, x}, \frac{\ln^2(2^x + x)}{\mathrm{ch}\, x - 1}, |x| x \right)$, $x \neq 0$, 且 $\boldsymbol{f}(0) = (0, 0, 0)$.

106　$\boldsymbol{f}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\cos(x\mathrm{e}^{2x}) - \cos(x\mathrm{e}^{-2x})}{x^2} & \frac{\ln(1+x^2\mathrm{e}^x)}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})} \\ 0 & x^2\ln x \end{pmatrix}$, $x \neq 0$, 且 $\boldsymbol{f}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

107　设 $\boldsymbol{a}_k = (a_{k1}, a_{k2}, \cdots, a_{kn})$, $\boldsymbol{a}_k \in E^n$, $k = 1, \cdots, n$, 为具有共同起点的向量 . 行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的绝对值称为超平行体 $P = \{x \mid x \in E^n, x = \theta_1 \boldsymbol{a}_1 + \theta_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \theta_n \boldsymbol{a}_n, 0 \leq \theta_i < 1, i = 1, \cdots, n\}$的体积 .

过下列曲线交点处的切线向量构成超平行体, 求其体积:

1) $\boldsymbol{f}_1(t) = (t, t^2)$, $\boldsymbol{f}_2(t) = (t^3, t)$;　2) $\boldsymbol{f}_1(t) = (t, t^2, t^3)$, $\boldsymbol{f}_2(t) = (t^3, t^2, t)$, $\boldsymbol{f}_3(t) = (\sin\pi t, t, t^4)$;

3) $\boldsymbol{f}_1(t) = (t, t^2, t^3, t^4)$, $\boldsymbol{f}_2(t) = (t^2, t^3, t^4, t)$, $\boldsymbol{f}_3(t) = (t^3, t^4, t, t^2)$, $\boldsymbol{f}_4(t) = (t^4, t^3, t^2, t)$.

3　反函数的导数　参数方程表示的函数的导数　隐函数的导数

3.1　反函数的导数

具有非零导数的可微单调函数 $f: (a, b) \to \mathbf{R}$ 有反函数 f^{-1}, 其导数的计算公式为

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(x)} .$$

3.2　参数方程表示的函数的导数

设函数 f 具有参数方程

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha < t < \beta,$$

其中 $y=f(x)$ 及函数 φ,ψ 均可微，设 $\varphi'(t)\neq 0$，则

$$f'(x)=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

3.3　隐函数的导数

假设 $y=f(x)$ 为可微函数，满足方程 $F(x,y)=0$，即 $F(x,f(x))\equiv 0$ 在某个开区间 (a,b) 上成立，那么其导数可由以下方程求得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F(x,f(x)))=0.$$

46　证明：存在函数 $y=f(x)$，满足方程

$$y-\varepsilon\sin y=x,\quad 0\leq\varepsilon<1,$$

且求其导数 $f'(x)$.

函数 $\varphi: y\mapsto x=y-\varepsilon\sin y$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可微，其导数

$$\varphi': y\mapsto 1-\varepsilon\cos y$$

为正．因此，函数 φ 为严格单调增函数，有反函数 f 单调增且可微，其导数为

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}=\frac{1}{1-\varepsilon\cos y}.$$

47　假设 $y=x+\ln x$，$x>0$．给出存在反函数 $x=\varphi(y)$ 的区域并求其导数．

由于 $(x+\ln x)'=1+\dfrac{1}{x}>0$，故函数 $f: x\mapsto x+\ln x$ 对 $x>0$ 严格单调增加，因此存在反函数，且

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{x}{x+1}.$$

对于 $0<x<+\infty$ 有 $-\infty<y<+\infty$，即反函数在整个实轴上有定义．

48　设函数 $y=2x^2-x^4$，试求出其反函数 $x=\varphi(y)$ 的各个连续的分支，并求它们的导数．

函数 $f: x\mapsto 2x^2-x^4$ 可微，其导数为 $f': x\mapsto 4x(1-x^2)$ 且在以下 4 个区间上保号：$(-\infty,-1)$，$(-1,0)$，$(0,1)$，$(1,+\infty)$．因此在这 4 个区间上分别存在可微反函数．记这些反函数为 $x=\varphi_i(y)$，$i=1,\cdots,4$，有

$$\varphi_1:(-\infty,1)\to(-\infty,-1),\quad \varphi_2:(0,1)\to(-1,0),$$

$$\varphi_3:(0,1)\to(0,1),\quad \varphi_4:(-\infty,1)\to(1,+\infty),$$

而且，反函数的导数为

$$\varphi_i': y\mapsto\frac{1}{4x(1-x^2)},$$

根据导数的符号可知 φ_1，φ_3 单调增加，而 φ_2，φ_4 单调减少．解方程 $x^4-2x^2+y=0$，可

以得到函数 φ 的显式形式

$$x=\varphi_1(y)=-\sqrt{1+\sqrt{1-y}},\quad x=\varphi_2(y)=-\sqrt{1-\sqrt{1-y}},$$

$$x=\varphi_3(y)=\sqrt{1-\sqrt{1-y}},\quad x=\varphi_4(y)=\sqrt{1+\sqrt{1-y}}.$$

计算导数 $f'(x)$:

49 $x=\sqrt[3]{1-\sqrt{t}},\ y=\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}\quad (y=f(x))$.

先求出

$$x_t'=\frac{1}{3}(1-\sqrt{t})^{-\frac{2}{3}}(1-\sqrt{t})'=-\frac{1}{6\sqrt{t}}(1-\sqrt{t})^{-\frac{2}{3}},$$

$$y_t'=\frac{1}{2\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}}(1-\sqrt[3]{t})'=-\frac{1}{6\sqrt[3]{t^2}\sqrt{1-\sqrt[3]{t}}},\quad 0<t<1.$$

然后,由公式得

$$f'(x)=\frac{y_t'}{x_t'}=t^{-\frac{1}{6}}\left(\frac{(1-\sqrt{t})^4}{(1-\sqrt[3]{t})^3}\right)^{\frac{1}{6}}.$$

50 $\boldsymbol{y}=(\mathrm{e}^t\sin t,\ \mathrm{e}^t\cos t,\ \mathrm{e}^t),\ x=t+t^5\ (\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(x))$.

由于 $\mathrm{d}\boldsymbol{y}=(\mathrm{d}(\mathrm{e}^t\sin t),\ \mathrm{d}(\mathrm{e}^t\cos t),\ \mathrm{d}(\mathrm{e}^t))=(\sin t+\cos t,\ \cos t-\sin t,\ 1)\mathrm{e}^t\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}x=(1+5t^4)\mathrm{d}t$, 故

$$\boldsymbol{f}'(x)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\left(\frac{\mathrm{e}^t(\sin t+\cos t)}{1+5t^4},\ \frac{\mathrm{e}^t(\cos t-\sin t)}{1+5t^4},\ \frac{\mathrm{e}^t}{1+5t^4}\right).$$

51 $y=\cos^3 t+\mathrm{i}\sin^3 t,\ x=2t-\cos t\quad (\mathrm{i}^2=-1;\ y=f(x))$.

由于

$$\mathrm{d}y=(-3\cos^2 t\sin t+3\mathrm{i}\sin^2 t\cos t)\mathrm{d}t,\quad \mathrm{d}x=(2+\sin t)\mathrm{d}t,$$

故

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{3\sin 2t}{2(2+\sin t)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}.$$

52 $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} t-\sin t & 1-\cos t \\ \operatorname{sh} t & \operatorname{ch} t\end{pmatrix},\ x=3t+t^3\quad (\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(x))$.

计算得

$$\mathrm{d}\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} 1-\cos t & \sin t \\ \operatorname{ch} t & \operatorname{sh} t\end{pmatrix}\mathrm{d}t,\quad \mathrm{d}x=3(1+t^2)\mathrm{d}t,$$

$$\boldsymbol{f}'(x)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} \frac{1-\cos t}{1+t^2} & \frac{\sin t}{1+t^2} \\ \frac{\operatorname{ch} t}{1+t^2} & \frac{\operatorname{sh} t}{1+t^2}\end{pmatrix}.$$

求以下方程确定的函数 $f: x \mapsto y$ **的导数** f':

53 $x^2 + 2xy - y^2 = 4x$.

设 $y = f(x)$**为所给方程的可微解. 则有恒等式**

$$x^2 + 2xf(x) - (f(x))^2 \equiv 4x \tag{1}$$

在某个区间上成立. 由于等式(1)**两边的各项均是可微的, 对式**(1)**求导有**

$$2x + 2f(x) + 2xf'(x) - 2f(x)f'(x) \equiv 4,$$

由此

$$f'(x) = \frac{f(x) + x - 2}{f(x) - x}, \quad f(x) \neq x.$$

54 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.

把可微解 $y = f(x)$**代入所给方程, 得恒等式**

$$x^{\frac{2}{3}} + (f(x))^{\frac{2}{3}} \equiv 1,$$

微分之后得

$$x^{-\frac{1}{3}} + (f(x))^{-\frac{1}{3}} f'(x) \equiv 0.$$

因此

$$f'(x) = -\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\frac{1}{3}}, \quad x \neq 0.$$

55 计算 $f'(x)$, **已知** $y = f(x)$ **且** $\rho = a\varphi$ (ρ, φ**为极坐标**).

由于 $y = \rho\sin\varphi$, $x = \rho\cos\varphi$, **故** $y = a\varphi\sin\varphi$, $x = a\varphi\cos\varphi$. **而且**, $\mathrm{d}y = a(\sin\varphi + \varphi\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$, $\mathrm{d}x = a(\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi$. **由此, 若** $a(\cos\varphi - \varphi\sin\varphi) \neq 0$, **则**

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\sin\varphi + \varphi\cos\varphi}{\cos\varphi - \varphi\sin\varphi}.$$

56 计算 $f_1'(x)$, $f_2'(x)$, **已知函数** f_1, f_2 **满足下列隐函数方程组**

$$y_1^3 - y_2^3 + 3x = 2,$$
$$y_1^2 + y_2^2 + 2x = 1.$$

将函数 $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$**代入所给方程组, 得下列恒等式**

$$f_1^3(x) - f_2^3(x) + 3x \equiv 2,$$
$$f_1^2(x) + f_2^2(x) + 2x \equiv 1,$$

分别对 x **求导, 得**

$$f_1^2(x) f_1'(x) - f_2^2(x) f_2'(x) + 1 \equiv 0,$$
$$f_1(x) f_1'(x) + f_2(x) f_2'(x) + 1 \equiv 0.$$

由此, 如果行列式

$$\begin{vmatrix} f_1^2(x) & -f_2^2(x) \\ f_1(x) & f_2(x) \end{vmatrix} \neq 0,$$

则有

$$f_1'(x) = -\frac{1+f_2(x)}{f_1(x)(f_1(x)+f_2(x))}, \quad f_2'(x) = \frac{1-f_1(x)}{f_2(x)(f_1(x)+f_2(x))}.$$

练 习 题

108 证明下列方程有唯一实解 $y=f(x)$:

1) $x=3y+\sin y^2+\cos y-1+\frac{1}{3}y^3$; 2) $x=12y^5-30y^4+40y^3-30y^2+15y+1$.

求下列参数方程确定的函数 $y=f(x)$**的单侧导数**:

109 $x=2t-t^2,\ y=3t-t^3,\ t=1$.

110 $x=t+3\sqrt[3]{1+t},\ y=2t-10\sqrt[5]{t+1},\ t=0$.

111 $x=\sin^2 t,\ y=\cos^2 t,\ t=0,\ t=\frac{\pi}{2}$.

计算 $f'(x)$, **已知** $y=f(x)$**满足**:

112 $\arctan(x^2+y^2)-\ln(xy)-1=0$.

113 $\sin\frac{x^2}{y}+\frac{x^2}{y}+\sqrt{x^2+y^2}=0$.

114 $\frac{x+y}{x^2+y^2+1}+\psi(x+y+y^2)=1$ (ψ**为可微函数**).

115 $\psi\left(\frac{x-y}{x+y}\right)+\psi\left(\frac{x+y}{x-y}\right)=2$.

116 $\psi(\psi(\sin y)+2y-3)-8x+4=0$.

117 $\arcsin\psi(2y+x^2+1)=\arctan(y^3)$.

118 $e^{-\psi^2(y)+x^2}=4-y^2$.

计算 $f'(0)$, **已知** $y=f(x)$**满足**:

119 $x^2\sin\frac{1}{y}+\frac{y}{x}\sin x=0,\ x\neq 0,\ f(0)=0$.

120 $x^2\arctan\frac{y}{x}+\tan(x+y)-1=0,\ x\neq 0,\ f(0)=\frac{\pi}{4}$.

计算 $f_1'(x)$, $f_2'(x)$, **已知** $y_1=f_1(x)$, $y_2=f_2(x)$**满足方程**:

121 $e^{y_1x+y_2\sin x}=1-x,\ y_1^2+xy_2^2=x^2$.

122 $y_1y_2+\frac{xy_1}{y_1+y_2+1}-x^3=0,\ y_1^2+y_2^2=x^2$.

123 $y_1+\psi(y_1+y_2)+y_2+\sin x=0,\ \psi(y_1^2+y_2^2+x^2)=x$.

计算 $\Delta f(0)$**及** $\mathrm{d}f(0)$, **已知** $y=f(x)$**满足**:

124 $x=t^2+|t|,\ y=t^3+t,\ \Delta t=\mathrm{d}t=1$.

125 $x=t^4-4t^2,\ y=t^5-5t,\ \Delta t=\mathrm{d}t=1$.

126 $x=y^5+5y$.

计算 $f'(x)$, **已知** $y=f(x)$**满足**:

127 $\boldsymbol{y}=(\sin t,\ \cos t,\ t),\ x=3t+t^3$.

128 $\boldsymbol{y}=(\mathrm{sh}^2 t,\ \mathrm{ch}^2 t,\ \mathrm{th}\, t),\ x=\mathrm{sh}\, t$.

129 $y=\frac{t^2+2\mathrm{i}t+3}{t^2+t+\mathrm{i}+1},\ x=t+\mathrm{i}t^2$.

130 $y=e^{2\mathrm{i}t}+e^{-t^2},\ x=\frac{t+\mathrm{i}}{t^2+1}$.

131 $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}1 & t\\ t^2 & t^3\end{pmatrix},\ x=\frac{t}{t^2+1}$.

132 $\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}\sin 2t & \cos 2t\\ -\cos 2t & \sin 2t\end{pmatrix},\ x=2t+\cos t$.

133 $\boldsymbol{y}=(\sin(y^2+t^2),\ \cos(y^2+t^2),\ t),\ x=5t+t^5$.

134 $\boldsymbol{y}=(\psi(|y|),\ t,\ t^3),\ x=2t\varphi(t^2)$.

135 $\boldsymbol{y}=(\psi(t),\ \psi(t^2),\ \psi(t^3)),\ x=\psi(t^4)$.

4 高阶导数和高阶微分

4.1 基本概念

定义 1 假设某函数 f 的导数可微，则称此函数之导数的导数为函数 f 的二阶导数，记为 f''. 即

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

定义 2 如果函数 f 的 $n-1$ 阶导数可微，则函数 f 的 $n-1$ 阶导数的导数称为 f 的 n 阶导数. 即

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))', \quad n \in \mathrm{N}, \quad f^{(0)}(x) = f(x).$$

数 n 称为导数的阶.

定义 3 函数 f 的 $n-1$ 阶微分的微分称为 f 的 n 阶微分. 即

$$\mathrm{d}^n f(x) = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1} f(x)), \quad \mathrm{d}^0 f(x) = f(x), \quad n \in \mathrm{N}.$$

如果 x 为独立变量，则 $\mathrm{d}x$ 为常数，$\mathrm{d}^2 x = \mathrm{d}^3 x = \cdots = \mathrm{d}^n x = 0$，此时有如下公式

$$\mathrm{d}^n f(x) = f^{(n)}(x)(\mathrm{d}x)^n.$$

4.2 基本初等函数的 *n* 阶导数

成立以下公式

$$(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a, \quad a > 0;$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right);$$

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right);$$

$$(x^m)^{(n)} = m(m-1)\cdots(m-n+1)x^{m-n};$$

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

4.3 莱布尼茨(Leibniz)公式

设 u, v 为 n 阶可微函数，则

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{C}_n^i u^{(i)} v^{(n-i)}.$$

4.4 向量值函数，复值函数及函数矩阵的 *n* 阶导数

如果向量值函数 $\boldsymbol{f}: x \quad (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x))$ 的分量均 n 阶可微，则 $\boldsymbol{f}^{(n)}(x) =$

$(f_1^{(n)}(x), f_2^{(n)}(x), \cdots, f_k^{(n)}(x))$, $\mathrm{d}^n \boldsymbol{f}(x) = (\mathrm{d}^n f_1(x), \mathrm{d}^n f_2(x), \cdots, \mathrm{d}^n f_k(x))$. 同理, 对于复值函数 f 及函数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有公式:

$$f^{(n)}(x) = u^{(n)}(x) + \mathrm{i}v^{(n)}(x); \qquad \mathrm{d}^n f(x) = \mathrm{d}^n u(x) + \mathrm{i}\mathrm{d}^n v(x);$$

$$\boldsymbol{A}^{(n)}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}^{(n)}(x) & \cdots & a_{1k}^{(n)}(x) \\ \cdots & & \cdots \\ a_{l1}^{(n)}(x) & \cdots & a_{lk}^{(n)}(x) \end{pmatrix}; \quad \mathrm{d}^n \boldsymbol{A}(x) = \begin{pmatrix} \mathrm{d}^n a_{11}(x) & \cdots & \mathrm{d}^n a_{1k}(x) \\ \cdots & & \cdots \\ \mathrm{d}^n a_{l1}(x) & \cdots & \mathrm{d}^n a_{lk}(x) \end{pmatrix}.$$

计算 $f''(x)$:

57 $f(x) = \sin(x^2)$.

由定义, 有

$$f'(x) = (\sin(x^2))' = 2x\cos(x^2);$$

$$f''(x) = (f'(x))' = (2x\cos(x^2))' = 2\cos(x^2) - 4x^2\sin(x^2).$$

58 $f(x) = (x + \mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$.

由于 $(u(x) + \mathrm{i}v(x))' = u'(x) + \mathrm{i}v'(x)$, 故对复值函数求微分时数 i 作为常数, 导数为 0, 因此

$$f'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{i}(x + \mathrm{i})\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}x;$$

$$f''(x) = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}(\mathrm{i} - x).$$

59 $\boldsymbol{f}(x) = (\sin x^2, \cos x^2, x^2)$.

向量值函数的求导就是对其分量分别求导, 所以

$$\boldsymbol{f}'(x) = (2x\cos x^2, -2x\sin x^2, 2x);$$

$$\boldsymbol{f}''(x) = (2\cos x^2 - 4x^2\sin x^2, -2\sin x^2 - 4x^2\cos x^2, 2).$$

60 $\boldsymbol{f}(x) = \begin{pmatrix} \tan x & \operatorname{th} x \\ \operatorname{sh} x^2 & \operatorname{ch} x^2 \end{pmatrix}$.

函数矩阵的求导就是对矩阵的每个元素分别求导, 所以

$$\boldsymbol{f}'(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\cos^2 x} & \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \\ 2x\operatorname{ch} x^2 & 2x\operatorname{sh} x^2 \end{pmatrix}, \quad f''(x) = 2\begin{pmatrix} \dfrac{\sin x}{\cos^3 x} & -\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^3 x} \\ \operatorname{ch} x^2 + 2x^2\operatorname{sh} x^2 & \operatorname{sh} x^2 + 2x^2\operatorname{ch} x^2 \end{pmatrix}.$$

61 $\boldsymbol{f}(x) = \left(\ln\varphi(x), u(x), \dfrac{u(x)}{v(x)}\right)$.

由于

$$\boldsymbol{f}'(x) = \left((\ln\varphi(x))', u'(x), \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'\right)$$

且 $$(\ln\varphi(x))' = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \quad \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)},$$

故 $\boldsymbol{f}'(x) = \left(\dfrac{\varphi'}{\varphi}, u', \dfrac{u'v - uv'}{v^2}\right)$. 从而

$$f''(x)=\left(\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)',\ (u')',\ \left(\frac{u'v-uv'}{v^2}\right)'\right)$$

$$=\left(\frac{\varphi''\varphi-(\varphi')^2}{\varphi^2},\ u'',\ \frac{(u''v-uv'')v-2v'(u'v-uv')}{v^3}\right).$$

62　已知 $y=f(\mathrm{e}^x)$，求 y'''.

由复合函数微分法有

$$y'=f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x$$

(此式中 f 上的一撇表示对变量 e^x 的导数).

同理，由二阶导数的定义及微分法则，可求得二阶导数

$$y''=(f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x)'=f''(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{2x}+f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x.$$

三阶导数为

$$y'''=f'''(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{3x}+3f''(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^{2x}+f'(\mathrm{e}^x)\mathrm{e}^x.$$

63　已知函数 $y=\mathrm{e}^x$，针对 x 是独立变量或者 x 是中间变量，求 d^2y.

一阶微分具有形式不变性，因此在两种情况下均有

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x.$$

进而，由定义

$$\mathrm{d}^2y=\mathrm{d}(\mathrm{d}y)=\mathrm{d}(\mathrm{e}^x\mathrm{d}x).$$

对上式最后一步求微分，有

$$\mathrm{d}(\mathrm{e}^x\mathrm{d}x)=\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^x\mathrm{d}(\mathrm{d}x).\tag{1}$$

如果 x 是独立变量，则 $\mathrm{d}x$ 为常数. 因此，$\mathrm{d}(\mathrm{d}x)=\mathrm{d}^2x=0$，由式(1)有

$$\mathrm{d}^2y=\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x(\mathrm{d}x)^2.$$

如果 x 是中间变量，则 $\mathrm{d}x$ 通常不为常数，此时 $\mathrm{d}(\mathrm{d}x)=\mathrm{d}^2x\neq0$，由式(1)得

$$\mathrm{d}^2y=\mathrm{e}^x(\mathrm{d}x)^2+\mathrm{e}^x\mathrm{d}^2x=\mathrm{e}^x((\mathrm{d}x)^2+\mathrm{d}^2x).$$

64　已知 $y=\arctan\dfrac{u}{v}$，求 d^2y，其中 u，v 为某个变量的二阶可微函数.

由一阶微分形式的不变性，有

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}\left(\arctan\frac{u}{v}\right)=\left(\arctan\frac{u}{v}\right)'\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)$$

$$=\frac{1}{1+\left(\dfrac{u}{v}\right)^2}\cdot\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{u^2+v^2},$$

其中一撇表示对 $\dfrac{u}{v}$ 求导.

由定义，

$$\mathrm{d}^2y=\mathrm{d}\left(\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{u^2+v^2}\right),$$

由此, 利用微分公式, 有

$$d^2 y = \frac{d(v du - u dv)(u^2 + v^2) - (v du - u dv)(d(u^2 + v^2))}{(u^2 + v^2)^2}. \tag{1}$$

由于 $d(v du - u dv) = dv du + v d^2 u - du dv - u d^2 v = v d^2 u - u d^2 v$, $d(u^2 + v^2) = d(u^2) + d(v^2) = 2u du + 2v dv$, 由(1)最后得

$$d^2 y = \frac{v d^2 u - u d^2 v}{u^2 + v^2} - \frac{2(uv((du)^2 - (dv)^2) + (v^2 - u^2) du dv)}{(u^2 + v^2)^2}.$$

65 计算导数 y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3}, 已知函数 $y = f(x)$, 由参数方程表示为 $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$.

由于 $y'_x = \frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{dy}{dx}$, 故

$$y'_x = \frac{d(3t - t^3)}{d(2t - t^2)} = \frac{(3 - 3t^2)dt}{(2 - 2t)dt} = \frac{3}{2}(1 + t), \quad t \neq 1.$$

而 $y''_{x^2} = \frac{d}{dx}(y'_x) = \frac{d(y'_x)}{dx}$, 故

$$y''_{x^2} = \frac{d\left(\frac{3}{2}(1 + t)\right)}{d(2t - t^2)} = \frac{\frac{3}{2}dt}{2(1 - t)dt} = \frac{3}{4(1 - t)}.$$

同理 $y'''_{x^3} = \frac{d}{dx}(y''_{x^2}) = \frac{d(y''_{x^2})}{dx}$, 故

$$y'''_{x^3} = \frac{d\left(\frac{3}{4(1 - t)}\right)}{d(2t - t^2)} = \frac{\frac{3dt}{4(1 - t)^2}}{2(1 - t)dt} = \frac{3}{8(1 - t)^3}.$$

66 设函数 $y = f(x)$满足 $x^2 + y^2 = 5xy^3$. 求 y'_x, y''_{x^2}.

设 $y = f(x)$二阶可微且满足所给的方程. 对恒等式 $x^2 + (f(x))^2 \equiv 5x(f(x))^3$ 求微分,有 $2x + 2f(x)f'(x) \equiv 5(f(x))^3 + 15xf^2(x)f'(x)$, 因此, 当 $15xf^2(x) - 2f(x) \neq 0$ 时,

$$f'(x) = \frac{2x - 5f^3(x)}{15xf^2(x) - 2f(x)}.$$

然后, 根据二阶导数的定义及导数计算公式, 有

$$\begin{aligned} f''(x) &= (f'(x))' = \left(\frac{2x - 5f^3(x)}{15xf^2(x) - 2f(x)}\right)' \\ &= \frac{(2x - 5f^3(x))'(15xf^2(x) - 2f(x)) - (2x - 5f^3(x))(15xf^2(x) - 2f(x))'}{(15xf^2(x) - 2f(x))^2} \\ &= \frac{(20f^3(x) - 75xf^4(x) - 60x^2 f(x) + 4x)f'(x) - 4f(x) + 75f^5(x)}{(15xf^2(x) - 2f(x))^2}. \end{aligned}$$

把 $f'(x)$代入上式, 化简得到

$$f''(x) = \frac{1500xf^6(x) - 120x^3 + 150x^2 f^3(x) - 250f^5(x)}{(15xf(x) - 2)^3 f^2(x)}.$$

计算下列高阶导数与高阶微分:

67　$y = \dfrac{1+x}{1-x}$，求 $y^{(100)}$.

先将所给函数变形，以利于求导，由公式得

$$y = 2(1-x)^{-\frac{1}{2}} - (1-x)^{\frac{1}{2}},$$

$$y^{(100)} = 2\ (1-x)^{-\frac{1}{2}}\ {}^{(100)} - \ (1-x)^{\frac{1}{2}}\ {}^{(100)}$$

$$= \frac{(199)!!}{2^{99}}(1-x)^{-\frac{201}{2}} + \frac{(197)!!}{2^{100}}(1-x)^{-\frac{199}{2}}$$

$$= \frac{(197)!!}{2^{100}} \cdot \frac{399-x}{(1-x)^{100.5}}, \quad x < 1.$$

68　$y = x\operatorname{sh}x$，求 $y^{(100)}$.

利用莱布尼茨公式，令 $u = x$，$v = \operatorname{sh}x$，有

$$y^{(100)} = (x\operatorname{sh}x)^{(100)} = \sum_{k=0}^{100} C_{100}^k (x)^{(k)} (\operatorname{sh}x)^{(100-k)}$$

$$= C_{100}^0\, x\operatorname{sh}x + C_{100}^1 \operatorname{ch}x = x\operatorname{sh}x + 100\operatorname{ch}x.$$

69　$y = u^2$，求 $d^{10}y$.

对 $y = uu$ 用莱布尼茨公式，有

$$d^{10}y = \sum_{i=0}^{10} C_{10}^i d^i u d^{10-i}u = 2\sum_{i=0}^{4} C_{10}^i d^i u d^{10-i}u + C_{10}^5 (d^5 u)^2$$

$$= 2ud^{10}u + 20du d^9 u + 90d^2 ud^8 u + 240d^3 ud^7 u + 420d^4 ud^6 u + 252(d^5 u)^2.$$

70　已知函数 $y = f(x)$，试用 x，y 的微分来表示 y''，y ，假设 x 不为独立变量.

由定义及乘积求导公式，有

$$dy = f'(x)dx, \tag{1}$$

$$d^2 y = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2 x, \tag{2}$$

$$d^3 y = f\ (x)(dx)^3 + 3f''(x)d^2 xdx + f'(x)d^3 x. \tag{3}$$

由式(1)—(3)分别得到

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 y - y'd^2 x}{(dx)^2} = \frac{dxd^2 y - dyd^2 x}{(dx)^3},$$

$$y\ = f\ (x) = \frac{1}{(dx)^5}((dx)^2 d^3 y - 3d^2 xdxd^2 y + 3(d^2 x)^2 dy - dxdyd^3 x).$$

计算 $y^{(n)}$, **已知**:

71　$y=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$.

将所给分式化简为

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}=(x-2)^{-1}-(x-1)^{-1},$$

由公式, 得

$$y^{(n)}=(-1)^n n!\left(\frac{1}{(x-2)^{n+1}}-\frac{1}{(x-1)^{n+1}}\right).$$

72　$y=\sin^3 x$.

改写 y **为以下形式**

$$y=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x,$$

由公式, 得

$$y^{(n)}=\frac{3}{4}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{3^n}{4}\sin\left(3x+\frac{n\pi}{3}\right).$$

73　$y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

改写 y **为以下形式**

$$y=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x,$$

得到

$$y^{(n)}=4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right),\quad n\geq 1.$$

74　$y=\ln\dfrac{a+bx}{a-bx}$.

所给函数的一阶导数为

$$y'=\left(\frac{a}{b}+x\right)^{-1}+\left(\frac{a}{b}-x\right)^{-1}.$$

然后, 对上式求 $(n-1)$ **阶导数, 得**

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}(n-1)!\left(\frac{a}{b}+x\right)^{-n}+(n-1)!\left(\frac{a}{b}-x\right)^{-n}$$

$$=\frac{(n-1)!b^n}{(a^2-b^2x^2)^n}\left((a+bx)^n+(-1)^n(a-bx)^n\right).$$

75　**证明恒等式**:

1) $(e^{ax}\sin(bx+c))^{(n)}=e^{ax}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\sin(bx+c+n\varphi)$;

2) $(e^{ax}\cos(bx+c))^{(n)}=e^{ax}(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}\cos(bx+c+n\varphi)$,

其中　$\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$,　$\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

将第一个等式的左端乘以 i，与第二个等式的左端相加，得

$$\begin{aligned}(e^{ax}\cos(bx+c))^{(n)}+(ie^{ax}\sin(bx+c))^{(n)}&=e^{ic}(e^{(a+bi)x})^{(n)}=e^{ic}(a+bi)^n e^{(a+bi)x}\\&=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{(a+bi)x+ic+in\varphi}\\&=(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}e^{ax}(\cos(bx+c+n\varphi)+\\&\quad i\sin(bx+c+n\varphi)).\end{aligned}$$

由复数相等的公理比较两边即得要证的公式.

76 将函数 $f: x \mapsto \sin^{2p}x$，其中 p 为自然数，展开为三角多项式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{p}A_k\cos 2kx,$$

并计算 $f^{(n)}(x)$.

首先利用欧拉(Euler)公式及牛顿二项式定理将 f 展开为三角多项式，有

$$\sin^{2p}x=\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^{2p}=\frac{(-1)^p}{2^{2p}}\sum_{k=0}^{2p}(-1)^k C_{2p}^k e^{ikx}e^{-i(2p-k)x}$$

$$=\frac{(-1)^p}{2^{2p}}\left(\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k C_{2p}^k e^{2i(k-p)x}+\sum_{k=p+1}^{2p}(-1)^k C_{2p}^k e^{2i(k-p)x}\right)+\frac{C_{2p}^p}{2^{2p}}.$$

对括号内的第二个和式引入新的指标 k'，令 $k=2p-k'$，且利用恒等式 $C_{2p}^k=C_{2p}^{2p-k}$，得

$$\sin^{2p}x=\frac{(-1)^p}{2^{2p}}\left(\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k C_{2p}^k e^{2i(k-p)x}+\sum_{k'=0}^{p-1}(-1)^{k'}C_{2p}^{2p-k'}e^{2i(p-k')x}\right)+\frac{C_{2p}^p}{2^{2p}}$$

$$=\frac{(-1)^p}{2^{2p}}\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k C_{2p}^k(e^{2i(k-p)x}+e^{-2i(k-p)x})+\frac{C_{2p}^p}{2^{2p}}$$

$$=\frac{(-1)^p}{2^{2p-1}}\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k C_{2p}^k\cos 2(k-p)x+\frac{C_{2p}^p}{2^{2p}}.$$

然后，由 4.2 节的公式

$$(\sin^{2p}x)^{(n)}=\frac{(-1)^p}{2^{2p-1}}\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k C_{2p}^k 2^n(k-p)^n\cos\left(2(k-p)x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^{k+p}C_{2p}^k 2^{n-2p+1}(k-p)^n\cos\left(2(k-p)x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

77 利用恒等式 $\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right)$，证明

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x^2+1)^{\frac{n+1}{2}}}\sin((n+1)\operatorname{arccot}x).$$

首先对所给恒等式求 n 阶导数，有

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)}=\frac{1}{2i}\left(\frac{(-1)^n n!}{(x-i)^{n+1}}-\frac{(-1)^n n!}{(x+i)^{n+1}}\right).$$

然后，对复数 $(x-i)^{-n-1}$ 及 $(x+i)^{-n-1}$ 利用莫伊弗尔公式，有

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{2\mathrm{i}}\left((1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}}(\cos(n+1)\varphi+\mathrm{i}\sin(n+1)\varphi)-\right.$$

$$\left.(1+x^2)^{-\frac{n+1}{2}}(\cos(n+1)\varphi-\mathrm{i}\sin(n+1)\varphi)\right)$$

$$=\frac{(-1)^n n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\sin(n+1)\varphi,$$

其中 $\varphi=\arg(x+\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{2}-\arctan x=\operatorname{arccot} x$.

78　计算 $f^{(n)}(0)$，已知 $f(x)=\arctan x$.

对 f 求两次导数，有

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2},\quad f''(x)=\frac{-2x}{(1+x^2)^2}=\frac{-2xf'}{1+x^2},$$

由此
$$(1+x^2)f''(x)+2xf'(x)\equiv 0.$$

对以上恒等式使用莱布尼茨公式，有

$$(1+x^2)f^{(n)}(x)+2(n-2)xf^{(n-1)}(x)+(n-2)(n-3)f^{(n-2)}(x)+$$
$$2xf^{(n-1)}(x)+2(n-2)f^{(n-2)}(x)\equiv 0.$$

令 $x=0$，得到递归关系式

$$f^{(n)}(0)=-(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0),$$

由此，当 n 为偶数时，$f^{(2k)}(0)=0$，而当 $n=2k+1$，$k=0,1,2,\cdots$时有公式

$$f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k(2k)!,\quad k\in\mathbf{Z}_0.$$

79　计算 $f^{(n)}(0)$，已知 $f(x)=\cos(m\arcsin x)$.

仿照上题，对 f 微分两次可得如下恒等式

$$(1-x^2)f''(x)-xf'(x)+m^2f(x)\equiv 0.$$

利用莱布尼茨公式对以上恒等式求 $n-2$ 次导数，得

$$(1-x^2)f^{(n)}(x)-2x(n-2)f^{(n-1)}(x)-(n-2)(n-3)f^{(n-2)}(x)-$$
$$xf^{(n-1)}(x)-(n-2)f^{(n-2)}(x)+m^2f^{(n-2)}(x)\equiv 0.$$

令 $x=0$，得到递归关系式

$$f^{(n)}(0)=((n-2)^2-m^2)f^{(n-2)}(0),\tag{1}$$

由此，当 $n=2k$，$k\in\mathbf{N}$ 时，由于 $f(0)=1$，有

$$f^{(2k)}(0)=(-1)^k m^2(m^2-2^2)\cdots(m^2-(2k-2)^2).$$

同理，(1)式当 $n=2k+1$，$k\in\mathbf{N}$ 时，由于 $f'(0)=0$，故有

$$f^{(2k+1)}(0)=0.$$

80　证明：函数

$$f:x\mapsto\begin{cases}x^{2n}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

$n\in\mathrm{N}$，在 $x=0$ 点有直到 n 阶导数，但没有 $n+1$ 阶导数．

由于 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，故 $f'(0)=0$．假设对某个自然数 k，$k\leq n-1(n=2,3,\cdots)$，$f^{(k)}(0)=0$．要证明 $f^{(k+1)}(0)=0$．事实上，由于

$$f^{(k)}(x)=\sum_{i=0}^{k}\mathrm{C}_k^i 2n(2n-1)\cdots(2n-k+i+1)x^{2n-k+i}\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{(i)},\quad x\neq0,\qquad(1)$$

由导数定义

$$f^{(k+1)}(0)=\lim_{x\to0}\frac{f^{(k)}(x)-f^{(k)}(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\sum_{i=0}^{k}\mathrm{C}_k^i 2n(2n-1)\cdots(2n-k+i+1)x^{2n-k+i-1}\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{(i)}=0.$$

这里利用了函数 $\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)^{(k)}$ 包含 $\dfrac{1}{x^{2k}}\sin\dfrac{1}{x}$ 或者 $\dfrac{1}{x^{2k}}\cos\dfrac{1}{x}$ 这两类项(取决于 k 的奇偶性)．

因此，由数学归纳法，即得 $f^{(k)}(0)=0$，$\forall\, k=1,\cdots,n$．

最后，在式(1)中令 $k=n$，可知 $\lim\limits_{x\to0}f^{(n)}(x)$ 不存在，即函数 $f^{(n)}$ 在零点不连续，从而在该点不可导．

练　习　题

求下列函数的 n 阶导数：

136　$f(x)=\mathrm{e}^{x^2}$．

137　$f(x)=\dfrac{6-4x}{x^3-6x^2+11x-6}$．

138　$f(x)=x^2\varphi''(x)$．

139　$f(x)=x^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$．

140　计算 $\boldsymbol{f}'(x)$，已知

$$\boldsymbol{f}(x)=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) & \varphi(x)\\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) & \varphi'(x)\\ \cdots & \cdots & & \cdots & \cdots\\ f_1^{(n)}(x) & f_2^{(n)}(x) & \cdots & f_n^{(n)}(x) & \varphi^{(n)}(x)\end{vmatrix}.$$

计算 n 阶导数：

141　$\boldsymbol{f}(x)=(\sin2x,\ \sin^2x,\ x^k)$，$k\in\mathrm{N}$．

142　$\boldsymbol{f}(x)=\begin{matrix} x\varphi(x) & \dfrac{x}{x^2+1} & \cos^4x\\ 1 & \mathrm{sh}2x & \dfrac{\varphi(x)}{x}\end{matrix}$．

143　$f(x)=\dfrac{x+\mathrm{i}}{x^2+2\mathrm{i}}$．

144　$f(x)=x^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$．

145　$f(x)=x\sin(3x+2\mathrm{i})$．

146　$\boldsymbol{f}(x)=\begin{matrix} 1 & x & \cdots & x^n\\ x & x^2 & \cdots & x^{n+1}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ x^n & x^{n+1} & \cdots & x^{2n}\end{matrix}$．

147　设 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}(x)$，$v=v(x)$为 n阶可微向量值函数，则

$$(\boldsymbol{u}(x),\ v(x))^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k(\boldsymbol{u}^{(k)}(x),\ v^{(n-k)}(x)).$$

证明之.

148　证明：计算 n阶导数的莱布尼茨公式对于函数矩阵 $\boldsymbol{A}(x)$，$\boldsymbol{B}(x)$也成立

$$(\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{B}(x))^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k\boldsymbol{A}^{(k)}(x)\boldsymbol{B}^{(n-k)}(x),$$

其中 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$为 n阶可微.

利用 147 题，148 题计算 n阶导数：

149　$\boldsymbol{f}(x)=(\boldsymbol{u}(x),\ v(x))$，其中：

1) $\boldsymbol{u}(x)=(\sin x,\ \sin 2x,\ \cdots,\ \sin nx)$，$v(x)=(\mathrm{e}^x,\ \mathrm{e}^{2x},\ \cdots,\ \mathrm{e}^{nx})$；

2) $\boldsymbol{u}(x)=(\cos x,\ \cos 2x,\ \cdots,\ \cos nx)$，$v(x)=(x,\ x^2,\ \cdots,\ x^n)$.

150　$\boldsymbol{f}(x)=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{B}(x)$，其中

1) $\boldsymbol{A}(x)=\begin{pmatrix}\sin nx & \cos nx\\ -\cos nx & \sin nx\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}(x)=\begin{pmatrix}\operatorname{sh} nx & \operatorname{ch} nx\\ -\operatorname{ch} nx & \operatorname{sh} nx\end{pmatrix}$；

2) $\boldsymbol{A}(x)=\begin{pmatrix}x\mathrm{e}^x & x^2\mathrm{e}^{2x} & x^3\mathrm{e}^{3x}\\ 1 & x^n & x^{2n}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}(x)=\begin{pmatrix}\dfrac{x}{1+x} & \dfrac{x^2}{(1+x)^2}\\ \dfrac{4}{\ln x} & \dfrac{1}{\ln^2 x}\end{pmatrix}$.

151　证明函数

$$y=f(x)=C_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}+C_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\quad(\omega,\ C_1,\ C_2\text{ 为常数})$$

满足微分方程 $y''+\omega^2y=0$.

152　证明函数

$$s=s(t)=\frac{1}{k^2}\ln\operatorname{ch}(k\sqrt{g}\,t),$$

(其中 k，g为常数)满足方程

$$m\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2}=mg-k\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)^2,\quad m\text{ 为常数}.$$

153　证明向量值函数

$$\boldsymbol{x}:\ t\mapsto C_1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^t+C_2\begin{pmatrix}2\cos t\\2\cos t\\3\cos t-\sin t\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}2\sin t\\2\sin t\\3\sin t+\cos t\end{pmatrix},\quad C_i\text{ 为常数},\ i=1,2,3,$$

满足方程$\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ -2 & -1 & 2\\ -3 & -2 & 3\end{pmatrix}.$$

154　证明向量值函数

$$\boldsymbol{x}: t \mapsto C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + C_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t} +$$

$$C_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + C_6 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

满足方程$\frac{d^2 \boldsymbol{x}}{dt^2} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

155 证明: 如果某向量值函数 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(t)$满足方程$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 其中 $\boldsymbol{A}$为常数矩阵, 则$\boldsymbol{x}(t)$也满足方程

$$\frac{d^n \boldsymbol{x}}{dt^n} = \boldsymbol{A}^n \boldsymbol{x}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

156 计算$\frac{d^2}{dx^2}(\boldsymbol{A}^{-1}(x))$, 其中 $\boldsymbol{A}^{-1}(x)$为矩阵 $\boldsymbol{A}(x)$的逆矩阵.

157 证明: 方程组$\frac{dx}{dt} = x^3 - y$, $\frac{dy}{dt} = x + y^3$ 的解也满足方程组

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 3x^5 - 3x^2 y - x - y^3, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = x^3 - y + 3xy^2 + 3y^5.$$

158 计算 $f''(0)$, 已知 $f(x) = x^3(\sin(\ln^m |x|) + \cos(\ln^m |x|))$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$, 其中 $m = \frac{p}{2q+1}$; $p, q \in \mathbb{Z}$. 问: 二阶导数在零点是否连续? 是否可以选择 m的值, 使 $f'''(0)$存在?

159 当 α取何值时, 函数 $f: x \mapsto |x|^{\alpha} \sin \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$ 有连续二阶导数?

160 计算 $f''(x)$, 已知 $f(x) = \varphi(\psi(x))$且

$$\varphi(x) = \begin{cases} x, & |x| < 2, \\ \sin x, & |x| > 2, \end{cases} \quad \psi(x) = \begin{cases} e^x, & |x| < 2, \\ \cos x, & |x| > 2. \end{cases}$$

161 已知 $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, 计算函数 f在其间断点的广义二阶导数.

162 计算反函数 $f^{-1}: x \mapsto y$的二阶导数, 已知 $f: y \mapsto x$为

1) $x = y + y^3$; 2) $x = y + \sin y$.

163 计算 $d^2 f(0)$, 已知 $f: x \mapsto |x|^{\alpha} \arctan \frac{1}{|x|}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

164 计算 $f''(0)$, 已知 $y = f(x)$且 $x = 2t - t^2$, $y = (t-1)^4$.

165 计算 $f''(x)$, 已知 $y = f(x)$的参数方程为:

$$x(t) = \begin{cases} 2t, & t < 1, \\ t^2, & t \geq 1, \end{cases} \quad y(t) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \arcsin t, & |t| \leq 1, \\ 1 + t - t^2, & |t| > 1. \end{cases}$$

166　计算函数 $y = f(x)$ 在 $x = \dfrac{\pi}{2}$ 点的二阶导数，已知函数 f 的隐函数方程为 $\sin(xy) = x + y - \dfrac{\pi}{2}$，$y > 0$.

167　计算 $f_{500}(x)$，已知

$$f_{n+1}(x) = x f_n'(x), \quad f_1(x) = \frac{x(1 - 11x^{10} + 10x^{11})}{(1 - x)^2}.$$

168　计算 $f''(0)$，已知函数 $f: x \mapsto y$ 的隐函数方程为 $y^5 + x^3 + x^2 - y^2 = 0$ 且函数在 $x = 0$ 点的邻域内二阶连续可微 .

计算 $f^{(50)}(0)$，已知：

169　$f(x) = \sin(x^2)$.

170　$f(x) = \dfrac{1}{1 - x + x^2}$.

171　$f(x) = \dfrac{1}{x^4 + 1}$.

172　$y = f(x)$，$x = 2t - t^2$，$y = 3t - t^3$.

计算$\dfrac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}$，已知：

173　$f(x) = \sin(u(x)v(x))$.

174　$f(x) = \arcsin \dfrac{u(x)}{v(x)}$.

175　$f(x) = u(x)\mathrm{e}^{-v^2(x)}$.

176　$f(x) = \ln(u(v(x)))$.

177　$\boldsymbol{f}(x) = \left(u(x) + v(x),\ \dfrac{u(x)}{v(x)} \right)$.

178　$\boldsymbol{f}(x) = \begin{pmatrix} u(x) & v(x) \\ u^2(x) & v^2(x) \end{pmatrix}$.

179　$y = f(x)$；1) $y(t) = t\sin t$，$x(t) = t\cos t$；　2) $y(\varphi) = \rho(\varphi)\sin\varphi$，$x(\varphi) = \rho(\varphi)\cos\varphi$.

180　$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(x)$；$\boldsymbol{y}(t) = (\sin t, \cos t, \tan t)$，$x(t) = 3t + t^3$.

181　$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(x)$；$\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} & \mathrm{e}^{-2t} & \mathrm{e}^{-3t} \\ t & t^2 & t^3 \end{pmatrix}$，$x(t) = 5t + t^5$.

182　$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(x)$；$\boldsymbol{y}(t) = \left(\dfrac{t}{t+1}, \dfrac{1}{t}, |y(t)| \right)$，$x(t) = 4t + \sin t + \cos t$.

计算给定点的$\dfrac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}$：

183　$y = f(x)$，$x^3 + y^3 = 3x^2y^2 + 1$，$M(0, 1)$.

184　$y = f(x)$，$3x^5 - 2y^5 - x^2 + y^2 + 1$，$M(0, 1)$.

185　$y = f(x)$，$y = x\ln(x^2 + y^2)$，$M(1, 0)$.

186　假设向量值函数 $\boldsymbol{f}: x \mapsto (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))$ 的分量满足方程组

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^2(x)(1 + x^{i+j}) = \sin(jx) f_j(x), \quad j = 1, \cdots, n,$$

试求 $\boldsymbol{f}''(x)$.

187　假设函数矩阵 $\boldsymbol{A}(x)$ 满足方程

$$\boldsymbol{A}^2(x)\boldsymbol{B}(x) + \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{C}(x) = \boldsymbol{I},$$

其中 $\boldsymbol{B}(x)$，$\boldsymbol{C}(x)$ 为二阶可微矩阵，$\boldsymbol{I}$ 为单位阵 . 又设 $\boldsymbol{A}(x)$ 与其导数的乘积可交换，试求 $\boldsymbol{A}''(x)$.

188　计算 $d^4 f(x)$，已知 $f(x)=u^2(x)v^3(x)$.

189　计算 $d^2 \boldsymbol{f}(x)$，已知 $\boldsymbol{f}(x)=\boldsymbol{A}(u(x))\boldsymbol{B}(v(x))$，其中 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为函数矩阵.

190　计算 $d^2 f(x)$，已知 $\boldsymbol{f}(x)=|\boldsymbol{\varphi}(u(x))|$，其中 $\boldsymbol{\varphi}$ 为向量值函数.

5　罗尔定理　拉格朗日定理　柯西定理

5.1　罗尔定理

假设函数 $f: [a, b]\to \mathbf{R}$ 在闭区间上连续，在开区间内有有限或无限导数. 且设 $f(a)=f(b)$. 则在 $[a, b]$ 内存在点 ξ，使得

$$f'(\xi)=0.$$

5.2　拉格朗日定理

假设函数 $f: [a, b]\to \mathbf{R}$ 在闭区间上连续，在开区间内有有限或无限导数. 则在 $[a, b]$ 内存在点 ξ，使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

5.3　柯西定理

假设函数 f，g 在闭区间上连续，在开区间内有有限或无限导数. 而且在开区间内 $g'(x)\neq 0$，则有

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

如果还满足 $g(a)\neq g(b)$，则条件 $g'(x)\neq 0$ 可以换成

$$(f'(x))^2+(g'(x))^2\neq 0\quad \forall x\in(a, b).$$

81　假设函数 f 在有限或者无限区间 (a, b) 内的每一点有有限导数 f'，并且有

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=\lim_{x\to b-0} f(x).$$

证明存在 (a, b) 内的点 c 使得 $f'(c)=0$.

假设区间 (a, b) 有限且 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=C$，$C$ 为常数. 考察函数

$$F: x\mapsto \begin{cases} f(x), & x\in(a, b) \\ C, & x=a,\ x=b, \end{cases}$$

它在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内有有限导数，而且 $F(a)=F(b)$. 根据罗尔定理，存在 (a, b) 内的点 c 使得 $f'(c)=0$.

如果区间 (a, b) 无限，那么，由于 f 的导数有限，f 连续，设 $x\to a+0$ 及 $x\to b-0$ 时 f 的极限有界，则对足够小的 ε，直线 $y=C+\varepsilon$ 或者 $y=C-\varepsilon$ 与曲线 $y=f(x)$ 至少在两点

相交,记为 α_1,α_2.在区间$[\alpha_1,\alpha_2]$上函数 f满足罗尔定理的所有条件,因此在(α_1,α_2)内(即在区间(a,b)内)存在点 c,使得 $f'(c)=0$.

现在考虑$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=\infty$的情形.此时,无论区间$(a,b)$有限还是无限,方程 $f(x)=A(A>0$,任意固定,且当$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=+\infty)$或者方程 $f(x)=-A(A>0$,任意固定,且当$\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=-\infty)$总有两个不同的根,记为 α_1,α_2.在区间$[\alpha_1,\alpha_2]$上应用罗尔定理,存在(α_1,α_2)内(即(a,b)内)的点 c使得 $f'(c)=0$.

82 假设:1) 函数 f在$[x_0,x_n]$上有定义且有 $n-1$阶连续导数;2) f在(x_0,x_n)内有 n阶导数;3) 对 $x_0<x_1<\cdots<x_n$ 成立等式 $f(x_0)=f(x_1)=\cdots=f(x_n)$.证明:在$(x_0,x_n)$内至少存在一点 ξ,满足 $f^{(n)}(\xi)=0$.

在每个闭区间$[x_{i-1},x_i]$,$i=1,\cdots,n$上,函数 f满足罗尔定理的所有条件,因此,至少存在 n个点$\xi_j\in(x_0,x_n)$,满足 $f'(\xi_j)=0$.函数 f'在每个闭区间$[\xi_j,\xi_{j+1}]$,$j=1,\cdots,n-1$上满足罗尔定理的所有条件,因此,至少存在 $n-1$个点 $\eta_k\in(x_0,x_n)$,满足$f''(\eta_k)=0$,$k=1,\cdots,n-1$.继续以上步骤,在(x_0,x_n)内有 $n-(n-2)=2$个点满足 $f^{(n-1)}(\zeta_i)=0$,$i=1,2$.在区间$[\zeta_1,\zeta_2]$上应用罗尔定理,在(x_0,x_n)内至少存在一点 ξ,满足 $f^{(n)}(\xi)=0$.

83 证明:如果实系数多项式

$$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n,\quad a_0\neq 0$$

的所有零点都是实的,则其逐次的导数 $P_n'(x)$,$P_n''(x)$,$\cdots$,$P_n^{(n-1)}(x)$也只有实零点.

假设所有零点都不同,则由罗尔定理,$P_n'(x)$有 $n-1$个实零点;$P_n''(x)$有 $n-2$个实零点,以此类推.由于求导运算使多项式降低一阶,故其导数的零点都是实的.如果某个零点是重的,则它也是导数的零点,当然也是实的.

84 证明:勒让德多项式

$$\mathrm{P}_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}((x^2-1)^n)$$

的所有零点都是实数,且包含在$(-1,1)$内.

多项式 $U_n(x)=(x^2-1)^n$ 在闭区间$[-1,1]$上有 $2n$个实零点:$x_1=x_2=\cdots=x_n=-1$;$x_{n+1}=x_{n+2}=\cdots=x_{2n}=1$.由上题,多项式 $\mathrm{P}_n(x)$有 n个实零点,且由罗尔定理,均位于$(-1,1)$内.

85 证明:切比雪夫-拉盖尔多项式

$$\mathrm{L}_n(x)=\mathrm{e}^x\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n\mathrm{e}^{-x})$$

的所有零点都是正数.

考察函数 φ: $x\mapsto x^n\mathrm{e}^{-x}$.由于 $\varphi(0)=\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$,故存在点 $\xi\in(0,+\infty)$,使

得 $\varphi'(\xi_1)=0$(参见 81). 但是, $\varphi'(0)=\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi'(x)=0$, 因此, 由罗尔定理并借助 81 的解法, 可以找到点 $\xi_2\in(0,\xi_1)$及 $\xi_3\in(\xi_1,+\infty)$, 使得 $\varphi''(\xi_i)=0$, $i=2,3$. 此外, $\varphi''(0)=\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi''(x)=0$, 故有正半轴上的三个点使得 φ 为零. 由于 $\varphi^{(j)}(0)=\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi^{(j)}(x)=0$, $j=0,1,\cdots,n-1$, $n-3$ 次使用罗尔定理并借助 81 的解法, 得知, 函数 $\varphi^{(n-1)}$ 在正半轴 $x\geq 0$ 上的 $n+1$ 个点上为零, 且其中之一是 $x=0$. 这些点是 n 个小区间的端点, 在每个小区间上对 $\varphi^{(n-1)}$ 使用罗尔定理, 至少存在 n 个点 η_k, 使得 $\varphi^{(n)}(\eta_k)=0$. 显然, $\varphi^{(n)}(0)\neq 0$. 由于多项式 $\mathrm{L}_n(x)=\mathrm{e}^x\varphi^{(n)}(x)$是 n阶的, 只有 n 个零点, 因此其零点就是 $\eta_k>0$, $k=1,\cdots,n$.

86 证明: 切比雪夫-厄米特多项式

$$\mathrm{H}_n(x)=(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\mathrm{e}^{-x^2})$$

的所有零点都是实数.

考察函数 $u: x\mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$. 显然, $\lim\limits_{x\to\infty}u^{(j)}(x)=0$, $j=0,1,\cdots,n$, 因此函数 $u^{(j)}(x)$, $j=0,1,\cdots,n$在$(-\infty,+\infty)$上满足 81 题的条件. 重复上例的解法, 我们知道, u'在该区间内至少有一个零点, u''有两个, $\cdots$, $u^{(n)}$ 有 n个零点. 由于 $\mathrm{H}_n(x)=(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}u^{(n)}(x)$ 是 n阶多项式, 恰好有 n个零点, 故其零点与 $u^{(n)}$ 的零点相同, 即这些零点全是实数.

87 求函数 $\theta=\theta(x_0,\Delta x)$, 使其满足 $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta x f'(x_0+\theta\Delta x)$, 假设

1) $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$; 2) $f(x)=x^3$; 3) $f(x)=\dfrac{1}{x}$; 4) $f(x)=\mathrm{e}^x$.

1) $a(x_0+\Delta x)^2+b(x_0+\Delta x)+c-(ax_0^2+bx_0+c)=\Delta x(2a(x_0+\theta\Delta x)+b)$, 得 $\theta=\dfrac{1}{2}$;

2) $(x_0+\Delta x)^3-x_0^3=3\Delta x(x_0+\theta\Delta x)^2$, 得到

$$\theta(x_0,\Delta x)=\frac{-x_0+\sqrt{x_0\Delta x+\frac{1}{3}(\Delta x)^2+x_0^2}}{\Delta x},\quad x_0>0,\ \Delta x>0;$$

3) $\dfrac{1}{x_0+\Delta x}-\dfrac{1}{x_0}=-\dfrac{\Delta x}{(x_0-\theta\Delta x)^2}$, 得到

$$\theta(x_0,\Delta x)=\frac{x_0}{\Delta x}\left(\sqrt{1+\frac{\Delta x}{x_0}}-1\right),\quad x_0(x_0+\Delta x)>0;$$

4) $\mathrm{e}^{x_0+\Delta x}-\mathrm{e}^{x_0}=\Delta x\mathrm{e}^{x_0+\theta\Delta x}$, 得到 $\theta(x_0,\Delta x)=\dfrac{1}{\Delta x}\ln\dfrac{\mathrm{e}^{\Delta x}-1}{\Delta x}$.

88 假设

$$f: x\mapsto\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2}, & 0\leq x\leq 1,\\[2mm] \dfrac{1}{x}, & 1<x<+\infty.\end{cases}$$

试确定函数 f 在区间 $[0,2]$ 上满足拉格朗日中值公式的中值点 .

首先研究函数 f 在 $x=1$ 点的可微性 . 由单侧导数的定义, 有

$$f'_-(1)=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{3-(1+\Delta x)^2}{2}-1\right]=-1,$$

$$f'_+(1)=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{1}{1+\Delta x}-1\right]=-1.$$

函数 f 在区间 $[0,2]$ 上是可导的 . 对 f 在区间 $[0,2]$ 上应用拉格朗日中值公式, 有

$$f(2)-f(0)=2f'(c),\quad 0<c<2.$$

由于 $f(2)=\frac{1}{2}$, $f(0)=\frac{3}{2}$, 而

$$f': x\mapsto\begin{cases}-x, & 0<x\leq 1,\\ -\dfrac{1}{x^2}, & 1<x<2.\end{cases}$$

因此

$$-1=\begin{cases}-2c, & 0<c\leq 1,\\ -\dfrac{2}{c^2}, & 1<c<2.\end{cases}$$

由此 $c_1=\frac{1}{2}$, $c_2=2$ 为两个中值点 .

89 假设函数 f 在区间 (a,b) 内有连续导数 f'. 能否对 (a,b) 内的每一点 ξ, 确定出区间内的另外两点 x_1, x_2, 使得

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi),\quad x_1<\xi<x_2.$$

如果在 (a,b) 上 $f'(x)\geq 0$, 且 f 在 (a,b) 的任意子区间上不为常数, 则 f 在 (a,b) 上单调增加 . 那么对任意的 $x_1, x_2\in(a,b)$, $x_2>x_1$, 有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>0,$$

因此对于区间内满足 $f'(x)=0$ 的点, 等式

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi)=0$$

是不可能的 . 例如, 函数 $f: x\mapsto x^3$, $-1\leq x\leq 1$, 对任意的 $x_1, x_2\in(-1,1)$, 有等式 $\frac{x_2^3-x_1^3}{x_2-x_1}=x_2^2+x_1x_2+x_1^2>0$, 因此, 对于 $\xi=0$, 要找的满足题意的 x_1, x_2 不存在 .

90 证明不等式:

1) $|\sin x-\sin y|\leq|x-y|$;

2) $py^{p-1}(x-y)\leq x^p-y^p\leq px^{p-1}(x-y)$, $0<y<x$, $p>1$;

3) $|\arctan a - \arctan b| \leq |a - b|$; 4) $\dfrac{a-b}{a} < \ln\dfrac{a}{b} < \dfrac{a-b}{b}$, $0 < b < a$.

由拉格朗日中值公式

1) $\sin x - \sin y = (x - y)\cos\xi$, **因此** $|\sin x - \sin y| = |\cos\xi|\,|x - y| \leq |x - y|$;

2) $x^p - y^p = p\xi^{p-1}(x - y)$, $y < \xi < x$, **因此** $py^{p-1}(x - y) \leq x^p - y^p \leq px^{p-1}(x - y)$;

3) $\arctan a - \arctan b = \dfrac{1}{1+\xi^2}(a - b)$, **因此** $|\arctan a - \arctan b| \leq |a - b|$;

4) $\ln a - \ln b = \dfrac{1}{\xi}(a - b)$, $b < \xi < a$, **因此** $\dfrac{a-b}{a} < \ln\dfrac{a}{b} < \dfrac{a-b}{b}$, $0 < b < a$.

91 证明: 如果函数 f 在有限区间 (a, b) 内可导, 但无界, 则其导数 f' 在该区间上也无界.

假设函数 f 在 (a, b) 内可导, 在 $x \to b - 0$ 时无界. 任取左收敛到 b 的数列 (x_n), 则对任取的 $A > 0$, 存在 N, 对任意的 $n > N$, 有 $|f(x_n)| > A$. 固定任意数 $m > N$, 对于 $n > m$, 考虑差 $f(x_n) - f(x_m)$. 在区间 $[x_m, x_n]$ 上对 f 使用拉格朗日中值公式, 得到

$$\left|\frac{f(x_n) - f(x_m)}{x_n - x_m}\right| = |f'(\xi_{mn})|,$$

其中 $x_m < \xi_{mn} < x_n$. 对于足够大的 n, 上式左端部分大于任何给定的正数, 由此可以得到当 $x \to b - 0$ 时 f' 的无界性.

92 证明: 如果函数 f 在无限区间 $(x_0, +\infty)$ 内可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, 则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0,$$

即当 $x \to +\infty$ 时, $f(x) = o(x)$.

取 (x_n) 为收敛到 $+\infty$ 的数列, 则对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$: $\forall n > N$ 成立

$$|f'(x_n)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

固定 $n_0 > N$, 并取 $n > n_0$, 在区间 $[x_{n_0}, x_n]$ 上对函数 f 运用拉格朗日中值公式, 得到

$$\left|\frac{f(x_n) - f(x_{n_0})}{x_n - x_{n_0}}\right| = |f'(\xi_{nn_0})|, \tag{2}$$

其中 $x_{n_0} < \xi_{nn_0} < x_n$. 根据 (1), 由 (2) 推出

$$\left|\frac{f(x_n) - f(x_{n_0})}{x_n - x_{n_0}}\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

因此

$$\frac{f(x_{n_0})}{x_n} - \left(1 - \frac{x_{n_0}}{x_n}\right)\frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x_n)}{x_n} < \frac{f(x_{n_0})}{x_n} + \left(1 - \frac{x_{n_0}}{x_n}\right)\frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

对足够大的 n, 显然有不等式

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \frac{f(x_{n_0})}{x_n} < \frac{\varepsilon}{2},$$

但是当 $n > n_0$, **总成立** $1 - \frac{x_{n_0}}{x_n} \quad \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$, **因此由**(4), **对** $n_0 > N$ **及足够大的** $n > n_0$, **有**

$$-\varepsilon < \frac{f(x_n)}{x_n} < \varepsilon, \tag{5}$$

或者 $\left|\frac{f(x_n)}{x_n}\right| < \varepsilon$.

由于(x_n)**为任意趋向无穷大的数列, 其所有元素均正, 因此**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0 \qquad (f(x) = o(x)), \text{对 } x\to\infty .$$

93　证明: 如果函数 f **在无限区间**$(x_0, +\infty)$**内可微, 且当** $x\to+\infty$**时,** $f(x) = o(x)$, **则**

$$\lim_{x\to+\infty} | f'(x) | = 0 .$$

特别地, 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = k$, **则** $k = 0$.

假设 $\lim\limits_{x\to+\infty} | f'(x) | = A$, $A \neq 0$, **则** $\forall\varepsilon(0<\varepsilon<A)\exists B$, **使得对** $x > B$ **成立**

$$| f'(x) | \geq A - \varepsilon. \tag{1}$$

固定 $x_1 > B$, **且取** $x > x_1$. **在区间**$[x_1, x]$**上对函数** f **运用拉格朗日中值公式, 并注意到式**(1), **得到**

$$\left|\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}\right| = | f'(\xi) | \geq A - \varepsilon, \quad x_1 < \xi < x. \tag{2}$$

对(2)**式取** $x\to+\infty$**的极限, 得到**

$$\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{f(x)}{x}\right| \geq A - \varepsilon,$$

这与 $f(x) = o(x)$**矛盾, 因此** $A = 0$, **即** $\lim\limits_{x\to+\infty} | f'(x) | = 0$.

现在假设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = k$, **那么对任意的数列**$(x_m)$, $x_m > 0$, $x_m\to+\infty$, **有**

$$\lim_{m\to\infty} f'(x_m) = k,$$

即 $\forall\varepsilon > 0 \exists M$, **使得当** $m > M$ **时成立不等式**

$$k - \varepsilon < f'(x_m) < k + \varepsilon. \tag{3}$$

取 $m_0 > M$, $m > m_0$. **在区间**$[x_{m_0}, x_m]$**上对函数** f **运用拉格朗日中值公式, 得到**

$$\frac{f(x_m) - f(x_{m_0})}{x_m - x_{m_0}} = f'(\xi), \quad x_{m_0} < \xi < x_m .$$

由式(3)**可以得到**

$$k - \varepsilon < \frac{f(x_m) - f(x_{m_0})}{x_m - x_{m_0}} < k + \varepsilon. \tag{4}$$

令 $m\to+\infty$，上式变成

$$k-\varepsilon\leq\lim_{m\to+\infty}\frac{f(x_m)}{x_m}\leq k+\varepsilon.$$

由于 $\lim\limits_{m\to+\infty}\frac{f(x_m)}{x_m}=0$，得到 $k-\varepsilon\leq0$，$k+\varepsilon\geq0$，由于 ε 的任意性，知 $k=0$．

94 证明：假设函数 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 在闭区间上连续，在开区间内有有限导数，且不是线性的，则在 (a,b) 内存在点 c，使得 $|f'(c)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}\right|$．

把区间 $[a,b]$ 分割成 n 段，端点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，则

$$|f(b)-f(a)|=\left|\sum_{i=0}^{n-1}(f(x_{i+1})-f(x_i))\right|\leq\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|.$$

由拉格朗日中值公式，得

$$f(x_{i+1})-f(x_i)=f'(\xi_i)\Delta x_i,\quad x_i<\xi_i<x_{i+1},\quad i=0,1,\cdots,n-1,$$

其中 $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i$．因此可得

$$|f(b)-f(a)|\leq\sum_{i=0}^{n-1}|f'(\xi_i)|\Delta x_i. \tag{1}$$

由于函数 f 不是线性的，因此存在区间 $[a,b]$ 的分割，使得可以在 $f'(\xi_i)$ 中找到最大者，非零，记作 $f'(\xi)$．由 (1) 可以得到严格的不等式

$$|f(b)-f(a)|<|f'(\xi)|\sum_{i=0}^{n-1}\Delta x_i=(b-a)|f'(\xi)|,$$

即 $|f'(\xi)|>\frac{|f(b)-f(a)|}{b-a}$，$a<\xi<b$．

95 证明：如果函数 f 在区间 $[a,b]$ 上有二阶导数，且 $f'(a)=f'(b)=0$，则在 (a,b) 内至少存在一点 c，使得

$$|f''(c)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

如果函数 $f(x)=c$，c 为常数，命题显然，假设 f 不为常数．由 $f'(a)=f'(b)=0$，f 也不是线性函数．在区间 $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ 上对函数 f 和 φ：$x\mapsto\frac{(x-a)^2}{2}$ 使用柯西中值定理，在区间 $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ 上对函数 f 和 φ：$x\to\frac{(b-x)^2}{2}$ 使用柯西中值定理，得到

$$\frac{8\left(f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)\right)}{(b-a)^2}=\frac{f'(\xi_1)}{\xi_1-a},\quad a<\xi_1<\frac{a+b}{2};$$

$$\frac{8\left(f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)}{(b-a)^2}=\frac{f'(\xi_2)}{b-\xi_2},\quad \frac{a+b}{2}<\xi_2<b.$$

两式相加，得到

$$\frac{8(f(b)-f(a))}{(b-a)^2}=\frac{f'(\xi_1)}{\xi_1-a}+\frac{f'(\xi_2)}{b-\xi_2}. \tag{1}$$

由于 $f'(a)=f'(b)=0$，**上式右端可以改写为**

$$\frac{f'(\xi_1)}{\xi_1-a}+\frac{f'(\xi_2)}{b-\xi_2}=\frac{f'(\xi_1)-f'(a)}{\xi_1-a}-\frac{f'(b)-f'(\xi_2)}{b-\xi_2}=f''(\eta_1)-f''(\eta_2), \tag{2}$$

其中 $a<\eta_1<\xi_1$，$\xi_2<\eta_2<b$. **用绝对值估计**(1)，**并结合**(2)，**有**

$$\frac{8|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}\leq|f''(\eta_1)|+|f''(\eta_2)|.$$

假设 $f(b)\neq f(a)$(**否则可以任意取** c **使结论成立**)，**此时** $|f''(\eta_1)|$，$|f''(\eta_2)|$ **至少有一个不为零**. **记** $|f''(c)|=\max\{|f''(\eta_1)|,|f''(\eta_2)|\}$，**则**

$$\frac{8|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}\leq 2|f''(c)|,$$

由此 $|f''(c)|\geq\dfrac{4|f(b)-f(a)|}{(b-a)^2}$(**等号不能排除，因为可能出现** $|f''(\eta_1)|=|f''(\eta_2)|$，**此时相等**).

96　证明：如果向量函数 $\boldsymbol{f}:\mathbf{R}\to E^n$ **在区间** $[a,b]$ **上有连续导数，则有不等式**

$$\|\boldsymbol{f}(b)-\boldsymbol{f}(a)\|\leq(b-a)\max_{a\leq x\leq b}\|\boldsymbol{f}'(x)\|.$$

函数 $\boldsymbol{F}: x\mapsto(\boldsymbol{f}(b)-\boldsymbol{f}(a))(x-a)-\boldsymbol{f}(x)(b-a)$ **在** $[a,b]$ **可导，在端点取相同的值，因此由罗尔定理** $\exists\,\xi\in(a,b)$ **使得**

$$\boldsymbol{F}'(\xi)=\mathbf{0},\ \text{或}\ \boldsymbol{f}(b)-\boldsymbol{f}(a)=\boldsymbol{f}'(\xi)(b-a).$$

两端取模，得到估计

$$\|\boldsymbol{f}(b)-\boldsymbol{f}(a)\|\leq\|\boldsymbol{f}'(\xi)\|(b-a). \tag{1}$$

由于函数 $\|\boldsymbol{f}'\|$ **在** $[a,b]$ **上连续，故在某个点** $x\in[a,b]$ **有最大值** $\max\|\boldsymbol{f}'(x)\|$. **而** $\|\boldsymbol{f}'(\xi)\|\leq\max\|\boldsymbol{f}'(x)\|$，**由**(1)**得到结论**.

97　证明：如果向量函数 $\boldsymbol{F}:\mathbf{R}\to E^2$　1) **在区间** $[a,b]$ **上有连续**；2) **在** (a,b) **内可导**；3) **在** (a,b) **内导数** $\boldsymbol{F}'(x)\neq\mathbf{0}$，**则存在** $\xi\in(a,b)$ **使得**

$$\boldsymbol{F}(b)-\boldsymbol{F}(a)=\lambda\boldsymbol{F}'(\xi),$$

其中 λ **为某个常数**.

假设 $\boldsymbol{F}: x\mapsto(f(x),g(x))$，$(f(x),g(x))\in E^2$. **那么函数** f，g **在** $[a,b]$ **上连续，在** (a,b) **内可导**. **此外**，$(f'(x))^2+(g'(x))^2\neq0$. **由柯西中值定理**，$\exists\,\xi\in(a,b)$，**使得**

$$(f(b)-f(a))g'(\xi)=f'(\xi)(g(b)-g(a)).$$

不妨设 $f'(\xi)\neq0$，**则**

$$\boldsymbol{F}(b)-\boldsymbol{F}(a)=(f(b)-f(a),g(b)-g(a))=\frac{f(b)-f(a)}{f'(\xi)}(f'(\xi),g'(\xi))=\lambda\boldsymbol{F}'(\xi),$$

其中
$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{f'(\xi)}.$$

练 习 题

191 对函数 f, g, φ 验证罗尔定理的三个条件都不是多余的, 如果

$$f: x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{a-x} + \dfrac{1}{b-x}, & a < x < b, \\ 0, & x = a, x = b; \end{cases}$$

$$g: x \mapsto |x|, \ -1 \leq x \leq 1; \quad \varphi: x \mapsto \sin x, \ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}.$$

192 对于向量函数 $\boldsymbol{f}: x \mapsto (x\sin x, x\cos x)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 试找出 $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 使得

$$\boldsymbol{f}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \boldsymbol{f}(0) = \lambda \frac{\pi}{2} \boldsymbol{f}'(\xi), \quad \lambda \in \mathbf{R}.$$

193 证明: 如果 $f \in C^{(m+1)}([a,b])$, 则 $\exists\, \xi \in [a,b]$, 使得

$$f(x) - L_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\xi)}{(m+1)!} \omega_{m+1}(x),$$

其中 $\omega_{m+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_m)$, $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$,

$$L_m(x) = \sum_{j=0}^{m} f(x_j) \frac{\omega_{m+1}(x)}{\omega'_{m+1}(x_j)(x - x_j)}.$$

提示: 引入函数 $z: x \mapsto f(x) - L_m(x) - k(\bar{x})\omega_{m+1}(x)$, 其中 $k(\bar{x})$ 由 $z(\bar{x}) = 0$ 定出.

194 假设向量函数 $\boldsymbol{f}: \mathbf{R} \to E^n$, $n \geq 3$, 在区间 $[a,b]$ 上连续可导, $a < b$. 是否总可以找到 $\xi \in (a,b)$, 使得向量 $\boldsymbol{f}(b) - \boldsymbol{f}(a)$ 与 $\boldsymbol{f}'(\xi)$ 共线? 研究 $\boldsymbol{f}(x) = (\cos x, \sin x, x)$, $x \in [0, \pi]$.

195 拉格朗日定理对于在 $[a,b]$ 上可导的函数 $f: x \mapsto f_1(x) + \mathrm{i} f_2(x)$, 其中 $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, 是否成立?

试研究 $f: x \mapsto \cos x + \mathrm{i}\sin x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

196 假设 $\boldsymbol{f}$ 是在 (a,b) 上可导的向量值函数, 在 (a,b) 上满足 $\boldsymbol{f}'(x) = \boldsymbol{0}$. 关于 $\boldsymbol{f}$ 我们知道什么?

197 假设 $\boldsymbol{A}$ 是在 (a,b) 上可导的函数矩阵, 在 (a,b) 上满足 $\boldsymbol{A}'(x) = \boldsymbol{0}$. 关于 $\boldsymbol{A}$ 我们知道什么?

198 假设 $\varphi: x \mapsto x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, 其中 f 是在 $[a,b]$ 上二阶可导的函数, 且 $f'(x) \neq 0$. 对给定的 θ 及函数 f, 试找出集合 $X \subset [a,b]$, 使得在其上满足不等式

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \theta |x - y|, \quad x, y \in X,$$

如果:

1) $f: x \mapsto x - \cos x$, $\theta = \frac{1}{2}$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; 2) $f: x \mapsto x\tan x - 1$, $\theta = \frac{1}{4}$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.

199 假设

$$\varphi: t \mapsto f(x) - f(t) - f'(t)(x - t) - \cdots - f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!} - \lambda(x - t)^p,$$

$$t \in [a, x], \ p > 0, \ \lambda = \text{const},$$

函数 f 在区间 $[a, x]$ 上有 $n+1$ 阶导数. 证明: $\forall\, p > 0$, $\exists\, \xi \in [a,b]$ 及相应的 λ, 有

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p \frac{(x-\xi)^{n+1}}{pn!} f^{(n+1)}(\xi).$$

200　**假设函数矩阵** $\boldsymbol{A}: x \mapsto \boldsymbol{A}(x)$ **在区间** $[a,b]$ **上连续可微，且** $|\boldsymbol{A}(x)| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(x)|^2$**，其中** $a_{ij}(x)$ **为矩阵** $\boldsymbol{A}(x)$ **的元素．那么成立估计**

$$|\boldsymbol{A}(b) - \boldsymbol{A}(a)| \leq \max_{a \leq x \leq b} |\boldsymbol{A}'(x)| (b-a).$$

证明之．

201　**证明：如果向量值函数** $\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}$ **在区间** $[a,b]$ **上连续，在** (a,b) **内可导，则存在** $\xi \in (a,b)$**，使得**

$$(\boldsymbol{f}(b) - \boldsymbol{f}(a), \boldsymbol{g}'(\xi)) = (\boldsymbol{g}(b) - \boldsymbol{g}(a), \boldsymbol{f}'(\xi)).$$

202　**假设函数** f, g **及其直到** n **阶导数(包括** n **阶)在区间** $[a,b]$ **连续，其** $n+1$ **阶导数在** (a,b) **内可导．那么存在** $\xi \in (a,b)$**，使得**

$$g(b) - \sum_{k=1}^{n} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad f^{(n+1)}(\xi) = f(b) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \quad g^{(n+1)}(\xi).$$

证明之．

提示：考察函数 $\varphi: x \mapsto \varphi(x)$**，其中**

$$\varphi(x) = R_n(b) r_n(x) - r_n(b) R_n(x),$$

$$R_n(x) = g(b) - \sum_{k=1}^{n} \frac{g^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k,$$

$$r_n(x) = f(b) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

203　**假设：** 1) $f \in C^{(2)}(-\infty, +\infty)$; 2) $\forall x, h \in \mathbb{R}$ **成立** $f(x+h) - f(x) \equiv h f'(x+\theta h)$;
3) $f''(x) \neq 0$.

证明： 1) **如果** $\theta = \theta(x)$**，则** $\theta(x) \equiv \frac{1}{2}$; 2) **如果** $|\theta'(x)| < +\infty$**，且** $\theta = \theta(h)$**，则** $\lim\limits_{h \to 0} \theta(h) = \frac{1}{2}$.

204　**假设**

$$(x+1)^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}(x + \theta(x))^{-1+\frac{1}{n}}, \quad x \geq 0, \quad n > 1.$$

分别求 $x \to +0$, $x \to +\infty$ **时** $\theta(x)$ **的极限．**

205　**假设函数** f, g **在区间** $[a,b]$ **上可导，且** $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$**．那么存在** $\xi \in (a,b)$**，使得**

$$\frac{1}{g(b) - g(a)} \begin{vmatrix} \varphi(a) & \varphi(b) \\ g(a) & g(b) \end{vmatrix} = \frac{1}{g'(\xi)} \begin{vmatrix} \varphi(\xi) & g(\xi) \\ \varphi'(\xi) & g'(\xi) \end{vmatrix}.$$

证明之．

206　**证明：函数**

$$f: x \mapsto \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin\left(\frac{3}{2} \ln x\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

的导数在 $x \geq 0$ **时是连续的，但由关系** $f(x) = f'(\xi(x))x$, $0 < \xi(x) < x$ **确定的函数** ξ **是间断的．**

207　**证明：如果** f' **在区间** $[0,h]$ **上连续且单调，而且** $f(0) = 0$**，则函数** ξ **在该区间上连续(参照练习** 206**)．**

208　**证明不等式：**

1) $|x-y| \le |x^2\ln x - y^2\ln y| \le 3e|x-y|$, $\forall x, y \in [1, e]$;

2) $|x^2\arctan x - y^2\arctan y| \le \frac{1+\pi}{2}|x-y|$, $\forall x, y \in [0, 1]$.

209　**证明不等式:**

1) $\left|\frac{\sin x - \sin y}{x-y} - \cos y\right| \le \frac{1}{2}|x-y|$, $\forall x, y \in (-\infty, +\infty)$;

2) $\left|\frac{\ln\frac{x}{y}}{x-y} - \frac{1}{y}\right| \le \frac{1}{2}|x-y|$, $\forall x, y \in [1, +\infty)$.

210　**证明:如果** $0 < \varepsilon < 1$, **逼近数列**

$$x_{n+1} = \varepsilon e^{x_n}, \quad x_0 = 1$$

收敛到方程 $x = \varepsilon e^x$ **的根.**

211　**证明:逼近数列**

$$\boldsymbol{X}_{n+1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_n + \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{X}_0 = (1, 1)^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{I} = (1, 0)^{\mathrm{T}},$$

其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \varepsilon & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, **在** E^2 **内收敛到方程** $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{I}$ **的根,如果** $\varepsilon^2 < \frac{5}{8}$.

6　函数的增减性　不等式

6.1　函数的增减性

定义　**函数** f **称为区间** $[a, b]$ **上的增函数(减函数),如果对** $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$, **有** $f(x_2) > f(x_1)$ $(f(x_2) < f(x_1))$.

6.2　增减性判别法

设函数 f **在区间** X **上有有限或无限导数,函数增(减)的充要条件是:**

1) $f'(x) \ge 0$ $(f'(x) \le 0)$; 2) **在** X **的任何子区间** $[\alpha, \beta]$ **上** $f'(x)$ **均不恒为零** $([\alpha, \beta] \subset X)$.

定出下列函数的增减区间:

98　$f: x \mapsto \frac{x^2}{2^x}$.

由于 $f'(x) = x2^{-x}(2 - x\ln 2)$, **当** $x \in \left(0, \frac{2}{\ln 2}\right)$ **时** f **增. 当** $x \in (-\infty, 0)$, $\left(\frac{2}{\ln 2}, +\infty\right)$ **时,** f **减.**

99　$f: x \mapsto x\left(\frac{3}{2} + \sin(\ln x)\right)$, **当** $x > 0$ **且** $f(0) = 0$.

对 f 求导，有

$$f'(x) = \left(\frac{3}{2} + 2\sin\left(\ln x + \frac{\pi}{4}\right)\right), \quad x > 0,$$

因此当 $\sin\left(\ln x + \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{3}{2}$时，$f'(x) > 0$. 求解此不等式可以得到 f 增的区间:

$$\left(e^{-\frac{7}{12}\pi+2k\pi},\ e^{\frac{13}{12}\pi+2k\pi}\right),$$

而在区间 $\left(e^{\frac{13}{12}\pi+2k\pi},\ e^{\frac{17}{12}\pi+2k\pi}\right)$ 上函数 f 减，因为 $f'(x) < 0$，$k\in\mathbb{Z}$.

100 证明函数 $f: x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ 在区间$(-\infty, -1)$及$(0, +\infty)$上增 .

只要证明在所给区间上函数 f 的导数为正 . 当 $x > 0$ 时

$$f'(x) = f(x)\left(\ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1}\right).$$

在区间$[x, x+1]$上考虑函数 $x \mapsto \ln x$ 的有限增量公式，有

$$\ln(x+1) - \ln x = \frac{1}{\xi},\ \text{其中}\ x < \xi < x+1,$$

由此得当 $x > 0$ 时，$f'(x) = f(x)\left(\frac{1}{\xi} - \frac{1}{x+1}\right) > 0$.

下面设 $-\infty < x < -1$. 此时

$$f'(x) = f(x)\left(\ln(t-1) - \ln t - \frac{1}{1-t}\right),$$

其中 $t = -x$，$1 < t < +\infty$. 由拉格朗日公式

$$\ln(t-1) - \ln t = -\frac{1}{\xi_1},$$

其中 $t-1 < \xi_1 < t$，因此当 $1 < t < +\infty$时，$f'(x) = f(-t)\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{\xi_1}\right) > 0$，即当 $-\infty < x < -1$ 时，$f'(x) > 0$.

101 单调函数的导数是否一定单调 ?

不一定 . 例如，函数 $f: x \mapsto 2x + \sin x$ 在实轴上是单调增的，因为它的导数 $f': x \mapsto 2 + \cos x$，$\forall x\in\mathbb{R}$ 为正 . 但显然 f'在$(-\infty, +\infty)$上不单调 .

102 证明: 设 φ为单调增的可微函数，且当 $x \geq x_0$ 时，$|f'(x)| \leq |\varphi'(x)|$. 则当 $x \geq x_0$ 时，成立

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \varphi(x) - \varphi(x_0).$$

并给出几何解释 .

由于函数 f，φ满足柯西中值定理的条件，因而成立

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)}\right| = \left|\frac{f'(c)}{\varphi'(c)}\right| \leq 1, \quad x_0 < c < x,$$

因此$|f(x)-f(x_0)|\leq|\varphi(x)-\varphi(x_0)|=\varphi(x)-\varphi(x_0)$.

几何解释:单调增可微函数的增量不小于另外一个导数绝对值不超过它的函数的增量.

103 假设函数 f 在区间 $a\leq x<+\infty$ 上连续,且当 $x>a$ 时,$f'(x)>k>0$,这里 k 为常数.如果又设 $f(a)<0$,证明方程 $f(x)=0$ 在区间 $a,\ a-\dfrac{f(a)}{k}$ 上有且仅有一个实根.

在区间 $a,\ a+\dfrac{|f(a)|}{k}$ 上使用拉格朗日定理,有

$$f\ a+\frac{|f(a)|}{k}\ -f(a)=\frac{|f(a)|}{k}f'\ a+\theta\frac{|f(a)|}{k}\ ,\quad 0<\theta<1.$$

由已知条件 $f'(x)>k>0$,有

$$f\ a+\frac{|f(a)|}{k}\ -f(a)>|f(a)|,$$

由此

$$f\ a+\frac{|f(a)|}{k}\ >0.$$

函数 f 在闭区间 $a,\ a+\dfrac{|f(a)|}{k}$ 的端点上取值异号,故由介值定理,存在 $\xi\in$ $a,\ a+\dfrac{|f(a)|}{k}$,使 $f(\xi)=0$.还要证明,这点 ξ 在区间内唯一.设还有 ξ_1,使 $f(\xi_1)=0$,则在(ξ,ξ_1)(如果 $\xi_1>\xi$)或者(ξ_1,ξ)(如果 $\xi_1<\xi$)上使用罗尔定理,可知存在 ξ_2,使 $f'(\xi_2)=0$,这与条件 $f'(x)>k>0$, $x>a$,矛盾.

104 假设:1) 函数 φ,ψ n 阶可微;2) $\varphi^{(k)}(x_0)=\psi^{(k)}(x_0)$, $k=0,\cdots,n-1$;3) 当 $x>x_0$ 时,$\varphi^{(n)}(x)>\psi^{(n)}(x)$.证明当 $x>x_0$ 时,成立不等式 $\varphi(x)>\psi(x)$.

对函数 $u^{(n-1)}=\varphi^{(n-1)}-\psi^{(n-1)}$ 在区间$[x_0,x]$上用拉格朗日中值定理,有

$$u^{(n-1)}(x)-u^{(n-1)}(x_0)=u^{(n)}(\xi)(x-x_0),$$

由条件 2)—3),可知当 $x>x_0$ 时,$u^{(n-1)}(x)>0$.同理可证 $u^{(n-2)}(x)>0$ 等等,及 $u(x)>0$,因而当 $x>x_0$ 时,$\varphi(x)>\psi(x)$.

105 证明下列不等式:

1) $e^x>1+x$, $x\neq0$;

2) $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$, $x>0$;

3) $x-\dfrac{x^3}{6}<\sin x<x$, $x>0$;

4) $\tan x>x+\dfrac{x^3}{3}$, $0<x<\dfrac{\pi}{2}$;

5) $(x^\alpha+y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(x^\beta+y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$, $x>0$, $y>0$ 且 $0<\alpha<\beta$.

1) 记 $\varphi(x)=e^x$, $\psi(x)=1+x$,注意到 $\varphi(0)=\psi(0)$,当 $x>0$ 时,$\varphi'(x)>\psi'(x)$.

由上一例题即知当 $x>0$ 时，$\varphi(x)>\psi(x)$.

又当 $x\leq 0$ 时，令 $x=-t$，有

$$\varphi(t)=\mathrm{e}^{-t},\quad \psi(t)=1-t,\quad t\geq 0.$$

由于 $\varphi(0)=\psi(0)$，当 $t>0$ 时，$\varphi'(t)>\psi'(t)$，故当 $t>0$ 时，$\varphi(t)>\psi(t)$，即当 $x<0$ 时，$\mathrm{e}^{x}>1+x$.

2) 记

$$\varphi(x)=x-\frac{x^2}{2},\quad \psi(x)=\ln(1+x),\quad \eta(x)=x,\quad x\geq 0.$$

显然 $\varphi(0)=\psi(0)=\eta(0)$，当 $x>0$ 时，$\varphi'(x)<\psi'(x)<\eta'(x)$，故由上一例题

$$\varphi(x)<\psi(x)<\eta(x)，当\ x>0.$$

3) 记

$$\varphi(x)=x-\frac{x^3}{6},\quad \psi(x)=\sin x,\quad \eta(x)=x,$$

显然 $\varphi(0)=\psi(0)=\eta(0)$，当 $x>0$ 且 $x\neq 2k\pi$ 时，$\varphi'(x)<\psi'(x)<\eta'(x)$，故由上一例题，有

$$\varphi(x)<\psi(x)<\eta(x),\quad x>0,\quad x\neq 2k\pi,\quad k\in\mathbf{N}.$$

而当 $x=2k\pi$ 时，有不等式

$$2k\pi\left(1-\frac{4k^2\pi^2}{6}\right)<0<2k\pi,$$

即 $\varphi(2k\pi)<\psi(2k\pi)<\eta(2k\pi)$，$k\in\mathbf{N}$. 因此，对 $x>0$ 成立不等式

$$\varphi(x)<\psi(x)<\eta(x).$$

4) 记

$$\varphi(x)=\tan x,\quad \psi(x)=x+\frac{x^3}{3},\quad 0\leq x<\frac{\pi}{2}.$$

显然 $\varphi(0)=\psi(0)$，当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\varphi'(x)>\psi'(x)$ (因 $\varphi'(x)=1+\tan^2 x$，$\psi'(x)=1+x^2$，当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\tan^2 x>x^2$). 利用上一例题的结论，可以证得当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，$\varphi(x)>\psi(x)$.

