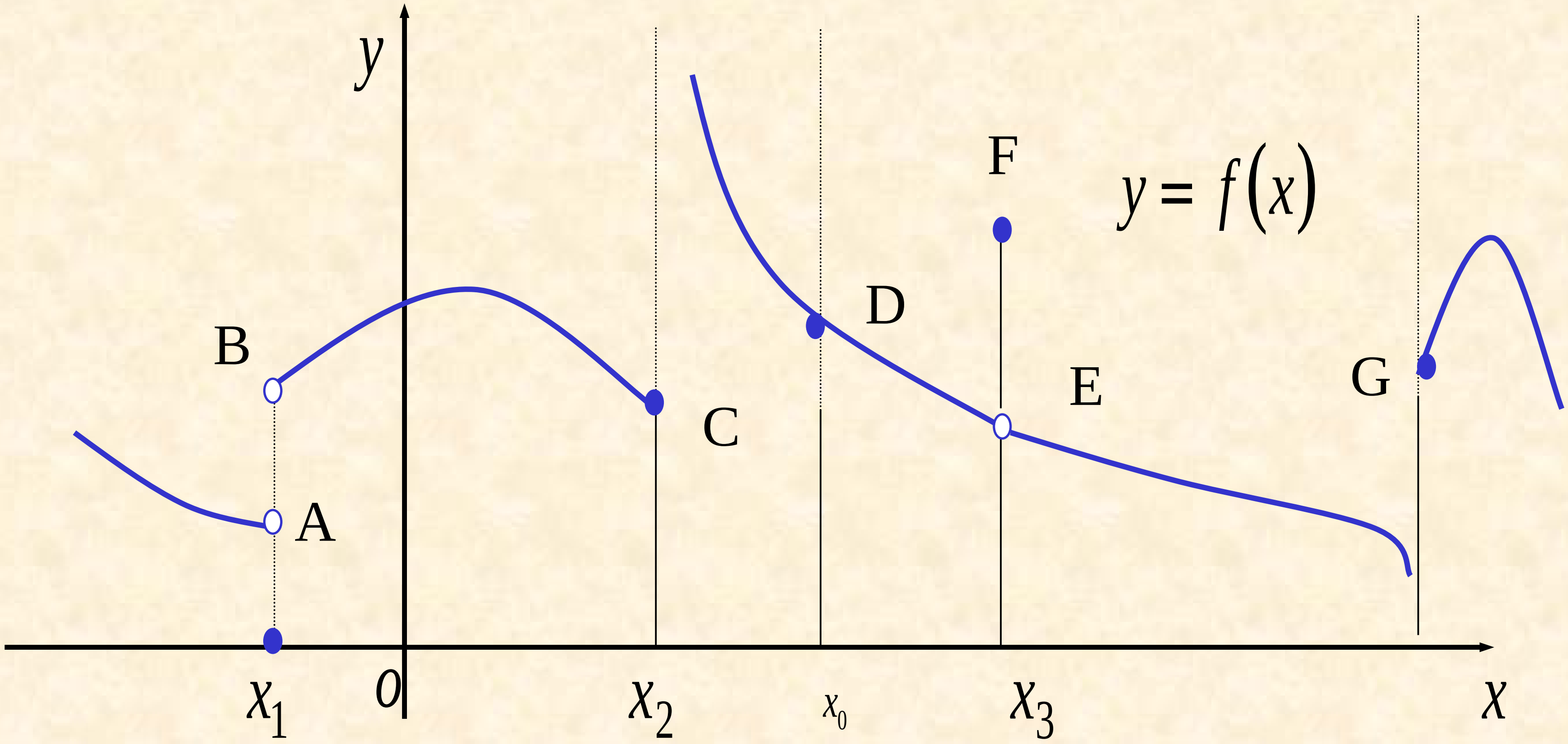
一、函数的连续性



定义 1　设函数 $f(x)$ 在 $U_\delta(x_0)$ 内有定义, 如果函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限存在, 且等于它在点 x_0 处的函数值 $f(x_0)$, 即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

那末就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

"$\varepsilon-\delta$"定义:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $|x - x_0| < \delta$ 时,

恒有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

定义 2　设函数 $f(x)$ 在 $U_{\delta}(x_0)$ 内有定义，如果当自变量的增量 Δx 趋向于零时，对应的函数的增量 Δy 也趋向于零，即 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$　或

$\lim\limits_{\Delta x \to 0}[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$，那末就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，x_0 称为 $f(x)$ 的连续点.

