例1、若连续函数$f(x)$满足关系式

$$f(x)=\int_0^{2x} f(\frac{t}{2})dt+\ln 2,$$ 求$f(x)$.

解：$f'(x)=f(x)\cdot 2$

$$y'=2y$$

$$y'-2y=0$$

$$y=f(x)=ce^{\int 2dx}=ce^{2x}$$

$\because f(0)=\ln 2 \qquad \therefore c=\ln 2$

则$f(x)=\ln 2\cdot e^{2x}$

例2　求方程 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$ 的通解.

解　$P(x) = \frac{1}{x}$,　$Q(x) = \frac{\sin x}{x}$,

$$y = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left(\int \frac{\sin x}{x} \cdot e^{\int \frac{1}{x}dx} dx + C\right)$$

$$= e^{-\ln x}\left(\int \frac{\sin x}{x} \cdot e^{\ln x} dx + C\right)$$

$$= \frac{1}{x}\left(\int \sin x dx + C\right) = \frac{1}{x}\left(-\cos x + C\right).$$

例3、求方程$(1+y^2)ydx+2(2xy^2-1)dy=0$的通解。

解 $$\frac{dx}{dy}+\frac{4y}{1+y^2}x=\frac{2}{y(1+y^2)}$$

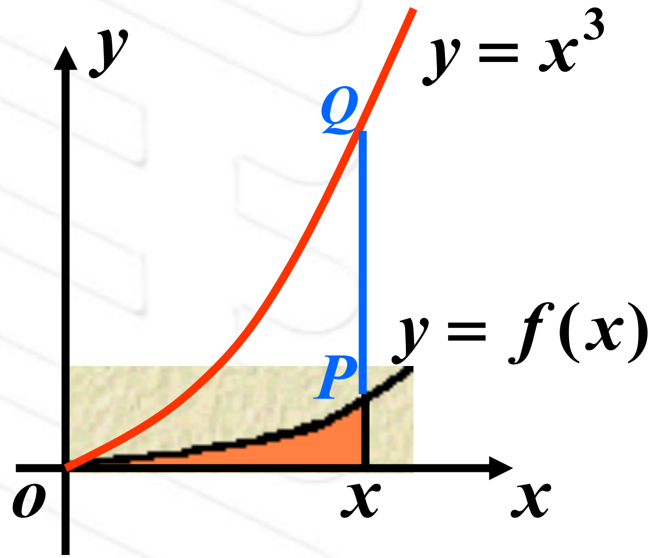
$$x=e^{-\int\frac{4y}{1+y^2}dy}\left[\int\frac{2}{y(1+y^2)}e^{\int\frac{4y}{1+y^2}dy}dy+c\right]$$

$$=\frac{1}{(1+y^2)^2}(2\ln y+y^2+c)$$

例4 如图所示，平行与 y 轴的动直线被曲线 $y=f(x)$ 与 $y=x^3\ (x\geq 0)$ 截下的线段PQ之长数值上等于阴影部分的面积，求曲线 $f(x)$.

解 $$\int_0^x f(x)dx=\sqrt{(x^3-y)^2},$$

$$\int_0^x ydx=x^3-y,$$



两边求导得 $y'+y=3x^2,$

解此微分方程

$$y' + y = 3x^2$$

$$y = e^{-\int dx}\left[C + \int 3x^2 e^{\int dx} dx\right]$$

$$= Ce^{-x} + 3x^2 - 6x + 6,$$

由 $y|_{x=0} = 0$, 得 $C = -6$,

所求曲线为 $y = 3(-2e^{-x} + x^2 - 2x + 2)$.

例 5 求方程 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{4}{x}y=x^2\sqrt{y}$ 的通解.

解 两端除以y^n，得 $\dfrac{1}{\sqrt{y}}\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{4}{x}\sqrt{y}=x^2$,

令 $z=\sqrt{y}$, $2\dfrac{dz}{dx}-\dfrac{4}{x}z=x^2$,

解得 $z=x^2\left(\dfrac{x}{2}+C\right)$, 即 $y=x^4\left(\dfrac{x}{2}+C\right)^2$.

例6　用适当的变量代换解下列微分方程:

1.　$2yy' + 2xy^2 = xe^{-x^2}$;

解　$y' + xy = \frac{1}{2}xe^{-x^2}y^{-1}$,

令 $z = y^{1-(-1)} = y^2$,　则 $\frac{dz}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$,

$\therefore \frac{dz}{dx} + 2xz = xe^{-x^2}$,　$z = e^{-\int 2xdx}[\int xe^{-x^2}e^{\int 2xdx}dx + C]$

所求通解为 $y^2 = e^{-x^2}(\frac{x^2}{2} + C)$.

2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x\sin^2(xy)}-\dfrac{y}{x}$;

解　令 $z=xy$, 则 $\dfrac{dz}{dx}=y+x\dfrac{dy}{dx}$,

$$\frac{dz}{dx}=y+x\left(\frac{1}{x\sin^2(xy)}-\frac{y}{x}\right)=\frac{1}{\sin^2 z},$$

分离变量法得　$2z-\sin 2z=4x+C$,

将 $z=xy$ 代回,

所求通解为　$2xy-\sin(2xy)=4x+C$.

3. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x+y}$;

解 令 $x+y=u$, 则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dx}-1$,

代入原式 $\dfrac{du}{dx}-1=\dfrac{1}{u}$,

分离变量法得 $u-\ln(u+1)=x+C$,

将 $u=x+y$ 代回, 所求通解为

$y-\ln(x+y+1)=C$, 或 $x=C_1e^y-y-1$

另解 方程变形为 $\dfrac{dx}{dy}=x+y$.

例1　求方程$(x^3-3xy^2)dx+(y^3-3x^2y)dy=0$的通解.