5) 对任意固定的 $x>0$，$y>0$ 及所有 α，$0<\alpha<\beta$，不等式 $(x^\alpha+y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}>(x^\beta+y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$ 与下列不等式等价

$$\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{\alpha}+1\right)^{\frac{1}{\alpha}}>\left(\left(\frac{x}{y}\right)^{\beta}+1\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

为了证明后一不等式，记 $\dfrac{x}{y}=t$，考察函数

$$\varphi: z\mapsto (t^z+1)^{\frac{1}{z}},\quad 0<z<+\infty.$$

其导数为

$$\varphi'(z) = \varphi(z)\left(\frac{t^z\ln t}{z(1+t^z)} - \frac{\ln(1+t^z)}{z^2}\right) = \frac{\varphi(z)}{z^2(1+t^z)}\ln\frac{(t^z)^{t^z}}{(1+t^z)^{1+t^z}},$$

对 $0<z<+\infty$，导数为负，故函数 φ 递减，即当 $0<\alpha<\beta<+\infty$ 时，$\varphi(\alpha)>\varphi(\beta)$，故有

$$(x^\alpha+y^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} > (x^\beta+y^\beta)^{\frac{1}{\beta}}$$

对 $x>0$，$y>0$，$0<\alpha<\beta$ 成立．

106　证明：对 $x>0$ 成立不等式

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

如果不等式成立，两边取对数，可有

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x},$$

我们来证明后者．记 $\frac{1}{x}=t$，$t>0$，得不等式

$$\frac{t}{1+t} < \ln(1+t) < t.$$

此不等式右端的不等号可见例 105；下面证明左端的不等式．记 $\varphi(t)=\frac{t}{t+1}$，$\psi(t)=\ln(1+t)$，考察 $t\geq 0$ 时的 φ,ψ，显然 $\varphi(0)=\psi(0)$，当 $t>0$ 时 $\varphi'(t)=\frac{1}{(1+t)^2}<\psi'(t)=\frac{1}{1+t}$．因此，由例 104 可以证得当 $t>0$ 时，$\varphi(t)<\psi(t)$，亦即当 $x>0$ 时，$\frac{1}{x+1}<\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$，得证．

107　证明不等式：

1) $x^\alpha-1>\alpha(x-1)$，$\alpha\geq 2$，$x>1$；

2) $\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{x-a}$，$n>1$，$x>a>0$；

3) $1+2\ln x\leq x^2$，$x>0$．

1) 记 $\varphi(x)=x^\alpha-1$，$\psi(x)=\alpha(x-1)$，有 $\varphi(1)=\psi(1)=0$，且当 $\alpha\geq 2$，$x>1$ 时，$\varphi'(x)>\psi'(x)$，根据例 104，有当 $\alpha\geq 2$，$x>1$ 时

$$\varphi(x)>\psi(x).$$

2) 类似 1)中的证法，对 $n>1$，$x>a>0$：

$$\varphi(x)=\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{a},\quad \psi(x)=\sqrt[n]{x-a},\quad \varphi(a)=\psi(a)=0,$$

$$\varphi'(x)<\psi'(x)\text{，故有 }\varphi(x)<\psi(x).$$

3) 记 $\varphi(x)=1+2\ln x$，$\psi(x)=x^2$．注意到当 $x=1$ 时 φ 与 ψ 相交，而当 $x>1$ 时有不等式 $\varphi'(x)<\psi'(x)$，故由例 104 可知，当 $x>1$ 时 $\varphi(x)<\psi(x)$．

今设 $0<x<1$，令 $t=\frac{1}{x}$，$1<t<+\infty$，则

$$\varphi(x)=1-2\ln t\equiv\varphi(t),\ \psi(x)=\frac{1}{t^2}\equiv\psi(t),\ \varphi(1)=\psi(1)=1,\ \varphi'(t)<\psi'(t),$$

因此当 $1<t<+\infty$ 时，$\varphi(t)<\psi(t)$，即当 $0<x<1$ 时，$\varphi(x)<\psi(x)$．再考虑到等式 $\varphi(1)=\psi(1)$，因此有 $\varphi(x)\leq\psi(x)$，$\forall x>0$ 成立．

练 习 题

求下列函数的增减区间：

212 $f: x\mapsto\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}$．

213 $f: x\mapsto|x|^{\alpha}e^{-x^2}$，$\alpha>0$．

214 $f: x\mapsto x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$．

215 $f: x\mapsto\operatorname{arth}\frac{\sin x}{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$．

216 $f: X\to Y$，$x=t\ln t$，$y=\frac{\ln t}{t}$．

217 $f: X\to Y$，$x=t^3+1$，$y=\exp(2\pi t-\sin t^2+\cos t^2)$，$0\leq t\leq\frac{\pi}{2}$．

218 $f: X\to Y$，$x=a(t-\sin t)$，$y=a(1-\cos t)$，$0\leq t\leq 2\pi$．

219 $f: X\to Y$，$x=a\sin^3 t$，$y=b\cos^3 t$，$0\leq t\leq 2\pi$．

220 $f: \varphi\mapsto\frac{\varphi}{\varphi^2+1}$．

221 $f: \varphi\mapsto\varphi e^{-\varphi^2}$．

222 $f: \varphi\mapsto\sin\varphi$．

223 $f: X\to Y$，$x=\rho\cos\varphi$，$y=\rho\sin\varphi$，$\rho=\frac{\varphi}{1+\varphi}$，$\varphi\geq 0$．

224 $f: X\to Y$，$x=\rho\cos(4\rho-\rho^3)$，$y=\rho\sin(4\rho-\rho^3)$．

225 $f: X\to Y$，$x^3+y^3-3xy=0$（$y>0$，f 为可微函数）．

226 $f: X\to Y$，$x^2y^2-x^3+y^3=0$．

227 $f: X\to Y$，$x+y=xe^{xy}$．

228 $f: X\to Y$，$x+y-\cos(x+2y)=0$．

研究下列函数的单调性：

229 $f: x\mapsto(2+x)\ln(1+x)-2x$．

230 $f: x\mapsto\frac{e^x}{x^x[x]!}$，$x\geq 1$．

231 $f: X\to Y$，$x=\sin t-t+\frac{t^3}{6}$，$y=4t^5-5t^4+1$．

232 $\rho=\varphi\tan\varphi$，$\varphi>0$（ρ,φ 为极坐标）．

233 在区间 $[1,2]$ 上下列函数是否增函数．1）$f: x\mapsto[x]$；2）$f: x\mapsto(x-1)[x]$；3）$f: x\mapsto x$，若 $x\in\mathbb{Q}$．

234 假设有两个正函数，其中一个单调增长，另一个非减，则其和与积仍是单调增函数．

证明下列不等式：

235 $\frac{2\ln(1+x)}{x}-\frac{3x+2}{(1+x)^2}>0$，$x>0$．

236 $\frac{2}{x(x+1)}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{x+3}{x(x+1)^2}>0$，$x>0$．

237 $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots-\frac{x^{4n-1}}{(4n-1)!}<\sin x<x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+\frac{x^{4n-3}}{(4n-3)!}$, $x>0$, $n\in\mathrm{N}$.

238 $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots-\frac{x^{4n-2}}{(4n-2)!}\leq\cos x\leq 1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{4n}}{(4n)!}$, $n\in\mathrm{N}$.

239 $\mathrm{e}^x>1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$, $x>0$, $n\in\mathrm{N}$.

240 $\sin x\leq\frac{4x}{\pi^2}(\pi-x)$, $0\leq x\leq\pi$.

241 $\cos x\leq 1-\frac{4x^2}{\pi^2}$, $|x|\leq\frac{\pi}{2}$.

242 1) $\tan x\geq\frac{x}{\frac{\pi}{2}-x}$, $0\leq x\leq\frac{\pi}{4}$; 2) $\tan x\leq\frac{x}{\frac{\pi}{2}-x}$, $\frac{\pi}{4}\leq x<\frac{\pi}{2}$.

243 $\frac{x^\alpha-1}{x-1}\leq\alpha+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}(x-1)x^{\alpha-2}$, $x>1$, $\alpha\geq 2$.

244 $\sin x+\tan x>2x$, $0<x<\frac{\pi}{2}$.

245 $x^{\frac{1}{x}}<1+\frac{3}{2\sqrt{x}}$, $1<x<\mathrm{e}$.

246 $\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}>0$, $|x|<\pi$.

247 假设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$, $\boldsymbol{c}$ 为 E^n 中的向量 . 证明

$$\det\begin{pmatrix}A & F & E\\ F & B & G\\ E & G & C\end{pmatrix}\geq 0,$$

其中 $A=\boldsymbol{a}^2=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})$, $B=\boldsymbol{b}^2$, $C=\boldsymbol{c}^2$, $E=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})$, $F=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$, $G=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$.

248 假设 f 在 $[a,b]$ 上可微, $f(a)=0$, 且 $\exists A\in\mathrm{R}$, 使 $|f'(x)|\leq A|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上成立 . 证明, $f(x)=0$, $\forall x\in[a,b]$.

249 假设 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathrm{R}^n$. 称 $\boldsymbol{x}>\boldsymbol{y}$ (或 $\boldsymbol{x}<\boldsymbol{y}$), 如果 $x_k>y_k$ ($x_k<y_k$), $\forall k=1,\cdots,n$, (这种比较称为向量的偏序关系) . 据此可以定义向量值函数 $\boldsymbol{x}$, $t\mapsto(x_1(t),\cdots,x_n(t))$, $t\in[a,b]$, 在区间 $T\subset[a,b]$ 上单调增(减), 如果 $\forall t_1,t_2\in T$, $(t_1>t_2)\Rightarrow(\boldsymbol{x}(t_1)>\boldsymbol{x}(t_2))$ $(\boldsymbol{x}(t_1)<\boldsymbol{x}(t_2))$.

证明: 向量值函数 $\boldsymbol{x}$: $t\mapsto(\sin t,\cos t,t\mathrm{e}^{-t^2})$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调增 .

求下列向量值函数的增减区间:

250 $\boldsymbol{f}$: $t\mapsto\left(2|\cos t|+|\cos 2t|+4t,\ \frac{3}{4}t+\frac{1}{16}\sin 4t+1\right)$.

251 $\boldsymbol{f}$: $t\mapsto\left(\frac{t^2}{t-1},\ \frac{t}{t^2-1},\ 2-t+\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\right)$.

252 $\boldsymbol{f}$: $t\mapsto\left(\frac{|1+t|^{\frac{3}{2}}}{2\sqrt{t}},\ \frac{2t}{(t^2+1)^3},\ 4(\sqrt[3]{t^2}-\sqrt[3]{t^2}+1)\right)$.

253 函数矩阵 $\boldsymbol{A}$: $t\mapsto(a_{ij}(t))$ $(i,j=1,\cdots,n)$ 称为在区间 (a,b) 上单调增, 如果 $\forall t_1,t_2\in(a,b)$, 由 $(t_1>t_2)\Rightarrow(A(t_1)>A(t_2))$ $(A(t_1)<A(t_2))$.

对于矩阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 称 $A>B$ $(A<B)$, 如果 $a_{ij}>b_{ij}$ $(a_{ij}<b_{ij})$, $i,j=1,\cdots,n$.

求下列函数矩阵的单调区间:

1) $\boldsymbol{A}: t \mapsto \begin{pmatrix} \sin^2 t & t^2 \\ |t| & t^3+3t^2+15t \end{pmatrix}$;　　2) $\boldsymbol{A}: t \mapsto \begin{pmatrix} e^{-t^2} & \frac{\sin t}{t} & t\ln t \\ \operatorname{sh}^2 t & \operatorname{ch}^2 t & [t]+t \end{pmatrix}$;

3) $\boldsymbol{A}: t \mapsto \begin{pmatrix} \sin t+|\sin t| & \cos t+|\cos t| \\ t+\arcsin t^2 & t\sin t \end{pmatrix}$.

7　函数图形的凸性方向　拐点

7.1　函数图形的凸性

定义　区间(a, b)上定义的可微函数 $f: (a, b) \to \mathbb{R}$ 称为下凸的(凸性向下的),如果函数图形在所给区间上不位于任一条切线下方.上凸则相反.

定理　函数下凸(上凸)的充分条件是:函数 f 在(a, b)上处处有有限二阶导数,且有不等式 $f''(x) \geqslant 0$ $(f''(x) \leqslant 0)$, $a < x < b$.

7.2　拐点

定义　设 $M_0(x_0, y_0)$为函数 f 图形上的一点,有切线.如果存在 x_0 的领域,函数 f 在 x_0 的两侧凸性相反,称 M_0 为拐点.

定理　设 $M_0(x_0, f(x_0))$,或者满足 $f''(x_0)=0$,或者 $f''(x_0)$不存在,如果 $f''(x)$在 x_0 的两侧变号,则 M_0 是拐点.

确定下列函数的凸性区间及拐点:

108　$f: x \mapsto 3x^2 - x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

二阶导数 $f''(x) = 6(1-x)$,当 $x<1$ 时为正,当 $x>1$ 时为负.因此,根据定义,函数 f 在$(-\infty, 1)$下凸,在$(1, +\infty)$上凸.$M_0(1, 2)$为拐点.

109　$f: x \mapsto x^x$ $(x>0)$.

由于当 $x>0$ 时,二阶导数 $f''(x) = x^x\left((\ln x+1)^2+\frac{1}{x}\right)>0$,因此,函数 f 下凸.

110　如何选择参数 h 使概率曲线

$$y = \frac{h}{\pi} e^{-h^2 x^2}, \quad h>0$$

有拐点 $\left(\pm\sigma, \frac{h}{\pi} e^{-h^2\sigma^2}\right)$?

由于二阶导数 $f''(x) = \frac{2h^3}{\pi}(2h^2x^2-1)e^{-h^2x^2}$,可知拐点在 $x = \pm\frac{1}{2h}$处,因为二

阶导数在两侧变号．因此，要找的 h 满足等式 $\dfrac{1}{2h}=\sigma$ $\quad h=\dfrac{1}{2\sigma}$，$\sigma>0$．

111 假设函数 f 在区间 $a\leq x<+\infty$ 内二阶可微，而且：1) $f(a)=A>0$；2) $f'(a)<0$；3) 当 $x>a$ 时，$f''(x)\leq 0$．证明方程 $f(x)=0$ 在区间 $(a,+\infty)$ 内有且仅有一个实根．

由中值定理

$$f(x)=A+(x-a)f'(\xi_1(x)),\qquad a<\xi_1<x,\tag{1}$$

$$f'(x)=f'(a)+(x-a)f''(\xi_2(x)),\quad a<\xi_2<x.\tag{2}$$

由条件 $f''(\xi)\leq 0$ 可知当 $x>a$ 时，$f'(x)<0$，因此函数 f 在 $(a,+\infty)$ 上递减．结合式(1)，(2)有

$$f(x)=A+(x-a)f'(a)+(x-a)(\xi_1-a)f''(\xi_2(\xi_1)).\tag{3}$$

由于 $f'(a)<0$，$f''(\xi_2(\xi_1))\leq 0$，由式 3)可知，对于足够大的 $x_0>a$，函数值为负．由于函数 f 在区间 $[a,x_0]$ 上连续，由介值定理 $\exists x_1\in(a,x_0)$，使 $f(x_1)=0$．函数 f 在区间 $(a,+\infty)$ 上递减，故函数 f 只有一个零点 x_1．

112 函数 f 称为在区间 (a,b) 下凸(上凸)，如果对区间内任意的点 x_1,x_2 及任意的数 λ_1,λ_2，$\lambda_1>0$，$\lambda_2>0$，$\lambda_1+\lambda_2=1$，成立不等式

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)<\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$$

(成立相反的不等式 $f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)>\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$)．

证明：如果当 $a<x<b$ 时，$f''(x)>0$，则函数 f 在 (a,b) 区间下凸；如果当 $a<x<b$ 时，$f''(x)<0$，则 f 上凸．

设 $f''(x)>0$，$x\in(a,b)$，$\lambda_1>0$，$\lambda_2>0$ 为满足 $\lambda_1+\lambda_2=1$ 的任意数．任取区间 (a,b) 中的点 x_1,x_2，$x_1<x_2$，显然 $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2$ 位于 x_1,x_2 之间．由中值定理

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)-f(x_1)=\lambda_2(x_2-x_1)f'(\xi_1),\tag{1}$$

其中 $x_1<\xi_1<\lambda_1x_1+\lambda_2x_2$，且

$$f(x_2)-f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)=\lambda_1(x_2-x_1)f'(\xi_2),\tag{2}$$

其中 $\lambda_1x_1+\lambda_2x_2<\xi_2<x_2$．将式(2)乘以 λ_2，式(1)乘以 λ_1，然后相减，并利用中值定理，有

$$\lambda_2f(x_2)+\lambda_1f(x_1)=f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)+\lambda_1\lambda_2(x_2-x_1)f''(\xi_3),\tag{3}$$

其中 $\xi_1<\xi_3<\xi_2$．由于 $\lambda_1>0$，$\lambda_2>0$，$f''(\xi_3)>0$，因此

$$\lambda_2f(x_2)+\lambda_1f(x_1)>f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2),$$

即 f 在 (a,b) 区间下凸．

如果 $f''(x)<0$，$x\in(a,b)$，则函数 $\varphi: x\mapsto -f(x)$ 在 (a,b) 区间下凸，应有

$$\lambda_1\varphi(x_1)+\lambda_2\varphi(x_2)>\varphi(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2),$$

由此 $\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)<f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)$．此不等式说明 f 上凸．

113 证明：函数 $\varphi_1: x\mapsto x^n$ $(n>1)$，$\varphi_2: x\mapsto e^x$，$\varphi_3: x\mapsto x\ln x$，$x>0$ 在区间

$(0,+\infty)$下凸，而函数 $\psi_1: x \mapsto x^n\ (0<n<1)$，$\psi_2: x\mapsto \ln x$ 上凸于$(0,+\infty)$.

把所给函数求二阶导数，有

$$\varphi_1''(x)=n(n-1)x^{n-2},\ \varphi_2''(x)=\mathrm{e}^x,\ \varphi_3''(x)=\frac{1}{x},$$

$$\psi_1''(x)=n(n-1)x^{n-2},\ \psi_2''(x)=-\frac{1}{x^2}.$$

当 $x\in(0,+\infty)$时，有 $\varphi_j''(x)>0$，$j=1,2,3$，$\psi_k''(x)<0$，$k=1,2$.因此，由上题的结论，在区间$(0,+\infty)$上函数 φ_j 下凸，而 ψ_k 上凸 .

114　证明：有界凸性函数处处连续且有左、右侧导数 .

不妨假设 f 在(a,b)区间下凸 .由 f 在(a,b)上有界，$\exists\ c>0$，使$|f(x)|\leqslant c$.设 $x_0\in(a,b)$，取自变量增量 $h>0$，使 x_0-h，x_0+h 均在区间(a,b)内 .由于 f 下凸，故有不等式 $f(x_0+h)+f(x_0-h)>2f(x_0)$，改写为

$$f(x_0)-f(x_0-h)<f(x_0+h)-f(x_0).\tag{1}$$

由式(1)得不等式组

$$\begin{aligned}&f(x_0-kh)-f(x_0-(k+1)h)<f(x_0+h)-f(x_0)\\&<f(x_0+(k+1)h)-f(x_0+kh),\quad k=0,\cdots,n-1,\end{aligned}\tag{2}$$

其中假设点 $x_0-(k+1)h$，$x_0+(k+1)h\ (k=1,\cdots,n-1)$都位于区间$(a,b)$内，不等式(2)对 k 求和，从 0 到 $n-1$，得不等式

$$\frac{f(x_0)-f(x_0-nh)}{n}<f(x_0+h)-f(x_0)<\frac{f(x_0+nh)-f(x_0)}{n},\tag{3}$$

由此，考虑到函数的有界性，得

$$|f(x_0+h)-f(x_0)|<\frac{2c}{n}.\tag{4}$$

对任意小的 $\varepsilon>0$，取 $n>\dfrac{2c}{\varepsilon}$，有

$$|f(x_0+h)-f(x_0)|<\varepsilon,\tag{5}$$

只要 h满足条件

$$0<h<\min\left(\frac{b-x_0}{n},\frac{x_0-a}{n}\right).$$

函数 f 在(a,b)内任一点的连续性得证 .下面证明函数单侧导数的存在性 .设 $h>h_1>0$.成立以下不等式

1) $\dfrac{f(x_0+h_1)-f(x_0)}{h_1}<\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$;

2) $\dfrac{f(x_0-h_1)-f(x_0)}{-h_1}>\dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$.

记 $h_1=\theta h$，$0<\theta<1$，由于函数 f 下凸，不等式 1)等价于

$$\theta f(x_0+h)+(1-\theta)f(x_0)>f(x_0-h_1),$$

而不等式 2)等价于

$$\theta f(x_0-h)+(1-\theta)f(x_0)>f(x_0-h_1),$$

根据上面的不等式，函数 $\varphi: h \mapsto \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 当 $h\to+0$ 时递减且有下界 $-\dfrac{2c}{h_1}$，而函数 $\psi: h\mapsto \dfrac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$ 当 $h\to+0$ 时增加且有上界 $\dfrac{2c}{h_1}$. 因此存在极限

$$\lim_{h\to+0}\varphi(h)=f'_+(x_0),\quad \lim_{h\to+0}\psi(h)=f'_-(x_0).$$

115　证明：如果函数 f 在无穷区间 $(x_0,+\infty)$ 内二阶可微，且 $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，则在 $(x_0,+\infty)$ 内至少存在一点 ξ，使 $f''(\xi)=0$.

由于满足例 81 的条件，在 $(x_0,+\infty)$ 内存在 ξ_1，使 $f'(\xi_1)=0$. 由于当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)=o(x)$，故由例题 93，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}|f'(x)|=0$.

因此，再由例 81，在 $(\xi_1,+\infty)$ 内存在 ξ，使得 $f''(\xi)=0$.

练　习　题

确定下列函数的凸区间：

254　$f: x\mapsto (1+x^2)\mathrm{e}^{-x^2}+x$.

255　$f: x\mapsto \arccos\dfrac{1-x}{1-2x}+3x-8$.

256　$f: x\mapsto \dfrac{2x}{\sqrt[3]{x^2-1}}-5x$.

257　$f: x\mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}-1+3x$.

258　$f: X\to Y$，$x=(t+1)^2$，$y=(t-1)^2$.

259　$f: X\to Y$，$x=\operatorname{sh}t-t$，$y=\operatorname{ch}t-1$.

260　$f: X\to Y$，$x=t\ln t$，$y=-6\mathrm{e}t-3t^2$.

261　$f: X\to Y$，$x=(1+t)^{\frac{1}{t}}$，$y=(1+t)^{1+\frac{1}{t}}$.

262　$f: \varphi\mapsto \dfrac{1}{\varphi}$，$0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$.

263　$f: \varphi\mapsto \rho=\varphi-\varphi^2$，$\varphi\geq 0$ $(\rho,\varphi$ 为极坐标$)$.

264　设函数 $f: X\to Y$，由隐函数方程 $x^3-y^3-3x^2y-3y+1=0$ 给出，研究其图形在 $M(-1,0)$ 邻域内的凸性.

265　讨论下列函数在 0 点是否为拐点？

1) $f: x\mapsto \begin{cases} x^3\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$　　2) $f: x\mapsto \begin{cases} x^5\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

266　假设函数 f 在区间 (a,b) 下凸，证明

$$f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)<\frac{1}{n}\left(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)\right),$$

其中 $a<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$，$n\geq 2$.

利用上题的结论，证明不等式：

267　$\dfrac{1\cdot 3\cdot 7\cdots(2^n-1)}{2\cdot 4\cdots 2^n}<\left(2-\dfrac{2}{n}+\dfrac{1}{n2^{n-1}}\right)^n$，$n\in\mathbf{N}$.

268 $\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \le \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$, $x_i > 0$, $i = 1, \cdots, n$.

269 1) $1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha \ge n\left(\frac{n+1}{2}\right)^\alpha$, $\alpha \ge 1$, $n \in \mathbb{N}$;

2) $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \le n^{1-\frac{1}{\alpha}}\left(1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$, $\alpha \ge 1$, $n \in \mathbb{N}$.

270 $\frac{x^n + y^n + z^n}{3} > \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^n$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, $x \ne y$, $x \ne z$, $y \ne z$, $n > 1$.

证明不等式.

271 $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt[3]{k}} > \frac{1}{2}$, $n > n_0 > 1$.

提示:研究函数 $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $x > 0$ **的下凸性.**

272 $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k^3} \ge 0$, $0 \le x \le \pi$.

提示:考察函数 $f: x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}$, $0 < x < \pi$.

273 **证明:有限个下凸函数之和仍下凸.**

274 **设函数** $f: x \mapsto \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in (a, b)$, **其中** $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ **均为** (a, b) **上的下凸函数.证明** f **下凸.**

275 **假设** 1) $p_i \ge 0$, $p_1 + p_2 + \cdots + p_n > 0$; 2) **函数** f **连续,下凸,试证不等式**

$$f\left(\frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \cdots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}\right) \le \frac{p_1 f(x_1) + \cdots + p_n f(x_n)}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$$

(延森(Jensen**)不等式).**

276 **证明:如果函数** $f: (-\infty, +\infty) \to \mathbb{R}$ **连续,下凸,则** $\exists\ \varphi: x \mapsto ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, **使** $\forall x \in (-\infty, +\infty)$, **成立不等式**

$$f(x) > ax + b.$$

277 **函数** f **在点** x **的施瓦茨(**Schwartz**)二阶导数定义为数** λ, **如果** $\exists\ (\varepsilon_n)$ **使得** $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$, $\varepsilon_n > 0$, **且**

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varepsilon_n^2}\left(f(x + \varepsilon_n) - 2f(x) + f(x - \varepsilon_n)\right).$$

证明:如果连续函数 f **的所有施瓦茨二阶导数非负,则函数下凸.**

278 **证明:如果函数** f **下凸且** $a \le f(x) \le b$, $\forall x \in [\alpha, \beta]$, **而** h **为定义在** $[\alpha, \beta]$ **上的单增下凸函数,则复合函数** $g: x \to h(f(x))$ **也下凸.**

279 **证明:如果** $f_1, f_2, \cdots, f_n$ **为** (a, b) **上的下凸函数,则函数** $f: x \mapsto \max_{1 \le i \le n} f_i(x)$ **在** (a, b) **上也下凸.**

280 **如果:** 1) **函数** $f: (-\infty, +\infty) \mapsto \mathbb{R}$ **下凸;** 2) $f(x) > 0$, $\forall x \ne 0$; 3) $\exists\ p > 1$, **使得** $f(\theta x) = \theta^p f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, $\forall \theta \ge 0$, **那么函数** $h: x \mapsto (f(x))^{\frac{1}{p}}$ **在** $(-\infty, +\infty)$ **下凸.**

281 **假设** $\theta_i \ge 0$, $a_i > 0 (i = 1, \cdots, k)$, $\sum_{i=1}^{k} \theta_i = 1$. **证明**

$$\prod_{i=1}^{k} a_i^{\theta_i} \le \sum_{i=1}^{k} a_i\theta_i .$$

由此推出

$$a^{\theta} b^{1-\theta} \le \theta a + (1-\theta) b \quad \forall a, b > 0 \quad (0 \le \theta \le 1) .$$

282 在上题中令

$$a = \frac{x_j^{\frac{1}{\theta}}}{\sum\limits_{j=1}^{n} x_j^{\frac{1}{\theta}}}, \quad b = \frac{y_j^{\frac{1}{1-\theta}}}{\sum\limits_{j=1}^{n} y_j^{\frac{1}{1-\theta}}},$$

得到赫尔德(Hölder)**不等式**

$$\sum_{j=1}^{n} x_j y_j \le \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^{\frac{1}{\theta}}\right)^{\theta} \left(\sum_{j=1}^{n} y_j^{\frac{1}{1-\theta}}\right)^{1-\theta},$$

其中 $x_j \ge 0$, $y_j \ge 0$.

283 常数矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $a_{ij} \in \mathbb{C}$, $i, j = 1, \cdots, n$,**其数域定义为所有下列形式复数的集合**

$$z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \bar{x}_i x_j, \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 = 1,$$

其中 $x_j = \alpha_j + i\beta_j$, $\alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}$ $(i^2 = -1)$.

证明: **对于任意矩阵** $\boldsymbol{A}$, **其在复平面上的数域** G **的边界, 是一条凸封闭曲线, 即连接曲线上任意二点的一段都嵌在** G **内** .

284 矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $i, j = 1, \cdots, n$ **称为厄米特**(Hermite)**阵, 如果** $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}$(**即** $\bar{a}_{ji} = a_{ij}$) . **证明**: **矩阵** $\boldsymbol{A}$ **为厄米特阵当且仅当其数域可表示为实轴上的一段** .

285 假设 $1 \le p \le 2$, a_i, $b_i > 0$ $(i = 1, \cdots, n)$. **则有**

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^{p-1}} \le \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{p-1}} + \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^p}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i^{p-1}} .$$

证明之 .

286 向量 $\boldsymbol{f}$ **的集合** $M \subset E^n$ **称为在** E^n **中凸, 如果** $\forall \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2 \in M \wedge \forall \theta \in [0,1] \exists \boldsymbol{f} \in M$: $\theta \boldsymbol{f}_1 + (1-\theta) \boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{f}$. **称集合** $\{\theta \boldsymbol{f}_1 + (1-\theta) \boldsymbol{f}_2, 0 \le \theta \le 1\}$ **为连接向量** $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ **的一段** . **证明**: **向量集合**

$$M = \{\boldsymbol{f} \mid \boldsymbol{f} = (x, y), \boldsymbol{f} \in E^2, x \ge 0 \wedge y \ge 0, |\boldsymbol{f}| \le 1\}$$

在 E^2 **中凸** .

287 证明集合 $M = \left\{\boldsymbol{f} \mid \boldsymbol{f} = (\sin x, \cos x), \boldsymbol{f} \in E^2, 0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right\}$ **在** E^2 **中不凸** .

288 证明集合

$$M = \{\boldsymbol{f} \mid \boldsymbol{f} = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \boldsymbol{f} \in E^n, |\boldsymbol{f}| \le 1\}$$

(E^n **中的单位球**)**在** E^n **中是凸集** .

289 假设函数 $f: U \subset E^n \to \mathbb{R}$, **其中** U **为凸子集** . **函数** f **称为在** U **上有凸性, 如果** $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in U \wedge \forall \theta \in [0,1]$ **成立不等式**

$$f(\theta x + (1-\theta) y) \le \theta f(x) + (1-\theta) f(y).$$

证明: 函数 $f: x \mapsto |x|$, $x \in E^n$ 在 E^n 上凸.

290　**证明**: 如果 f 在 $U \subset E^n$ 上凸, 则 $\forall x_i \in U (x_i = (x_{1i}, x_{2i}, \cdots, x_{ni}), x_i \in E^n, i = 1, \cdots, n)$ 成立不等式

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \sigma_i f(x_i),$$

其中 $\sigma_i \ge 0$, $i = 1, \cdots, n$, 且 $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i = 1$.

291　**证明**: 如果函数 f 在 U 上凸, $r \in \mathbb{R}$, 则由满足 $f(x) \le r$ 的向量 x 构成的子集合 $S \subset U$ 是凸集.

292　**证明**: 如果向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 的每个分量 $f_i (i = 1, \cdots, n)$ 都是区间 $[a, b]$ 上的凸函数, 则函数 $F: x \mapsto (\boldsymbol{f}(x), \boldsymbol{c})$, 其中 $\boldsymbol{c}$ 为 E^n 中的任一常向量, $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$, $c_i \ge 0$, 在 $[a, b]$ 上凸.

293　**证明**: 如果函数矩阵 $\boldsymbol{A}: x \mapsto (a_{ij}(x))$, $x \in [a, b]$ 的每个元素 $a_{ij}(x)$ 是 $[a, b]$ 上的凸函数, 则对于任意元素非负的常数阵 $\boldsymbol{B}$, 函数 $F: x \mapsto (\boldsymbol{A}(x), \boldsymbol{B})$, $x \in [a, b]$, 也是凸函数. 这里的矩阵标量积 $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = \sum_{i,j} a_{ij}(x) b_{ij}$, b_{ij} 为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的元素.

294　假设函数 $a_i: x \mapsto a_i(x)$, $b_i: x \mapsto b_i(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上非负, 凸, 单调增 $(\forall i = 1, \cdots, n)$. 证明: 向量 $\boldsymbol{a} = (a_1(x), \cdots, a_n(x))$, $\boldsymbol{b} = (b_1(x), \cdots, b_n(x))$ 的标量积函数 $F: x \mapsto (a, b)$ 也在 $[a, b]$ 上凸.

8　不定式的极限

8.1　$\dfrac{0}{0}$ 型不定式的极限, 第一洛必达(L'Hospital)法则

假设函数 f, g 在点 a 的某个邻域内有定义, a 为有限数或符号 ∞, 而当 $x \to a$ 时二者均趋于零, 而其导数 f', g' 在上述邻域内可能除 $x = a$ 点之外均存在, 且在 $x \ne a$ 时不为零, 如果存在有限或无限极限 $\lim_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, 则

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

8.2　$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式的极限, 第二洛必达法则

如果函数 f, g 当 $x \to a$ 时均趋于无穷, 而导数 f', g' 在点 a 的某个去心邻域内存在, 且在上述邻域内 $(f'(x))^2 + (g'(x))^2 \ne 0$, $x \ne a$. 如果存在有限或无限极限

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

① 原文注: 如果 U 为实轴上的线段, 此凸性的定义与下凸的定义是一致的.

则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

求下列极限:

116 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{x+1}(\ln x+1)-x}{1-x}$.

函数 $f: x\mapsto x^{x+1}(\ln x+1)-x$, $g: x\mapsto 1-x$, $x>0$, $x\neq 1$, **满足下列条件:**

1) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}g(x)=0$;

2) **其导数为** $f': x\mapsto x^{x+1}(\ln x+1)\left(1+\dfrac{1}{x}+\ln x\right)+x^{x}-1$, $g': x\mapsto -1$, $x>0$;

3) **存在极限** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=-2$; 4) $(f'(x))^2+(g'(x))^2\neq 0$, $x>0$.

因此, 根据第一洛必达法则, 有

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{x+1}(\ln x+1)-x}{1-x}=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=-2.$$

117 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{x}-x}{\ln x-x+1}$.

函数 $f: x\mapsto x^{x}-x$, $g: x\mapsto \ln x-x+1$, $x>0$, $x\neq 1$, **满足下列条件**

1) $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}g(x)=0$;

2) **导数** $f': x\mapsto x^{x}(\ln x+1)-1$, $g': x\mapsto \dfrac{1}{x}-1$ **在** $x=1$ **的足够小邻域内存在;**

3) $(f'(x))^2+(g'(x))^2\neq 0$, $x\neq 1$, **在所给邻域内成立;**

4) **仿上例, 存在有限极限**

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{x+1}(\ln x+1)-x}{1-x}=-2.$$

因此, 根据第一洛必达法则, 有

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^{x+1}(\ln x+1)-x}{1-x}=-2.$$

118 $w=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\operatorname{th}x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)$.

将函数 $u: x\mapsto \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\operatorname{th}x}-\dfrac{1}{\tan x}\right)$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$ **改写为** $u: x\mapsto \dfrac{\operatorname{ch}x\sin x-\operatorname{sh}x\cos x}{x\operatorname{sh}x\sin x}$. **注意到函数** $f: x\mapsto \operatorname{ch}x\sin x-\operatorname{sh}x\cos x$, $g: x\mapsto x\operatorname{sh}x\sin x$ **满足第一洛必达法则, 且**

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{sh}x\sin x}{\operatorname{sh}x\sin x+x(\operatorname{ch}x\sin x+\operatorname{sh}x\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\dfrac{\operatorname{sh}x}{x}\dfrac{\sin x}{x}}{\dfrac{\operatorname{sh}x}{x}\dfrac{\sin x}{x}+\operatorname{ch}x\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{\operatorname{sh}x}{x}\cos x}=\frac{2}{3},$$

因此,所求极限 $w=\dfrac{2}{3}$.

附注:在计算$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$时可以第二次使用洛必达法则,但在本题中,以及在其他例题中,利用重要极限是合适的.

119 $\boldsymbol{w}=\lim\limits_{x\to+0}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}x^{-100},\ x^{x^x-1}\right)$.

由于向量值函数的极限为

$$\boldsymbol{w}=\lim_{x\to+0}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}x^{-100},\ x^{x^x-1}\right)=\left(\lim_{x\to+0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}x^{-100},\ \lim_{x\to+0}x^{x^x-1}\right),$$

因此要逐个求其分量的极限.对于第一个分量,有

$$\lim_{x\to0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}x^{-100}=\lim_{y\to+\infty}\frac{y^{50}}{\mathrm{e}^y}=50\,!\lim_{y\to+\infty}\mathrm{e}^{-y}=0$$

(这里使用洛必达法则 50 次).

对于第二个分量,首先要利用 $u^v=\mathrm{e}^{v\ln u}$, $u>0$.对其变形,并且改写成可以使用洛必达法则的形式,有

$$\lim_{x\to+0}x^{x^x-1}=\lim_{x\to+0}\mathrm{e}^{x\ln^2x\frac{\mathrm{e}^{x\ln x}-1}{x\ln x}}=\mathrm{e}^{ab}.$$

(这里利用了函数 e^x 的连续性以及乘积极限的定理).计算 $a=\lim\limits_{x\to+0}x\ln^2x=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln^2x}{x-1}$用第二洛必达法则,而计算 $b=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\mathrm{e}^{x\ln x}-1}{x\ln x}$用第一洛必达法则,有

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln^2x}{x^{-1}}=\lim_{x\to+0}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{-x^{-2}}=\lim_{x\to+0}\frac{-2\ln x}{x^{-1}}=\lim_{x\to+0}\frac{-\frac{2}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0,$$

$$\lim_{x\to+0}\frac{\mathrm{e}^{x\ln x}-1}{x\ln x}=\lim_{t\to-0}\frac{\mathrm{e}^t-1}{t}=1.$$

因此 $\boldsymbol{w}=(0,1)$.

120 $\boldsymbol{w}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left(\tan\dfrac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}},\ \left(\dfrac{2}{\pi}\arctan x\right)^x,\ (\operatorname{th}x)^x\right)$.

计算向量值函数的极限就是分别求其分量的极限.由于分量函数均是幂指函数,故要用公式 $u^v=\mathrm{e}^{v\ln u}$, $u>0$,将其变形,并且分别改写成$\dfrac{0}{0}$形式,利用洛必达法则,有

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\tan\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{-1}\cos^{-2}\frac{\pi x}{2x+1}\cdot\frac{\pi}{(2x+1)^2}}$$

$$=\mathrm{e}^{2\pi\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{2\pi x}{2x+1}\right)^{-1}(2x+1)^{-2}}=\mathrm{e}^{2\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2x+1}}{\sin\frac{\pi}{2x+1}}\alpha}=1,$$

$$\alpha=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x+1}=0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)^{x}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{2}{\pi}\arctan x\right)}=e^{z},$$

其中
$$z=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+x^{2}}\cdot\frac{1}{\arctan x}}{-\frac{1}{x^{2}}}=-\frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\operatorname{th}x)^{x}=\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln(\operatorname{th}x)}=e^{z},$$

其中

$$z=\lim_{x\to+\infty}x\ln(\operatorname{th}x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\operatorname{th}x}\cdot\frac{1}{\operatorname{ch}^{2}x}}{-\frac{1}{x^{2}}}$$

$$=-2\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{2}}{\operatorname{sh}2x}=-2\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\operatorname{ch}2x}=0.$$

因此, $\boldsymbol{w}=\left(1,\ e^{-\frac{2}{\pi}},\ 1\right)$.

121　求函数矩阵当 $x\to0$ 的极限

$$\boldsymbol{A}:\ x\mapsto\begin{pmatrix}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^{2}}} & \left(\frac{\arctan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^{2}}}\\ \left(\frac{\operatorname{arsh}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^{2}}} & \left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\right)^{\frac{1}{x}}\end{pmatrix},\quad x\in(-1,1)\setminus\{0\},$$

由于$\lim\limits_{x\to a}\boldsymbol{A}(x)=\left(\lim\limits_{x\to a}a_{ij}(x)\right)$, **其中** $a_{ij}(x)$**为函数矩阵** $\boldsymbol{A}(x)$**的元素, 因此只要对元素求出极限即可. 对第一个元素有**

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^{2}}}=e^{z},\ \text{其中}\ z=\lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{\sin x}{x}}{x^{2}}.$$

由洛必达法则, 有

$$z=\lim_{x\to0}\frac{x}{2x\sin x}\cdot\frac{x\cos x-\sin x}{x^{2}}=\lim_{x\to0}\frac{x\cos x-\sin x}{2x^{3}}=\lim_{x\to0}\frac{-x\sin x}{6x^{2}}=-\frac{1}{6}.$$

同理, 对其他元素有

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\arctan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^{2}}}=e^{z},$$

$$z=\lim_{x\to0}\frac{\ln\frac{\arctan x}{x}}{x^{2}}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\arctan x}\cdot\frac{\frac{x}{1+x^{2}}-\arctan x}{2x^{3}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x-(1+x^{2})\arctan x}{2x^{3}}=\lim_{x\to0}\frac{-2x\arctan x}{6x^{2}}=-\frac{1}{3};$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{\operatorname{arsh}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^{2}}}=e^{z},$$

$$z=\lim_{x\to0}\frac{\ln\dfrac{\operatorname{arsh}x}{x}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\operatorname{arsh}x}\cdot\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}x-\operatorname{arsh}x}{2x^3}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{x-u(x)}{x^3}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\frac{-\dfrac{x\operatorname{arsh}x}{\sqrt{1+x^2}}}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$

(这里用了记号 $u(x)=\sqrt{1+x^2}\operatorname{arsh}x$);

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^z,$$

$$z=\lim_{x\to0}\frac{\ln\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{-\dfrac{1}{(1+x)^2}}{2}=-\frac{1}{2}.$$

最后，有

$$\lim_{x\to0}\boldsymbol{A}(x)=\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}} & \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}}\\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}} & \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\end{pmatrix}.$$

122 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}\right)$.

将$\infty-\infty$**转化为**$\dfrac{0}{0}$**型，有**

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}^x-1}=\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x(\mathrm{e}^x-1)},$$

两次使用洛必达法则，有

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1-x}{x(\mathrm{e}^x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x-1+x\mathrm{e}^x}=\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x(2+x)}=\frac{1}{2}.$$

123 $w=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{2}\right)^{\coth x}$.

将 1^∞ **型改写为** $\mathrm{e}^{\frac{0}{0}}$ **型，有**

$$\left(\frac{1+\mathrm{e}^x}{2}\right)^{\coth x}=\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1+\mathrm{e}^x}{2}\right)(\operatorname{th}x)^{-1}}$$

利用洛必达法则，有

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{2}}{\operatorname{th}x}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{2}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{e}^x\dfrac{1}{2}}{\operatorname{ch}^{-2}x}=\frac{1}{2}.$$

因此，$w=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

124 研究函数在 $x=0$ **点的可微性，设**

$$f: x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}, & x \neq 0; \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

研究函数在 $x = 0$ 点的可微性，即研究是否存在有限极限

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1} - \dfrac{1}{2}}{x}. \qquad (1)$$

要求极限(1)需要用洛必达法则，为此要证明，其分子当 $x \to 0$ 时极限为零．利用洛必达法则，有

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{2} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{2e^x - 2 - x - xe^x}{2x(e^x - 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - xe^x}{2(e^x(1 + x) - 1)}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{-xe^x}{2e^x + xe^x} = 0.$$

因此，极限(1)是$\dfrac{0}{0}$型不定式．三次使用洛必达法则，有

$$\lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1} - \dfrac{1}{2}}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2e^x - 2 - x - xe^x}{2x^2(e^x - 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{2e^x - 1 - e^x - xe^x}{4x(e^x - 1) + 2x^2 e^x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-xe^x}{4(e^x - 1) + e^x(8x + 2x^2)} = \lim_{x \to 0} \frac{-e^x(x + 1)}{(12 + 12x + 2x^2)e^x}$$

$$= -\frac{1}{12}; \quad f'(0) = -\frac{1}{12}.$$

125　求函数的渐近线，设

$$y = \frac{x^{1+x}}{(1 + x)^x}, \quad x > 0.$$

设渐近线方程为 $y = kx + b$，计算 k, b 如下：

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^x}{(1 + x)^x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{e},$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^{1+x}}{(1 + x)^x} - \frac{x}{e} \right) = \lim_{x \to +\infty} x \left(\frac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x} - \frac{1}{e} \right) = \frac{1}{e^2} \lim_{x \to +\infty} x \left(e - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right)$$

$$= \frac{1}{e^2} \lim_{t \to +0} \frac{e - (1 + t)^{\frac{1}{t}}}{t} = \frac{1}{e^2} \lim_{t \to +0} (1 + t)^{\frac{1}{t}} \left(\frac{1}{t(t + 1)} - \frac{1}{t^2} \ln(1 + t) \right)$$

$$= -\frac{1}{e^2} \lim_{t \to +0} \frac{t - (1 + t)\ln(1 + t)}{t^2(1 + t)} = -\frac{1}{e^2} \lim_{t \to +0} \frac{-\ln(1 + t)}{2t + 3t^2} = \frac{1}{2e}.$$

因此，渐近线方程为 $y = \dfrac{x}{e} + \dfrac{1}{2e}$．

126 可否对以下极限使用洛必达法则

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}\ ?$$

函数 $f:\ x\mapsto x^2\sin\dfrac{1}{x}$, $g:\ x\mapsto\sin x$, $x\in\mathbf{R}\setminus\{0\}$, 在 $x=0$ 点附近(除去 $x=0$ 点)有定义且连续;其导数 $f':\ x\mapsto 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$, $g':\ x\mapsto\cos x$ 在 $x\neq0$ 时存在;而且 $(f'(x))^2+(g'(x))^2=\cos^2x+\cos^2\dfrac{1}{x}-2x\sin\dfrac{2}{x}+4x^2\sin^2\dfrac{1}{x}\neq0$, $x\neq0$, 且

$$\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to0}\frac{2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}}{\cos x}. \tag{1}$$

由于 $\lim\limits_{x\to0}\left(2x\sin\dfrac{1}{x}\right)(\cos x)^{-1}=0$, 而 $\lim\limits_{x\to0}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)(\cos x)^{-1}$ 不存在, 因此极限(1)不存在. 从而, 所给极限不能用洛必达法则.

注意到, 此极限是存在的:

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=0.$$

127 计算

$$z=\lim_{x\to0}\frac{\det\begin{pmatrix}x & \sin x\\ e^x-1 & 1+x^2\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}x\cos x & \tan x\\ \operatorname{sh}x & e^x\end{pmatrix}}.$$

所给行列式作为 x 的函数在点 $x=0$ 的某邻域内满足洛必达法则的所有条件. 由该法则, 有

$$z=\lim_{x\to0}\frac{\det\begin{pmatrix}1 & \cos x\\ e^x-1 & 1+x^2\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}x & \sin x\\ e^x & 2x\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}\cos x-x\sin x & \cos^{-2}x\\ \operatorname{sh}x & e^x\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}x\cos x & \tan x\\ \operatorname{ch}x & e^x\end{pmatrix}}$$

$$=\frac{\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}}=1.$$

练 习 题

计算下列极限:

295 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sin x-\tan x)^3}{\sin(\sin x)-\tan(\tan x)}$.

296 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-x^6}-1+x^6}{\arctan(x^{12})}$.

297 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin(1-x^8)-\frac{\pi}{2}-\sqrt{2}x^4}{\operatorname{arsh}x^4-e^{x^4}+1}$.

298 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{sh}(e^{x^2}-\cos x)-x^2}{\ln(1+x^2)}$.

299 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\operatorname{sh}(\tan x)-\arctan x}{\sin^3x+x^3}$.

300 $\lim\limits_{x\to1}\sqrt[n]{\frac{x^2+x+2}{x^2+8x-3}}\left(\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{2}{x^2}-\frac{\pi^2}{4\cot^2\frac{\pi x}{2}}\right)$.

301 $\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)^2+4}{\sin\frac{\pi x}{4}}\left(\frac{a}{\sin(x-2)}-\frac{b}{x-2}+\frac{c}{(x-2)^2}\right)$.

302 $\lim\limits_{x\to3}\frac{\operatorname{sh}(3x)}{\sqrt[3]{x-3}+1}\left(1+\frac{ax}{3^x-27}+\frac{b}{3-x}\right)$.

303 $\lim\limits_{x\to4}\left(\frac{a}{\operatorname{sh}(x-4)}+\frac{b}{x-4}+\frac{c}{(x-4)^3}\right)$.

304 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[4]{x^4+x^3+2x+1}-\sqrt{4x^2+x+1}+\sqrt[5]{x^5+ax^4+1}\right)$.

305 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^{2\ln x}-x}{(\ln x)^x+x}$.

306 $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}}{(\cot x)^{\cot x}}$.

307 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^{x^{\ln x}}}{x^{\ln^x x}}$.

308 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin\left(x^2\arctan\frac{\ln(\ln(\ln x))}{x^2\ln x}\right)$.

309 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\tan(\sin x)}{\sin(\tan x)}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

310 $\lim\limits_{x\to+0}\left(\frac{\ln(1+x)}{3\left((1+x)^{\frac{1}{3}}-1\right)}\right)^{\frac{x}{\sin x^2}}$.

311 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}-\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{-\frac{1}{2x^2}}}{x^n}$.

312 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(\frac{\operatorname{sh}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}-\left(\frac{\operatorname{th}x}{x}\right)^{-\frac{1}{2x^2}}}{x^n}$.

313 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^{\frac{1}{x}}-\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}}{x^n}$.

314 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}-\left(\frac{\operatorname{arsh}x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}}{x^n}$.

315 $\lim\limits_{x\to+0}\sin^x(1-x^x)$.

316 $\lim\limits_{x\to+0}\tan^x(1-x^x)$.

317 $\lim\limits_{x\to+0}\frac{(1+x^2)^{\frac{1}{x^2}}-(1-3x^2)^{-\frac{1}{3x^2}}}{x^x-1}$.

318 $\lim\limits_{x\to+0}\frac{e^{-x^2}(\operatorname{sh}x)^x-(\operatorname{arsh}x)^x}{\arcsin(e^x-1)}$.

319 $\lim\limits_{x\to+0}\frac{x^x-(2x)^{x^2}}{(\ln(1+x))^x-1}$.

320 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{\ln\sqrt{1+x}}-\frac{2}{x}\right)^{\frac{\operatorname{ch}x}{2x}}$.

321 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin^{100}x}{x^{99}\sin x}\right)^{\frac{2}{3x^2}}$.

322 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^{100}x}{x^{\varepsilon-x^{-1}}}$, $\varepsilon>0$.

323 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sqrt[18]{1+3x+4x^2}-\sqrt[16]{1+8x}}{x},\ x\ln(e^x-1),\ \frac{\arcsin(e^{x^2}-1)}{x^2}\right)$.

324 $\lim\limits_{x\to1}\frac{\frac{\sin\pi x-\cos\frac{\pi x}{2}}{x^n-1}\left(\frac{1}{(x-1)^2}-\cot(x-1)^2\right)}{\left(\arcsin x-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\ln(x+e^x-1)}{x^2}}$.

325 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\begin{vmatrix}\sin x & \cos x\\ x^2 & \tan x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}e^x-1 & \sin^2 x\\ 1 & \ln(1+x)\end{vmatrix}}$.　　**326** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\begin{vmatrix}\operatorname{sh} x & x\\ x & x\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x & \ln^2(1+x)\\ 1 & \arcsin x\end{vmatrix}}$.

327 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^5}\left(\begin{vmatrix}x & x^2 & \cdots & x^n\\ x^2 & x^3 & \cdots & x^{n+1}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ x^n & x^{n+1} & \cdots & x^{2n-1}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x\sin x & x^2\\ x & \tan x\end{vmatrix}\right)$.

328 假设函数 f, g 在点 a 的某邻域 U 内, 除了点 a 外, 具有直到 $n+1$ 阶导数 . 而且满足以下条件:

1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}f'(x)=\cdots=\lim\limits_{x\to a}f^{(n)}(x)=0$;

2) $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}g'(x)=\cdots=\lim\limits_{x\to a}g^{(n)}(x)=0$;

3) $\exists\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f^{(n+1)}(x)}{g^{(n+1)}(x)}=l$, $l\in\overline{\mathrm{R}}$;

4) **导数** $g^{(n+1)}(x)\neq 0$ **在邻域** U **内成立 . 则有**

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n+1)}(x)}{g^{(n+1)}(x)}.$$

证明之 .

329 假设函数 f, g 在点 a 的某邻域 U 内, 除了点 a 外, 具有直到 $n+1$ 阶导数 . 而且满足以下条件:

1) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}f'(x)=\cdots=\lim\limits_{x\to a}f^{(n)}(x)=+\infty$;

2) $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}g'(x)=\cdots=\lim\limits_{x\to a}g^{(n)}(x)=+\infty$;

3) $\exists\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f^{(n+1)}(x)}{g^{(n+1)}(x)}=l$, $l\in\overline{\mathrm{R}}$;

4) **导数** $g^{(n+1)}(x)\neq 0$ **在邻域** U **内成立 . 则有**

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^{(n+1)}(x)}{g^{(n+1)}(x)}.$$

证明之 .

9 泰勒公式

9.1 区间上的泰勒(Taylor)公式

假设 $f:(a,b)\to\mathrm{R}$, **且在** (a,b) **上** $\exists\ f^{(n+1)}$, **则** $\forall x, x_0\in(a,b)\wedge\forall p>0\ \exists\theta$ **使得下列公式成立:**

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_{n+1}(x),$$

其中

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!p} f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0)),\ 0<\theta<1, \tag{1}$$

(带 Schlemil-Rosh 余项). 在(1)中令 $p=n+1$, 得到拉格朗日余项

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0+\theta_1(x-x_0)),\ 0<\theta_1<1,$$

而当 $p=1$ 时称为柯西余项

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}(1-\theta_2)^n f^{(n+1)}(x_0+\theta_2(x-x_0)),\ 0<\theta_2<1.$$

9.2 局部泰勒公式(或带佩亚诺(Peano)余项的泰勒公式)

如果函数 f 在点 x_0 的某邻域内有定义, 有有限导数 $f^{(n)}(x_0)$, 则成立

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + o((x-x_0)^n),$$

$$x \to x_0.$$

9.3 五个基本展开式

在上述 9.1, 9.2 中令 $x_0=0$, 相应的泰勒公式称为麦克劳林(Maclaurin)公式. 五个常用的局部麦克劳林公式为:

Ⅰ. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),\ x\to 0;$

Ⅱ. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}),\ x\to 0;$

Ⅲ. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),\ x\to 0;$

Ⅳ. $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n +$

$o(x^n),\ x\to 0;$

Ⅴ. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n),\ x\to 0.$

9.4 向量值函数的泰勒公式

假设向量值函数 $\boldsymbol{f}:(a,b)\to E^k$ 在 (a,b) 内具有 $n+1$ 阶导数. 则 $\forall x, x_0\in(a,b) \wedge \forall p_j>0\ \exists \theta_j$, $j=1,\cdots,k$, 成立公式

$$\boldsymbol{f}(x) = \sum_{i=0}^{n}\frac{\boldsymbol{f}^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i + \boldsymbol{R}_{n+1}(x),$$

其中 $\boldsymbol{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_k(x))$,

$$\boldsymbol{R}_{n+1}(x) = (R_{n+1}^1, R_{n+1}^2, \cdots, R_{n+1}^k)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!},$$

$$R_{n+1}^j = \frac{f_j^{(n+1)}(x_0+\theta_k(x-x_0))}{p_j}(1-\theta_j)^{n-p_j+1}, \quad 0<\theta_j<1.$$

对向量值函数也有局部泰勒公式.

写出下列函数的展开式, 直到所需阶数:

128 $f: x \mapsto \dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$展开到 x^4, 并计算 $f^{(4)}(0)$.

将函数改写为

$$f(x) = 1+(2x+2x^2)(1+x^3)^{-1},$$

并利用展开式IV

$$(1+x^3)^{-1} = 1-x^3+o(x^5), \quad x\to 0,$$

因此

$$f(x) = 1+(2x+2x^2)(1-x^3+o(x^5)) = 1+2x+2x^2-2x^4+o(x^4), \quad x\to 0.$$

将所得结果与标准展开式比较, 有

$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = -2, \text{因此 } f^{(4)}(0) = -48.$$

129 e^{2x-x^2}展开到 x^5.

令 $t=2x-x^2$, 利用展开式 I, 有

$$e^t = 1+t+\frac{t^2}{2!}+\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}+\frac{t^5}{5!}+o(t^5)$$

$$= 1+(2x-x^2)+\frac{1}{2!}(2x-x^2)^2+\cdots+\frac{1}{5!}(2x-x^2)^5+o(x^5), \quad x\to 0,$$

(注意到, $o(t^5) = o(2x-x^2)^5 = o(x^5)$, $x\to 0$). 分别求出 x^5 阶以下的各项, 合并之, 有

$$e^{2x-x^2} = 1+2x+x^2-\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{6}x^4-\frac{1}{15}x^5+o(x^5), \quad x\to 0.$$

130 $\sqrt[3]{\sin x^3}$展开到 x^{13}.

令 $x^3=t$, 并利用 $\sin t$的麦克劳林公式:

$$\sin t = t-\frac{1}{6}t^3+\frac{1}{120}t^5+o(t^6),$$

再利用展开式IV, 有

$$\sqrt[3]{\sin t} = t^{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{t^2}{6}+\frac{t^4}{120}+o(t^5)\right)^{\frac{1}{3}} \equiv t^{\frac{1}{3}}(1+\alpha(t))^{\frac{1}{3}}$$

$$= t^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{3}\alpha-\frac{1}{9}\alpha^2+o(\alpha^2)\right)$$

$$= t^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{3}\left(-\frac{t^2}{6}+\frac{t^4}{120}\right)-\frac{1}{9}\left(-\frac{t^2}{6}+\frac{t^4}{120}\right)^2+o(t^5)\right)$$

$$= t^{\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{t^2}{18} - \frac{t^4}{3240} + o(t^5)\right)$$

$$= x\left(1 - \frac{x^6}{18} - \frac{x^{12}}{3240} + o(x^{15})\right) = x - \frac{x^7}{18} - \frac{x^{13}}{3240} + o(x^{16}).$$

131 $\ln\cos x$ **展开到** x^6.

利用展开式Ⅴ及Ⅱ，有

$$\ln\cos x = \ln\sqrt{1 - \sin^2 x} = \frac{1}{2}\ln(1 - \sin^2 x) = \frac{1}{2}\left(-\sin^2 x - \frac{\sin^4 x}{2} - \frac{\sin^6 x}{3} + o(x^7)\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^6)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 + \frac{x^6}{3} + o(x^7)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{x^6}{36} - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{60} + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3} + \frac{x^6}{3} + o(x^7)\right)$$

$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^7),\quad x \to 0.$$

132 $\sin(\sin x)$**展开到** x^3.

利用展开式Ⅱ，有

$$\sin(\sin x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{6} + o(\sin^4 x)$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right) - \frac{1}{6}(x^3 + o(x^4)) + o(\sin^4 x)$$

$$= x - \frac{x^3}{3} + o(x^4).$$

133 $\tan x$ **展开到** x^5.

由于 $\tan x$ **为奇函数，故在** $x = 0$ **邻域内其展开式具有形式**

$$\tan x = Ax + Bx^3 + Cx^5 + o(x^6),\quad x \to 0, \tag{1}$$

其中 A, B, C **为待定系数．改写式**(1)**为**

$$\sin x = (Ax + Bx^3 + Cx^5 + o(x^6))\cos x,$$

利用展开式Ⅱ，Ⅲ，有

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^6) = Ax + \left(B - \frac{A}{2}\right)x^3 + \left(C + \frac{A}{4!} - \frac{B}{2}\right)x^5 + o(x^6),\quad x \to 0.$$

由此，比较相同次方 x **的系数，得到**

$$A = 1,\quad B = \frac{1}{3},\quad C = \frac{2}{15}.$$

即有

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6),\quad x \to 0.$$

134 **将函数** $f: x \mapsto x^x$**展开为** $x - 1$ **的泰勒公式，取前三项．**

应用带佩亚诺余项的泰勒公式, 有

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+o((x-1)^2),\quad x\to 1.$$

然后求得

$$f(1)=1,\quad f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad f'(1)=\frac{1}{2};\quad f''(x)=-\frac{1}{4x^{3/2}},\quad f''(1)=-\frac{1}{4}.$$

代入公式, 即得

$$f(x)=1+\frac{1}{2}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+o((x-1)^2),\quad x\to 1.$$

135　函数 $f: x\mapsto a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$, $a>0$ 在 $x=0$ 点邻域内用二阶抛物线逼近 .

由于

$$\operatorname{ch}\frac{x}{a}=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}\right)=1+\frac{x^2}{2a^2}+o(x^2),\quad x\to 0,$$

故

$$f(x)=a+\frac{x^2}{2a}+o(x^2),\ x\to 0.$$

136　函数 $f: x\mapsto \sqrt{1+x^2}-x$, $x>0$, 展开为$\frac{1}{x}$的泰勒公式直到$\frac{1}{x^3}$.

改写函数 $\sqrt{1+x^2}-x$ 并利用展开式Ⅳ, 有

$$f(x)=x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1\right)=x\left(\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right)$$

$$=x\left(1+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^4}+o\left(\frac{1}{x^5}\right)-1\right)=\frac{1}{2x}-\frac{1}{8x^3}+o\left(\frac{1}{x^4}\right),\quad x\to+\infty.$$

137　将函数 $f: x\mapsto \frac{x+3}{3+x^2}$, $x\in(-\infty,+\infty)$在 $x_0=1$ 附近展开为带拉格朗日余项的泰勒公式, 取前三项 .

未知展开式的形式为

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2+$$
$$\frac{f'''(1+\theta(x-1))}{3!}(x-1)^3,\quad 0<\theta<1.$$

求出函数及导数在 $x=1$ 的值, 有

$$f(1)=1,\quad f'(1)=-\frac{3}{16},\quad f''(1)=-\frac{1}{4}.$$

因此

$$f(x)=1-\frac{3}{16}(x-1)-\frac{1}{8}(x-1)^2+\frac{f'''(1+\theta(x-1))}{3!}(x-1)^3.$$

138 假设

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h),\tag{1}$$

其中 $0<\theta<1$，又设 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$．试证明 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$．

由于 $f^{(n+1)}(x)$ 存在，因此带佩氏余项的麦克劳林级数为

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x)+\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x)+o(h^{n+1}),\quad h\to 0.\tag{2}$$

式(1)减去式(2)，并除以 $\dfrac{h^n}{n!}$，有

$$\frac{f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)}{h}=\frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1}+\frac{o(h)}{h},$$

因此

$$\theta=\left(\frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1}+\frac{o(h)}{h}\right)\left(\frac{f^{(n)}(x+\theta h)-f^{(n)}(x)}{\theta h}\right)^{-1}.$$

在上式中令 $h\to 0$ 取极限，并考虑到 $f^{(n+1)}(x)\neq 0$，有 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$．

139 假设 $f\in C^2[0,1]$ 且 $f(0)=f(1)=0$，又设 $\exists A>0: |f''(x)|\leq A\ \forall x\in(0,1)$．证明：$|f'(x)|\leq\dfrac{A}{2}\ \forall x\in[0,1]$．

由泰勒公式有

$$f(0)=f(x)-xf'(x)+f''(\xi_1)\frac{x^2}{2},\quad 0<\xi_1<x\leq 1;$$

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+f''(\xi_2)\frac{(1-x)^2}{2},\quad 0\leq x<\xi_2<1,$$

因此

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(f''(\xi_1)x^2-f''(\xi_2)\frac{(1-x)^2}{2}\right),\quad 0<x<1.$$

取绝对值对上式估值，有

$$|f'(x)|\leq\frac{A}{2}(2x^2-2x+1),\quad 0\leq x\leq 1.$$

而由于对 $0\leq x\leq 1$，$0\leq 2x^2-2x+1\leq 1$，故 $|f'(x)|\leq\dfrac{A}{2}$，得证．

140 假设函数 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可微，且

$$M_k=\sup_{-\infty<x<+\infty}|f^{(k)}(x)|<+\infty,\quad k=0,1,2.$$

证明不等式 $M_1^2 \leq 2M_0 M_2$.

由泰勒公式, 有

$$f(x_0) = f(x) + f'(x)(x_0 - x) + f''(\xi)\frac{(x_0 - x)^2}{2},$$

因此

$$|f(x_0)| \leq |f(x)| + |f'(x)||x_0 - x| + |f''(\xi)|\frac{|x_0 - x|^2}{2}$$

$$\leq M_0 + M_1 y + M_2\frac{y^2}{2}, \quad y = |x_0 - x|.$$

由于 $M_0 + M_1 y + \frac{1}{2}M_2 y^2 \geq 0$ **对所有** y **成立**, **故** $M_1^2 \leq 2M_0 M_2$.

141 利用泰勒公式计算近似值:

1) $\sin 18°$; 2) $\arctan 0.8$.

1) **由带拉氏余项的麦克劳林展开公式**, 有

$$\sin 18° = \sin\frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10} - \frac{1}{6}\cdot\frac{\pi^3}{10^3} + \frac{1}{120}\cdot\frac{\pi^5}{10^5} + R_7,$$

其中 $|R_7| < \frac{1}{7!}\cdot\frac{\pi^7}{10^7}$. **因此**

$$\sin 18° \approx \frac{\pi}{10}\ 1 - \frac{\pi^2}{600} + \frac{\pi^4}{12\cdot 10^5} \approx 0.314159\ 1 - \frac{9.869604}{600} + \frac{(9.869604)^2}{12\cdot 10^5}$$

$$\approx 0.314159(1 - 0.016449 + 0.000079) \approx 0.309017.$$

2) **取** $x_0 = 1$, **由泰勒公式有**

$$\arctan 0.8 = \arctan(x_0 - 0.2)$$

$$\approx \arctan x_0 - (\arctan x)'|_{x = x_0}\cdot 0.2 + \frac{1}{2}\cdot 0.04(\arctan x)''|_{x = x_0} - \frac{1}{6}\cdot 0.008(\arctan x)\quad|_{x = x_0}$$

$$\approx \frac{\pi}{4} - 0.1 - 0.01 - 0.00066 \approx 0.67474.$$

由于 $(\arctan x)^{(4)}|_{x = x_0} = 0$, $(\arctan x)^{(5)}|_{x = \xi} = 24\frac{1 - 10\xi^2 + 5\xi^4}{(1 + \xi^2)^6} < 12$, $0.8 < \xi < 1$, **因此拉氏余项的误差估计为**

$$|R| < \frac{12}{5!}(0.2)^5 < 3.2\cdot 10^{-5}.$$

142 计算:

1) $\cos 9°$, **精度到** 10^{-5}; 2) 5, **精度到** 10^{-4}.

1) **先由要求达到的精度来确定展开麦克劳林公式的项数**, **这可以通过估计拉氏**

余项来得到 . 设 $x=\frac{\pi}{20}$, 由于 $0<\xi=\theta\frac{\pi}{20}<\frac{\pi}{20}$, 故

$$|R_{2n+2}|=\left|\frac{(\cos x)^{(2n+2)}\big|_{x=\xi}}{(2n+2)!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^{2n+2}\right|<\frac{\pi^{2n+2}}{20^{2n+2}(2n+2)!}<10^{-5},$$

由此得 $n\geq 2$, 所以

$$\cos 9°\approx 1-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{20}\right)^{2}+\frac{1}{4!}\left(\frac{\pi}{20}\right)^{4}\approx 0.98769 .$$

2) 函数 $f: x\mapsto\sqrt{x}$, $x\geq 0$, 在 $x_0=4$ 附近展开为泰勒公式, 有 $\sqrt{x}=2+\frac{1}{4}(x-4)-\frac{1}{64}(x-4)^2+\frac{1}{512}(x-4)^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{n!\,2^{3n-1}}(x-4)^n+R_{n+1}(x)$, $\quad n=2,3,\cdots$,

其中

$$R_{n+1}(x)=\frac{(2n-1)!!(-1)^n(x-4)^{n+1}}{(n+1)!\,2^{n+1}(4+\theta(x-4))^{n+0.5}},\quad 0<\theta<1 .$$

令 $x=5$ 代入, 有

$$\sqrt{5}=2+\frac{1}{4}-\frac{1}{64}+\frac{1}{512}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{n!\,2^{3n-1}}+R_{n+1}(5) . \qquad (1)$$

由条件

$$|R_{n+1}(5)|\leq\frac{(2-1)!!}{(n+1)!\,2^{3n+2}}<10^{-4}$$

求得 $n\geq 4$. 由式(1)得

$$\sqrt{5}\approx 2+\frac{1}{4}-\frac{1}{64}+\frac{1}{512}-\frac{5}{2^{14}}=2.236022\cdots .$$

利用展开式 I — V, 求下列极限:

143 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{x^4}$.

由展开式 I , III 有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^4}\left[\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)-\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^5)\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1}{12}+\frac{o(x^5)}{x^4}\right)=-\frac{1}{12} .$$

144 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)$.

改写函数的表达, 并由展开式IV有

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}\right)=\lim_{x\to+\infty}x\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}-\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{6}}\right]$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x\left[\left(1 + \frac{1}{6x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right) - \left(1 - \frac{1}{6x} + o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right] = \frac{1}{3}.$$

145 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$.

利用表达式 $u^v = e^{v \ln u}$, $u > 0$ **及展开式 I，V 有**

$$\lim_{x \to 0} x^{-3}\left(1 - e^{\sin x \ln \cos x}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{1 - (1 + \sin x \ln \cos x + o(x^3))}{x^3}$$

$$= -\lim_{x \to 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = -\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 - \sin^2 x)}{2x^2}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

146 $w = \lim\limits_{x \to 0} x^{-3}(\operatorname{sh}(\tan x) - x)$.

利用展开式 I，并利用展式 $\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^4)$，**有**

$$w = \lim_{x \to 0} \frac{\tan x + \frac{1}{6}\tan^3 x + o(x^3) - x}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x}{x^3} = \frac{1}{2}.$$

对下列 $x \to 0$ **时的无穷小量** y **确定其形如** Cx^n **的主项**(C **为常数**):

147 $y = \tan(\sin x) - \sin(\tan x)$.

首先证明展开式

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8), \quad x \to 0.$$

事实上，将 $\tan x$ **写成** $\sin x(\cos x)^{-1}$ **并利用展开式 II—IV 有**

$$\tan x = \sin x(1 - \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}} = \sin x + \frac{1}{2}\sin^3 x + \frac{3}{8}\sin^5 x + \frac{5}{16}\sin^7 x + o(x^8)$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^3 + \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^5 + \frac{5}{16}x^7 + o(x^8)$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8), \quad x \to 0,$$

即得证．利用此展式，以及 $\sin x$ **的展开式，有**

$$y = \tan(\sin x) - \sin(\tan x) = \sin x + \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{2}{15}\sin^5 x + \frac{17}{315}\sin^7 x - \tan x + \frac{\tan^3 x}{6} -$$

$$\frac{\tan^5 x}{5!} + \frac{\tan^7 x}{7!} + o(x^8) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^3 + \frac{2}{15}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^5 +$$

$$\frac{17}{315}x^7 - \left(x - \frac{x^2}{3} - \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7\right) + \frac{1}{6}\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5\right)^3 -$$

$$\frac{1}{120}\left(x + \frac{x^3}{3}\right)^5 + \frac{x^7}{7\,!} + o(x^8) = \frac{x^7}{30} + o(x^8), \quad x \to 0,$$

由此 $Cx^n \equiv \frac{x^7}{30}$. 可得 $C = \frac{1}{30}$, $n = 7$.

148 $y = (1 + x)^x - 1$.

利用展开式 I, V 有

$$y = \mathrm{e}^{x\ln(1+x)} - 1 = x\ln(1 + x) + o(x^2)$$

$$= x\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + o(x^2) = x^2 + o(x^2), \quad x \to 0.$$

由此 $Cx^n \equiv x^2$. 可得 $C = 1$, $n = 2$.

149 $y = 1 - \frac{(1 + x)^{\frac{1}{x}}}{\mathrm{e}}$.

由表达式 $u^v = \mathrm{e}^{v\ln u}$, $u > 0$, 并利用展式 I, V 有

$$y = 1 - \exp\left(\frac{1}{x}\ln(1 + x) - 1\right) = 1 - \exp\left(\frac{1}{x}\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - 1\right)$$

$$= 1 - \exp\left(-\frac{x}{2} + o(x)\right) = 1 - \left(1 - \frac{x}{2} + o(x)\right) + o(x) = \frac{x}{2} + o(x), \quad x \to 0.$$

$$Cx^n \equiv \frac{x}{2}, \quad C = \frac{1}{2}, \quad n = 1.$$

150 选择系数 A, B, 使当 $x \to 0$ 时成立等式

$$\cot x = \frac{1 + Ax^2}{x + Bx^3} + O(x^5).$$

由

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1 + Ax^2}{x + Bx^3} + O(x^5),$$

得 $(x + Bx^3)\cos x = (1 + Ax^2)\sin x + O(x^7)$. 由展开式 II, III 有

$$(x + Bx^3)\left(1 - \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^4}{4\,!} + O(x^6)\right) = (1 + Ax^2)\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5\,!} + O(x^7)\right) + O(x^7),$$

因此

$$x - \frac{x^3}{2\,!} + \frac{x^5}{4\,!} + O(x^7) + Bx^3 - B\frac{x^5}{2} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7) + Ax^3 - \frac{A}{6}x^5 + O(x^7).$$

得到 $-\frac{1}{2} + B = A - \frac{1}{6}$, $\frac{1}{24} - \frac{B}{2} = \frac{1}{120} - \frac{A}{6}$, 解之得 $A = -\frac{2}{5}$, $B = -\frac{1}{15}$.

151 如何选择系数 A, B, C 和 D, 使当 $X \to 0$ 时成立渐近公式

$$\mathrm{e}^x = \frac{1 + Ax + Bx^2}{1 + Cx + Dx^2} + O(x^5)\ ?$$

由题设

$$\mathrm{e}^x (1 + Cx + Dx^2) = 1 + Ax + Bx^2 + O(x^5) . \qquad (1)$$

根据 $\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + O(x^5)$，由式(1)有

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + O(x^5)\right)(1 + Cx + Dx^2) = 1 + Ax + Bx^2 + O(x^5),$$

由此，将乘积展开，取到 x^4 项，有

$$1 + Cx + Dx^2 + x + Cx^2 + Dx^3 + \frac{x^2}{2} + \frac{C}{2}x^3 + \frac{D}{2}x^4 + \frac{x^3}{6} + \frac{C}{6}x^4 + \frac{x^4}{24}$$
$$= 1 + Ax + Bx^2 + O(x^5) .$$

比较同次方 x 的项，得方程组:

$$C + 1 = A, \quad D + \frac{C}{2} + \frac{1}{6} = 0, \quad D + C + \frac{1}{2} = B, \quad \frac{D}{2} + \frac{C}{6} + \frac{1}{24} = 0,$$

解之，得

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{12}, \quad C = -\frac{1}{2}, \quad D = -\frac{1}{12} .$$

152　设$|x|$为小值，导出下列表达式的近似公式:

1) $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$;　2) $\dfrac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{x}{100}\right)}$.

1) 由展开式IV有

$$\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}} = (1+x)^{\frac{1}{3}}(1-x)^{-\frac{1}{3}} - (1-x)^{\frac{1}{3}}(1+x)^{-\frac{1}{3}}$$
$$= \left(1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2)\right)\left(1 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 + o(x^2)\right)$$
$$- \left(1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + o(x^2)\right)\left(1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 + o(x^2)\right)$$
$$= \frac{4}{3}x + o(x^2) \approx \frac{4}{3}x .$$

2) 由展开式V，有近似公式

$$\frac{\ln 2}{\ln\left(1 + \frac{x}{100}\right)} = \frac{\ln 2}{\frac{x}{100} - \frac{x^2}{2 \cdot 10^4} + o(x^2)} \approx \frac{100\ln 2}{x} \approx \frac{70}{x} .$$

153　已知向量值函数 $\boldsymbol{f}$: $x \mapsto \left(\frac{1}{x}, \frac{x}{x+2}, \arctan x\right)$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{0, -2\}$, 将其展开为

$x-1$ 的多项式直到 $(x-1)^2$ 项.

由向量值函数的泰勒公式,未知展开式应为

$$\boldsymbol{f}(x)=\boldsymbol{f}(1)+\boldsymbol{f}'(1)(x-1)+\frac{1}{2}\boldsymbol{f}''(1)(x-1)^2+\boldsymbol{R}_3.$$

由于 $\boldsymbol{f}(1)=\left(1,\frac{1}{3},\frac{\pi}{4}\right)$; $\boldsymbol{f}'(1)=\left(-1,\frac{2}{9},\frac{1}{2}\right)$; $\boldsymbol{f}''(1)=\left(2,-\frac{4}{27},-\frac{1}{2}\right)$,故

$$\boldsymbol{f}(x)=\left(1,\frac{1}{3},\frac{\pi}{4}\right)+\left(-1,\frac{2}{9},\frac{1}{2}\right)(x-1)+\left(1,-\frac{2}{27},-\frac{1}{4}\right)(x-1)^2+\boldsymbol{R}_3,$$

其中 $\boldsymbol{R}_3$ 为某种形式的余项.

练 习 题

展开下列函数的泰勒公式:

330 $f: x\mapsto(\sin x)^{\sin x}$, $x>0$,在 $x_0=1$ 点,直到 $(x-1)^2$ 项,带佩氏余项.

331 $f: x\mapsto\tan(x+x^2)$,在 $x_0=1$ 点,直到 $(x-1)^2$ 项,带佩氏余项.

332 $f: x\mapsto\frac{\ln x}{x}$, $x>0$ 在 $x_0=1$ 点,直到 $(x-1)^3$ 项,带佩氏余项.

333 $f: x\mapsto xe^{-x^2}$, $x\in\mathbf{R}$ 在 $x_0=2$ 点,直到 $(x-2)^2$ 项,带拉氏余项.

334 $f: x\mapsto x\arctan x$, $x\in\mathbf{R}$,在 $x_0=1$ 点,直到 $(x-1)^2$ 项,带柯西余项.

335 $f: x\mapsto\sqrt{1-x^2}\arcsin x$, $|x|<1$,在 $x_0=0$ 点,直到 x^5 项,带佩氏余项.

336 $\boldsymbol{f}: x\mapsto(\cos(\sin x),\sin(\cos x),e^{\sin x})$, $x\in\mathbf{R}$, $x_0=0$,直到 x^4 项.

337 $\boldsymbol{f}: x\mapsto(f_1(x), f_2(x), f_3(x))$, $x_0=0$,直到 x^5 项,其中

$$f_1(x)=\frac{x^2}{e^x-x-1},\quad x\neq0,\quad f_1(0)=2;$$

$$f_2(x)=\frac{\cos x-1}{x^2},\quad x\neq0,\quad f_2(0)=-\frac{1}{4};\quad f_3(x)=\operatorname{arsh}x.$$

利用局部麦克劳林公式,将下列函数展开至 x 的最高阶或至所给的阶:

338 $f: x\mapsto\begin{cases}x^6\sin\frac{1}{x}, & x\neq0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

339 $f: x\mapsto e^{x^3|x|}$.是否成立公式

$$e^{x^3|x|}=1+x^3|x|+\frac{x^8}{2!}+\cdots+\frac{x^{3n}|x|^n}{n!}+o(x^{4n})?$$

340 $f: x\mapsto\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ (展开到 x^{10}).是否成立展开式

$$e^{-\frac{1}{x^2}}=1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2x^4}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!x^{2n}}+o\left(\frac{1}{x^{2n}}\right)?$$

341 $f: X\to Y$, $x=2t-t^2$, $y=3t-t^3$ (展开到 x^3).

342 $f: X \to Y$, $x = 2t + \sin t$, $y = te^t$ (展开到 x^3).

343 $f: X \to Y$, $x = t - t^2$, $y = 4t - t^4$ (展开到 x^3).

344 $f: X \to Y$, $y^7 + y - x = 0$ (展开到 x^6).

利用带拉氏余项的麦克劳林公式, 将下列函数展开到所要求的阶:

345 $f: x \mapsto \begin{cases} x^{x^3}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ (展开到 x^2).

346 $f: X \to Y$, $x^4 + y^4 + \sin xy = 1$ (展开到 x^3, 在区间 $[-1, 1]$ 上).

347 $f: x \mapsto e^{x\ x}$, $x > 0$. 是否成立公式

$$e^{x\ x} = 1 + x\ \ x + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^2\ \ x}{3!} + \cdots + \frac{(x\ \ x)^n}{n!} + \frac{e^{\xi}(x\ \ x)^{n+1}}{(n+1)!}, \quad 0 < \xi < x\ \ x?$$

348 假设 $f: x \mapsto \cos(D(x))$, 其中 D 为狄利克雷(Dirichlet)函数, 是否成立

$$\cos(D(x)) = 1 - \frac{D^2(x)}{2!} + \frac{D^4(x)}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{D^{2n}(x)}{(2n)!} + R_{2n+2}(x)?$$

求出 $R_{2n+2}(x)$ 的表达式.

确定常数 A, B, C, 使当 $x \to 0$ 时下列渐近表达式成立, 并确定关于 x 的阶:

349 $\arctan x = \dfrac{x + Ax^3}{1 + Bx^2} + O^*(x^n)$.

350 $\arcsin x = \dfrac{x + Ax^3}{1 + Bx^2} + O^*(x^n)$.

351 $\ln(1 + x) = \dfrac{x + Ax^2}{1 + Bx} + O^*(x^n)$.

352 $\sqrt[k]{1 + x} = \dfrac{1 + Ax}{1 + Bx} + O^*(x^n)$.

353 $(1 + x)^x = \dfrac{1 + Ax + Bx^2}{1 + Cx} + O^*(x^n)$.

354 $\operatorname{arsh} x = \dfrac{x + Ax^3}{1 + Bx^2} + O^*(x^n)$.

估计下列近似公式的绝对误差:

355 $\cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$, $|x| \leq 1$.

356 $\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}} \approx 1 + \dfrac{2}{3x}$, $|x| > 10^3$.

357 $\arctan x \approx \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{x}$, $|x| > 10^2$.

358 $\sin(a\sin(\omega x)) \approx a\omega x - \dfrac{a^3\omega^3 x^3}{3}$, $|a\omega x| < 0.1$.

359 $f'(x) \approx \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$, $|h| \leq 0.1$.

360 $f'(x) \approx \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$, $|h| \leq 0.1$.

361 $f''(x) \approx \dfrac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{2h^2}$, $|h| \leq 0.1$.

362 假设 f 满足方程 $f'(x) = F(f(x))$, 其中 F 为已知函数, 任意阶可微. 又设

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

那么 $f(x+h) - f(x) \approx hF(f(x))$. 试估计 $|f(x) - f^*(x)|$, 其中 f^* 满足方程 $f^*(x+h) - f^*(x) = hF(f^*(x))$.

363 假设 f 满足方程 $f'(x) = F(f(x))$, 其中 F 为已知函数, 任意阶可微. 试估计 $|f(x) - f^*(x)|$, 其中 f^* 满足方程

$$f^*(x+h) + 4f^*(x) - 5f^*(x-h) = 2h(2F(f^*(x)) + F(f^*(x-h))).$$

利用展开式 I — V, 求下列极限:

364 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 x^3 - e^{x^9} - 1}{(\cos x - \operatorname{ch} x)^2}$.

365 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{8}} - 1 - \dfrac{x}{8} + \dfrac{x^2}{16}}{\ln^2(e+x) - \dfrac{x^2}{e^2}}$.

366 $\lim\limits_{x\to +\infty}\; x^2 e^{-\frac{1}{x}} - {}^4\; x^2 + \alpha x + 1$.

367 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\operatorname{sh} x) - x \quad 1 - x - \dfrac{5}{8}x^3}{\tan x - x - \dfrac{x^3}{3}}$.

368 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}(\ln \operatorname{ch} x) - \ln(\operatorname{ch}\operatorname{sh} x)}{x^m}$.

10　函数极值　函数的最大值与最小值

10.1　函数极值

定义　假设函数 f 在点 c 的某邻域内处处有定义. 如果存在点 c 的一个邻域, 在其中 $f(c)$ 比其他函数值大(小), 称函数 f 在点 c 具有局部最大(最小).

局部最大值与局部最小值统称为极值.

10.2　极值的必要条件

如果函数在点 c 可微且取得极值, 则 $f'(c)=0$.

定义 1　方程 $f'(x)=0$ 的根称为函数 f 的驻点.

有时, 在函数取得极值的点函数 f 本身并不可导.

定义 2　驻点和函数导数不存在的点, 统称为函数的临界点.

10.3　极值的充分条件

规则一　假设函数 f 在点 c 的某邻域内处处可微, 在点 c 连续但可能不可微. 如果导数 f' 在点 c 的左侧为正(负), 且在点 c 的右侧为负(正), 则函数在点 c 取得局部极大(极小). 如果导数 f' 在左右两侧同号, 则函数在点 c 无极值.

规则二　假设函数 f 在可能取得极值的点有有限二阶导数. 如果 $f''(c)<0$, 则函数 f 在点 c 有极大值, 如果 $f''(c)>0$, 则有极小值.

规则三　设 n 为某个自然数. 又设函数 $y=f(x)$ 在点 c 的某邻域内有 $n-1$ 阶导数, 在点 c 有 n 阶导数, 且在点 $x=c$ 满足下列关系:

$$f'(c) = f''(c) = \cdots = f^{(n-1)}(c) = 0,\quad f^{(n)}(c)\neq 0 .$$

则: 如果 n 为偶数, 函数 $f(x)$ 在点 c 有局部极值, 而且如果 $f^{(n)}(c)<0$, 为极大, 而 $f^{(n)}(c)>0$, 为极小.

10.4 绝对极值

在区间$[a, b]$上的连续函数 f，或者在函数的临界点，或者在端点 a, b取得其最大值与最小值 .

研究下列函数的极值:

154 $f: x \mapsto x^m(1-x)^n$，$x \in \mathbf{R}$，$m, n \in \mathbf{N}$.

求出导数并令其等于 0 得

$$f'(x) = (m+n)x^{m-1}(1-x)^{n-1}\left(\frac{m}{m+n} - x\right) = 0 .$$

该方程的根为 $x_1 = 0(m > 1)$，$x_2 = 1(n > 1)$，$x_3 = \frac{m}{m+n}$，均为驻点 . 下面验证充分条件 .

设 $0 < \varepsilon < \frac{m}{m+n}$，当 m为偶数时，$f'(-\varepsilon) < 0$，$f'(\varepsilon) > 0$，因此在 $x_1 = 0$ 点函数 f有极小值 0 .

同理，在 $x_2 = 1$ 点: 当 n为偶数时，$f'(1-\varepsilon) < 0$，$f'(1+\varepsilon) > 0$，此时函数 f在该点有极小值 0;当 n为奇数时，$f'(1-\varepsilon) > 0$，$f'(1+\varepsilon) > 0$，无极值 .

最后，对 $x_3 = \frac{m}{m+n}$有

$$f'\left(\frac{m}{m+n} - \varepsilon\right) > 0, \quad f'\left(\frac{m}{m+n} + \varepsilon\right) < 0 .$$

因此，在 x_3 函数 f有极大值

$$f\left(\frac{m}{m+n}\right) = \frac{m^m n^n}{(m+n)^{m+n}} .$$

当 $m = 1(n = 1)$时，请读者自己验证 .

155 $f: x \mapsto x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$，$x \in \mathbf{R}$.

令所给函数的导数为 0，可求得驻点 $x_1 = \frac{1}{3}$. 在点 $x_2 = 0$，$x_3 = 1$ 没有有限导数 .

设 $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$，则

$$f'\left(\frac{1}{3} - \varepsilon\right) > 0,\ f'\left(\frac{1}{3} + \varepsilon\right) < 0;\ f'(-\varepsilon) > 0,\ f'(\varepsilon) > 0;$$

$$f'(1-\varepsilon) < 0,\ f'(1+\varepsilon) > 0 .$$

因此，函数在 $x_1 = \frac{1}{3}$取得极大值$\frac{1}{3}\sqrt[3]{4}$. 在 $x_2 = 0$ 点无极值，在 $x_3 = 1$ 点函数有极小值 0 .

156 $f: x \mapsto e^{-\frac{1}{|x|}}\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right)$，$x \neq 0$，$f(0) = 0$.

研究函数 f 在 $x=0$ 点的增量的符号，对所有 $x\neq 0$，有

$$\Delta f(0)=e^{-\frac{1}{|x|}}\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)>0,$$

因此函数在 $x=0$ 点有极小值 0．当 $x\neq 0$ 时，考虑方程 $f'(x)=0$，显然

$$f':x\mapsto x^{-2}e^{-\frac{1}{|x|}}\left(\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)\operatorname{sgn}x-\cos\frac{1}{x}\right),\quad x\neq 0.$$

由于 $\left|\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right|\leqslant\sqrt{2}$，因此导数在经过值为 0 的点附近时不改变符号，从而，除了 $f_{\min}=f(0)=0$ 外，没有其他极值点．

求下列函数的极值:

157 $f:x\mapsto \arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$，$x\in\mathbf{R}$．

当 $x=1$ 时，导数 $f':x\mapsto\frac{1-x}{1+x^2}=0$．由于 $f'(1-\varepsilon)>0$，$f'(1+\varepsilon)<0$，$0<\varepsilon<1$，故函数在 $x=1$ 取得极大值，极值为 $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$．

158 $f:x\mapsto|x|e^{-|x-1|}$，$x\in\mathbf{R}$．

由导数表达式 $f':x\mapsto e^{-|x-1|}\operatorname{sgn}x-|x|e^{-|x-1|}\operatorname{sgn}(x-1)$，$x\neq 0$，$x\neq 1$，可知 $x_1=-1$，$x_2=0$，$x_3=1$ 为可能取得极值的点．

设 ε 为足够小的正数，由导数在 $x_i\ (i=1,2,3)$ 两侧的符号可知

$$f'(-1+\varepsilon)<0,\quad f'(-1-\varepsilon)>0\quad(\text{极大，值为 } e^{-2});$$
$$f'(-\varepsilon)<0,\qquad f'(\varepsilon)>0\quad(\text{极小，值为 } 0);$$
$$f'(1-\varepsilon)>0,\qquad f'(1+\varepsilon)<0\quad(\text{极大，值为 } 1).$$

159 在 $[-10,10]$ 上求函数 $f:x\mapsto|x^2-3x+2|$ 的最大值和最小值．

求导

$$f':x\mapsto(2x-3)\operatorname{sgn}(x^2-3x+2),\quad x\neq 1,\quad x\neq 2;$$

由此，求出可能的极值点: $x_1=\frac{3}{2}\left(f'\left(\frac{3}{2}\right)=0\right)$；$x_2=1$；$x_3=2$（导数不存在）．比较下列函数值

$$f(x_1)=\frac{1}{4},\quad f(x_2)=0,\quad f(x_3)=0,\quad f(-10)=132,\quad f(10)=72,$$

可知，最大值为 132，最小值为 0．

160 在 $(-\infty,+\infty)$ 上求函数 $f:x\mapsto e^{-x^2}\cos x^2$ 的上确界和下确界．

由于函数 f 为偶函数，只须考虑半轴 $x\geqslant 0$．由导数 $f':x\mapsto -2\sqrt{2}xe^{-x^2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-x^2\right)$ 可知 $x_1=0$，$x_k=\sqrt{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}$，$k\in\mathbf{Z}_0$ 为可能的极值点．比较函

数值

$$f(0)=1,\quad f(x_k)=\frac{1}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}-2k\pi},\quad k\in \mathbb{Z}_0,\quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=0,$$

可知

$$\inf_{-\infty<x<+\infty} f(x)=\frac{1}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}},\qquad \sup_{-\infty<x<+\infty} f(x)=1\ .$$

161　假设 $f:\ \xi\mapsto \dfrac{1+\xi}{3+\xi^2}$ **定义在区间** $(x,\ +\infty)$ **上，确定** $\inf f(\xi)$，$\sup f(\xi)$.

由导数 $f':\ \xi\mapsto \dfrac{3-2\xi-\xi^2}{(3+\xi^2)^2}$ **知，可能的极值点为** $\xi_1=-3$，$\xi_2=1$，**并且有** $f(-3)=-\dfrac{1}{6}$，$f(1)=\dfrac{1}{2}$，$\lim\limits_{\xi\to x+0} f(\xi)=\dfrac{1+x}{3+x^2}$，$\lim\limits_{\xi\to+\infty} f(\xi)=0$，**从中选出最大、最小即可** .

当 $x\leq 1$ **时**，$\dfrac{1+x}{3+x^2}\leq\dfrac{1}{2}$ **且** $\sup\limits_{x<\xi<+\infty} f(\xi)=f(1)=\dfrac{1}{2}$. **若** $x>1$，**则** $\sup\limits_{1<x<\xi<+\infty} f(\xi)=\dfrac{1+x}{3+x^2}$. **因此**

$$\sup_{x<\xi<+\infty} f(\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & x\leq 1,\\[2mm] \dfrac{1+x}{3+x^2}, & x>1\ .\end{cases}$$

当 $x\leq -3$ **时**，$\dfrac{1+x}{3+x^2}\geq -\dfrac{1}{6}$ **且** $\inf\limits_{x<\xi<+\infty} f(\xi)=-\dfrac{1}{6}$.

当 $-3<x<-1$ **时**，$-\dfrac{1}{6}<\dfrac{1+x}{3+x^2}<0$ **且** $\inf\limits_{x<\xi<+\infty} f(\xi)=\dfrac{1+x}{3+x^2}$.

如果 $x\geq -1$，**则** $\dfrac{1+x}{3+x^2}\geq f(+\infty)=0$ **且** $\inf\limits_{x<\xi<+\infty} f(\xi)=0$.