设 $x = x_0 + \Delta x$，　　$\Delta y = f(x) - f(x_0)$，

$\Delta x \to 0$ 就是 $x \to x_0$，$\Delta y \to 0$ 就是 $f(x) \to f(x_0)$.

3.单侧连续

若函数$f(x)$在$(a,x_0]$内有定义,且$f(x_0-0)=f(x_0)$,则称$f(x)$在点x_0处<u>左连续</u>;

若函数$f(x)$在$[x_0,b)$内有定义,且$f(x_0+0)=f(x_0)$,则称$f(x)$在点x_0处<u>右连续</u>.

定理 函数 $f(x)$在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ 是函数 $f(x)$在 x_0 处既左连续又右连续.

4.连续函数与连续区间

在区间上每一点都连续的函数,叫做在该区间上的连续函数,或者说函数在该区间上连续.

如果函数在开区间 (a,b)内连续，并且在左端点 $x=a$处右连续，在右端点 $x=b$处左连续，则称函数 $f(x)$在闭区间 $[a,b]$上连续.

连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

例如,有理函数在区间 $(-\infty,+\infty)$内是连续的 .

例1 试证函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 在$x=0$处连续.

证 $\because \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0,$

又 $f(0)=0,\quad \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0),$

由定义2知

函数 $f(x)$在 $x=0$处连续.

例2 证明函数 $y=\sin x$在区间$(-\infty,+\infty)$内连续.