解　$\frac{\partial P}{\partial y}=-6xy=\frac{\partial Q}{\partial x}$，是全微分方程，

$$u(x,y)=\int_0^x(x^3-3xy^2)dx+\int_0^y y^3dy$$

$$=\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{y^4}{4},$$

原方程的通解为 $\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2y^2+\frac{y^4}{4}=C.$

例2 求方程$\dfrac{2x}{y^3}dx+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$的通解.

解 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=-\dfrac{6x}{y^4}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, 是全微分方程,

将左端重新组合 $\dfrac{1}{y^2}dy+\left(\dfrac{2x}{y^3}dx-\dfrac{3x^2}{y^4}dy\right)$

$$=d\left(-\frac{1}{y}\right)+d\left(\frac{x^2}{y^3}\right)=d\left(-\frac{1}{y}+\frac{x^2}{y^3}\right),$$

原方程的通解为$-\dfrac{1}{y}+\dfrac{x^2}{y^3}=C.$

例3 利用观察法求下列方程的积分因子，并求其通解。

(1) $(x+y)(dx-dy)=dx+dy$

(2) $(xdy+ydx)(y+1)+x^2y^2dy=0$

解：(1) $\frac{1}{x+y}\cdot(x+y)(dx-dy)=\frac{1}{x+y}\cdot(dx+dy)$

$$d(x-y)-\frac{1}{x+y}d(x+y)=0$$

$$d[x-y-\ln(x+y)]=0 \Rightarrow x-y-\ln(x+y)=c$$

(2) $\frac{1}{x^2y^2(y+1)}\cdot[(xdy+ydx)(y+1)+x^2y^2dy]=0$

$$\frac{xdy+ydx}{x^2y^2}+\frac{1}{y+1}dy=0 \Rightarrow d(-\frac{1}{xy})+d\ln(y+1)=0$$

可选用的积分因子有

$$\frac{1}{x+y},\ \frac{1}{x^2},\ \frac{1}{x^2y^2},\ \frac{1}{x^2+y^2},\ \frac{x}{y^2},\ \frac{y}{x^2}\text{等.}$$

例4 求微分方程

$(3xy+y^2)dx+(x^2+xy)dy=0$的通解.

解 $\because \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{1}{x},\quad \therefore \mu(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}=x.$

则原方程为

$$(3x^2y+xy^2)dx+(x^3+x^2y)dy=0,$$

$$(3x^2y+xy^2)dx+(x^3+x^2y)dy=0,$$

$$3x^2ydx+x^3dy+xy(ydx+xdy)$$

可积组合法

$$=d(yx^3+\frac{1}{2}(xy)^2)=0,$$

原方程的通解为

$$yx^3+\frac{1}{2}(xy)^2=C.$$ (公式法)

例5 求微分方程

$$2x(1+\sqrt{x^2-y})dx-\sqrt{x^2-y}dy=0$$的通解.

解 $$2xdx+2x\sqrt{x^2-y}dx-\sqrt{x^2-y}dy=0,$$

$$d(x^2)+\sqrt{x^2-y}d(x^2)-\sqrt{x^2-y}dy=0,$$

将方程左端重新组合,有

$$d(x^2)+\sqrt{x^2-y}d(x^2-y)=0,$$

原方程的通解为 $x^2+\frac{2}{3}(x^2-y)^{\frac{3}{2}}=C.$

例6 求微分方程

$2xy\ln y dx+(x^2+y^2\sqrt{1+y^2})dy=0$的通解.

解 将方程左端重新组合,有

$(2xy\ln y dx+x^2dy)+y^2\sqrt{1+y^2}dy=0,$

易知 $\mu(x,y)=\dfrac{1}{y},$

则 $(2x\ln y dx+\dfrac{x^2}{y}dy)+y\sqrt{1+y^2}dy=0,$

可积组合法

即 $d(x^2\ln y)+\dfrac{1}{3}d(1+y^2)^{\frac{3}{2}}=0.$

原方程的通解为 $x^2\ln y+\dfrac{1}{3}(1+y^2)^{\frac{3}{2}}=C.$

例7 求微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x^2+x^3+y}{1+x}$ 的通解.

解1 整理得 $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1}{1+x}y=-x^2$,

A 常数变易法: 对应齐方通解 $y=\dfrac{C}{1+x}$.

设 $y=\dfrac{C(x)}{1+x}$. $C(x)=-\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+C$.

B 公式法: $y=e^{-\int\frac{1}{1+x}dx}[\int -x^2e^{\int\frac{1}{1+x}dx}dx+C]$,

通解为 $y+xy+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{4}=C$.

解2 整理得 $(x^2+x^3+y)dx+(1+x)dy=0,$

$$\because \frac{\partial P}{\partial y}=1=\frac{\partial Q}{\partial x}, \qquad \therefore \text{是全微分方程.}$$

A 用曲线积分法:

$$u(x,y)=\int_0^x (x^2+x^3)dx+\int_0^y (1+x)dy,$$

B 凑微分法:

$$dy+(xdy+ydx)+x^2dx+x^3dx=0,$$

$$dy+d(xy)+d\frac{x^3}{3}+d\frac{x^4}{4}=0,$$

$$d(y+xy+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4})=0.$$

C 不定积分法：$\because \dfrac{\partial u}{\partial x} = x^2 + x^3 + y,$

$$\therefore \int (x^2 + x^3 + y)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + xy + C(y),$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial y} = x + C'(y), \quad 又 \frac{\partial u}{\partial y} = 1 + x,$$

$$\therefore x + C'(y) = 1 + x, \quad C'(y) = 1, \quad C(y) = y,$$

原方程的通解为 $y + xy + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4} = C.$