因此

$$\inf_{x<\xi<+\infty} f(\xi)=\begin{cases}-\dfrac{1}{6}, & x\leq -3,\\[2mm] \dfrac{1+x}{3+x^2}, & -3<x\leq -1,\\[2mm] 0, & x>-1\ .\end{cases}$$

162　确定数列 $a_n=\sqrt[n]{n}$ **的最大元素** .

令 $n=x$，**数列** (a_n) **的元素可视为可微函数** $f:\ x\mapsto x^{\frac{1}{x}}$，$x>0$ **的值，即** $a_n=f(n)$. **假设函数** f **的驻点** x_0 **满足** $k\leq x_0<k+1$，$k\in\mathbb{N}$，**则数列** (a_n) **的最大元素** $\max a_n$ **是三个数** a_1，a_k，a_{k+1} **中的最大者** .

导数 $f':\ x\mapsto x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$，**得驻点** $x_0=e$，**显然此时** f **最大 . 由此**，$k=2$，**比较** $a_1=$

1，$a_2=\sqrt{2}$，$a_3=\sqrt[3]{3}$知 $\max a_n=\sqrt[3]{3}\approx 1.44$.

163 证明不等式

$$\frac{1}{2^{p-1}}\leq x^p+(1-x)^p\leq 1,\quad 0\leq x\leq 1,\quad p>1 .$$

考察函数 $f:\ x\mapsto x^p+(1-x)^p$，**其导数** $f':\ x\mapsto p(x^{p-1}-(1-x)^{p-1})$，**驻点** $x=\frac{1}{2}$.**比较** $f(0)=1$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^{p-1}}$，$f(1)=1$，**可知** $\max\limits_{0\leq x\leq 1}f(x)=1$，$\min\limits_{0\leq x\leq 1}f(x)=\frac{1}{2^{p-1}}$.**由此即得证** .

164 证明不等式 $\frac{2}{3}\leq\frac{x^2+1}{x^2+x+1}\leq 2$，$-\infty<x<+\infty$.

比较下列 4 个数即可得证

$$f_{\max}(x),\quad f_{\min}(x),\quad \lim_{x\to-\infty}f(x),\quad \lim_{x\to+\infty}f(x),$$

其中

$$f(x)=(x^2+1)(x^2+x+1)^{-1} .$$

注意到，**当** $x=1$ **时函数取得最小值** $\frac{2}{3}$，**当** $x=-1$ **时取得最大值** 2，**即得证** .

165 确定 $[-2,1]$ **区间上多项式**

$$P(x)=x(x-1)^2(x+2)$$

到零点的距离，**即**

$$E_P=\sup_{-2\leq x\leq 1}|P(x)| .$$

计算

$$P'(x)=(x-1)^2(x+2)+2(x-1)x(x+2)+x(x-1)^2 .$$

由 $P'(x)=0$，**解得**

$$x_1=1,\quad x_{2,3}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2} .$$

比较函数值 $f(x_1),f(x_2),f(x_3)$**及** $f(-2)$，**得**

$$E_P=\frac{9+6\sqrt{3}}{4} .$$

166 如何选择系数 q，**使多项式** $P(x)=x^2+q$ **在区间** $[-1,1]$ **上到零点的距离**（**即** $E_P=\sup\limits_{-1\leq x\leq 1}|P(x)|$）**取得最小值**？

比较 $P(0)=q$，$P(\pm 1)=q+1$，**可得**

$$\sup_{|x|\leq 1}|P(x)|=\max\{|q|,|q+1|\}$$

$$=\begin{cases}|q|, & \text{当 } |q|\geq|q+1|,\\ |q+1|, & \text{当 } |q+1|\geq|q|,\end{cases}$$

即 $\sup\limits_{|x|\leq 1}|P(x)|=\left|q+\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{2}$.**从而**，

$$\min E_P = \min_q \max\{|q|, |q+1|\}$$

$$= \min_q \left(\left|q+\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},$$

此时 $q = -\frac{1}{2}$.

167　两个函数 f, g 在区间 $[a, b]$ 上的绝对距离定义为

$$\Delta = \sup_{a\leq x\leq b} |f(x) - g(x)|.$$

确定函数 $f: x \mapsto x^2$, $g: x \mapsto x^3$ 在区间 $[0,1]$ 上的绝对距离.

函数 $\varphi: x \mapsto f(x) - g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的微分在区间两端点取值为 0, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, 在开区间 $(0, 1)$ 内有唯一驻点 $x = \frac{2}{3}$.

因此

$$\Delta = \max\left\{|\varphi(0)|, \left|\varphi\left(\frac{2}{3}\right)\right|\right\} = \left|\varphi\left(\frac{2}{3}\right)\right| = \frac{4}{27}.$$

168　确定函数的最小值, 设

$$f: x \mapsto \max\{2|x|, |1+x|\}.$$

如果 $2|x| \geq |1+x|$, 则 $\max\{2|x|, |1+x|\} = 2|x|$. 此时, $f: x \mapsto 2|x|$, 当 $-\infty < x \leq -\frac{1}{3}$ 或 $x \geq 1$. 如果 $2|x| < |1+x|$, 则 $\max\{2|x|, |1+x|\} = |1+x|$. 此时 $f: x \mapsto |x+1|$, $-\frac{1}{3} < x < 1$. 因此

$$f: x \mapsto \begin{cases} |x+1|, & -\frac{1}{3} < x < 1, \\ 2|x|, & x \notin \left(-\frac{1}{3}, 1\right). \end{cases}$$

其导数

$$f': x \mapsto \begin{cases} 1, & -\frac{1}{3} < x < 1, \\ 2\operatorname{sgn} x, & x \notin \left[-\frac{1}{3}, 1\right], \end{cases}$$

因此, $x_1 = -\frac{1}{3}$, $x_2 = 1$ 为可能的极值点. 比较 $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$ 及 $f(1) = 2$, 可知 $f_{\min} = \frac{2}{3}$.

练　习　题

求下列函数的极值:

369 $f: x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{\left|1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}\right|}, & \text{其中 } x \neq \xi,\ 1 + \xi + \dfrac{\xi^2}{2} + \dfrac{\xi^3}{3} = 0, \\ -1, & x = \xi. \end{cases}$

370 $f: x \mapsto \begin{cases} \exp\left(\dfrac{1}{x^2 - 1}\right), & x \neq \pm 1, \\ 0, & x = 1 \vee x = -1. \end{cases}$

371 $f: x \mapsto \dfrac{x}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin kx}{k},\ 0 \leq x \leq \pi.$ **372** $f: x \mapsto |x|^{\frac{1}{5}}(1 - x)^{\frac{1}{7}}(2 - x)^{\frac{1}{9}},\ x \in \mathbb{R}.$

373 $f: x \mapsto \dfrac{x^{\frac{1}{\pi}}}{\sin x},\ 0 < x < \pi.$ **374** $f: x \mapsto |x|^{\frac{1}{2}}|1 - x|^{1 - \frac{1}{2}}.$

375 $f: x \mapsto \cos^{100} x + \operatorname{ch}^{100} x.$ **376** $f: x \mapsto \dfrac{1}{2}(\cos x + |\cos x|).$

377 $f: X \to Y,\ x = 3t - t^3,\ y = 4t - t^4,\ 0 \leq t \leq 1.$

378 $f: \varphi \mapsto 1 + \cos\varphi,\ 0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}.$ **379** $f: X \to Y,\ x^3 + y^3 + x^2 y + 1 = 0.$

求下列函数的最小值:

380 $f: x \mapsto \max\left\{\operatorname{ch} x + \dfrac{1}{2},\ 4 - \operatorname{ch} x\right\}.$ **381** $f: x \mapsto \max\{1 - |x + 3|,\ 1 - |x|,\ 1 - (x - 2)^2\}.$

求下列函数的最大值:

382 $f: x \mapsto \min\{x + 5,\ \ln x,\ 1 - x\}.$

383 $f: x \mapsto \min\left\{-x,\ (x + 2)^2 - \dfrac{1}{10},\ -\dfrac{\ln x - \ln(x + 1)}{x}\right\}.$

求下列函数的最大值:

384 $f: x \mapsto (x - 1)^2(x - 2)^2,\ -3 \leq x \leq 4.$ **385** $f: x \mapsto \dfrac{1}{1 + \sqrt[3]{e^x - x}},\ -1 \leq x \leq 1.$

386 $f: x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{2 + \dfrac{\sin x}{x}}, & 0 < |x| \leq \pi, \\ 4, & x = 0. \end{cases}$ **387** $f: x \mapsto \dfrac{\cos x \cos \dfrac{x}{2} \cdots \cos \dfrac{x}{n}}{2 - \cos x \cos \dfrac{x}{2} \cdots \cos \dfrac{x}{n}}.$

求下列函数的最小值:

388 $f: x \mapsto \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{4}{3}x^3 - \dfrac{11}{8}x^2 - \dfrac{9}{4}x + 1,\ -3 \leq x \leq 2.$

389 $f: x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{[x]} \sin k\pi x,\ 1 \leq x \leq 4.$

390 $f: X \to Y,\ x^3 + y^3 - 4.5xy = 0\ (0.5 \leq x \leq 1.5;\ 0 < y < x)$, f **为连续函数.**

391 $f: x \mapsto -\sin(a \sin x),\ 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2},\ a > 0.$

对下列题目中的函数 f, 确定其逼近函数 f^*, 使得 $\sup\limits_{a \leq x \leq b} |f(x) - f^*(x)|$ 最小(函数 f^* 称为切比雪夫(Чебышёв)近似):

392 $f: x \mapsto x^2;\ f^*: x \mapsto a_0 + a_1 x^2 + a_2 x^4,\ 0 \leq x \leq 1.$

393 $f: x \mapsto e^x;\ f^*: x \mapsto a_0 + a_1 x + a_2 x^2,\ 0 \le x \le 1$.

394 $f: x \mapsto e^x;\ f^*: x \mapsto \dfrac{a+bx}{c+dx},\ 0 \le x \le 1$.

395 $f: x \mapsto x^3 - 6x^2 + 6x + 1;\ f^*: x \mapsto a_0 x,\ 1 \le x \le 5$.

求下列函数的最大值、最小值:

396 $f: x \mapsto e^{-\frac{\pi^2}{x^2}}\left(2 + \sin\dfrac{\pi^3}{x^2}\right),\ x \ne 0,\ x \in [-\pi, \pi]$.

397 $f: x \mapsto \begin{cases} -\ln|\sin x|, & x \ne k\pi, \\ 0, & x = k\pi, \end{cases}\quad k \in \mathrm{Z},\ x \in [-4\pi, 4\pi]$.

确定下列函数的上、下确界 $\inf f(x),\ \sup f(x)$:

398 $f: x \mapsto e^{-\frac{x}{2}}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \sin x\right),\ x \ne \dfrac{\pi}{4},\ f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -1,\ x \in (0, +\infty)$.

399 $f: x \mapsto |\sin x - |x - a||$ **在** $(-1, 1)$ **区间上**.

在下列题目中对给定的函数 f **确定近似函数** $f^* \in \{\tilde{f}^*\}$ **使得**

$$\sup_{0 < x < +\infty} |f(x) - f^*(x)| = \inf_{\{\tilde{f}^*\}} \sup_{x > 0} |f(x) - \tilde{f}^*(x)|,$$

其中

$$\tilde{f}^*: x \mapsto \begin{cases} a_0 + a_1 x + a_2 x^2, & 0 \le x \le x_0, \\ (b_0 + b_1 x + b_2 x^2)^{-1}, & x_0 < x < +\infty. \end{cases}$$

400 $f: x \mapsto \dfrac{x}{1+x^4}$.

401 $f: x \mapsto (1 + x^2)e^{-x}$.

402 $f: x \mapsto (1 - x^2)e^{-x}$.

403 $f: x \mapsto \sqrt{1 + x + x^2}\, e^{-x}$.

11 函 数 作 图

通过以下步骤作出函数 $y = f(x)$ **的图形:**

1. **确定函数的定义域, 周期性, 与坐标轴** Ox **的交点, 常号区间, 图形的对称性, 间断点以及连续区间.**
2. **讨论渐近线的存在性.**
3. **确定函数的单调区间和极值点.**
4. **确定凹凸区间及函数图形的拐点.**
5. **画出函数的图形.**

画出下列函数的图形:

169 $y = \dfrac{x-2}{x^2+1}$.

1. **函数对所有** x **有定义且连续, 当** $x > 2$ **时为正,** $x < 2$ **时为负,** $y(2) = 0$.

2. **由** $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \pm 1$ **可知,** $y = 1$ **为** $x \to +\infty$ **时的渐近线,** $y = -1$ **为** $x \to -\infty$ **时的渐**

近线 .

3. 由于导数

$$y' = \frac{2x+1}{(x^2+1)^3} \begin{cases} < 0, & 当\ x < -\dfrac{1}{2}, \\ > 0, & 当\ x > -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

故函数当 $x < -\frac{1}{2}$ 时递减，当 $x > -\frac{1}{2}$ 时递增，而当 $x = -\frac{1}{2}$ 时极小，值为 $-\sqrt{5} \approx -2.24$.

4 . 由二阶导数的符号

$$y'' = -\frac{4\left(x+\dfrac{3+\sqrt{41}}{8}\right)\left(x-\dfrac{\sqrt{41}-3}{8}\right)}{(x^2+1)^5} \begin{cases} < 0, & 当\ x < -\dfrac{3+\sqrt{41}}{8}, \\ > 0, & 当\ -\dfrac{3+\sqrt{41}}{8} < x < \dfrac{\sqrt{41}-3}{8}, \\ < 0, & 当\ \dfrac{\sqrt{41}-3}{8} < x . \end{cases}$$

可知，当 $x < -\frac{3+\sqrt{41}}{8} \approx -1.18$ 及 $x > \frac{-3+\sqrt{41}}{8} \approx 0.42$ 时函数图形上凸，而当 $-\frac{3+\sqrt{41}}{8} < x < \frac{\sqrt{41}-3}{8}$ 时下凸，拐点 $x_1 \approx -1.18$, $y_1 \approx -2.06$, $x_2 \approx 0.42$, $y_2 \approx -1.46$.

5. 作出函数图形，见图 22 .

170 $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2+1}$.

1 . 函数对所有 x 有定义，连续，负；由于 $y(x) = y(-x)$，图形关于 y 轴对称 .

图 22

图 23

2. 由于 $\lim\limits_{x\to\infty} y = 0$，故 $y = 0$ 为渐近线，无其他渐近线 .

3. 由导数的符号

$$y' = \frac{2\left[(x^2+1)^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{4}{3}}\right]}{3x^{\frac{1}{3}}(x^2+1)^{\frac{2}{3}}} \begin{cases} < 0, & 当\ x < 0, \\ > 0, & 当\ x > 0 . \end{cases}$$

可知，当 $x < 0$ 时函数递减，当 $x > 0$ 时增加，$x = 0$ 点为极小，值 -1 .

4. 由于

$$y'' = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}(x^2+1)^{-\frac{5}{3}}\left[(x^2+1)^{\frac{5}{3}} + 3x^{\frac{4}{3}} - x^{\frac{10}{3}}\right] < 0$$

$$(0 < |x| < +\infty),$$

故函数上凸，无拐点．

5．**作出函数图形，见图** 23．

171　$y=\frac{|1+x|^{\frac{3}{2}}}{x}$．

1．**函数对所有** $x>0$ **有定义，连续，正．**

2．**由极限** $\lim\limits_{x\to+0} y=+\infty$ **可知，** $x=0$ **为竖直渐近线．设有斜渐近线** $y=kx+b$，**则** $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=1$，$b=\lim\limits_{x\to+\infty}(y-x)=\frac{3}{2}$，**即** $y=x+\frac{3}{2}$．

3．**一阶导数满足不等式**

$$y'=\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}(1+x)^{\frac{1}{2}}(2x-1)\begin{cases}<0, & \text{当 } x<\frac{1}{2},\\ >0, & \text{当 } x>\frac{1}{2}.\end{cases}$$

可知，当 $0<x<\frac{1}{2}$ **时函数减，当** $x>\frac{1}{2}$ **时函数增，** $x=\frac{1}{2}$ **时取极小值** $\frac{3}{2}\ 3\approx 2.60$．

4．**由于二阶导数**

$$y''=\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}(1+x)^{-\frac{1}{2}}>0\quad(0<x<+\infty),$$

故函数图形下凸．

5．**作出函数图形，见图** 24．

24

25

172　$y=\frac{\sin x}{2+\cos x}$．

1．**函数对所有** x **有定义且连续；以** 2π **为周期；关于原点对称；当** $x=k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ **时** $y=0$．**显然** $\operatorname{sgn} y=\operatorname{sgn}\sin x$．

2．**无渐近线．由于周期性，只须研究** $[0,2\pi]$ **上的情况．**

3．**由一阶导数的符号**

$$y'=\frac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}\begin{cases}>0, & \text{当 } 0\leq x<\frac{2\pi}{3},\\ <0, & \text{当 } \frac{2\pi}{3}<x<\frac{4\pi}{3},\\ >0, & \text{当 } \frac{4\pi}{3}<x\leq 2\pi.\end{cases}$$

可知，当 $0\leq x<\frac{2\pi}{3}$及$\frac{4\pi}{3}<x\leq 2\pi$ 时函数增，当$\frac{2\pi}{3}<x<\frac{4\pi}{3}$时函数减，而 $x_1=\frac{2\pi}{3}$及 $x_2=\frac{4\pi}{3}$为极大点与极小点，值为$\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 0.58$，$-\frac{1}{\sqrt{3}}\approx -0.58$．

4．由于

$$y''=\frac{2\sin x(\cos x-1)}{(2+\cos x)^2}\begin{cases}<0, & \text{当 } 0<x<\pi,\\ >0, & \text{当 } \pi<x<2\pi.\end{cases}$$

可知，当 $0<x<\pi$ 时图形上凸，当 $\pi<x<2\pi$ 时下凸，$x_1=\pi$，$y_1=0$ 为拐点．

5．作出函数图形，见图 25．

173 $y=2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$．

1．函数对所有 $x>1$ 或 $x<-1$ 有定义，连续且正，此时 $y>1$；图形关于 Oy 轴对称；$y(-1-0)=y(1+0)=2^{\sqrt{2}}$．

2．由于 $\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=1$，故 $y=1$ 为 $x\to\infty$时的渐近线．

3．由

$$y'=xy\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)\ln 2\begin{cases}>0, & x<-1,\\ <0, & x>1\end{cases}$$

可知，当 $x<-1$ 时函数增，当 $x>1$ 时函数减，而在 $x=\pm1$ 时具有边界最大，值为 $2^{\sqrt{2}}$ (函数 $f(x)$，$a\leq x<\alpha(\beta<x\leq b)$在点 $a(b)$具有边界最大，如果存在半邻域$(a,\delta)\subset[a,\alpha)$ (或$(\delta,\beta)\subset(\beta,b]$)使得 $f(a)>f(x)(f(b)>f(x))$对该半邻域所有 x 成立，同理可定义边界最小)．

4．由不等式

$$\begin{aligned}y''&=y\ln 2\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)+x^2\ln 2\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)^2+\\&\quad x^2\left(\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}}-\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\right)\\&>y\ln 2\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}}-\frac{x^2}{\sqrt{(x^2+1)^3}}\right)\\&=y\left(\frac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}+\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}}\right)\ln 2>0\end{aligned}$$

因此，图形是下凸的．

5．作出函数图形如图 26．

174 $y=x^{\frac{1}{x}}$．

1．函数对 $x>0$ 有定义，连续(由 $y=x^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln x}$)，正．

2．$\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{\ln x}{x}}=1$，因此 $y=1$ 为 $x\to+\infty$时的渐近线．

3. **由不等式**

$$y' = \frac{y}{x^2}(1 - \ln x) \quad \begin{matrix} > 0, & 0 < x < e, \\ < 0, & e < x < +\infty. \end{matrix}$$

可知，当 $0 < x < e$ **时函数增，当** $e < x < +\infty$**时函数减，当** $x = e$ **时最大，值为** $e^{\frac{1}{e}}$**，此外** $y(+0) = 0$.

4. **略去拐点及凹凸性的讨论**.

26

27

5. **作出图形，见图** 27.

175　$y = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$.

1. **函数对** $x > -1$，$x \neq 0$ **有定义，正，且在该区域连续**.

由于 $\lim\limits_{x\to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$，**因此** $x = 0$ **为可去间断点**.

2. **由** $\lim\limits_{x\to -1+0} y = +\infty$，$\lim\limits_{x\to +\infty} y = 1$ **可知**，$y = 1$，$x = -1$ **分别是渐近线**.

3. **导数**

$$y' = y\left(\frac{1}{x(1 + x)} - \frac{\ln(1 + x)}{x^2}\right); \quad -1 < x < 0, \quad 0 < x < +\infty$$

为负. **事实上，在例题** 90 **中令** $\frac{a - b}{b} = x$，**可有不等式**

$$\frac{x}{1 + x} < \ln(1 + x) < x \quad (x > 0),$$

此不等式对 $-1 < x < 0$ **也成立**. **应用此不等式，可有**

$$y' = y\left(\frac{1}{x(1 + x)} - \frac{\ln(1 + x)}{x^2}\right) < y\left(\frac{1}{x(1 + x)} - \frac{x}{x^2 + x^3}\right) = 0.$$

因此，函数对定义域内所有 x **都递减**.

4. **可证，二阶导数**

$$y'' = y\left[\left(\frac{1}{x(1 + x)} - \frac{\ln(1 + x)}{x^2}\right)^2 + \frac{1}{x^3}\left(2\ln(1 + x) - \frac{2x + 3x^2}{(1 + x)^2}\right)\right]$$

为正. **为此，考察函数**

$$\varphi(x) = 2\ln(1 + x) - \frac{2x + 3x^2}{(1 + x)^2}.$$

由于 $\varphi'(x) = \frac{2x^2}{(1 + x)^3} > 0$; $-1 < x < +\infty$ **且** $\varphi(0) = 0$，**故当** $-1 < x < 0$，$\varphi(x) < 0$，**而当** $0 < x < +\infty$，$\varphi(x) > 0$，**因此对** $-1 < x < 0$，$0 < x < +\infty$**成立**，$\frac{1}{x^3}\varphi(x) > 0$，**即对这些值**

$y''>0$. 故函数图形下凸 .

5. 由此作出图形, 见图 28 .

29

28

176 $y = x\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \quad (x>0)$.

1 . 函数对所有 $x>0$ 有定义, 连续且正 . $y(+0) = \lim\limits_{x\to+0} x\exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = 0$.

2 . 设有斜渐近线 $y = kx+b$, 则

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e};$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(y-\mathrm{e}x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(\exp\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)-\mathrm{e}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\exp\left(x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right)-\mathrm{e}\right) = \lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}\left(-\frac{1}{2}+o(1)\right) = -\frac{\mathrm{e}}{2} .$$

3 . 由

$$y' = y\left(\frac{1}{x(1+x)}+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) > 0 .$$

可知当 $x>0$ 时函数增 .

4. 二阶导数

$$y'' = y\left(\frac{2}{x(1+x)}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)+\ln^2\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{x+3}{x(1+x)^2}\right)$$

为正 . 事实上, 引入新变量 $t=\frac{1}{x}$, 并用 104 题中的定理, 令

$$\Phi(t) = ((1+t)\ln(1+t)+t^2)^2; \quad \Psi(t) = t^4+3t^3+t^2; \quad t_0 = 0, \quad k = 4 .$$

此时满足定理的所有条件, 可得 $y''>0$, $x>0$, 也即函数图形下凸 .

5. 作出函数图形, 见图 29 .

177 $y = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{1-x^2}}}{1+x^2}$.

1 . 函数除了在 $x=\pm1$ 为间断外, 其余点均有定义, 连续, 正 . 而

$$y(-1-0) = 0; \quad y(-1+0) = +\infty;$$

$$y(1-0) = +\infty; \quad y(1+0) = 0 .$$

函数图形关于 Oy 轴对称 .

2. **有渐近线** $x = -1$, $x = 1$, $y = 0(x \to \infty)$.

3 . **求出一阶导数**

$$y' = 2x^3 e^{\frac{1}{1-x^2}} \frac{3 - x^2}{(1 + x^2)^2 (1 - x^2)^2}.$$

由于当 $-\infty < x < -\ 3$, $0 < x < 1$, $1 < x <\ 3$**时**, $y' > 0$, **此时函数增**;

而当 $-\ 3 < x < -1$, $-1 < x < 0$, $\ 3 < x < +\infty$**时**, $y' < 0$, **此时函数减** .

在 $x = 0$ **点有极小值** e, **而在** $x = \ 3$, $x = -\ 3$**有极大值**$\frac{1}{4\ \ e} \approx 0.15$.

4 . **二阶导数**

$$y'' = 2y \frac{2x^6 (3 - x^2)^2 + x^2 (1 - x^2)(9 + x^2 + 7x^4 - x^6)}{(1 - x^2)^4 (1 + x^2)^2},$$

可知, **当** $|x| < 1$ **时**, $y'' > 0$. **进一步**, $y''(\ 1.1) > 0$, $y''(\ 3) < 0$, **而** $y''(x) \to +0$, **当** $x \to +\infty$.**由于偶函数的性质**, **函数在区间**$(1,\ 3)$, $(\ 3, +\infty)$**之内**, **以及在**$(-\infty, -\ 3)$, $(-\ 3, -1)$**之内每个区间上至少有一个拐点** .

5. **作出图形**, **见图** 30 .

画出下列参数方程所表示的图形:

178　$x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$.

1 . **函数** $x(t)$, $y(t)$**对所有** $-\infty < t < +\infty$**有定义**, **且连续** . **此外**, **对所有** t **有**: $-\infty < x \leq 1$, $-\infty < y < +\infty$. **因此**, **函数** $y = y(x)$(**作为** x **的函数**)**定义域为** $-\infty < x \leq 1$.

2 . **由于当** $t \to \pm\infty$**时**, $x(t) \to -\infty$, $y(t) \to$ ê ∞, $\frac{y}{x} \to \pm\infty$, **故无渐近线** .

图　30

3. **导数**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} \frac{1 - t^2}{1 - t},$$

当 $t_1 = -1(x_1 = -3)$**时其为零**, **而在** $t_2 = 1(x_2 = 1)$**点为可去间断**, **而且**

$$\lim_{t \to 1} \frac{dy}{dx} = 3 .$$

4 . **二阶导数**

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3}{4} \frac{(1 - t^2)^2}{(1 - t)^3}$$

在 $t = 1$ **点间断** . **画出下表**:

t	$-\infty < t < -1$	$-1 < t < 1$	$1 < t < +\infty$
x	$-\infty < x < -3$	$-3 < x < 1$	$-\infty < x < 1$
y	$-2 < y < +\infty$	$-2 < y < 2$	$-\infty < y < 2$

$\frac{dy}{dx}$	$\frac{dy}{dx}<0$	$\frac{dy}{dx}>0$	$\frac{dy}{dx}>0$
$\frac{d^2y}{dx^2}$	$\frac{d^2y}{dx^2}>0$		$\frac{d^2y}{dx^2}<0$

由表可知，当 $-\infty<x<-3$ 时，函数减，当 $-3<x<1$ 时函数增．在 $x=-3$ 取最小值 -2，在 $x=1$ 处取最大值 2．

如果 x 从 $-\infty$ 增长到 1，则 $y=y(x)$ 的图形下凸．如果 x 从 1 减少到 $-\infty$，则函数图形上凸，$(1, 2)$ 点为拐点．

5. 作出图形，见图 31．

179 $x=\frac{t^2}{t-1}$，$y=\frac{t}{t^2-1}$．

函数 $x(t)$ 对 $-\infty<t<1$，$1<t<+\infty$ 有定义且连续，$x=1$ 为竖直渐近线，由等式 $x(t)=t+1+\frac{1}{t-1}$ 可知 $x=t+1$ 为斜渐近线，一阶导数 $x'(t)=\frac{t(t-2)}{(t-1)^2}$．显然，在区间 $(-\infty, 0)$，$(2, +\infty)$ 上 $x(t)$ 增，在 $(0, 1)$，$(1, 2)$ 上 $x(t)$ 减，当 $t=0$ 时，$x_{\max}=0$，当 $t=2$ 时，$x_{\min}=4$．

函数 $x(t)$ 的图形见图 32．

32

33

31

函数 $y(t)$ 对除 $t=\pm1$ 外的所有 t 有定义，连续．且 $t=-1$，$t=1$ 为渐近线．由于 $y'(t)=-\frac{t^2+1}{(t^2-1)^2}<0$，故 $y(t)$ 对定义域中所有 t 减（见图 33）．

由以上分析可知，$y=y(x)$ 的定义域为 $-\infty<x\leqslant0$，$4\leqslant x<+\infty$，由于当 $t\to\pm\infty$ 时，$x(t)\to\pm\infty$，$y(t)\to+0$，而当 $t\to-1\pm0$ 时，$x(t)\to-\frac{1}{2}$，$y(t)\to\pm\infty$，故 $y=0$，$x=-\frac{1}{2}$ 为两条渐近线．此外，当 $t\to1$ 时，$\frac{y}{x}\to\frac{1}{2}$，$y-\frac{1}{2}x\to-\frac{3}{4}$，故 $y=\frac{x}{2}-\frac{3}{4}$ 为斜渐近线．

求导数

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{t^2+1}{t(t-2)(t+1)^2},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2(t-1)^3(t^3+3t+1)}{t^3(t-2)^3(t+1)^3};$$

可知，当 $t_0\approx-0.32$，$t_1=1$ 时 $y''_{x^2}=0$，且 $x(t_0)\approx-0.07$，$y(t_0)\approx0.37$．

首先在每个区间上分别构造函数图形.

如果 $-\infty < t < -1$, 则 $-\infty < x < -\frac{1}{2}$, $-\infty < y < 0$, $y'_x < 0$, $y''_{x^2} < 0$(见图 34).

如果 $-1 < t \leq 0$, 则 $-\frac{1}{2} < x \leq 0$, $0 \leq y < +\infty$. 当 $-1 < t < t_0$ 时, 二阶导数 $y''_{x^2} > 0$, 且当 $t_0 < t < 0$, $y''_{x^2} < 0$. 因此当 $t = t_0$ 时得到拐点(x_0, y_0), 其中 $x_0 \approx -0.07$, $y_0 \approx 0.37$(见图 35).

假设 $0 \leq t < 1$, 则 $-\infty < x \leq 0$, $-\infty < y \leq 0$, $y'_x > 0$, $y''_{x^2} > 0$(见图 36). 如果 $1 < t \leq 2$, 则 $4 \leq x < +\infty$, $\frac{2}{3} \leq y < +\infty$, $y'_x > 0$, $y''_{x^2} < 0$(见图 37). 最后, 当 $2 \leq t < +\infty$, 则 $x \geq 4$, $0 < y \leq \frac{2}{3}$, $y'_x < 0$, $y''_{x^2} > 0$(见图 38).

35

34

36

37

38

最终的函数图形见图 39 .

39

40

180 $x = t + e^{-t}$, $y = 2t + e^{-2t}$.

函数 $x(t)$, $y(t)$对所有 t 有定义且连续 . 由渐近线定义可知 $x = t$, $y = 2t$ 分别是 $t \to +\infty$时 $x(t)$, $y(t)$的渐近线 . 求导, $x'(t) = 1 - e^{-t}$, $x'(0) = 0$, $x''(t) = e^{-t} > 0$, $y'(t) = 2(1 - e^{-2t})$, $y'(0) = 0$, $y''(t) = 4e^{-2t} > 0$, 对所有 t 成立 . 因此, 当 $t = 0$ 时 $x_{min} = 1$, $y_{min} = 1$. $x(t)$, $y(t)$的图形下凸, 见图 40a, 图 40b .

如果 $-\infty < t < 0$, 则 $1 < x < +\infty$, $1 < y < +\infty$, $y'_x = 2(1 + e^{-t}) > 0$, $y''_{x^2} = -2(e^t - 1) > 0$. 如果 $0 < t < +\infty$, 则 $1 < x < +\infty$, $1 < y < +\infty$, $y'_x > 0$, $y''_{x^2} < 0$.

故函数 $y = y(x)$增, 当 $t < 0$ 时下凸, 当 $t > 0$ 时上凸 .

在点 $x = 1$ 处 $y(x)$取得极小值 1 .

进一步, 当 $t \to +\infty$时, $\frac{y}{x} \to 2$, $y - 2x \to 0$, 因此直线 $y = 2x$ 为 $t \to +\infty$时函数的渐近线(见图 41) .

181 $x = \frac{a}{\cos^3 t}$, $y = a\tan^3 t$ $(a > 0)$.

由于 $x(t)$, $y(t)$已知, 关于 $y(x)$要研究的问题有: 对称性, 极值, 增减性, 凹凸性及渐近线的存在性 .

由于 $x(t) = x(-t)$, $y(t) = -y(-t)$, 故 $y = y(x)$关于 Ox 轴对称 . 又由于 $x(t) = -x(\pi + t)$, $y(t) = y(\pi + t)$, $x\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -x\left(\frac{3\pi}{2} + t\right)$, $y\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = y\left(\frac{3\pi}{2} + t\right)$ $\left(0 < t < \frac{\pi}{2}\right)$, 因此 $y(x)$关于 Oy 轴也对称 .

41

42

因此，要构造整个图形，只须知道 $x>0$，$y\geq 0$，即 $0\leq t<\dfrac{\pi}{2}$ 即可．导数 $y'_x=\sin t>0$，$0<t<\dfrac{\pi}{2}$，因此 $y=y(x)$ 增，且 $x\to+\infty$，$y\to+\infty$ $\left(t\to\dfrac{\pi}{2}-0\right)$．二阶导数 $y''_{x^2}=\dfrac{1}{3a}\cos^5 t\sin^{-1} t>0$ $\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$．因此，对 $0<t<\dfrac{\pi}{2}$ 图形下凸．由于仅当 $t\to\dfrac{\pi}{2}-0$ 时 $x\to+\infty$，$y\to+\infty$，故无竖直渐近线．如果有斜渐近线 $y=kx+b$，则

$$k=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\tan^3 t}{\cos^{-3} t}=1,$$

$$b=\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-0}[y(t)-x(t)]=a\lim_{t\to\frac{\pi}{2}-0}\left(\tan^3 t-\frac{1}{\cos^3 t}\right)=-\infty.$$

因此，没有渐近线．

对于所有 $t(\cos t\neq 0)$，函数图形见图 42．

将下列方程化为参数方程形式，并作图：

182　$x^2+y^2=x^4+y^4$．

显然，图形关于坐标轴对称．只须把 $x>0$，$y\geq 0$ 的部分化为参数方程，令 $y=tx(t\geq 0)$，得

$$x=\sqrt{\frac{1+t^2}{1+t^4}},\quad y=t\sqrt{\frac{1+t^2}{1+t^4}}.$$

图　43

考虑 $x(t)$，$y(t)$的极值问题，求导数 x'，y'：

$$x'(t)=\frac{(1-2t^2-t^4)t}{x(t)(1+t^4)^2},\quad y'(t)=\frac{1+2t^2-t^4}{x(t)(1+t^4)^2}.$$

由此，当 $t=0$ 时 $x(t)$ 取极小值 $1(y=0)$；当 $t=\sqrt{2}-1$ 时 $x(t)$ 取得极大值 $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}}$ $\left(y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$，当 $t=\sqrt{2}+1$ 时 $y(t)$ 取得极大，值为 $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}}$ $\left(x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$．

不难验证，曲线与坐标轴交点处存在切线(见图 43)．

183　$x^2y^2=x^3-y^3$．

令 $y=tx$，得

$$x = \frac{1}{t^2} - t, \quad y = \frac{1}{t} - t^2 \quad (t \neq 0).$$

如果参数 t 在区间$(-\infty,0)$，$(0,+\infty)$内变化，则变量 x 可以取 $-\infty$ 到 $+\infty$ 之间的任何值．因此 $y = y(x)$对所有 x 有定义．

由上面的参数方程可有

$$y = -x^2 - \frac{1}{t} + \frac{1}{t^4}, \quad y^2 = x - t + t^2,$$

据此可得渐近关系：当 $t \to \pm 0$(此时 $x \to +\infty$，$y \to \pm\infty$)，$y^2 \sim x$；当 $t \to \pm\infty$(此时 $x \to \pm\infty$，$y \to -\infty$)，$y \sim -x^2$．

又作变换 $x - y = u$，$x + y = v$，代入方程得$(v^2 - u^2)^2 = 12v^2u + 4u^3$，说明图形关于 $v = 0$ 轴对称，即关于直线 $x + y = 0$ 对称．

计算导数

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t(1+2t^3)}{2+t^3}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2t^3(t^6+7t^3+1)}{(2+t^3)^3} \quad (t \neq 0),$$

可知，当 $t_0 = -\sqrt[3]{2} \approx -1.26$ $\left(x_0 = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2} \approx 1.89;\ y_0 = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{4} \approx -2.38\right)$ 时，两个导数 y'_x，y''_{x^2} 均不存在，而当 $t_2 = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}} \approx -0.79$ $\left(x_2 = \frac{3}{2}\sqrt[3]{4} \approx 2.38;\ y_2 = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{2} \approx -1.89\right)$ 时，$y'_x = 0$．

进一步，当 $t_1 = -\sqrt[3]{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}} \approx -1.90$$(x_1 \approx 2.18;\ y_1 \approx -4.14)$及 $t_3 = -\sqrt[3]{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}} \approx -0.53$$(x_3 \approx 4.14;\ y_3 \approx -2.18)$时，$y''_{x^2} = 0$．

将以上值列表如下：

t	$-\infty < t < t_1$	$t_1 < t < t_0$	$t_0 < t < t_2$	$t_2 < t < t_3$	$t_3 < t < 0$	$0 < t < +\infty$
x	$x_1 < x < +\infty$	$x_0 < x < x_1$	$x_0 < x < x_2$	$x_2 < x < x_3$	$x_3 < x < +\infty$	$-\infty < x < +\infty$
y	$-\infty < y < y_1$	$y_1 < y < y_0$	$y_0 < y < y_2$	$y_3 < y < y_2$	$-\infty < y < y_3$	$-\infty < y < +\infty$
y'_x	$y'_x < 0$	$y'_x < 0$	$y'_x > 0$	$y'_x < 0$	$y'_x < 0$	$y'_x > 0$
y''_{x^2}	$y''_{x^2} < 0$	$y''_{x^2} > 0$	$y''_{x^2} < 0$	$y''_{x^2} < 0$	$y''_{x^2} > 0$	$y''_{x^2} < 0$

画出函数的图形，见图 44．

44

45

184　**画出** $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{ch}^2 y = 1$ **的图形 .**

将 x **换为** $-x$, y **换为** $-y$, **形式不变, 因此图形关于坐标轴对称 .**

如果 $x > 0$, $y > 0$, **则方程可化为** $\operatorname{sh} x = \operatorname{ch} y$, **由此** $x = \ln(\operatorname{ch} y + \ \ 1 + \operatorname{ch}^2 y)$.

设有渐近线 $y = kx + b$, **则**

$$k = \lim_{y \to +\infty} \frac{x(y)}{y} = 1; \quad b = \lim_{y \to +\infty} (x(y) - y) = 0 .$$

求导数

$$x'_y = \frac{\operatorname{sh} y}{1 + \operatorname{ch}^2 y},$$

可知函数 $x = x(y)$ **当** $y > 0$ **时增, 在** $y = 0$ **点达到极小, 值为** $\ln(1 + \ \ 2)$ **. 进一步**

$$x''_{y^2} = \frac{2\operatorname{ch} y}{(1 + \operatorname{ch}^2 y)^{\frac{3}{2}}} > 0,$$

可知当 $y > 0$ **时图形下凸 . 根据对称性可以作出其图形, 见图** 45 .

画出下列极坐标形式(φ, ρ) $(\rho \geq 0)$ **的函数图形:**

185　$\rho = a \dfrac{\operatorname{th}\varphi}{\varphi - 1}$, **其中** $\varphi > 1$ $(a > 0)$.

函数 $\rho(\varphi)$ **作为初等函数, 连续 . 由于** $\lim\limits_{\varphi \to 1+0} \rho(\varphi) = +\infty$, **故** $\varphi = 1$ **为渐近线 . 又** $\lim\limits_{\varphi \to +\infty} \rho(\varphi) = 0$, **曲线以螺线方式趋于极点 .**

求导

$$\rho'_\varphi = a \left(\frac{1}{\operatorname{ch}^2 \varphi \cdot (\varphi - 1)} - \frac{\operatorname{th}\varphi}{(\varphi - 1)^2} \right);$$

由于当 $\varphi > 1$ **时,** $\varphi - 1 < \dfrac{1}{2} \operatorname{sh} 2\varphi$, **故** $\rho'_\varphi < 0$, **从而函数** $\rho(\varphi)$ **递减(见图** 46) .

47

46

186　$\varphi = \arccos \dfrac{\rho - 1}{\rho^2}$.

函数的定义域为

$$|\rho - 1| \leq \rho^2,$$

因此

$$\rho \;= \frac{-1+\;5}{2} \leq \rho < +\infty\ .$$

φ在边界点的极限值为:

$$\lim_{\rho\to\rho_1+0}\varphi(\rho) = \pi;\quad \lim_{\rho\to+\infty}\varphi(\rho) = \frac{\pi}{2}\ .$$

由于 $\rho-1\neq\rho^2$，故函数 $\varphi(\rho)$为正，无零点 .

求该函数的导数

$$\varphi'_\rho = \frac{\rho-2}{\left(1-\frac{1}{\rho}-\frac{1}{\rho^2}\right)^2},$$

可知，在 $\rho=2$ 点取得极小值 $\arccos\frac{1}{4}$. 在点 $\rho=\rho$ 导数不存在，但函数在该点取得最大值 π，当 $\rho<\rho<2$ 时函数递减，当 $\rho>2$ 时函数递增 .

由 φ在边界点的值，可知有竖直渐近线 . 求出它到极点的距离

$$a = \lim_{\rho\to\infty}\rho\cos\varphi(\rho) = \lim_{\rho\to\infty}\rho\frac{\rho-1}{\rho^2} = 1\ .$$

从而作出图形，见图 47 .

作出下列曲线族的图形(a为参变量):

187 $y = x\pm\;a(1-x^2)$.

分两种情况: 1) $a>0$, 2) $a<0$.

1) $a>0$. 函数定义域 $1-x^2\geq0$，即 $|x|\leq1$. 函数的零点: $x_{1,2} = \pm\;\frac{a}{1+a}$，当 $-\;\frac{a}{1+a}<x<1$ 时,函数 $y = x+\;a(1-x^2)$为正，当 $-1<x<\;\frac{a}{1+a}$时 y 为负，而当 $-1<x<\;\frac{a}{1+a}$时，函数 $y = x-\;a(1-x^2)$为负，当 $\frac{a}{1+a}<x<1$ 时 y 为正 .

求导数

$$y' = 1\pm\frac{ax}{a(1-x^2)}\ .$$

可知，函数 $y = x+\;a(1-x^2)$在 $x = \;\frac{1}{a+1}$达到极大，值为 $\;a+1$，而函数 $y = x-\;a(1-x^2)$在 $x = -\;\frac{1}{a+1}$达到极小，值为 $-\;a+1$.

点 $x=\pm1$ 是这些分支的交点 .

由二阶导数

$$y'' = \pm \frac{a}{(1 - x^2)\sqrt{a(1 - x^2)}}$$

可知, 函数的第一分支上凸, 而第二分支下凸(见图 48) .

49

48

当 a从 0 变到 $+\infty$时, 可以得到一族椭圆, 均过(- 1, - 1) , (1, 1)点(图 49) .

2) $a<0$. 函数定义域为 $-|x|>1$. 渐近线 $y=k_1x+b$, $y=k_2x+b$, 其中 $k_{1,2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\pm\sqrt{-a(x^2-1)}}{x}=1\pm\sqrt{-a}$, $b=0$.

画出图形为图 50 .

50

188　$y=xe^{-\frac{x}{a}}$.

分两种情况: 1) $a>0$, 2) $a<0$.

1) $a>0$. 函数对 $x>0$ 为正, 对 $x<0$ 为负 . 求导得

$$y' = e^{-\frac{x}{a}}\left(1 - \frac{x}{a}\right) .$$

可知函数在 $x=a$处达极大, 值为$\frac{a}{e}$. 进一步, 由

$$y'' = e^{-\frac{x}{a}}\left(\frac{x}{a^2} - \frac{2}{a}\right)$$

可知, 点 $x=2a$为拐点, 当 $x<2a$时函数上凸, 当 $x>2a$时下凸 . 又由于当 $x\to+\infty$时, $xe^{-\frac{x}{a}}\to0$, 因此 $y=0$ 是 $x\to+\infty$时的渐近线 .

2) $a<0$. 易知, 只要将 y换为 $-y$, x换为 $-x$, 就是第一种情形 .

画出曲线族, 见图 51, 图 52 .

51　　52

练 习 题

画出下列函数的图形:

404 1) $f(x) = \sup\{\sin x, \cos x, \tan x\}$; 2) $f(x) = \inf\{\sin x, \cos x, \tan x\}$.

405 $x = t\cos t,\ y = t\sin t,\ z = t$. **406** $x = a\cos t,\ y = a\cos 2t,\ z = \cos 3t$.

确定满足下列方程的点的几何位置:

407 $(1 - x^2 - |1 - x^2|)^2 + y^2 = 0$.

408 $(2 - x^2 - |1 - x^2| - |1 - y| - |y|)(2 - y^2 - |1 - y^2| - |1 - x| - |x|) = 0$.

409 $x^2 + y^2 + 9 - |x^2 + y^2 - 1| - |2 - y| - |y + 3| - |x| - |5 - x| = 0$.

410 $2 - y - |1 - x - y| - |1 + x - y| - |y| = 0$.

12 函数极值的补充题

189 证明: 如果函数 $f(x)$ 非负, 则函数 $F(x) = cf^2(x)\ (c > 0)$ 取得极值的点与 $f(x)$ 相同.

不妨设 $f(x)$ 在 x_0 点取得极大, 则v $\delta > 0$, 使对所有 x, $0 < |x - x_0| < \delta$ 有不等式 $f(x) < f(x_0)$.

由于 $f(x) \geq 0$, **且** $c > 0$, **因此有**

$$cf^2(x) < cf^2(x_0), \text{即 } F(x) < F(x_0).$$

从而 $F(x)$ 在 x_0 点达到极大值. 极小值的情况类似可得.

190 证明: 如果当 $-\infty < x < +\infty$ 时, 函数 $\varphi(x)$ 严格单调增加, 则函数 $f(x)$ 与 $\varphi(f(x))$ 有完全相同的极值点.

设 $f(x)$ 在 x_0 取得极大值, 则对邻域 $0 < |x - x_0| < \delta$ **中的一切 x 有**

$$f(x) < f(x_0) \equiv f_0.$$

由于函数 $\varphi(x)$ 严格单调增加, 由不等式 $f < f_0$ 可得不等式

$$\varphi(f) < \varphi(f_0),$$

即得证. 相似地, 假设 $\varphi(f(x))$ 在 x_0 点达到极大, 则函数 $f(x)$ 也在该点达到极大.

191 在以什么数为底时, 一个数等于它的对数?

设 y 为对数的底, 问题化为

$$\log_y x = x \quad (x > 0,\ y > 0,\ y \neq 1).$$

由此 $y = x^{\frac{1}{x}}$.

函数 y 的研究见例题 174. **可知, y 不超过其最大值** $y_{\max} = e^{\frac{1}{e}}$, **即对所有** $y\left(0 < y < e^{\frac{1}{e}},\ y \neq 1\right)$, **这样的数都存在.**

192 给出一圆弓形, 不超过半圆, 试求最大面积的内接矩形.

设矩形高 x, 宽 $2y$. 如果用 2α表示弓形的弧度, 而 2φ为矩形两端点所张的角度, 则有 $y = R\sin\varphi$, $x = OE - OB = R(\cos\varphi - \cos\alpha)$(见图 53). 矩形面积为

$$S = 2xy = 2R^2\sin\varphi(\cos\varphi - \cos\alpha).$$

53

令其导数为 0, 有

$$S'(\varphi) = 2R^2(2\cos^2\varphi - \cos\varphi\cos\alpha - 1) = 0,$$

解得

$$\cos\varphi = \frac{\cos\alpha + \cos^2\alpha + 8}{4}, \quad \cos\varphi = \frac{\cos\alpha - \cos^2\alpha + 8}{4}.$$

弧度 φ 无意义, 舍去.

由于 $S'(\varphi - \varepsilon) > 0$; $S'(\varphi + \varepsilon) < 0$($\varepsilon > 0$ 足够小), 故当

$$\cos\varphi = \frac{\cos\alpha + \cos^2\alpha + 8}{4}$$

时函数 $S(\varphi)$最大.

193　在椭圆$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$内有内接矩形, 边与坐标轴平行, 求其最大面积.

设边长为 $2x$, $2y$, 则面积 $S = 4xy$, 而且 x, y 是椭圆上点的坐标. 为简单起见, 将椭圆写成参数方程

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t.$$

则 $S = 2ab\sin 2t$, 由此 $S_{\max} = 2ab$, 此时 $t = \frac{\pi}{4}$, $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$.

194　过椭圆$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$上的点 $M(x, y)$作切线, 与坐标轴交成三角形, 求三角形的最小面积.

过点(x_0, y_0)椭圆的切线为

$$\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1,$$

由此可知, 切线与坐标轴的截距为$\frac{a^2}{x_0}$及$\frac{b^2}{y_0}$.

因此, 三角形的面积为 $S = \frac{a^2 b^2}{2x_0 y_0}$.

如果写出椭圆的参数方程, 则 $S = \frac{ab}{\sin 2t}$, 因此当 $t = \frac{\pi}{4}$时, $S_{\min} = ab$; 这时 $x_0 = \frac{a}{2}$,

$y_0 = \dfrac{b}{2}$.

195 水渠的横截面为等腰梯形 . 如果渠中流水的横截面积为 S, 水高为 h, 如何选择水渠侧边的倾角 φ, 使“湿周长”为最小 ?

如图 54, **“湿周长”定义为**

$$P = a + \frac{2h}{\sin\varphi}. \qquad (1)$$

图 54

水截面的面积为

$$S = h(a + h\cot\varphi) . \qquad (2)$$

由公式(1), (2)**有**

$$P = \frac{S}{h} - h\cot\varphi + \frac{2h}{\sin\varphi}.$$

函数 P **的导数为**

$$h\ \frac{1}{\sin^2\varphi} - \frac{2\cos\varphi}{\sin^2\varphi} ,$$

可知当 $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$**时函数** P **取得最小值** .

196 具有面积 S 的封闭回路, 其“弯曲度”是指该回路的周长与等面积圆的圆周长之比 .

等腰梯形 $ABCD(AD /\!/ BC)$, 已知底 $AD = 2a$, 底角 $BAD = \alpha$, 问其最小“弯曲度”是什么形式 ?

设 Π 为梯形的弯曲度 . 则由定义, 有

$$\Pi = \frac{L}{2\pi S},$$

其中

$$S = \frac{BC + 2a}{2} AB\sin\alpha; \qquad L = 2AB + BC + 2a .$$

由于

$$2a - BC = 2AB\cos\alpha, \qquad (1)$$

设 $AB = x$, **则有**

$$\Pi(x) = \frac{2a + x(1 - \cos\alpha)}{\pi\ (2a - x\cos\alpha) x\sin\alpha} .$$

研究 $\Pi(x)$ 的极值, 可知它取得最小的点是

$$x = a\sec^2\frac{\alpha}{2} .$$

由(1)**得** $BC = 2a\tan^2\dfrac{\alpha}{2}$, **由于梯形高的一半是** $r = \dfrac{x}{2}\sin\alpha$, **等于点** $O(a, r)$ **到** AB **的距离**,

因此梯形可以改写成半径为 r 的圆周 .

56

55

197　从半径为 R 的圆中截去怎样的扇形, 可以使余下部分卷起的漏斗容积最大 ?

设 α为余下扇形的中心角, 则锥面所围立体的体积是

$$\frac{R^3}{24\pi^2}\alpha^2 \quad 4\pi^2 - \alpha^2 .$$

研究此 α的函数的极值, 可知达到最大值的点是

$$\alpha = 2\pi \quad \frac{2}{3} .$$

198　两船沿直线以速度 u, v 匀速航行, 直线夹角为 θ. 如果在某时刻它们离交汇点的距离分别为 a, b, 试确定二船的最近距离 .

由余弦定理(见图 56)

$$r^2 = (a + ut)^2 + (b + vt)^2 - 2(a + ut)(b + vt)\cos\theta,$$

其中 r 为某时刻 t 时二船的距离 .

研究 $r^2(t)$的极值, 有

$$r'(t_0) = 0; \quad t_0 = \frac{(bu + av)\cos\theta - au - bv}{u^2 - 2uv\cos\theta + v^2} .$$

将 t_0 代入 $r^2(t)$, 有

$$r_{\min} = \frac{|ub - va|\sin\theta}{u^2 - 2uv\cos\theta + v^2} .$$

如果 u换成 $-u$, 则由恒等式

$$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta, \quad \cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$$

有

$$r_{\min} = \frac{|ub + va|\sin\theta}{u^2 - 2uv\cos\theta + v^2} .$$

199　点光源放置在两不相交球(半径为 R, r, $R > r$)的球心连线上, 且在球外 . 问点光源置于何位置时, 才可使两球表面照亮面积之和最大 ?

两球表面被照亮面积视为距离 x 的函数, 见图 57, 有

$$S = 2\pi R(R - x_0) = 2\pi R^2 \quad 1 - \frac{R}{x} ;$$

$$S_1 = 2\pi r^2 \quad 1 - \frac{r}{a - x} \qquad (a \geq r + x),$$

其中 a为二球心距离 .

研究函数 $f = S + S_1$ 作为 x 的函数的极值，可得

$$a \geq r + x = r + \frac{a}{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

因此 $a \geq r + R\frac{R}{r}$.

如果导数 $f'(x) < 0$，则 $f(x)$ 的极大值取在 $x_1 = a - r$ 处，此时有不等式

$$a < r + R\frac{R}{r}.$$

57　　58　　59

200　半径为 a 的圆桌中心上方放置电灯，问灯距桌面的高度为多少时才可使桌子边的照明度最大？

照明度 I 是

$$I = k\frac{\sin\varphi}{r^2},$$

其中 r 为光源到观测点的距离，k 为常数，φ 为夹角，见图 58．因而

$$I(x) = \frac{kx}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}},$$

由此可求出使 $I(x)$ 达到最大的高度 x_0：$x_0 = \frac{a}{2}$.

201　在宽为 am 的河的一侧垂直地修建宽为 bm 的渠道．试问能驶入此渠的船的最大长度是多少？

由图 59，船的长度 l 为

$$\frac{b}{\sin\varphi} + \frac{a}{\cos\varphi}.$$

研究函数 l 的极值，可得其取得极值的点是

$$\varphi = \arctan\sqrt[3]{\frac{b}{a}}.$$

此时，船的最大可能长度是 $(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$ m．

202　船行一昼夜，其费用由两部分组成：一部分是常数 a，另一部分与船速的三次方成正比．试问速度 v 多大时航行最经济？

假设在 T 昼夜内船行 Skm．船的费用为

$$Ta + kTv^3,$$

其中 k 为比例系数 . 由于 $T=\dfrac{S}{v}$, 故

$$R = \frac{Sa}{v} + kSv^2,$$

由此可求得费用最小的行船速度为

$$v = \sqrt[3]{\frac{a}{2k}}.$$

203 质量为 P 的重物, 置于粗糙的水平面上, 受力后平移 . 假设摩擦系数为 k, 问当力与水平线夹角多大时, 所需力最小 ?

将力投影到水平方向, 由题设条件(见图 60)有

$$T = F_P k = (P - F\sin\varphi) k = F_T = F\cos\varphi,$$

得

$$F = \frac{kP}{k\sin\varphi + \cos\varphi}.$$

研究函数 $F(\varphi)$的极值, 可得, 当 $\varphi = \arctan k$ 时所需力最小 .

60 61

204 在半径为 a 的半球形茶杯中，放置一长 $l>2a$ 的细棒．确定棒的平衡位置．

首先求出棒对杯底的势能 $\Pi=mgh$，其中 $h=\frac{l}{2}\sin\phi+y$ 是棒对杯底的质心，见图 61．

进一步，因为 $\tan\phi=\frac{a-y}{a-x}=\frac{a+x}{a-x}$，得 $x=-a\cos2\phi$．由半圆的方程，得

$$y=a(1-\sin2\phi).$$

因此 $\Pi=mg\left(\frac{1}{2}\sin\phi+a(1-\sin2\phi)\right)$．由于细棒会趋向于最小势能的位置而平衡，因此只须求出 ϕ，使势能达到最小 Π_{min}，此时

$$\cos\phi=\frac{l+\sqrt{l^2+128a^2}}{16a}.$$

由于 $\cos\phi\leq1$，故只有当 $l\leq4a$ 时能有平衡位置，而当 $l>4a$ 时不可能平衡．

第 3 章　不 定 积 分

1　最简单的不定积分

1.1　不定积分的定义

定义　**函数** $F: X \to \mathrm{R}$, X　R , **称为函数** $f: X \to \mathrm{R}$ **的一个原函数,如果函数** F **在** X **上连续,可导且其导函数在区间** X **的除去可数集外所有点上均等于** $f(x)$.

如果 F **可导,其导函数在区间** X **上的每一点均等于** $f(x)$, **则函数** F **称为函数** f **的精确原函数** .

函数 f **在区间** X **上的原函数的全体称为** f **的不定积分,记作** $\int f(x)\mathrm{d}x$. **如果** F **是函数** f **在区间** X **上的任意一个原函数,则**

$$\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

式中 C **为任意常数** .

1.2　不定积分的基本性质

1) $\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x;$

2) $\int \mathrm{d}F(x) = F(x) + C;$

3) $\int \lambda f(x)\mathrm{d}x = \lambda\int f(x)\mathrm{d}x, \lambda \in R \setminus \{0\};$

4) $\int (f(x) + g(x))\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$.

1.3　最简单积分表:

Ⅰ. $\int \mathrm{d}x = x + C$.

Ⅱ. $\int x^n \mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$.

Ⅲ. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x| + C$.

Ⅳ. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \begin{matrix} \arctan x + C, \\ -\operatorname{arccot} x + C. \end{matrix}$

Ⅴ. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2 - 1} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| + C$.

Ⅵ. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{1 - x^2} = \begin{matrix} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C. \end{matrix}$

Ⅶ. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm 1} \right| + C$.　Ⅷ. $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1;$

$$\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C.$$

Ⅸ. $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$.　Ⅹ. $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$.

Ⅺ. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\cot x + C$.　Ⅻ. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x + C$.

ⅩⅢ. $\int \mathrm{sh}\, x \mathrm{d}x = \mathrm{ch}\, x + C$.　ⅩⅣ. $\int \mathrm{ch}\, x \mathrm{d}x = \mathrm{sh}\, x + C$.

ⅩⅤ. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{ch}\, x + C$.　ⅩⅥ. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\, x + C$.

1.4　积分的基本方法

1) **引入新变量法**.如果 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$,则 $\int f(u)\mathrm{d}u = F(u) + C$.

2) **代入法**.如果 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$,假设

$$x = \varphi(t),\quad \varphi: Y \to X,$$

式中 φ 及其导函数 φ' 为连续的,则得

$$\int f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t = F[\varphi(t)] + C.$$

3) **分部积分法**.如果 u 和 v 为可微函数,且函数 uv 存在原函数,则

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u.$$

1　证明,如果 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x) + C$,则

$$\int f(ax + b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax + b) + C,\quad a \neq 0.$$

我们有

$$f(ax + b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}f(ax + b)\mathrm{d}(ax + b),$$

从而,利用引入新变量的方法,得到

$$\int f(ax + b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f(ax + b)\mathrm{d}(ax + b) = \frac{1}{a}\int f(u)\mathrm{d}u = \frac{1}{a}F(u) + C,$$

这里 $u = ax + b$.

例如,利用积分表得到

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C;$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C;$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2\pm 1}}=\ln\left|\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2\pm 1}\right|+C_0$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C,\quad C=C_0-\ln|a|;$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$

利用最简单的积分表,计算下列积分:

2 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$.

我们有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}=-\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}=-\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}$$

$$=-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C,\quad x\neq -\frac{\pi}{2}+2k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

3 $\displaystyle\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^8-2}$.

因为

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C,$$

根据例 1,

$$\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^8-2}=\frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}(x^4)}{(x^4)^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right|+C.$$

4 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}$.

当 $x\neq 0$ **时,有**

$$\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}=\frac{\mathrm{d}x}{x|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{\operatorname{sgn}x\,\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}},$$

从而

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}} = -\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}} = -\ln\left|\frac{1}{|x|} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right| + C$$

$$= -\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right| + C.$$

5 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$.

因为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{\operatorname{sgn}x\,\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}},\ |x| > 1,$$

所以

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = -\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{|x|}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{|x|}\right)^2}} = -\arcsin\frac{1}{|x|} + C.$$

6 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$.

利用$|x| = x\operatorname{sgn}x$,**有**

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{|x|^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\operatorname{sgn}x}{2}\int\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{\operatorname{sgn}x}{2}\cdot 2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

解题中对 x **加了限制条件** $x \neq 0$.**但是,直接验证可知对所有** $x \in \mathrm{R}$,**函数**$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$**是函数**$\frac{1}{(x^2+1)^{3/2}}$**的原函数** .

7 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}}$.

由不等式 $x(1+x) > 0$ **得知被积函数的定义域为** $X = \{x: x > 0 \vee x < -1\}$**当** $x > 0$ **时,有**

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1+x)}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}\sqrt{1+x}} = 2\int \frac{\mathrm{d}(\sqrt{x})}{\sqrt{1+(\sqrt{x})^2}} = 2\ln(\sqrt{x} + \sqrt{1+x}) + C.$$

类似地,当 $1+x < 0$ **时,有**

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-x-1}\sqrt{-x}}=-2\int\frac{d(\sqrt{-x-1})}{\sqrt{1+(\sqrt{-x-1})^2}}$$

$$=-2\ln(\sqrt{-x-1}+\sqrt{-x})+C.$$

或者,综合两种情况,有

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}=2\operatorname{sgn}x\ln\left(\sqrt{|x|}+\sqrt{|x+1|}\right)+C,\quad x\notin[-1,0].$$

8 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

被积函数在 $0<x<1$ **上有定义,所以**

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}=\int\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}=2\int\frac{d(\sqrt{x})}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}=\arcsin\sqrt{x}+C.$$

9 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$.

我们有

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}=\int\frac{dx}{e^x\sqrt{e^{-2x}+1}}=-\int\frac{d(e^{-x})}{\sqrt{e^{-2x}+1}}$$

$$=-\ln(e^{-x}+\sqrt{e^{-2x}+1})+C=x-\ln(1+\sqrt{1+e^{2x}})+C.$$

10 $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x\,dx}{\sqrt{a^3\sin^2x+b^2\cos^2x}}$.

因为 $\sin x\cos x\,dx=\dfrac{d(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)}{2(a^2-b^2)}$**,所以**

$$\int\frac{\sin x\cos x\,dx}{\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}}=\frac{1}{a^2-b^2}\int\frac{d(a^2\sin^2x+b^2\cos^2x)}{2\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}}$$

$$=\frac{1}{a^2-b^2}\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}+C,\quad a^2\neq b^2.$$

11 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}$.

我们有

$$\frac{dx}{\sin x}=\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{dx}{2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{d\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}},$$

从而

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{d\tan\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C,\quad x\neq k\pi,\quad k\in\mathbf{Z}.$$

12 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$.

与上例类似得到

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\int \frac{\mathrm{d}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C,\quad x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in \mathbf{Z}.$$

13 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh}x}$.

变换被积表达式,当 $x\neq 0$ 时,得到

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh}x}=\int \frac{\mathrm{d}x}{2\operatorname{sh}\frac{x}{2}\operatorname{ch}\frac{x}{2}}=\int \frac{\mathrm{d}x}{2\operatorname{th}\frac{x}{2}\operatorname{ch}^2\frac{x}{2}}=\int \frac{\mathrm{d}\left(\operatorname{th}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{th}\frac{x}{2}}=\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|+C.$$

14 $\int \frac{\operatorname{sh}x}{\sqrt{\operatorname{ch}2x}}\mathrm{d}x$.

显然

$$\int \frac{\operatorname{sh}x}{\sqrt{\operatorname{ch}2x}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}(\sqrt{2}\operatorname{ch}x)}{\sqrt{(\sqrt{2}\operatorname{ch}x)^2-1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}\operatorname{ch}x+\sqrt{\operatorname{ch}2x})+C.$$

15 $\int \frac{\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x\mathrm{d}x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4x+\operatorname{ch}^4x}}$.

我们有

$$\frac{\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x\mathrm{d}x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4x+\operatorname{ch}^4x}}=\frac{\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{(\operatorname{sh}^2x+\operatorname{ch}^2x)^2+(\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x)^2}{2}}}$$

$$=\frac{\operatorname{sh}2x\mathrm{d}x}{2\sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{ch}^22x+\frac{1}{2}}}=\frac{\mathrm{d}(\operatorname{ch}2x)}{2\sqrt{2}\sqrt{\operatorname{ch}^22x+1}}.$$

从而

$$\int \frac{\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x\mathrm{d}x}{\sqrt{\operatorname{sh}^4x+\operatorname{ch}^4x}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{\mathrm{d}(\operatorname{ch}2x)}{\sqrt{\operatorname{ch}^22x+1}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\operatorname{ch}2x+\sqrt{\operatorname{ch}^22x+1}\right)+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left(\frac{\operatorname{ch}2x}{\sqrt{2}}+\sqrt{\operatorname{ch}^4x+\operatorname{sh}^4x}\right)+C.$$

16 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^2x\sqrt[3]{\operatorname{th}^2x}}$.

显然

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^2x\sqrt[3]{\operatorname{th}^2x}}=\int \operatorname{th}^{-\frac{2}{3}}x\mathrm{d}(\operatorname{th}x)=3\sqrt[3]{\operatorname{th}x}+C.$$

计算下列积分:

17 $\int \ 1 - \sin 2x\mathrm{d}x$.

因为

$$1 - \sin 2x = \ (\cos x - \sin x)^2 = |\cos x - \sin x| = (\cos x - \sin x)\mathrm{sgn}(\cos x - \sin x),$$

记 $I(x) = \int \ 1 - \sin 2x\mathrm{d}x$, **得到**

$$I(x) = \begin{cases} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -(\sin x + \cos x) + C_{-1}, & \frac{\pi}{4} - 2\pi \leq x < \frac{\pi}{4} - \pi, \\ \sin x + \cos x + C_0, & \frac{\pi}{4} - \pi \leq x < \frac{\pi}{4}, \\ -(\sin x + \cos x) + C_1, & \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{4} + \pi, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (-1)^n(\sin x + \cos x) + C_n, & \frac{\pi}{4} + (n-1)\pi \leq x < \frac{\pi}{4} + n\pi, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

因为原函数是连续的,所以必须满足等式

$$I \ \frac{\pi}{4} + k\pi \ = I \ \frac{\pi}{4} + k\pi - 0 \ , \quad k \in \mathbf{Z},$$

即

$$(-1)^{k+1}(\sin x_k + \cos x_k) + C_{k+1} = \lim_{x \to x_k - 0}(-1)^k(\sin x + \cos x) + C_k,$$

这里

$$x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z} \ .$$

从这里导出等式 $- \ 2 + C_{k+1} = \ 2 + C_k$.**当** $k = 0$ **时,得到** $C_1 = 2 \ 2 + C_0$; **进一步,当** $k = 1$ **时,得到** $C_2 = 2 \ 2 + C_1 = 2 \cdot 2 \ 2 + C_0$.**运用数学归纳法可以建立** $C_n = 2 \ 2n + C$, **这里** $C = C_0$ **为任意常数** .

最后,把不等式 $\frac{\pi}{4} + (n-1)\pi \leq x < \frac{\pi}{4} + n\pi$ **变形为**

$$n \leq \frac{x - \frac{\pi}{4} + \pi}{\pi} < n + 1,$$

求得

$$n = \ \frac{x - \frac{\pi}{4} + \pi}{\pi} \ .$$

这样

$$\int\sqrt{1-\sin 2x}\,dx=(-1)^{\left[\frac{x-\frac{\pi}{4}+\pi}{\pi}\right]}(\sin x+\cos x)+2\sqrt{2}\left[\frac{x-\frac{\pi}{4}+\pi}{\pi}\right]+C.$$

18 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}$.

变换被积表达式,得到

$$I(x)=\int\frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}=\int\frac{dx}{(\tan^2 x+2)\cos^2 x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}+C_n,$$

此处

$n\pi-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}+n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$.**根据原函数的连续性,应有**

$$I\left(\frac{\pi}{2}+n\pi-0\right)=I\left(\frac{\pi}{2}+n\pi+0\right),\quad n\in\mathbb{Z},$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+C_n=-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}+C_{n+1}.$$

由此得到 $C_{n+1}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}+C_n$ **或者** $C_n=\frac{n\pi}{\sqrt{2}}+C$, **这里** $C=C_0$.**因为** $n<\frac{2x+\pi}{2\pi}<n+1$, $n\in\mathbb{Z}$,**所以** $n=\left[\frac{2x+\pi}{2\pi}\right]$.**从而**

$$I(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[\frac{2x+\pi}{2\pi}\right]+C,\quad x\neq\frac{\pi}{2}+n\pi;$$

$$I\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+n\pi}I(x)$$

在R **上是精确原函数** .

19 $\displaystyle\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx$.

根据等式

$$\frac{x^2-1}{x^4+1}dx=\frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx=\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2},$$

应有

$$\int\frac{x^2-1}{x^4+1}dx=\int\frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{x^2-x\sqrt{2}+1}{x^2+x\sqrt{2}+1}+C.$$

20 $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x$.

当 $x\neq 0$ 时,有

$$\frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x = \frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{x^2+\dfrac{1}{x^2}}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2}.$$

从而

$$I(x) = \int \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{2}} + \begin{cases} C_{-1}, & \text{当 } x<0, \\ C_1, & \text{当 } x>0. \end{cases}$$

根据定义,原函数应当是连续的,从而,$I(-0)=I(+0)$,即 $\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}+C_{-1} = -\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}+C_1$.如果找到 $C_{-1} = -\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}+C$, $C_1 = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}+C$,其中 C 为任意常数,再令 $I(0)=C$,则条件 $I(-0)=I(+0)=I(0)$ 将得到满足,而所定义的积分可写成如下形式

$$I(x) = \int \frac{x^2+1}{x^4+1}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\operatorname{sgn}x + C, \quad x\neq 0,$$

$$I(0) = \lim_{x\to 0} I(x).$$

21 $\displaystyle\int \frac{[x]}{x^{\lambda+1}}\mathrm{d}x$, $\lambda\in\mathbf{R}$, $x\geq 1$. (1)

考虑 $\lambda\neq 0$ 的情形.设 $[x]=n$,则 $n\leq x<n+1$,对于缩小在半开半闭区间 $[n,n+1)$, $n\in\mathbf{N}$ 上的原函数 $x\mapsto I(x)$,得到

$$I(x) = \int \frac{n\,\mathrm{d}x}{x^{\lambda+1}} = -\frac{n}{\lambda x^{\lambda}} + C_n. \tag{2}$$

由原函数的连续性得 $I(n)=I(n-0)$,即 $-\dfrac{n}{\lambda n^{\lambda}}+C_n = -\dfrac{n-1}{\lambda n^{\lambda}}+C_{n-1}$ 或者 $C_n = \dfrac{1}{\lambda n^{\lambda}}+C_{n-1}$, $n\in\mathbf{N}$.由此依次可得

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{\lambda}+C_0 = \frac{1}{\lambda}+C, \quad \text{其中 } C_0 = C, \\ C_2 &= \frac{1}{\lambda 2^{\lambda}}+C_1 = \frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda 2^{\lambda}}+C, \\ &\cdots\cdots \\ C_n &= \frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda 2^{\lambda}}+\cdots+\frac{1}{\lambda n^{\lambda}}+C. \end{aligned} \tag{3}$$

由于 $n=[x]$,由(2)式和(3)式,最终可得

$$\int \frac{[x]}{x^{\lambda+1}}\mathrm{d}x = -\frac{[x]}{\lambda x^{\lambda}} + \frac{1}{\lambda}\left(1+\frac{1}{2^{\lambda}}+\frac{1}{3^{\lambda}}+\cdots+\frac{1}{[x]^{\lambda}}\right)+C.$$

现在假设 $\lambda=0$.则对于 $x\in[n, n+1)$, $n\in\mathrm{N}$, 得到

$$I(x)=\int\frac{n}{x}\mathrm{d}x = n\ln x + C_n .$$

由于原函数的连续性,应成立等式 $I(n)=I(n-0)$.由此,类似于上面考虑过的情况,得到

$$C_n = -\ln2-\ln3-\cdots-\ln n + C .$$

而由于 $n=[x]$,则

$$\int\frac{[x]}{x}\mathrm{d}x = [x]\ln x-\ln2-\ln3-\cdots-\ln[x]+C=[x]\ln x-\ln([x]!)+C .$$

这样

$$\int\frac{[x]}{x^{\lambda+1}}\mathrm{d}x = \begin{cases} -\dfrac{[x]}{\lambda x^{\lambda}}+\dfrac{1}{\lambda}\quad 1+\dfrac{1}{2^{\lambda}}+\dfrac{1}{3^{\lambda}}+\cdots+\dfrac{1}{[x]^{\lambda}}\quad + C, & \text{当 } \lambda\neq 0, \\ [x]\ln x-\ln([x]!)+C, & \text{当 } \lambda=0 . \end{cases}$$

找到的原函数不是精确原函数.事实上,精确原函数在其定义域内的每一点可微,其导数等于被积函数.然而被积函数具有可数个第一类间断点,因而不可能是导数值.

22 $\int \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x,\ x\in(0,1]$.

令$\dfrac{1}{x}=t$,则 $x=\dfrac{1}{t^2}$及 $\mathrm{d}x=-\dfrac{2\mathrm{d}t}{t^3}$.当 $x\in(0,1]$时,有 $t\in[1,+\infty)$.在此变换下得到积分

$$2\int\frac{[t]\mathrm{d}t}{t^3} .$$

根据上一例的结果(假设 $\lambda=2$)有

$$2\int\frac{[t]}{t^3}\mathrm{d}t = -\frac{[t]}{t^2}+1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{[t]^2}+C .$$

返回到原来的变量,有

$$\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{x}\,x+1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{\frac{1}{x}^{2}}+C,$$

其中 $x\in(0,1]$.

应用各种方法,计算积分:

23 $\int x(1-x)^{10}\mathrm{d}x$.

应用显然的恒等式 $x=1-(1-x)$,得到

$$\begin{aligned}\int x(1-x)^{10}\mathrm{d}x &= \int(1-x)^{10}\mathrm{d}x-\int(1-x)^{11}\mathrm{d}x \\ &= -\int(1-x)^{10}\mathrm{d}(1-x)+\int(1-x)^{11}\mathrm{d}(1-x) \\ &= -\frac{1}{11}(1-x)^{11}+\frac{1}{12}(1-x)^{12}+C .\end{aligned}$$

24 $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1-x)^{100}}\,dx$.

在点 $x=1$ 的邻域,将函数 $x\to x^2$ 按泰勒公式展开,得到

$$x^2=(1-x)^2-2(1-x)+1.$$

从而

$$\begin{aligned}\int\frac{x^2\,dx}{(1-x)^{100}}&=\int\frac{(1-x)^2-2(1-x)+1}{(1-x)^{100}}\,dx\\&=\int\frac{dx}{(1-x)^{98}}-2\int\frac{dx}{(1-x)^{99}}+\int\frac{dx}{(1-x)^{100}}\\&=\frac{1}{97(1-x)^{97}}-\frac{1}{49(1-x)^{98}}+\frac{1}{99(1-x)^{99}}+C,\quad x\neq1.\end{aligned}$$

25 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.

将分母有理化,得到

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}&=\frac{1}{2}\int(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})\,dx\\&=\frac{1}{2}\int\sqrt{x+1}\,d(x+1)-\frac{1}{2}\int\sqrt{x-1}\,d(x-1)\\&=\frac{1}{3}\left(\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{(x-1)^3}\right)+C,\quad x\geq1.\end{aligned}$$

26 $\displaystyle\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$.

因为 $x^3\,dx=\dfrac{1}{2}((1+x^2)-1)\,d(1+x^2)$, **所以**

$$\begin{aligned}\int x^3\sqrt[3]{1+x^2}\,dx&=\frac{1}{2}\int\left((1+x^2)^{\frac{4}{3}}-(1+x^2)^{\frac{1}{3}}\right)d(1+x^2)\\&=\frac{3}{14}(1+x^2)^{\frac{7}{3}}-\frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}}+C.\end{aligned}$$

27 $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+x-2}$.

我们有

$$\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{1}{(x-1)(x+2)}=\frac{(x+2)-(x-1)}{3(x-1)(x+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+2}\right),$$

从而

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x^2+x-2}&=\frac{1}{3}\left(\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{dx}{x+2}\right)\\&=\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{1}{3}\ln|x+2|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C.\end{aligned}$$

28 $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^4+3x^2+2}$.

由于 $x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2)$**及**

$$\frac{1}{x^4+3x^2+2}=\frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)}=\frac{(x^2+2)-(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2+2)}=\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+2},$$

所以

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^4+3x^2+2}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2)}{x^2+1}-\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(x^2)}{x^2+2}=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2+2}+C.$$

29 $\displaystyle\int \sin^4 x\mathrm{d}x$.

对等式积分

$$\sin^4 x=\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cos^2 2x$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{8}=\frac{3}{8}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x,$$

得到

$$\int \sin^4 x\mathrm{d}x=\frac{3x}{8}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

30 $\displaystyle\int \tan^3 x\mathrm{d}x$.

我们有

$$\int\tan^3 x\mathrm{d}x=\int\tan x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\mathrm{d}x=\int\tan x\mathrm{d}(\tan x)-\int\frac{\sin x\mathrm{d}x}{\cos x}$$

$$=\frac{1}{2}\tan^2 x+\ln|\cos x|+C,\quad x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi.$$

31 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos^2 x}$.

利用结果 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$ (**参见例** 11), **得到**

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos^2 x}=\int\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}+\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{\cos x}+C,\quad x\neq\frac{k\pi}{2}.$$

32 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x}$.

利用等式 $\displaystyle\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}=-\mathrm{d}(\cot x)$, **得到**

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x}=-\int\frac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}(\cot x)=-\int(\cot^2 x+1)\mathrm{d}(\cot x)=-\frac{1}{3}\cot^3 x-\cot x+C.$$

33 $\int \mathrm{ch}\, x \mathrm{ch} 3x \mathrm{d} x$.

我们有

$$\int \mathrm{ch}\, x \mathrm{ch} 3x \mathrm{d} x = \frac{1}{2}\int (\mathrm{ch} 2x + \mathrm{ch} 4x) \mathrm{d} x = \frac{1}{4}\mathrm{sh} 2x + \frac{1}{8}\mathrm{sh} 4x + C.$$

运用代入法,求以下积分:

34 $\int x^3 (1-5x^2)^{10} \mathrm{d} x$.

令 $1-5x^2 = t$,**得** $x\mathrm{d} x = -\frac{1}{10}\mathrm{d} t$; $x^3(1-5x^2)^{10}\mathrm{d} x = \frac{1}{50}(t^{11}-t^{10})\mathrm{d} t$,**从而**

$$\int x^3(1-5x^2)^{10}\mathrm{d} x = \frac{1}{50}\int (t^{11}-t^{10})\mathrm{d} t = \frac{1}{50}\ \frac{t^{12}}{12} - \frac{t^{11}}{11}\ + C$$

$$= -\frac{1+55x^2}{6600}(1-5x^2)^{11} + C.$$

35 $\int \frac{x^5}{1-x^2}\mathrm{d} x$.

令 $1-x^2 = t$,**则** $\frac{x\mathrm{d} x}{1-x^2} = -\mathrm{d} t$,**于是**

$$\int \frac{x^5}{1-x^2}\mathrm{d} x = -\int (1-2t^2+t^4)\mathrm{d} t = -\quad t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5\quad + C$$

$$= -\frac{1}{15}(8+4x^2+3x^4)\quad 1-x^2 + C,\qquad |x| < 1.$$

36 $\int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d} x$.

令 $1+\cos^2 x = t$,**得到** $\sin x\cos x\mathrm{d} x = -\frac{\mathrm{d} t}{2}$.**则**

$$\int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d} x = \frac{1}{2}\int \frac{1-t}{t}\mathrm{d} t = \frac{1}{2}\ln|t| - \frac{1}{2}t + C$$

$$= \frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x) - \frac{1}{2}\cos^2 x + C.$$

37 $\int \frac{\mathrm{d} x}{1+\mathrm{e}^x}$.

令 $t = \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$,**得**

$$\int \frac{\mathrm{d} x}{1+\mathrm{e}^x} = -2\int \frac{\mathrm{d} t}{t^2+1} = -2\ln(t+\quad t^2+1) + C$$

$$= x - 2\ln(1+\quad \mathrm{e}^x+1) + C.$$

38 $\int \frac{\mathrm{d} x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$.

如果假设 $x = \sin t$,**则** $\mathrm{d} x = \cos t\mathrm{d} t$,**且当** $|x| < 1$ **时,有**

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}=\tan t+C=\tan(\arcsin x)+C=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C.$$

39 $\displaystyle\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-2}}$.

设 $x=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 2t}$.**如果** $x\in(-\infty,-\sqrt{2})$,**则** $t\in\left(-\dfrac{\pi}{4},0\right)$,**而如果** $x\in(\sqrt{2},+\infty)$,**则** $t\in\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$.**注意到,对那些** x **及** t **的取值** $\operatorname{sgn}\cot 2t=\operatorname{sgn} t=\operatorname{sgn} x$,**将得到**

$$I=\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-2}}=-4\operatorname{sgn}\cot 2t\int \frac{\mathrm{d}t}{\sin^3 2t}=-\frac{\operatorname{sgn} t}{2}\int \frac{(\sin^2 t+\cos^2 t)^2}{\sin^3 t\cos^3 t}\mathrm{d}t$$

$$=\operatorname{sgn} t\left(\frac{\cos 2t}{\sin^2 2t}-\ln|\tan t|\right)+C.$$

由等式 $\sin 2t=\dfrac{\sqrt{2}}{x}=\dfrac{2\tan t}{1+\tan^2 t}$,**考虑到当** $|t|<\dfrac{\pi}{4}$**时**,$|\tan t|<1$,**得到**

$$\tan t=\frac{x\pm\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2}}{x+\sqrt{x^2-2}}, & \text{当 } x>\sqrt{2},\\[2mm] \dfrac{x+\sqrt{x^2-2}}{\sqrt{2}}, & \text{当 } x<-\sqrt{2}.\end{cases}$$

这样

$$I=\operatorname{sgn} x\left(\frac{x^2}{2}\sqrt{1-\frac{2}{x^2}}\right)+\operatorname{sgn} x\ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right|+C$$

$$=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-2}+\ln\left|x+\sqrt{x^2-2}\right|+C.$$

40 $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$.

设 $x=a\sin t$,**得**

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=a^2\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C,\quad |x|\leqslant a.$$

41 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$.

令 $x=a\tan t$,**当** $a\neq 0$ **时,有**

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}=\frac{1}{a^2}\int \cos t\,\mathrm{d}t=\frac{1}{a^2}\sin t+C=\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C.$$

42 $\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,\mathrm{d}x$.

令 $x=a\cos 2t$. 则 $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}=\cot t$, $\mathrm{d}x=-2a\sin 2t\,\mathrm{d}t$, 于是

$$\int\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,\mathrm{d}x=-4a\int\cos^2 t\,\mathrm{d}t=-4a\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right)+C$$

$$=a\arcsin\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C,\quad -a\leq x<a.$$

43 $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,\mathrm{d}x$.

设 $x=2a\sin^2 t$, 得(参见例 29)

$$\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,\mathrm{d}x=8a^2\int\sin^4 t\,\mathrm{d}t=a^2\left(3t-2\sin 2t+\frac{1}{4}\sin 4t\right)+C$$

$$=3a^2\arcsin\sqrt{\frac{x}{2a}}-\frac{3a+x}{2}\sqrt{x(2a-x)}+C,\quad 0\leq x<2a.$$

44 $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$.

设 $x-a=(b-a)\sin^2 t$, 经过简单的变换之后得到

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}=2\int\mathrm{d}t=2t+C=2\arcsin\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}+C,\quad a<x<b.$$

45 $\int\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$.

设 $x=a\,\mathrm{sh}\,t$, 则 $\mathrm{d}x=a\,\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{d}t$. 从而 $\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2(1+\mathrm{sh}^2 t)}=a\,\mathrm{ch}\,t$, 且

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x=a^2\int\mathrm{ch}^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{a^2}{4}\mathrm{sh}\,2t+\frac{a^2 t}{2}+C.$$

由等式 $\mathrm{sh}\,t=\frac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{2}=\frac{x}{a}$ 得到 $\mathrm{e}^t=\frac{x\pm\sqrt{a^2+x^2}}{a}$. 因为 $\mathrm{e}^t>0$, 则 $t=\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|-\ln a$. 显然 $\mathrm{sh}\,2t=2\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t=2\,\mathrm{sh}\,t\sqrt{1+\mathrm{sh}^2 t}=2\frac{x}{a}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}=\frac{2x}{a^2}\sqrt{a^2+x^2}$, 最后可得到

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|+C.$$

46 $\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,\mathrm{d}x$.

被积函数在 $x<-a$ 及 $x\geq a$ 时有定义. 现设 $x\geq a$, 则设 $x-a=2a\,\mathrm{sh}^2 t$, 得

$$\int\sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,\mathrm{d}x=4a\int\mathrm{sh}^2 t\,\mathrm{d}t=a\,\mathrm{sh}\,2t-2at+C.$$

考虑到 $a\,\mathrm{sh}\,2t=\sqrt{x^2-a^2}$, $\mathrm{sh}\,t=\sqrt{\frac{x-a}{2a}}=\frac{\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t}}{2}$, $t=\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a})-\ln\sqrt{2a}$,

最后得到

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2-a^2} - 2a\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}) + C.$$

如果 $x<-a$,则设 $x+a=-2a\operatorname{sh}^2 t$,有

$$\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,\mathrm{d}x = -4a\int \operatorname{sh}^2 t\,\mathrm{d}t = -a\operatorname{sh}2t + 2at + C$$

$$= -\sqrt{x^2+a^2} + 2a\ln(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x+a}) + C.$$

47 $\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\,\mathrm{d}x$.

假设 $b>a$, $x+a>0$, $x+b>0$, 令 $x+a=(b-a)\operatorname{sh}^2 t$, 则 $\sqrt{(x+a)(x+b)}\,\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^2}{4}(\operatorname{ch}4t-1)\mathrm{d}t$,于是

$$\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\,\mathrm{d}x = \frac{(b-a)^2}{4}\left(\frac{\operatorname{sh}4t}{4} - t\right) + C.$$

因为 $t=\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}) - \ln\sqrt{b-a}$, $\operatorname{sh}4t = \frac{4(2x+a+b)}{(b-a)^2}\sqrt{(x+a)(x+b)}$,则最后可得

$$\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\,\mathrm{d}x = \frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)} - \frac{(b-a)^2}{4}\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x+b}) + C.$$

而如果 $x+a<0$, $x+b<0$, $b>a$,则设 $x+b=-(b-a)\operatorname{sh}^2 t$,得到

$$\int \sqrt{(x+a)(x+b)}\,\mathrm{d}x = -\frac{(b-a)^2}{4}\int(\operatorname{ch}4t-1)\mathrm{d}t = -\frac{(b-a)^2}{16}\operatorname{sh}4t + \frac{(b-a)^2}{4}t + C$$

$$= \frac{2x+a+b}{4}\sqrt{(x+a)(x+b)} + \frac{(b-a)^2}{4}\ln(\sqrt{-x-a}+\sqrt{-x-b}) + C.$$

利用分部积分法计算下列积分:

48 $\int x^2 \arccos x\,\mathrm{d}x$.

分部积分,得到

$$\int x^2\arccos x\,\mathrm{d}x = \int \arccos x\,\mathrm{d}\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3}\arccos x + \frac{1}{3}\int\frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{1}{3}\int x^2\,\mathrm{d}\sqrt{1-x^2}$$

$$= \frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{3}\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}(x^2)$$

$$= \frac{x^3}{3}\arccos x - \frac{x^2}{3}\sqrt{1-x^2} - \frac{2}{9}\sqrt{(1-x^2)^3} + C, \quad |x| \leq 1.$$

49 $\displaystyle\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx$.

我们有

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx = \int \arcsin x\,d\left(-\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x}\arcsin x + \int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}, \quad x \neq 0, \quad |x| < 1.$$

最后一项积分按如下方法计算:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dx}{x|x|\sqrt{\left(\frac{1}{|x|}\right)^2 - 1}} = \int \frac{\operatorname{sgn} x\,d(|x|)}{\operatorname{sgn} x \cdot |x|^2\sqrt{\left(\frac{1}{|x|}\right)^2 - 1}}$$

$$= -\int \frac{d\frac{1}{|x|}}{\sqrt{\left(\frac{1}{|x|}\right)^2 - 1}} = -\ln\left|\frac{1}{|x|} + \sqrt{\left(\frac{1}{|x|}\right)^2 - 1}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| + C.$$

最后得到

$$\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx = -\frac{\arcsin x}{x} + \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right| + C.$$

50 $\displaystyle\int \arctan\sqrt{x}\,dx$.

用分部积分法得到

$$\int \arctan\sqrt{x}\,dx = x\arctan\sqrt{x} - \int \frac{x\,dx}{2\sqrt{x}(1+x)}$$

$$= x\arctan\sqrt{x} - \int\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}\right)dx$$

$$= x\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + \int \frac{d\sqrt{x}}{1+x}$$

$$= x\arctan\sqrt{x} - \sqrt{x} + \arctan\sqrt{x} + C, \quad x \geq 0.$$

51 $\displaystyle\int \arcsin^2 x\,dx$.

我们有

$$\int \arcsin^2 x\,dx = x\arcsin^2 x - \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,dx = x\arcsin^2 x + 2\int \arcsin x\,d\left(\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$= x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C, \quad |x| \leq 1.$$

52 $\displaystyle\int x\arcsin^2 x\,dx$.

用分部积分法,且利用上例,得到

$$\int x\arcsin^2 x\,\mathrm{d}x = x\int\arcsin^2 x\,\mathrm{d}x - \int\arcsin^2 x\,\mathrm{d}x = (x-1)\int\arcsin^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$= (x-1)\left(x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin^2 x - 2x\right) + C,\quad |x|\leq 1 .$$

53 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^2}$.

经简单的变化,用分部积分法得到

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{a^2}\int\frac{(a^2+x^2)-x^2}{(a^2+x^2)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^3}\arctan\frac{x}{a} + \frac{1}{a^2}\int\frac{x}{2}\mathrm{d}\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{a^3}\arctan\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} - \frac{1}{2a^2}\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}$$

$$= \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + \frac{1}{2a^3}\arctan\frac{x}{a} + C .$$

54 $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x,\ |x|\leq a$.

由分部积分法得到

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{a^2-x^2} + \int\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = x\sqrt{a^2-x^2} + \int\frac{(x^2-a^2)+a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2} - \int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x + a^2\arcsin\frac{x}{a} + C .$$

解上面关于$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$的等式,得到

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C,\quad a\neq 0 .$$

55 $\displaystyle\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x$.

我们有

$$\int x^2\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \int x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{3}(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{x}{3}(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\int(a^2+x^2)\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x + C$$

$$= \frac{x}{4}(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{a^2}{4}\int\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x + C .$$

计算最后的积分

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{a^2+x^2} - \int\frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x = x\sqrt{a^2+x^2} - \int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= x\sqrt{a^2+x^2} - \int\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x + a^2\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + C;$$

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + C .$$

最后得到

$$\int x^2 \quad a^2 + x^2\,\mathrm{d}x = \frac{x(2x^2 + a^2)}{8} \quad a^2 + x^2 - \frac{a^4}{8}\ln\left| x + \quad a^2 + x^2 \right| + C.$$

56 $\int x\sin \quad x\,\mathrm{d}x$.

