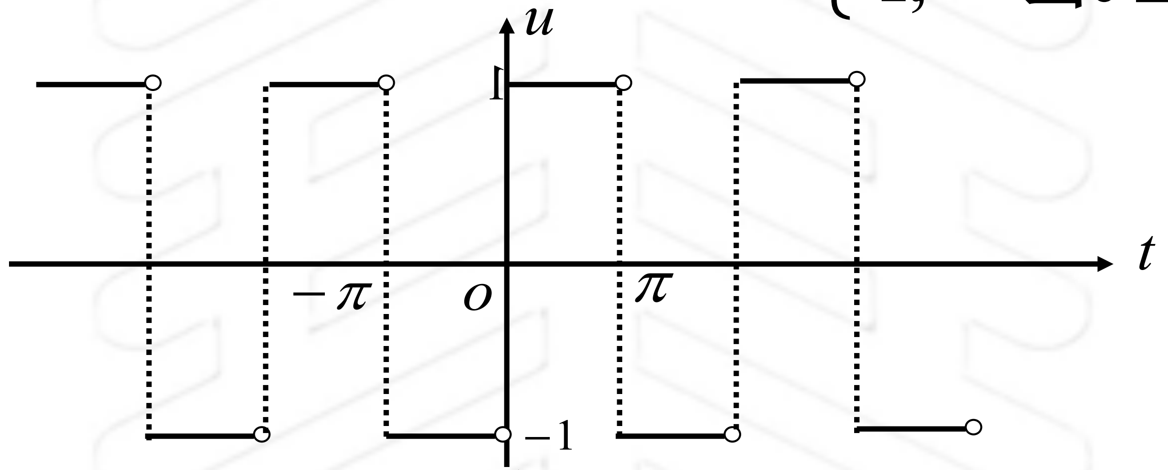
第六节　傅里叶级数

一、问题的提出

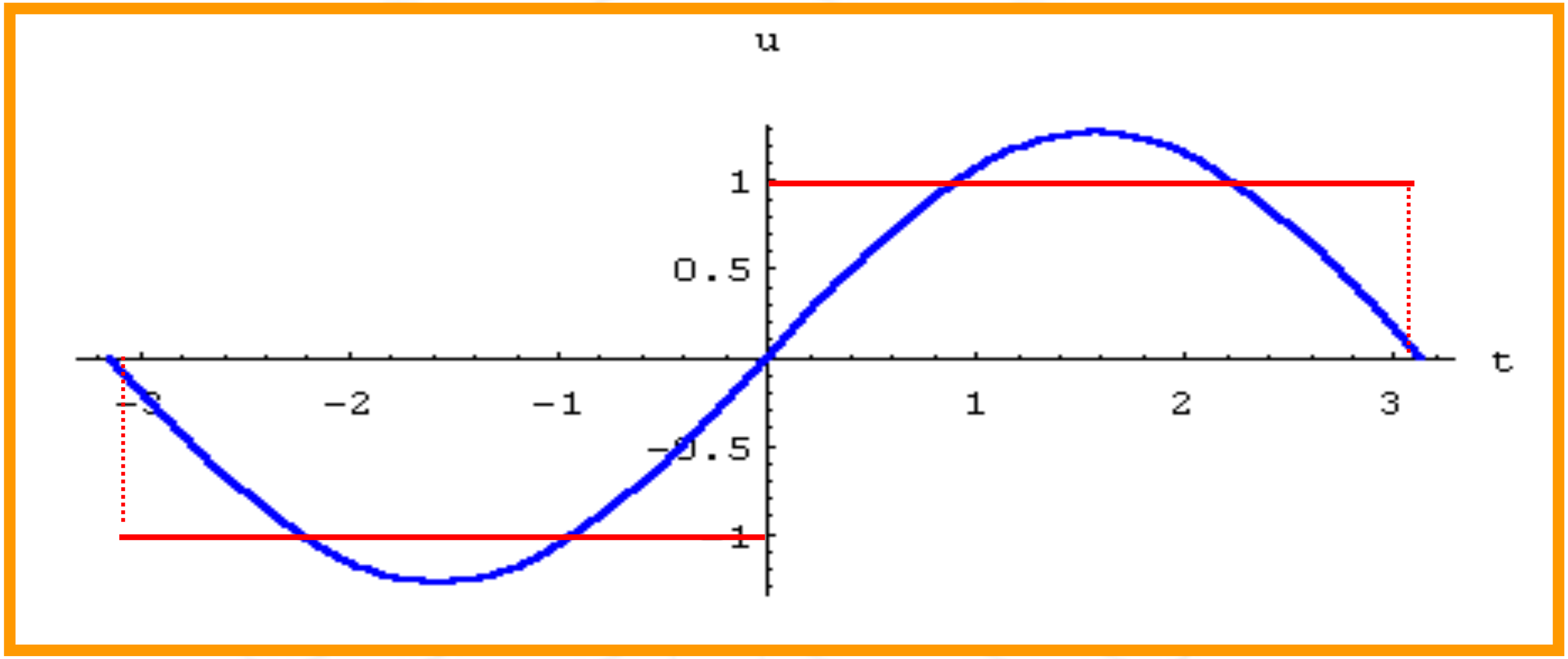
非正弦周期函数:矩形波 $u(t)=\begin{cases}-1, & \text{当} -\pi \le t < 0 \\ 1, & \text{当} 0 \le t < \pi\end{cases}$