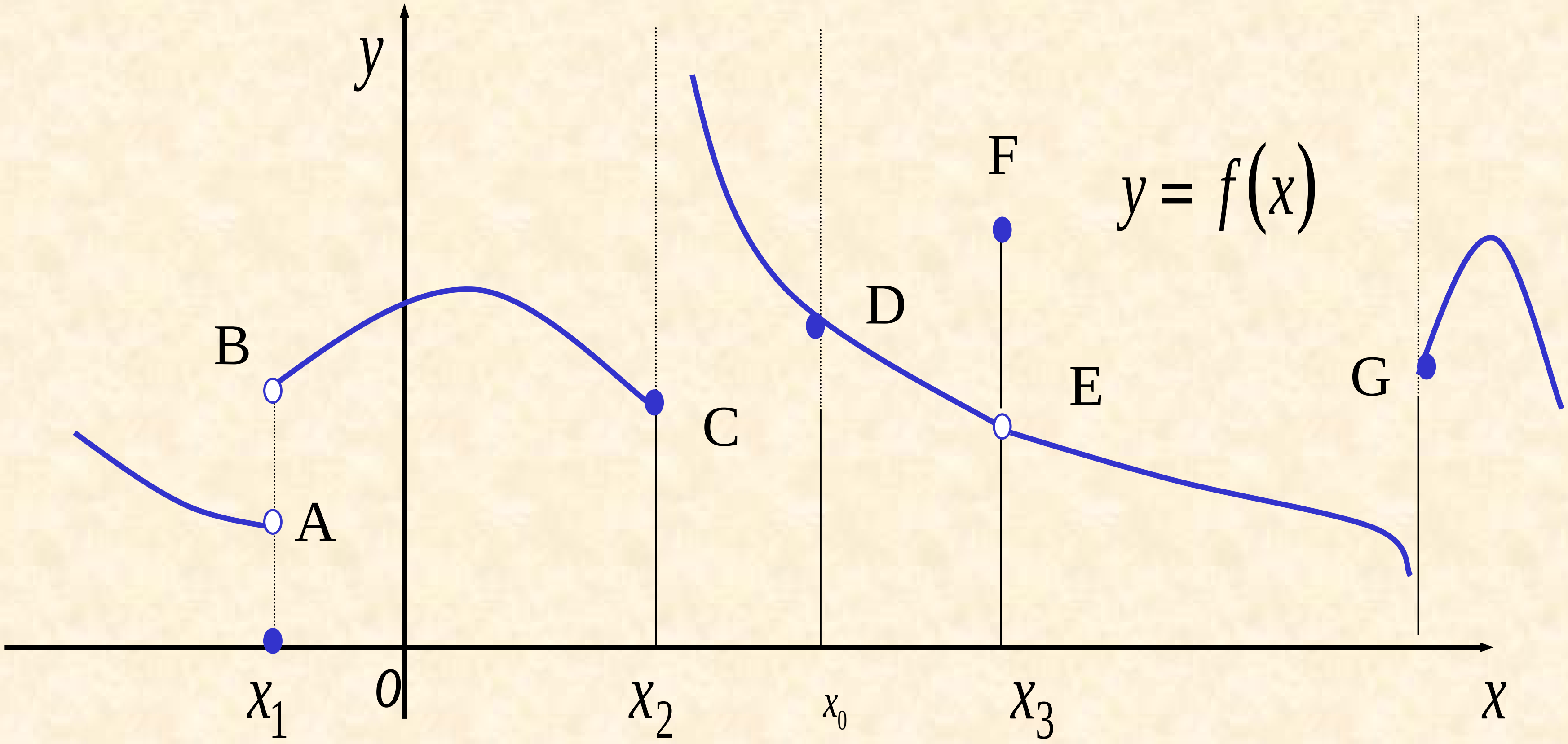
证 任取 $x\in(-\infty,+\infty)$,

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos(x+\frac{\Delta x}{2})$$

$\therefore$当$\Delta x\to 0$时,$\Delta y\to 0$.

即函数 $y=\sin x$对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$都是连续的.

一、函数的连续性



二、函数的间断点

函数 $f(x)$在点 x_0处连续必须满足的三个条件：

(1) $f(x)$在点x_0处有定义;

(2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在;

(3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

如果上述三个条件中只要有一个不满足，则称函数 $f(x)$在点 x_0处不连续(或间断)，并称点 x_0为 $f(x)$的不连续点(或间断点).

1.跳跃间断点 如果 $f(x)$在点 x_0处左，右极限都存在，但$f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$，则称点 x_0为函数 $f(x)$的跳跃间断点 .

2.可去间断点 如果 $f(x)$在点 x_0处的极限存在，但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\neq f(x_0)$，或 $f(x)$在点 x_0处无定义则称点 x_0为函数 $f(x)$的可去间断点 .

跳跃间断点与可去间断点统称为第一类间断点.

特点 函数在点 x_0处的左、右极限都存在 .

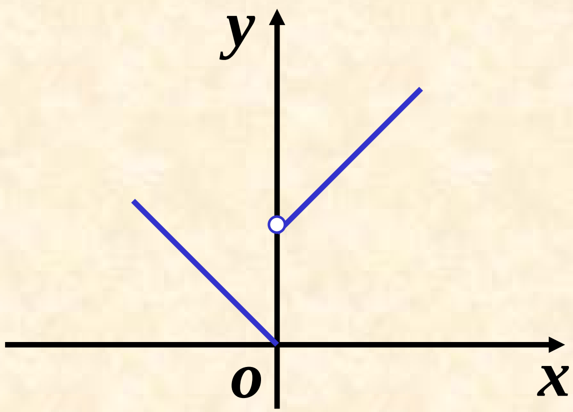
3.第二类间断点 如果 $f(x)$在点 x_0处的左、右极限至少有一个不存在, 则称点 x_0为函数 $f(x)$的第二类间断点.

例4 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ 1+x, & x>0,\end{cases}$ 在$x=0$处的连续性.

解 $f(0-0)=0,\qquad f(0+0)=1,$

$\because\ f(0-0)\ne f(0+0),$

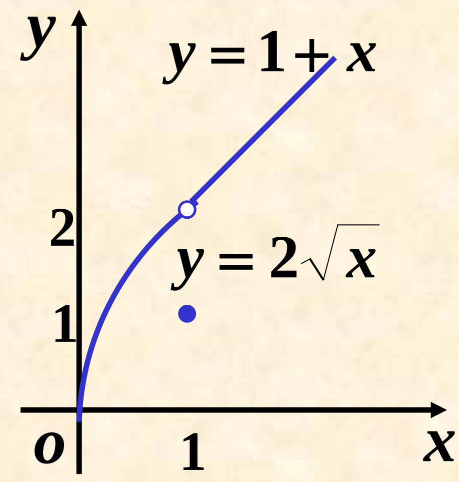
$\therefore\ x=0$为函数的跳跃间断点.