注意到 $x\mathrm{d}x = 2(\quad x)^3\mathrm{d}(\quad x)$，由分部积分法得

$$\int x\sin \quad x\,\mathrm{d}x = 2\int (\quad x)^3\sin \quad x\,\mathrm{d}(\quad x) = -2\int(\quad x)^3\mathrm{d}(\cos \quad x)$$

$$= -2 \quad x^3\cos \quad x + 6\int x\cos \quad x\,\mathrm{d}(\quad x) = -2 \quad x^3\cos \quad x + 6\int x\,\mathrm{d}(\sin \quad x)$$

$$= -2 \quad x^3\cos \quad x + 6x\sin \quad x - 12\int \quad x\sin \quad x\,\mathrm{d}(\quad x)$$

$$= -2 \quad x^3\cos \quad x + 6x\sin \quad x + 12\int \quad x\,\mathrm{d}(\cos \quad x)$$

$$= -2 \quad x^3\cos \quad x + 6x\sin \quad x + 12 \quad x\cos \quad x - 12\sin \quad x + C$$

$$= 2 \quad x(6 - x)\cos \quad x + 6(x - 2)\sin \quad x + C, \quad x \geq 0.$$

57 $I = \int \frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.

由分部积分，有

$$\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x = \int \frac{x}{1 + x^2}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\arctan x}) = \frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{1 + x^2} - \int \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1 + x^2)^3}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{1 + x^2} - \int \frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\arctan x})}{1 + x^2} = \frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{1 + x^2} - \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{1 + x^2} - \int \frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x,$$

由此

$$I = \frac{x - 1}{2 \quad 1 + x^2}\mathrm{e}^{\arctan x} + C.$$

58 $I_1 = \int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$，$I_2 = \int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$.

显然

$$I_1 = \frac{1}{a}\int\cos bx\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{ax}) = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\cos bx + \frac{b}{a}I_2;$$

$$I_2 = \frac{1}{a}\int\sin bx\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{ax}) = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}I_1;$$

$$I_1 = \frac{\mathrm{e}^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)}{a^2 + b^2} + C; \quad I_2 = \frac{\mathrm{e}^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2 + b^2} + C.$$

59 $\int \mathrm{e}^{2x}\sin^2 x\,\mathrm{d}x$.

利用上例结果，得到

$$\int \mathrm{e}^{2x}\sin^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{2x}\cos 2x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x}(\sin 2x + \cos 2x) + C.$$

利用下面的公式,用把二次三项式化成标准形式的方法,计算下列积分.

Ⅰ. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C,\quad a\neq 0$. Ⅱ. $\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x+a}{x-a}\right|+C$.

Ⅲ. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{a^2\pm x^2}=\pm\frac{1}{2}\ln|a^2\pm x^2|+C$. Ⅳ. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$.

Ⅴ. $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C,\quad a>0$ Ⅵ. $\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2\pm x^2}}=\pm\sqrt{a^2\pm x^2}+C$.

Ⅶ. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C,\quad a>0$.

Ⅷ. $\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}|+C$.

计算积分:

60 $\int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2-2x-1}$.

我们有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3x^2-2x-1}=\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{3}\right)}{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{9}}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{3x+1}\right|+C,\quad x\neq-\frac{1}{3},\quad x\neq 1.$$

61 $\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^4-2x^2-1}$.

显然

$$\int \frac{x\mathrm{d}x}{x^4-2x^2-1}=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2-1)}{(x^2-1)^2-2}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^2-1-\sqrt{2}}{x^2-1+\sqrt{2}}\right|+C,\quad x\neq\pm\sqrt{1+\sqrt{2}}.$$

62 $\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$.

利用 1.2 **节的性质** 4),**得到**

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1}\mathrm{d}x=\int \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

63 $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x+2\cos x+3}$.

我们有

$$I(x)=\int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+1+4\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$= 2\int \frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\left(\tan\frac{x}{2}+1\right)^2+4} = \arctan\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{2} + C_n,$$

$$2n\pi - \pi < x < \pi + 2n\pi .$$

由原函数的连续性有

$$I(\pi+2n\pi-0) = I(\pi+2n\pi+0), \quad n\in \mathbf{Z}, \quad \frac{\pi}{2}+C_n = -\frac{\pi}{2}+C_{n+1}, \quad C_{n+1} = \pi + C_n .$$

由此得到 $C_n = n\pi + C$,式中 $C = C_0$ 为任意常数 .由于 $2n\pi - \pi < x < \pi + 2n\pi$,即

$$n < \frac{x+\pi}{2\pi} < n+1, \quad 则\ n = \left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right] .$$

这样

$$I(x) = \arctan\frac{\tan\frac{x}{2}+1}{2} + \pi\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right] + C,$$

$$x \neq \pi + 2n\pi, \quad I(\pi+2n\pi) = \lim_{x\to\pi+2n\pi} I(x), \quad n\in \mathbf{Z} .$$

64 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5+x-x^2}}$.

显然

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{5+x-x^2}} = \frac{\left(x-\frac{1}{2}\right)dx}{\sqrt{5+x-x^2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{dx}{\sqrt{\frac{21}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}},$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5+x-x^2}} = -\sqrt{5+x-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{21}} + C,$$

$$\frac{1-\sqrt{21}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{21}}{2} .$$

65 $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^4-2x^2-1}}$.

当 $|x| > \sqrt{1+\sqrt{2}}$ 时,有

$$\frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^4-2x^2-1}} = \frac{x^2\,d(x^2)}{2\sqrt{(x^2-1)^2-4}} = \frac{(x^2-1)\,d(x^2-1)}{2\sqrt{(x^2-1)^2-4}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{d(x^2-1)}{\sqrt{(x^2-1)^2-4}},$$

由此

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^4-2x^2-1}} = \frac{1}{2}\sqrt{x^4-2x^2-1} + \frac{1}{2}\ln\left|x^2-1+\sqrt{x^4-2x^2-1}\right| + C .$$

66 $\int \sqrt{2+x-x^2}\,\mathrm{d}x$.

当 $-1\leq x\leq 2$ **时,有**

$$\int \sqrt{2+x-x^2}\,\mathrm{d}x=\int \sqrt{\frac{9}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{2x-1}{4}\sqrt{2+x-x^2}+\frac{9}{8}\arcsin\frac{2x-1}{3}+C.$$

67 $\int \frac{(1-x+x^2)\,\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x-x^2}}$.

当 $\left|x-\frac{1}{2}\right|<\frac{\sqrt{5}}{2}$, $x\neq 0$ **时,有**

$$I=\int \frac{1-x+x^2}{x\sqrt{1+x-x^2}}\,\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x-x^2}}+\int \frac{x-1}{\sqrt{1+x-x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

对第一个积分,令 $\frac{1}{|x|}=t$ **得到**

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x-x^2}}=-\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+t\,\mathrm{sgn}\,x-1}}$$

$$=-\ln\left|t+\frac{\mathrm{sgn}\,x}{2}+\sqrt{t^2+t\,\mathrm{sgn}\,x-1}\right|=-\ln\left|\frac{2+x+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right|.$$

第二个积分可直接计算

$$\int \frac{(x-1)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x-x^2}}=-\int \frac{(-2x+1)\,\mathrm{d}x}{2\sqrt{1+x-x^2}}-\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

$$=-\sqrt{1+x-x^2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}.$$

最后有

$$I=-\ln\left|\frac{2+x+2\sqrt{1+x-x^2}}{x}\right|-\sqrt{1+x-x^2}-\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x-1}{\sqrt{5}}+C.$$

68 $\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\,\mathrm{d}x$.

当 $x\neq 0$ **时,有**

$$\int \frac{x^2+1}{x\sqrt{x^4+1}}\,\mathrm{d}x=\mathrm{sgn}\,x\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}}\,\mathrm{d}x=\mathrm{sgn}\,x\int \frac{\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2}}$$

$$=\mathrm{sgn}\,x\cdot\ln\left|x-\frac{1}{x}+\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}\right|+C$$

$$=\mathrm{sgn}\,x\cdot\ln\left|\frac{x^2-1+\sqrt{x^4+1}}{x}\right|+C.$$

练 习 题

计算积分:

1 $\int \sqrt[4]{1-4x}\,\mathrm{d}x$. **2** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+4x+4}$. **3** $\int \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5}$.

4 $\int \frac{\sin 2x\,\mathrm{d}x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$. **5** $\int \frac{x+2}{x^2+4x+9}\mathrm{d}x$. **6** $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x}$.

7 $\int \frac{x^{2n-1}\mathrm{d}x}{x^{4n}+1}$, $n\in\mathbb{N}$. **8** $\int \frac{x^{2n-1}\mathrm{d}x}{x^{4n}-1}$, $n\in\mathbb{N}$. **9** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^{3/2}}$.

10 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x\sin^2 x}$. **11** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x}$. **12** $\int \cos^3 x\,\mathrm{d}x$. **13** $\int \mathrm{e}^{-x^2-1}x\,\mathrm{d}x$.

14 $\int \mathrm{e}^x 2^x\,\mathrm{d}x$. **15** $\int \cos\frac{1}{x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$. **16** $\int \frac{\ln^2 x}{x}\mathrm{d}x$. **17** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x}}$.

18 $\int \tan^4 x\,\mathrm{d}x$. **19** $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$. **20** $\int x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

21 $\int \left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$. **22** $\int \frac{(x^2+x+1)\mathrm{d}x}{x^3+\frac{3}{2}x^2+3x+1}$. **23** $\int \frac{(x+1)\mathrm{d}x}{2+2x+x^2}$.

24 $\int \frac{\mathrm{d}x}{[x]^2}$, $x\geq 1$. **25** $\int \frac{[x]^\lambda}{x^{\lambda+1}}\mathrm{d}x$, $x\geq 1$. **26** $\int \ln[x]\,\mathrm{d}x$, $x\geq 2$.

27 $\int \frac{\mathrm{d}x}{[\sqrt[m]{x}]^\lambda}$, $x>1$. **28** $\int \frac{\ln(1+x)-\ln x}{x(1+x)}\mathrm{d}x$.

29 $\int \frac{x(\ln(1+x)+\ln(1-x))^2}{x^2-1}\mathrm{d}x$. **30** $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{3/2}}$.

31 $\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3\sqrt{x^2+1}}$. **32** $\int \frac{x^8-1}{x(x^8-x^4+1)}\mathrm{d}x$. **33** $\int \frac{x^5-x}{x^8+3x^4+1}\mathrm{d}x$.

34 $\int \frac{x^8-x^2}{x^{12}+3x^6+1}\mathrm{d}x$. **35** $\int \sqrt{1-2x^2+x^4}\,\mathrm{d}x$. **36** $\int \arcsin(\sin x)\,\mathrm{d}x$, $x\in\mathbb{R}$.

37 $\int \arccos(\cos x)\,\mathrm{d}x$, $x\in\mathbb{R}$. **38** $\int x^3\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

39 $\int x^2(1+x)^{20}\,\mathrm{d}x$. **40** $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+9)^{10}}$.

用代入法计算下列积分:

41 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2-a^2)^5}}$. **42** $\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2-a^2)^3}}$. **43** $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{(x^2-a^2)^3}}$.

44 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4\sqrt{x^2-a^2}}$. **45** $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2-x^2)^5}}$. **46** $\int \frac{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}{x}\mathrm{d}x$.

47 $\int \frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{(a^2-x^2)^6}}$. **48** $\int \frac{x\exp\left(-(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)}{(1+x^2)^3}\mathrm{d}x$. **49** $\int x^2\sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$.

50 $\int \frac{x+1}{x(1+x\mathrm{e}^x)}\mathrm{d}x$. **51** $\int \frac{(2x^2+1)\mathrm{d}x}{x^6+2x^4+2x^2+1}$. **52** $\int \frac{(x^3+x)\mathrm{d}x}{x^6+4x^4+4x^2+1}$.

53 $\displaystyle\int \frac{2x^6+1}{x^6(1+x^2)}\mathrm{d}x$.

利用分部积分法计算下列积分:

54 $\displaystyle\int x^3 \ln x\mathrm{d}x$.　**55** $\displaystyle\int x^3 \sin x\mathrm{d}x$.　**56** $\displaystyle\int \frac{x\mathrm{d}x}{\sin^2 x}$.　**57** $\displaystyle\int x^2 \cos x\mathrm{d}x$.

58 $\displaystyle\int x\sin^2 x\mathrm{d}x$.　**59** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^5 x}$.　**60** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^5 x}$.　**61** $\displaystyle\int \tan^7 x\mathrm{d}x$.

62 $\displaystyle\int \arcsin \frac{x}{2}\mathrm{d}x$.　**63** $\displaystyle\int \frac{1}{x^3}\arcsin x\mathrm{d}x$.　**64** $\displaystyle\int x^2 \arctan x\mathrm{d}x$.

65 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}\arctan \frac{x}{a}\mathrm{d}x$.　**66** $\displaystyle\int x\operatorname{arccot} x\mathrm{d}x$.　**67** $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{x^3}\mathrm{d}x$.

68 $\displaystyle\int x^3 \mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x$.　**69** $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax}\cos^2 x\mathrm{d}x$.　**70** $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\mathrm{d}x$.　**71** $\displaystyle\int \ln^2 x\mathrm{d}x$.

72 $\displaystyle\int x^2 \ln^2 x\mathrm{d}x$.　**73** $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$.　**74** $\displaystyle\int \ln(x+\sqrt{a^2+x^2})\mathrm{d}x$.

75 $\displaystyle\int x^2 \ln(x+\sqrt{x^2-a^2})\mathrm{d}x$.　**76** $\displaystyle\int x\operatorname{sh} x\mathrm{d}x$.　**77** $\displaystyle\int x\operatorname{sh}^2 x\mathrm{d}x$.　**78** $\displaystyle\int x^3 \operatorname{ch} x\mathrm{d}x$.

79 $\displaystyle\int \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.　**80** $\displaystyle\int \arcsin x\arccos x\mathrm{d}x$.　**81** $\displaystyle\int \frac{x^2\mathrm{e}^x}{(x+2)^2}\mathrm{d}x$.

82 $\displaystyle\int x^2 \mathrm{e}^x \sin x\mathrm{d}x$.　**83** $\displaystyle\int \frac{x^2\arctan x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.　**84** $\displaystyle\int \frac{x^7\mathrm{d}x}{(1+x^4)^2}$.

85 $\displaystyle\int \frac{x^8\mathrm{d}x}{(x^3-1)^3}$.　**86** $\displaystyle\int \frac{x^8\mathrm{d}x}{(x^4-1)^3}$.

2　有理函数的积分

众所周知,真分式

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{\prod_{i=1}^{k}(x-x_i)^{n_i}\prod_{j=1}^{s}(a_jx^2+b_jx+q_j)^{m_j}},$$

式中二次三项式 $a_jx^2+b_jx+q_j$ 的根为复数,可以展开为

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{A_{n_i}^{(i)}}{(x-x_i)^{n_i}}+\frac{A_{n_i-1}^{(i)}}{(x-x_i)^{n_i-1}}+\cdots+\frac{A_1^{(i)}}{x-x_i}\right]+\sum_{j=1}^{s}\left[\frac{B_{m_j}^{(j)}x+C_{m_j}^{(j)}}{(a_jx^2+b_jx+c_j)^{m_j}}+\frac{B_{m_j-1}^{(j)}x+C_{m_j-1}^{(j)}}{(a_jx^2+b_jx+c_j)^{m_j-1}}+\cdots+\frac{B_1^{(j)}x+C_1^{(j)}}{a_jx^2+b_jx+c_j}\right].\tag{1}$$

常数 $A_\nu^{(i)}$, $B_\mu^{(j)}$ 及 $C_\mu^{(j)}$ 用待定系数法确定.

在某些情况下,展式中,

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{(x-x_1)^n r(x)}=\frac{A_n}{(x-x_1)^n}+\frac{A_{n-1}}{(x-x_1)^{n-1}}+\cdots+\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{R(x)}{r(x)},\tag{2}$$

(对应于因子$(x-x_1)^n$)的常数 $A_n, A_{n-1}, \cdots, A_1$ 可方便地用下面的方法求得.

等式(2)两边乘以$(x-x_1)^n$,得到

$$\frac{P(x)}{r(x)}=A_n+(x-x_1)A_{n-1}+\cdots+(x-x_1)^{n-1}A_1+(x-x_1)^n\frac{R(x)}{r(x)}.\tag{3}$$

注意到,(3)式右边后面部分的所有加项在 $x=x_1$ 时均为零,于是得

$$A_n=\left.\frac{P(x)}{r(x)}\right|_{x=x_1}.\tag{4}$$

然后,对(3)式两边求导,得到

$$\left(\frac{P(x)}{r(x)}\right)'=A_{n-1}+2(x-x_1)A_{n-2}+\cdots+(n-1)(x-x_1)^{n-2}A_1+$$

$$(x-x_1)+(x-x_1)^{n-1}\frac{P_1(x)}{r_1(x)},$$

由此可得

$$A_{n-1}=\left.\left(\frac{P(x)}{r(x)}\right)'\right|_{x=x_1}.\tag{5}$$

如此继续下去,得到公式

$$A_{n-k}=\frac{1}{k!}\left.\left(\frac{P(x)}{r(x)}\right)^{(k)}\right|_{x=x_1},\quad k=0,1,\cdots,n-1,\tag{6}$$

此公式用于确定对应于因子$(x-x_1)^n$ 的常数 $A_n, A_{n-1}, \cdots A_1$.

展式(1)中对应于多项式 $x\to Q(x)$的其他实根的常数可类似确定,利用把有理分式化成最简单因子的方法,计算下列积分.

69 $\displaystyle\int\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}dx$.

分离出整式部分

$$\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}=1+\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x},$$

之后,把真分式的分母分解因式,得到

$$\frac{5x^2-6x+1}{x^3-5x^2+6x}=\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3}.$$

根据公式(4),我们有

$$A=\left.\frac{5x^2-6x+1}{(x-2)(x-3)}\right|_{x=0}=\frac{1}{6},\quad B=\left.\frac{5x^2-6x+1}{x(x-3)}\right|_{x=2}=-\frac{9}{2},$$

$$C=\left.\frac{5x^2-6x+1}{x(x-2)}\right|_{x=3}=\frac{28}{3}.$$

对恒等式

$$\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}=1+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x}-\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{x-2}+\frac{28}{3}\cdot\frac{1}{x-3},$$

积分,最后得到

$$\int\frac{x^3+1}{x^3-5x^2+6x}\mathrm{d}x=x+\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{9}{2}\ln|x-2|+\frac{28}{3}\ln|x-3|+C,\quad x\neq 0,2,3.$$

70 $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^3-3x+2}$.

与上例类似,有

$$\frac{x}{x^3-3x+2}=\frac{x}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{A}{(x-1)^2}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{x+2}.$$

利用公式(6),得

$$A=\frac{x}{x+2}\bigg|_{x=1}=\frac{1}{3},\quad B=\left(\frac{x}{x+2}\right)'\bigg|_{x=1}=\frac{2}{(x+2)^2}\bigg|_{x=1}=\frac{2}{9},$$

$$C=\frac{x}{(x-1)^2}\bigg|_{x=-2}=-\frac{2}{9}.$$

$$\begin{aligned}\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^3-3x+2}&=\frac{1}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2}+\frac{2}{9}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}-\frac{2}{9}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+2}\\&=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{2}{9}\ln|x-1|-\frac{2}{9}\ln|x+2|+C\\&=-\frac{1}{3(x-1)}+\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|+C,\quad x\neq 1,\quad x\neq -2.\end{aligned}$$

71 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}$.

我们有

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+2)^2}+\frac{C}{(x+2)}+\frac{D}{(x+3)^3}+\frac{E}{(x+3)^2}+\frac{F}{x+3}.\tag{1}$$

利用公式(6),依次得到

$$A=\frac{1}{(x+2)^2(x+3)^3}\bigg|_{x=-1}=\frac{1}{8},\quad B=\frac{1}{(x+1)(x+3)^3}\bigg|_{x=-2}=-1,$$

$$C=\left(\frac{1}{(x+1)(x+3)^3}\right)'\bigg|_{x=-2}=\frac{-(x+3)^3-3(x+1)(x+3)^2}{(x+1)^2(x+3)^3}\bigg|_{x=-2}=2,$$

$$D=\frac{1}{(x+1)(x+2)^2}\bigg|_{x=-3}=-\frac{1}{2},$$

$$E=\left(\frac{1}{(x+1)(x+2)^2}\right)'\bigg|_{x=-3}=\frac{-(x+2)^2-2(x+1)(x+2)}{(x+1)^2(x+2)^4}\bigg|_{x=-3}=-\frac{5}{4},$$

$$F=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x+1)(x+2)^2}\right)''\bigg|_{x=-3}$$

$$=\left(\frac{1}{(x+1)^3(x+2)^2}+\frac{2}{(x+1)^2(x+2)^3}+\frac{3}{(x+1)(x+2)^4}\right)\bigg|_{x=-3}=-\frac{17}{8}.$$

把求得的系数代入展式(1)并积分,得到

$$\int\frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}=\frac{1}{8}\ln|x+1|+\frac{1}{x+2}+2\ln|x+2|+$$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x+3)^2}+\frac{5}{4(x+3)}-\frac{17}{8}\ln|x+3|+C$$

$$=\frac{9x^2+50x+68}{4(x+2)(x+3)^2}+\frac{1}{8}\ln\left|\frac{(x+1)(x+2)^{16}}{(x+3)^{17}}\right|+C,$$

$$x\neq-3;\ -2;\ -1.$$

72 $\displaystyle\int\frac{dx}{x(x+1)(x^2+x+1)}$.

我们有

$$\frac{1}{x(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}. \qquad (1)$$

由公式(4)求得前两个系数

$$A=\frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)}\bigg|_{x=0}=1,\quad B=\frac{1}{x(x^2+x+1)}\bigg|_{x=-1}=-1.$$

之后把展式(1)的两边乘公分母得

$$1=A(x+1)(x^2+x+1)+Bx(x^2+x+1)+(Cx+D)(x^2+x);$$

然后比较 x^3 和 x^2 的系数,得到方程组

$$\begin{array}{l|l} x^3 & 0=A+B+C,\\ x^2 & 0=2A+B+D+C, \end{array}$$

由此得到 $C=0$, $D=-1$.对(1)式积分,得

$$\int\frac{dx}{x(x+1)(x^2+x+1)}=\ln|x|-\ln|x+1|+\int\frac{dx}{x^2+x+1}$$

$$=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$=\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|+\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C,\quad x\neq-1,0.$$

73 $\displaystyle\int\frac{dx}{x^3+1}$.

由于 $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$,因此

$$\int\frac{dx}{x^3+1}=A\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{Bx+C}{x^2-x+1}dx.$$

由通常的方法得到方程组

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 0 = A + B, \\ x & 0 = - A + B + C, \\ x^0 & 1 = A + C. \end{array}$$

由此, $A = \frac{1}{3}$, $B = -\frac{1}{3}$, $C = \frac{2}{3}$.这样,在 $x \neq -1$ 时,有

$$\int \frac{dx}{x^3 + 1} = \frac{1}{3}\ln|x + 1| - \frac{1}{3}\int \frac{x - 2}{x^2 - x + 1}dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x + 1| - \frac{1}{3}\int \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)dx}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x + 1| - \frac{1}{6}\ln(x^2 - x + 1) + \frac{1}{3}\arctan\frac{2x - 1}{3} + C$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{(x + 1)^2}{x^2 - x + 1} + \frac{1}{3}\arctan\frac{2x - 1}{3} + C.$$

74 $\int \frac{x dx}{x^3 - 1}$.

我们有

$$\int \frac{x dx}{x^3 - 1} = A\int \frac{dx}{x - 1} + \int \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}dx,$$

由此得

$$x \equiv A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1);$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 0 = A + B, \\ x & 1 = A - B + C, \\ x^0 & 0 = A - C. \end{array}$$

解所得方程组,得

$$A = \frac{1}{3}, \quad B = -\frac{1}{3}, \quad C = \frac{1}{3}.$$

从而

$$\int \frac{x dx}{x^3 - 1} = \frac{1}{3}\ln|x - 1| - \frac{1}{3}\int \frac{x - 1}{x^2 + x + 1}dx$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x - 1| - \frac{1}{6}\ln|x^2 + x + 1| + \frac{1}{3}\arctan\frac{2x + 1}{3} + C$$

$$= \frac{1}{6}\ln\frac{(x - 1)^2}{x^2 + x + 1} + \frac{1}{3}\arctan\frac{2x + 1}{3} + C \quad (x \neq 1).$$

75 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+1}$.

因为

$$x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2=(x^2+x\sqrt{2}+1)(x^2-x\sqrt{2}+1),$$

所以被积函数可展成形如下式的简单分式

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1}.$$

由恒等式

$$1\equiv(Ax+B)(x^2-x\sqrt{2}+1)+(Cx+D)(x^2+x\sqrt{2}+1)$$

得到方程组

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 0=A+C, \\ x^2 & 0=-\sqrt{2}A+B+\sqrt{2}C+D, \\ x & 0=A-\sqrt{2}B+C+\sqrt{2}D, \\ x^0 & 1=B+D. \end{array}$$

由此 $A=-C=\dfrac{1}{2\sqrt{2}},\quad B=D=\dfrac{1}{2}$.**从而**

$$\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x+\sqrt{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x+\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2+x\sqrt{2}+1}dx+\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{x-\frac{\sqrt{2}}{2}}{x^2-x\sqrt{2}+1}dx+$$

$$\frac{1}{4}\int\frac{dx}{\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\arctan(x\sqrt{2}+1)+\arctan(x\sqrt{2}-1)\right)+C.$$

注意到反正切的加法公式(**参见第** 1 **章**,**例** 268),**最后得到**

$$I(x)=\int\frac{dx}{x^4+1}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\varepsilon(x)+C,$$

式中

$$\varepsilon(x)=\begin{cases}+1, & x>1, \\ 0, & |x|=1, \\ -1, & x<-1.\end{cases}$$

$$I(1)=\lim_{x\to1}I(x);\quad I(-1)=\lim_{x\to-1}I(x).$$

76 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$.

由于 $x^4+x^2+1=(x^2+1)^2-x^2=(x^2-x+1)(x^2+x+1)$,所以分解式形为

$$\frac{1}{x^4+x^2+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}.$$

由恒等式 $1\equiv(Ax+B)(x^2-x+1)+(Cx+D)(x^2+x+1)$得到方程组

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 0=A+C, \\ x^2 & 0=-A+B+C+D, \\ x & 0=A-B+C+D, \\ x^0 & 1=B+D. \end{array}$$

由此 $A=B=-C=D=\frac{1}{2}$.这样

$$\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{x+1}{x^2+x+1}dx-\frac{1}{2}\int\frac{x-1}{x^2-x+1}dx$$

$$=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

注意到(见第 1 章例 268)

$$\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}=\arctan\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}+\pi\varepsilon(x),$$

其中函数 $\varepsilon(x)$由上例所定义,右边的反正切函数在点 $x=\pm1$ 处的值等于在这些点处的极限值 .

最后有

$$\int\frac{dx}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}+\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\varepsilon(x)+C.$$

77 $\displaystyle\int\frac{dx}{x^6+1}$.

首先对被积函数变形

$$\frac{1}{x^6+1}=\frac{(x^4+1)+(1-x^4)}{2(x^6+1)}=\frac{x^4+1}{2(x^6+1)}+\frac{1-x^4}{2(x^6+1)}$$

$$=\frac{(x^4-x^2+1)+x^2}{2(x^2+1)(x^4-x^2+1)}+\frac{(1-x^2)(1+x^2)}{2(x^4-x^2+1)(1+x^2)}$$

$$=\frac{1}{2(x^2+1)}+\frac{x^2}{2(x^6+1)}-\frac{x^2-1}{2(x^4-x^2+1)}.$$

前两项容易求积,所以只对最后一项寻求其展开式

$$\frac{-x^2+1}{2(x^4-x^2+1)}=\frac{Ax+B}{x^2+\sqrt{3}x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-\sqrt{3}x+1};$$

$$-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\equiv(Ax+B)(x^2-\sqrt{3}x+1)+(Cx+D)(x^2+\sqrt{3}x+1);$$

$$\begin{array}{l|l} x^3 & 0 = A + C, \\ x^2 & -\dfrac{1}{2} = -\ \ 3A + B + \ \ 3C + D, \\ x & 0 = A - \ \ 3B + C + \ \ 3D, \\ x^0 & \dfrac{1}{2} = B + D. \end{array}$$

由此 $A = -C = \dfrac{1}{2\ \ 3}$, $B = D = \dfrac{1}{4}$,所以

$$\frac{1}{x^6+1} = \frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{x^2}{2(x^6+1)} + \frac{1}{2\ \ 3} \cdot \frac{x + \frac{3}{2}}{x^2 + \ \ 3x + 1} - \frac{1}{2\ \ 3} \cdot \frac{x - \frac{3}{2}}{x^2 - \ \ 3x + 1}.$$

等式两边积分,得到

$$\int \frac{dx}{x^6+1} = \frac{1}{2}\arctan x + \frac{1}{6}\arctan x^3 + \frac{1}{4\ \ 3}\ln\frac{x^2 + \ \ 3x + 1}{x^2 - \ \ 3x + 1} + C.$$

78 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1}$.

因为 $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1 = x^4(x-1) + x^2(x-1) + (x-1) = (x-1)(x^4 + x^2 + 1) = (x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$,所以被积函数展开成简单分式时具有形式

$$\frac{1}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} + \frac{Dx + E}{x^2 - x + 1}.$$

由恒等式 $1 \equiv A(x^4 + x^2 + 1) + (Bx + C)(x-1)(x^2 - x + 1) + (Dx + E)(x^3 - 1)$得方程组

$$\begin{array}{l|l} x^4 & 0 = A + B + D, \\ x^3 & 0 = -2B + C + E, \\ x^2 & 0 = A + 2B - 2C, \\ x & 0 = -B + 2C - D, \\ x^0 & 1 = A - C - E, \end{array}$$

解之得

$$A = -B = \frac{1}{3}, \quad C = -\frac{1}{6}, \quad D = 0, \quad E = -\frac{1}{2}.$$

这样

$$\int \frac{dx}{x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1} = \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x^2 + x + 1| - \frac{1}{3}\arctan\frac{2x-1}{3} + C$$
$$= \frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} - \frac{1}{3}\arctan\frac{2x-1}{3} + C, \quad x \neq 1.$$

79 在什么样的条件下,积分$\displaystyle\int \frac{ax^2 + bx + c}{x^3(x-1)^2}dx$具有有理函数形式?

积分具有有理函数形式,如果在展开式中

$$\frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}=\frac{A}{x^3}+\frac{B}{x^2}+\frac{D}{x}+\frac{E}{(x-1)^2}+\frac{F}{x-1}$$

系数 D 和 F 为零.在如此假设下,有

$$ax^2+bx+c\equiv A(x^2-2x+1)+B(x^3-2x^2+x)+Ex^3.$$

令 x 的相同次幂的系数相等,得到方程组

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 0=B+E,\\ x^2 & a=A-2B,\\ x & b=-2A+B,\\ x^0 & c=A. \end{array}$$

从该方程组中消去未知参数 A,B,E 得到所求条件:

$$a+2b+3c=0.$$

利用奥斯特罗格拉茨基方法①求积分.

80 $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x+1)^3}$.

我们有

$$\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x+1)^3}=\frac{Ax^2+Bx+C}{(x-1)(x+1)^2}+D\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}+E\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}.$$

等式两边求导,得到

$$\frac{x}{(x-1)^2(x+1)^3}=\frac{(x^2-1)(2Ax+B)-(3x-1)(Ax^2+Bx+C)}{(x-1)^2(x+1)^3}+\frac{D}{x-1}+\frac{E}{x+1}.$$

通分并让分子相等,得到

$$x\equiv-Ax^3+(A-2B)x^2+(-2A+B-3C)x+C-B+$$
$$D(x-1)(x^3+3x^2+3x+1)+E(x^4-2x^2+1).$$

让上面恒等式两边 x 的相同幂次的系数相等,得到

$$\begin{array}{c|l} x^4 & 0=D+E,\\ x^3 & 0=-A+2D,\\ x^2 & 0=A-2B-2E,\\ x & 1=-2A+B-3C-2D,\\ x^0 & 0=C-B-D+E, \end{array}$$

解之得

---

① 设$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$为约化的有理函数,且 $Q(x)=\prod\limits_{i=1}^{k}(x-x_i)^{n_i}\prod\limits_{j}^{s}(a_jx^2+b_jx+q_j)^{m_j}$,则

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}\mathrm{d}x=\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}+\int\frac{P_2(x)}{Q_2(x)}\mathrm{d}x,$$

其中 $Q_1(x)=\prod\limits_{i=1}^{k}(x-x_i)^{n_i-1}\prod\limits_{j}^{s}(a_jx^2+b_jx+q_j)^{m_j-1}$, $Q_2(x)=\prod\limits_{i=1}^{k}(x-x_i)\prod\limits_{j=1}^{s}(a_jx^2+b_jx+q_j)$,而 $P_1(x)$和 $P_2(x)$分别是次数低于分母的多项式.

$$A = B = -\frac{1}{8}, \quad C = -\frac{1}{4}, \quad D = -E = -\frac{1}{16}.$$

从而

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x-1)^2(x+1)^3} = -\frac{x^2+x+2}{8(x-1)(x+1)^2} + \frac{1}{16}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right| + C, \quad x \neq \pm 1.$$

81 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^2}$.

我们有

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^2} = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3+1} + D\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} + \int \frac{Ex+F}{x^2-x+1}\mathrm{d}x.$$

求导并通分,得到恒等式 $1 \equiv -Ax^4 - 2Bx^3 - 3Cx^2 + 2Ax + B + D(x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - x + 1) + (Ex+F)(x^4 + x^3 + x + 1)$,于是

$$\begin{array}{c|l}
x^5 & 0 = D + E, \\
x^4 & 0 = -A - D + E + F, \\
x^3 & 0 = -2B + D + F, \\
x^2 & 0 = -3C + D + E, \\
x & 0 = 2A - D + E + F, \\
x^0 & 1 = B + D + F,
\end{array}$$

$$A = C = 0, \quad B = \frac{1}{3}, \quad D = -E = \frac{2}{9}, \quad F = \frac{4}{9}.$$

这样,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^3+1)^2} = \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{2}{9}\ln|x+1| - \frac{2}{9}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{1}{9}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{2}{3\ 3}\arctan\frac{2x-1}{3} + C, \quad x \neq -1.$$

82 $\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)^2}$.

我们有

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+2x+2} + \int \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x,$$

由此,求导并通分,得到恒等式

$$x^2 \equiv A(x^2+2x+2) - (Ax+B)(2x+2) + (Cx+D)(x^2+2x+2).$$

为确定未知参数可得方程组

$$\begin{array}{c|l}
x^3 & 0 = C, \\
x^2 & 1 = -A + 2C + D, \\
x & 0 = -2B + 2C + 2D, \\
x^0 & 0 = 2A - 2B + 2D,
\end{array}$$

解之得

$$A=0,\quad B=1,\quad C=0,\quad D=1.$$

所以

$$\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x^2+2x+2)^2}=\frac{1}{x^2+2x+2}+\arctan(x+1)+C.$$

83 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^4+1)^2}$.

我们有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^4+1)^2}=\frac{Ax^3+Bx^2+Cx+D}{x^4+1}+\int\frac{Ex^3+Fx^2+Gx+H}{x^4+1}\mathrm{d}x,$$

由此

$$\begin{aligned}1\equiv{}&(3Ax^2+2Bx+C)(x^4+1)-4x^3(Ax^3+Bx^2+Cx+D)+\\&(x^4+1)(Ex^3+Fx^2+Gx+H);\end{aligned}$$

$$\begin{array}{l|l@{\qquad}l|l} x^7 & 0=E, & x^3 & 0=-4D+E,\\ x^6 & 0=-A+F, & x^2 & 0=3A+F,\\ x^5 & 0=-2B+G, & x & 0=2B+G,\\ x^4 & 0=-3C+H, & x^0 & 1=C+H.\end{array}$$

解之得

$$A=B=D=E=F=G=0,\quad C=\frac{1}{4},\quad H=\frac{3}{4}.$$

从而

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^4+1)^2}=\frac{x}{4(x^4+1)}+\frac{3}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4+1}.$$

利用例 75 **的结果,最后得到**

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^4+1)^2}=\frac{x}{4(x^4+1)}+\frac{3}{16\ 2}\ln\frac{x^2+x\ 2+1}{x^2-x\ 2+1}+\frac{3}{8\ 2}\arctan\frac{x\ 2}{1-x^2}+\frac{3\pi\varepsilon(x)}{8\ 2}+C,$$

式中 $\varepsilon(x)$ **与例** 75 **中的定义相同**.

84 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^4-1)^3}$.

利用奥斯特罗格拉茨基方法,积分可表为形式

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^4-1)^2}=\frac{Ax^7+Bx^6+Cx^5+Dx^4+Ex^3+Fx^2+Gx+H}{(x^4-1)^2}+\int\frac{Kx^3+Lx^2+Mx+N}{x^4-1}\mathrm{d}x.$$

求导并通分,得到恒等式

$$\begin{aligned}1\equiv{}&(x^4-1)(7Ax^6+6Bx^5+5Cx^4+4Dx^3+3Ex^2+2Fx+G)-\\&8x^3(Ax^7+Bx^6+Cx^5+Dx^4+Ex^3+Fx^2+Gx+H)+\end{aligned}$$

$$(x^8 - 2x + 1)(Kx^3 + Lx^2 + Mx + N).$$

比较等式两边 x 的相同幂次的系数,有

$$\begin{array}{l|l}
x^{11} & 0 = K, \\
x^{10} & 0 = -A + L, \\
x^9 & 0 = -2B + M, \\
x^8 & 0 = -3C + N, \\
x^7 & 0 = -4D - 2K, \\
x^6 & 0 = -7A - 5E - 2L,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
x^5 & 0 = -6B - 6F - 2M, \\
x^4 & 0 = -5C - 7G - 2N, \\
x^3 & 0 = -4D - 8H + K, \\
x^2 & 0 = -3E + L, \\
x & 0 = -2F + M, \\
x^0 & 1 = -G + N.
\end{array}$$

解之得

$$A = B = D = E = F = H = K = L = M = 0, \quad C = \frac{7}{32}, \quad G = -\frac{11}{32}, \quad N = \frac{21}{32}.$$

这样
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^4 - 1)^3} = \frac{7x^5 - 11x}{32(x^4 - 1)^2} + \frac{21}{32}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4 - 1}.$$

计算最后的那个积分,得到

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^4 - 1)^3} = \frac{7x^5 - 11x}{32(x^4 - 1)^2} + \frac{21}{128}\ln\left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| - \frac{21}{64}\arctan x + C.$$

85 分离出积分$\int \frac{x^2 + 1}{(x^4 + x^2 + 1)^2}\mathrm{d}x$中的有理部分.

我们有

$$\int \frac{x^2 + 1}{(x^4 + x^2 + 1)^2}\mathrm{d}x = \frac{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}{x^4 + x^2 + 1} + \int \frac{Ex^3 + Fx^2 + Gx + H}{x^4 + x^2 + 1}\mathrm{d}x,$$

由此可得恒等式

$$x^2 + 1 \equiv (x^4 + x^2 + 1)(3Ax^2 + 2Bx + C) - (4x^3 + 2x)(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) + (x^4 + x^2 + 1)(Ex^3 + Fx^2 + Gx + H).$$

由方程组

$$\begin{array}{l|l}
x^7 & 0 = E, \\
x^6 & 0 = -A + F, \\
x^5 & 0 = -2B + G + E, \\
x^4 & 0 = A - 3C + F + H,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
x^3 & 0 = -4D + G + E, \\
x^2 & 1 = 3A - C + H + F, \\
x & 0 = 2B - 2D + G, \\
x^0 & 1 = C + H.
\end{array}$$

解之得
$$A = \frac{1}{6}, \quad C = \frac{1}{3}, B = D = G = 0, F = \frac{1}{6}, \quad H = \frac{2}{3}.$$

这样,有理部分等于表达式

$$\frac{x^3 + 2x}{6(x^4 + x^2 + 1)}.$$

86 $\displaystyle\int \frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}\mathrm{d}x$.

展开式具有形式

$$\int \frac{4x^5-1}{(x^5+x+1)^2}\mathrm{d}x=\frac{Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E}{x^5+x+1}+\int \frac{Fx^4+Gx^3+Hx^2+Kx+L}{x^5+x+1}\mathrm{d}x,$$

由此得到恒等式

$$\begin{aligned}4x^5-1\equiv\ &(x^5+x+1)(4Ax^3+3Bx^2+2Cx+D)-\\&(5x^4+1)(Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+E)+\\&(x^5+x+1)(Fx^4+Gx^3+Hx^2+Kx+L);\end{aligned}$$

解方程组

$$\begin{array}{l|l}x^9&0=F,\\x^8&0=-A+G,\\x^7&0=-2B+H,\\x^6&0=-3C+K,\\x^5&4=-4D+L+F,\end{array}\qquad\begin{array}{l|l}x^4&0=3A-5E+G+F,\\x^3&0=4A+2B+G+H,\\x^2&0=3B+C+K+H,\\x&0=2C+L+K,\\x^0&-1=D-E+L,\end{array}$$

得到 $A=B=C=E=F=G=H=K=L=0,\quad D=-1$.

这样,积分有自己的有理部分

$$\frac{-x}{x^5+x+1}.$$

运用各种方法,求下列积分.

87 $\displaystyle\int \frac{x^2+x}{x^6+1}\mathrm{d}x$.

我们有

$$\int \frac{x^2+x}{x^6+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}(x^3)}{x^6+1}+\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2)}{x^6+1}.$$

利用例 73,**最后有**

$$\int \frac{x^2+x}{x^6+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\arctan x^3+\frac{1}{2\sqrt{3}}\arctan\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{12}\ln\frac{(x^2+1)^2}{x^4-x^2+1}+C.$$

88 $\displaystyle\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}\mathrm{d}x$.

设 $x^4=t$,**有**

$$\int \frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int \frac{(t-3)\mathrm{d}t}{t(t+1)(t+2)}.$$

函数展开成简单分式具有形式

$$\frac{t-3}{t(t+1)(t+2)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{t+2},$$

由此 $t-3\equiv A(t+1)(t+2)+Bt(t+2)+Ct(t+1)$.

依次假设 $t=0,-1,-2$,**得到**

$$A=-\frac{3}{2},\quad B=4,\quad C=-\frac{5}{2}.$$

这样

$$\int\frac{x^4-3}{x(x^8+3x^4+2)}\mathrm{d}x=-\frac{3}{8}\ln|t|+\ln|t+1|-\frac{5}{8}\ln|t+2|+C$$

$$=-\frac{3}{8}\ln x^4+\ln(x^4+1)-\frac{5}{8}\ln(x^4+2)+C,\quad x\neq 0.$$

89 $\int\frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\mathrm{d}x$.

我们有

$$\int\frac{x^{2n-1}}{x^n+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int\frac{x^n\mathrm{d}(x^n)}{x^n+1}=\frac{1}{n}\int\frac{(x^n+1)-1}{x^n+1}\mathrm{d}(x^n)$$

$$=\frac{1}{n}\int\left(1-\frac{1}{x^n+1}\right)\mathrm{d}(x^n)=\frac{1}{n}(x^n-\ln|x^n+1|)+C,$$

当 n 为偶数时，$-\infty<x<+\infty$，而当 n 为奇数时，$x\neq-1$.

90 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+1)^2}$.

分子分母同乘 x^4，得到

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x(x^{10}+1)^2}=\frac{1}{5}\int\frac{\mathrm{d}(x^5)}{x^5(x^{10}+1)^2}=\frac{1}{5}\int\frac{(x^{10}+1)-x^{10}}{x^5(x^{10}+1)^2}\mathrm{d}(x^5)$$

$$=\frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{x^5(x^{10}+1)}-\frac{x^5}{(x^{10}+1)^2}\right)\mathrm{d}(x^5)$$

$$=\frac{1}{5}\int\left(\frac{(x^{10}+1)-x^{10}}{x^5(x^{10}+1)}-\frac{x^5}{(x^{10}+1)^2}\right)\mathrm{d}(x^5)$$

$$=\frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{x^5}-\frac{x^5}{x^{10}+1}-\frac{x^5}{(x^{10}+1)^2}\right)\mathrm{d}(x^5)$$

$$=\frac{1}{5}\ln|x^5|-\frac{1}{10}\ln(x^{10}+1)+\frac{1}{10(x^{10}+1)}+C$$

$$=\frac{1}{10}\left(\ln\frac{x^{10}}{x^{10}+1}+\frac{1}{x^{10}+1}\right)+C,\quad x\neq 0.$$

91 $\int\frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\mathrm{d}x$.

假设 $x^7=t$，得到

$$\int\frac{1-x^7}{x(1+x^7)}\mathrm{d}x=\frac{1}{7}\int\frac{1-t}{t(1+t)}\mathrm{d}t=\frac{1}{7}\int\frac{(1+t)-2t}{t(1+t)}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{7}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{1+t}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{7}(\ln|t|-2\ln|1+t|)+C$$

$$=\frac{1}{7}\ln\frac{|x^7|}{(1+x^7)^2}+C,\quad x\neq 0,-1.$$

92 $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x$.

当 $x\neq 0$ **时,有**

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x=\int \frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{x^2+1+\dfrac{1}{x^2}}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}{\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+3}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}+\begin{cases}C_1, & x>0,\\ C_2, & x<0.\end{cases}$$

由原函数的连续性有

$$\Phi(-0)=\frac{\pi}{2\sqrt{3}}+C_2=-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}+C_1=\Phi(+0),$$

式中 $\Phi(x)$**为被积函数的原函数**.

这样

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\arctan\dfrac{x^2-1}{x\sqrt{3}}+\dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}\operatorname{sgn}x+C, & x\neq 0,\\ C, & x=0.\end{cases}$$

93 $\displaystyle\int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}\mathrm{d}x$.

经过简单的变化有

$$\int \frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}\mathrm{d}x=\int \frac{1-\dfrac{1}{x^2}}{x^2+x+1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}{\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-1}$$

$$=\int \frac{\mathrm{d}\left(x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\right)}{\left(x+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\ln\frac{2x^2+(1-\sqrt{5})x+2}{2x^2+(1+\sqrt{5})x+2}+C.$$

94 $\displaystyle\int \frac{x^5-x}{x^8+1}\mathrm{d}x$.

类似于上例有

$$\int \frac{x^5-x}{x^8+1}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int \frac{x^4-1}{x^8+1}\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}\int \frac{1-\dfrac{1}{x^4}}{x^4+\dfrac{1}{x^4}}\mathrm{d}(x^2)$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-2}=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^4-x^2\sqrt{2}+1}{x^4+x^2\sqrt{2}+1}+C.$$

95 $\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\mathrm{d}x$.

经适当变换有

$$\int \frac{x^4+1}{x^6+1}\mathrm{d}x=\int \frac{(x^4-x^2+1)+x^2}{(x^2+1)(x^4-x^2+1)}\mathrm{d}x=\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}+\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^6+1}$$

$$=\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}+\frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}(x^3)}{x^6+1}=\arctan x+\frac{1}{3}\arctan(x^3)+C.$$

96 推导出计算积分 $I_n=\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^2+bx+c)^n}$, $a\neq 0$ **的递推公式,并利用该公式计算**

$$I_3=\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^3}.$$

利用恒等式

$$ax^2+bx+c=\frac{1}{4a}((2ax+b)^2+(4ac-b^2)),$$

并作变换 $2ax+b=t$, **得到**

$$I_n=\frac{(4a)^n}{2a}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\Delta)^n}, \text{式中 } \Delta=4ac-b^2 .$$

对 I_{n-1} **分部积分,得到**

$$I_{n-1}=\frac{(4a)^{n-1}}{2a}\quad\frac{t}{(t^2+\Delta)^{n-1}}-2(1-n)\int \frac{t^2+\Delta-\Delta}{(t^2+\Delta)^n}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{(4a)^{n-1}t}{2a(t^2+\Delta)^{n-1}}-\frac{(4a)^{n-1}(1-n)}{a}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\Delta)^{n-1}}+(1-n)\frac{(4a)^{n-1}}{a}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+\Delta)^n},$$

即

$$I_{n-1}=\frac{(4a)^{n-1}t}{2a(t^2+\Delta)^{n-1}}-2(1-n)I_{n-1}+\frac{2(1-n)\Delta}{4a}I_n .$$

从此式解出 I_n **为**

$$I_n=-\frac{(4a)^{n-1}t}{\Delta(1-n)(t^2+\Delta)^{n-1}}+\frac{(3-2n)2a}{(1-n)\Delta}I_{n-1} .$$

代入 t **的值,最后可得**

$$I_n=\frac{2ax+b}{(n-1)\Delta(ax^2+bx+c)^{n-1}}+\frac{2n-3}{n-1}\cdot\frac{2a}{\Delta}I_{n-1} .$$

在所求的式中 $a=b=c=1$, $n=3$, $\Delta=4$.**这样**

$$I_3=\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2}+\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}$$

$$=\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2}+\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{2}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$$

$$=\frac{2x+1}{6(x^2+x+1)^2}+\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{3\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

练　习　题

用待定未知系数法计算积分:

87 $\displaystyle\int\frac{2x^2-5}{x^4-5x^2+6}\,dx$.　　**88** $\displaystyle\int\left(\frac{x}{x^2+6x+3}\right)^2 dx$.

89 $\displaystyle\int\frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)}\,dx$.　　**90** $\displaystyle\int\frac{dx}{x(4+x^2)^2(1+x^2)}$.

91 $\displaystyle\int\frac{dx}{x^7-4x^5+6x^3-4x}$.　　**92** $\displaystyle\int\frac{x^5-x^2-1}{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}\,dx$.

找出下列积分中的有理部分:

93 $\displaystyle\int\frac{3x^5+4x^3+x}{(x^3+x+1)^2}\,dx$.　　**94** $\displaystyle\int\frac{(2-3x+x^2)\,dx}{(x+1)^2(x^2+x+1)^2}$.

95 $\displaystyle\int\frac{2-5x^4}{(x^6+1)^2}\,dx$.　　**96** $\displaystyle\int\frac{1-64x^7-7x^8}{(1+x^8)^2}\,dx$.

3　无理函数的积分

用把被积函数化成有理函数的方法,计算下列积分.

97 $\displaystyle\int\frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,dx,\quad x\neq-1$.

设 $x+2=t^3$,**有**

$$\int\frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,dx=3\int\frac{t^6-2t^3}{t^3+t-2}\,dt=3\int\left(t^3-t+\frac{t^2-2t}{(t-1)(t^2+t+2)}\right)dt$$

$$=\frac{3}{4}t^4-\frac{3}{2}t^2+\int\frac{3t^2-6t}{(t-1)(t^2+t+2)}\,dt.$$

对最后一个积分利用待定未知系数方法有

$$\frac{3t^2-6t}{(t-1)(t^2+t+2)}=\frac{A}{t-1}+\frac{Bt+C}{t^2+t+2}.$$

由此可得

$$A=-\frac{3}{4},\quad B=\frac{15}{4},\quad C=-\frac{3}{2}.$$

计算积分

$$\int\frac{3t^2-6t}{(t-1)(t^2+t+2)}\,dt=-\frac{3}{4}\int\frac{dt}{t-1}+\frac{15}{4}\int\frac{t-\frac{2}{5}}{t^2+t+2}\,dt$$

$$=-\frac{3}{4}\ln|t-1|+\frac{15}{8}\ln|t^2+t+2|-\frac{27}{4\sqrt{7}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{7}}+C.$$

$$\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,dx = \frac{3}{4}t^4 - \frac{3}{2}t^2 - \frac{3}{4}\ln|t-1| + \frac{15}{8}\ln(t^2+t+2) - \frac{27}{4\sqrt{7}}\arctan\frac{2t+1}{\sqrt{7}} + C.$$

98 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}},\quad a>0.$

注意到

$$I = \int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{x^3(a-x)}} = \int \sqrt[4]{\frac{x}{a-x}}\,dx,\quad 0<x<a.$$

做变换 $\dfrac{x}{a-x} = t^4$**,把积分化为有理函数的积分**

$$I = 4a\int \frac{t^4\,dt}{(t^4+1)^2} = a\int t\,d\left(\frac{t^4}{1+t^4}\right),\quad 0<t<+\infty.$$

分部积分,得到

$$I = a\frac{t^5}{1+t^4} - a\int\frac{t^4}{1+t^4}dt = \frac{at^5}{1+t^4} - at + a\int\frac{dt}{1+t^4} = -\frac{at}{1+t^4} + a\int\frac{dt}{1+t^4}.$$

最后一个积分由变换被积表达式计算

$$\int\frac{dt}{1+t^4} = \frac{1}{2}\int\frac{(1+t^2)+(1-t^2)}{1+t^4}dt = \frac{1}{2}\int\frac{1+t^2}{1+t^4}dt - \frac{1}{2}\int\frac{t^2-1}{1+t^4}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int\frac{1+\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}}dt - \frac{1}{2}\int\frac{1-\frac{1}{t^2}}{t^2+\frac{1}{t^2}}dt = \frac{1}{2}\int\frac{d\left(t-\frac{1}{t}\right)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2} + \frac{1}{2}\int\frac{d\left(t+\frac{1}{t}\right)}{2-\left(t+\frac{1}{t}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{t^2-1}{t\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1}.$$

这样,最后有

$$I = -\frac{at}{1+t^4} + \frac{a}{4\sqrt{2}}\ln\frac{t^2+t\sqrt{2}+1}{t^2-t\sqrt{2}+1} + \frac{a}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{t^2-1}{t\sqrt{2}} + C.$$

99 $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}}$ (n**为自然数**).

注意到

$$I = \int\frac{dx}{\sqrt[n]{(x-a)^{n+1}(x-b)^{n-1}}} = \int\frac{dx}{\sqrt[n]{\left(\frac{x-b}{x-a}\right)^{n-1}(x-a)^{2n}}}.$$

令 $\sqrt[n]{\dfrac{x-b}{x-a}} = t$**,则** $\dfrac{dx}{(x-a)^2} = \dfrac{n}{b-a}t^{n-1}dt$**,且**

$$I = \frac{n}{b-a}\int \frac{t^{n-1}}{t^{n-1}}\mathrm{d}t = \frac{n}{b-a}\int \mathrm{d}t = \frac{n}{b-a}t + C = \frac{n}{b-a}\sqrt[n]{\frac{x-b}{x-a}} + C.$$

利用公式

$$\int \frac{P_n(x)}{y}\mathrm{d}x = Q_{n-1}(x)y + \lambda\int\frac{\mathrm{d}x}{y},$$

这里 $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$, $P_n(x)$**为** n **次多项式**, $Q_{n-1}(x)$**为** $n-1$ **次多项式且** λ**为实数,计算下列积分**.

100 $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}\mathrm{d}x$.

我们有

$$\int\frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2x-x^2}} = (Ax^2 + Bx + C)\sqrt{1+2x-x^2} + \lambda\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2-(x-1)^2}}.$$

恒等式两边求导并通分,得到

$$x^3 \equiv (2Ax + B)(1+2x-x^2) + (Ax^2 + Bx + C)(1-x) + \lambda,$$

由此

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 1 = -3A, \\ x^2 & 0 = 5A - 2B, \\ x & 0 = 2A + 3B - C, \\ x^0 & 0 = B + C + \lambda, \end{array}$$

$$A = -\frac{1}{3},\quad B = -\frac{5}{6},\quad C = -\frac{19}{3},\quad \lambda = 4.$$

这样,最后在$|x-1| < \sqrt{2}$**时,有**

$$\int\frac{x^3\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1+2x-x^2}} = -\frac{2x^2+5x+19}{6}\sqrt{1+2x-x^2} + 4\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{2}} + C.$$

101 $\displaystyle\int x^4\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x$.

我们有

$$\int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \int\frac{a^2x^4 - x^6}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$= (Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F)\sqrt{a^2-x^2} + \lambda\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

由此

$$a^2x^4 - x^6 \equiv (5Ax^4 + 4Bx^3 + 3Cx^2 + 2Dx + E)(a^2 - x^2) - x(Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 + Dx^2 + Ex + F) + \lambda.$$

为确定展式中的未知系数,让 x **的相同幂次的系数相等**

$$\begin{array}{l|l} x^6 & -1=-6A, \\ x^5 & 0=-5B, \\ x^4 & a^2=5a^2A-4C, \\ x^3 & 0=4Ba^2-3D, \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} x^2 & 0=3Ca^2-2E, \\ x & 0=2Da^2-F, \\ x^0 & 0=Ea^2+\lambda. \end{array}$$

由该方程组解得

$$A=\frac{1}{6},\quad B=0,\quad C=-\frac{a^2}{24},\quad D=0,\quad E=-\frac{a^4}{16},\quad F=0,\quad \lambda=\frac{a^6}{16}.$$

从而

$$\int x^4\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\left(\frac{x^5}{6}-\frac{a^2x^3}{24}-\frac{a^4x}{16}\right)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^6}{16}\arcsin\frac{x}{|a|}+C,\quad |x|\leq|a|.$$

102 $\displaystyle\int\frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}$.

利用代换 $x+1=\dfrac{1}{t}$,得到

$$I=\int\frac{dx}{(x+1)^5\sqrt{x^2+2x}}=-\int\frac{t^4\,d|t|}{\sqrt{1-t^2}}.$$

我们有

$$-\int\frac{t^4\,d|t|}{\sqrt{1-t^2}}=(A|t|^3+B|t|^2+C|t|+D)\sqrt{1-t^2}+\lambda\int\frac{d|t|}{\sqrt{1-t^2}}.$$

关于$|t|$求导并通分,得到恒等式

$$-|t|^4\equiv(3A|t|^2+2B|t|+C)(1-|t|^2)-|t|(A|t|^3+B|t|^2+C|t|+D)+\lambda,$$

由此

$$\begin{array}{l|l} |t|^4 & -1=-4A, \\ |t|^3 & 0=-3B, \\ |t|^2 & 0=3A-2C, \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} |t| & 0=2B-D, \\ |t|^0 & 0=C+\lambda, \end{array}$$

$$A=\frac{1}{4},\quad B=0,\quad C=\frac{3}{8},\quad D=0,\quad \lambda=-\frac{3}{8}.$$

这样

$$\begin{aligned} I&=\left(\frac{1}{4|x+1|^3}+\frac{3}{8|x+1|}\right)\sqrt{1-\frac{1}{(x+1)^2}}-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{|x+1|}+C \\ &=\frac{3x^2+6x+5}{8(x+1)^4}\sqrt{x^2+2x}-\frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{|x+1|}+C,\quad x<-2,\quad x>0. \end{aligned}$$

103　$\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

我们有

$$\frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}=\frac{x^2+2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}};$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2}}=\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right).$$

为计算积分$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}$**应用代换**$\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}=t$,**则**

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2}}=\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}=\arctan t=\arctan\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}.$$

从而

$$\int \frac{\sqrt{x^2+2}}{x^2+1}\mathrm{d}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)+\arctan\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}+C.$$

化二次三项式成标准形式,计算下列积分 .

104　$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$.

$$I=\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$$

$$=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2+2x-x^2}}+\int \frac{(2x-4)\mathrm{d}x}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}.$$

其中的第一个积分可直接计算

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2+2x-x^2}}=\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3-(x-1)^2}}=\arcsin\frac{x-1}{\sqrt{3}}.$$

对第二个积分,使用变换 $x-1=z$ **.则积分化成**

$$\int \frac{2z-2}{(3+z^2)\sqrt{3-z^2}}\mathrm{d}z,$$

该积分拆成两个积分

$$I_1+I_2=\int \frac{2z\mathrm{d}z}{(3+z^2)\sqrt{3-z^2}}-2\int \frac{\mathrm{d}z}{(3+z^2)\sqrt{3-z^2}}.$$

第一个积分用代换 $\sqrt{3-z^2}=t$ **计算,得**

$$I_1=-2\int \frac{\mathrm{d}t}{6-t^2}=-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{\sqrt{6}+t}{\sqrt{6}-t}\right|.$$

代回原变量 x**,有**

$$I_1=-\frac{1}{\sqrt{6}}\ln\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}.$$

为计算积分 $I_2=-2\int\frac{dz}{(3+z^2)\sqrt{3-z^2}}$，设 $\frac{z}{\sqrt{3-z^2}}=t$，则

$$I_2=-\frac{2}{3}\int\frac{dt}{2t^2+1}=-\frac{\sqrt2}{3}\arctan\sqrt2 t=-\frac{\sqrt2}{3}\arctan\frac{\sqrt2(x-1)}{\sqrt{2+2x-x^2}}.$$

这样，最后有

$$I=\arcsin\frac{x-1}{\sqrt3}-\frac{1}{\sqrt6}\ln\frac{\sqrt6+\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt6-\sqrt{2+2x-x^2}}-\frac{\sqrt2}{3}\arctan\frac{\sqrt2(x-1)}{\sqrt{2+2x-x^2}}+C.$$

105 借助于分式线性代换 $x=\frac{\alpha+\beta t}{1+t}$，计算积分

$$I=\int\frac{dx}{(x^2-x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$$

利用所建议的代换，得到

$$x^2-x+1=\frac{(\alpha+\beta t)^2-(1+t)(\alpha+\beta t)+(1+t)^2}{(1+t)^2};$$

$$x^2+x+1=\frac{(\alpha+\beta t)^2+(1+t)(\alpha+\beta t)+(1+t)^2}{(1+t)^2}.$$

令 t 前面的系数等于零，确定数 α 和 β，从而

$$2\alpha\beta-\alpha-\beta+2=0,\quad 2\alpha\beta+\alpha+\beta+2=0.$$

解之可得 $\alpha=1$，$\beta=-1$。于是

$$x=\frac{1-t}{1+t},\quad dx=\frac{-2dt}{(1+t)^2},\quad x^2-x+1=\frac{3t^2+1}{(1+t)^2};$$

$$\sqrt{x^2+x+1}=\frac{\sqrt{t^2+3}}{1+t}\ (\text{当 } 1+t>0 \text{ 时，即当 } x>-1 \text{ 时}).$$

这样

$$I=-2\int\frac{(t+1)dt}{(3t^2+1)\sqrt{t^2+3}}=-2\int\frac{tdt}{(3t^2+1)\sqrt{t^2+3}}-2\int\frac{dt}{(3t^2+1)\sqrt{t^2+3}}.$$

为计算上式右端第一个积分，引进代换 $\sqrt{t^2+3}=u$，则

$$-2\int\frac{tdt}{(3t^2+1)\sqrt{t^2+3}}=2\int\frac{du}{8-3u^2}=\frac{1}{2\sqrt6}\ln\left|\frac{2\sqrt2+\sqrt3 u}{2\sqrt2-\sqrt3 u}\right|,$$

$$=\frac{1}{2\sqrt6}\ln\left|\frac{2\sqrt2+\sqrt{3(t^2+3)}}{2\sqrt2-\sqrt{3(t^2+3)}}\right|.$$

返回到原来的变量 x，有

$$-2\int\frac{tdt}{(3t^2+1)\sqrt{t^2+3}}=\frac{1}{\sqrt6}\ln\left|\frac{(1+x)\sqrt2+\sqrt{3(x^2+x+1)}}{\sqrt{x^2-x+1}}\right|.$$

对第二个积分的计算，借助代换 $\frac{t}{\sqrt{t^2+3}}=z$，有

$$-2\int\frac{\mathrm{d}t}{(3t^2+1)\quad t^2+3}=-2\int\frac{\mathrm{d}z}{8z^2+1}=-\frac{1}{2}\arctan\frac{2\quad 2z}{1}=-\frac{1}{2}\arctan\frac{2(1-x)}{x^2+x+1}.$$

最后有

$$I=\frac{1}{6}\ln\left|\frac{(1+x)\quad 2+\quad 3(x^2+x+1)}{x^2-x+1}\right|-\frac{1}{2}\arctan\frac{2(1-x)}{x^2+x+1}+C.$$

运用欧拉代换

1) $ax^2+bx+c=\pm\quad ax+z$,**如果** $a>0$;

2) $ax^2+bx+c=xz\pm\quad c$,**如果** $c>0$;

3) $ax^2+bx+c\equiv\quad a(x-x_1)(x-x_2)=z(x-x_1)$.

计算下列积分.

106 $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\quad x^2+x+1}$.

这里 $a=1>0$,**因而使用第一个代换**

$$x^2+x+1=-x+z.$$

由此 $x=\dfrac{z^2-1}{1+2z}$, $\mathrm{d}x=\dfrac{2z^2+2z+2}{(1+2z)^2}\mathrm{d}z$.**把这些量代入积分**,**有**

$$I=\int\frac{2z^2+2z+2}{z(1+2z)^2}\mathrm{d}z.$$

被积函数展成如下形式

$$\frac{2z^2+2z+2}{z(1+2z)^2}=\frac{A}{(1+2z)^2}+\frac{B}{1+2z}+\frac{C}{z}.$$

为确定未知参数 A, B **和** C,**得到方程组** $2=2B+4C$; $2=A+B+4C$; $2=C$,**由此** $A=-3$; $B=-3$; $C=2$.**这样**

$$I=-3\int\frac{\mathrm{d}z}{(1+2z)^2}-3\int\frac{\mathrm{d}z}{1+2z}+2\int\frac{\mathrm{d}z}{z}=\frac{3}{2(1+2z)}+\frac{1}{2}\ln\frac{z^4}{|1+2z|^3}+C,$$

式中 $z=x+\quad x^2+x+1$, $x\neq-1$.

107 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\quad 1-2x-x^2}$.

由于 $C=1>0$,**所以运用欧拉第二代换法**

$$xt-1=\quad 1-2x-x^2,$$

得到

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\quad 1-2x-x^2}=\int\frac{-t^2+2t+1}{t(t-1)(t^2+1)}\mathrm{d}t.$$

把被积函数展成最简单分式的和得

$$\frac{-t^2+2t+1}{t(t-1)(t^2+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}+\frac{Ct+D}{t^2+1}.$$

该等式两边乘以公分母得

$$-t^2+2t+1\equiv A(t^3-t^2+t-1)+B(t^3+t)+(Ct+D)(t^2-t),$$

再令 t **的相同幂次的系数相等得**

$$\begin{array}{c|l} t^3 & 0=A+B+C, \\ t^2 & -1=-A-C+D, \\ t & 2=A+B-D, \\ t^0 & 1=-A. \end{array}$$

由此解得 $A=-1,\quad B=1,\quad C=0,\quad D=2.$

从而

$$I=-\int\frac{\mathrm{d}t}{t}+\int\frac{\mathrm{d}t}{t-1}-2\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}=\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|-2\arctan t+C,$$

式中 $xt=1+\sqrt{1-2x-x^2}$.

108 $\displaystyle\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\mathrm{d}x.$

这里 $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$**,因此,可令** $\sqrt{x^2+3x+2}=t(x+1)$**(欧拉第三代换).于是有**

$$x=\frac{2-t^2}{t^2-1},\quad \mathrm{d}x=-\frac{2t\mathrm{d}t}{(t^2-1)^2};$$

$$I=\int\frac{x-\sqrt{x^2+3x+2}}{x+\sqrt{x^2+3x+2}}\mathrm{d}x=\int\frac{-2t^2-4t}{(t-2)(t-1)(t+1)^3}\mathrm{d}t$$

将被积函数展成如下形式

$$\frac{-2t^2-4t}{(t-2)(t-1)(t+1)^3}=\frac{A}{(t+1)^3}+\frac{B}{(t+1)^2}+\frac{C}{t+1}+\frac{D}{t-1}+\frac{E}{t-2},$$

由此

$$-2t^2-4t\equiv A(t-2)(t-1)+B(t-2)(t^2-1)+C(t^2-3t+2)(t^2+2t+1)+$$
$$D(t-2)(t^3+3t^2+3t+1)+E(t-1)(t^3+3t^2+3t+1).$$

依次取 $t=-1,1,2$**,得到** $A=\dfrac{1}{3},\quad D=\dfrac{3}{4},\quad E=-\dfrac{16}{27}$ **然后,让上面恒等式中** t^4 **和** t^3 **的系数相等,得到方程组** $0=C+D+E;\ 0=B-C+D+2E$**,由此得到剩下的未知参数**

$$C=-\frac{17}{108},\quad B=\frac{5}{18}.$$

这样

$$I=-\frac{1}{6(t+1)^2}-\frac{5}{18(t+1)}-\frac{17}{108}\ln|t+1|+\frac{3}{4}\ln|t-1|-\frac{16}{27}\ln|t-2|+C.$$

对微分二项式的积分

$$\int x^m (a+bx^n)^p \mathrm{d}x,$$

式中 m, n **和** p **为有理数,只在下列三种情况下可化为有理函数的积分:**

1 . **若** p **为整数,设** $x=t^N$, **其中** N **为分数** m **与** n **的公分母;**

2 . **若** $\frac{m+1}{n}$ **为整数,设** $a+bx^n=t^N$, **其中** N **为分数** p **的分母;**

3 . **若** $\frac{m+1}{n}+p$ **为整数,使用代换** $ax^{-n}+b=t^N$, **其中** N **为分数** p **的分母 .**

如果 $n=1$, **则上述情况等价于下列情形** 1) p **为整数;** 2) m **为整数;** 3) $m+p$ **为整数 .**

109 $\int x^3+x^4\,\mathrm{d}x$.

当 $x>0$, **或** $x<-1$ **时有**

$$I=\int x^3+x^4\,\mathrm{d}x=\int x^2(x^{-1}+1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x .$$

这里 $n=-1$, $m=2$ **及** $\frac{m+1}{n}$ **为整数 .因而假设** $x^{-1}+1=t^2$, **得到** $I=-\int\frac{2t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2-1)^4}=-2I_3-2I_4$, **式中** $I_n=\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2-1)^n}$, $n=3,4$.

为计算积分 I_n, **找出递推公式 .令**

$$I_n=\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2-a^2)^n},\quad a\neq 0 .$$

对 I_{n-1} **分部积分,有**

$$\begin{aligned} I_{n-1}&=\int\frac{\mathrm{d}t}{(t^2-a^2)^{n-1}}=\frac{t}{(t^2-a^2)^n}-2(n-1)\int\frac{t^2\,\mathrm{d}t}{(t^2-a^2)^n}\\ &=\frac{t}{(t^2-a^2)^{n-1}}-2(n-1)\int\frac{(t^2-a^2)+a^2}{(t^2-a^2)^n}\mathrm{d}t\\ &=\frac{t}{(t^2-a^2)^{n-1}}-2(n-1)I_{n-1}+2(n-1)a^2I_n, \end{aligned}$$

由此

$$I_n=-\frac{t}{2(n-1)a^2(t^2-a^2)^{n-1}}-\frac{2n-3}{2(n-1)a^2}I_{n-1} .$$

依次使用这个公式(对应 $a=1$), **得到**

$$\begin{aligned} I&=2I_3-2\quad-\frac{t}{6(t^2-1)^3}-\frac{5}{6}I_3=\frac{t}{3(t^2-1)^3}-\frac{1}{3}I_3\\ &=\frac{t}{3(t^2-1)^3}-\frac{1}{3}\quad\frac{-t}{4(t^2-1)^2}-\frac{3}{4}I_2\\ &=\frac{t}{3(t^2-1)^3}+\frac{t}{12(t^2-1)^2}+\frac{1}{4}\quad\frac{-t}{2(t^2-1)}-\frac{1}{2}I_1 \end{aligned}$$

$$=\frac{t}{3(t^2-1)^3}+\frac{t}{12(t^2-1)^2}-\frac{t}{8(t^2-1)}-\frac{1}{16}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C.$$

返回到变量 x,**最后有**

$$I=\sqrt{x+x^2}\,\frac{8x^2+2x-3}{24}+\frac{1}{8}\ln\frac{\sqrt{1+x^{-1}}+1}{\sqrt{|x|}}+C.$$

110 $\displaystyle\int\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\mathrm{d}x$.

这里 $p=-2$.**运用第一个变换** $x=t^6$,**可得**

$$I=\int\frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}\mathrm{d}x=6\int\frac{t^8\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}=6\int\left(t^4-2t^2+3-\frac{4t^2+3}{(1+t^2)^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{6}{5}t^5-4t^3+18t-18\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}-6\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}.$$

由于

$$\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}=-\frac{1}{2}\int t\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+t^2}\right)=-\frac{t}{2(1+t^2)}+\frac{1}{2}\arctan t,$$

所以最后有

$$I=\frac{6}{5}t^5-4t^3+18t+\frac{3t}{1+t^2}-21\arctan t+C,\quad t=\sqrt[6]{x}.$$

111 $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$.

此时,$m=1$,$n=\dfrac{2}{3}$,$p=-\dfrac{1}{2}$**而**$\dfrac{m+1}{n}=3$.**假设** $1+x^{\frac{2}{3}}=t^2$,**则**

$$I=\int\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}=3\int(t^2-1)^2\mathrm{d}t=\frac{3}{5}t^5-2t^3+3t+C,$$

式中 $t=\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}$.

112 $\displaystyle\int\sqrt[3]{3x-x^3}\,\mathrm{d}x$.

这里 $m=\dfrac{1}{3}$,$n=2$,$p=\dfrac{1}{3}$**而**$\dfrac{m+1}{n}+p=1$.**令** $3x^{-2}-1=t^3$,**则**

$$I=\int\sqrt[3]{3x-x^3}\,\mathrm{d}x=-\frac{9}{2}\int\frac{t^3\mathrm{d}t}{(t^3+1)^2}=\frac{3}{2}\int t\mathrm{d}\left(\frac{1}{t^3+1}\right)=\frac{3t}{2(t^3+1)}-\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^3+1}.$$

由于(**参见例** 73)

$$\int\frac{\mathrm{d}t}{t^3+1}=\frac{1}{6}\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}},$$

则最后有

$$I=\frac{3t}{2(t^3+1)}-\frac{1}{4}\ln\frac{(t+1)^2}{t^2-t+1}-\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\frac{2t-1}{\sqrt{3}}+C,$$

其中 $t=\dfrac{{}^{3}\ \ 3x-x^{3}}{x}$, $0<x<\ \ 3$, $x\leqslant-\ \ 3$.

练 习 题

求下列无理函数的积分:

97 $\displaystyle\int\frac{x+1}{(\ \ x+1-1)^{2}}\mathrm{d}x$.

98 $\displaystyle\int\frac{(x+1)(x+2)}{2x^{3}+9x^{2}+15x+9}\mathrm{d}x$.

99 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(\ \ x+2+1)\ \ \ \ x+2-1}$.

100 $\displaystyle\int\frac{x^{2}-1}{x\ \ \ \ x^{4}+3x^{2}+1}\mathrm{d}x$.

101 $\displaystyle\int\frac{x^{4}\mathrm{d}x}{1-x^{2}}$.

102 $\displaystyle\int\frac{8x^{4}+7x^{3}+6x^{2}+2x+3}{x^{2}+x+1}\mathrm{d}x$.

103 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^{4}+4x^{3}+6x^{2}+4x)\ \ \ \ x^{2}+2x+2}$.

104 $\displaystyle\int\frac{x\mathrm{d}x}{(x+2)^{3}\ \ \ \ x^{2}+1}$.

105 $\displaystyle\int\frac{2x^{3}-x^{2}+x+1}{(x^{2}-x+1)\ \ \ \ x^{2}+x+1}\mathrm{d}x$.

106 $\displaystyle\int\frac{x^{3}-1}{x\ \ \ \ x^{4}+1}\mathrm{d}x$.

107 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^{11}\ \ \ \ 1+x^{4}}$.

108 $\displaystyle\int\frac{{}^{3}\ \ 1+{}^{4}\ \ x}{x}\mathrm{d}x$.

4 三角函数的积分

形如

$$\int\sin^{m}x\cos^{n}x\,\mathrm{d}x,$$

的积分,其中 m,n 为整数,可以借助人为的变换或者使用降阶公式进行计算.

计算下列积分.

113 $\displaystyle\int\frac{\cos^{4}x}{\sin^{3}x}\mathrm{d}x$.

分部积分,得到

$$\int\frac{\cos^{4}x}{\sin^{3}x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int\cos^{3}x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\sin^{2}x}\right)=-\frac{1}{2}\left(\frac{\cos^{3}x}{\sin^{2}x}+3\int\frac{\cos^{2}x}{\sin x}\mathrm{d}x\right)$$

$$=-\frac{3}{2}\cos x-\frac{\cos^{3}x}{2\sin^{2}x}-\frac{3}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C,\quad x\neq k\pi,\quad k\in\mathbf{Z}.$$

114 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^{3}x}$.

类似于上例

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^{3}x}=-\int\frac{\mathrm{d}(\cot x)}{\sin x}=-\frac{\cot x}{\sin x}-\int\frac{\cos^{2}x}{\sin^{3}x}\mathrm{d}x=-\frac{\cos x}{\sin^{2}x}-\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^{3}x}+\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|;$$

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + C, \quad x \neq k\pi .$$

115 $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x}$.

我们有

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos^5 x} = \int (1+\tan^2 x)^3 \frac{d\tan x}{\tan^3 x}$$

$$= -\frac{1}{2\tan^2 x} + 3\ln|\tan x| + \frac{3}{2}\tan^2 x + \frac{1}{4}\tan^4 x + C, \quad x \neq \frac{k\pi}{2} .$$

116 $\int \tan^5 x dx$.

显然

$$\int \tan^5 x dx = \frac{1}{2}\int (\sec^2 x - 1)^2 \frac{d(\sec^2 x)}{\sec^2 x} = \frac{\sec^4 x}{4} - \sec^2 x + \frac{1}{2}\ln(\sec^2 x) + C$$

$$= \frac{\tan^4 x}{4} - \frac{\tan^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,$$

或者

$$\int \tan^5 x dx = \int \tan^3 x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \frac{\tan^4 x}{4} - \int \tan x\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx$$

$$= \frac{\tan^4 x}{4} - \frac{\tan^2 x}{2} - \ln|\cos x| + C .$$

117 $\int \cot^6 x dx$.

在进行简单的变化之后,有

$$\int \cot^6 x dx = \int \cot^4 x\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx = -\frac{\cot^5 x}{5} - \int \cot^2 x\left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1\right)dx$$

$$= -\frac{\cot^5 x}{5} + \frac{\cot^3 x}{3} - \cot x - x + C, \quad x \neq k\pi .$$

118 $\int \frac{dx}{\cos x\sqrt[3]{\sin^2 x}}$.

令 $t^3 = \sin x$, $x \neq \frac{k\pi}{2}$, **有**

$$\int \frac{dx}{\cos x\sqrt[3]{\sin^2 x}} = \int \frac{d(\sin x)}{(1-\sin^2 x)(\sin^2 x)^{\frac{1}{3}}} = 3\int \frac{dt}{1-t^6} = \frac{3}{2}\int \frac{dt}{1-t^3} + \frac{3}{2}\int \frac{dt}{1+t^3}$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\frac{(1-t)^2}{t^2+t+1} + \frac{3}{2}\arctan\frac{2t+1}{3} + \frac{1}{4}\ln\frac{(1+t)^2}{t^2-t+1} + \frac{3}{2}\arctan\frac{2t-1}{3}$$

$$= \frac{1}{4}\ln\frac{(1+t)^2(t^2+t+1)}{(t^2-t+1)(t-1)^2} + \frac{3}{2}\arctan\frac{3t}{1-t^2} + C .$$

119　推导出下列积分的降阶公式.

1) $I_n=\int\sin^n x\mathrm{d}x$;　　2) $K_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^n x}$,　$n>2$.

分部积分,得

1) $I_n=-\int\sin^{n-1}x\mathrm{d}(\cos x)=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)\int\sin^{n-2}x\cos^2 x\mathrm{d}x$

$=-\cos x\sin^{n-1}x+(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n$,

由此

$$I_n=\frac{1}{n}((n-1)I_{n-2}-\cos x\sin^{n-1}x),\quad n=3,4,\cdots.$$

2) $K_n=\int\frac{\mathrm{d}(\sin x)}{\cos^{n+1}x}=\frac{\sin x}{\cos^{n+1}x}-(n+1)\int\frac{\sin^2 x}{\cos^{n+2}x}\mathrm{d}x$

$=\frac{\sin x}{\cos^{n+1}x}-(n+1)K_{n+2}+(n+1)K_n$,

由此

$$K_{n+2}=\frac{\sin x}{(n+1)\cos^{n+1}x}+\frac{n}{n+1}K_n,\quad n\in\mathbb{Z}_0,\quad x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

借助公式:

Ⅰ. $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$;

Ⅱ. $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta))$;

Ⅲ. $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta))$.

计算积分.

120　$\int\sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}\mathrm{d}x$.

我们有

$$\int\sin x\sin\frac{x}{2}\sin\frac{x}{3}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{3x}{2}\right)\sin\frac{x}{3}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{4}\int\left(-\sin\frac{x}{6}+\sin\frac{5x}{6}+\sin\frac{7x}{6}-\sin\frac{11x}{6}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3}{2}\cos\frac{x}{6}-\frac{3}{10}\cos\frac{5x}{6}-\frac{3}{14}\cos\frac{7x}{6}+\frac{3}{32}\cos\frac{11x}{6}+C.$$

121　$\int\sin^3 2x\cos^2 3x\mathrm{d}x$.

运用公式Ⅲ,有

$$\int\sin^3 2x\cos^2 3x\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\int(3\sin 2x-\sin 6x)(1+\cos 6x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{8}\int\left(3\sin 2x - \frac{3}{2}\sin 4x + \frac{3}{2}\sin 8x - \sin 6x - \frac{1}{2}\sin 12x\right)\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{3}{16}\cos 2x + \frac{3}{64}\cos 4x - \frac{3}{128}\cos 8x + \frac{1}{48}\cos 6x + \frac{1}{192}\cos 12x + C.$$

运用公式:

Ⅳ. $\sin(\alpha-\beta) \equiv \sin((x+\alpha) - (x+\beta))$;

Ⅴ. $\cos(\alpha-\beta) \equiv \cos((x+\alpha) - (x+\beta))$.

求积分.

122 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\sin(x+b)}$.

我们有

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin(x+a)\sin(x+b)} = \frac{1}{\sin(a-b)}\int\frac{\sin((x+a)-(x+b))}{\sin(x+a)\sin(x+b)}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\left(\int\frac{\cos(x+b)}{\sin(x+b)}\mathrm{d}x - \int\frac{\cos(x+a)}{\sin(x+a)}\mathrm{d}x\right)$$

$$= \frac{1}{\sin(a-b)}\ln\left|\frac{\sin(x+b)}{\sin(x+a)}\right| + C, \quad \sin(a-b)\neq 0.$$

123 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x - \sin a}$.

由恒等式 $\cos a = \cos\left(\frac{x-a}{2} - \frac{x+a}{2}\right)$, **有**

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x - \sin a} = \frac{1}{2\cos a}\int\frac{\cos\left(\frac{x-a}{2} - \frac{x+a}{2}\right)}{\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\cos a}\ln\left|\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\cos\frac{x+a}{2}}\right| + C,$$

$$\cos a \neq 0, \quad \sin x \neq \sin a.$$

124 $\displaystyle\int\tan x\tan(x+a)\,\mathrm{d}x$.

$$\int\tan x\tan(x+a)\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{\cos x\cos(x+a) + \sin x\sin(x+a)}{\cos x\cos(x+a)} - 1\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int\frac{\cos a}{\cos x\cos(x+a)}\mathrm{d}x - x = -x + \cot a\ln\left|\frac{\cos x}{\cos(x+a)}\right| + C,$$

其中 $\sin a\neq 0$, $\cos x\neq 0$, $\cos(x+a)\neq 0$.

形如

$$\int R(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$$

的积分, **其中** R **为有理函数**, **在一般情况下可借助变换** $\tan\frac{x}{2} = t$ **转化成有理函数的积分**.

① 如果满足

$$R(-\sin x, \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x),$$

或者

$$R(\sin x, -\cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x),$$

则利用变换 $\cos x = t$ 或者对应地用 $\sin x = t$ 将是有利的 .

② 如果满足

$$R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x),$$

则可使用变换 $\tan x = t$.

求积分:

125 $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\sin x - \cos x + 5}$.

设 $t = \tan\frac{x}{2}, (2n-1)\pi < x < (2n+1)\pi, n \in \mathbf{Z}$,得

$$I = \int \frac{\mathrm{d}t}{3t^2 + 2t + 2} = \frac{1}{5}\arctan\frac{3t+1}{5} + C_n = \frac{1}{5}\arctan\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{5} + C_n .$$

由原函数的连续性应有

$$I(2n\pi + \pi - 0) = I(2n\pi + \pi + 0), \quad \frac{\pi}{2\ 5} + C_n = \frac{-\pi}{2\ 5} + C_{n+1},$$

由此可得 $C_n = \frac{\pi n}{5} + C$, 其中 $C = C_0$ 为任意常数 .由不等式 $2n\pi < x + \pi < (2n+2)\pi; n < \frac{x+\pi}{2\pi} < n+1$, 应有 $n = \frac{x+\pi}{2\pi}$.这样

$$I = \frac{1}{5}\arctan\frac{3\tan\frac{x}{2}+1}{5} + \frac{\pi}{5}\ \frac{x+\pi}{2\pi} + C, \quad x \neq (2n+1)\pi;$$

$$I = \lim_{x\to(2n+1)\pi} I(x) = \frac{2n+1}{2\ 5}\pi, \quad x = (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbf{Z} .$$

126 $I = \int \frac{\sin^2 x\cos^2 x}{\sin^8 x + \cos^8 x}\mathrm{d}x$.

设 $t = \tan 2x, \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}, n \in \mathbf{Z}$.有

$$I = \int \frac{t^2\,\mathrm{d}t}{t^4 + 8t^2 + 8} = \frac{1 + \ 2}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 4 + 2\ 2} - \frac{2 - 1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 4 - 2\ 2}$$

$$= \frac{2 + \ 2}{4}\arctan\frac{t}{4 + 2\ 2} - \frac{2 - \ 2}{4}\arctan\frac{t}{4 - 2\ 2} + C_n$$

$$= \frac{2+\ \ 2}{4}\operatorname{arctan}\frac{\tan 2x}{4+2\ \ 2} - \frac{2-\ \ 2}{4}\operatorname{arctan}\frac{\tan 2x}{4-2\ \ 2} + C_n .$$

由原函数的连续性应有

$$I\ \frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}-0\ = I\ \frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}+0\ ,\quad n\in \mathrm{Z},$$

$$\frac{2+\ \ 2}{4}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{2+\ \ 2}{4}\cdot\frac{\pi}{2} + C_n = -\frac{2+\ \ 2}{4}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{2-\ \ 2}{4}\cdot\frac{\pi}{2} + C_{n+1},$$

由此(与例 125 相类似)得到

$$C_n = \frac{\pi}{4}\quad 2+\ \ 2-\ \ \ 2-\ \ 2\quad n + C,\quad C = C_0 ,$$

$$C_n = \frac{\pi}{4}\quad 2+\ \ 2-\ \ \ 2-\ \ 2\quad \frac{4x+\pi}{2\pi} .$$

从而

$$I(x) = \frac{2+\ \ 2}{4}\operatorname{arctan}\frac{\tan 2x}{4+2\ \ 2} - \frac{2-\ \ 2}{4}\operatorname{arctan}\frac{\tan 2x}{4-2\ \ 2} +$$

$$\frac{\pi}{4}\quad 2+\ \ 2-\ \ \ 2-\ \ 2\quad \frac{4x+\pi}{2\pi} + C,\quad x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2},$$

$$I\ \frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}\ = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}} I(x) .$$

127 **证明**

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^n} = \frac{A\sin x+B\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}} + C\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-2}},$$

其中 A, B, C 为未定参数 .

分部积分

$$I_n = \int\frac{\mathrm{d}(-a\cos x+b\sin x)}{(a\sin x+b\cos x)^{n+1}}$$

$$= \frac{-a\cos x+b\sin x}{(a\sin x+b\cos x)^{n+1}} - (n+1)\int\frac{(a\cos x-b\sin x)^2\,\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^{n+2}}$$

$$= \frac{-a\cos x+b\sin x}{(a\sin x+b\cos x)^{n+1}} - (n+1)\int\frac{(a\cos x-b\sin x)^2+(b\cos x+a\sin x)^2}{(a\sin x+b\cos x)^{n+2}}\mathrm{d}x,$$

由此

$$I_n = \frac{1}{(n-1)(a^2+b^2)}\quad (n-2)I_{n-2} + \frac{b\sin x-a\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}} .$$

128 **求** $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(\sin x+2\cos x)^3}$.

利用上面证明的公式,求得

$$I_3 = \frac{1}{10}\int\left(\frac{\mathrm{d}x}{\sin x + 2\cos x} + \frac{2\sin x - \cos x}{(\sin x + 2\cos x)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{10}\left(\frac{1}{5}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\arctan 2\right)\right| + \frac{2\sin x - \cos x}{(\sin x + 2\cos x)^2}\right) + C,\quad x \neq k\pi - \arctan 2 .$$

129　证明

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(a + b\cos x)^n} = \frac{A\sin x}{(a + b\cos x)^{n-1}} + B\int\frac{\mathrm{d}x}{(a + b\cos x)^{n-1}} + C\int\frac{\mathrm{d}x}{(a + b\cos x)^{n-2}},\quad |a| \neq |b|,$$

如果 n **为大于** 1 **的自然数,确定系数** A, B, C .

$$I_{n-2} = \int\frac{\mathrm{d}x}{(a + b\cos x)^{n-2}} = \int\frac{a + b\cos x}{(a + b\cos x)^{n-1}}\mathrm{d}x = aI_{n-1} + b\int\frac{\mathrm{d}\sin x}{(a + b\cos x)^{n-1}}$$

$$= aI_{n-1} + \frac{b\sin x}{(a + b\cos x)^{n-1}} - (n-1)\int\frac{b^2\sin^2 x}{(a + b\cos x)^n}\mathrm{d}x,$$

由此,利用恒等式

$$b^2\sin^2 x = -(a^2 - b^2) + 2a(a + b\cos x) - (a + b\cos x)^2,$$

得到

$$I_{n-2} = aI_{n-1} + \frac{b\sin x}{(a + b\cos x)^{n-1}} + (a^2 - b^2)(n-1)I_n - 2a(n-1)I_{n-1} + (n-1)I_{n-2},$$

$$I_n = -\frac{b\sin x}{(n-1)(a^2 - b^2)(a + b\cos x)^{n-1}} + \frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2 - b^2)}I_{n-1} - \frac{n-2}{(n-1)(a^2 - b^2)}I_{n-2} .$$

这样

$$A = -\frac{b}{(n-1)(a^2 - b^2)},\quad B = \frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2 - b^2)},\quad C = \frac{n-2}{(n-1)(a^2 - b^2)} .$$

130　如果 1) $0 < \varepsilon < 1$; 2) $\varepsilon > 1$.**求** $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1 + \varepsilon\cos x}$.

设 $t = \tan\frac{x}{2}, (2n-1)\pi < x < (2n+1)\pi, n \in \mathbf{Z}$.**则**

$$I = \int\frac{\mathrm{d}x}{1 + \varepsilon\cos x} = \frac{2}{1-\varepsilon}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2 + \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}} .$$

1) $$I = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\left(t\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\right) + C_n = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\frac{\sqrt{1-\varepsilon}\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\varepsilon}} + C_n .$$

与例 125 **类似求得**

$$I = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\frac{\sqrt{1-\varepsilon}\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{1+\varepsilon}} + \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right] + C,\quad x \neq (2n+1)\pi,$$

$$I((2n+1)\pi) = \lim_{x\to(2n+1)\pi} I(x),$$

2) $I = \dfrac{1}{\varepsilon^2 - 1}\ln\left|\dfrac{t - \dfrac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}}{t + \dfrac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}}\right| + C, \quad x \neq 2n\pi + \pi.$

131　**如果** $0 < \varepsilon < 1$，**求** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\varepsilon\cos x)^2}$.