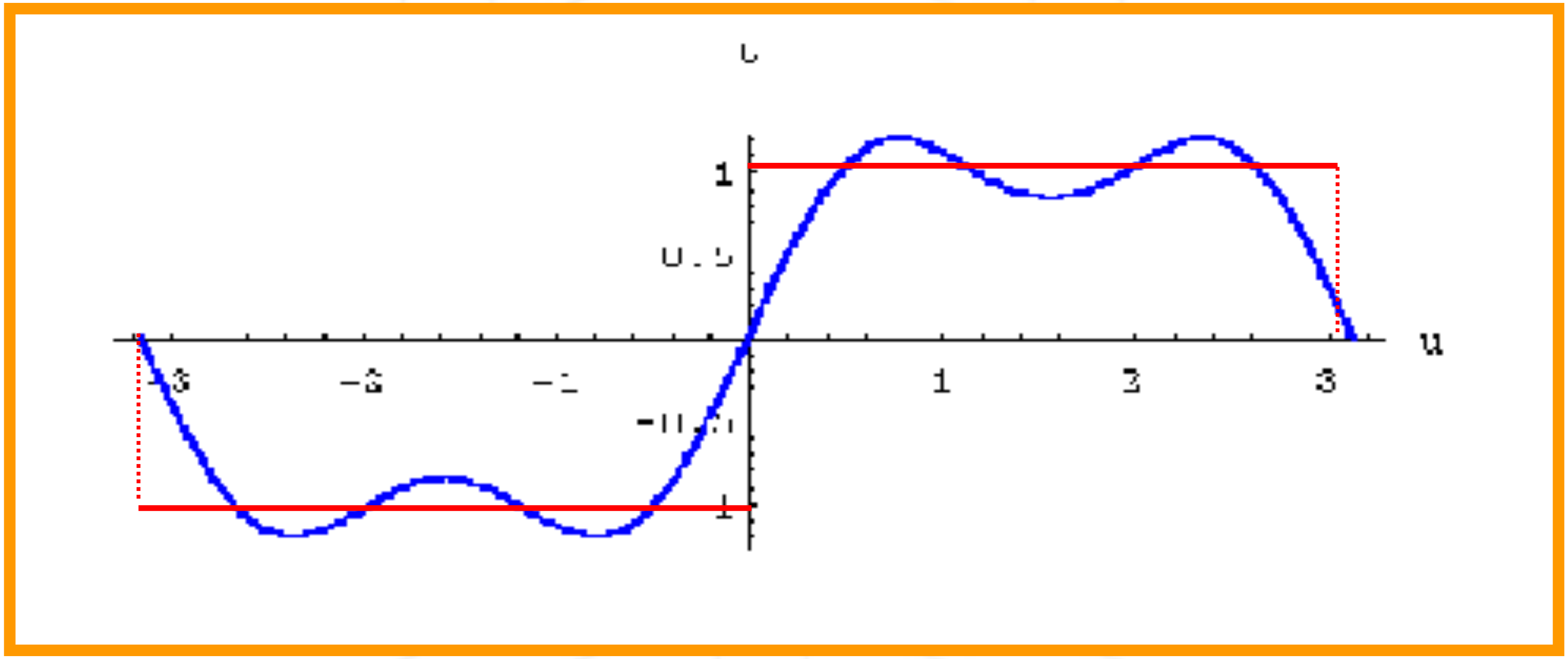
不同频率正弦波逐个叠加

$$\frac{4}{\pi}\sin t,\quad \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{3}\sin 3t,\quad \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{5}\sin 5t,\quad \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{7}\sin 7t,\cdots$$