例5 讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\le x<1,\\ 1, & x=1\\ 1+x, & x>1,\end{cases}$$

在$x=1$处的连续性.



解 $\because f(1)=1,$

$$f(1-0)=2,\qquad f(1+0)=2,$$

$$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)=2 \neq f(1),$$

$\therefore x=0$为函数的可去间断点.

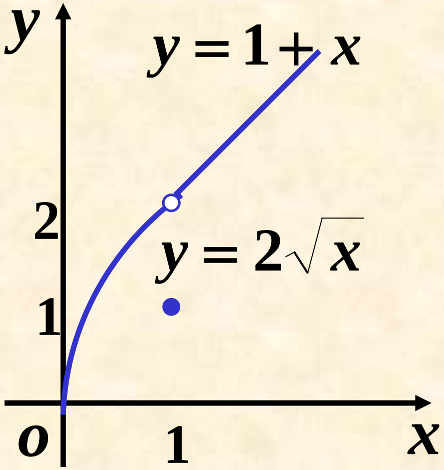
注意 可去间断点只要改变或者补充间断处函数的定义, 则可使其变为连续点.

注意　可去间断点只要改变或者补充间断处函数的定义，则可使其变为连续点.

例5　讨论函数

$$f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\le x<1,\\ 1, & x=1\\ 1+x, & x>1,\end{cases}$$

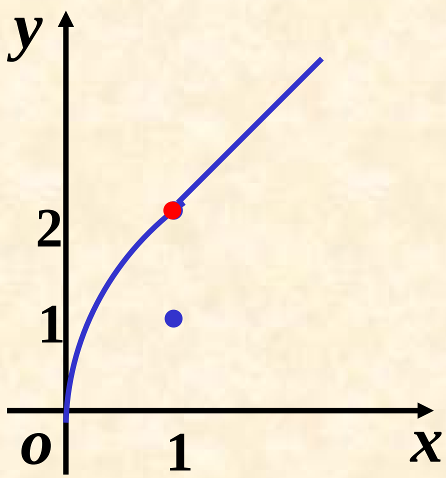
在$x=1$处的连续性 .



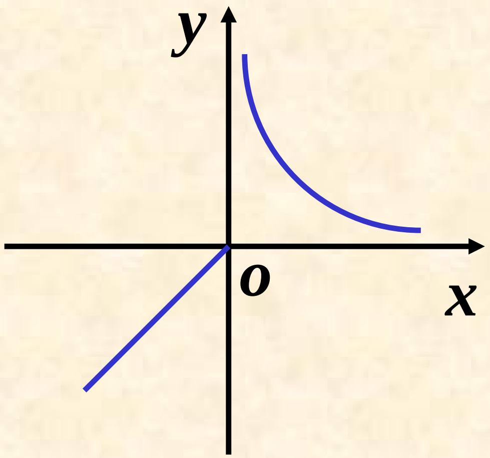
如例5中，令 $f(1)=2$,

则 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\le x<1,\\ 1+x, & x\ge 1,\end{cases}$

在$x=1$处连续.



例6 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x>0, \\ x, & x\le 0, \end{cases}$ 在$x=0$处的连续性.



解 $f(0-0)=0,\quad f(0+0)=+\infty,$

$\therefore\ x=1$为函数的第二类间断点.

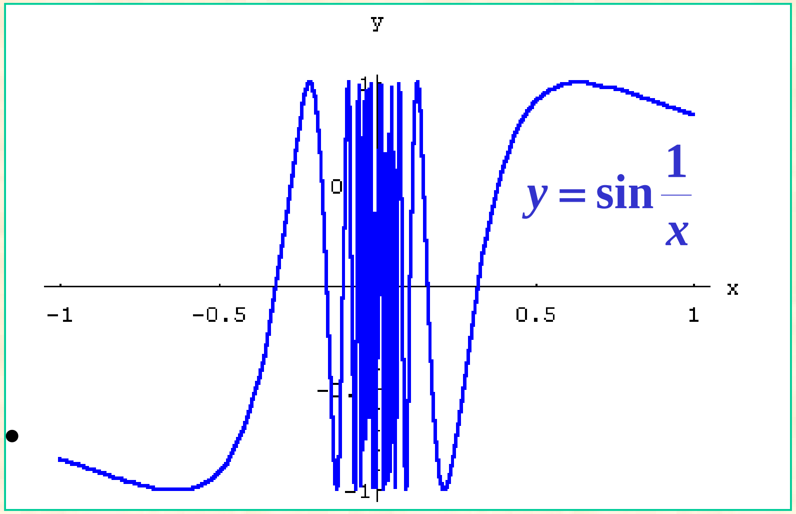
这种情况称为无穷间 断点.