利用例 129 **的公式，令** $a = 1, b = \varepsilon, n = 2$，**得到**

$$I(x) = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+\varepsilon\cos x)^2} = \frac{1}{1-\varepsilon^2}\left(\frac{-\varepsilon\sin x}{1+\varepsilon\cos x} + \int\frac{\mathrm{d}x}{1+\varepsilon\cos x}\right)$$

$$= \frac{1}{1-\varepsilon^2}\frac{-\varepsilon\sin x}{1+\varepsilon\cos x} + \frac{2}{1-\varepsilon^2}\arctan\frac{1-\varepsilon\tan\frac{x}{2}}{1+\varepsilon} + \frac{2\pi}{1-\varepsilon^2}\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right] + C,$$

$$x \neq 2n\pi + \pi,$$

$$I(2n\pi + \pi) = \lim_{x\to 2n\pi+\pi} I(x).$$

练　习　题

求下列三角函数的积分：

109 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(\cos x + \sin x)^4}$.　**110** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x + \cos^3 x}$.　**111** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^5 x - \sin^5 x}$.

112 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(\sin x + 2\sec x)^2}$.　**113** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x\cos x}$.　**114** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos x\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)}$.

115 $\displaystyle\int \frac{\cos x + \sin x}{\sin 2x}\mathrm{d}x$.　**116** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{4 + 3\tan x}$.

5　各种超越函数的积分

132　**证明，如果** $P(x)$ **是** n **次多项式，则**

$$\int P(x)\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{ax}\left(\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \cdots + (-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right) + C.$$

可借助于分部积分法加以证明.我们有

$$\int P(x)\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}P(x) - \frac{1}{a}\int\mathrm{e}^{ax}P'(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}P(x) - \frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}P'(x) - \frac{1}{a}\int\mathrm{e}^{ax}P''(x)\mathrm{d}x\right)$$

$$= \mathrm{e}^{ax}\left(\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2}\right) + \frac{1}{a^2}\int\mathrm{e}^{ax}P''(x)\mathrm{d}x.$$

应用数学归纳法有

$$\int P(x)\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{ax}\left[\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \cdots + (-1)^k\frac{P^{(k)}(x)}{a^{k+1}}\right] + (-1)^{k+1}\frac{1}{k+1}\int \mathrm{e}^{ax}P^{(k+1)}(x)\,\mathrm{d}x, \quad k \leq n.$$

令 $k=n$ 并且注意到 $P^{(n+1)}(x)\equiv 0$,得到所要证明的式子.

133 证明,如果 $P(x)$为 n次多项式,

$$\int P(x)\cos ax\,\mathrm{d}x = \frac{\sin ax}{a}\left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - \cdots\right] + \frac{\cos ax}{a^2}\left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{(5)}(x)}{a^4} - \cdots\right] + C$$

且

$$\int P(x)\sin ax\,\mathrm{d}x = -\frac{\cos ax}{a}\left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - \cdots\right] + \frac{\sin ax}{a^2}\left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{(5)}(x)}{a^4} - \cdots\right] + C.$$

利用例 132 加以证明.用 $\mathrm{i}a$ 替换那里的 a,其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$,得到

$$\int P(x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}\left[-\mathrm{i}\frac{P(x)}{a} + \frac{P'(x)}{a^2} + \mathrm{i}\frac{P''(x)}{a^3} + \cdots\right] + C.$$

利用欧拉公式,并且区分实部与虚部.即得.

134 证明,积分$\int R(x)\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x$,其中 R 为分母只具有实根的有理函数,可以通过基本初等函数与超越函数

$$\int \frac{\mathrm{e}^{ax}}{x}\mathrm{d}x = \mathrm{li}(\mathrm{e}^{ax}) + C,$$

来表示,其中 $\mathrm{li}\,x = \int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$.

有理函数可表为

$$R(x) = \frac{M(x)}{N(x)},$$

式中 $M(x)$及 $N(x)$为多项式.分离出有理函数的整式部分(如果存在的话),有

$$R(x) = P(x) + \sum_k \sum_{i=1}^{m_k} \frac{A_{ki}}{(x-x_k)^i},$$

其中 m_k 为根 x_i 的重数,A_{ij} 为未知系数.最后对 $R(x)$积分,得

$$\int R(x)\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \int P(x)\mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x + \sum_k \sum_{i=1}^{m_k} A_{ki}\int \frac{\mathrm{e}^{ax}}{(x-x_k)^i}\mathrm{d}x.$$

右边第一个积分重复用 l 次分部积分(l为多项式 $P(x)$的次数),对第二个积分,有

$$I_{ik}=\int\frac{e^{ax}\,dx}{(x-x_k)^i}=\int e^{ax}\,d\left(-\frac{1}{(i-1)(x-x_k)^i}\right)=-\frac{e^{ax}}{(i-1)(x-x_k)^i}+\frac{a}{i-1}\int\frac{e^{ax}\,dx}{(x-x_k)^{i-1}}$$

$$=e^{ax}\left[-\frac{1}{(i-1)(x-x_k)^{i-1}}-\frac{a}{(i-1)(i-2)(x-x_k)^{i-2}}-\cdots-\frac{a^{i-2}}{(i-1)(i-2)\cdots1(x-x_k)}\right]+\frac{a^{i-2}}{(i-1)(i-2)\cdots1}\int\frac{e^{ax}\,dx}{x-x_k}$$

$$=-e^{ax}\left[\frac{1}{(i-1)(x-x_k)^{i-1}}+\frac{a}{(i-1)(i-2)(x-x_k)^{i-2}}+\cdots+\frac{a^{i-2}}{(i-1)!(x-x_k)}\right]+\frac{a^{i-2}e^{ax_k}}{(i-1)!}\int\frac{e^{a(x-x_k)}}{x-x_k}\,d(x-x_k)$$

$$=-e^{ax}\left[\frac{1}{(i-1)(x-x_k)^{i-1}}+\frac{a}{(i-1)(i-2)(x-x_k)^{i-2}}+\cdots+\frac{a^{i-2}}{(i-1)!(x-x_k)}\right]+\frac{a^{i-2}e^{ax_k}}{(i-1)!}\operatorname{li}\left(e^{a(x-x_k)}\right).$$

于是

$$\int R(x)e^{ax}\,dx=R_1(x)+\sum_k\sum_{i=1}^{m_k}A_{ki}I_{ik}.$$

135 在什么条件下,积分$\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^x\,dx$是基本初等函数.其中 $P\left(\frac{1}{x}\right)=a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}$,而 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 为常数.

用例 134 的记号,分部积分,得到

$$\int P\left(\frac{1}{x}\right)e^x\,dx=\int\left(a_0+\frac{a_1}{x}+\cdots+\frac{a_n}{x^n}\right)e^x\,dx$$

$$=a_0e^x+a_1\operatorname{li}(e^x)-\frac{a_2}{x}e^x+a_2\operatorname{li}(e^x)-\frac{a_3}{2x^2}-\frac{a_3}{2x}+\frac{a_3}{2}\operatorname{li}(e^x)-\cdots-$$

$$\frac{a_n}{(n-1)x^{n-1}}-\frac{a_n}{(n-1)(n-2)x^{n-2}}-\cdots-\frac{a_n}{(n-1)!x}+\frac{a_n}{(n-1)!}\operatorname{li}(e^x).$$

由此,如果

$$a_1+\frac{a_2}{1!}+\frac{a_3}{2!}+\cdots+\frac{a_n}{(n-1)!}=0,$$

则所给积分是基本初等函数.

求积分:

136 $\int\left(1-\frac{2}{x}\right)^2e^x\,dx$.

用例 134 的记号,分部积分,得到

$$\int \left(1-\frac{2}{x}\right)^2 e^x \, dx=\int \left(1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}\right) e^x \, dx = e^x - 4\operatorname{li}(e^x) - \frac{4}{x}e^x + 4\operatorname{li}(e^x)$$

$$= e^x\left(1-\frac{4}{x}\right) + C, \quad x \neq 0 .$$

练　习　题

求下列超越函数的积分:

117 $\int \frac{x e^{ax}}{(1+ax)^2} dx$.　　**118** $\int \frac{e^{ax}}{x} dx$.　　**119** $\int \frac{dx}{(\operatorname{ch} x+1)^2}$.

120 $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^3 x}$.　　**121** $\int \operatorname{ch}^4 x \, dx$.　　**122** $\int \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x \, dx$.

123 $\int \frac{e^{2x}}{x^2-3x+2} dx$.

6　函数积分的几个例子

137　$\int \frac{dx}{1+x^4+x^8}$.

把分母写成形式

$$1+x^4+x^8=(x^4+1)^2-x^4=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1),$$

把被积函数展成简单分式的和

$$\frac{1}{1+x^4+x^8}=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1}{x^4+x^2+1}+\frac{1-x^2}{x^4-x^2+1}\right).$$

对右边表达式各项积分,得到

$$\int \frac{x^2+1}{x^4+x^2+1} dx=\int \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+3}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}+\frac{\pi}{2\sqrt{3}}\operatorname{sgn} x, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

$$\int \frac{1-x^2}{x^4-x^2+1} dx=-\int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-3}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}\right|.$$

所以,所求积分等于

$$\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{3}}\left(\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x^2+x\sqrt{3}+1}{x^2-x\sqrt{3}+1}\right|+\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} x\right)+C, & x\neq 0,\\ C, & x=0.\end{cases}$$

138　瑏 $=\int \frac{dx}{(2+\sin x)^2}$.

应用例 131 **的结果,得到**

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(2+\sin x)^2}=-\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\left(2+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)^2}=-I=\frac{1}{3}\cdot\frac{\cos x}{2+\sin x}+\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x};$$

最后一个积分可借助于万能变换 $t=\tan\frac{x}{2}$, $2n\pi-\pi<x<\pi+2n\pi$, $n\in Z_0$, **去计算**

$$I(x)=\int\frac{\mathrm{d}x}{2+\sin x}=\frac{2}{3}\arctan\frac{2\tan\frac{x}{2}-1}{3}+C_n\ .$$

由条件 $I(\pi+2n\pi-0)=I(\pi+2n\pi+0)$, **与解例** 125 **题时类似可求得**

$$C_n=\frac{2\pi}{3}n+C,\quad C=C_0,\quad 2n\pi-\pi<x<\pi+2n\pi\ .$$

这样

$$\tilde{I}(x)=\int\frac{\mathrm{d}x}{(2+\sin x)^2}=\frac{1}{3}\frac{\cos x}{2+\sin x}+\frac{4}{3\ 3}\arctan\frac{2\tan\frac{x}{2}+1}{3}+$$

$$\frac{4}{3\ 3}\ \frac{x+\pi}{2\pi}+C,\quad x\neq 2n\pi+\pi;$$

$$\tilde{I}(2n\pi+\pi)=\lim_{x\to 2n\pi+\pi}I(x)\ .$$

139 $\int|x|\,\mathrm{d}x$.

当 $x>0$ **时**, **有**

$$\int x\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+C_1;$$

类似地, **当** $x<0$ **时**

$$-\int x\mathrm{d}x=-\frac{x^2}{2}+C_2\ .$$

在点 $x=0$, **由原函数的定义应有** $C_1=C_2=C$, **其中** C **为任意常数** . **所以对任意的** x **有**

$$\int|x|\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\operatorname{sgn}x+C=\frac{x|x|}{2}+C\ .$$

140 $\int\varphi(x)\mathrm{d}x$, **其中** $\varphi(x)$ **为数** x **到与其最近的整数的距离** .

由题给条件 $\varphi(x)=|x-n|$, $n-\frac{1}{2}\leqslant x<n+\frac{1}{2}$, $n\in Z_0$, **所以**

$$I(x)=\int\varphi(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(x-n)|x-n|+C_n,\quad n-\frac{1}{2}\leqslant x<n+\frac{1}{2}\ .$$

由原函数的连续性, **得**

$$I\ n+\frac{1}{2}-0\ =I\ n+\frac{1}{2}\ ,$$

即$\frac{1}{8}+C_n=-\frac{1}{8}+C_{n+1}$, $C_{n+1}=C_n+\frac{1}{4}$,由此 $C_n=\frac{n}{4}+C$,其中 $C=C_0$ 为任意常数

由于 $n\leq x+\frac{1}{2}<n+1$,则 $n=\ \ x+\frac{1}{2}\ $.最后可得

$$I(x)=\frac{1}{2}\ x-\ \ x+\frac{1}{2}\ \ \left|x-\ \ x+\frac{1}{2}\ \right|+\frac{1}{4}\ x+\frac{1}{2}\ +C.$$

141　$\int[x]\ |\sin\pi x|\,\mathrm{d}x$.

根据整数部分的定义有

$$[x]\ |\sin\pi x|=(-1)^n n\sin\pi x,\quad n\leq x<n+1,\quad n\in \mathrm{Z}_0\ .$$

所以

$$\int[x]\ |\sin\pi x|\,\mathrm{d}x=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi}n\cos\pi x+C_n,\quad n\leq x<n+1.$$

由原函数的连续性,在点 $x=n+1$ 上可得等式

$$\left.\frac{(-1)^{n+1}}{\pi}n\cos\pi x+C_n\ \right|_{x=n+1}=\left.\frac{(-1)^{n+2}}{\pi}(n+1)\cos\pi x+C_{n+1}\ \right|_{x=n+1},$$

由此 $C_{n+1}=C_n+\frac{2n+1}{\pi}$.解之可得 $C_n=C+\frac{n^2}{\pi}$, $C=C_0$.因此

$$\int[x]\ |\sin\pi x|\,\mathrm{d}x=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi}\cos\pi x+n\ \frac{n}{\pi}\ +C,\quad n\leq x<n+1.$$

由于 x 在所指定范围内变化,所以总有 $n=[x]$.这样,最后有

$$\int[x]\ |\sin\pi x|\,\mathrm{d}x=\frac{[x]}{\pi}([x]-(-1)^{[x]}\cos\pi x)+C,$$

其中 C 为任意常数 .

142　设 $f(x)$为单调连续函数,而 $f^{-1}(x)$为它的反函数 . 证明,如果$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$,则

$$\int f^{-1}(x)\mathrm{d}x=xf^{-1}(x)-F(f^{-1}(x))+C.$$

由条件,成立等式

$$x=f(f^{-1}(x))=F'(f^{-1}(x)).$$

关于 $f^{-1}(x)$ 积分,得到

$$\int x\mathrm{d}(f^{-1}(x))=F(f^{-1}(x))+C,$$

由此

$$\int x\mathrm{d}(f^{-1}(x))=xf^{-1}(x)-\int f^{-1}(x)\mathrm{d}x=F(f^{-1}(x))+C.$$

练 习 题

利用各种方法,计算下列积分:

124 $\int \frac{x}{(e^{x^2}+1)^2}e^{\frac{5x^2}{4}}\,dx$.

125 $\int \frac{\sin x}{\cos^3 2x}\,dx$.

126 $\int \frac{\cos x}{\cos^3 2x}\,dx$.

127 $\int \frac{dx}{\sin x\sqrt[4]{\cos 2x}}$.

128 $\int \tan x\sqrt{\cos 2x}\,dx$.

129 $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x}\,dx$.

130 $\int \frac{x^2\,dx}{(x\sin x+\cos x)^2}$.

131 $\int \frac{x^2\,dx}{(\sin x - x\cos x)^2}$.

132 $\int \frac{\sin x\,dx}{1+\sin x}$.

133 $\int \frac{dx}{\cos x(1+\cos x)}$.

134 $\int x^x(1+\ln x)\,dx$.

135 $\int \frac{\arcsin e^x}{e^x}\,dx$.

136 $\int \frac{\arctan e^{x/2}}{e^{x/2}(1+e^x)}\,dx$.

137 $\int (|x+1|-|1-x|)\,dx$.

138 $\int \sqrt{x(1-x\sqrt{x})^{-1}}\,dx$.

139 $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^3+x^6}}$.

140 $\int \frac{[x]\,dx}{x^2+[x]^2}$, $x \geq 1$.

141 $\int \frac{dx}{1+[x]}$, $x>0$.

7 向量值函数与函数矩阵的积分

定理 1 向量值函数 $\boldsymbol{F}=(F_1, F_2, \cdots, F_m)$是向量值函数 $\boldsymbol{f}=(f_1, f_2, \cdots, f_m)$在区间 $X\subset\mathbb{R}$ 上的原函数,当且仅当在此区间上 F_i 是 f_i 的原函数, $i=1,\cdots,m$.

定理 2 类似地,函数矩阵 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$是函数矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$在区间 X 上的原函数,当且仅当在此区间上 b_{ij} 是函数 a_{ij} 的原函数, $i=1,\cdots,m$; $j=1,\cdots,n$.

计算向量值函数的积分.

143 $\int \left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}, \frac{1}{1+x^2}, \frac{1}{4+x^2}\right)dx$.

如果用记号 $\boldsymbol{I}$ 记所给定向量值函数的不定积分,则根据定理 1,有

$$\boldsymbol{I}(x)=\left(\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+C_1, \int\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}+C_2, \int\frac{dx}{1+x^2}+C_3, \int\frac{dx}{4+x^2}+C_4\right)$$

$$=\left(\arcsin x, \arcsin\frac{x}{2}, \arctan x, \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\right)+\boldsymbol{C},\ |x|\leq 1,$$

其中 $\boldsymbol{C}\in\mathbb{R}^4$ 为常数向量.

144 $\int \left(\frac{1}{1+x}, \frac{x}{1+x^2}, \cdots, \frac{x^{m-1}}{1+x^m}\right)dx$.

与上一例类似,有

$$\boldsymbol{I}(x)=\left(\ln|1+x|, \ln\sqrt{1+x^2}, \cdots, \ln\sqrt[m]{1+x^m}\right)+\boldsymbol{C}.$$

145　$\int(\cos x, \cos 2x, \cdots, \cos mx)\,\mathrm{d}x$.

我们有

$$\int(\cos x, \cos 2x, \cdots, \cos mx)\,\mathrm{d}x = \left(\sin x, \frac{\sin 2x}{2}, \cdots, \frac{\sin mx}{m}\right) + \boldsymbol{C}.$$

求函数矩阵的积分:

146　$\int\begin{pmatrix}\sin x & \sin 2x & \sin 3x & \sin 4x\\ \cos x & \cos 2x & \cos 3x & \cos 4x\\ \tan x & \tan 2x & \tan 3x & \tan 4x\end{pmatrix}\mathrm{d}x$.

设 $\boldsymbol{A}$为原函数矩阵,则

$$\boldsymbol{A}(x) = \begin{pmatrix} -\cos x & -\dfrac{\cos 2x}{2} & -\dfrac{\cos 3x}{3} & -\dfrac{\cos 4x}{4}\\ \sin x & \dfrac{\sin 2x}{2} & \dfrac{\sin 3x}{3} & \dfrac{\sin 4x}{4}\\ -\ln|\cos x| & -\ln|\cos 2x| & -\ln{}^{3}|\cos 3x| & -\ln{}^{4}|\cos 4x| \end{pmatrix},$$

且积分等于函数矩阵 $x\mapsto\boldsymbol{A}(x)+\boldsymbol{C}$,其中 $\boldsymbol{C}$为常数矩阵.

147　$\int(a_{ij})\,\mathrm{d}x$,　其中 $a_{ij} = x^{\frac{i}{j}}$, $i = 1,\cdots, m$; $j = 1,\cdots, n$,　$x > 0$.

对固定的 i和 j,有

$$\int x^{\frac{i}{j}}\,\mathrm{d}x = \frac{j}{i+j}x^{\frac{i+j}{j}} + c_{ij}.$$

从而$\int(a_{ij})\,\mathrm{d}x = (b_{ij}) + \boldsymbol{C}$,其中 $b_{ij} = \dfrac{j}{i+j}x^{\frac{i+j}{j}}$,且 $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ 为常数矩阵.

148　证明

$$\int(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}x)^{n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}x)^{n+1} + \boldsymbol{C}, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{E}$为单位矩阵, $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$为相同阶数的矩阵,且 $\boldsymbol{A}$为可逆矩阵, n为自然数.

只需证明(1)式右边部分的导数,等于右边被积函数矩阵,根据相乘矩阵的微分法,有

$$\left(\frac{1}{n+1}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}x)^{n+1}\right)' = \frac{\boldsymbol{A}^{-1}}{n+1}\left((\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}x)^{n}\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}x)^{n-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}x) + \cdots + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}x)^{n}\right).$$

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$与 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}x$ 可交换,则

$$\left(\frac{1}{n+1}\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}x)^{n+1}\right)' = \frac{\boldsymbol{A}^{-1}}{n+1}\boldsymbol{A}(n+1)(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}x)^{n} = (\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}x)^{n}.$$

练　习　题

求向量值函数的积分:

142　$\int(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$.

143　$\int(\tan x, \tan 2x, \tan 3x)\,\mathrm{d}x$,　$x\in\left(0, \dfrac{\pi}{6}\right)$.

144 $\int (x\sin x, x\sin 2x, \cdots, x\sin mx)\,\mathrm{d}x$.　　**145** $\int (x\mathrm{e}^{x^2}, x^3\mathrm{e}^{x^2}, x^5\mathrm{e}^{x^2})\,\mathrm{d}x$.

146 $\int (x, x^2, \cdots, x^m)\,\mathrm{d}x$.　　**147** $\int (x, x^2, \cdots, x^m)\ln x\,\mathrm{d}x,\quad x > 0$.

求函数矩阵的积分:

148 $$\int \begin{pmatrix} 2x+\cos 2x & x\cos x+\sin x+\dfrac{\sin x}{x}+\cos x\ln x \\ -x\sin x+\cos x+\dfrac{\cos x}{x}-\sin x\ln x & \cos 2x+2\dfrac{\ln x}{x} \end{pmatrix}\mathrm{d}x.$$

149 $$\int \begin{pmatrix} x & \sin x \\ \cos x & \ln x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \cos x \\ -\sin x & \dfrac{1}{x} \end{pmatrix}\mathrm{d}x.$$

150 $$\int \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix}^n \mathrm{d}x.$$

151 $$\int \left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin x & 0 \\ 0 & 0 & \cos x \end{pmatrix} \right)\mathrm{d}x.$$

152 **设函数方阵** $x \mapsto \boldsymbol{A}(x)$**的所有元素在区间**$(a, b)$**上可导,证明在该区间上有**

1) $\int (\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{A}'(x) + \boldsymbol{A}'(x)\boldsymbol{A}(x))\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{A}^2(x) + \boldsymbol{C}$;

2) $\int (\boldsymbol{A}^2(x)\boldsymbol{A}'(x) + \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{A}'(x)\boldsymbol{A}(x) + \boldsymbol{A}'(x)\boldsymbol{A}^2(x))\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{A}^3(x) + C$.

153 **证明**

$$\int \left[\boldsymbol{A}(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{B}(x) + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{A}(x)\right)\boldsymbol{B}(x) \right]\mathrm{d}x = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{B}(x) + \boldsymbol{C},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ **和** $\boldsymbol{B}$ **为函数方阵.**

154 **设** $\boldsymbol{A}$ **为常数方阵.矩阵** $\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}$ **定义为**

$$\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} = \lim_{n\to\infty}\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{n}\boldsymbol{A}x\right)^n.$$

证明

$$\int \mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x}\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{A}\mathrm{e}^{\boldsymbol{A}x} + \boldsymbol{C},$$

其中 $\boldsymbol{C}$ **为任意常数方阵.**

第 4 章　定　积　分

1　黎 曼 积 分

1.1　黎曼上积分与下积分,函数可积性准则

定义 1　有限点集$\{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$,其中 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$,称为区间$[a,b]$的一个分割 Π.

设 $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ 且 f 为在$[a,b]$上的有界函数,而 Π 为该区间的任意一个分割.称

$$\overline{S}_\Pi(f) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i,\quad \underline{S}_\Pi(f) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i,$$

为对应于分割 Π 的上积分和及下积分和,其中 $M_i = \sup\limits_{x_i \le x \le x_{i+1}} \{f(x)\}$,$m_i = \inf\limits_{x_i \le x \le x_{i+1}} \{f(x)\}$,$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$.

定义 2　数

$$\overline{\int} f\mathrm{d}x = \inf_{\{\Pi\}} \{\overline{S}_\Pi(f)\},\quad \underline{\int} f\mathrm{d}x = \sup_{\{\Pi\}} \{\underline{S}_\Pi(f)\},$$

其中上确界、下确界在$[a,b]$上所有可能的分割上取,分别称为函数 f 在区间$[a,b]$上的黎曼上积分和下积分.

定义 3　函数 f 称为在$[a,b]$上黎曼可积,如果$\overline{\int} f\mathrm{d}x = \underline{\int} f\mathrm{d}x$,而上、下积分的公共值称为函数 f 在该区间上的黎曼积分,记为$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

全体黎曼可积的函数 f 组成的集合记为 $f \in R[a,b]$.

可积性准则.函数 $f:[a,b]\to \mathbf{R}$ 在区间$[a,b]$上可积,当且仅当 $\forall \varepsilon > 0$,存在该区间的一个分割 Π,使得 $0 \le \overline{S}_\Pi(f) - \underline{S}_\Pi(f) < \varepsilon$.可积性准则可简写为:$f \in R[a,b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \Pi: 0 \le \overline{S}_\Pi(f) - \underline{S}_\Pi(f) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$,其中 $\omega_i = M_i - m_i$ 为函数 f 在区间$[x_i, x_{i+1}]$上的振幅.

1.2　作为积分和极限的黎曼积分

设 Π 为区间$[a,b]$的任意一个分割,而 $d(\Pi) = \max\limits_{0\le i\le n-1} \Delta x_i$.在每个区间段$[x_i, x_{i+1}]$上任取一点 ξ_i 且作积分和

$$S_\Pi(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

定义 $\lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f) \overset{\text{def}}{=} I$, 如果 $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$:

$$\forall \Pi \wedge d(\Pi) < \delta \quad | S_\Pi(f) - I | < \varepsilon .$$

定理 如果

1) 当 $d(\Pi) \to 0$ 时, $\exists \lim S_\Pi(f) = I$, 则 $f \in R[a, b]$ 且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I$;

2) $f \in R[a, b]$, 则 $\exists \lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

此定理建立了两个黎曼积分的等价定义 .

1.3 某些黎曼可积的函数类

定理 1 如果 $f \in C[a, b]$, 则 $f \in R[a, b]$.

定理 2 如果 f 为 $[a, b]$ 上的单调函数, 则 $f \in R[a, b]$.

1.4 勒贝格零测度和若尔当零测度

定义 1 区间 $[a, b]$ 的长度, 即数 $b - a$, 称为区间 $I = [a, b]$ 的测度 μI (区间 $J = (a, b)$ 的测度 μJ) .

定义 2 集合 $X \subset \mathbb{R}$ 具有勒贝格零测度, 如果 $\forall \varepsilon > 0$, 存在这样的由可数个闭区间 I_j 测度为 μ_j 组成的覆盖 $\Omega = \{I_j ; j \in \mathbb{N}\}$ (由可数个开区间 J_j 组成的覆盖 $W = \{J_j ; j \in \mathbb{N}\}$) 满足 $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu_j < \varepsilon$, 其中, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu_j = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j$.

可数点的集合 $X \subset \mathbb{R}$ 是具有勒贝格零测度的集合的例子 .

定义 3 集合 $X \subset \mathbb{R}$ 具有若尔当零测度, 如果 $\forall \varepsilon > 0$, 存在这样的由有限个测度为 μ_j 的闭区间 I_j (开区间 J_j) 组成的覆盖 $\Omega = \{I_j, j = 1, \cdots, n\}$ ($W = \{J_j ; j = 1, \cdots, n\}$), 满足 $\sum\limits_{j=1}^{n} \mu_j < \varepsilon$.

任何有限个点的集合 $X \subset \mathbb{R}$, 以及任何具有有限个聚点的可数点的集合 $Y \subset \mathbb{R}$, 都是具有若尔当零测度的例子 .

由定义 3 可知, 任何具有若尔当零测度的集合必具有勒贝格零测度 .

定理(勒贝格) 设 $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ 为有界函数, 而 $E \subset [a, b]$ 为其间断点的集合 . 则函数 f 在 $[a, b]$ 上黎曼可积, 当且仅当 E 是勒贝格零测集 .

根据勒贝格定理, 有界函数, 其间断点集合不超过可数个点或者具有若尔当零测度, 属于黎曼可积函数类 .

1.5　定义在任意有界集合上的函数的积分,若尔当可测集

定义 1　设 $E \quad X \quad \mathrm{R}$.函数 $\chi_E : X \to \mathrm{R}$,其中

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } x \in X \setminus E, \\ 1, & \text{如果 } x \in E, \end{cases}$$

称为集合 E 的特征函数 .

定义 2　设 $E \quad [a, b] \quad \mathrm{R}$, $f: [a, b] \to \mathrm{R}$ 为有界函数 .如果 $f\chi_E \in R[a, b]$,则

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\mathrm{def}}{=} \int_a^b f(x)\chi_E(x)\,\mathrm{d}x .$$

定义 3　设 $E \quad [a, b] \quad \mathrm{R}$, $f: E \to \mathrm{R}$ 为有界函数 .把 f 延拓到整个区间$[a, b]$上,构造函数

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in E, \\ 0, & x \in [a, b] \setminus E . \end{cases}$$

如果函数 F 在区间$[a, b]$上可积,则

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\mathrm{def}}{=} \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x .$$

定义 4　边界具有勒贝格零测度的有界集合 $E \quad \mathrm{R}$,称为若尔当可测,而积分

$$\int_E \mathrm{d}x = \int_a^b \chi_E(x)\,\mathrm{d}x,$$

其中,$[a, b]$为包含集合 E 的任意区间,称为集合 E 的若尔当测度,或它的长度 .

1.6　可由等式表达的积分的性质

1) 如果 $f \in R[a, b]$,则 $cf \in R[a, b]$,其中 c 为常数,并且

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x .$$

2) 如果 $f, g \in R[a, b]$,则 $f \pm g \in R[a, b]$,并且

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x .$$

3) 如果 $f \in R[a, b]$且 $c \in (a, b)$,则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \ (\text{可加性}) .$$

4) 如果函数 $f: [a, b] \to \mathrm{R}$ 在区间$[a, c]$及$[c, b]$上可积,则 $f \in R[a, b]$,并且

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x .$$

1.7 由不等式表达的积分的性质

1) **如果函数** f **在区间** $[a,b]$ **可积且** $f(x)\geq 0\ \forall\ x\in[a,b]$, **则** $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq 0$; **如果** $f(x)\geq 0$, $f\in C[a,b]$ **且在** $[a,b]$ **上** $f(x)\not\equiv 0$, **则** $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geq c>0$, **其中** c **为某一常数**.

2) **如果** $f(x)\leq g(x)\ \forall\ x\in[a,b]$ **且** $f,g\in R[a,b]$, **则**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

1.8 变量代换公式与分部积分

1) **假设满足条件**: ① $f\in C[a,b]$; ② **区间** $[a,b]$ **是某函数** $x: t\mapsto g(t)$, $\alpha\leq t\leq\beta$ **的值域, 且该函数在** (α,β) **上有连续导函数**; ③ $g(\alpha)=a$, $g(\beta)=b$.

则成立变量代换公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\mathrm{d}t.$$

2) **分部积分公式**

如果 $u,v\in C^{(1)}[a,b]$, **则**

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x.$$

在例 1—5 中, 黎曼积分借助于积分和 $S_\Pi(f)$ **来计算. 对于任意的黎曼可积的函数** $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ **有**

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{d(\Pi)\to 0}S_\Pi(f)$$

与分割 Π **及点** $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$ **的选取无关, 因此对于所给例题的求解, 分割** Π **及点** ξ_i **用确定的方法选取**.

计算下列积分:

1 $\int_{-1}^4(1+x)\mathrm{d}x$.

函数 $f: x\mapsto 1+x$, $-1\leq x\leq 4$, **属于函数类** $C[-1,4]$, **从而** $f\in R[a,b]$. **由** f **的线性性, 对于区间** $[-1,4]$ **的任意分割, 方便地取** $\xi_i=\dfrac{x_i+x_{i+1}}{2}$. **则积分和** $S_\Pi(f)$ **刚好等于积分本身. 我们有**

$$S_\Pi(f)=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\Delta x_i+\frac{x_{i+1}^2-x_i^2}{2}\right)$$

$$=x_n-x_0+\frac{x_n^2-x_0^2}{2}=(x_n-x_0)\left(1+\frac{x_n+x_0}{2}\right)=12.5,$$

这里用到 $x_0=-1$, $x_n=4$. 从而

$$\int_{-1}^{4}(1+x)\,\mathrm{d}x=12.5.$$

2 $\displaystyle\int_a^b x^m\,\mathrm{d}x$, $0<a<b$, $m\neq-1$.

选取分割 Π, 使得区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 的长度成几何级数, 并且选取 $\xi_i=x_i$, 则

$$x_i=x_0q^i,\ i=1,2,\cdots,n,\ x_0=a,\ x_n=b,\ q=\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}},\ \xi_i=a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}},$$

$$\Delta x_i=a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i}{n}}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right),$$

$$S_\Pi(f)=\sum_{i=0}^{n-1}f(x_i)\Delta x_i=a^{m+1}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}-1\right)\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{i(m+1)}{n}}$$

$$=(b^{m+1}-a^{m+1})\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}-1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}}-1}.$$

由于当 $n\to\infty$ 时, $d(\Pi)\to0$, 且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}-1}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{m+1}{n}}-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}\ln\frac{b}{a}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{m+1}{n}\ln\frac{b}{a}+o\left(\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{m+1},$$

则

$$\int_a^b x^m\,\mathrm{d}x=\lim_{d(\Pi)\to0}S_\Pi(f)=\frac{b^{m+1}-a^{m+1}}{m+1}.$$

3 $\displaystyle\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$, $0<a<b$.

设 $\Pi=\{x_0=a, x_1, \cdots, x_n=b\}$ 为区间 $[a,b]$ 的任意分割. 被积函数在区间 $[a,b]$ 上可积, 根据上面所讲, $\lim\limits_{d(\Pi)\to0}S_\Pi(f)$ 存在且与点 ξ_i 的选取无关. 选取 $\xi_i=\sqrt{x_ix_{i+1}}$, 得到

$$S_\Pi(f)=\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\Delta x_i}{x_ix_{i+1}}=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{x_i}-\frac{1}{x_{i+1}}\right)=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}.$$

从而

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \lim_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f) = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}.$$

4 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \mathrm{d}x$.

选取 $\Pi = \left\{x_i = i\frac{\pi}{2n};\ i = 0, 1, \cdots, n\right\}$, $\xi_i = x_i$, 有

$$\Delta x_i = \frac{\pi}{2n},\ S_\Pi(f) = \frac{\pi}{2n}\sum_{i=0}^{n-1} \sin i\frac{\pi}{2n} = \frac{2\pi}{4n}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4n}\right)}{\sin\frac{\pi}{4n}}.$$

注意到当 $n\to\infty$ 时, $d(\Pi)\to 0$, 得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{4n}\cdot\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4n}\right)}{\frac{\pi}{4n}} = 1.$$

5 $\int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\mathrm{d}x$, 当 $|\alpha| < 1$ 或 $|\alpha| > 1$.

选取 $\Pi = \left\{x_k = \frac{\pi}{n}k;\ k = 0, 1, \cdots, n\right\}$, $\xi_k = x_k$. 则当 $n\to\infty$ 时, $d(\Pi)\to 0$, 记 $z = e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$, $\bar{z} = e^{-\mathrm{i}x} = \cos x - \mathrm{i}\sin x$, 得到

$$f(x) = \ln(\alpha - z)(\alpha - \bar{z}),\ S_\Pi(f) = \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(\alpha - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}k}\right)\left(\alpha - e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{n}k}\right)$$

$$= \frac{\pi}{n}\ln\prod_{k=0}^{n-1}\left(\alpha - e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{n}k}\right)\left(\alpha - e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{n}k}\right)$$

$$= \frac{\pi}{n}\ln\frac{(\alpha - 1)(\alpha^{2n} - 1)}{\alpha + 1}.$$

如果 $|\alpha| < 1$, 则 $\lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f) = 0$, 因为 $\alpha^{2n}\to 0$ (当 $n\to\infty$).

如果 $|\alpha| > 1$, 则 $S_\Pi(f)$ 可表为形式

$$S_\Pi(f) = \frac{\pi}{n}\left(n\ln\alpha^2 + \ln\frac{(\alpha - 1)(1 - \alpha^{-2n})}{\alpha + 1}\right),$$

得到 $\lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f) = \lim\limits_{n\to\infty} S_\Pi(f) = \pi\ln\alpha^2$. 从而

$$\int_0^{\pi} \ln(1 - 2\alpha\cos x + \alpha^2)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{如果 } |\alpha| < 1, \\ \pi\ln\alpha^2, & \text{如果 } |\alpha| > 1. \end{cases}$$

6　设函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在区间 $[a,b]$ 上单调. 证明:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

如果 $f\in R[a,b]$, 则对于任何分割 Π 及任意取点 $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$, 满足不等式

$$\underline{S}_\Pi(f)\leq\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq\overline{S}_\Pi(f),\quad \underline{S}_\Pi(f)\leq S_\Pi(f)\leq\overline{S}_\Pi(f),$$

并且

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-S_\Pi(f)\right|\leq\overline{S}_\Pi(f)-\underline{S}_\Pi(f).$$

对于单调函数 f, 在区间 $[a,b]$ 的任意 n 等分下有

$$\overline{S}_\Pi(f)-\underline{S}_\Pi(f)=\frac{b-a}{n}\,|f(b)-f(a)|=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

记 $\dfrac{\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-S_\Pi(f)}{\overline{S}_\Pi(f)-\underline{S}_\Pi(f)}=\theta$, 因为 $|\theta|<1$, 得 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-S_\Pi(f)=\theta\left(\overline{S}_\Pi(f)-\underline{S}_\Pi(f)\right)=O\left(\frac{1}{n}\right)$.

7　设 $f,\varphi\in C[a,b]$. 证明:

$$\lim_{d(\Pi)\to 0}\sigma_\Pi(f\varphi)=\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $\sigma_\Pi(f\varphi)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\varphi(\theta_i)\Delta x_i,\ x_i\leq\xi_i,\theta_i\leq x_{i+1}$.

由估计 $|S_\Pi(f\varphi)-\sigma_\Pi(f\varphi)|\leq\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}|f(\xi_i)||\varphi(\theta_i)-\varphi(\xi_i)|\Delta x_i$, 由函数 f 的有界性, 条件 $\varphi\in R[a,b]$ 及估计 $|\varphi(\theta_i)-\varphi(\xi_i)|\leq\omega_i$, 其中 ω_i 为函数 φ 在区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上的振幅, 得到

$$\lim_{d(\Pi)\to 0}\left(S_\Pi(f\varphi)-\sigma_\Pi(f\varphi)\right)=0.$$

从而

$$\lim_{d(\Pi)\to 0}\sigma_\Pi(f\varphi)=\lim_{d(\Pi)\to 0}S_\Pi(f\varphi)=\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

8　证明, 狄利克雷函数 $\chi:[a,b]\to\mathbb{R}$, 其中

$$\chi(x)=\begin{cases}0, & \text{如果 } x \text{ 为无理数},\\ 1, & \text{如果 } x \text{ 为有理数},\end{cases}$$

在区间 $[a,b]$ 上不可积.

函数 χ 有界,在区间 $[a,b]$ 上每一点均间断.根据勒贝格定理,χ 在该区间上不可积.

9 黎曼函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$,定义为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & \text{如果 } x=\dfrac{m}{n},\\ 0, & \text{如果 } x \text{ 为无理数},\end{cases}$$

其中 m 和 $n(n\geq 1)$ 互素.证明在区间 $[a,b]$ 上可积并且 $\int_a^b f(x)\,dx=0$.

在第 1 章例 263 中证明了,黎曼函数在每一个无理点连续,且在每一个有理点间断.因为函数有界,其间断点可数,所以根据勒贝格定理,$f\in R[a,b]$.

对于区间 $[a,b]$ 的任意分割 Π,每一区段 $[x_i,x_{i+1}]$ 含有无理点.所以 $\underline{S}_\Pi(f)=0$,从而

$$\sup_{\{\Pi\}}\{\underline{S}_\Pi(f)\}=\underline{\int} f\,dx=\int_a^b f(x)\,dx=0.$$

10 证明,间断函数 $f: x\mapsto \operatorname{sgn}\sin\dfrac{\pi}{x}$,$0<x\leq 1$,在开区间 $(0,1)$ 上可积.

函数 f 在可数集合 $X=\left\{x_k=\dfrac{1}{k},\ k\in\mathbb{N}\right\}$ 上间断且有界,集合 X 具有一个聚点 $x=0$,从而具有若尔当零测度,函数 $F:[0,1]\to\mathbb{R}$,其中,

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{若 } x\in X\cup\{0\},\\ f(x), & \text{若 } x\in[0,1]\setminus\{X\cup\{0\}\},\end{cases}$$

在区间 $[0,1]$ 上有界,而其间断点的集合 $X\cup\{0\}$ 具有若尔当零测度,从而,$F\in R[0,1]$.根据 1.5 段的定义 3,$f\in R(0,1)$.

11 证明:区间 $[a,b]$ 上的有界函数 f 在集合 $E=\{a\}$ 的限制在集合 E 上可积,且

$$\int_E f(x)\,dx=0.$$

构造函数 $F:[a,b]\to\mathbb{R}$,其中

$$F(x)=\begin{cases}f(a), & \text{若 } x=a,\\ 0, & \text{若 } a<x\leq b.\end{cases}$$

函数 F 在区间 $[a,b]$ 上可积,并且 $\int_a^b F(x)\,dx=0$,这是因为当 $f(a)\neq 0$ 时,函数只在一个点间断,在对区间 $[a,b]$ 的任意分割下,有 $\underline{S}_\Pi(F)=0$,$\underline{\int} F\,dx=\int_a^b F(x)\,dx=0$.记 $\int_E f(x)\,dx=\int_a^a f(x)\,dx$.根据 1.5 段的定义 3,得到 $\int_a^a f(x)\,dx=0$.

12 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为区间 $[a,b]$ 上的有界函数.点集 $\Pi'=\{x_0=b,x_1,\cdots,x_n=a\}$,其

中 $x_i > x_{i+1}$, $i = 0, \cdots, n-1$, 称为由 b 点到 a 点方向的分割 Π'. 在每一段 $[x_{i+1}, x_i]$ 上任取一点 ξ_i, 构造和

$$S_{\Pi'}(f) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

如果 $\exists \lim\limits_{d(\Pi')\to 0} S_{\Pi'}(f) = I'$, 则说, 在区间 $[a, b]$ 上函数 f 由 b 点到 a 点的方向可积, 并记成

$$I' = \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证明: 如果 $f \in R[a, b]$, 则 $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在, 且 $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

如果分割 $\Pi = \{\tilde{x}_0 = a, \tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_n = b\}$ 的分点与分割 Π' 的分点重合, 而点 $\tilde{\xi}_j \in [\tilde{x}_j, \tilde{x}_{j+1}]$ 与点 $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ 重合, 则 $S_{\Pi'}(f) = -S_{\Pi}(f)$, 其中 $S_{\Pi}(f) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} f(\tilde{\xi}_j)\Delta \tilde{x}_j$. 由于 $\exists \lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_{\Pi}(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, 则 $\exists \lim\limits_{d(\Pi')\to 0} S_{\Pi'}(f) = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

13 设 $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, $f \in R[a, b]$, $A \le f(x) \le B$ 且 $\psi: [A, B] \to \mathbb{R}$, $\psi \in C[A, B]$, $g = \psi \circ f: [a, b] \to \mathbb{R}$. 证明 $g \in R[a, b]$.

由条件 $f \in R[a, b]$ 知, 函数 f 满足勒贝格的黎曼可积性准则. 复合函数 $g = \psi \circ f$ 在函数 f 的连续点均连续, 因而也满足勒贝格准则. 从而 $g \in R[a, b]$.

注意 所证定理的结论在一般情形下不成立, 例如, 如果函数 ψ 的连续性被可积性取代. 取

$$\psi: [0, 1] \to \mathbb{R}, \quad f: [a, b] \to \mathbb{R},$$

$$\psi(y) = \begin{cases} 0, & \text{若 } y = 0, \\ 1, & \text{若 } y \neq 0. \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数}, \\ \dfrac{1}{n}, & \text{若 } x = \dfrac{m}{n}. \end{cases}$$

其中 m 与 $n (n \ge 1)$ 互素.

函数 f 在区间 $[a, b]$ 上可积 (参见例 9), 而函数 ψ 在区间 $[0, 1]$ 上可积. 而此时, 函数 $\psi \circ f: [a, b] \to \mathbb{R}$, 其中

$$\psi \circ f(x) = \begin{cases} 0, & \text{若 } x \text{ 为无理数}, \\ 1, & \text{若 } x \text{ 为有理数}. \end{cases}$$

在区间 $[a, b]$ 上不可积 (参见例 8).

14 设 $f \in R[a, b]$. 证明: $|f| \in R[a, b]$ 且

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

由于函数 f 满足勒贝格定理的所有条件, 则函数 $|f|$ 也满足这些条件. 由不等式

$-|f(x)|\leq f(x)\leq|f(x)|$, $x\in[a,b]$及 1.7 节的性质 2),应有

$$-\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\leq\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leq\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x,\text{即}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leq\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x.$$

注意,一般来说,由$|f|$的可积性不能推出 f 的可积性,例如,函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$,其中

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{若 } x \text{ 为有理数},\\ -1, & \text{若 } x \text{ 为无理数}.\end{cases}$$

虽然函数$|f|$在该区间可积,但 $f(x)$在区间$[a,b]$上不可积.

15 设 $f\in R[a,b]$,$\varphi\in R[a,b]$.证明 $f\varphi\in R[a,b]$.

如果函数 f 和 φ 有间断点,则每一函数的间断点组成的集合具有勒贝格零测度.而这两集合的并集在一般条件下将是函数 $f\varphi$的间断点.由于该并集具有勒贝格零测度,则函数 $f\varphi$满足勒贝格的黎曼可积性.

16 证明:如果区间$[a,b]$上的函数 f 及 φ 在除了若尔当零测集 $X\subset\mathbb{R}$ 外处处相等,则或者两函数在$[a,b]$上可积,且

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x,$$

或者两函数均在$[a,b]$上不可积.

如果 $f\in R[a,b]$,则由勒贝格定理,函数 f 的间断点的集合具有勒贝格零测度.由已知条件,函数 φ的间断点的集合也具有勒贝格零测度.所以,$\varphi\in R[a,b]$.由 1.6 节性质 2),函数 $\alpha=f-\varphi$在$[a,b]$上可积,由例 14 有,$|\alpha|\in R[a,b]$.对于区间$[a,b]$的任意分割 Π,在小区间$[x_i,x_{i+1}]$上至少包含一点,使$|\alpha|=0$,从而

$$\underline{S}_\Pi(|\alpha|)=0,\sup_{\{\Pi\}}\{\underline{S}_\Pi(|\alpha|\}=\underline{\int}|\alpha|\mathrm{d}x=0,\int_a^b|\alpha(x)|\mathrm{d}x=\underline{\int}|\alpha|\mathrm{d}x=0.$$

由于

$$\left|\int_a^b\alpha(x)\mathrm{d}x\right|\leq\int_a^b|\alpha(x)|\mathrm{d}x,$$

则

$$\int_a^b\alpha(x)\mathrm{d}x=\int_a^b(f(x)-\varphi(x))\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x=0.$$

这样

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

如果假设 $f\notin R[a,b]$,而 $\varphi\in R[a,b]$,则根据所证明的结论,应该有 $f\in R[a,b]$,矛盾.

从而 $\varphi\notin R[a,b]$.

由例 16 可知,如果 $f\in R[a,b]$,则改变 f 在若尔当零测度集上的值为任意有限值,并不改变函数的可积性及积分值 .

17 设 $f\in R[a,b]$.证明:等式 $\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x=0$ 成立,当且仅当函数 f 在位于区间 $[a,b]$ 上的连续点上均有 $f(x)=0$.

必要性 .用反证法 .设 $\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x=0$, f 在点 $x_0\in(a,b)$ 上连续,但 $f(x_0)\neq 0$.由函数 f 在点 x_0 的连续性应有,在 x_0 的某邻域 $S(x_0,\delta)$ 上, $f^2(x)>0$.利用积分的可加性,有

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^{x_0-\delta} f^2(x)\,\mathrm{d}x+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^2(x)\,\mathrm{d}x+\int_{x_0+\delta}^{b} f^2(x)\,\mathrm{d}x\geq\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f^2(x)\,\mathrm{d}x=c,$$

其中 $c>0$ 为常数 .这与已知

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x=0$$

矛盾 .

充分性 .设在 f 的连续点上 $f(x)=0$.由 $f\in R[a,b]$ 知, $f^2\in R[a,b]$.对于区间 $[a,b]$ 的任意分割 Π,每一区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上均包含函数 f 的连续点(否则,若在某些分割 Π 下,函数 f 在某区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上处处间断,由勒贝格定理,应有 $f\notin R[a,b]$) .这样,在任意分割 Π 下,有

$$\underline{S}_\Pi(f^2)=0,\ \underline{\int} f^2\,\mathrm{d}x=\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x=\sup_{\{\Pi\}}\{\underline{S}_\Pi(f^2)\}=0 .$$

18 设函数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 在区间 $[a,b]$ 上有界且是凹的 .证明:

$$(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}\leq\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leq(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) .$$

函数 f 的凹性意味着函数 $-f$ 是凸的,从而 $f\in C[a,b]$(根据第 2 章例 112) .这样 $f\in R[a,b]$.利用凹函数性质,有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{a+\xi}{2}+\frac{b-\xi}{2}\right)\geq\frac{1}{2}(f(a+\xi)+f(b-\xi)),\quad 0\leq\xi\leq b-a .$$

关于 ξ 在区间 $[0,b-a]$ 上积分且作代换 $a+\xi=t$ 及 $b-\xi=z$,则得到

$$(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq\frac{1}{2}\left(\int_0^{b-a} f(a+\xi)\,\mathrm{d}\xi+\int_0^{b-a} f(b-\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x .\qquad(1)$$

作分割 $\Pi=\left\{x_i=a+i\frac{b-a}{n};\ i=0,1,\cdots,n\right\}$ 且选取 $\xi_i=x_i$,得到 $\Delta x_i=\frac{b-a}{n}$ 及

① 凹函数有时称为上凸函数 .

$$S_\Pi(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\left(1-\frac{i}{n}\right)a + \frac{i}{n}b\right).$$

由函数 f 的凹性,有

$$f\left(\left(1-\frac{i}{n}\right)a + \frac{i}{n}b\right) \geq \left(1-\frac{i}{n}\right)f(a) + \frac{i}{n}f(b),$$

$$S_\Pi(f) \geq \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left[\left(1-\frac{i}{n}\right)f(a) + \frac{i}{n}f(b)\right]$$

$$= \frac{b-a}{n}\left[\frac{n+1}{2}f(a) + \frac{n-1}{2}f(b)\right].$$

注意到当 $n\to\infty$时, $d(\Pi)\to 0$,在上面不等式左右两边令 $n\to\infty$取极限得到

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)). \tag{2}$$

联合不等式(1)和(2),得到所要证的不等式.

19 计算$\int_a^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,\mathrm{d}x$.

先两次使用 1.8 节的分部积分公式,然后利用例 4 的解答,得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,\mathrm{d}x = -x^2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\left(x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x\right) = 2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \pi - 2.$$

练 习 题

用构造积分和 $S_\Pi(f)$及取极限 $d(\Pi)\to 0$ 的方法,计算下列函数的定积分:

1 $x\mapsto x^3$, $-3\leq x\leq 5$. **2** $x\mapsto \sqrt{x}$, $0\leq x\leq 1$.

3 $x\mapsto 3^x$, $0\leq x\leq 7$. **4** $x\mapsto \cos x$, $0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$.

5 $x\mapsto 2+5x$, $-3\leq x\leq 6$.

求下列积分:

6 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1^3}{n^4} + \frac{2^3}{n^4} + \cdots + \frac{(4n-1)^3}{n^4}\right)$. **7** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2^2} + \cdots + \frac{n}{n^2+(n-1)^2}\right)$.

8 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{4n^2-1^2} + \frac{2}{4n^2-2^2} + \cdots + \frac{2}{4n^2-n^2}\right)$. **9** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots 2n}}{n}$.

证明下列函数的可积性:

10 $x\mapsto\left[\frac{2}{x}\right] - 2\left[\frac{1}{x}\right]$, $0<x\leq 1$. **11** $x\mapsto [x]x^{\alpha-1}$, $1\leq x\leq 10.5$, $\alpha>0$.

12 $x\mapsto\frac{[x]}{x^{\lambda+1}}, 1\le x\le 40, \lambda>0$. **13** $x\mapsto[x^2], 2\le x\le 17$.

14 $x\mapsto\frac{1}{x}, 0.5\le x\le 10$.

15 设 $f\in R[a,b]$ 且 $f(x)>0$. 记 $f_{kn}=f(a+k\delta_n)$, $\delta_n=\frac{b-a}{n}$. 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f_{kn}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f_{1n}f_{2n}\cdots f_{nn}}=\exp\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)\,\mathrm{d}x\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f_{kn}}}=\frac{b-a}{\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{f(x)}}.$$

16 设 $f\in C^{(2)}[1,+\infty)$ 且 $f(x)\ge 0$, $f'(x)\ge 0$, $f''(x)\le 0$ $\forall x\in[1,+\infty)$. 证明:

$$\sum_{k=1}^{n}f(k)=\frac{f(n)}{2}+\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x+O(1).$$

17 设 $f\in C^{(2)}[a,b]$ 且

$$\Delta_n=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+(2k-1)\frac{b-a}{2n}\right).$$

求 $\lim_{n\to\infty}n^2\Delta_n$.

2 积分计算的基本定理与公式

积分计算的重要的定理和公式有: 积分计算基本定理, 牛顿-莱布尼茨公式, 中值定理, 变量代换公式及分部积分公式(后两者已在 1.8 节中讲过).

2.1 作为上限的函数的定积分

定理 1 如果 $f\in R[a,b]$, 则函数

$$\Phi: x\mapsto\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\quad a\le x\le b,$$

在区间 $[a,b]$ 上连续.

定理 2(积分计算基本定理) 函数

$$\Phi: x\mapsto\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\quad a\le x\le b,$$

其中, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f\in R[a,b]$. 则 Φ 在函数 f 的连续点 $x\in[a,b]$ 可微, 并且, $\Phi'(x)=f(x)$.

定理 3(积分计算基本公式) 若 $f\in R[a,b]$, 且函数 f 的间断点至多可数个, 而 F 为函数 f 在 $[a,b]$ 区间上的任意一个原函数, 则有公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

该公式称为牛顿-莱布尼茨公式.

2.2 中值定理

第一中值定理 如果 $f \in R[a,b]$, $g \in R[a,b]$ 且 $g(x) \geq 0$ $(g(x) \leq 0)$ $\forall x \in [a,b]$, 则成立公式

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \mu\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x, \quad m \leq \mu \leq M, \tag{1}$$

其中 $m = \inf\limits_{a \leq x \leq b}\{f(x)\}$, $M = \sup\limits_{a \leq x \leq b}\{f(x)\}$.

如果 $f \in C[a,b]$, 则公式(1)具有形式

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x, \quad \xi \in [a,b]. \tag{2}$$

如果 $f \in C[a,b]$, $g(x) = 1$, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a), \quad \xi \in [a,b]. \tag{3}$$

第二中值定理

1) 函数 $f: [a,b] \to \mathbf{R}$ 在区间 $[a,b]$ 上不增, $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$ 且 $g \in R[a,b]$, 则 $\exists\, \xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x; \tag{4}$$

2) f 在 $[a,b]$ 上不减, $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$ 且 $g \in R[a,b]$, 则 $\exists\, \eta \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(b)\int_\eta^b g(x)\,\mathrm{d}x; \tag{5}$$

3) f 在 $[a,b]$ 上单调, 且 $g \in R[a,b]$, 则 $\exists\, \xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x + f(b)\int_\xi^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{6}$$

公式(4)—(6)称为博内(Bonne)公式.

利用牛顿-莱布尼茨公式计算下列黎曼积分.

20 $I = \displaystyle\int_0^{4\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \varepsilon\cos x}$, $\quad 0 \leq \varepsilon < 1$.

根据第 3 章例 130, 函数

$$F: x \mapsto \begin{cases} \dfrac{2}{1-\varepsilon^2}\arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\tan\dfrac{x}{2}\right) + \dfrac{2\pi}{1-\varepsilon^2}\left[\dfrac{x+\pi}{2\pi}\right], & x \in \mathbf{R} \setminus \{\pi + 2k\pi\}, \\ \dfrac{\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}(2k+1), & x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \end{cases}$$

是函数 $x \mapsto \dfrac{1}{1+\varepsilon\cos x}$, $x \in \mathbf{R}$, $0 \leq \varepsilon < 1$ 的原函数 .由牛顿-莱布尼茨公式有

$$I = F(4\pi) - F(0) = \frac{4\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

21 $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x}$.

把被积函数变形为

$$\frac{1}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \frac{2}{(a^2+b^2)(1+\varepsilon\cos 2x)},$$

其中 $\varepsilon = \dfrac{b^2-a^2}{a^2+b^2}$,引进变量代换 $2x = t$,得到与上例类似的解

$$I = \frac{1}{a^2+b^2}\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1+\varepsilon\cos t}$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\left(\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-|\varepsilon|}{1+|\varepsilon|}}\tan\frac{t}{2}\right) + \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left[\frac{t+\pi}{2\pi}\right]\right)\Bigg|_0^{\pi-0} = \frac{\pi}{2|ab|}.$$

利用牛顿-莱布尼茨公式,计算间断函数的积分,方法是通过建立在各积分区间上的原函数 .

22 $I = \displaystyle\int_E \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x$, $f(x) = \dfrac{(x+1)^2(x-1)}{x^3(x-2)}$, $E = [-1,3] \setminus \{\{0\} \cup \{2\}\}$.

在区间$[-1,3]$内的点 $x=0$ 及 $x=2$ 处函数 f 没有定义,而被积函数可以写成

$$\frac{f'(x)}{1+f^2(x)} = (\arctan f(x))', \quad x \in E,$$

且函数 $x \mapsto \arctan f(x)$ $(x \in E)$是函数$\dfrac{f'}{1+f^2}$在集合 E 上的原函数,根据 1.5 节的定义 3,有

$$\int_E \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}\mathrm{d}x = \int_{-1}^{3} F(x)\mathrm{d}x,$$

其中

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{f'(x)}{1+f^2(x)}, & \text{如果 } x \in E, \\ 0, & \text{如果 } x = 0 \text{ 或者 } x = 2 . \end{cases}$$

函数 F 在区间$[-1,3]$上的原函数 Φ 构造如下:

$\arctan f(x)$,如果 $-1 \leq x < 0$, $\lim\limits_{x \to -0}\arctan f(x)$,如果 $x = 0$,

$$\arctan f(x),\ \text{如果}\ 0<x<2,\quad \text{且}\ \lim_{x\to+0}\arctan f(x)+C_1,\quad \text{如果}\ x=0,$$

$$\lim_{x\to 2-0}\arctan f(x)+C_1,\quad \text{如果}\ x=2,$$

$$\arctan f(x),\ \text{如果}\ 2<x\leq 3,\quad \text{且}\ \lim_{x\to 2+0}\arctan f(x)+C_2,\quad \text{如果}\ x=2\ .$$

从而得到

$$\Phi(x)=\begin{cases}\arctan f(x), & \text{如果}\ -1\leq x<0,\\ \arctan f(x)-\pi, & \text{如果}\ 0\leq x<2,\\ \arctan f(x)-2\pi, & \text{如果}\ 2\leq x\leq 3,\end{cases}$$

其中 $\Phi(0)=-\dfrac{\pi}{2},\ \Phi(2)=-\dfrac{3}{2}\pi$.

利用牛顿-莱布尼茨公式,得到

$$I=\Phi(3)-\Phi(-1)=\arctan f(3)-2\pi-\arctan f(-1)=\arctan\frac{32}{27}-2\pi\ .$$

23 $\quad I=\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^4 x+\cos^4 x}$.

注意到等式 $\sin^4 x+\cos^4 x=\dfrac{3}{4}(1+\varepsilon\cos 4x)$,其中 $\varepsilon=\dfrac{1}{3}$,引入变量代换 $4x=t$,利用例 20 和 21 的结果,得到

$$I=\varepsilon\int_0^{8\pi}\frac{\mathrm{d}t}{1+\varepsilon\cos t}=\varepsilon\left(\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\tan\frac{t}{2}\right)+\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left[\frac{t+\pi}{2\pi}\right]\right)\Bigg|_0^{8\pi}$$

$$=\frac{8\pi\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}=2\sqrt{2}\pi\ .$$

24 $\quad I=\displaystyle\int_{0.5}^{31.5}[x]\,\mathrm{d}x$.

函数 $f: x\mapsto[x]\ (0\leq x<+\infty)$ 在点 $x=n,\ n\in\mathbb{N}$ 上具有第一类间断.构造 f 的原函数.

如果 $x\in(n-1,n)$,则 $f(x)=n-1$;如果 $x\in(n,n+1)$,则 $f(x)=n$.这样函数 $F_{n-1}: x\mapsto(n-1)x+C_{n-1},\ C_{n-1}\in\mathbb{R}$ 是函数 f 在区间 $(n-1,n)$ 上的原函数,而函数 $F_n: x\mapsto nx+C_n,\ C_n\in\mathbb{R}$ 是函数 f 在区间 $(n,n+1)$ 上的原函数.由原函数在点 $x=n$ 的连续性有 $F_{n-1}(n-0)=F_n(n+0)$,即 $(n-1)n+C_{n-1}=n^2+C_n$,由此 $C_n=C_{n-1}-n,\ n\in\mathbb{N}$.令 $n=1,2,\cdots$,得到 $C_1=C_0-1,\ C_2=C_1-2=C_0-3,\ C_3=C_2-3=C_0-6,\ C_4=C_3-4=C_0-10,\cdots,$ $C_n=C_0-\dfrac{n(n+1)}{2}$, C_0 为常数.

由于 $n=[x],\ x\in[n,n+1)$,则 $F(x)=x[x]-\dfrac{[x]([x]+1)}{2}$ 是函数 f 的原函数.

根据牛顿-莱布尼茨公式有

$$I = F(31.5) - F(0.5) = 31.5 \cdot 31 - 31 \cdot 16 = 480.5.$$

25　$I = \int_{-11\pi}^{20\pi} \operatorname{sgn}(\sin x)\,dx$.

函数 $f: x \mapsto \operatorname{sgn}(\sin x),\ x \in \mathbf{R}$,**表示成**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{|\sin x|}, & x \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}, \\ 0, & x \in \{k\pi; k \in \mathbf{Z}\}. \end{cases}$$

由于当 $x \neq k\pi$ **时**, $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos^2 x}}$,**则连续函数** $F: x \mapsto \arccos(\cos x)\ (x \in \mathbf{R})$**是有界间断函数** f **的原函数**,**从而**

$$I = F(20\pi) - F(-11\pi) = \arccos 1 - \arccos(-1) = -\pi.$$

26　$I = \int_{-21}^{40} (-1)^{[x]}\,dx$.

由于$(-1)^{[x]} = \operatorname{sgn}(\sin \pi x),\ x \in \mathbf{R}$,**则注意到上例的解答有**

$$I = \frac{1}{\pi}\arccos(\cos \pi x)\Big|_{-21}^{40} = \frac{1}{\pi}(\arccos 1 - \arccos(-1)) = -1.$$

27　$I = \int_0^2 [e^x]\,dx$.

函数 $x \mapsto [e^x],\ 0 \leq x < +\infty$,**在点** $x_n = \ln n\ (n = 2, 3, \cdots)$**处间断**,**设** $x \in (x_n, x_{n+1})$,**则**

$$\int [e^x]\,dx = nx + C_n,\quad C_n \in \mathbf{R},\quad C_n \text{ 为常数}.$$

如果 $x \in (x_{n+1}, x_{n+2})$,**则**

$$\int [e^x]\,dx = (n+1)x + C_{n+1},\quad C_{n+1} \text{ 为常数}.$$

由函数 $x \mapsto [e^x]\ (0 \leq x < +\infty)$**的原函数在点** x_n **的连续性**,**得到** C_n **和** C_{n+1} **的关系**

$$C_{n+1} = C_n - \ln(n+1),\quad n \in \mathbf{N}.$$

在所得等式中依次令 $n = 1, 2, \cdots$,**得到**

$$C_n = C - \ln n!,\quad C \text{ 为常数}.$$

这样,**函数** $F: x \mapsto [e^x]x - \ln([e^x]!)\ (0 \leq x < +\infty)$**是函数** $x \mapsto [e^x],\ 0 \leq x < +\infty$**的原函数**.

由于$[e^2] = 7$,**则** $I = F(2) - F(0) = ([e^x]x - \ln([e^x]!))\big|_0^2 = 14 - \ln 7!$.

28　$I = \int_E \operatorname{sgn}(\sin(\ln x))\,dx,\ E = (0, 1]$.

函数 $f: [0, 1] \to \mathbf{R}$,**其中**

$$f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}(\sin(\ln x)), & \text{如果 } x\in(0,1],\\ 0, & \text{如果 } x=0.\end{cases}$$

在区间$[0,1]$上有界,而其间断点集合 $X=\{x_k=\mathrm{e}^{-k\pi};k\in\mathbf{N}\}$是可数的.从而,$f\in R[0,1]$,根据 1.5 节的定义 3,有

$$\int_E \operatorname{sgn}(\sin(\ln x))\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

记 $F(x)=\int \operatorname{sgn}(\sin(\ln x))\mathrm{d}x(x>0)$.如果 $\mathrm{e}^{-(k+1)\pi}<x<\mathrm{e}^{-k\pi}$,则 $F(x)=(-1)^{k-1}x+C_k$,其中 $k=-\frac{\ln x}{\pi}$,C_k 为常数.而如果 $\mathrm{e}^{-(k+2)\pi}<x<\mathrm{e}^{-(k+1)\pi}$,则 $F(x)=(-1)^k x+C_{k+1}$,C_{k+1} 为常数.

由条件 $F(\mathrm{e}^{-(k+1)\pi}-0)=F(\mathrm{e}^{-(k+1)\pi}+0)$得到

$$C_{k+1}=C_k+(-1)^{k-1}\cdot 2\mathrm{e}^{-(k+1)\pi},$$

由此 $C_k=C_0-2(\mathrm{e}^{-\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi}+\cdots+(-1)^{k-1}\mathrm{e}^{-k\pi})$,$C_0$ 为常数.从而,$F(x)=(-1)^{-\frac{\ln x}{\pi}-1}x-2(\mathrm{e}^{-\pi}-\mathrm{e}^{-2\pi}+\cdots+(-1)^{-\frac{\ln x}{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{\ln x}{\pi}\pi})+C_0$,而且 $F(0)=\lim\limits_{k\to+\infty}C_k=C_0-2\frac{\mathrm{e}^{-\pi}}{1+\mathrm{e}^{-\pi}}$,$F(1)=-1+C_0$.

这样

$$I=F(1)-F(0)=-1+2\frac{\mathrm{e}^{-\pi}}{1+\mathrm{e}^{-\pi}}=\frac{\mathrm{e}^{-\pi}-1}{\mathrm{e}^{-\pi}+1}=\operatorname{th}\frac{\pi}{2}.$$

29 $I=\int_0^6 [x]\sin\frac{\pi x}{6}\mathrm{d}x$.

考察 $F(x)=\int [x]\sin\frac{\pi x}{6}\mathrm{d}x(x\geq 0)$.如果 $x\in(n-1,n)$,则 $F(x)=-(n-1)\frac{6}{\pi}\cos\frac{\pi x}{6}+C_{n-1}$,$C_{n-1}$ 为常数.而如果 $x\in(n,n+1)$,则 $F(x)=-n\frac{6}{\pi}\cos\frac{\pi x}{6}+C_n$,$C_n$ 为常数.由条件 $F(n-0)=F(n+0)$ 得到

$$C_n=\frac{6}{\pi}\cos\frac{n\pi}{6}+C_{n-1},$$

由此

$$C_n=C_0+\frac{6}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{2\pi}{6}+\cdots+\cos\frac{n\pi}{6}\right).$$

因此

$$F(x)=-\frac{6}{\pi}[x]\cos\frac{\pi x}{6}+\frac{6}{\pi}\left(\cos\frac{\pi}{6}+\cos 2\frac{\pi}{6}+\cdots+\cos[x]\frac{\pi}{6}\right)+C_0,$$

$$I=F(6-0)-F(0)=\frac{30}{\pi}.$$

30 $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{11}{2}\pi} x\operatorname{sgn}(\cos x)\,\mathrm{d}x$.

考察 $F(x) = \int x\operatorname{sgn}(\cos x)\,\mathrm{d}x,\ x \in \mathbf{R}$.被积函数在点 $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbf{Z})$ 间断,因此

$$F(x) = (-1)^k \frac{x^2}{2} + C_k,\quad \text{如果 } x \in \left(\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right),$$

$$F(x) = (-1)^{k+1} \frac{x^2}{2} + C_{k+1},\quad \text{如果 } x \in \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi\right).$$

由条件 $F(x_k - 0) = F(x_k + 0)$得到

$$C_{k+1} = (-1)^k \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^2 + C_k,$$

$$C_k = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi}{2} + \pi\right)^2 + \cdots + (-1)^{k-1}\left(\frac{\pi}{2} + (k-1)\pi\right)^2 + C_0,\ C_0 \text{ 为常数}.$$

由于 $k = \left[\frac{x + \frac{\pi}{2}}{\pi}\right]$,则

$$F(x) = (-1)^{\left[\frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi}\right]} \frac{x^2}{2} + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\pi\right)^2 + \cdots +$$

$$(-1)^{\left[\frac{x+\frac{\pi}{2}}{\pi}\right] - 1} \left(\frac{\pi}{2} + \left(\left[\frac{x + \frac{\pi}{2}}{\pi}\right] - 1\right)\pi\right)^2 + C_0 .$$

因此

$$I = F\left(\frac{11}{2}\pi - 0\right) - F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{11}{2}\pi\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

$$- \left(\frac{3}{2}\pi\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\pi\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\pi\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\pi\right)^2 - \frac{1}{2}\left(-\frac{\pi}{4}\right)^2 = -\frac{93}{32}\pi^2 .$$

有时,各种和式的极限可通过转化成可积函数的积分和加以计算,当取极限 $n \to \infty$ 时,得到积分,而该积分可借助牛顿-莱布尼茨公式计算 .

计算:

31 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$,其中 $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$.

把 S_n 写成

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + \frac{i}{n}},$$

得到结论:该和式是函数 $x\mapsto\dfrac{1}{1+x}(0\leqslant x\leqslant 1)$ 在对区间 $[0,1]$ 进行分割 $\Pi=\left\{x_i=\dfrac{i}{n},\ i=0,\cdots,n\right\}$ 且选取 $\xi_i=x_i$ 时的下积分和.因此

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2 .$$

32　$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$,其中 $S_n=\dfrac{1}{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+\sqrt{1+\dfrac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\dfrac{n}{n}}\right)$.

由于 $S_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\dfrac{i}{n}}=\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$,其中 $f(x)=\sqrt{1+x}$, $0\leqslant x\leqslant 1$, $\xi_i=x_i=\dfrac{i}{n}$, $i=1,2,\cdots,n$, $\Delta x_i=\dfrac{1}{n}$,则

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_0^1\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1).$$

33　$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$,其中 $S_n=\sin\dfrac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2+\cos\dfrac{k\pi}{n}}$.

由于 $\sin\dfrac{\pi}{n}=\dfrac{\pi}{n}+O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}O\left(\dfrac{1}{n^3}\right)\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2+\cos\dfrac{k\pi}{n}}=0$,则

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2+\cos\dfrac{k\pi}{n}}.$$

但 $\dfrac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2+\cos\dfrac{k\pi}{n}}=\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$,其中 $f(x)=\dfrac{1}{2+\cos x}$, $0\leqslant x\leqslant\pi$, $\xi_k=k\dfrac{\pi}{n}$, $k=1,2,\cdots,n$, $\Delta x_k=\dfrac{\pi}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{1+0.5\cos x}=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}+\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]\right)\Bigg|_0^{\pi-0}=$ $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}$(见例 20).

34　$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$,其中 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{2^{\frac{i}{n}}}{n+\dfrac{1}{i}}$.

把 S_n 表成

$$S_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{2^{\frac{i}{n}}}{1+\dfrac{1}{in}}=S_n^{(1)}-S_n^{(2)},$$

其中 $S_n^{(1)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 2^{\frac{i}{n}}$, $S_n^{(2)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{2^{\frac{i}{n}}}{1+in}$.由估计 $0 < S_n^{(2)} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}$,应有$\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(2)} = 0$,因而

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_n^{(1)} = \int_0^1 2^x \mathrm{d}x = \left.\frac{2^x}{\ln 2}\right|_0^1 = \frac{1}{\ln 2}.$$

利用洛必达法则及 1.3 节的定理 2,研究形如$\frac{0}{0}$及$\frac{\infty}{\infty}$的不定型.

35 $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t}{x}$.

利用洛必达第一法则及 1.3 节的定理 2,得到

$$\lim_{x\to+0}\frac{\int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t}{x} = \lim_{x\to+0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t = \lim_{t\to+0}\cos t^2 = 1.$$

36 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{d}t}$.

利用洛必达第二法则两次,得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\int_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{d}t} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t\right)^2}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \mathrm{e}^{2t^2}\mathrm{d}t} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\mathrm{e}^{x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{2x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{x^2}} = 2\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{x^2}} = 2\lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x\mathrm{e}^{x^2}} = 2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x} = 0.$$

37 设 $f\in C[0,+\infty)$ 且当 $x\to+\infty$ 时, $f(x)\to A$.计算$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)\mathrm{d}x$.

对积分作变量代换 $nx=t$,得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_0^n f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\varphi_n,$$

其中 φ_n 为函数 $\varphi: x \mapsto \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\,(0 < x < +\infty)$ 在点 $x_n = n\,(n \in \mathbf{N})$ 的值. 因此

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

如果 $A=0$, 则 $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\Delta>0: \forall\,x>\Delta \Rightarrow |f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 由于在此情形, 函数 f 是有界的, 则 $\exists\,M>0: |f(x)|\leqslant M\ \forall\,x\in[0,+\infty)$.

设 $x>\Delta$. 则

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^\Delta f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_\Delta^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

由估计

$$\frac{1}{x}\left|\int_0^\Delta f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{M\Delta}{x},\quad \frac{1}{x}\left|\int_\Delta^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| < \frac{\varepsilon(x-\Delta)}{2x} < \frac{\varepsilon}{2}$$

得到估计: 如果 $x>\dfrac{2M\Delta}{\varepsilon}$, 则

$$\frac{1}{x}\left|\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n = A = 0.$$

如果 $A\neq0$, 则 $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\Delta_1>0: \forall\,x>\Delta_1 \Rightarrow A-\varepsilon< f(x)< A+\varepsilon$. 当 $x>\Delta_1$ 时有

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\Delta_1} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{\Delta_1}^x f(t)\,\mathrm{d}t > \int_0^{\Delta_1} f(t)\,\mathrm{d}t + (A-\varepsilon)(x-\Delta_1).$$

因此

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \infty.$$

利用洛必达第二法则, 得到

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to+\infty} f(x) = A.$$

因而

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n = A.$$

38 证明: 当 $x\to\infty$ 时, $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t \sim \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{2x}$.

我们证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{e^{x^2}}=1$.**利用洛必达第二法则有**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{e^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(2x\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t\right)}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t+2xe^{x^2}}{2xe^{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{xe^{x^2}}+1=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xe^{x^2})}+1$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{e^{x^2}+2x^2e^{x^2}}+1=1 .$$

借助变量代换,而后利用牛顿-莱布尼茨公式计算下列积分:

39 $I=\displaystyle\int_0^{0.75}\frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$.

设 $\dfrac{1}{x+1}=t$, **得到** $x=\dfrac{1}{t}-1$, $\mathrm{d}x=-\dfrac{\mathrm{d}t}{t^2}$, $x^2+1=\dfrac{1}{t^2}-\dfrac{2}{t}+2$; **则**

$$I=\int_{\frac{4}{7}}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{2t^2-2t+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\frac{4}{7}}^{1}\frac{\mathrm{d}\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\left(t-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\right|\Bigg|_{\frac{4}{7}}^{1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{9+4\sqrt{2}}{7} .$$

40 $I=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$.

对不定积分 $\displaystyle\int\frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$, $x\in\mathbf{R}$,**作变量代换** $x-\dfrac{1}{x}=t$, $x\neq0$.**则**

$$\int\frac{1+x^2}{1+x^4}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}t}{t^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}+C=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x^2-1}{x\sqrt{2}}+C,\ x\in\mathbf{R}\setminus\{0\} .$$

在第 3 **章例** 20 **中,证明了函数**

$$F:x\mapsto\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\dfrac{x^2-1}{x\sqrt{2}}+\varepsilon(x), & \text{如果 } x\neq0,\\ 0, & \text{如果 } x=0 .\end{cases}$$

其中 $\varepsilon(x)=\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}\operatorname{sgn}x$ **是函数** $x\mapsto\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$, $x\in\mathbf{R}$ **的原函数** .**因此** $I=\varepsilon(1)-\varepsilon(-1)=\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}$.

41 $I = \int_{0.5}^{2}\left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}}\,dx$.

对积分作变换 $x + \frac{1}{x} = t$. 这里每个 $t(2 < t \leq 2.5)$ 对应于两个 x 的值. 因此在 $[0.5, 2]$ 上的积分表示成在 $[0.5, 1]$ 及 $[1, 2]$ 上两积分的和, 即 $I = I_1 + I_2$, 其中

$$I_1 = \int_{0.5}^{1}\left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}}\,dx, \quad I_2 = \int_{1}^{2}\left(1 + x - \frac{1}{x}\right) e^{x+\frac{1}{x}}\,dx.$$

因在积分 I_1 及 I_2 中, 分别有 $x = \frac{t - \sqrt{t^2-4}}{2}$, $x = \frac{t + \sqrt{t^2-4}}{2}$, 则

$$I_1 = 0.5\int_{2.5}^{2} e^t\left(1 - \frac{t}{\sqrt{t^2-4}} + t - \sqrt{t^2-4}\right)dt, \quad I_2 = 0.5\int_{2}^{2.5} e^t\left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2-4}} + t + \sqrt{t^2-4}\right)dt,$$

$$I = \int_{2}^{2.5} e^t\left(\frac{t}{\sqrt{t^2-4}} + \sqrt{t^2-4}\right)dt = \int_{2}^{2.5} e^t\,d\sqrt{t^2-4} + \int_{2}^{2.5} e^t\sqrt{t^2-4}\,dt$$

$$= e^t\sqrt{t^2-4}\Big|_{2}^{2.5} - \int_{2}^{2.5} e^t\sqrt{t^2-4}\,dt + \int_{2}^{2.5} e^t\sqrt{t^2-4}\,dt = 1.5e^{2.5}.$$

42 在积分 $I = \int_{0}^{2\pi} f(x)\cos x\,dx$ 中引进变量代换 $\sin x = t$.

把积分 I 表示成在 4 个区间 $\left[k\frac{\pi}{2}, (k+1)\frac{\pi}{2}\right]$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ 上的积分的和. 在每个区间上, 函数 $x \mapsto \sin x\,(0 \leq x \leq 2\pi)$ 单调. 则在区间 $[-1, 0]$ 及 $[0, 1]$ 上, 正弦函数在所指定的 4 个区间上定义有反函数. 如果 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 则 $x = \arcsin t\,(0 \leq t \leq 1)$. 如果 $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, 则 $x = \pi - \arcsin t$ 且 t 由 1 下降至 0. 如果 $x \in \left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$, 则 $x = \pi - \arcsin t$ 且 t 由 0 减至 -1. 如果 $x \in \left[\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right]$, 则 $x = 2\pi + \arcsin t\,(-1 \leq t \leq 0)$. 这样在所作变换下得到

$$I = \int_{0}^{1} f(\arcsin t)\,dt + \int_{1}^{0} f(\pi - \arcsin t)\,dt + \int_{0}^{-1} f(\pi - \arcsin t)\,dt + \int_{-1}^{0} f(2\pi + \arcsin t)\,dt$$

$$= \int_{-1}^{0}\left(f(2\pi + \arcsin t) - f(\pi - \arcsin t)\right)dt + \int_{0}^{1}\left(f(\arcsin t) - f(\pi - \arcsin t)\right)dt.$$

借助于分部积分公式及所得到的递推关系, 计算下列积分:

43 $I = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$.

分部积分. 设 $\sin x\,dx = dv(x)$, $\sin^{n-1} x = u(x)$. 此时有

$$I_n = \cos x\sin^{n-1} x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2} x\cos^2 x\mathrm{d}x = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2} x\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$$

$$= (n-1)(I_{n-2} - I_n).$$

得到递推关系 $I_n = \dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$,**由此得到**

$$I_n = \begin{cases} \dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & \text{如果 } n = 2k, \\ \dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & \text{如果 } n = 2k+1. \end{cases}$$

44 $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x$.

通过变换 $\dfrac{\pi}{2} - x = t$ **获知** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x = \int_a^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x$.

45 $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n} x\mathrm{d}x$.

对下面恒等式从 0 **到** $\dfrac{\pi}{4}$ **积分**

$$\tan^{2n} x\mathrm{d}x = \tan^{2n-2} x\mathrm{d}(\tan x) - \tan^{2n-2} x\mathrm{d}x,$$

得到递推公式

$$I_n = \frac{\tan^{2n-1} x}{2n-1}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - I_{n-1} = \frac{1}{2n-1} - I_{n-1},$$

由此可得

$$I_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{2n-(2k-1)} + (-1)^n I_0 = (-1)^n \quad I_0 - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-n}}{2(n-k)+1},$$

其中 $$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}.$$

引入新的求和下标 $n - k = m$,**最后得到**

$$I_n = (-1)^n \quad \frac{\pi}{4} - \sum_{m=0}^{n-1}\frac{(-1)^m}{2m+1} \quad .$$

46 $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\right)^{2n+1}\mathrm{d}x$.

作变量代换 $\dfrac{\pi}{4} - x = t$,**得到**

$$I_n = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+1} t\,dt = \frac{\tan^{2n} t}{2n}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} + I_{n-1} = -\frac{1}{2n} + I_{n-1}.$$

相继使用所得递推公式 $n-1$ **次,有**

$$I_n = (-1)^n - I_0 + \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m-1}}{m},$$

其中 $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t\,dt = \int_{\frac{\pi}{4}}^{0} \frac{d(\cos t)}{\cos t} = \ln \cos t\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{0} = \ln \sqrt{2}$.

47 $I(2m, 2n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x \cos^{2n} x\,dx$.

设 $\cos x\,dx = dv(x)$, $\sin^{2m} x\cos^{2n-1} x = u(x)$ **且利用分部积分公式,得到递推关系**

$$I(2m,2n) = \frac{2n-1}{2m+1} I(2m+2, 2n-2),$$

用该式 $n-1$ **次,并注意到例 43 的解答,得到**

$$\begin{aligned}
I(2m,2n) &= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{(2m+1)(2m+3)\cdots(2m+2n-1)} I(2m+2n, 0)\\
&= \frac{(2n-1)!!(2m+2n-1)!!}{((2m+1)(2m+3)\cdots(2m+2n-1))(2m+2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}\\
&= \frac{(2n-1)!!(2m-1)!!}{2(2m+2n)!!}\pi\\
&= \frac{\pi(2n)!(2m)!}{2^{m+n+1}(m+n)!2^{m+n} m!n!} = \frac{\pi(2n)!(2m)!}{2^{2m+2n+1} m!n!(m+n)!}.
\end{aligned}$$

48 $I_n = \int_E x^m (\ln x)^n\,dx$, $E = (0,1]$.

根据 1.5 节定义 3,有

$$I_n = \int_0^1 F(x)\,dx,$$

其中 $F(x) = \begin{cases} x^m (\ln x)^n, & x\in E,\\ 0, & x = 0.\end{cases}$ **函数** F **在点** $x=0$ **右连续,因为** $\lim_{x\to +0} F(x) = 0$, **因此** $F\in R[0,1]$. **分部积分,得到**

$$I_n = \frac{x}{m+1}F(x)\Big|_0^1 - \frac{n}{m+1}\int_E x^m (\ln x)^{n-1}\,dx = -\frac{n}{m+1} I_{n-1}.$$

对于积分 $I_{n-1}, I_{n-2}, \cdots, I_1$, **类似地讨论,得到**

$$I_n = (-1)^n \frac{n!}{(m+1)^n} I_0,$$

其中 $I_0=\int_0^1 x^m \mathrm{d}x=\frac{1}{m+1}$. 最后有

$$I_n=(-1)^n\frac{n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

例 49—54 是定理,可用于某些积分的计算及研究某些理论问题.

49　证明:对于连续函数 $f:[-l,l]\to\mathbf{R}$ 有

1) $\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^l f(x)\mathrm{d}x$, 如果 f 为偶函数;

2) $\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x=0$, 如果 f 为奇函数.

由积分的可加性,成立等式

$$\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-l}^{0} f(x)\mathrm{d}x+\int_0^l f(x)\mathrm{d}x.$$

在第一个积分中,设 $x=-t$,有

$$\int_{-l}^{l} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^l (f(x)+f(-x))\mathrm{d}x.$$

如果 f 为偶函数,则 $f(x)+f(-x)=2f(x)(0\le x\le l)$,得到 1). 如果 f 为奇函数,则 $f(x)+f(-x)\equiv 0(0\le x\le l)$,得到 2).

50　证明:偶函数的原函数中有一个为奇函数,而奇函数的所有原函数均为偶函数.

设 $f\in R[-l,l]$ 且为偶函数. 则任何函数

$$F: x\mapsto\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C,\quad C\text{为常数},$$

都是函数 f 在 $[-l,l]$ 上的原函数(函数 f 的间断点至多为可数个).

考虑积分 $\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t$, 作变量代换 $-t=z$,根据函数 f 的偶性,得到

$$F(-x)=-\int_0^x f(z)\mathrm{d}z+C.$$

因此 $(F(-x)=-F(x))\quad(C=0)$,即只有函数 $x\mapsto\int_0^x f(t)\mathrm{d}t(-l\le x\le l)$ 是奇函数.

设 f 为 $[-l,l]$ 上的奇函数且 $f\in R[-l,l]$. 则

$$\int f(x)\mathrm{d}x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C,\ C\text{为常数}.$$

考虑函数 f 的任意一个原函数

$$F_j(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C_j,$$

每一个均属于集合 $\left\{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C\right\}$.有

$$F_j(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t+C_j=-\int_0^x f(-z)\mathrm{d}z+C_j=\int_0^x f(z)\mathrm{d}z+C_j=F_j(x),$$

因而,F_j 为偶函数.

51 证明:如果 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续的周期函数,周期为 T,则

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 a 为任一实数.

由积分的可加性,有

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^T f(x)\mathrm{d}x+\int_T^{a+T} f(x)\mathrm{d}x.$$

由函数 f 的周期性,有

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_T^{a+T} f(x-T)\mathrm{d}x.$$

作变换 $x-T=t$,得到

$$\int_T^{a+T} f(x-T)\mathrm{d}x=\int_0^a f(t)\mathrm{d}t.$$

因此

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_a^T f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

52 证明:当 n 为奇数时,函数

$$F: x\mapsto\int_0^x \sin^n t\mathrm{d}t,\quad G: x\mapsto\int_0^x \cos^n t\mathrm{d}t$$

是周期为 2π 的周期函数,而当 n 为偶数时,每个函数均为一线性函数与一个周期函数的和.

对函数 F 进行证明.设 $n=2m+1\ (m\in\mathbb{N})$.则

$$F(x+2\pi)=\int_0^{x+2\pi}\sin^{2m+1}t\mathrm{d}t=F(x)+\int_x^{x+2\pi}\sin^{2m+1}t\mathrm{d}t.$$

类似于例 51 及 49,有

$$\int_x^{x+2\pi}\sin^{2m+1}t\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\sin^{2m+1}t\mathrm{d}t=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^{2m+1}t\mathrm{d}t=0.$$

因而 $F(x+2\pi)=F(x)$,即 F 是周期为 2π 的周期函数 .

如果 $n=2m(m\in\mathrm{N})$,则

$$F(x+2\pi)=F(x)+\int_0^{2\pi}\sin^{2m}x\,\mathrm{d}x .$$

由于函数 $x\mapsto\sin^{2m}x(x\in\mathrm{R})$有周期 π,函数在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上是偶函数,则

$$\int_0^{2\pi}\sin^{2m}x\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}\sin^{2m}x\,\mathrm{d}x=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\,\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\,\mathrm{d}x .$$

因而

$$C_m=\int_0^{2\pi}\sin^{2m}x\,\mathrm{d}x=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\,\mathrm{d}x=2\pi\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}$$

(参见例 43 的解) .这样 $F(x+2\pi)-F(x)=C_m$.

考虑函数 $\psi: x\mapsto F(x)-\frac{C_m}{2\pi}x(x\in\mathrm{R})$.由于 $\psi(x+2\pi)=F(x+2\pi)-\frac{C_m}{2\pi}(x+2\pi)=F(x+2\pi)-C_m-\frac{C_m}{2\pi}x=F(x)-\frac{C_m}{2\pi}x=\psi(x)$,则 ψ为周期 2π 的周期函数,由此可知

$$F(x)=\psi(x)+a_m x,\quad x\in\mathrm{R},\quad a_m=\frac{C_m}{2\pi},$$

即,函数 F 可以表示为周期为 2π 的周期函数 ψ以及线性函数 $x\mapsto a_m x$ 的和 .

53 证明:函数

$$F: x\mapsto\int_{x_0}^{x}f(t)\mathrm{d}t,\quad x\in\mathrm{R},$$

其中 f 为周期为 T 的连续周期函数,是一个线性函数与一个周期为 T 的周期函数的和 .

根据 2. 1 节的定理 2, $\forall x\in\mathrm{R}$,函数 F 可微且 $F'(x)=f(x)$.由 f 的周期性,有 $F'(t+T)=f(t)$.在区间$[x_0,x]$上积分,有 $F(x+T)-F(x_0+T)=F(x)$.由于

$$F(x_0+T)=\int_{x_0}^{x_0+T}f(t)\mathrm{d}t=\int_0^{T}f(t)\mathrm{d}t=C,\ C\text{为常数},$$

则 $F(x+T)-F(x)=C$.如果 $C=0$,则 $F(x+T)=F(x)$, F 为周期为 T 的周期函数 .如果 $C\neq0$,则引入函数

$$\Phi: x\mapsto F(x)-\frac{C}{T}x,\ x\in\mathrm{R} .$$

由于 Φ是周期为 T 的周期函数,则

$$F(x)=\Phi(x)+ax,\quad x\in\mathrm{R},\quad a=\frac{C}{T},$$

是周期函数与线性函数(齐次)的和 .

54 证明:如果 $f\in C[0,1]$,**则**

$$1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\mathrm{d}x;\quad 2)\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

1) **设** $\frac{\pi}{2}-x=t$,**得到**

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\mathrm{d}x=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\cos t)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)\mathrm{d}t.$$

2) **写成**

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi} xf(\sin(\pi-x))\mathrm{d}x,$$

且令 $\pi-x=t$,**得到**

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}(\pi-t)f(\sin t)\mathrm{d}t=\pi\int_0^{\pi} f(\sin t)\mathrm{d}t-\int_0^{\pi} tf(\sin t)\mathrm{d}t,$$

由此

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\mathrm{d}x.$$

在例 55—62 **中考察各种积分 .其中某些积分的计算运用欧拉公式**

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x,\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}=\cos x-\mathrm{i}\sin x.$$

计算积分:

55 $I=\int_0^{200\pi}\quad 1-\cos 2x\mathrm{d}x$.

由于 $1=\quad 2\int_0^{200\pi}|\sin x|\mathrm{d}x$ **且函数** $x\mapsto|\sin x|(x\in\mathbb{R})$ **是周期** $T=\pi$ **的周期函数,则根据例** 51,**有**

$$I=200\quad 2\int_0^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=400\quad 2.$$

56 $I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

因为 $I=\int_0^{\pi} xf(\sin x)\mathrm{d}x$,**其中** $f(t)=\frac{t}{2-t^2}$,**则根据例** 54,**得到**

$$I = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2 - \sin^2 x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_{\pi}^{0} \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{1 + \cos^2 x} = \frac{\pi}{2}\arctan(\cos x)\Big|_{\pi}^{0} = \frac{\pi^2}{4}.$$

57 $I = \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{1 + 2\alpha\cos x + \alpha^2}\mathrm{d}x, \alpha \in \mathbf{R}$.