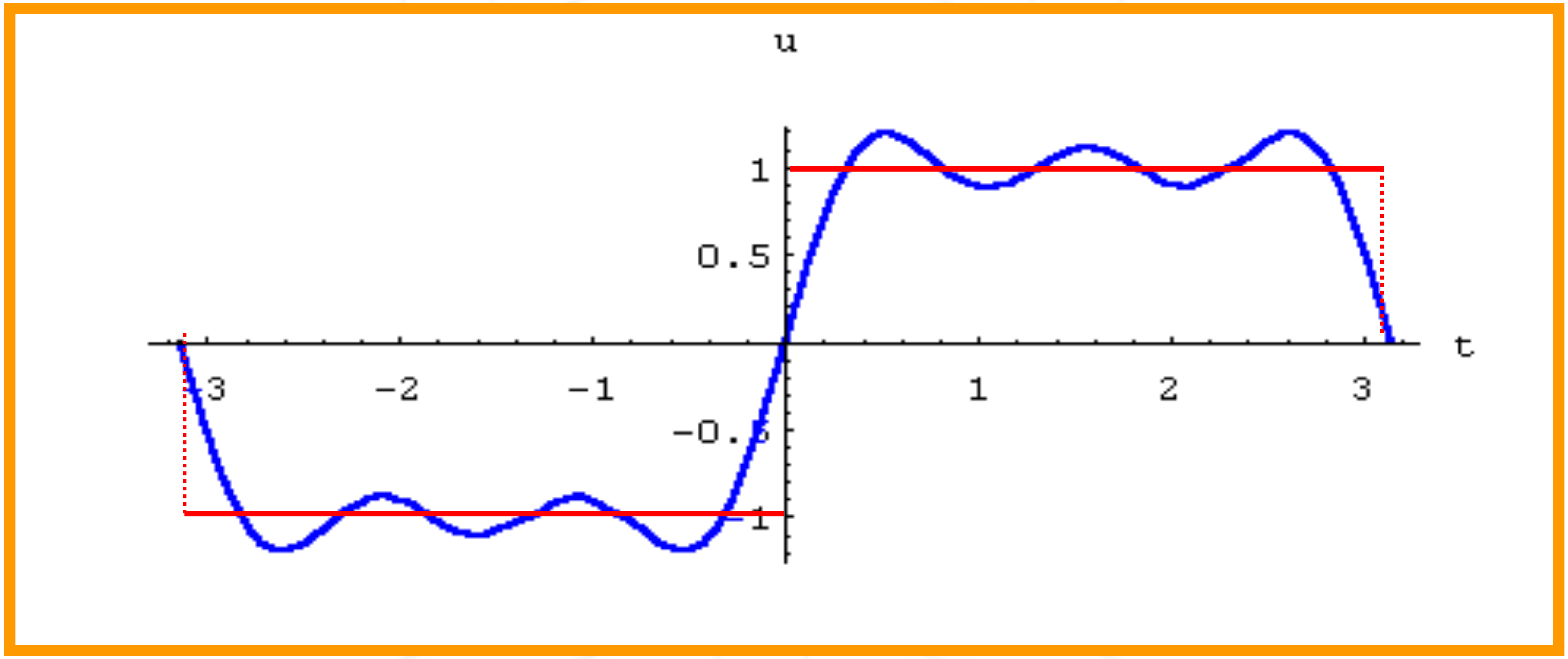
$$u = \frac{4}{\pi}\sin t$$



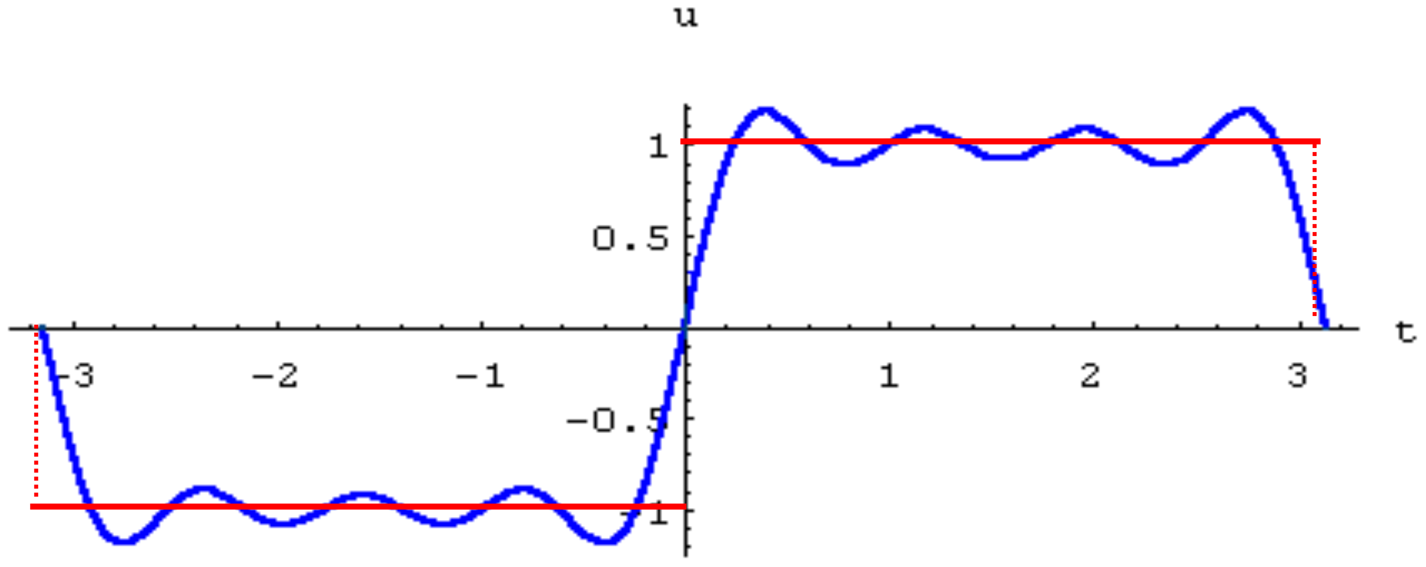
$$u = \frac{4}{\pi}\left(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t\right)$$



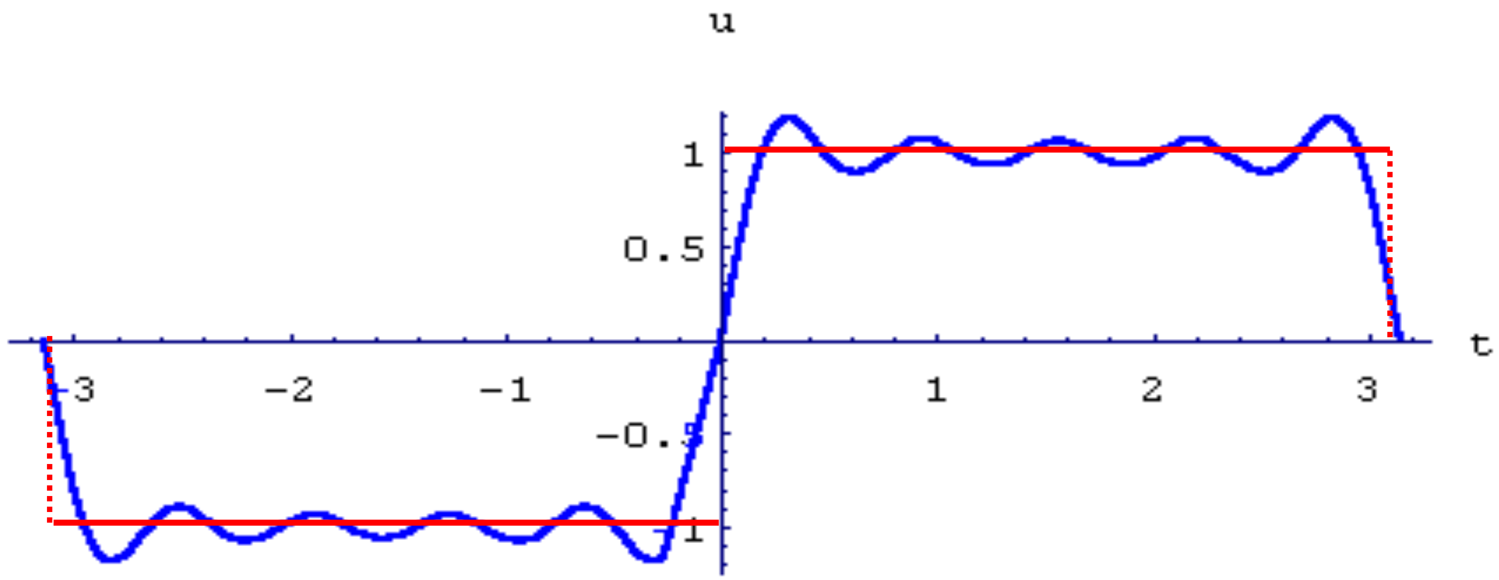
$$u = \frac{4}{\pi}\left(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t\right)$$



$$u = \frac{4}{\pi}\left(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t + \frac{1}{7}\sin 7t\right)$$



$$u=\frac{4}{\pi}(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t+\frac{1}{7}\sin 7t+\frac{1}{9}\sin 9t)$$



$$u(t)=\frac{4}{\pi}(\sin t+\frac{1}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\sin 5t+\frac{1}{7}\sin 7t+\cdots)$$

$$(-\pi<t<\pi, t\neq 0)$$

二、 三角级数 三角函数系的正交性

1. 三角级数

$$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)$$ 谐波分析

$$=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\sin\varphi_n\cos n\omega t+A_n\cos\varphi_n\sin n\omega t)$$