例7 讨论函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 $\because$ 在 $x=0$ 处没有定义,

且 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

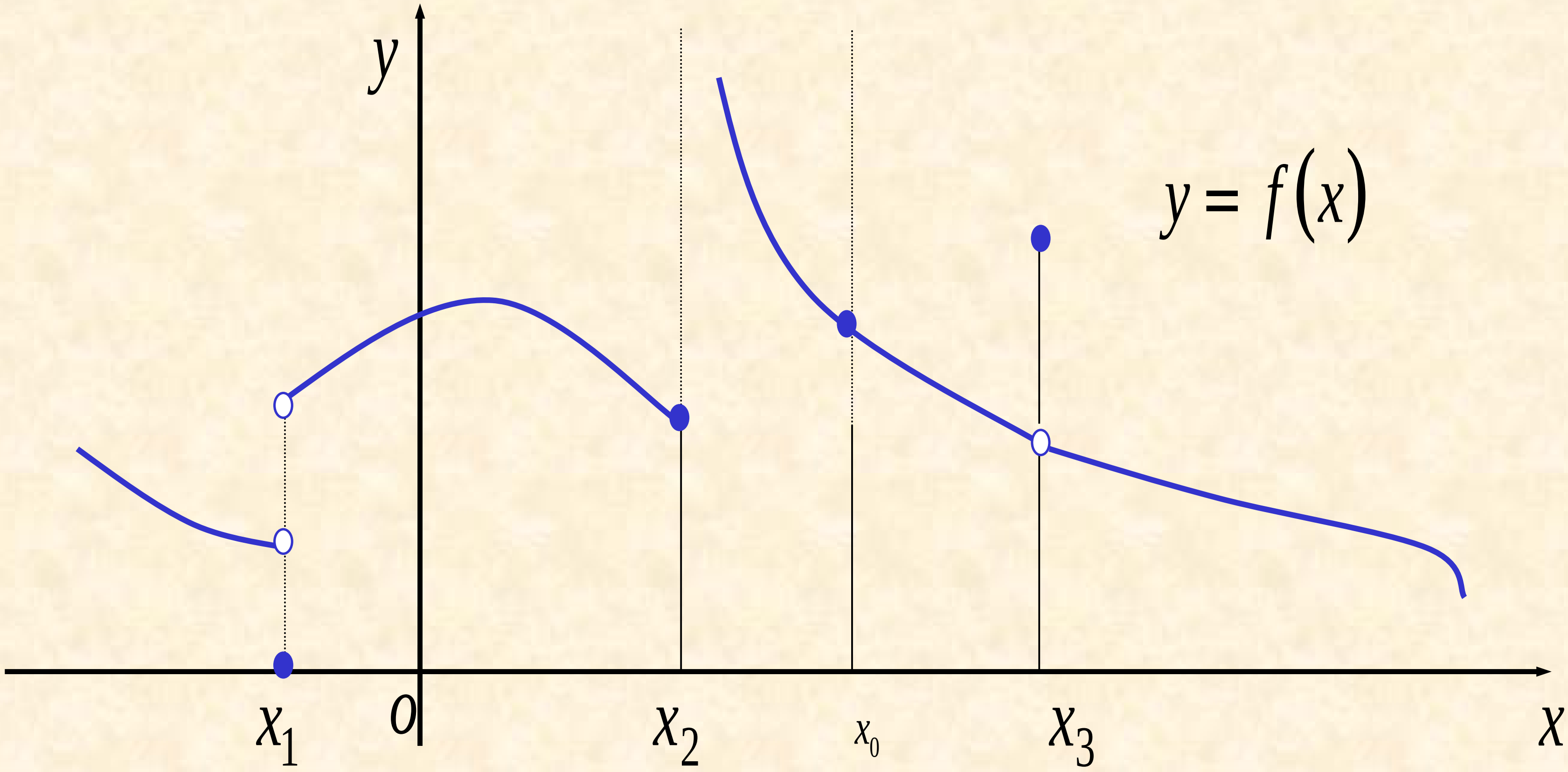
$\therefore$ $x=0$ 为第二类间断点.