如果 $\alpha = 1$, **则** $I = \int_E \frac{\sin^2 x}{1 + 2\cos x + 1}\mathrm{d}x = \int_E \sin^2 \frac{x}{2}\mathrm{d}x$, **其中** $E = [0,\pi)$. **此时**, $I = \frac{\pi}{2}$.

当 $\alpha \neq 1$ **时**, **把** I **表成形式** $I = \frac{1}{1+\alpha^2}(I_1 - I_2)$, **其中**

$$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \varepsilon\cos x}, \quad I_2 = \int_0^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1 + \varepsilon\cos x}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \left(\frac{\cos x}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon^2} + \frac{1}{\varepsilon^2(1 + \cos x)}\right)\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{\varepsilon^2} + \frac{I_1}{\varepsilon^2},$$

$$\varepsilon = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}, \quad |\varepsilon| < 1.$$

因而

$$I = \frac{1}{\varepsilon^2(1+\alpha^2)}(\pi - (1 - \varepsilon^2) I_1).$$

由于 $I_1 = \frac{2}{1-\varepsilon^2}\arctan\left(\frac{1-|\varepsilon|}{1+|\varepsilon|}\tan\frac{x}{2}\right) + \frac{2\pi}{1-\varepsilon^2}\frac{x+\pi}{2\pi}\Big|_0^{\pi-0} = \frac{\pi}{1-\varepsilon^2}$ (**参见例** 20),

$$I = \frac{\pi}{\varepsilon^2(1+\alpha^2)}(1 - \quad 1 - \varepsilon^2) = \frac{\pi}{4\alpha^2}(1 + \alpha^2 - |1 - \alpha^2|).$$

注意到当 $\alpha = 1$ **时**, $I = \frac{\pi}{2}$, **得到**

$$I = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \text{如果 } |\alpha| \leq 1, \\ \frac{\pi}{2\alpha^2}, & \text{如果 } |\alpha| > 1. \end{cases}$$

58 $I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{(2 + \cos x)(3 + \cos x)}$.

由恒等式 $1 \equiv (3 + \cos x) - (2 + \cos x)$**则有**

$$I = \varepsilon_1\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \varepsilon_1\cos x} - \varepsilon_2\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \varepsilon_2\cos x},$$

其中 $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{3}$. **因为**

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + \varepsilon_j\cos x} = \frac{2}{1-\varepsilon_j^2}\arctan\left(\frac{1-\varepsilon_j}{1+\varepsilon_j}\tan\frac{x}{2}\right) + \frac{2\pi}{1-\varepsilon_j^2}\frac{x+\pi}{2\pi}\Big|_0^{2\pi} = \frac{2\pi}{1-\varepsilon_j^2},$$

则
$$I=2\pi\left(\frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1^2}-\frac{\varepsilon_2}{1-\varepsilon_2^2}\right)=\pi\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right).$$

59 $I=\int_E\frac{\sin nx}{\sin x}\mathrm{d}x,\ E=(0,\pi)$.

由于 $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin nx}{\sin x}=n,\ \lim\limits_{x\to\pi-0}\frac{\sin nx}{\sin x}=(-1)^{n+1}n$,则
$$\int_E\frac{\sin nx}{\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x,$$
其中
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin nx}{\sin x}, & \text{当 } x\in E,\\ n, & \text{当 } x=0,\\ (-1)^{n+1}n, & \text{当 } x=\pi.\end{cases}$$

由欧拉公式有 $\sin kx=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}),\ k=1,\cdots,n$,因此
$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}=\sum_{k=1}^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}((n+1)-2k)x}$$
$$=\begin{cases}2(\cos(n-1)x+\cos(n-3)x+\cdots+\cos x), & \text{若 } n \text{ 为偶数},\\ 2(\cos(n-1)x+\cos(n-3)x+\cdots+\cos x)+1, & \text{若 } n \text{ 为奇数}.\end{cases}$$

由于 $\int_0^\pi\cos(n-k)x\mathrm{d}x=\left.\frac{\sin(n-k)x}{n-k}\right|_0^\pi=0,\ k=1,3,\cdots,n-1$,则
$$\int_E\frac{\sin nx}{\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & \text{若 } n \text{ 为偶数},\\ \pi, & \text{若 } n \text{ 为奇数}.\end{cases}$$

60 $I=\int_E\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\mathrm{d}x,\ E=[0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

函数 $x\mapsto\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}(x\in E)$当 $x\to\frac{\pi}{2}$时有极限,极限值为$(-1)^n(2n+1)$,因而
$$\int_E\frac{\cos(2n+1)x}{\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x,$$
其中
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos(2n+1)x}{\cos x}, & \text{若 } x\in E,\\ (-1)^n(2n+1), & \text{若 } x=\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

根据欧拉公式,有
$$\cos(2n+1)x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n+1)x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2n+1)x}),\ \cos x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}),$$
$$f(x)=2\sum_{k=1}^n(-1)^{k-1}\cos2(n-(k-1))x+(-1)^n,\ 0\leqslant x\leqslant\pi.$$

因此

$$I=\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\int_0^{\pi}\cos 2(n-(k-1))x\,\mathrm{d}x+(-1)^n\pi$$

$$=2\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}\left.\frac{\sin 2(n-(k-1))x}{2(n-(k-1))}\right|_0^{\pi}+(-1)^n\pi=(-1)^n\pi .$$

61　$I=\int_0^{\pi}\cos nx\cos^n x\,\mathrm{d}x$.

借助于欧拉公式,得到

$$\cos nx\cos^n x=\frac{1}{2^{n+1}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx})(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})^n=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k(\mathrm{e}^{\mathrm{i}2(n-k)x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2kx})$$

$$=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{C}_n^k\mathrm{e}^{\mathrm{i}2(n-k)x}+\sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_n^k\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2kx}\right)=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{C}_n^k\cos 2kx .$$

对所得等式两边在$[0,\pi]$**上积分并注意到**

$$\int_0^{\pi}\cos 2kx\,\mathrm{d}x=0,\quad k=1,\cdots,n,$$

得到 $I=\dfrac{\pi}{2^n}$.

62　$I=\int_0^{\pi}\sin nx\sin^n x\,\mathrm{d}x$.

作变量代换 $x=\dfrac{\pi}{2}+t$,**得到**

$$I=\sin n\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\cos nt\,\mathrm{d}t+\cos n\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\sin nt\,\mathrm{d}t .$$

因为函数 $t\hookrightarrow\cos^n t\sin nt\quad\left(-\dfrac{\pi}{2}\leq t\leq\dfrac{\pi}{2}\right)$ **为奇函数,根据例** 49,**有**

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\sin nt\,\mathrm{d}t=0 .$$

因此

$$I=\sin n\frac{\pi}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\cos nt\,\mathrm{d}t .$$

在前例中证明了

$$\cos^n t\cos nt = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n} C_n^k \cos 2kx .$$

注意到等式

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2kx\,dx = \frac{1}{2k}\sin 2kx\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 0,\quad k = 1,\cdots,n,$$

得到

$$I = \frac{\sin n\dfrac{\pi}{2}}{2^n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2^n}\sin n\frac{\pi}{2} .$$

63　勒让德多项式由下式定义

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n,\ n\in Z_0 .$$

证明:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{当 } m\neq n,\\ \dfrac{2}{2n+1}, & \text{当 } m = n .\end{cases}$$

考虑当 $m<n$ **时的积分**

$$I = \int_{-1}^{1}\frac{d^n}{dx^n}((x^2-1)^n)\,x^m\,dx$$

计算该积分,**利用分部积分** m **次**,**得到**

$$I = (-1)^m m!\int_{-1}^{1}\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}}(x^2-1)^n dx = (-1)^m m!\frac{d^{n-m-1}}{dx^{n-m-1}}(x^2-1)^n\Big|_{-1}^{1} = 0,\qquad (1)$$

因为当 $k=0,\cdots,n-1$ **时**,$\dfrac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^n\Big|_{-1}^{1}=0$.

多项式 $P_n(x)$ **与多项式** $\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ **只相差一个常数因子**,**而多项式** $P_m(x)$ **是** x^k $(k=0,1,\cdots,m)$**的线性组合**,**因而由**(1)**有**

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)\,dx = 0,\ \text{如果 } m<n .$$

如果 $m>n$,**则显然** $\int_{-1}^{1}P_m(x)x^n\,dx = 0$,**由此** $\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)\,dx = 0$.

这样 $\int_{-1}^{1}P_m(x)P_n(x)\,dx = 0$,**如果** $m\neq n$.

考虑积分

$$I_n = \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\,dx = \frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1} \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,dx.$$

为计算此积分,利用分部积分法 n 次,得到

$$I_n = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}((x^2-1)^n)(x^2-1)^n\,dx.$$

多项式$(x^2-1)^n$ 最高阶次数的系数为 1,因此$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^n = (2n)!$,从而

$$I_n = \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\,dx$$

$$= (-1)^n\frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{0}^{1}(x^2-1)^n\,dx = \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{0}^{1}(1-x^2)^n\,dx.$$

由函数 $x \mapsto (x^2-1)^n(-1 \leq x \leq 1)$的偶性,作变量代换 .$\arcsin x = t$ 且注意到例 43 的解答,得到

$$I_n = \frac{2(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1} t\,dt = \frac{2(2n)!(2n)!!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)!!} = \frac{2}{2n+1}.$$

64 设 $f \in R[a,b]$且函数 $x \mapsto F(x)$, $a \leq x \leq b$,满足 $F'(x) = f(x)$在$[a,b]$内部的有限个点 $c_i(i=1,\cdots,p)$及点 a和 b 例外,在这些点处,F 具有第 1 类间断点 .

证明:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b-0) - F(a+0) - \sum_{i=1}^{p}(F(c_i+0) - F(c_i-0)).$$

构造函数 $x \mapsto F_1(x)$, $a \leq x \leq b$,其中

$$F_1(x) = \begin{cases} F(x), & \text{如果 } x \in (c_i, c_{i+1}), \\ F(c_i+0), & \text{如果 } x = c_i, \\ F(c_{i+1}-0), & \text{如果 } x = c_{i+1}, \end{cases} \qquad i = 0,\cdots,p,\ c_0 = a,\ c_{p+1} = b.$$

设 Π 为区间$[a,b]$的任意一个分割,分点包含有 c_i, $i = 1,\cdots,p$.在每一段$[x_j, x_{j+1}](j=0,\cdots,n-1)$上利用有限增量公式,有

$$S_\Pi(f) = \sum_{j=0}^{n-1}(F_1(x_{j+1}) - F_1(x_j)) = \sum_{j=0}^{n-1}F_1'(\xi_j)\Delta x_j = \sum_{j=0}^{n-1}f(\xi_j)\Delta x_j,\quad x_j < \xi_j < x_{j+1}.$$

与此同时,和 $S_\Pi(f)$具有形式

$$S_\Pi(f) = \sum_{i=0}^{p}(F_1(c_{i+1}) - F_1(c_i)) = F_1(c_1) - F_1(c_0) + F_1(c_{p+1}) - F_1(c_p) +$$

$$\sum_{i=1}^{p-1}(F(c_{i+1}-0) - F(c_i+0))$$

$$= F(b-0) - F(a+0) + F(c_1 - 0) - F(c_p + 0) + \sum_{i=0}^{p-1}(F(c_{i+1} - 0) - F(c_i + 0))$$

$$= F(b-0) - F(a+0) - \sum_{i=1}^{p}(F(c_i + 0) - F(c_i - 0)).$$

由于 $f \in R[a,b]$，则 $\lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f) = \int_a^b f(x)\,dx = F(b-0) - F(a+0) - \sum\limits_{i=1}^{p}(F(c_i+0) - F(c_i - 0))$.

65　利用积分中值定理，判断下列积分的符号

1) $I = \int_E \frac{\sin x}{x}\,dx,\ E = (0, 2\pi)$;　　2) $I = \int_{-2}^{2} x^3 2^x\,dx$.

1) 函数 $F: [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$，其中

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{如果 } x \in E, \\ 1, & \text{如果 } x = 0. \end{cases}$$

在区间 $[0,2\pi]$ 上连续，因此 $F \in R[0,2\pi]$，并且

$$\int_E \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^{2\pi} F(x)\,dx.$$

由积分的可加性，有

$$\int_0^{2\pi} F(x)\,dx = \int_0^{\pi} F(x)\,dx + \int_\pi^{2\pi} F(x)\,dx = \pi\int_0^{\pi} \frac{F(x)}{x+\pi}\,dx$$

在积分 $\int_\pi^{2\pi} F(x)\,dx$ 中作变量代换 $x - \pi = t$．利用第一中值定理，得到

$$I = \pi F(\xi)\int_0^{\pi}\frac{dx}{x+\pi} = \pi F(\xi)\ln(x+\pi)\Big|_0^{\pi} = \pi\frac{\sin\xi}{\xi}\ln 2,\quad 0 < \xi < \pi,$$

由此 $I > 0$.

2) 记 $I = I_1 + I_2$，其中

$$I_1 = \int_{-2}^{0} x^3 2^x\,dx,\quad I_2 = \int_0^2 x^3 2^x\,dx,$$

在 I_1 中作变量代换 $x = -t$，得

$$I = 2\int_0^2 x^3\,\mathrm{sh}(x\ln 2)\,dx.$$

根据第一中值定理，有

$$I = 2\operatorname{sh}(\xi\ln 2)\int_0^2 x^3\,\mathrm{d}x = 8\operatorname{sh}(\xi\ln 2),\ 0 < \xi < 2 .$$

因此 $I > 0$.

66　设 $f \in C[0, +\infty)$ 且 $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A,\ A \in \mathbf{R}$.考虑 $f(t) = \arctan t$, $0 \leq t < +\infty$.求

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t .$$

由于 $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$,则 $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, B > 0$:

$$\forall\, x \geq B \quad | f(x) - A | < \frac{\varepsilon}{2} .$$

当 $x > B$ 时,考虑积分

$$\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^B f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{x}\int_B^x f(t)\,\mathrm{d}t .$$

因为 $f \in R[0, B]$,则 $\int_0^B f(t)\,\mathrm{d}t = C$, C 为常数 .根据第 1 中值定理,有

$$\frac{1}{x}\int_B^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(\xi)\left(1 - \frac{B}{x}\right),\ B \leq \xi \leq x .$$

在 $x > B$ 时,估计 $\alpha(x) = \left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - A\right|$ 有

$$\begin{aligned}\alpha(x) &= \left|\frac{C}{x} + (f(\xi) - A) - f(\xi)\frac{B}{x}\right| \\ &\leq \frac{| C - f(\xi) B |}{x} + | f(\xi) - A | < \frac{| C - f(\xi) B |}{x} + \frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

因为 $B \leq \xi \leq x$.由于 $| C - f(\xi) B|$ 为常数,则当 $x > 0$ 充分大时,满足不等式 $\frac{| C - f(\xi) B|}{x} < \frac{\varepsilon}{2}$,从而有不等式 $\alpha(x) < \varepsilon$,由此应有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = A .$$

如果 $f(t) = \arctan t,\ 0 \leq t < +\infty$,则

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x \arctan t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} .$$

估计积分:

67 $I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + 0.5\cos x}$.

把 I 写成形式 $I = I_1 + I_2$, 其中

$$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + 0.5\cos x}, \quad I_2 = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + 0.5\cos x}.$$

在 I_2 中作变量代换 $2\pi - x = t$, 得知 $I_2 = I_1$. 从而

$$I = 2I_1 = 4\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1 + 2\cos^2 \frac{x}{2}}.$$

函数 $f: x \mapsto \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1 + 2\cos^2 \frac{t}{2}} (0 \leqslant x \leqslant \pi)$ **满足关于有限增量的拉格朗日定理的所有条件, 由此有**

$$I = 4(f(\pi) - f(0)) = 4\pi f'(\xi) = \frac{4\pi}{1 + 2\cos^2 \frac{\xi}{2}}, \quad 0 < \xi < \pi.$$

因为 $\frac{1}{3} < \frac{1}{1 + 2\cos^2 \frac{\xi}{2}} < 1$, **则有估计** $\frac{4\pi}{3} < I < 4\pi$, **或者** $-\frac{4\pi}{3} < I - \frac{8}{3}\pi < \frac{4\pi}{3}$.

记 $\theta = \left(I - \frac{8\pi}{3}\right) \Big/ \frac{4\pi}{3}$, **得到**

$$I = \frac{8\pi}{3} + \frac{4}{3}\pi\theta, \quad |\theta| < 1.$$

68 $I = \int_0^{100} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x + 100}\mathrm{d}x$.

由于函数 $x \mapsto \frac{1}{x + 100} (0 \leqslant x \leqslant 100)$ **单调, 而函数** $x \mapsto \mathrm{e}^{-x} (0 \leqslant x \leqslant 100)$ **连续, 则对 I 可以应用第 2 中值定理**(2.2 **节公式**(6)). **这样得到**

$$I = 0.01\int_0^{\xi} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x + 0.005\int_{\xi}^{100} \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = 0.01(1 - \mathrm{e}^{-\xi}) + 0.005(\mathrm{e}^{-\xi} - \mathrm{e}^{-100}), \quad 0 < \xi < 100.$$

由于 $\xi = 100\theta$, $0 < \theta < 1$, **则 I 具有形式**

$$I = 0.01 - 0.005(\mathrm{e}^{-100\theta} - \mathrm{e}^{-100}) = 0.01 - 0.005\theta,$$

其中 $\theta = \mathrm{e}^{-100\theta} - \mathrm{e}^{-100}$, $0 < \theta < 1$.

69 $I = \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.

函数 $x \mapsto \frac{1}{x} (100\pi \leqslant x \leqslant 200\pi)$ **单调, 而函数** $x \mapsto \sin x (100\pi \leqslant x \leqslant 200\pi)$ **连续, 因此**

利用 2. 2 节公式(6), 可得

$$I = \frac{1}{100\pi}\int_{100\pi}^{\xi}\sin x\mathrm{d}x + \frac{1}{200\pi}\int_{\xi}^{200\pi}\sin x\mathrm{d}x = \frac{1-\cos\xi}{200\pi}, 100\pi < \xi < 200\pi .$$

因此 $0 < I < \frac{1}{100\pi}$.记 $\theta = I\Big/\frac{1}{100\pi}$, 则 $I = \frac{\theta}{100\pi}, 0 < \theta < 1$.

70 $I = \int_{100}^{200}\sin\pi x^2\mathrm{d}x$.

在作变量代换 $\pi x^2 = t$ 之后, 得到

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{100^2\pi}^{200^2\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t .$$

利用 2. 2 段公式(6), 有

$$I = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{100\pi}\int_{100^2\pi}^{\xi}\sin t\mathrm{d}t + \frac{1}{200\pi}\int_{\xi}^{200^2\pi}\sin t\mathrm{d}t\right)$$

$$= \frac{1-\cos\xi}{400\pi}, \quad 100^2\pi < \xi < 200^2\pi .$$

显然 $0 < I < \frac{1}{200\pi}$, 因而 $I = \frac{\theta}{200\pi}, 0 < \theta < 1$.

71 $I = \int_a^b\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x, 0 < a < b$.

函数 $x \mapsto \frac{1}{x}(a \leq x \leq b)$ 在区间 $[a, b]$ 上单调减, 而函数 $x \mapsto \cos x(a \leq x \leq b)$ 在该区间上连续 .因此, 根据 2. 2 节的公式(4)有

$$I = \frac{1}{a}\int_a^{\xi}\cos x\mathrm{d}x = \frac{\sin\xi - \sin a}{a}, a < \xi < b .$$

由估计 $|\sin\xi - \sin a| < 2$ 应有

$$-\frac{2}{a} < I < \frac{2}{a} .$$

记 $\theta = I\Big/\frac{2}{a}$, 得到

$$I = \frac{2\theta}{a}, \quad |\theta| < 1 .$$

72 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x = 0$.

证明时本来可以利用例 43 的解答 .我们利用第 1 中值定理 .

把 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ 表成 $I_n = I_n^{(1)} + I_n^{(2)}$，其中

$$I_n^{(1)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} \sin^n x\,dx,\quad I_n^{(2)} = \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx,$$

$0<\varepsilon<\pi$ 为任意事先给定的数．

对任意 $n\in\mathbf{N}$ 有估计

$$I_n^{(2)} \leq \int_{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\varepsilon}{2}.$$

因 $\sin^n x<\sin^{n-1}x, 0<x<\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}$，则

$$I_n^{(1)} < I_{n-1}^{(1)}，其中\ I_{n-1}^{(1)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}} \sin^{n-1} x\,dx.$$

由于 $I_n^{(1)}>0$，则单调下降数列 $\{I_n^{(1)}\}$ 有下界，且

$$\vee\ \lim_{n\to\infty} I_n^{(1)} = C,\ C\geq 0.$$

因此

$$I_n^{(1)} = C+\alpha_n,\ I_{n-1}^{(1)} = C+\beta_n,$$

其中 α_n,β_n 为无穷小数列．

根据第 1 中值定理，有

$$I_n^{(1)} = \sin\xi_n I_{n-1}^{(1)},\ 0<\xi_n<\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2},$$

由此得到 $C=\dfrac{\alpha_n-\beta_n\sin\xi_n}{1-\sin\xi_n}$，即 C 为无穷小数列．因为 C 为常数，则 $C=0$．

73 证明等式 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\dfrac{\sin x}{x}dx=0,\ p>0$．

函数 $x\mapsto\dfrac{1}{x}\ (n\leq x\leq n+p)$ 单调减，而函数 $x\mapsto\sin x\ (n\leq x\leq n+p)$ 在每一个区间 $[n,n+p]$ 上连续，因此应用第 2 中值定理（2.2 节公式(4)），得到

$$I_n = \int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx = \frac{1}{n}\int_n^{\xi_n}\sin x\,dx\ \frac{\cos n-\cos\xi_n}{n},\ n<\xi_n<n+p.$$

由估计 $|I_n| = \dfrac{|\cos n-\cos\xi_n|}{n}\leq\dfrac{2}{n}$ 有 $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$．

74 设 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$，$\varphi:[a,b]\to\mathbf{R}$ 为连续函数，函数 φ 在区间 (a,b) 上可微，并且

$\varphi'(x)\geq 0$.应用分部积分及第 1 中值定理,证明第 2 中值定理.

考虑积分 $I=\int_a^b f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$.设 $\mathrm{d}v(x)=f(x)\mathrm{d}x$, $u(x)=\varphi(x)$, 应用分部积分得到

$$I=\varphi(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\Big|_a^b-\int_a^b\varphi'(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$$

$$=\varphi(b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-(\varphi(b)-\varphi(a))\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$$

(对积分 $\int_a^b\varphi'(x)\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x$ 应用第一中值定理)应用该定理是合理的,因为函数 $x\mapsto\int_a^x f(t)\mathrm{d}t(a\leq x\leq b)$ 连续,而 $\varphi'(x)\geq 0$.

通过简单的变化可以得到

$$I=\varphi(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x+\varphi(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x.$$

如果 $f\in R[a,b]$,则数

$$M(f)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

称为函数 f 在区间 $[a,b]$ 上的中值.

求函数在指定区间上的中值:

75 $\rho=\dfrac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$, $0\leq\varphi\leq 2\pi$, $0<\varepsilon<1$.

根据定义有

$$M(\rho)=\frac{p}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{1-\varepsilon\cos\varphi}=\frac{p}{2\pi}\left(\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}}\tan\frac{\varphi}{2}\right)+\frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left[\frac{\varphi+\pi}{2\pi}\right]\right)\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$=\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\text{(见例 20)}.$$

由解析几何知 $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, $p=\dfrac{b^2}{a}$,其中 a 为椭圆的长半轴, b 为椭圆的短半轴.代入 ε 和 p 的这些值,得到 $M(\rho)=b$.

76 $f: x\mapsto\sin x\sin(x+\varphi)$, $0\leq x\leq 2\pi$.

$$M(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin x\sin(x+\varphi)\mathrm{d}x=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}(\cos\varphi-\cos(2x+\varphi))\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left(x\cos\varphi - \frac{1}{2}\sin(2x+\varphi)\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \frac{\cos\varphi}{2}.$$

77　求初速度为 v_0 的自由落体运动的中值 .

自由落体运动在时刻 t 的速度用公式表示为

$$v(t) = v_0 + gt,$$

其中 g 为自由落体运动的加速度 .

根据定义并注意 $\frac{gT}{2} = \frac{v(T) - v_0}{2}$，**得到**

$$M(v) = \frac{1}{T}\int_0^T (v_0 + gt)\,\mathrm{d}t = v_0 + \frac{gT}{2} = \frac{v(T) + v_0}{2}.$$

78　交流电强度变化满足规律

$$i = i_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right),$$

其中 i_0 为振幅，t 为时间，T 为周期，φ 为初始相位 .求电流强度的平方的均值 .

由于 $i^2 = i_0^2 \sin^2\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right) = \frac{i_0^2}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{4\pi t}{T} + 2\varphi\right)\right)$，**于是**

$$M(i^2) = \frac{i_0^2}{2T}\int_0^T \left(1 - \cos\left(\frac{4\pi t}{T} + 2\varphi\right)\right)\mathrm{d}t = \frac{i_0^2}{2}.$$

79　设 $f\in R[a,b]$ 且 $g\in R[a,b]$.证明柯西-布尼亚科夫斯基不等式

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

由于 $f\in R[a,b]$ 且 $g\in R[a,b]$，则

$$fg \in R[a,b],\ f^2 \in R[a,b],\ g^2 \in R[a,b].$$

记 $\alpha = \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$，$\beta = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$，$\gamma = \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x$ **.且考虑两种可能情况：**
1) $\alpha = \gamma = 0$；　2) **α 与 γ 中至少有一个异于零 .**

1) **设 $\alpha = \gamma = 0$. 对不等式**

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2}(f^2(x) + g^2(x)),\ a \leq x \leq b,$$

积分，得到

$$|\beta| \leq \int_a^b |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{2}(\alpha + \gamma),$$

由此 $\beta = 0$，所要证的不等式成立 .

2) **不妨设 $\gamma > 0$.则对所有 $t\in\mathbf{R}$ 成立不等式 $(f(x) + tg(x))^2 \geq 0$，对其积分得到**

$$\gamma t^2 + 2\beta t + \alpha \geq 0,\ t \in \mathbf{R}.$$

于是,二次三项式的判别式

$$y = \gamma t^2 + 2\beta t + \alpha$$

非正,即 $\beta^2 - \alpha\gamma \leqslant 0$.这样, $\beta^2 \leqslant \alpha\gamma$.

80 设 $f \in C^{(1)}[a, b]$ 且 $f(a) = 0$.证明不等式

$$M^2 \leqslant (b - a)\int_a^b f'^2(x)\,dx,$$

其中 $M = \sup\limits_{a \leqslant x \leqslant b}\{|f(x)|\}$.

把柯西-布尼亚科夫斯基不等式写成

$$\left|\int_a^x \varphi(t)g(t)\,dt\right| \leqslant \sqrt{\int_a^x \varphi^2(t)\,dt}\sqrt{\int_a^x g^2(t)\,dt},$$

其中 $g(t) = f'(t)$, $\varphi(t) = 1$, $a \leqslant t \leqslant x$, $a \leqslant x \leqslant b$.它具有形式

$$\sqrt{\int_a^x f'^2(t)\,dt}\sqrt{\int_a^x dt} \geqslant \left|\int_a^x f'(t)\,dt\right|,$$

注意到 $f(a) = 0$,由此得到不等式

$$\sqrt{\int_a^x f'^2(t)\,dt}\sqrt{x - a} \geqslant |f(x)|,\ a \leqslant x \leqslant b .$$

如果在上面不等式的左边令 $x = b$,则左边变得更大,而在不等式右边可取 $x \in [a, b]$ 为使连续函数 $x \mapsto |f(x)|$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ 达到最大值 M 的点,于是成立不等式

$$M^2 \leqslant (b - a)\int_a^b f'^2(x)\,dx .$$

练 习 题

建立被积函数在所有区段上的原函数,利用牛顿-莱布尼茨公式计算积分:

18 $\int_{1.3}^{150.2}[x]x^3\,dx$. **19** $\int_{2.4}^{35.5}\frac{[x]}{x^4}\,dx$. **20** $\int_{1.2}^{125.3}\frac{[x]}{x}\,dx$. **21** $\int_{2.3}^{74.2}[x^2]\,dx$.

22 $\int_{0.04}^{0.81}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$. **23** $\int_{0.25}^{100.2}[x]\,|\sin\pi x|\,dx$. **24** $\int_{-10}^{20}\max(1, x^2)\,dx$.

计算定积分:

25 $\int_3^{29}\frac{(x-2)^2}{3 + (x-2)^2}\,dx$. **26** $\int_{8/3}^{2\ 2}\frac{dx}{x\ (x^2-2)^5}$. **27** $\int_0^{\ln 5}\frac{e^x\ e^x - 1}{e^x + 3}\,dx$.

28 $\int_0^1(\arcsin x)^4\,dx$. **29** $\int_0^1 e^{-x}\sin\pi x\,dx$. **30** $\int_0^{2\pi}\frac{a + \cos x}{1 + 2a\cos x + a^2}\,dx$.

31 $\int_{e^{-2\pi n}}^1\left|\cos\ \ln\frac{1}{x}\right|dx, n \in \mathrm{N}$. **32** $\int_{-1}^1 e^{k\arcsin x}\,dx$. **33** $\int_0^1\frac{x^3}{(1 + x^3)^2}\,dx$.

34 $\int_0^1 \frac{x^2-1}{(x+2)^4}\,\mathrm{d}x$.　　**35** $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-mx}\cos^{2n+1}x\,\mathrm{d}x$.　　**36** $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

37 $\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}$.　　**38** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{(a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x)^2}$.　　**39** $\int_0^{\pi}\sin^{2n}x\,\mathrm{d}x,\ n\in\mathbf{N}$.

40 $\int_E \frac{\cos(4n+1)x}{\cos x}\,\mathrm{d}x,\ E=[0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\},\ n\in\mathbf{N}$.

解方程:

41 $\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}=\frac{\pi}{12}$.　　**42** $\int_{\ln 2}^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{\mathrm{e}^t-1}}=\frac{\pi}{6}$.

43 **求函数** $f: x\mapsto\int_0^x \frac{2t+1}{t^2-2t+2}\,\mathrm{d}t\ (-1\leq x\leq 1)$ **的绝对极大值**.

44 **研究极值并求函数图像的拐点**.

$$f: x\mapsto\int_0^x (t-1)(t-2)^2\,\mathrm{d}t,\quad x\in\mathbf{R}.$$

45 **证明恒等式** $\int_0^{\sin^2 x}\arcsin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t+\int_0^{\cos^2 x}\arccos\sqrt{t}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}$.

46 **证明** $\sum_{k=1}^{n-1} kx^{k-1}=\frac{(n-1)x^n-nx^{n-1}+1}{(x-1)^2}$.

47 **计算函数** $f: x\mapsto\frac{2}{\mathrm{e}^x+1}\,(0\leq x\leq 2)$**的中值**.

48 **当** a **取何值时,函数** $x\mapsto\ln x\,(1\leq x\leq a)$**的中值等于函数变化的中值?**

证明:

49 $\frac{\pi}{6}<\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2-x^3}}<\frac{\pi}{4\sqrt{2}}$.　　**50** $0.5<\int_0^{0.5}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^{2n}}}\leq\frac{\pi}{6},\ n\geq 1$.

51 $0.78<\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^4}}<0.93$.

证明等式:

52 $\int_{100}^{200}\frac{x^3\,\mathrm{d}x}{x^4+x+1}=\ln 2-\frac{\theta}{3\cdot 10^6},\ 0<\theta<1$.　　**53** $\int_{100}^{200}\frac{\sin\pi x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{0.005}{\pi}-\frac{2\theta}{\pi^3 10^6},\ 0<\theta<1$.

证明:

54 $0<\int_0^1 \frac{x^{19}}{\sqrt[3]{1+x^6}}\,\mathrm{d}x<\frac{1}{20}$.　　**55** $0<\int_0^{200}\frac{\mathrm{e}^{-5x}}{20+x}\,\mathrm{d}x<0.01$.

56 $1<\int_0^1 \frac{1+x^{20}}{1+x^{40}}\,\mathrm{d}x<1+\frac{1}{42}$.　　**57** $0<\int_{10}^{20}\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^4+x+1}<\frac{1}{20}$.

58 $1-\frac{1}{n}<\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x<1,\ n>1$.　　**59** **确定积分的符号**, $I=\int_{0.5}^1 x^2\ln x\,\mathrm{d}x$.

60　哪一个积分更大：$I_1 = \int_0^{\pi} e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$ 或者 $I_2 = \int_{\pi}^{2\pi} e^{-x^2}\cos^2 x\,dx$？

61　计算 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_0^1 \dfrac{dx}{\varepsilon x^3+1}$.

62　计算 $\lim\limits_{\varepsilon\to +0}\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} f(x)\dfrac{dx}{x}$，其中 $a>0, b>0, f\in C[0,1]$.

3　向量值函数、复值函数与函数矩阵的积分

3.1　向量值函数的黎曼积分

设 $\boldsymbol{f}: [a,b]\to \mathbb{R}^m$ 为带分量 $f_j\ (j=1,\cdots,m)$ 的向量值函数，分量在区间 $[a,b]$ 上有界．考虑区间 $[a,b]$ 的任意分割 Π 并对任意取点 $\xi_i\in[x_i, x_{i+1}]$ 构造和

$$\boldsymbol{S}_\Pi(\boldsymbol{f}) = \sum_{i=0}^{n-1}\boldsymbol{f}(\xi_i)\Delta x_i,$$

称之为向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 在区间 $[a,b]$ 上的积分和．根据空间 $\mathbb{R}^m$ 中的加法定义，积分和 $\boldsymbol{S}_\Pi(\boldsymbol{f})$ 具有形式

$$\boldsymbol{S}_\Pi(\boldsymbol{f}) = (S_\Pi(f_1), S_\Pi(f_2),\cdots, S_\Pi(f_m)),\tag{1}$$

其中 $S_\Pi(f_j) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} f_j(\xi_i)\Delta x_i$ 为函数 $f_j\ (j=1,\cdots,m)$ 的积分和．

设 $d(\Pi) = \max\limits_{0\leq i\leq n-1}\Delta x_i$．令 $\lim\limits_{d(\Pi)\to 0}\boldsymbol{S}_\Pi(\boldsymbol{f}) \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{I}$，如果 $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0: \forall\,\Pi\wedge d(\Pi)<\delta \Rightarrow \|\boldsymbol{S}_\Pi(\boldsymbol{f})-\boldsymbol{I}\|<\varepsilon$.

定义　极限

$$\lim_{d(\Pi)}\boldsymbol{S}_\Pi(\boldsymbol{f}) = \boldsymbol{I},$$

如果存在，称为向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分．

如果向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 在区间 $[a,b]$ 上具有定积分，则称之为在该区间上黎曼可积，而其积分将记成 $\int_a^b \boldsymbol{f}(x)\,dx$．在 $[a,b]$ 上可积的向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 的全体将记为 $\boldsymbol{f}\in R[a,b]$.

定理　向量值函数 $\boldsymbol{f}: [a,b]\to\mathbb{R}^m$ 在 $[a,b]$ 上可积，当且仅当它的每一个分量 $f_j\ (j=1,\cdots,m)$ 在该区间上可积．

注意到该定理，得到，如果 $\boldsymbol{f}\in R[a,b]$，则

$$\int_a^b \boldsymbol{f}(x)\,dx = \left(\int_a^b f_1(x)\,dx, \int_a^b f_2(x)\,dx,\cdots,\int_a^b f_m(x)\,dx\right).\tag{2}$$

我们指出,在积分$\int_a^b \boldsymbol{f}(x)\,\mathrm{d}x$中的变量代换导致在每一个积分$\int_a^b f_j(x)\,\mathrm{d}x\ (j=1,\cdots,m)$中的变量代换,这是由于向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 的积分转化为 m 个实函数的积分.

如果向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 以及它们的导数 $\boldsymbol{f}'$和 $\boldsymbol{g}'$在区间$[a,b]$上可积.则对于这些函数的内积和向量积,成立分部积分公式

$$\int_a^b (\boldsymbol{f}(x),\boldsymbol{g}'(x))\,\mathrm{d}x = (\boldsymbol{f}(x),\boldsymbol{g}(x))\Big|_a^b - \int_a^b (\boldsymbol{f}'(x),\boldsymbol{g}(x))\,\mathrm{d}x, \tag{3}$$

$$\int_a^b \boldsymbol{f}(x)\times\boldsymbol{g}'(x)\,\mathrm{d}x = \boldsymbol{f}(x)\times\boldsymbol{g}(x)\Big|_a^b - \int_a^b \boldsymbol{f}'(x)\times\boldsymbol{g}(x)\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

3.2　复值函数的黎曼积分

定义　对函数 $f:[a,b]\to\mathbb{C}$,其中 $f(x)=u(x)+\mathrm{i}v(x)$,在对区间$[a,b]$的任意分割Π及任意取点 $\xi_j\in[x_j,x_{j+1}]$下,作积分和

$$S_\Pi(f) = \sum_{j=0}^{n-1} u(\xi_j)\Delta x_j + \mathrm{i}\sum_{j=0}^{n-1} v(\xi_j)\Delta x_j .$$

则$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \overset{\mathrm{def}}{=} \lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f)$,如果该极限存在.

所有黎曼可积的复值函数全体的集合记为 $f\in R[a,b]$.

定理　v $\lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f)$　v $\lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(u)\wedge$v $\lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(v)$,而且

$$\lim_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f) = \left(\lim_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(u),\ \lim_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(v)\right).$$

这样,复值函数 f 在$[a,b]$上黎曼可积,当且仅当 $u\in R[a,b]$及 $v\in R[a,b]$,此时

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_a^b v(x)\,\mathrm{d}x .$$

如果复值函数 f 在区间$[a,b]$上可积,则其复共轭函数 $\bar{f}$ 在该区间可积.同时,乘积 $f\cdot\bar{f}=|f|^2$ 是可积实函数,且有

$$\int_a^b f(x)\bar{f}(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (u^2(x)+v^2(x))\,\mathrm{d}x .$$

3.3　函数矩阵的黎曼积分

如果 $x\mapsto \boldsymbol{A}(x)=(a_{ij}(x))\ (a\le x\le b)$为 $n\times m$ 的函数矩阵,其元素是$[a,b]$上的有界函数,则它是域$\mathbb{R}$ 上的向量空间 M 的元素,并且对区间$[a,b]$的任意分割Π及任意取点 $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$,在该区间上定义积分和 $\boldsymbol{S}_\Pi(A)=(S_\Pi(a_{ij}))$.定义

$$\int_a^b \boldsymbol{A}(x)\,\mathrm{d}x \overset{\text{def}}{=} \lim_{d(\Pi)\to 0} \boldsymbol{S}_\Pi(\boldsymbol{A}),$$

如果该极限存在.

定理　$\forall \lim\limits_{d(\Pi)\to 0} \boldsymbol{S}_\Pi(\boldsymbol{A})$　$\forall \lim\limits_{d(\Pi)\to 0} \boldsymbol{S}_\Pi(a_{ij}),\ i=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,m$,而且

$$\lim_{d(\Pi)\to 0} \boldsymbol{S}_\Pi(\boldsymbol{A}) = \lim_{d(\Pi)\to 0} \boldsymbol{S}_\Pi(a_{ij}) .$$

这样,函数矩阵在区间$[a,b]$上可积,当且仅当在该区间上所有的元素 a_{ij} 可积,此时

$$\int_a^b \boldsymbol{A}(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b a_{ij}(x)\,\mathrm{d}x ,\ i=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,m . \tag{1}$$

在$[a,b]$上所有可积函数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的集合将记为 $\boldsymbol{A}\in R[a,b]$.

81　**作为积分和的极限计算** $\boldsymbol{I} = \int_0^{10} (\ x, 2^x)\,\mathrm{d}x$.

由于 $x\in R[0,10]$及 $2^x\in R[0,10]$,则$(\ x, 2^x)\in R[0,10]$且在区间$[0,10]$的任意分割 Π 及任意取点 $\xi_i\in[x_i, x_{i+1}]$下得到

$$\boldsymbol{I} = \lim_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(\ x), \lim_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(2^x) \ , \text{其中 } S_\Pi(\ x) = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \Delta x_i,\ S_\Pi(2^x) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^{\xi_i}\Delta x_i .$$

把区间$[0,10]$分成 n 等分,取 $\xi_i = x_i = i\dfrac{10}{n}$,并注意到 $\Delta x_i = \dfrac{10}{n}$,得到

$$S_\Pi(\ x) = \frac{10}{n}^{\frac{3}{2}} \sum_{i=0}^{n-1} i,\ S_\Pi(2^x) = \frac{10}{n}\sum_{i=0}^{n-1} 2^{i\frac{10}{n}} .$$

考虑数列 $(z_n) = \dfrac{x_n}{y_n}$,其中 $x_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} i,\ y_n = n^{\frac{3}{2}}$.因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)^{\frac{3}{2}} - n^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}} - 1} = \frac{2}{3},$$

存在,则根据施托利茨(штольца)定理

$$\lim_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(\ x) = 10^{\frac{3}{2}}\lim_{n\to\infty} z_n = \frac{20}{3}\ \ 10$$

存在.由于 $S_\Pi(2^x) = \dfrac{10}{n}\cdot\dfrac{2^{10}-2^{\frac{10}{n}}}{2^{\frac{10}{n}}-1}$及$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{10}{n}\cdot\dfrac{2^{10}-2^{\frac{10}{n}}}{2^{\frac{10}{n}}-1} = \dfrac{2^{10}-1}{\ln 2}$,则

$$\lim_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(2^x) = \frac{2^{10}-1}{\ln 2} .$$

因而 $\boldsymbol{I} = \dfrac{20}{3}\ \ 10, \dfrac{2^{10}-1}{\ln 2}$.

82 计算 $\boldsymbol{I}=\int_{-1}^{1}\boldsymbol{f}(x)\mathrm{d}x$, 其中

$$\boldsymbol{f}(x)=\left(\frac{1}{x^2-2x\cos\alpha+1},\frac{1}{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}\right),$$

$$0<\alpha<\pi,\ |a|<1,\ |b|<1,\ ab>0.$$

根据本章 3.1 节的公式(2),有

$$\boldsymbol{I}=\left(\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x\cos\alpha+1},\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}\right),$$

所以在$[-1,1]$上的向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 的积分转化为计算二个实函数的定积分.显然

$$I_1=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x\cos\alpha+1}=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}(x-\cos\alpha)}{(x-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha}\arctan\frac{x-\cos\alpha}{\sin\alpha}\Bigg|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha}\left(\arctan\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}+\arctan\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha}\left(\arctan\left(\tan\frac{\alpha}{2}\right)+\arctan\left(\cot\frac{\alpha}{2}\right)\right)=\frac{\pi}{2\sin\alpha}.$$

在积分中

$$I_2=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(1-2ax+a^2)(1-2bx+b^2)}=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{(A-x)(B-x)},$$

其中 $A=\frac{a}{2}+\frac{1}{2a}$, $B=\frac{b}{2}+\frac{1}{2b}$,作变量代换 $\sqrt{(A-x)(B-x)}=t(A-x)$.则得到

$$I_2=\frac{1}{\sqrt{ab}}\int_{\left|\frac{b+1}{a+1}\right|\sqrt{\frac{a}{b}}}^{\left|\frac{b-1}{a-1}\right|\sqrt{\frac{a}{b}}}\frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Bigg|_{\left|\frac{b+1}{a+1}\right|\sqrt{\frac{a}{b}}}^{\left|\frac{b-1}{a-1}\right|\sqrt{\frac{a}{b}}}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\left(\frac{\sqrt{ab}+1}{\sqrt{ab}-1}\right)^2=\frac{1}{\sqrt{ab}}\ln\frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}.$$

最后有

$$\boldsymbol{I}=\left(\frac{\pi}{2\sin\alpha},\frac{1}{\sqrt{ab}}\ln\frac{1+\sqrt{ab}}{1-\sqrt{ab}}\right).$$

83 计算 $I=\int_{0}^{1}(\boldsymbol{f}(x),\boldsymbol{g}(x))\mathrm{d}x$, 其中

$$\boldsymbol{f}(x)=\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right),\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right),\quad \boldsymbol{g}(x)=\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{1+x^2}\right).$$

由于 $\boldsymbol{g}(x)=\boldsymbol{v}'(x)$, 其中 $\boldsymbol{v}(x)=\left(\sqrt{1+x^2},\mathrm{e}^{\arctan x}\right)$, $\boldsymbol{f}'(x)=$

$\dfrac{1}{1+x^2}, \dfrac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$,则根据 3.1 节的公式(3),得到

$$I = (\boldsymbol{f}(x), \boldsymbol{v}(x))\Big|_0^1 - \int_0^1 (\boldsymbol{f}'(x), \boldsymbol{v}(x))\,\mathrm{d}x = \quad 1+x^2 \ln \quad x + \quad 1+x^2 \quad + \frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{1+x^2}\Bigg|_0^1 -$$

$$\int_0^1 \quad 1 + \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \quad \mathrm{d}x = \quad 2\ln(1+\quad 2) + \frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}}{2} - 1 - \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x .$$

在最后一个积分中令 $\arctan x = t$ 且分部积分,得到

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^t \cos t\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^t}{2}(\cos t + \sin t)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}}}{2} - \frac{1}{2} .$$

最后得到 $I = \quad 2\ln(1+\quad 2) - \dfrac{1}{2}$.

84 计算 $\boldsymbol{I} = \displaystyle\int_{-1}^1 \boldsymbol{f}(x) \times \boldsymbol{g}(x)\mathrm{d}x$,其中 $\boldsymbol{f}(x) = (x, x^2, x^3)$, $\boldsymbol{g}(x) = (\mathrm{e}^x, \mathrm{e}^{2x}, \mathrm{e}^{3x})$.

由于 $\boldsymbol{g}(x) = \boldsymbol{v}'(x)$,其中 $\boldsymbol{v}(x) = \quad \mathrm{e}^x, \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{2}, \dfrac{\mathrm{e}^{3x}}{3}$,则根据 3.1 节的公式(4)有

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{f}(x) \times \boldsymbol{v}(x)\Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \boldsymbol{f}'(x) \times \boldsymbol{v}(x)\mathrm{d}x = \boldsymbol{f}(1), \boldsymbol{v}(1) - \boldsymbol{f}(-1) \times \boldsymbol{v}(-1) -$$

$$\boldsymbol{i}\ \frac{2}{3}\int_{-1}^1 x\mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x - \frac{3}{2}\int_{-1}^1 x^2\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x \ + \boldsymbol{j}\ 3\int_{-1}^1 x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x - \frac{1}{3}\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{3x}\mathrm{d}x \ +$$

$$\boldsymbol{k}\ \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x - 2\int_{-1}^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

计算积分并注意到

$$\boldsymbol{f}(1) \times \boldsymbol{v}(1) - \boldsymbol{f}(-1) \times \boldsymbol{v}(-1) = \boldsymbol{i}\ \frac{2}{3}\mathrm{sh}3 - \mathrm{ch}2 \ +$$

$$\boldsymbol{j}\ 2\mathrm{ch}1 - \frac{2}{3}\mathrm{ch}3 \ + \boldsymbol{k}(\mathrm{ch}2 - 2\mathrm{sh}1),$$

最后有

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{i}\ \frac{22}{27}\mathrm{sh}3 - \frac{4}{9}\mathrm{ch}3 - \mathrm{ch}2 + \frac{3}{4}\mathrm{sh}2 - \frac{3}{2}\mathrm{e}^{-2} \ +$$

$$\boldsymbol{j}\ \frac{2}{9}\mathrm{sh}3 - \frac{2}{3}\mathrm{ch}3 + 2\mathrm{ch}1 - 6\mathrm{sh}1 + 12\mathrm{e}^{-1} \ + \boldsymbol{k}\ \mathrm{ch}2 - \frac{1}{2}\mathrm{sh}2 + 4\mathrm{ch}1 - 6\mathrm{sh}1 \ ,$$

其中 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ 为坐标轴单位向量 .

85 计算 $I = \displaystyle\int_0^{\pi} z(x)\mathrm{d}x$,其中 $z(x) = \mathrm{e}^x(\cos^2 x + \mathrm{i}\sin^2 x)$.

利用 3.2 节的公式(1)得到

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\pi e^x(1+\cos 2x)\,dx + i\int_0^\pi e^x(1-\cos 2x)\,dx \quad .$$

分部积分,得到

$$I = \frac{1}{2}\quad e^x(1+\cos 2x + i(1-\cos 2x))\Big|_0^\pi + 2(1-i)\int_0^\pi e^x\sin 2x\,dx$$

$$= e^\pi - 1 + (1-i)\int_0^\pi e^x \sin 2x\,dx .$$

由于

$$\int_0^\pi e^x\sin 2x\,dx = \operatorname{Im}\int_0^\pi e^{(1+2i)x}\,dx = \operatorname{Im}\frac{e^{(1+2i)x}}{1+2i}\Big|_0^\pi = \operatorname{Im}\frac{e^\pi - 1}{1+2i} = -\frac{2}{5}(e^\pi - 1),$$

则

$$I = e^\pi - 1 + (i-1)(e^\pi - 1)\frac{2}{5} = \frac{e^\pi - 1}{5}(3-2i) .$$

86 证明: $I = \int_0^{2\pi} e^{inx}e^{-imx}\,dx = \begin{cases} 0, & \text{如果 } m \neq n, \\ 2\pi, & \text{如果 } m = n . \end{cases}$

利用欧拉公式,得到

$$e^{inx}e^{-imx} = e^{i(n-m)x} = \cos(n-m)x + i\sin(n-m)x .$$

如果 $m=n$,则 $e^{inx}e^{-imx}=1$,因而

$$I = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi .$$

如果 $m\neq n$,则

$$I = \int_0^{2\pi}\cos(n-m)x\,dx + i\int_0^{2\pi}\sin(n-m)x\,dx$$

$$= \sin(n-m)x\,\Big|_0^{2\pi} + i\cos(n-m)x\,\Big|_{2\pi}^0 = 0 .$$

87 计算 $\boldsymbol{I} = \int_0^1 \boldsymbol{A}(x)\,dx$, 其中

$$\boldsymbol{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \end{pmatrix},$$

$$a_{11}(x) = \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)},\quad a_{12}(x) = \frac{x}{x^4+3x^2+2},$$

$$a_{21}(x) = x^3\sqrt[3]{1+x^2},\qquad a_{22}(x) = \frac{\cos x}{2+\cos 2x},\ 0\leq x\leq 1 .$$

根据 3.3 节的公式(1),有

$$\int_0^1 \boldsymbol{A}(x)\,\mathrm{d}x = \begin{pmatrix} \int_0^1 a_{11}(x)\,\mathrm{d}x & \int_0^1 a_{12}(x)\,\mathrm{d}x \\ \int_0^1 a_{21}(x)\,\mathrm{d}x & \int_0^1 a_{22}(x)\,\mathrm{d}x \end{pmatrix},$$

问题的解转化为计算四个积分 .

对恒等式 $\frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2}$ **积分,得到**

$$\int_0^1 a_{11}(x)\,\mathrm{d}x = \left(\arctan x - \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}.$$

由于 $\frac{1}{x^4+3x^2+2} = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+2}$ **且** $x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2)$, **则**

$$\int_0^1 a_{12}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}(x^2)}{x^2+1} - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}(x^2)}{x^2+2}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2+1}{x^2+2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3}.$$

因为 $x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2\,\mathrm{d}(1+x^2) = \frac{1}{2}((1+x^2)-1)\mathrm{d}(1+x^2)$, **则**

$$\int_0^1 a_{21}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \left((1+x^2)^{\frac{4}{3}} - (1+x^2)^{\frac{1}{3}}\right)\mathrm{d}(1+x^2)$$

$$= \left(\frac{3}{14}(1+x^2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{8}(1+x^2)^{\frac{4}{3}}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{28}\left(\sqrt[3]{2} + \frac{3}{2}\right).$$

注意到恒等式 $2+\cos 2x = 3 - 2\sin^2 x$, **得到**

$$\int_0^1 a_{22}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}(\sqrt{2}\sin x)}{\sqrt{3-(\sqrt{2}\sin x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin 1\right).$$

最后得到

$$\boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\ln\frac{4}{3} \\ \frac{3}{28}\left(\sqrt[3]{2} + \frac{3}{2}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin 1\right) \end{pmatrix}.$$

练　习　题

计算下列积分 .

63 $\int_2^3 \boldsymbol{f}(x)\,\mathrm{d}x$, $\boldsymbol{f}(x) = \left(\frac{x}{x^8-1}, \frac{1}{x(x^{10}+2)}\right)$.

64 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \boldsymbol{A}(x)\mathrm{d}x$, $\boldsymbol{A}(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{1-\mathrm{e}^x} & \cos^5 x \sin x \\ \dfrac{x^2}{2-x} & \dfrac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x} \end{pmatrix}$.

65 $\int_1^2 \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{f}(x)\mathrm{d}x$, $\boldsymbol{A}(x) = \begin{pmatrix} x & x \\ x & x^2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}(x) = (\ln^2 x, \arctan x)$.

66 $\int_0^1 (\boldsymbol{f}(x), \boldsymbol{g}(x))\mathrm{d}x$, $\boldsymbol{f}(x) = (x^3, \ln(x + \sqrt{1+x^2}))$, $\boldsymbol{g}(x) = (\mathrm{e}^{-x^2}, 1)$.

4 广 义 积 分

4.1 第一类及第二类广义积分

定义 1 设 $J = [a, b)$ 为实数轴 $\mathbb{R}$ 上的半区间,并且 b 可以是符号 $+\infty$,而函数 $f: J \to \mathbb{R}$ 在任何区间 $[a, b'] \subset J$ 上可积. 如果极限 $\lim\limits_{b' \to b-0} \int_a^{b'} f(x)\mathrm{d}x$ 存在,若 $b \in \mathbb{R}$,则该极限记为 $\int_a^{b-0} f(x)\mathrm{d}(x)$. 如果 $b = +\infty$,记为 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$. 在这种情况下,称函数 f 在 J 上在非正常的意义下可积,而 $\lim\limits_{b' \to b-0} \int_a^{b'} f(x)\mathrm{d}x$ 称为函数 f 在 J 上的广义(或非正常)积分(如果 $b = +\infty$,为第一类,如果 $b \in \mathbb{R}$,为第二类).

定义 2 如果 $J = (a, b]$,$f: J \to \mathbb{R}$ 且如果 $\lim\limits_{a' \to a+0} \int_{a'}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 存在且有限,则当 $a \in \mathbb{R}$ 时将其记成 $\int_{a+0}^{b} f(x)\mathrm{d}x$,当 $a = -\infty$ 时记成 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x$.

定义 3 如果 $\lim\limits_{b' \to b-0} \int_a^{b'} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{b-0} f(x)\mathrm{d}x$ 存在,则称广义积分 $\int_a^{b-0} f(x)\mathrm{d}x$ 或 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛(存在). 如果该极限不存在(或无穷),则称积分 $\int_a^{b-0} f(x)\mathrm{d}x$ 或 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散(对应地发散到 ∞).

定理(柯西准则) 积分 $\int_a^{b-0} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛当且仅当在 $x_1 \to b-0$, $x_2 \to b-0$ 时,$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\mathrm{d}x \to 0$.

4 .2 绝对收敛性

定义 1 如果积分$\int_a^{b-0} | f(x) | \mathrm{d}x$ 收敛,则称积分$\int_a^{b-0} f(x)\mathrm{d}x$ 绝对收敛 .

如果 $f: [a, b) \to \mathrm{R}$ 为非负函数,则积分$\int_a^{b-0} f(x)\mathrm{d}x$ 的收敛性意味着它的绝对收敛性 .

设 $f(x) \geq 0$, " $x \in [a, b)$, $f(x)$ á 0 .则函数 $F: x \to \int_a^{x} f(t)\mathrm{d}t\,(a \leq x < b)$ 随 x 增加而增加,而积分$\int_a^{b-0} f(x)\mathrm{d}x$ 存在,当且仅当集合 $\int_a^{x} f(t)\mathrm{d}t$ 在半开区间$[a, b)$ 上有上界 .

如果 $f(x) \geq 0$, " $x \in [a, b)$ 且积分$\int_a^{b-0} f(x)\mathrm{d}x$ 不收敛,则积分$\int_a^{b-0} f(x)\mathrm{d}x = +\infty$.

如果积分$\int_a^{b-0} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛, 则写成

$$\int_a^{b-0} f(x)\mathrm{d}x < \infty .$$

定义 2 任何收敛,但是绝对发散的广义积分,称为条件收敛 .

我们指出,如果 $f \in R[a, b]$,则

$$\int_a^{b-0} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^{b} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a+0}^{b} f(x)\mathrm{d}x .$$

4 .3 广义积分的代数性质

1) 设 $f: [a, b) \to \mathrm{R}$ 且函数 f 在区间$[a, b']$ $[a, b)$ 上黎曼可积 .则函数 αf(α为常数)在$[a, b']$ 上可积, " $\alpha \in \mathrm{R}$.

因而,如果 v $\int_a^{b-0} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{x \to b-0}\int_a^{x} f(t)\mathrm{d}t$, 则

$$\text{v} \int_a^{b-0} \alpha f(x)\mathrm{d}x = \alpha\int_a^{b-0} f(x)\mathrm{d}x .$$

2) 设函数 $f: [a, b) \to \mathrm{R}$, $g: [a, b) \to \mathrm{R}$ 在任意$[a, b']$ $[a, b)$ 上黎曼可积 .则和函数 $f + g$ 也具有该性质,因而,如果存在积分$\int_a^{b-0} f(x)\mathrm{d}x$ 及$\int_a^{b-0} g(x)\mathrm{d}x$, 则

$$\lim_{x \to b-0}\int_a^{x} (f(t) + g(t))\mathrm{d}t = \lim_{x \to b-0}\int_a^{x} f(t)\mathrm{d}t + \lim_{x \to b-0}\int_a^{x} g(t)\mathrm{d}t,$$

由此

$$\int_a^{b-0}(f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x=\int_a^{b-0}f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^{b-0}g(x)\,\mathrm{d}x.$$

这样,在任何包含于 $[a,b)$ 内的区间 $[a,b']$ 上黎曼可积,且具有收敛的积分 $\int_a^{b-0}f(x)\,\mathrm{d}x$ 的函数 $f:[a,b)\to\mathrm{R}$ 的集合 E,在域 R 上构成一个空间,而由集合 E 到 R 的映射 $f\mapsto\int_a^{b-0}f(x)\,\mathrm{d}x$ 是线性型的.

4.4 广义积分中的变量代换与分部积分公式

1) 设 $f:[a,b)\to\mathrm{R}$, $f\in C[a,b)$ 且 $\int_a^{b-0}f(x)\,\mathrm{d}x<\infty$.设 $[\alpha,\beta)$ 为另外一个半开区间,而且 $\alpha,a\in\mathrm{R}$,但 β 和 b 可以是有限,也可以是无限.设函数 $g:[\alpha,\beta)\to\mathrm{R}$ 在半开区间 $[\alpha,\beta)$ 上单调增,且在除去可数点外,处处有连续导数 g',除此之外,

$$g([\alpha,\beta))\quad[a,b),\ g(\alpha)=a,\ g(\beta-0)=b-0.$$

则在广义积分中成立变量代换公式

$$\int_a^{b-0}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^{\beta-0}f(g(u))\,g'(u)\,\mathrm{d}u.\tag{1}$$

2) 设 $f:[a,b)\to\mathrm{R}$, $g:[a,b)\to\mathrm{R}$, $f,g\in C^{(1)}[a,b)$,且 a 为有限数.则在区间 $[a,x]$ $[a,b]$ 上利用分部积分公式,得到

$$\int_a^x f(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t=f(x)\,g(x)-f(a)\,g(a)-\int_a^x f'(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t.\tag{2}$$

如果当 $x\to b-0$ 时,等式(2)中的三个极限中任意两个存在,则第三个极限也存在,因为积 $f(a)\,g(a)$ 确定.

例如,如果积分 $\int_a^{b-0}f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x$ 及 $\int_a^{b-0}f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$ 存在,则积 $f(b-0)\,g(b-0)$ 也存在.

而如果积分 $\int_a^{b-0}f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x$ 及积 $f(b-0)\,g(b-0)$ 存在,则积分 $\int_a^{b-0}f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x$ 存在.

在所考虑的每一情况下,有

$$\int_a^{b-0}f(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x=f(b-0)\,g(b-0)-f(a)\,g(a)-\int_a^{b-0}f'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x.\tag{3}$$

公式(3)称为广义积分的分部积分公式 .

4.5 内部奇点的情况

设函数 $f:[a,b]\backslash\{c\}\to\mathrm{R}$,其中 $c\in(a,b)$,在任意的$[a,a']$ $[a,c)$及$[c',b]$ $(c,b]$可积 .则定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \overset{\mathrm{def}}{=} \int_a^{c-0} f(x)\mathrm{d}x + \int_{c+0}^b f(x)\mathrm{d}x, \tag{1}$$

如果(1)的右边的每一个积分存在,且称广义积分收敛 .如果有一个积分不存在,则称广义积分发散 .

4.6 比较检验和阿贝尔、狄利克雷判别法

1) 如果 f 和 g 为非负函数,定义于本区间$[a,+\infty)$且在任意的区间$[a,x]$ $[a,+\infty)$上可积,而且 $f(x)\leq g(x)$,则

$$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^x g(t)\mathrm{d}t,\ a\leq x<+\infty,$$

且由积分$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$的收敛性可推知积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$的收敛性,由积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$的发散性可知积分$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$的发散性 .

2) 设 $f:[a,+\infty)\to\mathrm{R}$ 在任意区间$[a,b']$上可积,当 $x\to+\infty$时,与函数 $x\mapsto\dfrac{1}{x^{\alpha}}(\alpha>0)$为同阶无穷小 .则当 $\alpha>1$ 时$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛 .当 $\alpha\leq1$ 时发散 .

3) 设 $f:[a,b)\to\mathrm{R}$ 在任意区间$[a,b']$ $[a,b)$上黎曼可积,当 $x\to b-0$ 时,与函数 $x\mapsto\dfrac{1}{(b-x)^{\lambda}}(\lambda>0)$同阶增长 .则当 $\lambda<1$ 时积分$\int_a^{b-0} f(x)\mathrm{d}x$收敛,当 $\lambda\geq1$ 时发散 .

定理(阿贝尔检验法) 设 $f:[a,+\infty)\to\mathrm{R}$, $g:[a,+\infty)\to\mathrm{R}$,$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛 .而函数 g 单调且有界 .则积分$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$收敛 .

定理(狄利克雷检验) 设 $f:[a,+\infty)\to\mathrm{R}$, $g:[a,+\infty)\to\mathrm{R}$,且函数 f 具有有界原函数 $x\mapsto\int_a^x f(t)\mathrm{d}t(a\leq x<+\infty)$,而函数 g 在 $x\to+\infty$ 时单调趋于零 .则积分

$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛 .

4.7 收敛的广义积分的主值

设 $f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 且积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散 .如果函数 f 在数轴上的任何一个区间上黎曼可积,如果 $\lim\limits_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)\mathrm{d}x$ 存在,则把它称为发散积分的柯西意义下的主值, 且记为

$$\mathrm{v.p.}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_{-A}^{A} f(x)\mathrm{d}x .$$

设 $f: [a,b]\setminus\{c\}\to\mathbf{R}$, $c\in(a,b)$, 且积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散 .如果对任意小的 $\varepsilon>0$, 积分 $\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x$ 及 $\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x$ 存在, 且满足

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\mathrm{d}x\right) = \mathrm{v.p.}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

则称之为发散积分在柯西意义下的主值 .

计算下列广义积分:

88 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}-0} \cos 2nx\ln\cos x\mathrm{d}x$.

根据本章 4.1 节的定义 1,有

$$I_n = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\int_0^x \cos 2nt\ln\cos t\mathrm{d}t .$$

对积分

$$I_n^{(1)}(x) = \int_0^x \cos 2nt\ln\cos t\mathrm{d}t,$$

利用分部积分公式 .设 $\cos 2nt\mathrm{d}t = \mathrm{d}v, \ln\cos t = u$, 则得到

$$I_n^{(1)}(x) = \frac{1}{2n}\sin 2nt\ln\cos t\Big|_0^x + \frac{1}{2n}\int_0^x \sin 2nt\tan t\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2n}\cdot\frac{\ln\cos x}{(\sin 2nx)^{-1}} + \frac{1}{4n}\int_0^x \frac{\cos(2n-1)t-\cos(2n+1)t}{\cos t}\mathrm{d}t .$$

与例 60 中证明相类似,有

$$\frac{\cos(2n-1)t}{\cos t}=2\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\cos 2(n-k)t+(-1)^{n-1},$$

$$\frac{\cos(2n+1)t}{\cos t}=2\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\cos 2(n-(k-1))t+(-1)^{n}.$$

因而

$$I_n^{(1)}(x)=\frac{\ln\cos x}{2n(\sin 2nx)^{-1}}+\frac{1}{4n}\int_0^x 4\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\cos 2(n-k)t-2\cos 2nt+2(-1)^{n-1}\quad \mathrm{d}t$$

$$=\frac{\ln\cos x}{2n(\sin 2nx)^{-1}}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\ \frac{\sin 2(n-k)x}{2(n-k)}-\frac{1}{4n^2}\sin 2nx+(-1)^{n-1}\ \frac{x}{2n}.$$

取 $x\to\frac{\pi}{2}-0$ 的极限,得到

$$I_n=(-1)^{n-1}\ \frac{\pi}{4n}+\frac{1}{2n}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\ln\cos x}{(\sin 2nx)^{-1}}$$

$$=(-1)^{n-1}\ \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2n}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{\cot x}{-2n(\sin 2nx)^{-2}\cos 2nx}=(-1)^{n-1}\ \frac{\pi}{4n}.$$

89 $\quad I_n=\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)\cdots(x+n)}$.

由于$\frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)}<\frac{1}{x^2}$,$1\leq x<+\infty$,则根据 4. 6 节的检验法 2),积分 I_n 收敛,因为

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t^2}=\lim_{x\to+\infty}\ 1-\frac{1}{x}\ =1.$$

根据广义积分的定义,有

$$I_n=\lim_{x\to+\infty}\int_1^x\frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)\cdots(t+n)}=\lim_{x\to+\infty}I_n^{(1)}(x).$$

把真分式$\frac{1}{t(t+1)\cdots(t+n)}$展开成简单分式的和,有

$$\frac{1}{t(t+1)\cdots(t+n)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{A_k}{t+k},\text{其中 } A_k=\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}=(-1)^k\frac{\mathrm{C}_n^k}{n!}.$$

因而

$$I_n^{(1)}(x)=\frac{1}{n!}\ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{C}_n^k\ln(x+k)+\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\mathrm{C}_n^k\ln(1+k)$$

$$=\frac{1}{n!}\ \ln\prod_{k=0}^{n}(x+k)^{(-1)^k\mathrm{C}_n^k}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\mathrm{C}_n^k\ln(1+k)\quad.$$

由于处于偶数位置上的二项系数的和等于处于奇数位置上的二项系数的和,则

$$\lim_{x\to+\infty}\prod_{k=0}^{n}(x+k)^{(-1)^k C_n^k}=1,$$

由此

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\prod_{k=0}^{n}(x+k)^{(-1)^k C_n^k}=0.$$

这样

$$I_n=\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}C_n^k\ln(1+k).$$

90 计算 $I_m=\int_0^{+\infty}e^{-ax}\frac{\cos(2m-1)x}{\cos x}dx,\ a>0$.

函数 $f: x\mapsto e^{-ax}\frac{\cos(2m-1)x}{\cos x},\ x\in R^+\setminus\{x_k\},\ x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z_0$,具有奇异点 x_k.
由于 $\lim_{x\to x_k}f(x)=(-1)^{m+1}(2m-1)e^{-a\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}$ 存在,则函数 $t\mapsto F(t),0\leq t<+\infty$,其中

$$F(t)=\begin{cases}f(t), & \text{如果 } t\neq x_k,\\ (-1)^{m+1}(2m-1)e^{-a\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)}, & \text{如果 } t=x_k.\end{cases}$$

在任意区间$[0,x](x>0)$上可积.

由于集合$\{x_k\}$具有勒贝格零测度,则

$$\int_0^x f(t)dt=\int_0^x F(t)dt,$$

因此 $I_m=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x F(t)dt$.在例 60 的解的基础上,有

$$F(t)=e^{-at}\left((-1)^{m-1}+2\sum_{n=1}^{m-1}(-1)^{n-1}\cos2(m-n)t\right).$$

因而

$$\int_0^x F(t)dt=(-1)^{m-1}\frac{1-e^{-ax}}{a}+2\sum_{n=1}^{m-1}(-1)^{n-1}\int_0^x e^{-at}\cos2(m-n)t\,dt.$$

由于 $e^{-at}\cos2(m-n)t=\operatorname{Re}e^{(-a+i2(m-n))t}$,则

$$\int_0^x e^{-at}\cos2(m-n)t\,dt=\operatorname{Re}\left.\frac{e^{(-a+i2(m-n))t}}{-a+i2(m-n)}\right|_0^x$$

$$=\operatorname{Re}\frac{e^{-at}}{a^2+4(m-n)^2}(\cos2(m-n)t$$

$$\left.+i\sin2(m-n)t)(-a-i2(m-n))\right|_0^x$$

$$= \frac{e^{-at}}{a^2 + 4(m-n)^2}\left(2(m-n)\sin 2(m-n)t - a\cos 2(m-n)t\right)\Big|_0^x$$

$$= \frac{1}{a^2 + 4(m-n)^2}\left(e^{-ax}(2(m-n)\sin 2(m-n)x - a\cos 2(m-n)x) + a\right).$$

这样

$$I_m = \lim_{x\to+\infty}\left((-1)^{m-1}\frac{1-e^{-ax}}{a} + 2\sum_{n=1}^{m-1}\frac{(-1)^{n-1}}{a^2+4(m-n)^2}\times\right.$$

$$\left.(e^{-ax}(2(m-n)\sin 2(m-n)x - a\cos(m-n)x) + a)\right)$$

$$= \frac{(-1)^{m-1}}{a} + 2a\sum_{n=1}^{m-1}\frac{(-1)^{n-1}}{a^2+4(m-n)^2} = \frac{(-1)^{m-1}}{a} + 2a\sum_{j=1}^{m-1}\frac{(-1)^{m-j-1}}{a^2+4j^2}.$$

91 **证明等式**: $\int_0^{+\infty} f\left(ax + \frac{b}{x}\right)dx = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(\sqrt{x^2+4ab})\,dx$, **其中** $a>0$ **且** $b>0$, **假设左边的积分收敛**.

记 $I = \int_0^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx$, 作变换 $ax+\frac{b}{x} = t$, 预先把 I 表成 $I = I_1 + I_2$, 其中

$$I_1 = \int_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx,\quad I_2 = \int_{\sqrt{\frac{b}{a}}}^{+\infty} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)dx.$$

变量代换之后得到

$$I_1 = \frac{1}{2a}\int_{+\infty}^{2\sqrt{ab}} f(t)\left(1 - \frac{t}{\sqrt{t^2-4ab}}\right)dt,\quad I_2 = \frac{1}{2a}\int_{2\sqrt{ab}}^{+\infty} f(t)\left(1 + \frac{t}{\sqrt{t^2-4ab}}\right)dt,$$

$$I = \frac{1}{a}\int_{2\sqrt{ab}}^{+\infty}\frac{tf(t)}{\sqrt{t^2-4ab}}dt = \frac{1}{a}\int_{2\sqrt{ab}}^{+\infty} f(t)\,d(\sqrt{t^2-4ab}).$$

在积分中令 $\sqrt{t^2-4ab} = z$, 有

$$I = \frac{1}{a}\int_0^{+\infty} f(\sqrt{z^2+4ab})\,dz.$$

92 **如果积分** $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ **收敛**, **则当** $x\to+\infty$, **一定有** $f(x)\to 0$ **吗**?

不一定.例如,考虑菲涅耳积分 $I=\int_0^{+\infty}\sin x^2\,\mathrm{d}x$.作变量代换 $x^2=t$,得到

$$I=\frac{1}{2}\int_{+0}^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=I_1+I_2,\ \text{其中}\ I_1=\frac{1}{2}\int_{+0}^{1}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t,\quad I_2=\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t.$$

由于 $\lim\limits_{t\to+0}\frac{\sin t}{t}=0$,则 I_1 存在.根据狄利克雷检验法积分 I_2 收敛,由于当 $t\to\infty$时,$\frac{1}{t}\downarrow 0$,而函数 $x\mapsto\int_1^x\sin t\,\mathrm{d}t=\cos 1-\cos x,1\leq x<+\infty$,以数 2 为界,$\forall x\in(1,+\infty)$.因而 I 收敛,而函数 $x\mapsto\sin x^2,0\leq x<+\infty$,当 $x\to+\infty$时没有极限.

另考虑 $I=\int_0^{+\infty}x\sin x^4\,\mathrm{d}x$,作变换 $x^2=t$.此时得到收敛的积分 $I=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\sin t^2\,\mathrm{d}t$.而且函数 $x\mapsto x\sin x^4,0\leq x<+\infty$,当 $x\to+\infty$时无界.因而,即使在函数 f 当 $x\to+\infty$时无界的情况下非正常积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 可能收敛.

93 证明:如果积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛且 f 为单调函数,则当 $x\to+\infty$ 时,$f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right)$.

由积分的收敛性可推知,当 $x\to+\infty$时,$|f(x)|\to 0$(否则,积分发散,因为由函数 f 的单调性,对充分大的 x,函数的符号不变,因而函数 $x\mapsto\left|\int_a^x f(t)\mathrm{d}x\right|,a\leq x<+\infty$,在 $x\to+\infty$ 时将无界)这样 $|f|$ 为单调下降函数.由于积分收敛,则成立柯西准则

$$\forall\varepsilon>0\ \exists A>a:\forall x_1>A\wedge\forall x_2>A\quad\left|\int_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

任意固定 $x_0>A$,当 $x>x_0$ 时,考虑积分

$$\int_{x_0}^{x}f(t)\mathrm{d}t.$$

因为$|f|$为单调下降函数,则当 $x>x_0$ 时,$|f(x)|\leq|f(x_0)|$,因而

$$|f(x)|(x-x_0)<\left|\int_{x_0}^{x}f(t)\mathrm{d}t\right|<\varepsilon.$$

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}x_0|f(x)|=0$,则由最后的不等式有 $\lim\limits_{x\to+\infty}xf(x)=0$,即当 $x\to+\infty$时,$f(x)=o\left(\frac{1}{x}\right)$.

94 **借助于广义积分,求黎曼 ζ-函数的表示式 .**

在第 3 章例 21 中证明了

$$\int \frac{[x]}{x^{\lambda+1}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}\left(-\frac{[x]}{x^{\lambda}} + 1 + \frac{1}{2^{\lambda}} + \cdots + \frac{1}{[x]^{\lambda}}\right) + C,\ \lambda \neq 0 .$$

如果 $\lambda > 0$,则

$$\zeta(\lambda) = \int_1^{+\infty} \frac{\lambda[x]}{x^{\lambda+1}}\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2^{\lambda}} + \cdots + \frac{1}{n^{\lambda}}\right),\quad n = [x] .$$

研究广义积分的敛散性 .

95 $I = \int_0^2 \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$.

当 $1 < x < 2$ 时,由不等式 $\ln x < x - 1$,应有不等式 $(\ln x)^{-1} > (x-1)^{-1}$,因而

$$\int_x^2 \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} > \int_x^2 \frac{\mathrm{d}t}{t-1} = \ln\frac{1}{x-1} .$$

因为 $\lim\limits_{x\to 1+0}\ln\frac{1}{x-1} = +\infty$,则积分 $\int_{1+0}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ 发散,因而,根据 4. 5 节的结果,积分 I 发散 .

96 $I = \int_{+0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{x}\mathrm{d}x$.

在点 $x = 0$ 的右邻域比较被积函数与函数 $f: x \mapsto \frac{1}{x^{\lambda}}, 0 < x < \frac{\pi}{2}, \frac{1}{2} < \lambda < 1$.考虑极限

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln(\sin x)}{x}\Big/\frac{1}{x^{\lambda}} = \lim_{x\to+0}\frac{\ln(\sin x)}{x^{\frac{1}{2}-\lambda}} = \lim_{x\to+0}\frac{\cot x}{\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)x^{-\lambda-\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim_{x\to+0}\frac{x^{\lambda+\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\tan x} = \lim_{x\to+0}\frac{x^{\lambda+\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)x} = 0$$

(因为 $\lambda + \frac{1}{2} > 1$) .

当 $x \to +0$ 时,被积函数具有比函数 f 更低阶的增长 .因为积分

$$\int_{+0}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{d}x = \int_{+0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\lambda}}$$

收敛,则根据 4. 6 节的比较检验法,积分 I 收敛 .

97 $I = \int_{1+0}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p \ln^q x}$.

在积分中作变量代换,设 $\ln x = t$,**则得到**

$$I = \int_{+0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{(1-p)t}}{t^q}\mathrm{d}t .$$

把 I **表示成** $I = I_1 + I_2$,**其中**

$$I_1 = \int_{+0}^{1} \frac{\mathrm{e}^{(1-p)t}}{t^q}\mathrm{d}t, \quad I_2 = \int_{1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{(1-p)t}}{t^q}\mathrm{d}t .$$

当 $t \to +0$ **时,函数** $t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{(1-p)t}}{t^q}$, $0 < t \leq 1$, $q > 0$, $p \in \mathbf{R}$,**具有与函数** $t \mapsto \frac{1}{t^q}(0 < t \leq 1)$ **相同的增长阶,而当** $q \leq 0$ **时,积分** I_1 **不是广义积分.因而,根据 4.6 节的比较检验法,如果** $q < 1$,**积分** I_1 **收敛;如果** $q \geq 1$,**积分** I_1 **发散.当** $t \to +\infty$**时,函数** $t \mapsto \frac{\mathrm{e}^{(1-p)t}}{t^q}$, $1 \leq t < +\infty$, $p > 1$,**比任何形如** $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$, $1 \leq t < +\infty$, $\alpha > 1$ **的函数下降更快.这是由于此时对任意的** $q \in \mathbf{R}$,**有**

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\mathrm{e}^{(1-p)t}}{t^q} \Big/ \frac{1}{t^\alpha} = 0,$$

因而,当 $p > 1$ **时积分** I_2 **收敛.如果** $p \leq 1$,**则积分** I_2 **发散.**

这样,积分 I **只在** $q < 1$ **且** $p > 1$ **时收敛.**

98 $I = \int_{+0}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x$.

把 I **表示成** $I = I_1 + I_2$,**其中**

$$I_1 = \int_{+0}^{1} \frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x, \quad I_2 = \int_{1}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\mathrm{d}x .$$

我们看到,积分 I_1 **存在,因为v** $\lim_{x \to +0} \frac{\sin^2 x}{x} = 0$.

把 I_2 **写成**

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_{1}^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \lim_{x \to +\infty} \int_{1}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_{1}^{x} \frac{\cos 2t}{t}\mathrm{d}t .$$

注意到 $\lim_{x \to +\infty}\int_{1}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$,**而根据狄利克雷检验法,积分** $\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\mathrm{d}x$ **收敛.从而得到结论,积分** I_2 **发散.**

因而,积分 I **发散.**

99 $I=\int_{+0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p+x^q}$.

当 $p=q$时,积分 I发散,从而只考虑当 $p\neq q$的情况,设 $p<q$.把 I表成 $I=I_1+I_2$,其中

$$I_1=\int_{+0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x^p+x^q},\quad I_2=\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p+x^q}.$$

分别研究积分 I_1 和 I_2.

由于$\frac{1}{x^p+x^q}=\frac{1}{x^p(1+x^{q-p})}$及当 $x\to+0$时,$x^{q-p}\to0$,则 I_1 的被积函数在 $p>0$时具有与函数 $x\to\frac{1}{x^p}(0<x\leq1,p>0)$相同的增长阶.如果 $p\leq0$,则积分 I_1 存在.

因而,根据 4.6 节的比较检验法,在所考虑的情况下,如果 $p<1$,I_1 收敛,如果 $p\geq1$,I_1 发散.

研究 I_2,把被积函数表示成

$$f(x)=\frac{1}{x^p+x^q}=\frac{1}{x^q(1+x^{p-q})},1\leq x<+\infty.$$

当 $x\to+\infty$时,$f(x)=O\left(\frac{1}{x^q}\right)$.因而,当 $q>1$时,I_2 收敛,当 $q\leq1$时,I_2 发散.

这样,如果 $p<q$,则当 $p<1$及 $q>1$时,I收敛.如果 $p>q$,则显然所研究积分在 $p>1$及 $q<1$时收敛.

所考虑的两种情况可综合成一个:如果 $\min\{p,q\}<1$,则 I发散;如果 $\max(p,q)>1$,则 I收敛.

100 $I=\int_{+0}^{+\infty}\frac{P_m(x)}{P_n(x)}\mathrm{d}x$,其中 $P_m(x)$及 $P_n(x)$次数分别为 m及 n的互素多项式.

如果多项式 $P_n(x)$在区间$(0,+\infty)$上有实根 $x=x_i$,则根据 4.6 节的检验法 3),积分发散,因为当 $x\to x_i$时,被积函数与函数

$$x\mapsto\frac{1}{(x-x_i)^{\lambda}},\quad x\in S(x_i,\delta),\lambda\geq1$$

将具有相同的增长阶(其中 $S(x_i,\delta)$是点 x_i 的 δ-邻域).

而如果多项式 $P_n(x)$在区间$(0,+\infty)$上没有实根,则当 $x\to+\infty$时$\frac{P_m(x)}{P_n(x)}=O\left(\frac{1}{x^{n-m}}\right)$,根据 4.6 节的比较检验法 2),如果 $n-m>1$,则积分 I收敛;如果 $n-m\leq1$,则积分 I发散.

研究下列积分的绝对收敛性和条件收敛性.

101 $I = \int_{+0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d} x$.

把 I 表示成 $I = I_1 + I_2$, 其中

$$I_1 = \int_{+0}^{1} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d} x, \quad I_2 = \int_{1}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d} x .$$

当 $0 < x_1 < x_2 < 1$ 时, 考虑积分

$$珔 = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sin x}{x} \mathrm{d} x .$$

因为当 $x_1 \leq x \leq x_2$ 时, $0 < \frac{\sin x}{x} < 1$, 则 $0 <$ 珔 $< x_2 - x_1$, 因而当 $x_1 \to 0$, $x_2 \to 0$ 时, 珔 $\to 0$, 由此根据柯西准则得积分 I_1 收敛 .

由于 $|F(x)| = \left|\int_0^x \sin t \mathrm{d} t\right| \leq 2$, " $x \in (1, +\infty)$, 而函数 $x \mapsto \frac{1}{x} (1 \leq x < +\infty)$ 下降趋于零, 则由狄利克雷检验法, 积分 I_2 收敛 .

由不等式 $|\sin x| \geq \sin^2 x$, " $x \in \mathbf{R}$, 由例 98 的解及本章 4.6 节的比较检验法, 得出结论, 积分

$$\int_{1}^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} \mathrm{d} x$$

发散, 因而, I 为绝对发散的积分 .

102 $I = \int_{+0}^{+\infty} \frac{\sin\left(x + \frac{1}{x}\right)}{x^{\alpha}} \mathrm{d} x$.

设 $I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$ [①], 其中

$$I_1 = \int_{+0}^{1} \frac{\sin x \cos \frac{1}{x}}{x^{\alpha}} \mathrm{d} x, \quad I_2 = \int_{1}^{+\infty} \frac{\sin x \cos \frac{1}{x}}{x^{\alpha}} \mathrm{d} x,$$

$$I_3 = \int_{+0}^{1} \frac{\cos x \sin \frac{1}{x}}{x^{\alpha}} \mathrm{d} x, \quad I_4 = \int_{1}^{+\infty} \frac{\cos x \sin \frac{1}{x}}{x^{\alpha}} \mathrm{d} x,$$

然后在积分 I_1 和 I_3 中作变量代换 $\frac{1}{x} = t$ 则得到

$$I_1 = \int_{1}^{+\infty} \frac{\cos t \sin \frac{1}{t}}{t^{2-\alpha}} \mathrm{d} t, \quad I_3 = \int_{1}^{+\infty} \frac{\sin t \cos \frac{1}{t}}{t^{2-\alpha}} \mathrm{d} t,$$

① 这样的分解对于使得积分 I 存在的参数 α 是可能的 .

由此应有积分 I_1 , I_4 与 I_2 , I_3 是同类型的 .因此,只需研究积分 I_2 与 I_4 ,结果自动地对积分 I_1 , I_3 适用 .

由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\dfrac{1}{x}=1$,则 $\exists\ x_0>1$ 使得

$$\forall\ x>x_0\quad \frac{1}{2}<\cos\frac{1}{x}<1,\ \frac{1}{2x^{\alpha}}<\frac{\cos\frac{1}{x}}{x^{\alpha}}<\frac{1}{x^{\alpha}},$$

当 $x\to+\infty$及 $\alpha>0$ 时,因而$\dfrac{\cos\frac{1}{x}}{x^{\alpha}}\downarrow 0$.

函数 $x\mapsto\sin x\,(1\leq x<+\infty)$具有有界的原函数 .这样,当 $\alpha>0$ 时,根据狄利克雷检验法,积分 I_2 收敛 .

我们证明,当 $\alpha\leq0$ 时,积分 I_2 发散 .假设任意给定 $0<\varepsilon<1$,令 $\beta=-\alpha$,取 $n\in\mathbf{N}$,使当 $x\geq2n\pi$ 时满足不等式 $\cos\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{2}$.

对积分 $\displaystyle\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}x^{\beta}\sin x\cos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 应用第一中值定理, 得到不等式

$$\left|\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}x^{\beta}\sin x\cos\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right|=2\xi_n^{\beta}\cos\frac{1}{\xi_n}>\xi_n^{\beta}\geq1,\ 2n\pi\leq\xi_n\leq(2n+1)\pi .$$

由此,根据柯西准则有,当 $\alpha\leq0$ 时积分 I_2 发散,因为 $\forall\ x_0>1$, $\exists\ n\in\mathbf{N}$, 使得 $2n\pi>x_0$.因而只当 $\alpha>0$ 时 I_2 收敛 .从上面的讨论可知,只有当 $2-\alpha>0$ 时,即 $\alpha<2$ 时, I_3 收敛 .

这样,如果 $0<\alpha<2$,则积分 I_2 与 I_3 同时收敛 .

借助于狄利克雷检验法来研究积分 I_4 .因为对所有 $x>1$, $\alpha+1>0$, 有 $0<\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{x^{\alpha}}<\dfrac{1}{x^{\alpha+1}}$,而函数 $x\mapsto\displaystyle\int_1^x\cos t\,\mathrm{d}t\,(1\leq x<+\infty)$有界 .则当 $\alpha+1>0$,即 $\alpha>-1$ 时, I_4 收敛 .因而,当 $\alpha<3$ 时, I_1 收敛 .当 $-1<\alpha<3$ 时,两积分同时收敛 .因$(-1,3)\cap(0,2)=(0,2)$,则积分 I 在 $0<\alpha<2$ 时收敛 .

研究积分 I_2 的绝对收敛性 .由不等式

$$\frac{1-\cos2x}{4x^{\alpha}}=\frac{\sin^2x}{2x^{\alpha}}<\frac{\left|\sin x\cos\frac{1}{x}\right|}{x^{\alpha}}\leq\frac{1}{x^{\alpha}},$$

(对所有充分大的 $x>1$ 成立)有在 $\alpha>1$ 时 I_2 绝对收敛,而在 $\alpha\leq1$ 时,绝对发散 .

因而,如果 $2-\alpha>1$,即当 $\alpha<1$ 时, I_3 绝对收敛 .由于集合$\{\alpha\in\mathbf{R},\alpha>1\}$与$\{\alpha\in\mathbf{R},\alpha<0\}$不相交,则积分 I_2 与 I_3 对任何的公共的 $\alpha\in\mathbf{R}$,不可能同时绝对收敛 .因此,积分 I 绝

对发散.

103 $I = \int_0^{+\infty} x^2 \cos(e^x)\,dx$.

在积分中设 $e^x = t$,得到

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{t} \cos t\,dt.$$

应用洛必达第二法则,得到

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\ln^2 t}{t} = 2 \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t} = 2 \lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} = 0.$$

从而当 $t \to +\infty$, $\frac{\ln^2 t}{t} \downarrow 0$.

由于函数 $x \mapsto \int_1^x \cos t\,dt = \sin x - \sin 1\ (1 \leqslant x < +\infty)$ 有界,则根据狄利克雷检验法,积分 I 收敛.

由不等式$\frac{\ln^2 t}{t}|\cos t| \geqslant \frac{\ln^2 t}{t}\cos^2 t$(对所有的 $t > 1$ 成立),有积分

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{t} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{t}\,dt + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{t}\cos 2t\,dt$$

发散,因$\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{t}\,dt = \lim_{x \to +\infty}\int_1^x \ln^2 t\,d(\ln t) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{3}\ln^3 x = +\infty$,而根据狄利克雷判别法积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln^2 t}{t}\cos 2t\,dt$$

收敛.

求下列极限.

104 $\lim_{x \to +0} \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\,dt$.

对积分 $I(x) = \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2}\,dt$ 应用第一中值定理,得到

$$I(x) = \cos\xi\left(\frac{1}{x} - 1\right),\quad x < \xi < 1.$$

设 $x \in \left(0, \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)$,其中 $\varepsilon > 0$ 为任意事先给定的常数.则 $\cos\xi\left(\frac{1}{x} - 1\right) > \frac{\cos\xi}{\varepsilon}$,从而,当 $x \to +0$ 时, $I(x) \to +\infty$.

应用洛必达第二法则,有

$$\lim_{x\to+0}\frac{I(x)}{x^{-1}}=\lim_{x\to+0}\frac{I'(x)}{(x^{-1})'}=\lim_{x\to+0}\frac{-\frac{\cos x}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=1.$$

105 $\lim_{x\to+0}\dfrac{\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt}{\ln\frac{1}{x}}$.

对任意 $a>0$,**根据狄利克雷检验法,积分** $\int_a^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt$ **收敛.因而** $\int_a^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt=C$, C **为常数,且** $\lim_{x\to+0}\dfrac{\int_a^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt}{\ln\frac{1}{x}}=0$.**因而**

$$\lim_{x\to+0}\frac{\int_x^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt}{\ln\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{\int_x^{a}\frac{e^{-t}}{t}dt}{\ln\frac{1}{x}}.$$

由不等式 $I(x)=\int_x^a\frac{e^{-t}}{t}dt\geq e^{-a}(\ln a-\ln x)$ **有** $\lim_{x\to+0}I(x)=+\infty$, **因而根据洛必达第二法则,得到**

$$\lim_{x\to+0}\frac{I(x)}{\ln\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+0}\frac{I'(x)}{\left(\ln\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to+0}\frac{-\frac{e^{-x}}{x}}{-\frac{1}{x}}=1.$$

106 **证明:对任意** $x>0$ v $\mathrm{li}\,x=\mathrm{v.p.}\int_{+0}^{x}\frac{dt}{\ln t}$.

对任意 $0<\mu<1$ **及** $0<\varepsilon<1$,**积分** $I_1=\int_\mu^{1-\varepsilon}\frac{dt}{\ln t}$, $I_2=\int_{1+\varepsilon}^{2}\frac{dt}{\ln t}$ **存在,而**

$$\mathrm{li}\,x=\lim_{\substack{\mu\to+0\\ \varepsilon\to+0}}\left(\int_\mu^{1-\varepsilon}\frac{dt}{\ln t}+\int_{1+\varepsilon}^{x}\frac{dt}{\ln t}\right),\quad 1<x\leq 2.$$

当 $0<x\leq 2$ **时成立分解式** $\frac{1}{\ln x}=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}+O(x-1)$,**因而**

$$\mathrm{li}\,x=\lim_{\substack{\mu\to+0\\ \varepsilon\to+0}}\left(\ln|t-1|\Big|_\mu^{1-\varepsilon}+\frac{t}{2}\Big|_\mu^{1-\varepsilon}+O((t-1)^2)\Big|_0^{1-\varepsilon}+\right.$$

$$\left.\ln(t-1)\Big|_{1+\varepsilon}^{x}+\frac{t}{2}\Big|_{1+\varepsilon}^{x}+O((t-1)^2)\Big|_{1+\varepsilon}^{x}\right)$$

$$= \ln(x-1) + \frac{x}{2} + O((x-1)^2),\ 0 < x \leq 2.$$

如果 $x > 2$,则得到

$$\mathrm{li}\,x = \mathrm{v.p.}\int_0^x \frac{dt}{\ln t} = \mathrm{v.p.}\int_0^2 \frac{dt}{\ln t} + \int_2^x \frac{dt}{\ln t} = 1 + \int_2^x \frac{dt}{\ln t} + O(1).$$

107 求 $\mathrm{v.p.}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$.