令 $\frac{a_0}{2}=A_0,\quad a_n=A_n\sin\varphi_n,\quad b_n=A_n\cos\varphi_n,\quad \omega t=x,$

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$ 三角级数

2. 三角函数系的正交性

三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots \cos nx, \sin nx, \cdots$$

正交：

任意两个不同函数在 $[-\pi,\pi]$ 上的积分等于零.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \pi, & m = n \end{cases},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0. \quad (\text{其中} m, n = 1, 2, \cdots)$$

三、函数展开成傅里叶级数

问题: 1.若能展开, a_i, b_i是什么?

2.展开的条件是什么?

1. 傅里叶系数

若有 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$

(1) 求a_0.

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}dx+\int_{-\pi}^{\pi}[\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)]dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx dx + \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx dx$$

$$= \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi, \qquad a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

(2) 求a_n.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} [a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx dx]$$

$$= a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = a_n \pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \qquad (n = 1,2,3,\cdots)$$

(3) 求b_n.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} [a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin nx dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin nx dx] = b_n \pi,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx \qquad (n = 1,2,3,\cdots)$$

傅里叶系数

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad (n = 0,1,2,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad (n = 1,2,\cdots) \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{2\pi} f(x)\cos nx dx, \quad (n = 0,1,2,\cdots) \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{2\pi} f(x)\sin nx dx, \quad (n = 1,2,\cdots) \end{cases}$$

傅里叶级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

问题：

$$f(x)\overset{\text{条件?}}{=}\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

2. 狄利克雷(Dirichlet)充分条件(收敛定理)

设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数. 如果它满足条件: 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点, 并且至多只有有限个极值点, 则 $f(x)$ 的傅里叶级数收敛, 并且

(1) 当 x 是 $f(x)$ 的连续点时, 级数收敛于 $f(x)$;

(2) 当 x 是 $f(x)$ 的间断点时,

收敛于 $\dfrac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$;

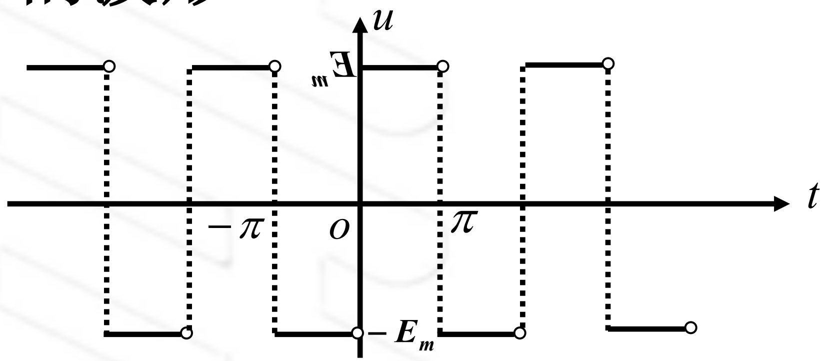
(3) 当 x 为端点 $x=\pm\pi$ 时,

收敛于 $\dfrac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}$.

注意: 函数展开成傅里叶级数的条件比展开成幂级数的条件低的多.

例 1 以2π为周期的矩形脉冲的波形

$$u(t)=\begin{cases} E_m, & 0\le t<\pi \\ -E_m, & -\pi\le t<0 \end{cases}$$



将其展开为傅立叶级数.

注意: 对于非周期函数,如果函数 $f(x)$ 只在区间 $[-\pi,\pi]$ 上有定义,并且满足狄氏充分条件,也可展开成傅氏级数.

作法:

周期延拓 $(T=2\pi)$ $\quad F(x)=f(x) \quad (-\pi,\pi)$

端点处收敛于 $\frac{1}{2}[f(\pi-0)+f(-\pi+0)]$

例 2 将函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi \le x < 0 \\ x, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$ 展开为傅立叶级数.

思考题

若函数$\varphi(-x)=\psi(x)$，问：$\varphi(x)$与$\psi(x)$的傅里叶系数a_n、b_n与α_n、β_n $(n=0,1,2,\cdots)$之间有何关系？