这种情况称为的振荡间 断点.

注意 不要以为函数的间断点只是个别的几个点.

判断下列间断点类型:



例8 当a取何值时，

函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x<0,\\ a+x, & x\ge 0,\end{cases}$ 在 $x=0$处连续.

解 $\because\ f(0)=a,$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\cos x=1,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(a+x)=a,$$

要使 $f(0-0)=f(0+0)=f(0),\ \Rightarrow a=1,$

故当且仅当 $a=1$时，函数 $f(x)$在 $x=0$处连续.

三、小结

1.函数在一点连续必须满足的三个条件;

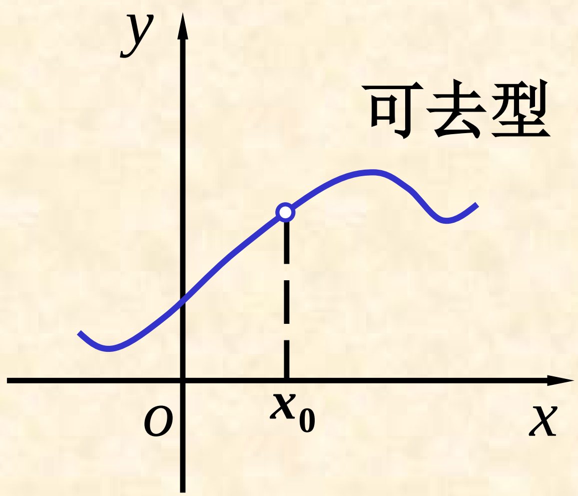
2.区间上的连续函数;

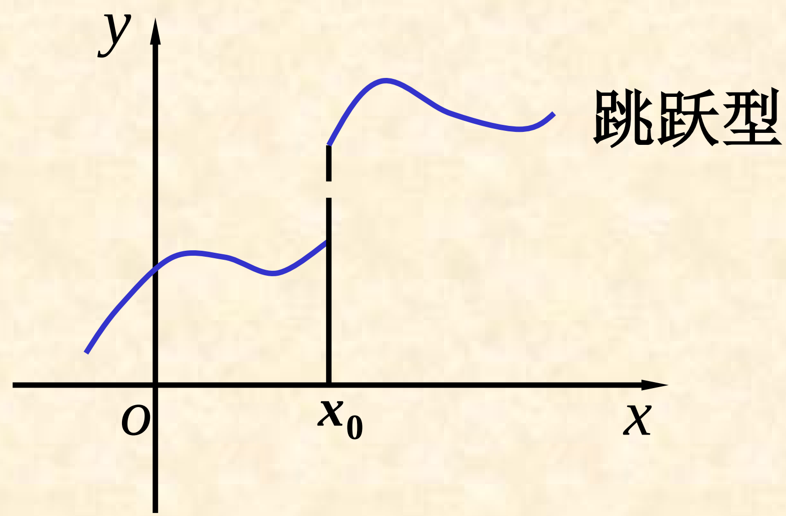
3.间断点的分类与判别;

$$\text{间断点}\begin{cases}\text{第一类间断点:可去型,跳跃型.}\\ \\ \text{第二类间断点:无穷型,振荡型.}\end{cases}$$

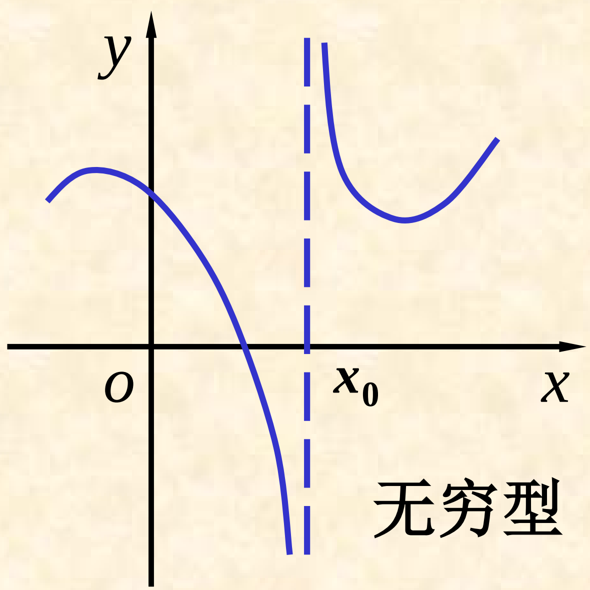
(见下图)