二次三项式 $y = x^2 - 3x + 2$ 具有实根 $x_1 = 1$ 及 $x_2 = 2$,因而

$$\mathrm{v.p.}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2} = \mathrm{v.p.}\int_0^3 \frac{dx}{x^2-3x+2} + \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \mu\to+0}} \left(\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| \Bigg|_0^{1-\varepsilon} + \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| \Bigg|_{1+\varepsilon}^{2-\mu} + \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right| \Bigg|_{2+\mu}^{3} \right) +$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\frac{t-2}{t-1}\Bigg|_3^x$$

$$= -\ln 2 + \lim_{\substack{\varepsilon\to+0\\ \mu\to+0}} \left(\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} + \ln\frac{1+\mu}{1-\mu} \right) + \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{x-2}{x-1} = \ln\frac{1}{2}.$$

练 习 题

计算下列积分:

67 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$. **68** $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(a-x)\sqrt{1-x^2}}$. **69** $\int_{-1}^{1} \frac{x^4\,dx}{(x^2+1)\sqrt{1-x^2}}$.

70 $\int_a^b \sqrt{\frac{x-a}{b-x}}\,x\,dx$. **71** $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx,\ a > 0$. **72** $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx,\ a > 0$.

73 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(a^2+x^2)^n},\ n \in \mathbb{N}$. **74** $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(ax^2+2bx+c)^n},\ ac - b^2 > 0$.

75 $\int_0^{+\infty} e^{-ax}\sin^{2n} x\,dx,\ a > 0$. **76** 1) $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx$; 2) $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\,dx$.

研究下列积分的收敛性:

77 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4\sin^2 x}$. **78** $\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{1+x^2\sin^2 x}$. **79** $\int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$. **80** $\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha(x+2)}{x+1}\,dx$.

81 $\int_0^{\pi} \ln\sin x\,dx$. **82** $\int_0^{\pi} \frac{\ln\sin x}{x}\,dx$. **83** $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+(\ln x)^n}$. **84** $\int_0^{+\infty} x^x e^{-x^n}\,dx$.

85 $\int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{-\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)}\,dx$. **86** $\int_0^{+\infty} \sin\left(x+\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x}$.

证明不等式:

87 $-\dfrac{\pi}{4}<\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax}{x^2+4}\mathrm{d}x<\frac{\pi}{4}$.　　**88** $0<\displaystyle\int_2^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x<\frac{1}{4\mathrm{e}^4}$.

89 $\dfrac{1}{19}<\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1+x^{20}}{1+x^{40}}\mathrm{d}x<\frac{1}{19}+\frac{1}{39}$.　　**90** $\dfrac{20}{19}<\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1+x^{20}}{1+x^{40}}\mathrm{d}x<\frac{20}{19}+\frac{1}{20}$.

91 $0<\displaystyle\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x<\frac{1}{n},\ n>1$.　　**92** $1-\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x<1+\frac{1}{n},\ n>1$.

93 **证明:** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 n^2x^{n-1}(1-x)\mathrm{d}x\neq\int_0^1\lim_{n\to\infty}n^2x^{n-1}(1-x)\mathrm{d}x$.

94 **证明:如果积分**$\displaystyle\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$**绝对收敛,则**

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{+\infty}f(x)\,|\sin x|\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x.$$

95 **证明等式**

$$\int_{+0}^{\frac{\pi}{2}-0}\frac{\mathrm{d}x}{\tan x}=\int_0^{\frac{\pi}{2}-0}\tan x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

96 **证明:广义积分**$\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin^2\left(\pi\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)\mathrm{d}x$**发散**.

求:

97 $\mathrm{v.p.}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{a-b\cos x},\ 0<a<b$.　　**98** $\mathrm{v.p.}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1-x^3}$.

99 $\mathrm{v.p.}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{x\mathrm{d}x}{1-a\cos x}$,**对** $a>1$.

5　有界变差函数

定义 1　设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$,Π 为区间$[a,b]$的任意分割,$\Delta f_i=f(x_{i+1})-f(x_i)$,$V_\Pi(f;a,b)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}|\Delta f_i|$.数 $V_\Pi(f;a,b)$ 称为函数 f 在分割 Π 下的变差,而数 $V(f;a,b)=\displaystyle\sup_{\{\Pi\}}V_\Pi(f;a,b)$,其中上确界在区间$[a,b]$的所有可能分割 Π 上取,称为函数 f 在区间$[a,b]$上的全变差.

如果 $V(f;a,b)<\infty$,则称 f 是有界变差函数.

定义 2　设 $\boldsymbol{f}:[a,b]\to\mathbb{R}^m$,$\Pi$ 为区间$[a,b]$的任意分割,$\Delta\boldsymbol{f}_i=\boldsymbol{f}(x_{i+1})-\boldsymbol{f}(x_i)$,$V_\Pi(\boldsymbol{f};a,b)=\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}\|\Delta\boldsymbol{f}_i\|$,其中 $\|\cdot\|$ 为空间 $\mathbb{R}^m$ 中的欧几里得范数.

数 $V(\boldsymbol{f};a,b)=\sup\limits_{\{\Pi\}}\{V_\Pi(\boldsymbol{f};a,b)\}$,其中上确界在区间$[a,b]$的所有可能分割上取,称为向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 在$[a,b]$上的全变差.

如果 $V(\boldsymbol{f};a,b)<\infty$,则称向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 为有界变差函数.

定理 1 设 $\boldsymbol{f}:[a,b]\to\mathbb{R}^m$.向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 在$[a,b]$上是有界变差函数的充分必要条件是:它的每个分量 $f_j(j=1,\cdots,m)$在该区间是有界变差的.

定理 2 如果 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$,$g:[a,b]\to\mathbb{R}$是$[a,b]$上的有界变差函数,则 $f+g$ 及 fg 也是$[a,b]$上的有界变差函数.

推论 如果函数 f 和 g 在$[a,b]$上单调上升,则 $f-g$ 是$[a,b]$上的有界变差函数.

定理 3 设 $\boldsymbol{f}:[a,b]\to\mathbb{R}^m$为有界变差向量值函数.则

1) $V(\boldsymbol{f};a,y)=V(\boldsymbol{f};a,x)+V(\boldsymbol{f};x,y)$,如果 $a\le x\le y\le b$;

2) 函数 $V_f:x\mapsto V(\boldsymbol{f};a,x)$在$[a,b]$连续,如果 $\boldsymbol{f}\in C[a,b]$.

定理 4 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为$[a,b]$上的有界变差函数.则存在这样的非降函数 $p:[a,b]\to\mathbb{R}$,$q:[a,b]\to\mathbb{R}$,使得 $p(a)=q(a)=0$,且 $\forall x\in[a,b]$成立等式

$$f(x)-f(a)=p(x)-q(x),\tag{1}$$

$$V(f;a,x)=p(x)+q(x).\tag{2}$$

函数 p 及 q 分别称为函数 f 的正变差函数与负变差函数.

108 从函数

$$f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{\pi}{x}, & \text{如果 } 0<x\le 2,\\ 0, & \text{如果 } x=0.\end{cases}$$

中确信,区间上连续函数不一定是有界变差的.

函数 f 在定义的区间连续.

设 $\Pi=\left\{0,\dfrac{2}{2n-1},\dfrac{2}{2n-3},\cdots,\dfrac{2}{5},\dfrac{2}{3},2\right\}$为区间$[0,2]$的一个分割.则全变差

$$V_\Pi(f;0,2)=\frac{2}{2n-1}+\left(\frac{2}{2n-3}+\frac{2}{2n-1}\right)+\cdots+\left(2+\frac{2}{3}\right)>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$
$$=C+\ln n+\varepsilon_n,$$

当 $n\to\infty$时 $\varepsilon_n\to 0$,C为欧拉常数.因而当 $n\to\infty$时 $V_\Pi(f;0,2)\to+\infty$,集合$\{V_\Pi(f;0,2)\}$无上界.

109 求函数 $f:x\mapsto 3x^2-2x^3(-2\le x\le 2)$的正变差函数、负变差函数与全变差.

首先找出函数 $x\mapsto V(f;-2,x)$,$-2\le x\le 2$,注意到 $f\in C^{(1)}[-2,2]$.

设 Π 为区间$[-2,x](-2\le x\le 2)$的任意分割.则

$$V_\Pi(f;-2,x)=\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|=\sum_{i=0}^{n-1}|f'(\xi_i)|\Delta x_i,\quad x_i<\xi_i<x_{i+1}$$

(根据拉格朗日的有限增量公式).

因而 $V_\Pi(f;-2,x)=S_\Pi(|f'|)$,其中 $S_\Pi(|f'|)$为函数 $t\mapsto|f'(t)|(-2\le t\le x)$的某积分和,由此得到

$$V(f;-2,x)=\int_{-2}^{x}|f'(t)|\mathrm{d}t$$

$$=\begin{cases}-\int_{2}^{x}f'(t)\mathrm{d}t=-f(x)+28, & \text{如果 } -2\le x\le 0,\\ -\int_{-2}^{0}f'(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{x}f'(t)\mathrm{d}t=f(x)+28, & \text{如果 } 0\le x\le 1,\\ -\int_{-2}^{0}f'(t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{1}f'(t)\mathrm{d}t-\int_{1}^{x}f'(t)\mathrm{d}t=30-f(x), & \text{如果 } 1\le x\le 2.\end{cases}$$

根据公式(1)和(2)有

$$p(x)=\frac{V(f;-2,x)+f(x)-f(-2)}{2}=\begin{cases}0, & \text{如果 } -2\le x\le 0,\\ f(x), & \text{如果 } 0\le x\le 1,\\ 1, & \text{如果 } 1\le x\le 2,\end{cases}$$

$$q(x)=\frac{V(f;-2,x)-f(x)+f(-2)}{2}=\begin{cases}-f(x)+28, & \text{如果 } -2\le x\le 0,\\ 28, & \text{如果 } 0\le x\le 1,\\ -f(x)+29, & \text{如果 } 1\le x\le 2.\end{cases}$$

110　设 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 为在$[a,b]$上的有界变差函数 .p 及 q 是函数 f 的正变差函数与负变差函数,而 p_1 和 q_1 是在区间上单调增加的函数且 $f=p_1-q_1$.证明:

$$V(p;a,b)\le V(p_1;a,b),\ V(q;a,b)\le V(q_1;a,b).$$

根据定理 4,函数 p 及 q 在区间$[a,b]$上不减,且因为 $p(a)=q(a)=0$,故对于 $\forall\ x\in(a,b]$, $p(x)\ge 0$, $q(x)\ge 0$.

由公式(2)有,对 $\forall\ x\in[a,b]$,

$$p(x)=V(f;a,x)-q(x)\ge 0,\ q(x)=V(f;a,x)-p(x)\ge 0,$$

因而,成立不等式

$$q(x)\le V(f;a,x),\ p(x)\le V(f;a,x),\ a\le x\le b. \tag{1}$$

由于 $f=p_1-q_1$,则

$$V(f;a,x)=V(p_1-q_1;a,x),\ a\le x\le b.$$

考虑$[a,b]$区间的任意分割下的变差

$$V_\Pi(f;a,b)=V_\Pi(p_1-q_1;a,b)=\sum_{i=0}^{n-1}|(p_1(x_{i+1})-p_1(x_i))-(q_1(x_{i+1})-q_1(x_i))|$$

$$\le\sum_{i=0}^{n-1}|p_1(x_{i+1})-p_1(x_i)|\le V_\Pi(p_1;a,b),$$

则 $V(f;a,b)\le V(p_1;a,b)$.类似地,$V(f;a,b)\le V(q_1;a,b)$.由函数 p 及 q 的单调性,同时

由 $p(a)=q(a)=0$,得到

$$V(p;a,b)=p(b),\quad V(q;a,b)=q(b).$$

则由不等式(1)有不等式

$$V(p;a,b)=p(b)\le V(f;a,b)\le V(p_1;a,b),\quad V(q;a,b)$$
$$=q(b)\le V(f;a,b)\le V(q_1;a,b).$$

111 设 $g\in R[a,b]$, $f(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t$, $g^+(t)=\max\{g(t),0\}$, $g^-(t)=\min\{g(t),0\}$.

证明: f 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数,其变差函数由下面等式给出

$$V(f;a,x)=\int_a^x|g(t)|\mathrm{d}t,\ p(x)=\int_a^x g^+(t)\mathrm{d}t,\ q(x)=\int_a^x g^-(t)\mathrm{d}t.$$

设 Π 为区间 $[a,x)(a<x\le b)$ 的任意分割.则根据变差的定义有

$$V_\Pi(f;a,x)=\sum_{i=0}^{n-1}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}g(t)\mathrm{d}t\right|=\sum_{i=0}^{n-1}|\mu_i|\Delta x_i,$$

其中 $\inf\limits_{x_i\le t\le x_{i+1}}\{g(t)\}\le\mu_i\le\sup\limits_{x_i\le t\le x_{i+1}}\{g(t)\}$.

因而 $\underline{\int}|g|\mathrm{d}t\le V(f;a,x)\le\overline{\int}|g|\mathrm{d}t$,又由于 $g\in R[a,b]$,则 $|g|\in R[a,b]$.

由此 $V(f;a,x)=\int_a^x|g(t)|\mathrm{d}t$.根据定理 4 有

$$p(x)-q(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t,\ p(x)+q(x)=\int_a^x|g(t)|\mathrm{d}t.$$

因此

$$p(x)=\frac{1}{2}\int_a^x g(t)(1+\mathrm{sgn}\,g(t))\mathrm{d}t=\int_a^x g^+(t)\mathrm{d}t,$$

$$q(x)=\frac{1}{2}\int_a^x g(t)(\mathrm{sgn}\,g(t)-1)\mathrm{d}t=\int_a^x g^-(t)\mathrm{d}t.$$

112 设 $f:[\alpha,\beta]\to\mathbf{R}$ 为 $[\alpha,\beta]$ 上的有界变差函数,而函数 $F:[a,b]\to\mathbf{R}$ 在区间 $[a,b]$ 上满足利普希茨条件,并且 $[a,b]\supset f([\alpha,\beta])$.证明:复合函数 $F\circ f$ 是区间 $[\alpha,\beta]$ 上的有界变差函数.

函数 F 在 $[a,b]$ 上满足利普希茨条件,如果存在这样的常数 L,使得 $\forall x_1,x_2\in[a,b]\Rightarrow|F(x_1)-F(x_2)|\le L|x_1-x_2|$.

设 Π 为区间 $[\alpha,\beta]$ 的任意分割.则得到

$$V_\Pi(F\circ f;\alpha,\beta)=\sum_{i=0}^{n-1}|F(f(t_{i+1}))-F(f(t_i))|\leq L\sum_{i=0}^{n-1}|f(t_{i+1})-f(t_i)|$$
$$=LV_\Pi(f;\alpha,\beta).$$

由所得不等式知,复合函数 $F\circ f$ 在$[\alpha,\beta]$上是有界变差的.

练 习 题

100 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ 为区间$[a,b]$上的有界变差函数,而 $\varphi:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ 为单调函数且$[a,b]\supset\varphi([\alpha,\beta])$.证明:复合函数 $f\circ\varphi$是区间$[\alpha,\beta]$上的有界变差函数.

101 证明:函数 $F:x\mapsto\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, a\leq x\leq b, f\in R[a,b]$ 的全变差等于

$$\int_a^b|f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

102 证明:如果函数 $x\mapsto f(x)(a\leq x\leq b)$在$[a,b]$上是有界变差的,且对$\forall x\in[a,b],|f(x)|>\varepsilon>0$,则函数 $x\mapsto\dfrac{1}{f(x)}(a\leq x\leq b)$在该区间也是有界变差的.

103 计算 1) $V(\sin x;0,2\pi)$; 2) $V(\cos x;0,2\pi)$.

104 计算函数 $x\mapsto[x]-x(0\leq x\leq 2)$的正变差函数,负变差函数和全变差.

6 定积分在解决几何问题中的应用

6.1 可求长曲线的弧长

定义 1 连续映射 $\boldsymbol{f}:[a,b]\to\mathbb{R}^m,[a,b]\subset\mathbb{R}$,称为$\mathbb{R}^m$中的路线.

定义 2 如果连续映射 $\boldsymbol{f}:[a,b]\to\mathbb{R}^m$是双射,则路线称为弧.

定义 3 在映射 $\boldsymbol{f}$ 下区间$[a,b]$的像称为弧 $\boldsymbol{f}:[a,b]\to\mathbb{R}^m$的轨迹或曲线$\gamma$,即

$$\gamma=\{\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m, y_j=f_j(x), a\leq x\leq b, j=1,\cdots,m\}.$$

定义 4 设 $\boldsymbol{f}$ 为空间$\mathbb{R}^m$中的弧.如果 $f(a)=f(b)$且对(a,b)上任意不同的点 x_1 和 x_2 有 $f(x_1)\neq f(x_2)$,则曲线γ称为简单闭曲线.

定义 5 如果向量值函数 $\boldsymbol{f}$ 在区间$[a,b]$是有界变差的,则称曲线γ可求长,全变差 $V(f;a,b)$称为曲线γ的长度.

定理 如果向量值函数 $\boldsymbol{f}':[a,b]\to\mathbb{R}^m$在区间$[a,b]$上连续,则曲线$\gamma$可求长,且其长度可用公式

$$l=\int_a^b|\boldsymbol{f}'(x)|\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

计算,其中$|\boldsymbol{f}'(x)|=\sqrt{f_1'^2(x)+f_2'^2(x)+\cdots+f_m'^2(x)}$.

考虑定理的一个特殊情形:$m=2$ 且曲线由参数方程 $x=\varphi(t),y=\psi(t)(\alpha\leq t\leq\beta)$给

出,则 $|f'(t)|=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}$ 且公式(1)具有形式

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,\mathrm{d}t. \tag{2}$$

对 $m=3$ 的情形,当曲线 γ 由参数方程 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$ $(\alpha\le t\le\beta)$ 给出,在满足定理的所有条件下,有

$$l=\int_\alpha^\beta\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)}\,\mathrm{d}t. \tag{3}$$

在特殊情形下,当 $\mathbf{R}^2$ 中的曲线 γ 可表示为 $f_1(x)=x$, $f_2(x)=f(x)$ $(a\le x\le b)$,其中 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$, $f\in C^{(1)}[a,b]$,公式(2)具有形式

$$l=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

而如果 $\mathbf{R}^2$ 中曲线 γ 由极坐标给出,即由参数方程

$x=\rho(\varphi)\cos\varphi$, $y=\rho(\varphi)\sin\varphi$, $\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2$, $\rho:[\varphi_1,\varphi_2]\to\mathbf{R}^+$, $\rho\in C^{(1)}[\varphi_1,\varphi_2]$,

给出,则公式(2)具有形式

$$l=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\,\mathrm{d}\varphi. \tag{5}$$

在特殊情形下,当曲线 γ 在极坐标系中由形式 $\varphi=\varphi(\rho)$, $\rho_1\le\rho\le\rho_2$ 给定,则在积分(5)中,应作变量代换. 在变量代换之后得到下面的公式

$$l=\int_{\rho_1}^{\rho_2}\sqrt{1+(\rho\varphi'(\rho))^2}\,\mathrm{d}\rho. \tag{6}$$

6.2 平面图形面积的计算

定义 1 下方由 Ox 轴上的区间 $[a,b]$,上方由非负连续函数 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$,侧边由直线 $x=a$ 和 $x=b$ 所围成的平面图形 Φ 称为曲边梯形(图 62).

定理 1 曲边梯形为可求面积图形,其面积 P 可用下面公式计算

$$P=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

如果连续函数 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 在 $[a,b]$ 上改变符号,则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 等于位于 Ox 轴上方及下方的曲边梯形面积的代数和.

如果平面图形 Φ 下方由连续函数 $f_1:[a,b]\to\mathbf{R}$ 的图形所界定,上方由连续函数 $f_2:[a,b]\to\mathbf{R}$ 的图形所界定,而侧边由直线 $x=a$ 及 $x=b$ 所界定(图 63). 则其面积可由下面公式计算

$$P = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

62　　　　63

定义 2 由两条与极轴的夹角分别为 $\varphi = \alpha$ 与 $\varphi = \beta$ 的射线, 和连续曲线 $\gamma: \rho = \rho(\varphi)$, $\rho \geq 0$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, 所围成的平面图形称为曲边扇形 .

定理 2 曲边扇形为可求面积的平面图形, 其面积 P 可用下面公式计算

$$P = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi. \tag{3}$$

设 Φ 为 $\mathbf{R}^2$ 中单连通区域, 由封闭曲线 γ 围成, 该曲线由参数方程 $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t_0 \leq t \leq t_1)$ 给出 (曲线 γ 称为光滑的, 如果在区间 $[t_0, t_1]$ 的任一点 t, 函数 x 和 y 连续可微且 $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$) .

假设 Φ 为有向凸平面图形, 当参数 t 由 t_0 到 t_1 变化时, 边界由反时针方向转完一圈 . 则图形 P 的面积可用下列公式中的任何一个计算

$$P = -\int_{t_0}^{t_1} y(t)\,x'(t)\,\mathrm{d}t, \tag{4}$$

$$P = \int_{t_0}^{t_1} x(t)\,y'(t)\,\mathrm{d}t, \tag{5}$$

$$P = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (x(t)\,y'(t) - y(t)\,x'(t))\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

如果图形 Φ 不是凸的, 则可用平行于 Oy 轴的直线把它分成若干凸的, 在每一部分上利用公式 (4)—(6) . 整理所得结果, 得到公式 (4)—(6) 适用于对所有图形 Φ 的面积计算 .

6.3 物体体积的计算

定义 设 $f: [a, b] \to \mathbf{R}$, $f \in C[a, b]$. 曲边梯形 Φ 由函数 f 的图形, 直线 $x = a$, $x = b$ 及 Ox 轴上的区间 $[a, b]$ 所围成 . 由该曲边梯形围绕 Ox 轴旋转而形成的物体 T 称为旋转体 .

定理 1 旋转物体 T 可求体积, 且其体积可用下面公式计算

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

考虑物体 T, 它含在平面 $x = a$ 与 $x = b$ 之间 . 假设通过点 $x \in [a, b]$ 与 Ox 轴垂直的平

面与物体的截口 $\Phi(x)$是可积的平面图形，其面积 $P(x)$为已知，则有

定理 2　如果物体 T 为可积体，而函数 $P: x \mapsto P(x)\ (a \leq x \leq b)$在 $[a, b]$上可积，则物体 T 的体积可用下面公式计算

$$V = \int_a^b P(x)\,\mathrm{d}x .$$

求平面$\mathbb{R}^2$上的曲线 γ的长度．

113　$\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 = 2px, 0 \leq x \leq x_0, p > 0\}$．

利用 6.1 节的公式(4)，注意到点集$\{M(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq x_0,\ y^2 = 2px\}$关于 Ox 轴的对称性有

$$l = 2\int_0^{x_0} \sqrt{1 + \frac{p}{2x}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{x_0} \frac{\sqrt{p + (\sqrt{2x})^2}}{\sqrt{2x}}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{x_0} \sqrt{p + (\sqrt{2x})^2}\,\mathrm{d}(\sqrt{2x})$$

$$= 2\int_0^{\sqrt{2x_0}} \sqrt{p + t^2}\,\mathrm{d}t = \left(t\sqrt{p + t^2} + p\ln(t + \sqrt{p + t^2})\right)\Big|_0^{\sqrt{2x_0}}$$

$$= 2\sqrt{x_0}\sqrt{x_0 + \frac{p}{2}} + p\ln\frac{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0 + \frac{p}{2}}}{\sqrt{\frac{p}{2}}} .$$

114　$\gamma = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{y^2}{4} - \frac{1}{2}\ln y, 1 \leq y \leq \mathrm{e}\right\}$．

把 y 当作积分变量，6.1 节的公式(4)具有形式

$$l = \int_1^{\mathrm{e}} \sqrt{1 + x'^2(y)}\,\mathrm{d}y = \int_1^{\mathrm{e}} \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(y - \frac{1}{y}\right)^2}\,\mathrm{d}y .$$

因而

$$l = \frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}} \left(\frac{1}{y} + y\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\left(\ln y + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{4}(1 + \mathrm{e}^2) .$$

115　$\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = a(\operatorname{sh} t - t), y = a(\operatorname{ch} t - 1), 0 \leq t \leq T\}$．

利用 6.1 节的公式(2)，得到

$$x'(t) = a(\operatorname{ch} t - 1),\quad y'(t) = a\operatorname{sh} t,$$

$$x'^2(t) + y'^2(t) = a^2(\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t - 2\operatorname{ch} t + 1) = 2a^2(\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{ch} t)$$

$$= 2a^2\operatorname{ch} t(\operatorname{ch} t - 1) = 4a^2\operatorname{ch} t\operatorname{sh}^2\frac{t}{2} = 4a^2\operatorname{sh}^2\frac{t}{2}\left(2\operatorname{ch}^2\frac{t}{2} - 1\right) .$$

因而

$$l = 2a\int_0^T \operatorname{sh}\frac{t}{2}\sqrt{2\operatorname{ch}^2\frac{t}{2} - 1}\,\mathrm{d}t = \frac{4a}{\sqrt{2}}\int_0^T \sqrt{\left(\sqrt{2}\operatorname{ch}\frac{t}{2}\right)^2 - 1}\,\mathrm{d}\left(\sqrt{2}\operatorname{ch}\frac{t}{2}\right)$$

$$= 2a\left[\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\frac{t}{2}\sqrt{\mathrm{ch}\,t} - \ln\left(\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\frac{t}{2} + \sqrt{\mathrm{ch}\,t}\right)\right]\Bigg|_0^T$$

$$= a\left[2\left(\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\frac{T}{2}\sqrt{\mathrm{ch}\,T} - 1\right) - 2\ln\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{ch}\frac{T}{2} + \sqrt{\mathrm{ch}\,T}}{\sqrt{2}+1}\right].$$

116 $\gamma = \left\{\rho = \dfrac{p}{1+\cos\varphi},\ |\varphi| \leq \dfrac{\pi}{2}\right\}$.

借助于 6.1 **节公式**(5)**来计算曲线的长度有**

$$\rho'(\varphi) = \frac{p\sin\varphi}{(1+\cos\varphi)^2},$$

$$\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi) = \frac{p^2}{(1+\cos\varphi)^2} + \frac{p^2\sin^2\varphi}{(1+\cos\varphi)^4} = \frac{2p^2}{(1+\cos\varphi)^3} = \frac{p^2}{4\cos^6\frac{\varphi}{2}},$$

$$l = \frac{p}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos^3\frac{\varphi}{2}} = p\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos^3\frac{\varphi}{2}} = 2p\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^3 t} = 2p\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos t(1-\sin^2 t)}$$

$$= 2p\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}(\sin t)}{(1-\sin^2 t)^2} = 2p\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\mathrm{d}z}{(1-z^2)^2} = 2p\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\mathrm{d}z}{1-z^2} + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{z^2\,\mathrm{d}z}{(1-z^2)^2}\right)$$

$$= 2p\left(\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\mathrm{d}z}{1-z^2} + \frac{z}{2(1-z^2)}\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\mathrm{d}z}{1-z^2}\right)$$

$$= 2p\left(\frac{1}{4}\ln\frac{1+z}{1-z}\Bigg|_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= p(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})).$$

117 $\gamma = \left\{\varphi = \dfrac{1}{2}\left(\rho + \dfrac{1}{\rho}\right),\ 1 \leq \rho \leq 3\right\}$.

为计算曲线 γ **的长度利用** 6.1 **节的公式**(6),**得到**

$$l = \int_1^3 \sqrt{1 + (\rho\varphi'(\rho))^2}\,\mathrm{d}\rho = \int_1^3 \left(\frac{\rho}{2} + \frac{1}{2\rho}\right)\mathrm{d}\rho = \left(\frac{\rho^2}{4} + \frac{1}{2}\ln\rho\right)\Bigg|_1^3 = 2 + \frac{1}{2}\ln 3.$$

118 **证明**:**椭圆** $\gamma_1 = \{x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ 0 \leq t \leq 2\pi\}$ **的长度等于正弦曲线** $\gamma_2 = \left\{y = c\sin\dfrac{x}{b},\ 0 \leq x \leq 2\pi b\right\}$,**其中** $c = \sqrt{a^2 - b^2}$,**一个波的长度**.

把椭圆的长度和正弦曲线一个波的长度分别记为 l_1 **和** l_2,**得到**

$$l_1=\int_0^{2\pi}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t,$$

$$l_2=\int_0^{2\pi b}\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi b}\sqrt{1+\frac{c^2}{b^2}\cos^2\frac{x}{b}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{2\pi b}\sqrt{b^2+(a^2-b^2)\cos^2\frac{x}{b}}\,\mathrm{d}\frac{x}{b}=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t$$

在积分中作了变换$\frac{x}{b}=t$.

由于函数 $t\mapsto\sin^2 t,\ t\mapsto\cos^2 t\ (t\in\mathbf{R})$是周期函数,有周期 $T=\pi$,则根据例 51 有

$$l_1=2\int_0^{\pi}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

类似地有

$$l_2=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t.$$

在最后一个积分中作变量代换$\frac{\pi}{2}-t=z$,得到

$$l_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2 z+b^2\cos^2 z}\,\mathrm{d}z=l_1.$$

计算下列函数图形所围平面图形的面积:

119 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ |x|\leqslant a$.

平面图形是半轴为 $x=a$ 和 $x=b$ 的椭圆.应用椭圆关于坐标轴的对称性,计算椭圆的四分之一的面积 P_1.根据 6.2 节的公式(1),得到

$$P_1=b\int_0^{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x=ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}ab$$

这里作了变量代换$\frac{x}{a}=\sin t$.最后有 $P=4P_1=\pi ab$.

120 $Ax^2+2Bxy+Cy^2=1,\ A>0,\ AC-B^2>0$.

解关于 x 的方程 $Ax^2+2Bxy+Cy^2-1=0$ 得到

$$x=\frac{-By\pm\sqrt{A-(AC-B^2)y^2}}{A},\ A-(AC-B^2)y^2\geqslant 0.$$

因而$|y|\leqslant\sqrt{\frac{A}{AC-B^2}}=b$.所求面积可用 6.2 节的公式(2)计算,在所考虑情形具有形式

$$P = \int_{-b}^{b} (x_1(y) - x_2(y))\,\mathrm{d}y,$$

其中

$$x_1 = \frac{-By + A - (AC - B^2)y^2}{A},\ x_2 = \frac{-By - A - (AC - B^2)y^2}{A}.$$

这样,有

$$P = \frac{2}{A}\int_{-b}^{b} A - (AC - B^2)y^2\,\mathrm{d}y = \frac{2\quad AC - B^2}{A}\int_{-b}^{b} b^2 - y^2\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{4b^2}{A}\quad AC - B^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi b^2}{A}\quad AC - B^2 = \frac{\pi}{AC - B^2}$$

(在积分中作了变换 $\arcsin\frac{y}{b} = t$) .

121 $y = \mathrm{e}^{-x}|\sin x|$, $y = 0$, $x \geq 0$.

函数 $y: x \mapsto \mathrm{e}^{-x}|\sin x|\,(0 \leq x < +\infty)$的图形与 Ox 轴无交点 .当 $x \to +\infty$时, Ox 轴为其渐近线 .因而,由函数 y 的图形及正半轴$\mathbb{R}^+$ 所围的平面 xOy 上的点集,在通常意义下不是可求面积的图形 .

考虑面积的集合

$$P(x) = \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,|\sin t|\,\mathrm{d}t,\ x \in \mathbb{R}^+$$

且定义

$$P \overset{\text{def}}{=} \lim_{x \to +\infty} P(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,|\sin x|\,\mathrm{d}x .$$

把 P 表示成和

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \mathrm{e}^{-x}\,|\sin x|\,\mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty}\sum_{k=0}^{n}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \mathrm{e}^{-x}\,|\sin x|\,\mathrm{d}x,$$

且在每一个积分中作变量代换 $x - k\pi = t$,得到

$$P = \lim_{n \to \infty}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{-k\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t = \lim_{n \to \infty}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{-k\pi}\mathrm{e}^{-t}\,\frac{\sin t + \cos t}{2}\Bigg|_{\pi}^{0} = \frac{1 + \mathrm{e}^{-\pi}}{2}\lim_{n \to \infty}\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{-k\pi} .$$

求图形的面积的问题转化为计算下降的几何级数的和 .这样,有

$$P = \frac{1 + \mathrm{e}^{-\pi}}{2(1 - \mathrm{e}^{-\pi})} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}}} = \frac{1}{2}\,\mathrm{cth}\,\frac{\pi}{2} .$$

图 64

122 $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$,和射线段 $x = a$, $y \leq 0$.

考虑平面图形 $MKNRP$,它由圆的渐伸线及射线段 $x = a$, $y \leq 0$ 围成(图 64) .所求面积 P 等于三角形 MOP 的面积与图形 $MKNRPOM$ 面积的和 .因为 $OM = a$, $|MP| =$

$2\pi a$, 显然 $P_{\triangle MOP}=\pi a^2$.

转到极坐标 ρ 及 φ, 得到

$$\rho^2=x^2+y^2=a^2(1+t^2),\quad \tan\varphi=\frac{\sin t-t\cos t}{\cos t+t\sin t}.$$

为计算图形 $MKNRPOM$ 的面积, 利用 6.2 节的公式(3), 然后在积分中由积分变量 φ 转变为积分变量 t.

对等式

$$\tan\varphi=\frac{\sin t-t\cos t}{\cos t+t\sin t}$$

的左边、右边微分, 得到

$$\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{1+\left(\dfrac{\sin t-t\cos t}{\cos t+t\sin t}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{\sin t-t\cos t}{\cos t+t\sin t}\right)=\frac{t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$

因而

$$P_{MKNRPOM}=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\rho^2(\varphi)\mathrm{d}\varphi=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{(1+t^2)t^2}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{4}{3}\pi^3a^2.$$

最后有

$$P=\pi a^2+\frac{4}{3}\pi^3a^2=\frac{a^2}{3}(4\pi^3+3\pi).$$

123　$x=a\cos t,\ y=\dfrac{a\sin^2 t}{2+\sin t}$.

当 t 由 0 增加到 π 时, 变量 x 由 a 减至 $-a$, 同时变量 $y=L_1(t)$ 取非负值, 当 t 由 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 时, y 由 0 增至 $\frac{a}{3}$, 当 t 由 $\frac{\pi}{2}$ 变至 π 时, y 由 $\frac{a}{3}$ 减至 0. 而如果 t 由 π 增至 2π, 则变量 x 由 $-a$ 增至 a, 且变量 $y=L_2(t)$ 在区间 $(\pi,2\pi)$ 的值大于变量 $y=L_1(t)$ 在区间 $(0,\pi)$ 上的值, 因为当 $t\in(\pi,2\pi)$ 时, $\sin t<0$. 因而, 方程 $x=a\cos t,\ y=\dfrac{a\sin^2 t}{2+\sin t}$ 描绘一封闭曲线, 以点 $(a,0)$ 及 $(-a,0)$ 作为回归点. 此时, 积分 $P_1=\int_0^\pi y\,\mathrm{d}x$ 等于曲线 $L_1(t)$ 及 Ox 轴上的区间 $[-a,a]$ 所围图形的面积, 取符号“-”, 而积分 $P_2=\int_\pi^{2\pi}y\,\mathrm{d}x$ 等于曲线 $L_2(t)$ 及 Ox 轴上的区间 $[-a,a]$ 所围图形的面积. 因而, 所求面积等于 P_1 与 P_2 的代数和

$$P=P_1+P_2=\int_0^{2\pi}y(t)\mathrm{d}x(t)=\int_0^{2\pi}\frac{a\sin^2 t}{2+\sin t}(-a\sin t)\mathrm{d}t=-a^2\int_0^{2\pi}\frac{\sin^3 t}{2+\sin t}\mathrm{d}t$$

$$=-a^2\int_0^{2\pi}\left(\sin^2 t-2\sin t+4-\frac{8}{2+\sin t}\right)\mathrm{d}t=-9\pi a^2+8a^2\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{2+\sin t}.$$

由于函数 $t \mapsto \frac{1}{2+\sin t}$ ($t \in \mathbb{R}$)是周期为 2π 的周期函数,则根据例 51,有

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2+\sin t} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{2+\sin t} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\left(\tan \frac{t}{2}\right)}{\tan^2 \frac{t}{2} + \tan \frac{t}{2} + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \left.\frac{2\tan \frac{t}{2} + 1}{\sqrt{3}}\right|_{-\pi+0}^{\pi-0} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

最后有 $P = \pi a^2 \left(\frac{16}{3} - 9\right)$.

124 $x = 2t - t^2,\ y = 2t^2 - t^3$.

包围平面图形的曲线具有在坐标原点自相交的点,因而本例中的问题是求曲线闭路的面积.因为当 $t=0$ 及 $t=2$ 时, $x=y=0$,则 $0 \le t \le 2$.

利用 6.2 节的公式(6),得到

$$P = \frac{1}{2}\int_0^2 (t^4 - 4t^3 + 4t^2)\,dt = \frac{1}{2}\left.\left(\frac{t^5}{5} - t^4 + \frac{4}{3}t^3\right)\right|_0^2 = \frac{8}{15}.$$

求由极坐标给出的曲线所围平面图形 Φ的面积

125 $\rho = \frac{p}{1-\cos\varphi},\ \varphi = \frac{\pi}{4},\ \varphi = \frac{\pi}{2}$.

根据 6.2 节的公式(3),得到

$$P = \frac{p^2}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{(1-\cos\varphi)^2} = \frac{p^2}{4}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \cot^2 \frac{\varphi}{2}\right) d\left(\cot \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$= \frac{p^2}{4}\left.\left(\cot \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{3}\cot^3 \frac{\varphi}{2}\right)\right|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{p^2}{4}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{3}\left((\sqrt{2}+1)^3 - 1\right)\right)$$

$$= \frac{p^2}{6}(4\sqrt{2} + 3).$$

126 $\rho = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi},\ 0 < \varepsilon < 1$(椭圆).

根据 6.2 节的公式(3)及第 3 章例 131 的解,有

$$P = \frac{p^2}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} = \frac{p^2}{2(1-\varepsilon^2)}\left(-\varepsilon \frac{\sin x}{1+\varepsilon\cos x} + \right.$$

$$\left.\left.\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}} \tan \frac{x}{2}\right) + \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left[\frac{x+\pi}{2\pi}\right]\right)\right|_0^{2\pi} = \frac{\pi p^2}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

127 $\rho = \frac{1}{\varphi},\ \rho = \frac{1}{\sin\varphi},\ 0 < \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

点集 $\left\{(\varphi,\rho) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{\varphi} \le \rho \le \frac{1}{\sin\varphi},\ 0 < \varphi \le \frac{\pi}{2}\right\}$ 在通常的意义下不是可求面积的平面

图形,因而 $P \overset{\text{def}}{=} \lim\limits_{\varepsilon\to+0} P(\varepsilon)$,其中

$$P(\varepsilon)=\frac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin^2\varphi}-\frac{1}{\varphi^2}\right)d\varphi=\frac{1}{2}\left(\cot\varepsilon-\frac{1}{\varepsilon}+\frac{2}{\pi}\right)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\left(\cot\varepsilon-\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

由于 $\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\left(\cot\varepsilon-\dfrac{1}{\varepsilon}\right)=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\dfrac{\varepsilon-\tan\varepsilon}{\varepsilon\tan\varepsilon}=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}\dfrac{-\frac{\varepsilon^3}{3}}{\varepsilon^2}=0$,则 $P=\lim\limits_{\varepsilon\to+0}P(\varepsilon)=\dfrac{1}{\pi}$.

128 $\rho=a\cos\varphi$, $\rho=a(\cos\varphi+\sin\varphi)$, $M\left(0,\dfrac{a}{2}\right)\in\Phi$.

圆 $\rho=a\cos\varphi$, $|\varphi|\le\dfrac{\pi}{2}$ 上的点关于极轴对称,而该圆周的半径等于$\dfrac{a}{2}$.当 $0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$ 时,成立不等式 $a\cos\varphi\sin\varphi<a(\cos\varphi+\sin\varphi)\sin\varphi$,由此不等式有,半圆 $\rho=a\cos\varphi$, $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$ 整个地包含在由圆周 $\rho=a(\cos\varphi+\sin\varphi)$, $-\dfrac{\pi}{4}\le\varphi\le\dfrac{3\pi}{4}$ 所围,位于极轴上方的那部分圆内,因而点 M(在极轴上且由条件属于图形 Φ)不可能属于点集

$$\left\{a\sin\varphi\cos\varphi\le\rho\sin\varphi\le a(\cos\varphi+\sin\varphi)\sin\varphi,\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}\right\}\subset\mathbb{R}^2.$$

因而,图形 Φ 是半圆 $\rho\le a\cos\varphi$, $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$ 面积为$\dfrac{\pi a^2}{8}$ 与圆 $\rho\le a(\cos\varphi+\sin\varphi)$, $-\dfrac{\pi}{4}\le\varphi\le\dfrac{3\pi}{4}$ 位于极轴下方部分 Φ_1 的联合,Φ_1 的面积 P_{Φ_1} 可用公式

$$P_{\Phi_1}=\frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}(\cos\varphi+\sin\varphi)^2\,d\varphi=\frac{a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}(1+\sin2\varphi)\,d\varphi=\frac{a^2}{2}\left(\varphi-\frac{\cos2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{4}}^{0}$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)$$

计算.这样 $P=\dfrac{\pi a^2}{8}+\dfrac{a^2}{2}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{a^2}{4}(\pi-1)$.

129 求由蔓叶线$\{\varphi=\sin\pi\rho,\ 0\le\rho\le1\}$所围平面图形的面积.

当 ρ 由 0 增到$\dfrac{1}{2}$时,角 φ 由 0 增到 1,而当 ρ 由$\dfrac{1}{2}$增到 1 时,角 φ 由 1 减到 0(图 65),因而,表达式

$$\frac{1}{2}\int_0^1\rho^2(\varphi)\,d\varphi+\frac{1}{2}\int_1^0\rho^2(\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^1\rho^2\varphi'(\rho)\,d\rho$$

确定了所求面积,取符号“-”.因为等式左边的第一项等于区域 OmB 的面积,而第二项等于扇形 OAB 的面积,取符号“-”,因而

$$P = -\frac{\pi}{2}\int_0^1 \rho^2 \cos\pi\rho \mathrm{d}\rho = -\frac{\pi}{2}\left(\rho^2\frac{\sin\pi\rho}{\pi}\Big|_0^1 - \frac{2}{\pi}\int_0^1 \rho\sin\pi\rho \mathrm{d}\rho\right) = \int_0^1 \rho\sin\pi\rho \mathrm{d}\rho$$

$$= \rho\frac{\cos\pi\rho}{\pi}\Big|_1^0 + \frac{1}{\pi}\int_0^1 \cos\pi\rho \mathrm{d}\rho = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi^2}\sin\pi\rho\Big|_0^1 = \frac{1}{\pi}.$$

130 求由曲线 γ 所围成平面图形的面积

$$\gamma = \left\{(\varphi, \rho) \in \mathbb{R}^2 : \rho = \frac{2at}{1+t^2}, \varphi = \frac{\pi t}{1+t}\right\}.$$

由条件 $\rho \geq 0$ 有 $t \geq 0$.由于当 $t = 0$ 时,$\rho = 0$ 且当 $t \to +\infty$ 时,$\rho \to 0$,则 $0 \leq t < +\infty$.因而

$$P = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \rho^2(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t = 2\pi a^2\int_0^{+\infty} \frac{t^2\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2(1+t)^2}.$$

借助于奥斯特罗格拉茨基方法进行积分,得到

$$P = 2\pi a^2\left(-\frac{t^2+t+2}{4(1+t^2)(1+t)} - \frac{1}{4}\arctan t\right)\Bigg|_0^{+\infty} = 2\pi a^2\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \pi a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right).$$

131 求由笛卡儿叶形线 $x^3 + y^3 = 3axy$ 所围平面图形的面积.

用参数表示笛卡儿叶形线,设 $y = tx$,则笛卡儿叶形线的参数方程具有形式

$$x = \frac{3at}{1+t^3},\quad y = \frac{3at^2}{1+t^3},\quad 0 \leq t < +\infty.$$

为计算面积,利用本章 6.2 节的公式(6),注意到

$$(x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\mathrm{d}t = x^2(t)\mathrm{d}\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right) = \frac{9a^2t^2}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t.$$

因而

$$P = \frac{9a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2\mathrm{d}t}{(1+t^3)^2} = \frac{3a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(1+t^3)}{(1+t^3)^2} = \frac{3}{2}a^2\frac{1}{1+t^3}\Bigg|_{+\infty}^0 = \frac{3}{2}a^2.$$

132 计算由方程 $x^4 + y^4 = a^2(x^2 + y^2)$ 给出的封闭曲线所围的平面图形的面积.

转换成极坐标

$$x = \rho\cos\varphi,\quad y = \rho\sin\varphi.$$

由于曲线关于坐标轴对称,则 $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.所围平面图形的曲线的方程具有形式 $\rho^2 = \dfrac{a^2}{\sin^4\varphi + \cos^4\varphi}$.

利用本章 6.2 节的公式(3),注意到例 23 的解,得到

$$P = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\sin^4\varphi + \cos^4\varphi} = \frac{a^2}{2}\cdot 2\sqrt{2}\pi = \pi\sqrt{2}a^2.$$

133 计算由方程 $x^4 + y^4 = ax^2y$ 给出的曲线所围成的平面图形的面积.

用参数方程表示曲线,设 $y = tx$.则

$$x = a\frac{t}{1+t^4},\ y = a\frac{t^2}{1+t^4},\ y \geq 0 .$$

变量 x 和 y 当 $t=0$ 时为零,而在 $t\to+\infty$时趋于零,而曲线

$$\gamma = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x = a\frac{t}{1+t^4}, y = a\frac{t^2}{1+t^4}, t \in \mathbf{R}\right\}$$

关于 Oy 轴对称.因而,平面图形由位于 xOy 平面上方的两个关于 Oy 轴对称的回线所围,因而所求面积等于其中一个回线所围平面图形面积的两倍,即

$$P = \int_0^{+\infty}(x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}x^2(t)\mathrm{d}\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right) = a^2\int_0^{+\infty}\frac{t^2\mathrm{d}t}{(1+t^4)^2} .$$

借助于代换 $y=\frac{1}{z}$容易确信下面等式成立

$$\int_0^{+\infty}\frac{y^m\mathrm{d}y}{(1+y^4)^n} = \int_0^{+\infty}\frac{y^{4n-m-2}}{(1+y^4)^n}\mathrm{d}y, n \geq 1, m \geq 0, \tag{1}$$

由此有

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{t^2\mathrm{d}t}{(1+t^4)^2} = \int_0^{+\infty}\frac{t^4\mathrm{d}t}{(1+t^4)^2} = -\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}t\mathrm{d}\left(\frac{1}{1+t^4}\right)$$

$$= -\frac{t}{4(1+t^4)}\bigg|_0^{+\infty} + \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} .$$

由于 $\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^4} = \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{t^2\mathrm{d}t}{1+t^4}$(根据等式(1)),则

$$I = \frac{1}{8}\int_0^{+\infty}\frac{1+t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t = \frac{1}{8}F(t)\bigg|_0^{+\infty},$$

其中当 $t\neq 0$ 时,$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{t^2-1}{t\sqrt{2}} + \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\operatorname{sgn} t$;而 $F(0)=0$(参见第 3 章例 20).最后得到

$$I = \frac{\pi}{8\sqrt{2}},\ P = \frac{\pi a^2}{8\sqrt{2}} .$$

在借助 6.3 节公式(1)和(2)求解计算物体的体积的例题之前,考虑两个证明的例子,同时得到计算物体体积的有用公式.

134 证明:曲边梯形

$$\Phi = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

绕 Oy 轴旋转而成的物体 T 的体积 V 等于

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x,$$

其中 $f:[a, b]\to\mathbf{R}$ 为连续函数.

设 $\Pi = \{x_0 = a, x_1, \cdots, x_n = b\}$ 为区间 $[a, b]$ 的任意分割. 在每一个小区间 $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, \cdots, n-1)$ 上考虑两个矩形, 两者均以区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 为底边, 侧边等于 m_i 和 M_i, 其中

$$m_i = \min_{x_i \le x \le x_{i+1}} \{f(x)\},\quad M_i = \max_{x_i \le x \le x_{i+1}} \{f(x)\}.$$

同一类型的矩形的联合构成阶梯式图形. 其中之一在图形 Φ 的内部, 而另一个在外部. 当这些阶梯形绕 Oy 轴旋转时, 得到两个可求体积 T_1 和 T_2, 它们由圆柱体构成.

T_1 和 T_2 的体积分别等于

$$V_{T_1} = \sum_{i=0}^{n-1} \pi m_i (x_{i+1}^2 - x_i^2) = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi m_i \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \Delta x_i,\quad V_{T_2} = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi M_i \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \Delta x_i.$$

考虑函数 $\varphi: x \mapsto 2\pi x f(x)$ $(a \le x \le b)$. 因为 $\varphi \in R[a, b]$, 则 $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \Pi$: $\overline{S}_\Pi(\varphi) - \underline{S}_\Pi(\varphi) < \frac{\varepsilon}{2}$, 其中 $\overline{S}_\Pi(\varphi) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} 2\pi M_i x_{i+1} \Delta x_i$, $\underline{S}_\Pi(\varphi) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} 2\pi m_i x_i \Delta x_i$.

由显然的等式

$$V_{T_1} = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi m_i x_i \Delta x_i + \sum_{i=0}^{n-1} \pi m_i \Delta x_i^2 = \underline{S}_\Pi(\varphi) + \sum_{i=0}^{n-1} \pi m_i \Delta x_i^2,$$

$$V_{T_2} = \sum_{i=0}^{n-1} 2\pi M_i x_{i+1} \Delta x_i - \sum_{i=0}^{n-1} \pi M_i \Delta x_i^2 = \overline{S}_\Pi(\varphi) - \sum_{i=0}^{n-1} \pi M_i \Delta x_i^2.$$

可得 $V_{T_2} - V_{T_1} = \overline{S}_\Pi(\varphi) - \underline{S}_\Pi(\varphi) - \gamma_n$, 其中 $\gamma_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \pi(M_i + m_i)\Delta x_i^2$. 估计 γ_n, 得到 $|\gamma_n| \le 2\pi M(b-a) d(\Pi)$, 其中 $M = \max\limits_{a \le x \le b} \{f(x)\}$, $d(\Pi) = \max\limits_{0 \le i \le n-1} \Delta x_i$.

注意到不等式 $\overline{S}_\Pi(\varphi) - \underline{S}_\Pi(\varphi) < \frac{\varepsilon}{2}$ 且选取这样的分割 Π, 使得满足不等式 $2\pi M(b-a) d(\Pi) < \frac{\varepsilon}{2}$, 得到不等式 $V_{T_2} - V_{T_1} < \varepsilon$, 由此可得 T 是可积体(根据包含关系 $T_1 \subset T \subset T_2$).

由于 $\lim\limits_{d(\Pi) \to 0} V_{T_1} = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$, $\lim\limits_{d(\Pi) \to 0} V_{T_2} = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$, 则 $V = 2\pi \int_a^b x f(x)\,dx$.

135　证明由图形

$$\Phi = \{(\varphi, \rho) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le \alpha \le \varphi \le \beta \le \pi,\ \rho = \rho(\varphi), \rho \ge 0\},\ \rho \in C[\alpha, \beta],$$

绕极轴旋转而成的物体 T 的体积 V 等于

$$V = \frac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta \rho^3(\varphi) \sin\varphi \, d\varphi. \tag{1}$$

设 $\Pi = \{\varphi_0 = \alpha, \varphi_1, \cdots, \varphi_n = \beta\}$ 为区间 $[\alpha, \beta]$ 的任意分割, 而 Φ_i 是由射线 $\varphi = \varphi_i$, $\varphi = \varphi_{i+1}$ 及曲线段 $\varphi \mapsto \rho(\varphi)$ $(\varphi_i \le \varphi \le \varphi_{i+1})$ 围成的平面图形(图 66).

图　66

记 $M_i = \max\limits_{\varphi_i \le \varphi \le \varphi_{i+1}} \{\rho(\varphi)\}$, $m_i = \min\limits_{\varphi_i \le \varphi \le \varphi_{i+1}} \{\rho(\varphi)\}$.考虑两个物体 T_1 与 T_2,它们分别由半径为 M_i 和 m_i,中心角为 $\Delta\varphi = \varphi_{i+1} - \varphi_i$ $(i = 0, \cdots, n-1)$的扇形绕极轴旋转而成的旋转体.由 T, T_1 和 T_2 的定义有包含关系 $T_2 \subset T \subset T_1$.

计算物体 T_1 和 T_2 的体积,利用几何中熟知的球心角体体积的计算公式 $V = \dfrac{2}{3}\pi R^2 h$,其中 h 为球截形的高,R 为球半径,有

$$V_{T_1} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2}{3}\pi M_i^3 (\cos\varphi_i - \cos\varphi_{i+1}) = \frac{4}{3}\pi \sum_{i=0}^{n-1} M_i^3 \sin\frac{\varphi_i + \varphi_{i+1}}{2} \sin\frac{\Delta\varphi}{2},$$

$$V_{T_2} = \frac{4}{3}\pi \sum_{i=0}^{n-1} m_i^3 \sin\frac{\varphi_i + \varphi_{i+1}}{2} \sin\frac{\Delta\varphi}{2}.$$

记 $\dfrac{\varphi_i + \varphi_{i+1}}{2} = \bar\varphi_i$, $\sin\hat\varphi_i = \max\limits_{\varphi_i \le \varphi \le \varphi_{i+1}} \{\sin\varphi\}$, $\sin\check\varphi_i = \min\limits_{\varphi_i \le \varphi \le \varphi_{i+1}} \{\sin\varphi\}$,考虑体积之差

$$V_{T_1} - V_{T_2} = \frac{4}{3}\pi \sum_{i=0}^{n-1} (M_i^3 - m_i^3) \sin\bar\varphi_i \sin\frac{\Delta\varphi}{2}.$$

由不等式

$$(M_i^3 - m_i^3)\sin\bar\varphi_i \le M_i^3 \sin\hat\varphi_i - m_i^3 \sin\check\varphi_i,\ \sin\frac{\Delta\varphi}{2} < \frac{\Delta\varphi}{2},$$

有不等式

$$V_{T_1} - V_{T_2} < \frac{2\pi}{3} \sum_{i=0}^{n-1} (M_i^3 \sin\hat\varphi_i - m_i^3 \sin\check\varphi_i)\Delta\varphi = \overline{S}_\Pi(f) - \underline{S}_\Pi(f),$$

其中 $f: \varphi \mapsto \dfrac{2\pi}{3}\rho^3(\varphi)\sin\varphi\ (\alpha \le \varphi \le \beta)$为 $[\alpha, \beta]$上的连续函数,因为 $f \in R[\alpha, \beta]$,则 $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \Pi$: $0 \le \overline{S}_\Pi(f) - \underline{S}_\Pi(f) < \varepsilon$,因而 $V_{T_1} - V_{T_2} < \varepsilon$.这样,物体 T 是可积体,而其体积可用公式(1)计算,因为

$$\lim_{d(\Pi)\to 0} V_{T_1} = \lim_{d(\Pi)\to 0} V_{T_2} = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta \rho^3(\varphi)\sin\varphi \, d\varphi.$$

计算由曲面所围立体的体积.

136 旋转抛物面,底部面积等于 S,高等于 H.

利用 6.3 节的公式(2).旋转抛物曲面由方程 $z = x^2 + y^2$ 给出,而平面 $z = c(0 < c < H)$与物体的垂直截面为圆 $x^2 + y^2 \le c$.这样,由曲面 $z = x^2 + y^2$ 所围的物体的截面的集合是半径为 z 的圆的集合,其面积 $P(z)$等于 πz.根据本章 6.3 节的公式(2)及条件 $\pi H = S$,得到

$$V = \pi \int_0^H z \, dz = \frac{\pi H^2}{2} = \frac{SH}{2}.$$

137 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, $z = \pm c$.

物体由单叶双曲面及平面 $z=\pm c$ 所围.由物体关于平面 xOy 的对称性,只要计算位于半空间 $z\geq 0$ 部分的物体的体积,再把结果乘 2.

在平面 $z=\alpha\ (0<\alpha<c)$ 对物体的垂直截口处,得到椭圆 $\dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\dfrac{\alpha^2}{c^2}}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\dfrac{\alpha^2}{c^2}}\right)^2}=1$,根据例 119,物体横截面的面积等于 $\pi ab\left(1+\dfrac{z^2}{c^2}\right)$.利用本章 6.3 节公式(2),得到

$$V=2\int_0^c P(z)\,\mathrm{d}z=2\pi ab\int_0^c\left(1+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z=\frac{8}{3}\pi abc.$$

138 $x^2+y^2+z^2=a^2,\ x^2+y^2=ax$.

物体由圆柱面和两块球面所围成,而平面 xOy 把它分成两相等的部分.因而考虑在半空间 $z\geq 0$ 的部分.该部分与垂直于 Ox 轴的截面是曲边梯形,其面积 $P(x)$ 由公式

$$P(x)=2\int_0^{\sqrt{ax-x^2}}\sqrt{(a^2-x^2)-y^2}\,\mathrm{d}y$$

计算,则利用 6.3 节的公式(2)得到所求体积

$$V=2\int_0^a P(x)\,\mathrm{d}x.$$

首先计算 $P(x)$,在积分中作变量代换 $t=\arcsin\dfrac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}$,则

$$P(x)=2\int_0^{\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}}(a^2-x^2)\cos^2 t\,\mathrm{d}t=(a^2-x^2)\left(\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}+\frac{\sqrt{ax}}{a+x}\right).$$

把所得的 $P(x)$ 代入计算体积 V 的公式,得到

$$V=2\int_0^a(a^2-x^2)\left(\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}+\frac{\sqrt{ax}}{a+x}\right)\mathrm{d}x=2(I_1+I_2),$$

其中

$$I_1=\int_0^a(a^2-x^2)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\,\mathrm{d}x,\quad I_2=\int_0^a(a-x)\sqrt{ax}\,\mathrm{d}x=\frac{4}{15}a^3.$$

在积分 I_1 中作变量代换 $x=a\tan^2\varphi\ \left(0\leq\varphi\leq\dfrac{\pi}{4}\right)$,得到

$$I_1=a^3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\varphi(1-\tan^4\varphi)\,\mathrm{d}(\tan^2\varphi)=a^3\left(\varphi\left(\tan^2\varphi-\frac{\tan^6\varphi}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan^2\varphi-\frac{\tan^6\varphi}{3}\right)\mathrm{d}\varphi\right)$$

$$=a^3\left[\frac{\pi}{6}-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2\varphi}-1\right)\mathrm{d}\varphi+\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan^4\varphi-\tan^2\varphi+1)\,\mathrm{d}(\tan\varphi)-\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\right.$$

$$= a^3\left(\frac{\pi}{3} - 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) + 1\right) = \frac{a^3}{3}\left(\pi - \frac{32}{15}\right).$$

最后有

$$V = 2a^3\left(\frac{4}{15} + \frac{\pi}{3} - \frac{32}{45}\right) = \frac{2}{3}a^3\left(\pi - \frac{4}{3}\right).$$

139 **求由函数曲线** $x^2 + (y - b)^2 = a^2\ (|x| \leqslant a, 0 < a < b)$ **绕** Ox **轴旋转而成的曲面所包围的物体的体积.**

旋转圆周半径为 a, **中心为点** $(0, b)$, **具有二条对称轴**: Oy **轴和直线** $y = b$. **关于直线** $y = b$ **的上、下两部分的圆周的方程分别具有形式**

$$y_B = b + \sqrt{a^2 - x^2},\quad y_H = b - \sqrt{a^2 - x^2},\quad |x| \leqslant a.$$

用 6.3 **节的公式** (1), **得到**

$$V = \pi\int_{-a}^{a}(y_B^2 - y_H^2)\,dx = 8\pi b\int_0^a\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 8\pi a^2 b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt = 2\pi^2 a^2 b.$$

140 **求由函数曲线** $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)\ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ **及** $y = 0$ **旋转所得曲面所围成的物体的体积.**

1) **绕** Ox **轴**; 2) **绕** Oy **轴**; 3) **绕直线** $y = 2a$.

1) **利用** 6.3 **节公式** (1), **得到**

$$V = \pi\int_0^{2\pi a} y^2\,dx = \pi a^3\int_0^{2\pi}(1 - \cos t)^3\,dt = 8\pi a^3\int_0^{2\pi}\sin^6\frac{t}{2}\,dt$$

$$= 16\pi a^3\int_0^{\pi}\sin^6 z\,dz = 32\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 z\,dz = 32\pi a^3\,\frac{5!!}{6!!}\cdot\frac{\pi}{2} = 5\pi^2 a^3$$

(**这里用到例** 43 **的解**).

2) **体积用例** 134 **中所证明的公式计算**

$$V = 2\pi\int_0^{2\pi a} xy\,dx = 2\pi a^3\int_0^{2\pi}(t - \sin t)(1 - \cos t)^2\,dt$$

$$= 2\pi a^3\left(\int_0^{2\pi} t(1 - \cos t)^2\,dt - \int_0^{2\pi}\sin t(1 - \cos t)^2\,dt\right) = 2\pi a^3\int_0^{2\pi} t(1 - \cos t)^2\,dt$$

$$= 2\pi a^3\int_0^{2\pi} t\left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{\cos 2t}{2}\right)dt = 3\pi a^3\int_0^{2\pi} t\,dt = 6\pi^3 a^3$$

(**这里注意到了等式** $\int_0^{2\pi}\sin t(1 - \cos t)^2\,dt = \int_{-\pi}^{\pi}\sin t(1 - \cos t)^2\,dt = 0$, $\int_0^{2\pi}\left(-2\cos t + \frac{\cos 2t}{2}\right)dt = 0$).

3) **转换到新的坐标系** $y_1 = y - 2a$, $x_1 = x$. **此时得到** $V = V_1 - V_2$, **其中** V_1 **是高为**

$2\pi a$, 底部半径为 $2a$ 的圆柱体的体积, 而体积 V_2 由下面的公式计算

$$V_2 = \pi\int_0^{2\pi a} y_1^2\,dx = \pi a^3\int_0^{2\pi}\left((1-\cos t)^2 - 4(1-\cos t)+4\right)(1+\cos t)\,dt = \pi^2 a^3 .$$

由于 $V_1 = 8\pi^2 a^3$, 则 $V = 7\pi^2 a^3$.

141 求由循环曲线 $\gamma = \{x = 2t - t^2,\ y = 4t - t^3,\ t\in \mathbf{R}\}$所围成的平面图形旋转所得物体的体积 .

1) 绕 Ox 轴转; 2) 绕 Oy 轴转 .

1) 由于当 $t = 0$ 及 $t = 2$ 时, $x = y = 0$, 所以 $0\le t\le 2$.当参数 t 由 0 增至 1 时, 变量 x 也由 0 增至 1, 而当 t 由 1 增到 2 时, 变量 x 由 1 减至 0, 因而

$$V = -\pi\int_1^2 y^2\,dx - \pi\int_0^1 y^2\,dx = -\pi\int_0^2 y^2\,dx = 2\pi\int_0^2 (t-1)(16t^2 - 8t^4 + t^6)\,dt = \frac{64}{35}\pi .$$

2) 为求体积利用例 134 的公式, 并注意到在解情况 1)时的理由 .则得到

$$V = -2\pi\int_1^2 xy\,dx - 2\pi\int_0^1 xy\,dx = -2\pi\int_0^2 xy\,dx$$

$$= -2\pi\int_0^2 (2t - t^2)(4t - t^3)2(1-t)\,dt = \frac{64}{105}\pi .$$

142 求由隐函数$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$所围平面图形旋转而成的物体的体积: 1) 绕 Ox 轴; 2) 绕 Oy 轴; 3) 绕直线 $y = x$.

1) 转换至极坐标 $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$.曲线方程具有形式 $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}\left(|\varphi - k\pi|\le \frac{\pi}{4},\ k = 0, 1\right)$.注意到曲线关于极轴及直线 $\rho\cos\varphi = 0$ 对称, 利用例 135 的解答 这样得到

$$V = \frac{4}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^3\cos^{\frac{3}{2}}2\varphi\sin\varphi\,d\varphi = \frac{4\pi a^3}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}(2\cos^2\varphi - 1)^{\frac{3}{2}}\,d(\cos\varphi)$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\int_1^{\sqrt{2}}(t^2-1)^{\frac{3}{2}}\,dt = \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\left(\frac{t}{4}(t^2-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{8}t\sqrt{t^2-1} + \frac{3}{8}\ln\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)\right)\Bigg|_1^{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4\pi a^3}{3\sqrt{2}}\left(\frac{3}{8}\ln(1+\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{8}\right) = \frac{\pi a^3}{4}\left(\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2}) - \frac{2}{3}\right) .$$

2) 取射线 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 作为坐标系(ρ', θ)的极轴(图 67), 则 $\rho'(\theta) = \rho(\varphi)$, $\theta = -\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \varphi - \frac{\pi}{2}$.

现在用例 135 中证明的公式, 注意到平面图形对称且 $\sin\theta < 0$.有

$$V=\frac{4\pi}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}}(\rho'(\theta))^{3}\ |\sin\theta|\ \mathrm{d}\theta=\frac{4\pi a^{3}}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}}\left|\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{2}\right)\right|\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{4\pi a^{3}}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos^{\frac{3}{2}}2\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{4\pi a^{3}}{3\ \ 2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}(1-2\sin^{2}\varphi)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}(\ \ 2\sin\varphi)$$

$$=\frac{4\pi a^{3}}{3\ \ 2}\int_{0}^{1}(1-t^{2})^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t=\frac{4\pi a^{3}}{3\ \ 2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{4}z\,\mathrm{d}z=\frac{4\pi a^{3}}{3\ \ 2}\cdot\frac{3\,!!}{4\,!!}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^{2}a^{3}}{4\ \ 2}.$$

68

67

3) 取射线 $\varphi=\frac{\pi}{4}$ 作为系统 (ρ',θ) 的极(图 68) .此时有 $\rho'(\theta)=\rho(\varphi)$, $\theta=\varphi-\frac{\pi}{4}$.注意到图形的对称性及不等式 $\sin\theta\leq 0$,根据例 135 的公式,得到

$$V=\frac{4\pi}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(\rho'(\theta))^{3}\ |\sin\theta|\ \mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{4\pi a^{3}}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^{\frac{3}{2}}2\varphi\left|\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)\right|\mathrm{d}\varphi.$$

在积分中作代换 $\varphi-\frac{\pi}{4}=-t$.这时有

$$V=\frac{4\pi a^{3}}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}}2t\sin t\,\mathrm{d}t=\frac{8\ \ 2\pi a^{3}}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{1}{2}}t\sin^{\frac{5}{2}}t\,\mathrm{d}(\sin t)=\frac{8\ \ 2}{3}\pi a^{3}\int_{0}^{1}z^{\frac{5}{2}}(1-z^{2})^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}z.$$

作变换 $\frac{1}{z^{2}}-1=u^{4}$ 之后,得 $V=\frac{16\ \ 2}{3}\pi a^{3}I$,其中

$$I=\int_{0}^{+\infty}\frac{u^{4}}{(1+u^{4})^{3}}\mathrm{d}u=\int_{0}^{+\infty}\frac{u^{6}}{(1+u^{4})^{3}}\mathrm{d}u\ (\text{根据例 133 的解}),$$

分部积分,得到

$$I=-\frac{1}{8}\cdot\frac{u^{3}}{(1+u^{4})^{2}}\bigg|_{0}^{+\infty}+\frac{3}{8}\int_{0}^{+\infty}\frac{u^{2}\,\mathrm{d}u}{(1+u^{4})^{2}}=\frac{3}{8}\int_{0}^{+\infty}\frac{u^{2}\,\mathrm{d}u}{(1+u^{4})^{2}}.$$

在解例 133 时证明了 $\int_{0}^{+\infty}\frac{u^{2}\,\mathrm{d}u}{(1+u^{4})^{2}}=\frac{\pi}{8\ \ 2}$.因而

$$I = \frac{3\pi}{64\sqrt{2}},\ V = \frac{\pi^2 a^3}{4}.$$

练 习 题

计算曲线 γ的长度,如果:

105 $\gamma = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 : y = \ln x,\ \sqrt{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{8}\}$. **106** $\gamma = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 : y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}, 0 \leqslant x \leqslant x_0, a > 0\}$.

107 $\gamma = \left\{(x, y) \in \mathrm{R}^2 : x = a\ln\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}, b \leqslant y \leqslant a\right\}$.

108 $\gamma = \left\{(x, y) \in \mathrm{R}^2 : x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, |x| \leqslant a\right\}$.

109 $\gamma = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 : x = a\cos^5 t, y = a\sin^5 t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}$.

110 $\gamma = \{(x, y, z) \in \mathrm{R}^3 : x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt, 0 \leqslant t \leqslant t_0\}$.

111 $\gamma = \{(x, y, z) \in \mathrm{R}^3 : x^2 = 3y, 2xy = 9z, 0 \leqslant x \leqslant x_0\}$.

112 $\gamma = \left\{(x, y, z) \in \mathrm{R}^3 : y = a\arcsin\frac{x}{a}, z = \frac{a}{4}\ln\frac{a + x}{a - x}, 0 \leqslant x \leqslant x_0\right\}$.

113 $\gamma = \{(x, y, z) \in \mathrm{R}^3 : x = at, y = \sqrt{3ab}\,t^2, z = 2bt^3, 0 \leqslant t \leqslant t_0\}$.

114 求由方程 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$,给出的曲线由点$(0, a)$到点$(a, 0)$的长度.

115 抛物线 $\gamma = \{(x, y) \in \mathrm{R}^2 : 4ay = x^2, x \in \mathrm{R}\}$沿 Ox 轴滚动.证明:其焦点由悬链线

$$\gamma = \left\{(x, y) \in \mathrm{R}^2 : y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}, x \in \mathrm{R}\right\}$$

刻画.

求平面图形 Φ的面积,Φ由下述曲线围成:

116 星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$. **117** 由方程 $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$ 给定的函数的图形.

118 椭圆$(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2$ 垂足曲线的图形.

119 函数 $y^2 = 4ax, x^2 + y^2 = 2ax, 2x - y = 4a$ 的位于 Ox 轴上方的图形.

120 环索线$(a - x)y^2 = (a + x)x^2$ 的回线.

121 由方程$(y - x)^2 = x^3$ 给出的函数的图形与 Ox 轴的一段.

122 由方程 $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1$ 给出的函数的图形与坐标轴.

123 椭圆$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 位于圆 $x^2 + y^2 = ab$之外的部分.

124 由方程 $\rho = a\cos 4\varphi$给出的曲线.

125 等腰双曲线 $\rho^2\cos 2\varphi = a^2, -\varphi_0 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_0$.

126 由方程 $\rho^2\cos 2\varphi = 4a^2\cos^4\varphi$及 $\rho^2\cos 2\varphi = a^2$ 给出的函数的图形.

127 由方程 $x^7 + y^7 = ax^3y^3$ 所确定的封闭曲线.

128 由方程 $x^2y^2 = 4(x - 1)$所给出的函数图形与经过图形拐折的直线.

129 求曲边四边形的面积,该四边形属于两椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1,\ \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} \leqslant 1.$$

求由下列曲线旋转而成的曲面所围立体的体积:

130 $\gamma=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : y=\sin x, 0\leq x\leq\pi\}$绕 Ox 轴 .

131 $\gamma=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : (2a-x)y^2=x^3, 0\leq x<a\leq 2\}$绕 Ox 轴 .

132 $\gamma=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t), 0\leq t\leq 2\pi a\}$绕与之相交的直线 $y=ka(0<k<2)$(计算所得两个旋转体的体积) .

133 $\gamma=\left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 : y=\dfrac{4a^3}{x^2+4a^2}, x\in\mathbf{R}\right\}$ 绕自己的渐近线 .

134 由方程 $\rho^3=a^3\cos 3\varphi$所确定的曲线绕极轴旋转 .确定由落于第三象限的循环线所围图形旋转所得立体的体积 .

135 对应于中心角为 2α,半径为 R 的圆周段,绕自己的弦旋转 .求旋转体体积 .

136 边长为 a的立方体绕自己的对角线旋转 .确定由正方体其中的一边旋转所得立体的体积 .

137 正方体边长为 a.确定由正方体的其中一面绕其相对一面的对角线旋转所得立体的体积 .

138 由方程 $x^4+y^4=2axy^2$ 所确定的曲线绕 Oy 轴旋转 .确定由旋转曲面所围立体的体积:

求由曲面所围立体的体积:

139 $S=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : x^2+4y^2=8z, x^2+4y^2=1, z=0\}$.

140 $S=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : y^2=2p(a-x), x-z=0, x-2z=0\}$.

141 $S=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : z^2=(a-x-y)a, x=0, y=0, z=0\}$.

142 $S=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : z^2=b(a-x), x^2+y^2=ax\}$.

143 $S=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 : y^2+z^2=a^2\operatorname{ch}^2\dfrac{x}{a}, -b\leq x\leq b\right\}$.

144 在半径为 r的圆柱体(杯子)内盛有水,轴心向水平线倾斜角度 α,被水覆盖部分的底部具有中心角 2φ.求水的体积 .

145 三条相互垂直的直线是三个半径为 r的圆柱体的轴心线 .确定三个圆柱体公共部分的体积 .

7 定积分在力学和物理学中的应用

7.1 加性区间函数

如果包含于固定的区间$[a,b]$内的任一区间,对应于确定的物理或几何量 $P([\alpha,\beta])$,则 P 称为区间函数 .

定义 函数 $P:[\alpha,\beta]\mapsto P([\alpha,\beta]), [\alpha,\beta]\subset[a,b]$称为是可加的,如果

$$\forall\gamma\in(\alpha,\beta)\quad P([\alpha,\beta])=P([\alpha,\gamma])+P([\gamma,\beta]) .$$

定理 设 $P:[\alpha,\beta]\mapsto P([\alpha,\beta]), [\alpha,\beta]\subset[a,b]$,为可加函数,而 $p:[a,b]\to\mathbf{R}$, $p\in C[a,b]$,是这样的函数,使 $P([x_0,x])=p(x-x_0)+o((x-x_0)), x\to x_0$, $\forall x_0\in[a,b]$.则成立公式

$$P([a,b])=\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x . \tag{1}$$

7.2　静力矩、转动惯量、平面曲线及图形质心坐标的计算

设$\{M_j(x_j, y_j)\}$为 xOy 平面上带质量 $m_j(j=1,\cdots,n)$的质点系统,量

$$M_x=\sum_{j=1}^{n} m_j y_j,\quad I_x=\sum_{j=1}^{n} m_j y_j^2,$$

分别称为该系统关于 Ox 轴的静力矩和转动惯量.

如果在光滑曲线 $\gamma=\{(x,y)\in \mathbf{R}^2: y=f(x), a\leq x\leq b\}$均匀地分布有线密度为 $\mu\equiv 1$ 的质量,则下列量分别称为曲线 γ 关于坐标轴的静力矩和转动惯量

$$M_x=\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x,\quad M_y=\int_a^b x\sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

$$I_x=\int_a^b f^2(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x,\quad I_y=\int_a^b x^2\sqrt{1+f'(x)^2}\,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

而其质心 $C(\xi,\eta)$的坐标按公式计算

$$\xi=\frac{M_y}{l},\ \eta=\frac{M_x}{l}, \tag{3}$$

其中 l 为曲线 γ 的长度.

假设曲边梯形 Φ位于 Ox 轴的一侧,且是均匀的.该曲边梯形关于 Ox 轴及 Oy 轴的静力矩及转动惯量分别是下列量

$$M_x=\frac{\operatorname{sgn} f(x)}{2}\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x,\quad M_y=\operatorname{sgn} f(x)\int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{4}$$

$$I_x=\frac{1}{3}\int_a^b f^2(x)\,|f(x)|\,\mathrm{d}x,\quad I_y=\int_a^b x^2\,|f(x)|\,\mathrm{d}x, \tag{5}$$

而其质心 $C(\xi,\eta)$的坐标按公式

$$\xi=\frac{M_y}{P},\ \eta=\frac{M_x}{P} \tag{6}$$

计算,其中 P 为梯形的面积.

如果均匀的平面图形具有对称性,则其质心落在对称轴上.

143　确定平面图形质心的坐标

$$\Phi=\left\{(x,y)\in \mathbf{R}^2: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1, 0\leq x\leq a, 0\leq y\leq b\right\}.$$

依次利用公式(4)和(6),得到

$$M_x=\frac{b^2}{2}\int_0^a\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x=\frac{b^2}{2}\left(x-\frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a=\frac{ab^2}{3},$$

$$M_y = b\int_0^a x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{ba^2}{3}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_a^0 = \frac{a^2 b}{3},$$

$$\xi = M_y\Big/\frac{\pi ab}{4} = \frac{4a}{3\pi},\quad \eta = M_x\Big/\frac{\pi ab}{4} = \frac{4b}{3\pi}$$

(由于图形 Φ 的面积等于 πab).

144 求由函数 $x \mapsto \frac{2ax-x^2}{a}$ $(0\leqslant x\leqslant 2a)$ 的图形及 Ox 轴所围的抛物形 Φ 的转动惯量 I_x 和 I_y.

根据公式(5),有

$$I_x = \frac{1}{3a^3}\int_0^{2a}(2ax-x^2)^3\,\mathrm{d}x = \frac{32}{105}a^4,\quad I_y = \int_0^{2a} x^2\left(2x-\frac{x^2}{a}\right)\mathrm{d}x = \frac{8}{5}a^4.$$

145 求半径为 a 的均匀半球的质心坐标.

Oz 轴是半球

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2, z \geqslant 0\}$$

的对称轴.因而质心位于该轴.考虑这样的球带,下底部距离 xOy 平面为 z,高为 $\mathrm{d}z$,把它看成高等于球带的带,底部等于球带底部的圆柱(圆周半径 $r=\sqrt{a^2-z^2}$),计算球带关于 xOy 平面的近似静力矩 $\mathrm{d}M$,它等于 $\pi(a^2-z^2)z\mathrm{d}z$.则

$$M = \pi\int_0^a z(a^2-z^2)\,\mathrm{d}z = \frac{\pi a^4}{4}.$$

由于半球的体积为 $\frac{2}{3}\pi a^3$,则

$$\zeta = \frac{3M}{2\pi a^3} = \frac{3}{8}a.$$

因而 $C(\xi,\eta,\zeta) = \left(0, 0, \frac{3}{8}a\right)$.

146 求水对于垂直壁的压力,该壁的形状为半圆形,半径为 a,其直径位于水的表面上.

用 $l(x)$ 记距离 AB 的距离为 x 的水平线段的长度(图 69).把到 AB 的距离分别为 x 和 $x+\mathrm{d}x$ 的两条水平线所夹的小块看成底为 $l(x)$,高为 $\mathrm{d}x$ 的矩形,可以近似计算该小块所受压力 $P([x, x+\mathrm{d}x])$.利用流体静力学原理,水对小块的压力等于小块的面积乘以浸于水中的深度,即

$$P([x, x+\mathrm{d}x]) \approx xl(x)\mathrm{d}x = 2x\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

根据 7.1 节的公式(1),有

图 69

$$P = 2\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_a^0 = \frac{2}{3}a^3 .$$

147　厚度为 h,半径为 r 的圆盘是由密度为 δ 的物质组成 .它每秒钟转动 n 圈 .为使它停下,需做多少功 ?

根据动能变化的原理,在某个时间段内动能的增量等于该时间段内作用于物体的力所做的功

$$T - T_0 = A,$$

这里 T 为在某时刻的动能, T_0 为物体的初始动能, A 为外力所做的功 .由于物体是固体,其内力所做的功为零 .

在这段时间物体停下,意味着 $T = 0$.因而, $T_0 = -A$,负号对应于消耗的功 .

在计算动能时,分割出直径为 $\rho(0 < \rho \leq r)$ 厚度为 $\mathrm{d}\rho$ 高为 h 的圆柱筒 .其体积等于 $2\pi h\rho\mathrm{d}\rho$,精确度为比 $\mathrm{d}\rho$ 更高阶的无穷小(图 70) .

图　70

到旋转轴的距离为 ρ 的圆盘上的点的线速度 v 等于 $\omega\rho$,其中 ω 为圆盘的角速度 .因为圆盘每秒转 n 圈,则 $\omega = 2\pi n\,\mathrm{rad/s}$.因而 $v = 2\pi n\rho$.圆柱筒的动能近似等于

$$\mathrm{d}T_0 = \frac{v^2}{2}\mathrm{d}m = \frac{1}{2}\omega^2\rho^2\,\mathrm{d}m = \pi\delta\omega^2 h\rho^3\,\mathrm{d}\rho .$$

根据定积分应用的一般方法,得到

$$T_0 = \pi\delta h\int_0^r \omega^2\rho^3\,\mathrm{d}\rho = 4\pi^3\delta n^2 h\int_0^r \rho^3\,\mathrm{d}\rho = \pi^3\delta n^2 hr^4 .$$

因而 $A = -T_0 = -\pi^3\delta n^2 hr^4$.

148　电荷相互排斥的力为$\frac{e_1e_2}{r^2}$,其中 e_1 和 e_2 为电荷量,而 r 为它们之间的距离 .求为使电荷 $e_2 = 1$ 从无穷远处移到接近到 e_1 的距离为 R 所要做的功 .

功的微元等于位移乘以力再乘以力的方向与位移方向的夹角的余弦,即 $\mathrm{d}A = F\cos\alpha\mathrm{d}r$(图 71) .在所考虑的情况下有 $\mathrm{d}A = F_2\,\mathrm{d}r\cos\pi = -F_2\,\mathrm{d}r = -\frac{e_1}{r^2}\mathrm{d}r$,因为 $F_2 = \frac{e_1}{r^2}$.根据定积分应用的一般方法,有

$$A = -e_1\int_\infty^R \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{e_1}{r}\Big|_\infty^R = \frac{e_1}{R} .$$

练　习　题

146　把均匀的矩形薄板用抛物线从 a 和 b 的方向分成两部分,抛物线的顶点与矩形的其中一个顶点重合,且经过矩形的相对的那个顶点 .求矩形上面部分 S_1 和下面部分 S_2 的质心 .

147　求由坐标轴及抛物线 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ 所围成的均匀图形的质心坐标 .

图　71

148　求由函数 $x \mapsto \frac{2}{1 + x^2}$ 及 $x \mapsto x^2\ (x \in \mathbb{R})$ 所围的均匀图形关于 Ox 轴的静力矩 .

149　求由方程 $y^2 = ax^3 - x^4$ 所确定的函数所围成的均匀图形的质心坐标.

150　求伯努利双纽线 $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ 的右边的回路所围均匀图形的质心的笛卡儿坐标.

151　求部分对数螺线 $\rho = ae^{\varphi}$ $\left(\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi\right)$ 的质心的笛卡儿坐标.

152　求圆锥侧面的转动惯量,圆锥底部的半径为 R,高为 H,绕其对称轴旋转.

153　求均匀圆锥的质心的位置.

154　圆台底部半径分别为 R 和 r,高为 h,密度为 μ.它作用于质量为 m 且位于圆锥顶点的质点的力为多少?

155　初始质量为 M 的水滴在重力作用下下落,且均匀地每秒蒸发掉质量 m.在起始运动到全部蒸发的时间内,重力作的功为多少?空气阻力不计.

156　三角形薄板,底 $a = 0.4$m,高 $h = 0.3$m,绕底边以常数角速度 $\omega = 5\pi$rad/s 旋转.如果其厚度为 $d = 0.002$m,而制造薄板的材料的密度为 $\mu = 2200$kg/m^3,求薄板的动能.

157　三角形薄板垂直地浸于水中,其底边位于水的表面.薄板的底边为 a,高为 h.

1) 计算水对薄板每一面的压力.

2) 如果反转薄板,使其顶点在水面而底边平行于水面,则压力增加几倍.

158　长为 l 的棒绕自己的一端旋转,每秒 n 圈,求在固定棒的点处的拉力的大小,如果单位长度的棒重为 σ,质量为 m,沿半径为 r 的圆周以角速度 ω 运动,其离心力等于 $mr\omega^2$.

159　长为 l、截面为 S、弹性系数为 E 的金属丝在负荷 f 的作用下增长量 Δl 等于 $\frac{fl}{ES}$.如果该金属丝垂直挂着,求它在自身重力作用下的增长量,金属丝的密度为 μ.

160　金属丝在负载 9.8g 之下伸长 0.01m.为使其伸长 0.04m,需要做多少功?

161　为装满直径为 1.2m,高为 1m 的圆锥体沙子,需要消耗多少功?沙子的密度 2000kg/m^3.

162　根据焦耳定律,直流电散发的热量等于 Rci^2t,其中 $c = 0.24$ 为常数,R 为电阻,t 为时间秒数,i 为电流.求交流电 $i = a\cos bt$ 所散发的热量.

163　根据托里切利定律,液体流出的速度等于 $\sqrt{2gh}$,其中 h 为水平面距孔的深度.确定水从顶点向下的圆锥形漏斗流出所需时间.圆锥的底面积为 P,高为 h,孔位于漏斗顶点,面积为 σ.

164　圆柱半径为 0.15m,高为 0.6m,充满空气,压强 $9.8 \cdot 10^4$g/m^2.在常压下,要使气体的体积减小一半,须做多大的功?

165　点沿 Ox 轴运动,起点为(1,0).其运动速度数量上等于横坐标,问在开始运动后 10s,动点位于何处?

8　斯蒂尔切斯积分

8.1　斯蒂尔切斯上积分和下积分、可积性准则

设 $f: I \to \mathbb{R}$ $(I = [a, b])$ 为在区间 I 上的有界函数,$\alpha: I \to \mathbb{R}$ 为在该区间上非降函数.$\Pi = \{a = x_0, x_1, \cdots, x_n = b\}$ 为区间 I 的任意分割.构造上、下积分和

$$\overline{S}_\Pi(f, \alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta\alpha_i, \quad \underline{S}_\Pi(f, \alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta\alpha_i,$$

其中

$$M_i = \sup_{x_i \le x \le x_{i+1}} \{ f(x) \}, \quad m_i = \inf_{x_i \le x \le x_{i+1}} \{ f(x) \}, \quad \Delta\alpha = \alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i),$$

且引入数

$$\overline{\int} f \mathrm{d}\alpha = \inf_{\{\Pi\}} \{ \overline{S}_\Pi (f, \alpha) \}, \quad \underline{\int} f \mathrm{d}\alpha = \sup_{\{\Pi\}} \{ \underline{S}_\Pi (f, \alpha) \},$$

分别称之为斯蒂尔切斯(Stieltjes)上、下积分 .

定义　如果$\overline{\int} f\mathrm{d}\alpha = \underline{\int} f \mathrm{d}\alpha$, 则上、下积分的公共的值称为函数 f 对函数 α(或者关于函数 α) 的斯蒂尔切斯积分, 并记为

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}\alpha(x) .$$

关于函数 α 在区间 $[a, b]$ 上斯蒂尔切斯可积的函数的全体的集合记为 $f \in S(\alpha)[a, b]$.

由该定义可知, 当 $\alpha(x) = x$ 时, 函数 f 在区间 I 上的斯蒂尔切斯积分与黎曼积分重合 .

在一般情况下, 函数 α 可能在 I 上间断 .函数 α 称为积分函数 .

定理(可积性准则)

$$f \in S(\alpha)[a, b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \Pi: 0 \le \overline{S}_\Pi (f, \alpha) - \underline{S}_\Pi (f, \alpha) < \varepsilon .$$

8.2　作为积分和极限的斯蒂尔切斯积分

设 Π 为区间 I 的任意分割, $d(\Pi) = \max\limits_{0 \le i \le n-1} \Delta x_i$.在每一个区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 上任取一点 ξ_i, 且构造

$$S_\Pi (f, \alpha) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta\alpha,$$

称之为斯蒂尔切斯积分和 .

我们定义 $\lim\limits_{d(\Pi) \to 0} S_\Pi (f, \alpha) \overset{\mathrm{def}}{=} I$, 如果

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: \forall \Pi \wedge d(\Pi) < \delta \Rightarrow | S_\Pi (f, \alpha) - I | < \varepsilon .$$

定理　如果

1) 当 $d(\Pi) \to 0 \ \exists \ \lim S_\Pi (f, \alpha)$, 则 $f \in S(\alpha)[a, b]$ 且

$$\lim_{d(\Pi) \to 0} S_\Pi (f, \alpha) = \int_a^b f(x) \mathrm{d}\alpha(x);$$

2) $f \in S(\alpha)[a, b]$, $\alpha \in C[a, b]$, 则 $\exists \lim\limits_{d(\Pi) \to 0} S_\Pi (f, \alpha) = \int_a^b f(x) \mathrm{d}\alpha(x)$.

该定理建立了斯蒂尔切斯积分的两个等价定义.

8.3 斯蒂尔切斯积分的基本性质

定理 1 如果

1) $f\in S(\alpha)[a,b]$, $g\in S(\alpha)[a,b]$, 则 $(f+g)\in S(\alpha)[a,b]$, $cf\in S(\alpha)[a,b]$, c 为常数, 并且

$$\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}\alpha(x)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x)+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\alpha(x),$$

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}\alpha(x)=c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x);$$

2) $f,g\in S(\alpha)[a,b]$, $f(x)\leq g(x)\ \forall x\in I$, 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x)\leq\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\alpha(x);$$

3) $f\in S(\alpha)[a,b]$ 且 $c\in(a,b)$, 则 $f\in S(\alpha)[a,c]\wedge f\in S(\alpha)[c,b]$, 并且

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x)+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x);$$

4) $f\in S(\alpha)[a,b]$ 且 $|f(x)|\leq M\ \forall x\in I$, 则

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x)\right|\leq M(\alpha(b)-\alpha(a));$$

5) $f\in S(\alpha_1)[a,b]$ 且 $f\in S(\alpha_2)[a,b]$, 则 $f\in S(\alpha_1+\alpha_2)[a,b]$, 并且

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}(\alpha_1+\alpha_2)(x)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\alpha_1(x)+\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\alpha_2(x);$$

6) $f\in S(\alpha)[a,b]$ 且 c 为正数, 则 $f\in S(c\alpha)[a,b]$, 并且

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}(c\alpha(x))=c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x).$$

应当指出, 在黎曼积分的情形下成立性质 3) 的逆命题: 如果 $f\in R[a,c]$ 及 $f\in R[c,b]$, 则 $f\in R[a,b]$.

对于斯蒂尔切斯积分, 由 $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x)$ 及 $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x)$ 的存在性, 一般来讲并不一定有 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x)$ 的存在性.

---

① 如果 α 间断, 则可能出现 $f\in S(\alpha)[a,b]$, 但 $\lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(f,\alpha)$ 不存在(参见例 154).

定理 2 设 $f\in S(\alpha)[a,b]$, $A\le f(x)\le B$ " $x\in[a,b]$, $\varphi\in C[A,B]$且 $g=\varphi\circ f$: $[a,b]\to\mathbb{R}$.则 $g\in S(\alpha)[a,b]$.

定理 3 如果 $f\in S(\alpha)[a,b]$且 $g\in S(\alpha)[a,b]$,则

1) $fg\in S(\alpha)[a,b]$;

2) $|f|\in S(\alpha)[a,b]$ 且 $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x)\right|\le\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}\alpha(x)$.

定理 4(分部积分公式) 设 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ 且积分$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)$, $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}f(x)$ 中存在其中某一个 .则另一个积分亦存在, 且成立公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)=f(x)g(x)\Big|_a^b-\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}f(x) .$$

8.4 斯蒂尔切斯可积函数类

定理 1 如果函数 f 在区间$[a,b]$上连续,则 $f\in S(\alpha)[a,b]$.

