一、 填空题（每题 4 分，共计 20 分）

1. 求与平面$\mathrm{x}-2\mathrm{y}+\mathrm{z}-3=0$垂直的单位向量______。

2. 曲线$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{z^2}{2}=1 \\ x+z=0 \end{cases}$对坐标平面$xoy$的投影柱面方程为_____。

3. $\lim_{(x,y)\to(1,0)}(x+y)^{\frac{x+y+1}{x+y-1}}=$________。

4. 设$z=(e^{xy}+x)^x$，则全微分$dz|_{(1,0)}=$_______。

5. 函数$f(x,y,\mathrm{z})=x^2y+z^2$在点$M(2,2,0)$处沿着曲面$2z=x^2+y^2$在$M$处的向外（下）的法线方向$\vec{n}$的方向导数为________。

二、 选择题（每题 3 分，共计 15 分）

6. 设ΔABC的顶点为$A(3,0,2)$， $B(5,3,1)$， $C(0,-1,3)$，则三角形的面积为( )

(A) $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$　　(B) $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$　　(C) $3\sqrt{6}$　　(D) $4\sqrt{6}$

7. 函数$f(x,y)$在点$(0,0)$某个邻域内连续，且$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{f(x,y)-xy}{(x^2+y^2)^3}=1$,则下列四个选项中正确的是（ ）

A. 点$(0,0)$是$f(x,y)$的极大值点；

B. 点$(0,0)$是$f(x,y)$的极小值点；

C. 点$(0,0)$不是$f(x,y)$的极值点；

D. 无法判断点$(0,0)$是否为$f(x,y)$的极值点。

8. 设有直线$L_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$与$L_2:\begin{cases} x-y=6 \\ 2y+z=3 \end{cases}$,则$L_1$与$L_2$的夹角为( )

(A) $\dfrac{\pi}{6}$　　(B) $\dfrac{\pi}{4}$　　(C) $\dfrac{\pi}{3}$　　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

9. 已知函数$u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)\,dt$,其中函数$\varphi$具有二阶导数，$\psi$具有一阶导数，在必有(　)

A. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　　B. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

C. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$　　D. $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

10. 若$f_x(x_0,y_0),f_y(x_0,y_0)$都存在，则$f(x,y)$在$(x_0,y_0)$处(　)

A. 极限存在但不一定连续

B. 极限存在且连续

C. 沿着任意方向的方向导数存在

D. 极限未必存在，未必连续

三、　计算题（每题 9 分，共计 54 分）

11. 求过点$(2,-1,3)$且与直线$L:\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+14}{-1}$垂直相交的直线方程。

12. 求曲面$z=\arctan\frac{x}{y}$在点$(1,1,\frac{\pi}{4})$处的切平面。

13. 设$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x-y}{x^2+y^2}\tan(x^2+y^2), & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$,试讨论$f(x,y)$在点(0,0)处的

(1)连续性。(3 分)

(2)偏导的存在性，若存在，求出偏导数的值。(3 分)

(3)可微性，若可微，写出其微分。(3 分)

14. 设函数$z=z(x,y)$由方程$xy=e^{xz}-2z$所确定。

(1)计算$\frac{\partial z}{\partial x}$.(3 分)

(2)计算$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$. (6 分)

15. 设函数$z=u(x,y)e^{ax+by}$，且$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$，试确定常数$a,b$，使函数$z=z(x,y)$能满足方程：$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=0$。

16. 将长为2米的铁丝分成三段，依次围成圆、正方形与正三角形，其面积分别为S_1,S_2,S_3,求出当函数$S=\frac{1}{\sqrt{S_1+S_2+S_3}}$取最大值时的铁丝分法。

四、 综合题（共计 11 分）

17. 设函数$u(x,y)$的所有二阶偏导数都连续，且$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，又$u(x,2x)=x$，$u_1(x,2x)=x^2$。

(1)计算$u_2(x,2x)$.(4 分)

(2)计算$u_{11}(x,2x)$. (7 分)