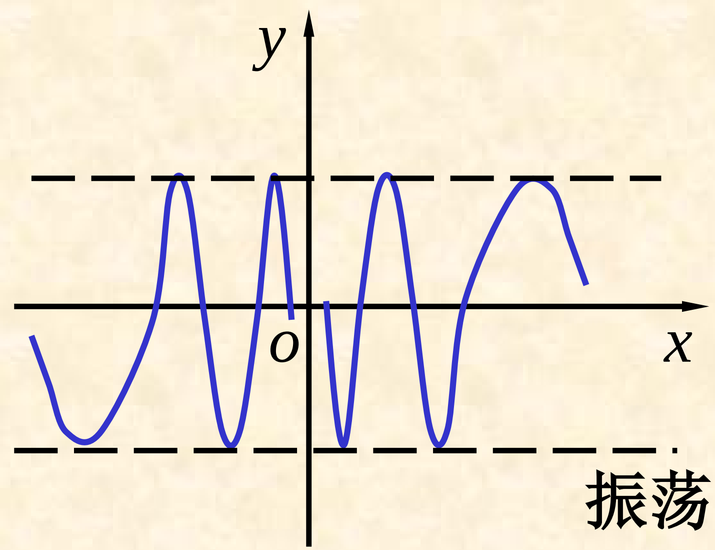
第一类间断点





第二类间断点





一、四则运算的连续性

定理1 若函数 $f(x)$, $g(x)$在点x_0处连续,

则 $f(x)\pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0)\neq 0)$

在点x_0处也连续.

例如, $\sin x,\cos x$在$(-\infty,+\infty)$内连续,

故 $\tan x,\cot x,\sec x,\csc x$ 在其定义域内连续.

二、反函数与复合函数的连续性

定理2　严格单调的连续函数必有严格单调的连续反函数.

例如，$y=\sin x$在$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上单调增加且连续，

故 $y=\arcsin x$ 在$[-1,1]$上也是单调增加且连续.

$y=\arctan x, y=arc\cot x$ 在$[-\infty,+\infty]$上单调且连续.

反三角函数在其定义域内皆连续.

定理3 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$, 函数 $f(u)$在点a连续,

则有 $\lim\limits_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=f(a)=f[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)].$

定理4 设函数$u=\varphi(x)$在点$x=x_0$连续，且

$\varphi(x_0)=u_0$，而函数 $y=f(u)$在点$u=u_0$连续,

则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在点$x=x_0$也连续.

意义

1.极限符号可以与函数符号互换;

2.变量代换$(u=\varphi(x))$的理论依据.

例如, $u=\dfrac{1}{x}$在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$内连续,

$y=\sin u$在$(-\infty,+\infty)$内连续,

$\therefore\ y=\sin\dfrac{1}{x}$在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$内连续.

二、初等函数的连续性

基本初等函数在定义区间内连续

连续函数经四则运算仍连续

连续函数的复合函数连续

$\Bigg\}$ 一切初等函数在定义区间内连续

例如,

$y=\sqrt{1-x^2}$ 的连续区间为 $[-1,1]$ (端点为单侧连续)

$y=\ln\sin x$ 的连续区间为 $(2n\pi,(2n+1)\pi)\,,n\in Z$

而 $y=\sqrt{\cos x-1}$ 的定义域为 $x=2n\pi\,,n\in Z$

因此它无连续点

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (x_0 \in \text{定义区间})$$

例3 求 $\lim\limits_{x \to 1} \sin\sqrt{e^x - 1}$.

解 原式 $= \sin\sqrt{e^1 - 1} = \sin\sqrt{e - 1}$.

例4 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{x}$.

解 原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\sqrt{1 + x^2} - 1)(\sqrt{1 + x^2} + 1)}{x(\sqrt{1 + x^2} + 1)}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2} + 1} = \frac{0}{2} = 0.$$

四、小结

连续函数的和差积商的连续性.

反函数的连续性.

复合函数的连续性.　两个定理;

初等函数的连续性.

　　定义区间与定义域的区别;

　　求极限的又一种方法.