定理 2 如果函数 f 在区间$[a,b]$上单调,而 $\alpha\in C[a,b]$,则 $f\in S(\alpha)[a,b]$.

定理 3 如果 $f\in R[a,b]$,而 α在$[a,b]$上满足利普希茨条件,则 $f\in S(\alpha)[a,b]$.

设 $h:I\to\mathbb{R}$ 为区间 $I=[a,b]$上的有界变差函数, $f:I\to\mathbb{R}$ 为任意函数 .根据本章第 5 节的定理 4,函数 h 在区间 I 上可写成形式

$$h=\alpha-\beta,$$

其中 α和 β为在该区间非降的函数 .

定义 我们定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}h(x)\overset{\text{def}}{=}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x)-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\beta(x), \tag{1}$$

如果 $f\in S(\alpha)[a,b]$, $f\in S(\beta)[a,b]$,此时将写作 $f\in S(h)[a,b]$.

定理 4 如果 $f\in R[a,b]$, $\varphi\in R[a,b]$, $g(x)=y_0+\int_a^x\varphi(t)\,\mathrm{d}t$, $a\le x\le b$, y_0 为常数, 则 $f\in S(g)[a,b]$, 并且

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)=\int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x . \tag{2}$$

8.5 斯蒂尔切斯积分的计算

定理 1 设 $f\in C[a,b]$,而函数 g 是$[a,b]$上分段连续且具有在该区间上可积的导函

数,导函数在函数 g 的每一连续点存在.设 $x_0^* = a, x_1^*, \cdots, x_m^* = b$ 为函数 g 及其导函数 g' 的间断点,则成立公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x + f(a)(g(a+0) - g(a)) +$$

$$f(b)(g(b) - g(b-0)) + \sum_{k=1}^{m-1} f(x_k^*)(g(x_k^*+0) - g(x_k^*-0)). \qquad (1)$$

8.6 中值定理与斯蒂尔切斯积分的估计

定理 1 设 $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, $m \le f(x) \le M\ \forall x \in [a,b]$, $g: [a,b] \to \mathbb{R}$,在 $[a,b]$ 上非减且 $f \in S(g)[a,b]$.则成立公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) = \mu(g(b) - g(a)), \qquad (1)$$

其中 $m \le \mu \le M$.

推论 如果 $f \in C[a,b]$,则 $\exists\ \xi \in [a,b]$ 使得

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x) = f(\xi)(g(b) - g(a)). \qquad (2)$$

定理 2 如果 $f \in C[a,b]$ 且 $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ 为在 $[a,b]$ 上的有界变差函数,则成立估计式

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}g(x)\right| \le MV(g; a, b), \qquad (3)$$

其中 $M = \max\limits_{a \le x \le b} |f(x)|$, $V(g; a, b)$ 为函数 g 的全变差.

149 设函数 α 在 $[a,b]$ 上增, $a \le x_0 \le b$, α 在点 x_0 连续, $f(x_0) = 1$ 且 $f(x) = 0$,如果 $x \ne x_0$.证明: $f \in S(\alpha)[a,b]$ 且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x) = 0$.

由函数 α 在点 x_0 的连续性有

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0: \forall\ x \in S(x_0, \delta) \quad |\alpha(x) - \alpha(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

设 Π 为 $[a,b]$ 区间的分割,使得 $d(\Pi) < \delta$.如果点 x_0 对某 $0 \le i \le n-1$ 属于区间 $[x_i, x_{i+1}]$,则 $\overline{S}_\Pi(f,\alpha) = \alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_i) = \alpha(x_{i+1}) - \alpha(x_0) + \alpha(x_0) - \alpha(x_i) < \varepsilon$, $\underline{S}_\Pi(f,\alpha) = 0$,因而

$$0 \le \overline{S}_\Pi(f,\alpha) - \underline{S}_\Pi(f,\alpha) < \varepsilon \text{ 且 } f \in S(\alpha)[a,b].$$

由于对任何 $[a,b]$ 的分割 $\underline{S}_\Pi(f,\alpha) = 0$,则

$$\underline{\int} f\,\mathrm{d}\alpha = \sup_{(\Pi)}\{\underline{S}_\Pi(f,\alpha)\} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\alpha(x) = 0.$$

150 函数 $\beta_j:[-1,1]\to\mathrm{R}\ (j=1,2,3)$ 按下述方式定义:$\beta_j(x)=0$,如果 $x<0$,$\beta_j(x)=1$,如果 $x>0$,$\beta_1(0)=0$,$\beta_2(0)=1$,$\beta_3(0)=\dfrac{1}{2}$.

设 f 为 $[-1,1]$ 上的有界函数.

1) 证明:$f\in S(\beta_1)[-1,1]$ $f(+0)=f(0)$ 且此时有

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}\beta_1(x) = f(0).$$

2) 对 β_2 写出并证明类似的结果.

3) 证明:$f\in S(\beta_3)[-1,1]$ f 在 $x=0$ 点连续.

4) 设 f 在点 $x=0$ 连续.证明:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}\beta_1(x) = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}\beta_2(x) = \int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}\beta_3(x) = f(0).$$

1) 必要性.如果 $f\in S(\beta_1)[-1,1]$,则根据 8.3 节定理 1 的性质 3,

$$f\in S(\beta_1)[-1,0]\wedge f\in S(\beta_1)[0,1]\wedge\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}\beta_1(x)$$

$$=\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}\beta_1(x)+\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}\beta_1(x)=\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}\beta_1(x),$$

因为

$$\int_{-1}^{0} f(x)\mathrm{d}\beta_1(x) = 0.$$

由 $\int_{0}^{1} f(x)\mathrm{d}\beta_1(x)$ 的存在性有,$\forall\varepsilon>0$ 存在区间 $[a,b]$ 的这样的分割,使得

$$0\le\overline{S}_\Pi(f,\beta_1)-\underline{S}_\Pi(f,\beta_1)<\varepsilon.$$

由于如果 $i\neq0$,$\beta_1(x_{i+1})-\beta_1(x_i)=0$,且 $\beta_1(x_1)-\beta_1(x_0)=1$,则

$$0\le\overline{S}_\Pi(f,\beta_1)-\underline{S}_\Pi(f,\beta_1)=\omega<\varepsilon, \tag{1}$$

其中 ω 为函数 f 在区间 $[x_0,x_1]=[0,x_1]$ 上的振幅.则对于任意这样的分割 Π^*,$d(\Pi^*)<d(\Pi)$,得到不等式

$$\overline{S}_{\Pi^*}(f,\beta_1)-\underline{S}_{\Pi^*}(f,\beta_1)=\omega^*<\varepsilon, \tag{2}$$

由此,根据贝尔准则有,函数 f 在点 $x=0$ 右连续,即

$$f(+0)=f(0).$$

充分性.设 $f(+0)=f(0)$,即函数 f 在点 $x=0$ 右连续.则 $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ 使得在区间 $(x_0,x_0+\delta)$,函数 f 的振幅 ω_f 满足不等式 $\omega_f<\varepsilon$.

任取区间 $[-1,1]$ 的一个分割 Π,其中包含点 $x=0$ 作为分点,使满足 $d(\Pi)<\delta$.则 $\overline{S}_\Pi(f,\beta_1)-\underline{S}_\Pi(f,\beta_1)<\varepsilon$,因而 $f\in S(\beta_1)[-1,1]$.

由于对于包含点 $x=0$ 的区间$[-1,1]$的任意分割 Π,满足不等式

$$m_1 \leq \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}\beta_1(x) \leq M_1, \tag{3}$$

其中 $m_1=\inf\limits_{0\leq x\leq x_1}\{f(x)\}$, $M_1=\sup\limits_{0\leq x\leq x_1}\{f(x)\}$, 且 $\lim\limits_{x_1\to+0} m_1=\lim\limits_{x_1\to+0} M_1=f(0)$,则

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}\beta_1(x) = f(0).$$

2) 类似讨论,得到

$$f \in S(\beta_2)[-1,1] \quad f(-0)=f(0),$$

并且 $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}\beta_2(x) = f(0)$.

3) 设 Π 为区间 $[-1,1]$ 的任意分割且 $x=0$ 不是分点.如果 $0\in(x_j, x_{j+1})$, 则 $\overline{S}_\Pi(f,\beta_3)-\underline{S}_\Pi(f,\beta_3)=\omega_j$, 其中 ω_j 为函数 f 在区间$[x_j, x_{j+1}]$上的振幅.因而($\omega_j\to0$ 当 $d(\Pi)\to0$) $(f(-0)=f(0)\vee f(+0)=f(0)\vee f(-0)=f(0)\wedge f(+0)=f(0))$.

如果点 $x=0$ 是分点且属于区间$[x_j, x_{j+1}]$,则 $\overline{S}_\Pi(f,\beta_3)-\underline{S}_\Pi(f,\beta_3)=\frac{1}{2}(\omega_j^{(1)}+\omega_j^{(2)})$,其中 $\omega_j^{(1)}$ 为函数 f 在区间$[x_j, 0]$上的振幅,$\omega_j^{(2)}$ 为函数 f 在区间$[0, x_{j+1}]$上的振幅.因而

$$\overline{S}_\Pi(f,\beta_3)-\underline{S}_\Pi(f,\beta_3)\to0, \text{当 } d(\Pi)\to0 \quad \lim_{x\to0} f(x)=f(0),$$

即 f 在点 $x=0$ 连续.这样$(f\in S(\beta_3)[-1,1])$ $(f$ 在点 $x=0$ 连续,并且

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}\beta_3(x) = f(0)).$$

4) 如果 f 在点 $x=0$ 连续,则同时满足前面所有的情形,并且

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}\beta_1(x) = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}\beta_2(x) = \int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}\beta_3(x) = f(0).$$

151 利用 150 题的记号,证明:$\beta_3\in S(\beta_2)[-1,1]$,尽管 $\lim\limits_{d(\Pi)\to0} S_\Pi(\beta_2,\beta_2)$不存在.

函数 β_3 关于函数 β_2 的可积性可由例 150 的情形 1)得到,且

$$\int_{-1}^{1} \beta_3(x)\,\mathrm{d}\beta_2(x) = \beta_3(0) = 1.$$

对区间$[-1,1]$的任意分割 Π 及任意取点 $\xi_i\in[x_i, x_{i+1}]$, $i=0,1,\cdots,n-1$, 有, 如果 $0\in[x_j, x_{j+1}]$, 则

$$S_\Pi(\beta_2,\beta_2)=\sum_{i=0}^{n-1}\beta_2(\xi_i)(\beta_2(x_{i+1})-\beta_2(x_i))=\begin{cases}\xi_j, & \text{如果 } \xi_j\geq0,\\ 0, & \text{如果 } \xi_j<0.\end{cases}$$

因而$\lim\limits_{d(\Pi)\to 0} S_\Pi(\beta,\beta)$不存在 .

该例说明,条件 $\alpha\in C[a,b]$,在本章 8.2 节的定理中谈到过,不能忽略 .

152 证明

$$\int_0^3 x\mathrm{d}([x]-x)=\frac{3}{2}.$$

积分函数 $x\mapsto[x]-x(0\leq x\leq 3)$可以表示成不减函数 $x\mapsto[x](0\leq x\leq 3)$与上升函数 $x\mapsto x(0\leq x\leq 3)$的差的形式,因而,根据斯蒂尔切斯关于有界变差函数的定义,有

$$\int_0^3 x\mathrm{d}([x]-x)=\int_0^3 x\mathrm{d}[x]-\int_0^3 x\mathrm{d}x.$$

函数 $x\mapsto[x](0\leq x\leq 3)$在点 $x=1$, $x=2$ 及 $x=3$ 有第一类间断,而函数 $f: x\mapsto x(0\leq x\leq 3)$在区间$[0,3]$的每一点均连续 .因此,根据例 151,得到

$$\int_0^3 x\mathrm{d}[x]=f(1)+f(2)+f(3)=6.$$

由于$\int_0^3 x\mathrm{d}x=\frac{9}{2}$,则最后有

$$\int_0^3 x\mathrm{d}([x]-x)=6-\frac{9}{2}=\frac{3}{2}.$$

153 设 p_i 为$[a,b]$区间上这样的点,$a=p_0<p_1<\cdots<p_n=b$.假设函数 $g:[a,b]\to\mathbf{R}$在$[a,b]$上不减,且在每个区间(p_i,p_{i+1}) $(i=0,1,\cdots,n-1)$上为常数 .设 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$, $f\in C[a,b]$.计算

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x).$$

函数 g 在点 p_i 上有第一类间断,而函数 f 在$[a,b]$上连续 .在例 151 的基础上可以肯定 $f\in S(g)[a,b]$且

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)=&\ f(p_0)(g(p_0+0)-g(p_0))+\\&\sum_{i=1}^{n-1} f(p_i)((g(p_i+0)-g(p_i))+(g(p_i)-g(p_i-0)))+\\&f(p_n)(g(p_n)-g(p_n-0))\\=&\ f(a)(g(a+0)-g(a))+\sum_{i=1}^{n-1} f(p_i)(g(p_i+0)-g(p_i-0))+\\&f(b)(g(b)-g(b-0)).\end{aligned}$$

154 设 $G(x)=h(x)+g(x)(a\leq x\leq b)$,其中 $h\in C^{(1)}[a,b]$, $h'(x)\geq 0\ \forall\, x\in[a,b]$,

而 g 和 f 为在上例中给出的函数.计算

$$\int_a^b f\mathrm{d}G(x).$$

由于 G 为区间 $[a,b]$ 上的不减函数,等于该区间上两个不减函数的和,则根据8.5节的公式(1),有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}G(x)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}h(x)+\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x).$$

由于 $h\in C^{(1)}[a,b]$,则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}h(x)=\int_a^b f(x)h'(x)\mathrm{d}x$,因而得到

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}G(x)=\int_a^b f(x)h'(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x),$$

其中 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}g(x)$ 按上例中所得公式计算.

155 设 $f\in C[a,b]$,$p\in R[a,b]$,$p(x)\geq 0\ \forall x\in[a,b]$.证明:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}P(x)=\int_a^b f(x)p(x)\mathrm{d}x,$$

其中

$$P(x)=\int_a^x p(t)\mathrm{d}t\ (a\leq x\leq b).$$

考虑区间 $[a,b]$ 的任意分割 Π 且构造函数 f 关于函数 P 的斯蒂尔切斯积分和

$$S_\Pi(f,P)=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)(P(x_{i+1})-P(x_i))=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}}p(x)\mathrm{d}x,\ \xi_i\in[x_i,x_{i+1}].$$

同时构造在区间 $[a,b]$ 上可积函数 fp 的黎曼积分和

$$S_\Pi(fp)=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)p(\xi_i)\Delta x_i,$$

且考虑差

$$S_\Pi(f,P)-S_\Pi(fp)=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\left(\int_{x_i}^{x_{i+1}}p(x)\mathrm{d}x-p(\xi_i)\Delta x_i\right).$$

根据第一中值定理,有

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}}p(x)\mathrm{d}x=\mu_i\Delta x_i,\ m_i\leq\mu_i\leq M_i,$$

其中 $m_i=\inf\limits_{x_i\leq x\leq x_{i+1}}\{p(x)\}$,$M_i=\sup\limits_{x_i\leq x\leq x_{i+1}}\{p(x)\}$.注意到估计 $|f(x)|\leq M$,其中 $a\leq x\leq b$,M 为常数,不等式 $|\mu_i-p(\xi_i)|\leq\omega_i$,其中 ω_i 为函数 p 在区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上的振幅,同时注

意到函数 p 的可积性,得到

$$|S_\Pi(f,P)-S_\Pi(fp)|\le M\sum_{i=0}^{n-1}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon,$$

对于每一个满足 $d(\Pi)<\delta$ 的分割成立 .

这样 $\lim\limits_{d(\Pi)\to 0}S_\Pi(f,P)=\lim\limits_{d(\Pi)\to 0}S_\Pi(fp)=\int_a^b f(x)p(x)\,\mathrm{d}x$.因而

$$f\in S(P)[a,b]\ 且\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}P(x)=\int_a^b f(x)p(x)\,\mathrm{d}x.$$

156 计算 $\int_{-2}^{2}x\,\mathrm{d}g(x)$, 其中

$$g(x)=\begin{cases}x+2, & 如果\ -2\le x\le -1,\\ 2, & 如果\ -1<x<0,\\ x^2+3, & 如果\ 0\le x\le 2.\end{cases}$$

函数 g 在点 $x=-1$ 及 $x=0$ 具有跳跃,跃变为 1,其导数 g' 具有形式

$$g'(x)=\begin{cases}1, & 如果\ -2\le x<-1,\\ 0, & 如果\ -1<x<0,\\ 2x, & 如果\ 0<x\le 2.\end{cases}$$

利用 8.5 节的公式(1),得到

$$\int_{-2}^{2}x\,\mathrm{d}g(x)=\int_{-2}^{-1}x\,\mathrm{d}x+2\int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x+(-1)\cdot 1+0\cdot 1=\frac{x^2}{2}\Big|_{-2}^{-1}+\frac{2}{3}x^3\Big|_0^2-1=\frac{17}{6}.$$

157 设在 Ox 轴的区间 $[a,b]$ 上离散地分布有质量,它们依次集中在点 x_j $(j=1,\cdots,n)$ 上 .求这些质量关于坐标原点的静力矩 .

设 $x\mapsto\Phi(x)$ $(a\le x\le b)$ 为区间 $[a,x]\subset[a,b]$ 上的质量,且 $\Phi(a)=0$.则 Φ 为不减函数 .设 Π 为区间 $[a,b]$ 分成 n 部分的任意分割 .则在区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 含有质量 $\Phi(x_{i+1})-\Phi(x_i)=\Delta\Phi(x_i)$.特别地,在区间 $[x_0,x_1]$ 包含有质量 $\Phi(x_1)-\Phi(a)\ge 0$ (由假设 $\Phi(a)=0$) .看成在每一段质量都集中在区间段的右端点,则得到该段上所有质量关于坐标起点的静力矩 $\mathrm{d}M$ 的近似值,形如

$$\mathrm{d}M\approx\sum_{i=0}^{n-1}x_{i+1}\Delta\Phi(x_i)=S_\Pi(x,\Phi),$$

其中 $S_\Pi(x,\Phi)$ 为函数 x 关于函数 Φ 的斯蒂尔切斯积分和 .令 $d(\Pi)\to 0$ 取极限,得到计算所求静力矩的公式

$$M=\int_a^b x\,\mathrm{d}\Phi(x).$$

如果 $x\mapsto\mu(x)$ 为连续分布质量的线密度,则 $\Phi'(x)=\mu(x)$.

在点 $x_j\ (j=1,\cdots,m)$函数 Φ 间断,且在其中每一点跃度等于 m_j .

利用 8.5 段的公式(1),为计算斯蒂尔切斯积分,得到

$$M=\int_a^b x\mu(x)\,\mathrm{d}x+\sum_{j=1}^{m}x_j m_j .$$

所得公式说明,斯蒂尔切斯积分通过单个积分式子将连续分布的质量和离散分布的质量这两种情形综合在一起 .

练　习　题

166 设 $f: x\mapsto \sin x, \varphi: x\mapsto x^2-3x+5, 0\leq x\leq\frac{\pi}{2}$.计算$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)$.

167 设 $f: x\mapsto x^3, 0\leq x\leq 1, \varphi: x\mapsto k$,如果$\frac{k-1}{n}<x\leq\frac{k}{n}$,$\varphi(0)=0, k=1,\cdots,n$.计算$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)$.

168 设 $f: x\mapsto x, \varphi: x\mapsto [x^2], 0\leq x\leq 5$.计算$\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)$.

169 设 $f: x\mapsto x^2, 0\leq x\leq 1, \varphi(x)=0$,如果 $x\in\ 0,\frac{1}{2}$ 且 $x\in\ \frac{1}{2},1$,$\varphi\ \frac{1}{2}\ =1$.计算$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)$.

170 设 $f: x\mapsto x^2, 0\leq x\leq 1, \varphi(x)=1$,如果 $x\in(0,1), \varphi(0)=\varphi(1)=0$.计算$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}\varphi(x)$.

171 计算$\int_{-1}^3 x\,\mathrm{d}\varphi(x)$,其中
$$\varphi(x)=\begin{cases}0, & \text{如果 } x=-1,\\ 1, & \text{如果 } -1<x<2,\\ -1, & \text{如果 } 2\leq x\leq 3 .\end{cases}$$

172 计算$\int_{-2}^2 x\,\mathrm{d}\varphi(x)$,$\int_{-2}^2 x^2\,\mathrm{d}\varphi(x)$,$\int_{-2}^2 (x^3+1)\,\mathrm{d}\varphi(x)$,其中

$$\varphi(x)=\begin{cases}x+2, & \text{如果 } -2\leq x\leq -1\\ 2, & \text{如果 } -1<x<0,\\ 3, & \text{如果 } 0\leq x\leq 2 .\end{cases}$$

173 设 f 为区间$[0,2\pi]$上的有限变差函数,且 $f(2\pi)=f(0)$.证明:下列积分中每一个

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$$

绝对值不超过$\frac{V(f;0,2\pi)}{n}$.

9　定积分的近似计算

1° **矩形公式** .如果函数 $y(x)\in C^{(1)}[a,b]$; $h=\dfrac{b-a}{n}$; $x_i=a+ih(i=0,1,\cdots,n)$; $y(x_i)=y_i$,则

$$\int_a^b y(x)\,\mathrm{d}x = h(y_0+y_1+\cdots+y_{n-1})+R_n,$$

其中 $R_n=\dfrac{(b-a)h}{2}y'(\xi)$, $a\leq\xi\leq b$.

2° **梯形公式** .如果 $y=y(x)\in C^{(2)}[a,b]$,则在相同的记号下,有

$$\int_a^b y(x)\,\mathrm{d}x = h\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right)+R_n,$$

其中
$$R_n=-\frac{(b-a)h^2}{12}y''(\eta),\ a\leq\eta\leq b.$$

3° **抛物线公式(辛普森公式)** .设 $y=y(x)\in C^{(4)}[a,b]$.假定 $n=2k$,可以得到辛普森公式

$$\int_a^b y(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{3}((y_0+y_{2k})+4(y_1+y_3+\cdots+y_{2k-1})+2(y_2+y_4+\cdots+y_{2k-2}))+R_n,$$

其中
$$R_n=-\frac{(b-a)h^4}{180}y^{(\mathrm{IV})}(\zeta),\ a\leq\zeta\leq b.$$

注记 .如果成立估计式

$$\|z-\text{瑚}\|_\infty=\max|z_i-\text{瑚}|\leq Mh^n,$$

其中瑚 为量 z_i 的按某公式得到的近似值,则说该公式在某函数集合里具有 n 阶精度($M>0$ 为常数且与 h 无关).

这样,矩形公式在集合 $y\in C^{(1)}[a,b]$ 里具有一阶精度,梯形公式在集合 $y\in C^{(2)}[a,b]$ 具有二阶精度,抛物线公式在集合 $y\in C^{(4)}[a,b]$ 里具有四阶精度 .

经常地,可用其他的模代替模 $\|\cdot\|_\infty$,模的选择依赖于所要解决的问题的特征 .今后,区间$[a,b]$带分点 $x_i=a+ih(i=0,1,\cdots,n)$称为步长为 h 的均匀网;分点 x_i 称为结点 .

158　**利用矩形公式($n=12$),近似计算 $I=\displaystyle\int_0^{2\pi}x\sin x\,\mathrm{d}x$ 且与精确值比较 .**

考虑区间$[0,2\pi]$的步长 $h=\dfrac{\pi}{6}$的均匀网,则 $x_i=i\dfrac{\pi}{6}(i=0,1,2,\cdots,12)$.按矩形公式有

$$\int_0^{2\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x \approx \frac{\pi}{6}\sum_{i=0}^{11} i\,\frac{\pi}{6}\sin i\,\frac{\pi}{6} = \frac{\pi^2}{36}\sum_{i=0}^{11} i\sin\frac{i\pi}{6}$$

$$= -\frac{\pi^2}{36}\left(\sum_{i=1}^{11}\cos ix\right)'\Bigg|_{x=\frac{\pi}{6}}$$

$$= -\frac{\pi^2}{36}\left(\frac{\cos 6x\cdot\sin\frac{11}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right)'\Bigg|_{x=\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{\pi^2}{36}\left[\frac{\left(6\sin 6x\cdot\sin\frac{11}{2}x - \frac{11}{2}\cos\frac{11}{2}x\cdot\cos 6x\right)\sin\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}} + \frac{\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\cos 6x\sin\frac{11}{2}x}{\sin^2\frac{x}{2}}\right]\Bigg|_{x=\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{\pi^2}{36}\,\frac{\frac{11}{2}\cos\frac{11}{12}\pi\sin\frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{11}{12}\pi}{\sin^2\frac{\pi}{12}}$$

$$= -\frac{\pi^2}{72}\cdot\frac{11\cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12} + \cos\frac{\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}}{\sin^2\frac{\pi}{12}}$$

$$= -\frac{\pi^2}{6}\cot\frac{\pi}{12} = -\frac{\pi^2}{6}(2+\sqrt{3}) \approx -6.2961$$

(取 $\pi\approx 3.14$; $\sqrt{3}\approx 1.73$). 积分的精确值为 $I = -2\pi = -6.28\cdots$.

159 借助梯形公式计算积分

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{1}{4}\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\ (n=6),$$

且估计公式的误差.

解 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上构造步长为 $h=\frac{\pi}{12}$ 的均匀网 $\left\{x_i = i\frac{\pi}{12};\ i=0,1,2,3,4,5,6\right\}$. 按梯形公式

$$I = \frac{\pi}{12}\left[\frac{2+\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\sum_{i=1}^{5}\sqrt{7+\cos 2i\frac{\pi}{12}}\right] = \frac{\pi}{24}\left[\frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{i=1}^{5}\sqrt{7+\cos i\frac{\pi}{6}}\right]$$

$$= \frac{\pi}{24}\left[\frac{2+\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\frac{14+\sqrt{3}}{2}} + \sqrt{\frac{15}{2}} + \sqrt{7} + \sqrt{\frac{13}{2}} + \sqrt{\frac{14-\sqrt{3}}{2}}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{48}\left(2+\sqrt{3}+\sqrt{14+\sqrt{3}}+\sqrt{15}+\sqrt{14}+\sqrt{13}+\sqrt{14-\sqrt{3}}\right)$$

$$\approx \frac{3.142}{48}(3.732 + 3.966 + 3.873 + 3.742 + 3.606 + 3.503)$$

$$\approx \frac{3.142 \cdot 22.422}{48} \approx 1.4677 .$$

估计梯形公式的误差.为此估计 R_n **.显然** $|R_n| \leq \frac{(b-a)h^2}{12} \max\limits_{a \leq \eta \leq b} |f''(\eta)|$.

在我们的情形 $\max\limits_{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}} \left| \quad 1 - \frac{1}{4}\sin^2 x \quad '' \right| \leq \frac{17}{14 \quad 14}$ **.这样**

$$|R_n| \leq \frac{17\pi^3}{2^8 \cdot 3^3 \cdot 7 \quad 14} < 0.002 .$$

160　借助于辛普森公式计算积分

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} \quad (k = 2) .$$

把区间$[0,1]$**分成四等份** $h = \frac{1}{4}$ **,按辛普森公式** $I \approx \frac{1}{12}((y_0 + y_4) + 4(y_1 + y_3) + 2y_2) \approx \frac{1}{12}(1 + 0.5 + 3.76471 + 2.56 + 1.6) = 0.78539$.

161　取 $n = 10$**,计算加达郎常数**

$$G = \int_0^1 \frac{\arctan x}{x} dx .$$

构造步长为 $h = 0.1$ **的均匀网**$\{x_i = ih; i = 0, 1, \cdots, 10\}$**且按辛普森公式近似计算** G

$$G = \frac{1}{30}((y_0 + y_{10}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)) .$$

计算对应的函数值,精度为到小数点后五位,得到

$y_0 = 1$; $y_{10} = 0.78540$; $y_0 + y_{10} = 1.78540$; $y_1 = 0.99668$; $y_3 = 0.97152$; $y_5 = 0.92730$; $y_7 = 0.87246$; $y_9 = 0.81424$; $4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9) = 4 \cdot 4.58220 = 18.32880$; $y_2 = 0.98698$; $y_4 = 0.95127$; $y_6 = 0.90070$; $y_8 = 0.84343$; $2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) = 2 \cdot 3.68238 = 7.36476$ **.把计算的值代入,得到**

$$G \approx \frac{1.78540 + 18.32880 + 7.36476}{30} = 0.915965 .$$

162　利用公式 $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$**,计算数** π**,精确到** 10^{-4} .

我们已在例160**中计算积分**$\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$**(借助于辛普森公式,取** $k = 2$**),现估计公式的误差.由于(见第** 2 **章例** 77**)**

$$\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}\sin((n+1)\arctan x),$$

则当 $x\in[0,1]$时,$\left|\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{(4)}\right|\leq 4!$,因而

$$|R_n|\leq\frac{24}{180}\cdot\frac{1}{4^4}=\frac{1}{1920}\approx 5\cdot 10^{-4}.$$

利用 160 题的结果,得到 $\pi\approx 4\cdot 0.78539=3.14156$.比较所得结果与 π 的数值表 $\pi=3.141592\cdots$,我们看见,小数点后四位全部正确.

163 计算$\int_0^1 e^{x^2}dx$,精确到 0.001.

将按辛普森公式计算.因为对 $x\in[0,1]$,$|(e^{x^2})^{(4)}|\leq 228$,则步长将从条件(估计抛物线公式的误差)$h^4<\frac{10^{-3}\cdot 15}{19}\approx 8\cdot 10^{-4}$中选取.

把区间$[0,1]$10 等分,得到

$$\int_0^1 e^{x^2}dx\approx\frac{1}{30}((y_0+y_{10})+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)+2(y_2+y_4+y_6+y_8)).$$

计算函数 e^{x^2} 在结节处的值,精确到 10^{-5}(例如可用泰勒公式),有

$y_0=1$, $y_{10}\approx 2.71828$, $y_1\approx 1.01004$, $y_3\approx 1.09417$, $y_5\approx 1.28733$, $y_7\approx 1.63230$, $y_9\approx 2.24789$, $y_2\approx 1.04081$, $y_4\approx 1.17351$, $y_6\approx 1.43332$, $y_8\approx 1.89648$, $y_0+y_{10}\approx 3.71828$; $4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)\approx 4\cdot 7.27173=29.08692$; $2(y_2+y_4+y_6+y_8)\approx 2\cdot 5.54412=11.08824$.

$$\int_0^1 e^{x^2}dx\approx\frac{1}{30}(3.71828+29.08692+11.08824)=\frac{43.89344}{30}\approx 1.46311.$$

得到小数点后面三位准确数字.

164 计算$\int_0^1(e^x-1)\ln\frac{1}{x}dx$,精确到 10^{-4}.

当 $x\to 0$ 时,$(e^x-1)\ln\frac{1}{x}\to 0$,因此黎曼积分存在.被积函数的第四阶导函数具有非常复杂的形式且难于估计,此外,被积函数的一阶导函数在$[0,1]$已经无界.原则上,我们可用辛普森公式,但误差估计不能进行.因此,按下述方式去做.把函数 $1-e^x$ 按 x 的幂次根据泰勒公式展开

$$1-e^x=-\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}\right)+R(x),$$

其中 $R(x)=\frac{e^c x^7}{7!}$, $0<c<1$.把被积函数写成形式

$$f(x) = (1 - e^x)\ln x$$

且用 $\varphi(x)$记函数

$$\varphi(x) = -\ln x\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720}\right).$$

显然, $f(x) = \varphi(x) + R_1(x)$, 其中 $R_1(x) = \ln x R(x)$.当 $x\in[0,1]$时,估计 $|R_1(x)| = \left|\frac{\ln x \cdot e^c \cdot x^7}{7!}\right|$.由于$\lim\limits_{x\to 0} x^7\ln x = 0$, $\ln 1 = 0$,则函数 $|z| = |x^7\ln x|$在区间$[0,1]$的某个内部点达到最大值 .对 $z(x)$求导,得到 $z'(x) = x^6 + 7x^6\ln x$.让 $z'(x)$等于零,得到函数 $|z(x)|$在点 $x = e^{-\frac{1}{7}}$达到最大值,等于

$$\max_{0\le x\le 1}|z(x)| = \left|-\frac{1}{7}e^{-1}\right| = \frac{1}{7e}.$$

因为当 $x\in[0,1]$时, $|R(x)| < \frac{e}{7!}$,得到估计 $|f(x) - \varphi(x)| = |R_1(x)| < \frac{1}{7\cdot 7!}$.这样

$$\left|\int_0^1 (f(x) - \varphi(x))dx\right| \le \int_0^1 |f(x) - \varphi(x)|dx < \frac{1}{7\cdot 7!} < 10^{-4}.$$

因而,代替函数 $f(x)$的积分我们计算函数 $\varphi(x)$的积分 .如果在计算函数 $\varphi(x)$的积分时,计算的误差不超过 10^{-4},则所要求的精度可以达到 .

对 $\varphi(x)$分部积分,有

$$\int_0^1 f(x)dx \approx \int_0^1 \varphi(x)dx = \psi(x)\ln x\Big|_0^1 + \int_0^1\left(\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + \frac{x^5}{720} + \frac{x^6}{7!}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{18} + \frac{1}{96} + \frac{1}{600} + \frac{1}{6\cdot 6!} + \frac{1}{7\cdot 7!},$$

其中

$$\psi(x) = -\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{7!}\right).$$

$$\psi(x)\ln x\Big|_0^1 = \psi(1)\cdot\ln 1 - \lim_{x\to 0}\psi(x)\ln x = 0.$$

精确到 10^{-6},有

$$\frac{1}{4} = 0.250000;\ \frac{1}{18} = 0.055556;\ \frac{1}{96} = 0.010417;$$

$$\frac{1}{600} = 0.001667;\ \frac{1}{6\cdot 6!} = 0.000231.$$

$$\int_0^1 (1 - e^x)\ln x dx \approx 0.250000 + 0.055556 + 0.010417 + 0.001667 + 0.000231$$

$$= 0.317871 \approx 0.3179.$$

165 **精确到** 0.001, **计算概率积分** $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$.

积分收敛,因此, " $\varepsilon > 0$ v $A_1 > 0$, **使得当** $A \geq A_1$ **时,有**

$$\int_A^{+\infty} e^{-x^2}\,dx < \varepsilon.$$

如果找到了 A_1, **则当** $A \geq A_1$ **时可以写成**

$$I = \int_0^A e^{-x^2}\,dx + R, \text{ 其中 } R = \int_A^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

取 $\varepsilon = 10^{-3}$ **且力求确定最优的** A, **即使得区间**$[0, A]$**长度尽可能短**.**最简单的方法是这样**:**假设我们找到了这样的** A, **使** $\int_A^{+\infty} e^{-x^2}\,dx < \varepsilon$, **则积分** $\int_{A+1}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx < \varepsilon$, **故**

$$0 < \int_A^{+\infty} e^{-x^2}\,dx - \int_{A+1}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \int_A^{A+1} e^{-x^2}\,dx = e^{-\xi^2} < \varepsilon,$$

其中 $A < \xi < A + 1$(**根据中值定理**).

所得不等式等价于不等式

$$\xi > \quad \ln \frac{1}{\varepsilon}.$$

代入 $\varepsilon = 10^{-3}$, **得到**

$$\xi > \quad \ln 1000 \approx \quad 6.907755 \approx 2.628$$

则可取 A **为** $A = 2.6$.

可以得到 A **的更精确的估计**.**假设找到了这样的** A, **使**

$$I_1 = \int_A^{+\infty} e^{-x^2}\,dx < \varepsilon.$$

作变换 $x^2 = t \quad dx = \frac{dt}{2\quad t}$, **得到**

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_{A^2}^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,dt < \frac{1}{2A}\int_{A^2}^{+\infty} e^{-t}\,dt = \frac{e^{-A^2}}{2A}.$$

由条件 $\frac{e^{-A^2}}{2A} < \varepsilon$ **得到** $Ae^{A^2} > \frac{1}{2\varepsilon}$, $\ln A + A^2 > \ln \frac{1}{2\varepsilon}$, **由此** $A > \quad \ln \frac{1}{2\varepsilon} - \ln A$.**因为当** $\varepsilon = 10^{-3}$ **时,应有** $A > 2$.**在根号里面可用** $\ln A$ **代替** $\ln 2$, **故得**

$$A > \quad \ln 1000 - 2\ln 2 \approx \quad 6.90775 - 1.38628 = \quad 5.52147 = 2.35.$$

这样,可以取 $A = 2.4$, **可以写成**

$$0 < \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx - \int_0^{2.4} e^{-x^2}\,dx < 10^{-3}.$$

我们的问题转化成计算积分(精确到 10^{-3})

$$\tilde{I}=\int_0^{2.4} e^{-x^2}\,dx.$$

我们本来可以像在前面的例 164 那样去做:用多项式逼近被积函数 e^{-x^2}.但由于积分的区间有长度 2.4,而幂 $(2.4)^n$ 上升非常快,为保证所需精度,我们不得不在泰勒展开式中取多于 15 项.

我们按辛普森公式计算积分 $\tilde{I}$.求出函数 $y=e^{-x^2}$ 的 $y^{(4)}$.由于 $y^{(4)}=4y(3-12x^2+4x^4)$,则 $|y^{(4)}(x)|\leqslant 4(3-12\cdot 5.76+4\cdot 33.1776)$, $x\in[0;2.4]$,因为 $|e^{-x^2}|\leqslant 1$,而函数 $z=3-12x^2+4x^4$ 在 $x>\sqrt{\frac{3}{2}}$ 时单调上升.这样,$|y^{(4)}(x)|\leqslant 4\cdot 66.5904=266.3616$, $0\leqslant x\leqslant 2.4$.估计辛普森公式的误差 R

$$R=-\frac{(b-a)h^4}{180}f^{(4)}(\xi),\quad a\leqslant\xi\leqslant b,$$

对我们的情形得到

$$|R|\leqslant\frac{2.4\cdot 266.3616}{180}h^4\approx 3.55148h^4.$$

由条件 $|R|<10^{-3}$ 得到

$$h<\sqrt[4]{\frac{10^{-3}}{3.55148}}<\sqrt[4]{\frac{10^{-3}}{3.5}}=0.1\sqrt[4]{\frac{10}{3.5}}\approx 0.13.$$

为得到所需精度可取 $h=0.1$.

考虑区间 $[0,2.4]$ 的网格:$\omega_h=\{x_i=0.1i,\ i=0,1,\cdots,24\}$.为确保所需精度,被积函数在结节处的值将计算到小数点后第五位,有

$y_0=1$; $y_{24}\approx 0.00315$; $y_1\approx 0.99005$; $y_2\approx 0.96079$; $y_3\approx 0.91393$; $y_4\approx 0.85214$; $y_5\approx 0.77880$; $y_6\approx 0.69768$; $y_7\approx 0.61263$; $y_8\approx 0.52729$; $y_9\approx 0.44486$; $y_{10}\approx 0.36788$; $y_{11}\approx 0.29820$; $y_{12}\approx 0.23693$; $y_{13}\approx 0.18452$; $y_{14}\approx 0.14086$; $y_{15}\approx 0.10540$; $y_{16}\approx 0.07731$; $y_{17}\approx 0.05558$; $y_{18}\approx 0.03916$; $y_{19}\approx 0.02705$; $y_{20}\approx 0.01832$; $y_{21}\approx 0.01216$; $y_{22}\approx 0.00791$; $y_{23}\approx 0.00504$; $y_0+y_{24}\approx 1.00315$;

$$4\sum_{j=1}^{12}y_{2j-1}\approx 4\cdot 4.42822=17.71288;\quad 2\sum_{j=1}^{11}y_{2j}\approx 2\cdot 3.92627=7.85254;$$

$$\tilde{I}\approx\frac{1}{30}\left(y_0+y_{24}+4\sum_{j=1}^{12}y_{2j-1}+2\sum_{j=1}^{11}y_{2j}\right)\approx\frac{28.56857}{30}\approx 0.8856.$$

考虑精确值 $I=\frac{\sqrt{\pi}}{2}=0.8862\cdots$,以及误差 $R=I-\tilde{I}=0.0006=6\cdot 10^{-4}$,得到的精度超过所要求的精度.

166　近似地求椭圆的弧长,其半轴分别为 $a=10$ 和 $b=6$.

椭圆方程写成参数形式有 $x=10\cos t, y=6\sin t, 0\leq t\leq 2\pi$，椭圆弧的长为

$$L=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{100\cos^2 t+36\sin^2 t}\,\mathrm{d}t=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{17+8\cos 2x}\,\mathrm{d}x.$$

把区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 分成 6 等份 $\left(h=\frac{\pi}{12}\right)$，借助于辛普森公式计算积分．将计算被积函数在结节上的值 $\omega_h=\{ih; i=0,1,2,3,4,5,6\}$，即

$y_0=5$; $y_6=3$; $y_1=\sqrt{17+4\sqrt{3}}\approx\sqrt{23.928}\approx 4.892$; $y_2=\sqrt{17+4}=\sqrt{21}\approx 4.583$; $y_3=\sqrt{17}\approx 4.123$; $y_4=\sqrt{17-4}=\sqrt{13}\approx 3.606$; $y_5=\sqrt{17-4\sqrt{3}}\approx\sqrt{10.072}\approx 3.174$; $y_0+y_6=8$; $4(y_1+y_3+y_5)\approx 48.756$; $2(y_2+y_4)\approx 16.378$.

把所得值代入抛物线公式，得到

$$L\approx\frac{2\pi}{9}(8+48.756+16.378)=\frac{6.283\cdot 73.134}{9}\approx 51.056.$$

167 取 $\Delta=\frac{\pi}{3}$，按点画出函数 $y=\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\ (0\leq x\leq 2\pi)$ 的图像．

考虑网格 $\omega_h=\left\{x_i=\frac{i\pi}{3}, i=0,1,2,3,4,5,6\right\}$，函数 $y(x)$ 在结点处的值分别为

$$y_0=0;\ y_1=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x;\ y_2=\int_0^{\frac{2\pi}{3}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x;\ y_3=\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x;$$

$$y_4=\int_0^{\frac{4\pi}{3}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x;\ y_5=\int_0^{\frac{5\pi}{3}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x;\ y_6=\int_0^{2\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x.$$

问题转化为近似计算 6 个积分的值．

考虑区间 $[0,2\pi]$ 的网格 $\bar{\omega}_h=\left\{x_i=i\frac{\pi}{12};\ i=0,1,\cdots,24\right\}$，显然，网格 ω_h 的结点是网格 $\bar{\omega}_h$ 的结点．将按辛普森公式计算积分．

找出函数在网格 $\bar{\omega}_h$ 的结点的离散变量 $\tilde{y}_i=\frac{\sin x_i}{i}$，得到

$\tilde{y}_0=\lim\limits_{i\to 0}\frac{\sin x_i}{i}=\frac{\pi}{12}\approx 0.2618$; $\tilde{y}_1\approx 0.2590$; $\tilde{y}_2=0.25$; $\tilde{y}_3\approx 0.2359$; $\tilde{y}_4\approx 0.2165$; $\tilde{y}_5\approx 0.1932$; $\tilde{y}_6\approx 0.1666$; $\tilde{y}_7\approx 0.1380$; $\tilde{y}_8\approx 0.1083$; $\tilde{y}_9\approx 0.0785$; $\tilde{y}_{10}=0.05$; $\tilde{y}_{11}\approx 0.0235$; $\tilde{y}_{12}=0$; $\tilde{y}_{13}\approx -0.0199$; $\tilde{y}_{14}\approx -0.0357$; $\tilde{y}_{15}\approx -0.0471$; $\tilde{y}_{16}\approx -0.0541$; $\tilde{y}_{17}\approx -0.0568$; $\tilde{y}_{18}\approx -0.0555$; $\tilde{y}_{19}\approx -0.0508$; $\tilde{y}_{20}\approx -0.0433$; $\tilde{y}_{21}\approx -0.0336$; $\tilde{y}_{22}\approx -0.0227$; $\tilde{y}_{23}\approx -0.0112$; $\tilde{y}_{24}=0$.

显然

$$y_1 \approx \frac{1}{3}\left(y_0 + y_4 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2\right) = \frac{2.9579}{3} \approx 0.9860;$$

$$y_2 \approx \frac{1}{3}\left(y_0 + y_8 + 4\sum_{k=1}^{4} y_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{3} y_{2k}\right) = \frac{4.9407}{3} \approx 1.6469;$$

$$y_3 \approx \frac{1}{3}\left(y_0 + y_{12} + 4\sum_{k=1}^{6} y_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{5} y_{2k}\right) = \frac{5.5570}{3} \approx 1.8523;$$

$$y_4 \approx \frac{1}{3}\left(y_0 + y_{16} + 4\sum_{k=1}^{8} y_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{7} y_{2k}\right) = \frac{5.1635}{3} \approx 1.7212;$$

$$y_5 \approx \frac{1}{3}\left(y_0 + y_{20} + 4\sum_{k=1}^{10} y_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{9} y_{2k}\right) = \frac{4.5247}{3} \approx 1.5082;$$

$$y_6 \approx \frac{1}{3}\left(y_0 + y_{24} + 4\sum_{k=1}^{12} y_{2k-1} + 2\sum_{k=1}^{11} y_{2k}\right) = \frac{4.2568}{3} \approx 1.4189.$$

当 $x \in (0, \pi)$ **时**, $y'(x) > 0$; **而当** $x \in (\pi, 2\pi)$ **时**, $y'(x) < 0$; **当** $x \in \left(0, \frac{4\pi}{3}\right)$ **时**, $y''(x) < 0$.

图 72

这样, $y(x)$ **在区间** $(0, \pi)$ **上升**, **而在区间** $\left(\pi, \frac{4}{3}\pi\right)$ **下降**; **在区间** $\left(0, \frac{4\pi}{3}\right)$ **函数** $y(x)$ **向上凸**. **函数的图像在图** 72 **中画出**.

练　习　题

174　**利用辛普森公式** $(n = 10)$ **计算** $\ln 10 = \int_0^{10} \frac{dx}{x}$. **求由自然对数转换成以** 10 **为底的对数的模**, **并与表格值比较**.

练 习 题 答 案

第 1 章

9．1) $A\cup B=\{x: -4<x<4\}$, $A\cap B=\{x: 0<x<1\}$, $A\setminus B=\{x: -4<x\le 0\}$, $B\setminus A=\{x: 1\le x<4\}$, $A\Delta B=\{x: (-4<x\le 0)\vee(1\le x<4)\}$;

2) $A\cup B=\{x: -1<x\le 6\}$, $A\cap B=\{x: 0\le x<2\}$, $A\setminus B=\{x: -1<x<0\}$, $B\setminus A=\{x: 2\le x\le 6\}$, $A\Delta B=\{x: (-1<x\le 0)\vee(2\le x\le 6)\}$;

3) $A\cup B=A$, $A\cap B=B$, $A\setminus B=\{x: x=2n, n\in \mathrm{Z}\}$, $B\setminus A=\quad$, $A\Delta B=\{x: x=2n, n\in \mathrm{Z}\}$.

10．1) $A\cup B=B$, $A\cap B=A$, $A\setminus B=\quad$, $B\setminus A=A\Delta B=\{(x,y): -1<x<1,\quad 1-x^2<|y|\le 1-|x|\}$;

2) $A\cup B=A$, $A\cap B=B$, $B\setminus A=\quad$, $A\setminus B=A\Delta B=\{(x,y): -1\le x\le 1, 1-|x|<|y|\le 1\}$;

3) $A\cup B=\{(x,y): (|x|+|y|<2)\vee((x-2)^2+(y-2)^2<4)\}$, $A\cap B=\{(x,y): 0<x<2, 2-\quad 4x-x^2<y<2-x\}$, $A\setminus B=\{(x,y): (-2<x\le 0, 2-x<y<2+x)\vee(0<x<2, -2+x<y\le 2-\quad 4x-x^2)\}$, $B\setminus A=\{(x,y): (0<x\le 2, 2-x\le y<2+\quad 4x-x^2)\vee(2<x<4, |y-2|<\quad 4x-x^2)\}$, $A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$.

11．1) **由四条直线** $x=-2, x=1, y=-3, y=1$ **组成的长方形，不包括** $x=-2, y=1$ **两条边**.

2) **平行六面体，六个面为平面** $x=0, x=1, y=0, y=2, z=0, z=3$ **所界**.

3) **平行于** Ox **轴的直线，过点** $(0,n)$, $n\in \mathrm{Z}$.　　4) **平行于** Oy **轴的直线，且过点** $(n,0)$, $n\in \mathrm{Z}$.

24．1), 2), 3) **为满射**, 4) **为内射**, 5), 6) **为双射**.

25．1) $f|_{(-\infty,0]}$, $f|_{[0,+\infty)}$;　　2) $f|_{[2n\pi-\pi/2, 2n\pi+\pi/2]}$, $n\in \mathrm{Z}$, $f|_{[2n\pi+\pi/2, 2n\pi+3\pi/2]}$, $n\in \mathrm{Z}$.

27．1) $x=\quad 2ay-y^2$, $0\le y<2a$;　　2) $x=-\quad 2ay-y^2$, $0\le y<2a$.

28．$y=-x+\frac{7\pi}{2}$.　　29．$y=x-\frac{\pi}{2}$.　　34．1) $(n+1)!-1$;　2) $\frac{1}{30}n(n+1)(6n^3+9n^2-1)$;

3) $\frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n+1)$.　　37．1) ± 2; 2) $0\le x<+\infty$.

39．1) 2^6;　2) $\frac{-13-\mathrm{i}}{17}$;　3) $\frac{x^2-y^2+\mathrm{i}2xy}{x^2+y^2}$.

40．1) $\mathrm{Re}\,z=-1$, $\mathrm{Im}\,z=0$;　2) $\mathrm{Re}\,z=2$, $\mathrm{Im}\,z=\frac{3}{2}$;　3) $\mathrm{Re}\,z=2$, $\mathrm{Im}\,z=0$.

42．1) $|z|=125$, $\arg z=-\frac{\pi}{2}+3\arctan\frac{4}{3}$;　2) $|z|=0.25$, $\arg z=0$;　3) $|z|=\quad 2\cos\frac{\pi}{14}$, $\arg z=\frac{\pi}{4}$.

43．$-1, \frac{1\pm\quad 3}{2}$.　　44．${}^{6}\ 2(\cos 45°+\mathrm{i}\sin 45°)$, ${}^{6}\ 2(\cos 165°+\mathrm{i}\sin 165°)$, ${}^{6}\ 2(\cos 285°+\mathrm{i}\sin 285°)$.

45．$2(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$, $\varphi=30°, 90°, 150°, 210°, 270°, 300°$.

46．$2(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)$, $\varphi=0°, 60°, 120°, 180°, 240°, 300°$.　　47．$z_1=-2+\mathrm{i}$, $z_2=-3+\mathrm{i}$.

48．$z_1=2\mathrm{i}, z_2=-1$．　49．$z_k=\cot\dfrac{2k+1}{2n}, k=0,\cdots,n-1$．　55．1),2),4)．　57．1),3),4)．

73．0．　81．$(\mathrm{e},\mathrm{e}^2,\cdots,\mathrm{e}^m)$．　82．$(\mathrm{e},\sqrt{\mathrm{e}},\cdots,\sqrt[m]{\mathrm{e}})$．

83．$(\ln 2,\ln 3,\cdots,\ln(m+1))$．　84．$(3,4,6)$．　85．$(2,\sqrt{\mathrm{e}})$．

86．(e^{ij})．　87．$\begin{pmatrix}2 & 6 & 12\\ -2 & -6 & -12\end{pmatrix}$．　88．$\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-1} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-1}\end{pmatrix}$．

91．$\sup\{f\}=f(-1)=-\dfrac{1}{3},\inf\{f\}=f(1)=1$．　92．$\sup\{f\}=+\infty,\inf\{f\}=-\infty$．

93．$\sup\{f\}=4,\inf\{f\}=0$．　108．2．　109．$\dfrac{313}{280}$．　110．$\dfrac{2}{3}\sqrt[6]{a}$．

111．$\dfrac{\alpha-1}{2}$．　112．$\dfrac{\alpha^2-\beta^2}{2m}$．　113．$\sqrt[m]{a_1a_2\cdots a_m}$．　114．$\dfrac{1}{4m}$．　115．$\dfrac{1}{m(p+1)}$．

116．$\dfrac{x}{p+1}$．　117．$\mathrm{e}^{\frac{1}{p+1}}$．　120．$\dfrac{1}{2}$．　121．$-\dfrac{3}{2}$．　122．$\dfrac{1}{2}$．

123．e^{-1}．　124．e^{-1}．　125．$\dfrac{1}{3}$．　126．$\sqrt{2}$．　127．$l=-2, L=2$．

128．$l=0, L=1+b^2$．　129．$l=-2, L=1$．　130．$l=0, L=\mathrm{e}$．　131．$l=\mathrm{e}, L=\mathrm{e}+1$．

132．$l=\dfrac{\mathrm{e}}{3}, L=\dfrac{\mathrm{e}}{2}$．　133．**连续**．　134．**连续**．　135．**连续**．　136．**连续**．　137．**连续**．

138．$x=0$ **为可去不连续点**．　139．**函数有间断点**，$x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$．

140．**函数有间断点**，$x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$．　141．**连续**．　142．**函数的连续点仅为** $x=k\pi, k\in\mathbf{Z}$．

143．**连续**．　144．**连续**．　145．**连续**．　146．**连续**．　147．**连续**．

148．**在** $x=n, n\in\mathbf{Z}$ **右连续**．　149．**连续**．　150．**连续**．　151．**连续**．

152．$x=0$ **为二阶间断点**．　154．$x=(2n+1)\pi(n\in\mathbf{Z})$**为可去间断点**．

155．$x=\pm 1$ **为二阶间断点**．　156．$x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$**为可去间断点**．

157．$x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$**为极点**．　158．$x=n\pi(n\in\mathbf{Z})$**为可去间断点**．

159．$x=0$ **为二阶间断点**．　160．$x=\dfrac{2}{\pi(2n+1)}(n\in\mathbf{Z})$**为二阶间断点**．

161．**连续**．　162．**连续**．　163．**连续**．　164．**连续**．　165．**连续**．　166．**连续**．

167．$x=\dfrac{jk-1}{i}(j=1,\cdots,n, i=1,\cdots,m, k\in\mathbf{Z})$**为间断点**．　168．$x=0$ **为间断点**．

169．$x=0$ **为可去间断点**．　170．$x=0$ **为间断点**．　171．**等度连续**．　172．**等度连续**．

173．**等度连续**．　174．**等度连续**．　175．**等度连续**．　176．**不是等度连续**．　177．**等度连续**．

178．**等度连续**．　179．**等度连续**．　180．**等度连续**．　181．**不是等度连续**．

182．**不是等度连续**．　183．**等度连续**．　184．**不是等度连续**．　185．**不是等度连续**．

第 2 章

1．$\dfrac{x^8}{(x^4-1)^3}$．　2．$\dfrac{1}{(\sqrt{x+2}+1)\sqrt{\sqrt{x+2}-1}}$．　3．$\dfrac{1}{\sin^4 x\cos x}$．

4 . $\frac{x}{(e^{x^2}+1)^2}e^{\frac{5x^2}{4}}$.　5 . $\tan x\quad \cos 2x$.　12 . $\frac{y(y^2+1-x^2)}{(x^2+y^2+1)^2}$.　13 . $\frac{t^2(t-x^2)}{(t+x^2)^2}$.

20 . $x^{u(x)}\, u(x)\quad 1+\frac{1}{x}+\ln x\ln(\ln x)\quad , u(x)=(\ln x)^x$.

22 . $-2u(x)e^{-u^2(x)}, \frac{3u^2(x)}{\mathrm{ch}^2 u^3(x)}, 4u^3(x)\mathrm{sh}\, u^4(x), 5u^4(x)\mathrm{ch}\, u^5(x)\quad u'(x)$.

24 . $(\alpha\cos t-\sin t)e^{\alpha t}, (\alpha\sin t+\cos t)e^{\alpha t}, -\frac{1}{t^2}u'\ \frac{1}{t}\quad , u'(\sin t)\cos t$.

25 . $(\rho'(\varphi)\sin\varphi+\rho(\varphi)\cos\varphi, \rho'(\varphi)\cos\varphi-\rho(\varphi)\sin\varphi, 2\varphi-x, 3\varphi^2-x^2)$.

27 . $(2\cos(e^{2x})e^{2x}, e^{\sin^2 x}\sin 2x, \psi'(\sin^2 x)\sin 2x, -\varphi'(\cos^2 x)\sin 2x)$.

30 . 1) $\frac{\sum_{k=1}^{n} f_k(x)f_k'(x)}{\sum_{k=1}^{n} f_k^2(x)}, 1$;　2) $\frac{2}{3}, 2\sin x+x\cos x, 2\cos x-x\sin x\quad x$.

31 . 1) $(3,0,0)$.　32 . 1) 1 .　33 . 1) $t=0$, x 为任意 .　2) $t=1$, $x=\pm 4$.

35 . 1) $\frac{1}{2}\ \omega^3 n+\frac{t^{2n}-1}{t^2-1}$, $t\neq 1$;　2) $\frac{n}{2}(\omega^3+1)$, $t=1$.　36 . 3) $-\sin 2(x+\mathrm{i}x^3)(1+3\mathrm{i}x^2)$.

39 . $\begin{matrix}\frac{-4xy}{(x^2-y)^2} & \ln\sin(xy)+\frac{xy}{\tan(xy)}\quad \sin^x(xy)\\ (xy)^{\sin y}\frac{\sin y}{x} & y^{1+\sin(xy)}\ln y\cos(xy)\end{matrix}$.　40 . $\begin{matrix}\frac{x}{3\quad 1+x^2} & \omega\cos\omega x\\ -\omega\sin\omega x & 1\end{matrix}$.

43 . 0 .　44 . 2cos2 ; 2 .　48 . 1) 0;　2) 0 .　50 . 当 $k\in \mathrm{Z}$ 时, $f'(k)=0$; 当 $x\neq k$ 时, $f'(k)$ 不存在 .

51 . 1) $f'(x)=\begin{cases}-\sin x & 0\le x\le\pi,\\ 0, & \pi\le x<+\infty\end{cases}$.　54 . $f'(x)=\frac{\mathrm{ch}\, x}{x}-\frac{\mathrm{sh}\, x}{x^2}$. $x\neq 0$.　72 . 不能 .

73 . 1) $x_n' y_{n+1}+x_n y_n'$, $f'(0)=0$.　74 . 1) $x=\frac{2}{2}(1+t)$, $y=\frac{2}{2}(1-t)$, $z=\pi+4t$.

75 . 1) $x+2y+3z=6$.　81 . 1) 0; $4t^3+1$.　82 . 1) $\arccos\frac{\pi^2-4}{\pi^2+4}$.

83 . 1) $\frac{2x^3-x^2+x+1}{(x^2-x+1)\quad x^2+x+1}\mathrm{d}x$;　2) $\frac{(x+1)(x+2)}{2x^3+9x^2+15x+9}\mathrm{d}x$.

84 . 2) $f'(x)=\psi'\ \frac{u(x)}{v(x)}\quad \frac{v(x)\mathrm{d}u(x)-u(x)\mathrm{d}v(x)}{v^2(x)}$.　87 . 1) $\mathrm{d}f(x)=\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)^2}+2\mathrm{i}x\mathrm{d}x$.

88 . 1) $(0,1,2x,\cdots,nx^{n-1})\mathrm{d}x$.　92 . $\begin{matrix}e^{(\psi,\varphi)} & \tan^2(\psi,\varphi)+1\\ \mathrm{ch}(\psi,\varphi) & \mathrm{sh}(\psi,\varphi)\end{matrix}\quad ((\psi,\mathrm{d}\varphi)+(\mathrm{d}\psi,\varphi))$.

94 . $\frac{(f(x), f'(x))\mathrm{d}x}{|f(x)|}$.　96 . 1) 0.275⋯ .　100 . $3\mathrm{d}x$.　107 . 1) $\mathrm{d}t^2$; $5\mathrm{d}t^2$.　109 . 3 .

115 . $\frac{y}{x}$.　119 . 0 .　126 . $\mathrm{d}f(0)=\frac{\mathrm{d}x}{5}$.　127 . $f'(x)=(\cos t,-\sin t,1)\frac{1}{3(1+t^2)}$.

132 . $\begin{matrix}\cos 2t & -\sin 2t\\ \sin 2t & \cos 2t\end{matrix}\quad \frac{2}{2-\sin t}$.　134 . $\frac{\psi'(|y|)(t+3t^5)}{|y|-\psi(|y|)\psi'(|y|)}, 1, 3t^2\quad \frac{1}{2(\varphi(t^2)+2t^2\varphi'(t^2))}$.

137 . $(-1)^n n!\quad \frac{1}{(x-1)^{n+1}}+\frac{2}{(x-2)^{n+1}}-\frac{3}{(x-3)^{n+1}}$.

156 . $2(A^{-1}(x)A'(x))^2A^{-1}(x)-A^{-1}(x)A''(x)A^{-1}(x)$.

178 . $\begin{pmatrix}\dfrac{u''(x)}{2u'^2(x)+2u(x)u''(x)} & \dfrac{v''(x)}{2v'^2(x)+2v(x)v''(x)}\end{pmatrix}$.

181 . $\dfrac{1}{5(1+t^4)^2}\begin{pmatrix} e^{-t}\left(4t^3+\frac{1}{5}\right) & e^{-2t}\left(\frac{4}{5}+8t^3\right) & e^{-3t}\left(12t^3+\frac{9}{5}\right) \\ -4t^3 & \frac{2}{5}-8t^4 & \frac{6}{5}t-12t^5\end{pmatrix}$.

192 . $\xi\tan\xi=1$. 197 . A 为常数 . 254 . 当 $|x|>\frac{3}{2}$ 时下凸 .

255 . 当 $x<0$ 时上凸,而当 $x>\frac{2}{3}$ 时下凸 . 256 . 在区间 $(0,1)\cup(3,+\infty)$ 上凸,而当 $1<x<3$ 时下凸 .

257 . 当 $x>-1$ 时下凸 . 258 . 当 $t>-1$ 时下凸 . 259 . 上凸 . 260 . 当 $0<t<e^{-1}$ 及 $t>e$ 时上凸 .

261 . 下凸 . 262 . 上凸 . 264 . 在 $x=-1$ 左侧下凸 . 265 . 不是拐点 .

295 . 0 . 296 . $\frac{1}{2}$. 297 . 0 . 298 . $\frac{1}{2}$. 299 . $\frac{5}{12}$. 301 . 当 $a=b$, $c=0$ 时 0 .

302 . $b\left(\frac{1}{3}-\frac{\ln 3}{2}\right)$, $a=9b\ln 3$. 304 . $\frac{a}{5}$. 305 . 0 . 306 . 1 . 307 . 0 . 309 . 1 .

310 . $e^{-\frac{1}{6}}$. 312 . $-\frac{7}{240}e^{\frac{1}{6}}$, $n=2$. 313 . $-2\,\mathrm{sh}\frac{1}{2}$, $n=0$. 314 . 0, $n\le 2$. 315 . 1 .

316 . 1 . 318 . 0 . 320 . $e^{-\frac{1}{12}}$. 321 . e^{-11} . 322 . 0 .

323 . $\left\{-\frac{1}{3},0,1\right\}$. 324 . $\begin{pmatrix}-\frac{\pi}{2n} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. 325 . $\frac{8}{7}$.

359 . 提示:将函数 f 对 h 展开 . 364 . 0 .

404 . 1) $f(x)=\begin{cases}\cos x, & -\frac{\pi}{2}\le x\le \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2};\\ \sin x, & \frac{\pi}{2}\le x\le \pi;\\ \tan x, & \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\le x<\frac{\pi}{2},\ \pi\le x<\frac{3\pi}{2}.\end{cases}$ 函数 $f(x)$ 以 2π 为周期 .

2) $f(x)=\begin{cases}\tan x, & -\frac{\pi}{2}<x\le 0,\ \frac{\pi}{2}<x\le\frac{\pi}{2}+\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2};\\ \sin x, & 0\le x\le\frac{\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}\le x\le\frac{3\pi}{2};\\ \cos x, & \frac{\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}+\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}\le x\le\frac{5\pi}{4}.\end{cases}$

405 . 位于圆锥面 $x^2+y^2=z^2$ 上的螺旋线 .

406 . 位于抛物柱面 $y=\frac{2}{a}x^2-a$ 上的双向 2π 为周期的曲线,其在 OYZ 平面上的投影为闭曲线,关于 OY 轴对称 .

407 . 区间 $|x|\le 1$. 408 . 正方形内部的 $\frac{3}{4}$.

409．长方形 $0\leq x\leq 5,\ -3\leq y\leq 2$ 的内部，去掉半圆 $x\ ^{4}+y^{2}\leq 1$．

410．平面三角形，三顶点分别是 $M_1(-1,0)$；$M_2(0,1)$；$M_3(1,0)$．

第 3 章

1．$-\frac{1}{5}(1-4x)\ ^{4}\ 1-4x$．　2．$\arctan(x+2)$．　3．$\frac{1}{4}\arctan\quad x+\frac{1}{2}$．

4．$\frac{1}{b^2-a^2}\ln(a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x)$．　5．$\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+9)$．　6．$\tan\frac{x}{2},\ x\neq\pi+2k\pi$．

7．$\frac{1}{2n}\arctan(x^{2n})$．　8．$\frac{1}{4n}\ln\frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1},\ |x|\neq 1$．　9．$-\frac{1}{3}\cdot\frac{|x|\quad x}{x^3+1},\ x>0,\ x\neq -1$．

10．$\ln\left|\tan\quad\frac{x}{2}+\frac{x}{4}\quad\right|-\cot x-\ x,\ x\neq\frac{k\pi}{2}$．　11．$\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x,\ x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$．

12．$-\sin x+\frac{1}{3}\sin^3 x$．　13．$-\frac{1}{2}e^{-x^2-1}$．　14．$\frac{2^x e^x}{1+\ln 2}$．　15．$-\sin\frac{1}{x},\ x\neq 0$．

16．$\frac{1}{3}\ln^3 x,\ x>0$．　17．$2\quad\ln x,\ x>1$．　18．$\frac{\tan^3 x}{3}-\tan x+x,\ x=\frac{\pi}{2}+k\pi$．

19．$\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}$．　20．$\frac{1}{3}(x^3+1)^{\frac{3}{2}}$．　21．$\frac{1}{3}\quad(x^2+x+1)^3$．

22．$\frac{1}{3}\ln\left|x^3+\frac{3}{2}x^2+3x+1\right|$．　23．$\ln|x+1+\quad 2+2x+x^2|$．

24．$\frac{x}{[x]^2}+2\quad 1-\frac{1}{2^2}\quad+3\quad\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\quad+\cdots+[x]\quad\frac{1}{([x]-1)^2}-\frac{1}{[x]^2}$．

25．$\frac{1}{\lambda}\quad-\frac{[x]^\lambda}{x^\lambda}+[x]+\quad 1-\frac{1}{2}\quad^{\lambda}+\cdots+\quad 1-\frac{1}{[x]}\quad^{\lambda}$．

26．$x\ln[x]+\sum_{n=2}^{[x]}\ln\quad 1-\frac{1}{n}\quad^{n}$．　27．$\frac{x}{[^m x]^\lambda}+\sum_{n=1}^{[^m x]}n^m\quad\frac{1}{(n-1)^\lambda}-\frac{1}{n^\lambda}$．

28．$-\frac{1}{2}\ln^2\frac{1+x}{x}$．　29．$\frac{1}{6}\ln^3(1-x^2),\ |x|<1$．　30．$-(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$．　31．$\frac{-2-5x^2}{15\quad(x^2+1)^5}$．

32．$\frac{1}{4}\ln\frac{x^8-x^4+1}{x^4}$．　33．$\frac{1}{2}\arctan\frac{x^4+1}{x^2}$．　34．$\frac{1}{3}\arctan\quad x^3+\frac{1}{x^3}\quad-\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}x$．

35．$\frac{x^3}{3}-x-\frac{4}{3}$，如果 $-\infty<x<1$；$x-\frac{x^3}{3}$，如果 $-1\leq x<1$；$\frac{x^3}{3}-x+\frac{4}{3}$，如果 $1\leq x<+\infty$．

36．$(-1)^n(x-n\pi)^2+\frac{\pi^2}{8}(1-(-1)^n)$，其中 $n=\quad\frac{2x+\pi}{2\pi}$．

37．$\frac{1}{2}|x-2n\pi|(x-2n\pi)+n\pi^2$，其中 $n=\quad\frac{x+\pi}{2\pi}$．

38．$\frac{6x^4+2x^2+1}{15}\quad x^5+1$．　39．$\frac{1}{23}(x+1)^{23}-\frac{1}{11}(x+1)^{22}+\frac{1}{21}(x+1)^{21}$．

40．$-\frac{1}{8(x+9)^8}+\frac{1}{(x+9)^9}$．　41．$\frac{1}{a^4}\quad\frac{x}{x^2-a^2}-\frac{x^3}{3(\quad x^2-a^2)^3}\quad,\ |x|>a$．

42. $-(x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}$, $|x|>a$. 43. $-\frac{1}{a^4}\left(\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}+\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\right)$, $|x|>a$.

44. $\frac{1}{a^4}\left(\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}-\frac{(\sqrt{x^2-a^2})^3}{3x^3}\right)$, $|x|>a$. 45. $\frac{1}{a^4}\left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{x}{3(\sqrt{a^2-x^2})^3}\right)$, $|x|<a$.

46. $\frac{1}{3}(\sqrt{a^2-x^2})^3+a^2\sqrt{a^2-x^2}-a^3\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|$, $|x|<a$.

47. $\frac{1}{5a^2x^5}(\sqrt{a^2-x^2})^5$, $|x|<a$. 48. $e^{-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$. 49. $2\arcsin\frac{x}{2}+\frac{x}{2}(x-2)\sqrt{4-x^2}$, $|x|\leq 2$.

50. $\ln\left|\frac{xe^x}{1+xe^x}\right|$. 51. $\ln(x\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^4+x^2+1})$. 52. $\frac{1}{2}\ln\frac{x^4+2x^2+1}{x^4+3x^2+1}$.

53. $\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{5x^2}-\frac{1}{x}-\arctan\frac{1}{x}$. 54. $\frac{x^4}{4}\ln x-\frac{x^4}{16}$, $x>0$. 55. $(3x^2-6)\sin x-(x^3-6x)\cos x$.

56. $-x\cot x-\ln|\sin x|$. 57. $2x\cos x+(x^2-2)\sin x$. 58. $\frac{x^2}{4}-\frac{x\sin(2x)}{4}-\frac{\cos(2x)}{8}$.

59. $-\frac{\cos x}{4\sin^4 x}-\frac{3\cos x}{8\sin^4 x}+\frac{3}{8}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$. 60. $\frac{\sin x}{4\cos^4 x}+\frac{3\sin x}{8\cos^2 x}+\frac{3}{8}\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$.

61. $\frac{1}{6}\tan^6 x-\frac{1}{4}\tan^4 x+\frac{1}{2}\tan^2 x+\ln|\cos x|$. 62. $x\arcsin\frac{x}{2}+\sqrt{4-x^2}$, $|x|<2$.

63. $-\frac{1}{2x^2}\arcsin x-\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x}$, $|x|\leq 1$. 64. $\frac{x^3}{3}\arctan x-\frac{x^2}{6}+\frac{1}{6}\ln(1+x^2)$.

65. $-\frac{1}{x}\arctan\frac{x}{a}-\frac{1}{2a}\ln\frac{x^2+a^2}{x^2}$, $x\neq 0$. 66. $\frac{x^2+1}{2}\arctan x+\frac{x}{2}$.

67. $-\frac{1}{2x^2}\arctan x+\frac{1}{2}\arctan x+\frac{1}{2x}$. 68. $e^{ax}\left(\frac{x^3}{a}-\frac{3x^2}{a^2}+\frac{6x}{a^3}-\frac{6}{a^4}\right)$.

69. $\frac{e^{ax}}{a^2+4}\left(a\cos^2 x+2\sin x\cos x+\frac{2}{a}\right)$. 70. $-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$, $x>0$. 71. $x\ln^2 x-2x\ln x+2x$, $x>0$.

72. $\frac{x^3}{3}\ln^2 x-\frac{2x^2}{9}\ln x+\frac{2x^3}{27}$, $x>0$. 73. $-\frac{\ln^2 x}{x}-\frac{2\ln x}{x}-\frac{2}{x}$, $x>0$. 74. $x\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})-\sqrt{a^2+x^2}$.

75. $\frac{x^3}{3}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})-\frac{(\sqrt{x^2-a^2})^3}{9}-\frac{a\sqrt{x^2-a^2}}{3}$. 76. $x\operatorname{ch}x-\operatorname{sh}x$.

77. $\frac{x\operatorname{sh}2x}{4}-\frac{\operatorname{ch}2x}{8}-\frac{x^2}{4}$. 78. $(x^3+6x)\operatorname{sh}x-(3x^2+6)\operatorname{ch}x$. 79. $x-\sqrt{1-x^2}\arcsin x$.

80. $\left(\frac{\pi x}{2}-2\sqrt{1-x^2}\right)\arcsin x-x\arcsin^2 x+2x+\sqrt{1-x^2}$, $|x|\leq 1$.

81. $\frac{x-2}{x+2}e^x$, $x\neq -2$. 82. $\left[\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\right)\sin x-\frac{(x-1)^2}{2}\cos x\right]e^x$.

83. $x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^2}-\frac{1}{2}\arctan^2 x$. 84. $\frac{\ln(x^4+1)}{4}-\frac{x^4}{4(x^4+1)}$.

85. $-\frac{x^6}{6(x^3-1)^2}-\frac{x^3}{3(x^3-1)}+\frac{1}{3}\ln|x^3-1|$, $x\neq 1$.

86. $-\frac{x^5}{8(x^4-1)^2}-\frac{5x}{32(x^4-1)}+\frac{5}{128}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{5}{64}\arctan x$, $x\neq\pm 1$.

87 . $\frac{1}{2\ \ 2}\ln\left|\frac{x-\ \ 2}{x+\ \ 2}\right|+\frac{1}{2\ \ 2}\ln\left|\frac{x-\ \ 3}{x+\ \ 3}\right|, x^2\neq 2, x^2\neq 3$.

88 . $2\ln\frac{x+4}{x+2}-\frac{5x+12}{x^2+6x+8}$.

89 . $\frac{1}{4}\arctan x+\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+1}{|x-1|}-\frac{7}{4(x-1)^2}, x\neq 1$.

90 . $\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{1}{18}\ln(x^2+1)+\frac{7}{288}\ln(x^2+4)-\frac{1}{24(x^2+4)}, x\neq 0$.

91 . $\frac{1}{4}\arctan\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{8}\ln\frac{x^2}{x^2-2}, x^2\neq 1; 2$.

92 . $x-\ln|x+1|-\frac{1}{3}\arctan\frac{x^2-1}{x\ \ 3}-\frac{\pi}{2\ \ 3}\operatorname{sgn}x$.

93 . $-\frac{x^3+x}{x^2+x+1}$.

94 . $-\frac{9x^2+10x+7}{(x+1)(x^2+x+1)}, x\neq -1$.

95 . $\frac{x}{x^6+1}$.

96 . $\frac{x+8}{x^8+1}$(整个积分) .

97 . $2\ln|\ \ x+1\ -1|-\frac{x+1}{(\ \ x+1\ -1)^2}-\frac{2\ \ \ x+1}{\ \ x+1\ -1}, x\neq 0, x>-1$.

98 . $\frac{2}{3}\arctan\ \ \frac{x+1}{x+2}\ ^{\frac{3}{2}}\ \ x\neq -2$.

99 . $4\ \ \ \ x+2\ -1-2\ \ 2\arctan\ \ \ \ \frac{\ \ x+2\ -1}{2}, x>-1$.

100 . $\ln\frac{x^2+1+\ \ \ x^4+3x^2+1}{|x|}$.

101 . $\frac{3}{9}\arcsin x-\frac{2x^3+3x}{8}\ \ \ 1-x^2, |x|\leq 1$.

102 . $2(x^3+1)\ \ \ x^2+x+1+2\ln\ \ \ x+\frac{1}{2}+\ \ \ x^2+x+1$.

103 . $\frac{1}{4\ \ 2}\ln\left|\frac{x^2+2x+2-\ \ 2(x+1)}{x^2+2x+2-\ \ 2(x+1)}\right|-\frac{x+1}{2\ \ \ x^2+2x+2}$.

104 . $\frac{(3x+8)\ \ \ x^2+1}{8(x+2)}+\frac{3}{8}\arctan\ \ \ x^2+1$.

105 . $\frac{1}{2}\arctan\frac{\ \ x^2+x+1}{2(1-x)}-\frac{1}{6}\ln\frac{3(1+x+x^2)-(x+1)\ \ 2}{1-x-x^2}+\frac{\ \ x^2+x+1}{x}$.

106 . $\ln\frac{\ \ x^2+1+\ \ \ x^2+1}{4}$.

107 . $\frac{-t^5}{10}+\frac{t^3}{3}-\frac{t}{2}$,其中 $t=\ \ \ \ \frac{x^4+1}{x^4}, x\neq 0$.

108 . $\frac{3}{7}(4\ \ \ x+\ ^4\ x-3)\ \ ^3\ 1+\ ^4\ x, x\geq 0$.

109 . $-\frac{1}{4}\cot\ \ x+\frac{\pi}{4}\ -\frac{1}{12}\cot^3\ \ x+\frac{\pi}{4}$.

110 . $\frac{2}{3}\ln\left|\tan\ \ \frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\ \ \right|+\frac{2}{3}\arctan(\sin x-\cos x), \sin x\neq -\cos x$.

111 . $-\frac{2\ \ 2}{5}\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|+\frac{2}{5\ \ \ \ 5-2}\arctan\frac{2\cos t}{\ \ 5-2}-\frac{1}{5\ \ \ \ 5-2}\ln\left|\frac{\ \ 5+2+\ \ 2\cos t}{\ \ 5+2-\ \ 2\cos t}\right|$,

$t=x-\frac{\pi}{4}, \cos x\neq \sin x$.

112 . $\frac{\cos 2x-15}{15(4+\sin 2x)}+\frac{4}{15\ \ \ 15}\arcsin\frac{4\sin 2x+1}{4+\sin 2x}$.

113 . $\ln\left|\tan\ \ \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\ \ \right|-\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{3\sin^3 x}, \sin x\neq 0$.

114 . $\ln\left|\frac{\ \ \cos^4 x+\sin^4 x-\cos 2x}{\sin 2x}\right|$.

115 . $\arcsin(\sin x-\cos x)$.

116 . $\frac{4x}{25}+\frac{3}{25}\ln|4\cos x+3\sin x|$.

117 . $\frac{e^{ax}}{a^2(1+ax)}$.

118 . $-\frac{e^{ax}}{x}+a\operatorname{li}(e^{ax}), x\neq 0$.

119 . $\frac{1}{2}\operatorname{th}\frac{x}{2}-\frac{1}{6}\operatorname{th}^3\frac{x}{2}$.

120 . $\frac{\operatorname{sh}x}{2\operatorname{ch}^2 x}+\frac{1}{2}\arctan(\operatorname{sh}x)$.

121 . $\frac{\operatorname{sh}4x}{32}+\frac{\operatorname{sh}2x}{4}+\frac{3x}{8}$.

122 . $\frac{\operatorname{sh}4x}{32}-\frac{x}{8}$.

123 . $e^4\operatorname{li}(e^{2(x-2)})-e^2\operatorname{li}(e^{2(x-1)}), x\neq 1,2$.

124 . $\frac{-e^{\frac{x^2}{4}}}{2(e^{x^2}+1)}+\frac{1}{8\sqrt{2}}\ln\frac{e^{\frac{x^2}{2}}+\sqrt{2}e^{\frac{x^2}{4}}+1}{e^{\frac{x^2}{2}}-\sqrt{2}e^{\frac{x^2}{4}}+1}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{e^{\frac{x^2}{2}}-1}{\sqrt{2}e^{\frac{x^2}{4}}}$.

125 . $\frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$, $\cos 2x>0$.　　126 . $\frac{\sin x}{\sqrt{\cos 2x}}$, $\cos 2x>0$.

127 . $-\frac{1}{2}\arctan\frac{\cos x}{\sqrt[4]{\cos 2x}}-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sqrt[4]{\cos 2x}+\cos x}{\sqrt[4]{\cos 2x}-\cos x}\right|$.　　128 . $\arctan\sqrt{\cos 2x}-\sqrt{\cos 2x}$.

129 . $x\tan\frac{x}{2}$.　　130 . $\frac{\sin x-x\cos x}{x\sin x+\cos x}$.　　131 . $\frac{x\sin x+\cos x}{x\cos x-\sin x}$.

132 . $x+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$, $x\neq-\frac{\pi}{2}+n\pi, n\in Z$.　　133 . $-\tan\frac{x}{2}+\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|$.

134 . x^x , $x>0$.　　135 . $-e^{-x}\arcsin e^x-\ln(1+\sqrt{1-e^{2x}})+x$, $-\infty<x<0$.

136 . $-2e^{-\frac{x}{2}}\arctan e^{\frac{x}{2}}-\arctan^2 e^{\frac{x}{2}}+x-\ln(1+e^x)$.

137 . $\frac{1}{2}(|1+x|(1+x)+(1-x)|1-x|)$.　138 . $-\frac{4}{3}\sqrt{1-x}\sqrt{x}$, $0\leq x<1$.

139 . $-\frac{\operatorname{sgn}x}{3}\ln\frac{x^3+2+2\sqrt{x^6+x^3+1}}{2|x^3|}$.　　140 . $\ln\left(\sqrt{x^2+[x]^2}\right)+\sum_{n=1}^{[x]}\ln\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)^2$, $x>1$.

141 . $\frac{x}{1+[x]}+\sum_{n=1}^{[x]}\frac{1}{n}$, $x>0$.

第 4 章

1 . 136 .　2 . $\frac{2}{3}$.　3 . $\frac{2186}{\ln 3}$.　4 . 1 .　5 . 85.5 .　6 . 16 .　7 . $\frac{\pi}{4}$.　8 . $\frac{\pi}{3}$.

9 . $4e^{-1}$.　17 . $\frac{(b-a)^2}{24}(f'(b)-f'(a))$.　18 . $37.5\cdot150, 2^4-\frac{1}{4}(1,3^4+2^4+3^4+\cdots+150^4)$.

19 . $\frac{2}{3\cdot2.4^3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{35^3}\right)-\frac{35}{3\cdot35.5^3}$.　20 . $\ln\frac{125.3^{125}}{125!\,1.2}$.

21 . $74\sqrt{74.2}-(\sqrt{3}+\sqrt{4}+\cdots+\sqrt{74})-2\sqrt{2.3}$.　22 . $0.9^2+\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}\right)-1-5\cdot0.2^2$.

23 . $\frac{9900}{\pi}$.　24 . $\frac{8028}{3}$.　25 . $8+\frac{3\sqrt{3}}{2}\pi$.　26 . $\frac{6}{27}+\frac{\pi\sqrt{2}}{48}$.　27 . $4-\pi$.　28 . $\frac{\pi^4}{16}-3\pi^2+24$.

29 . $\frac{\pi(1+e^{-1})}{1+\pi^2}$.　30 . 0,如果$|a|<1$; $\frac{\pi}{a}$,如果$|a|=1$; $\frac{2\pi}{a}$,如果$|a|>1$.　31 . $4n$.　32 . $\frac{2\operatorname{ch}\frac{k\pi}{2}}{1+k^2}$.

33 . $\frac{\pi}{9\sqrt{3}}+\frac{\ln 2}{9}-\frac{1}{6}$.　34 . $-\frac{5}{216}$.　35 . $\frac{(2n+1)!\,2\operatorname{ch}\frac{m\pi}{2}}{(m^2+1^2)(m^2+3^2)\cdots(m^2+(2n+1)^2)}$.　36 . $\frac{\pi\ln 2}{8}$.

37 . $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$, $|b|<a$.　38 . $\frac{\pi(a^2+b^2)}{4a^3b^3}$.　39 . $\frac{(2n)!\,\pi}{2^{2n}(n!)^2}$.　40 . π .　41 . $x=2$.　42 . $2\ln 2$.

43 . $\max_{-1\leq x\leq1}f(x)=f(1)$, $\min_{-1\leq x\leq1}f(x)=f\left(-\frac{1}{2}\right)$.　44 . $f_{\min}=f(1)=-\frac{17}{12}$; **拐点为** $\left(2,-\frac{4}{3}\right)$, $\left(\frac{4}{3},-\frac{112}{81}\right)$.

47 . $2+\ln\frac{2}{e^2+1}$. 48 . 当 $a=e$. 59 . $I<0$. 60 . $I_1>I_2$. 61 . 1 . 62 . $f(0)\ln\frac{b}{a}$.

63 . $\frac{1}{8}\ln\frac{4}{3}-\frac{1}{4}\arctan\frac{5}{37},\ \frac{1}{2}\ln\frac{1+2^{-9}}{1+2\cdot 3^{-10}}$.

64 . $\frac{\pi}{2}+2\ln\frac{2}{1+e^{\frac{\pi}{2}}}$ $\quad\frac{64}{231}$ $\quad\frac{2}{15}\ 64-\ 32+4\pi+\frac{3\pi^2}{4}$ $\quad 4-\pi$ $\quad\frac{1}{2}(1-\ln 2)$.

65 . (α_1,α_2) , 其中 $\alpha_1=\frac{4\sqrt{2}}{3}\ln^2 2-\frac{4}{3}\ln 2+\frac{8}{9}-\frac{2\sqrt{2}}{9}+\frac{5}{2}\arctan 2-\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$,

$\alpha_2=(\ln 4)\ln\frac{2}{e}+\frac{1}{6}\ln\frac{5}{2}+\frac{8}{3}\arctan 2-\frac{\pi}{12}+\frac{1}{4}$.

66 . $\frac{3}{2}+\ln(1+\sqrt{2})-e^{-1}-\sqrt{2}$. 67 . $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. 68 . $\frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$. 69 . $\frac{\pi}{2}(\sqrt{2}-1)$.

70 . $\frac{\pi}{8}(b-a)(a+3b)$. 71 . $\frac{a}{a^2+b^2}$. 72 . $\frac{b}{a^2+b^2}$. 73 . $\frac{\pi}{2a^{2n-1}}\cdot\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}$.

74 . $\frac{\pi(2n-3)!!\,a^{n-1}\operatorname{sgn}a}{(2n-2)!!\,(ac-b^2)^{n-\frac{1}{2}}}$. 75 . $\frac{(2n)!}{a(a^2+2^2)(a^2+4^2)\cdots(a^2+4n^2)}$. 76 . $I_1=I_2=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

77 . **收敛** . 78 . **发散** . 79 . **发散** . 80 . **发散** . 81 . **收敛** . 82 . **发散** . 83 . **发散** .

84 . 当 $n>1$ 时,绝对收敛,当 $n\leq 1$ 时,发散 . 85 . 收敛 . 86 . 收敛 . 97 . $\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\frac{b-\sqrt{b^2-a^2}}{a}$.

98 . $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$. 99 . 0 . 103 . 1) 4; 2) 4 . 104 . $V([t]-t;0,x)=x+[x],\ p(x)=[x],\ q(x)=x,\ 0\leq x\leq 2$.

105 . $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. 106 . $a\operatorname{sh}\frac{x_0}{a}$. 107 . $a\ln\frac{a}{b}$. 108 . $6a$. 109 . $\frac{5}{2}\left(2+\frac{\ln(2+\sqrt{3})}{3}\right)a$.

110 . $t_0\sqrt{a^2+b^2}$. 111 . $x_0+\frac{2x_0^2}{27}$. 112 . x_0+z_0 . 113 . x_0+z_0 . 114 . $\frac{a}{2}\ln(1+\sqrt{2})+a$.

116 . $\frac{3}{8}\pi a^2$. 117 . $\pi\sqrt{2}$. 118 . $\frac{\pi}{2}(a^2+b^2)$. 119 . $\frac{1}{6}(40-3\pi)a^2$. 120 . $\frac{(4-\pi)a^2}{2}$.

121 . 0.1 . 122 . $\frac{ab}{6}$. 123 . $ab\arcsin\frac{a-b}{a+b}$. 124 . 一个回路所围图形的面积等于 $\frac{\pi a^2}{16}$.

125 . $\frac{a^2}{2}\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\varphi_0\right)$. 126 . $(\pi+1)a^2$. 127 . $\frac{a^2}{14}$. 128 . $8\left(1+\frac{2}{3}-\arctan\left(1+\frac{2}{3}\right)\right)$.

129 . $4ab\arctan\frac{b}{a}$. 130 . $\frac{\pi^2}{2}$. 131 . $8\pi a^3\ln\left(1-\frac{b}{2a}\right)-\pi\left(\frac{b^3}{3}+ab(4a+b)\right)$.

132 . $V_1=\pi a^3\left((2k^2-6k+5)t_0-\frac{1}{3}(2k^2-13k+15)\sqrt{2k-k^2}\right)$.

$V_2=\pi a^3\left((2k^2-6k+5)(\pi-t_0)+\frac{1}{3}(2k^2-13k+15)\sqrt{2k-k^2}\right)$, 其中 $t_0=\arccos(1-k)$.

133 . π^2a^3 . 134 . $\frac{3}{8}\pi a^3$. 135 . $2\pi a^3\left(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha-\frac{\sin^3\alpha}{3}\right)$. 136 . $\frac{\pi a^3}{3\sqrt{3}}$. 137 . $\frac{\pi a^3}{3\sqrt{2}}$.

138. $\pi^2 a^3 \frac{2}{4}$. 139. $\frac{\pi}{32}$. 140. $\frac{4a^2}{15}$ $2ap$. 141. $\frac{4a^3}{15}$. 142. $\frac{16}{15}a^2$ ab.

143. $\frac{\pi a^3}{4}$ $e^{\frac{2b}{a}} - e^{-\frac{2b}{a}} + 4\frac{b}{a}$. 144. $\frac{1}{3}r^3\cot\alpha((2+\cos^2\varphi)\sin\varphi - 3\varphi\cos\varphi)$. 145. $8(2 - 2)r^3$.

146. $\frac{3a}{5}, \frac{3b}{8}$ 及 $\frac{3a}{10}, \frac{3b}{4}$. 147. $\frac{a}{5}, \frac{a}{5}$. 148. $\frac{\pi}{2} + \frac{4}{5}$. 149. $\frac{5a}{8}, 0$.

150. $\frac{\pi \quad 2a}{8}, 0$. 151. $-\frac{a}{5} \cdot \frac{2e^{2\pi} + e^{\pi}}{e^{\pi} - e^{\frac{\pi}{2}}}, \frac{a}{5} \cdot \frac{e^{2\pi} - 2e^{\pi}}{e^{\pi} - e^{\frac{\pi}{2}}}$. 152. $\frac{MR^2}{2}$,其中 M 为圆锥侧面的质量.

153. 在从底部起的四分之一高度处. 154. $2\pi\gamma m\mu h\ 1 - \frac{h}{h^2 + (R - r)^2}$,其中 γ 为引力常数.

155. $\frac{g^2 M^3}{6m^2}$. 156. $\frac{ah^2 d\omega^2\mu}{24} \approx 0.4905$ 焦耳. 157. 1) $\frac{ah^2}{6}$; 2) 2 倍. 158. $2\pi^2 n^2 l^2 \sigma$.

159. $\frac{\mu l^4}{2E}$. 160. 0.785 焦耳. 161. 2264.4π 焦耳. 162. $\frac{ca^2}{2}$ $t + \frac{\sin 2bt}{2b}$. 163. $\frac{P}{5\sigma}$ $\frac{2h}{g}$.

164. 1324.35$\pi\ln 2$ 焦耳. 165. $x = e^{10}$. 166. -1. 167. $\frac{(n+1)^2}{4n}$. 168. $\sum_{k=1}^{25} k$.

169. $\frac{1}{8}$. 170. -1. 171. -5. 172. $\frac{17}{6}; \frac{34}{3}; \frac{301}{20}$. 174. $\ln 10 \approx 2.31$; $M = \frac{1}{\ln 10} \approx 0.433$.