第五届中国大学生数学竞赛决赛一、二年级试卷解答
(数学类, 2014年3月)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 100 分

注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

一、 (本题 15 分) 设 S 为 $\mathbb{R}^3$ 中的抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$, $P=(a,b,c)$ 为 S 外一固定点，满足 $a^2+b^2>2c$. 过 P 作 S 的所有切线. 证明：这些切线的切点落在同一张平面上.

证明 设 ℓ 是过 P 点的抛物面 S 的一条切线, 它的方向向量为 $V=(u,v,w)$. 则切点可表成 $Q=P+tV=(a+tu,b+tv,c+tw)$, 其中 t 是二次方程

$$2(c+tw)=(a+tu)^2+(b+tv)^2,$$

也就是

$$(u^2+v^2)t^2+2(au+bv-w)t+(a^2+b^2-2c)=0$$

的唯一重根. (5分)

这时,

$$(au+bv-w)^2=(u^2+v^2)(a^2+b^2-2c),$$

$$t=\frac{w-au-bv}{u^2+v^2}=\frac{a^2+b^2-2c}{w-au-bv}.$$

(10分)

于是切点 $Q=(X,Y,Z)=(a+tu,b+tv,c+tw)$ 满足

$$aX+bY-Z=(a^2+b^2-c)+t(au+bv-w)=c.$$

(15分)

于是所有切点 Q 落在平面 $ax+by-z=c$ 上.

二、(本题 15 分) 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x^TAx$, 其中

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix},\ A=\begin{pmatrix}2&a_0&2&-2\\a&0&b&c\\d&e&0&f\\g&h&k&4\end{pmatrix},$$

a_0,a,b,c,d,e,f,g,h,k 皆为实数. 已知 $\lambda_1=2$ 是 A 的一个几何重数为 3 的特征值. 试回答以下问题:

(i) A 能否相似于对角矩阵；若能, 请给出证明；若不能, 请给出例子.

(ii) 当 $a_0=2$ 时, 试求 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 在正交变换下的标准型.

证明 (i) 由于 $tr(A)$ 是 A 的特征值之和, 得 λ_1 的代数重数也是 3, 而 A 的另一个特征值 $\lambda_2=0$, 且 $\lambda_2=0$ 的代数重数为 1. 结果 A 有四个线性无关的特征向量. 故 A 可对角化. (5分)

(ii) 由于 $\lambda_1=2$ 的重数为 3, 故有

$$\mathrm{rank}(A-2E)=\mathrm{rank}\begin{pmatrix}0&2&2&-2\\a&-2&b&c\\d&e&-2&f\\g&h&k&2\end{pmatrix}=1. \qquad (7分)$$

进而 $a/0=-2/2=b/2=c/-2$, 得 $a=0,b=-2,c=2$; $d/0=e/2=-2/2=f/-2$, 得 $d=0,e=-2,f=2$; $g/0=h/2=k/2=2/-2$, 得 $g=0,h=-2,k=-2$. 于是,

$$A=\begin{pmatrix}2&2&2&-2\\0&0&-2&2\\0&-2&0&2\\0&-2&-2&4\end{pmatrix}. \qquad (10分)$$

注意到 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x^TAx=x^TBx$, 其中

$$B=\frac{A+A^T}{2},\ B=\begin{pmatrix}2&1&1&-1\\1&0&-2&0\\1&-2&0&0\\-1&0&0&4\end{pmatrix}.$$

B 的特征值为 $\lambda_1=2$ (二重), $\lambda_2=1+2\sqrt{3}$ (一重), $\lambda_3=1-2\sqrt{3}$ (一重). 故 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 在正交变换下的标准型为

$$2y_1^2+2y_2^2+(1+2\sqrt{3})y_3^2+(1-2\sqrt{3})y_4^2. \qquad (15分)$$

三、(本题 15 分) 设 n 阶实方阵 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ * & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ * & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ 有 n 个线性无关的特征向量, $b_1, \ldots, b_{n-1}$ 均不为 0. 记 $W = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid XA = AX\}$.

证明：W 是实数域 $\mathbb{R}$ 上的向量空间, 且 $I, A, \ldots, A^{n-1}$ 为其一组基, 其中 I 为 n 阶单位阵.

证明 (1). A 有 n 个线性无关的特征向量, 故 A 可对角化. 设 λ_0 是 A 的一个特征值, 考察 $A - \lambda_0 I$, 它有一个 $n-1$ 阶子式不为 0, 结果, $rank(A - \lambda_0 I) = n - 1$. 故 λ_0 的重数为 1, 从而 A 有 n 个各不相同的特征值：$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. (2分)

(2) $\forall X_1, X_2 \in W, \forall \mu \in \mathbb{R}$, 显见 $X_1 + \mu X_2 \in W$, 故 W 为 $\mathbb{R}$ 上的向量空间.

让 $A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}$, 于是方程

$$XA = AX \Leftrightarrow XP \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}X$$

$$\Leftrightarrow P^{-1}XP \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}XP. \qquad (8分).$$

故若记

$$V = \left\{ Y \in \mathbb{R}^{n\times n} \,\middle|\, Y \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} Y \right\},$$

则 W 与 V 有线性同构 $\sigma : X \to P^{-1}XP$, 从而 $dimV = dimW$. 注意到

$V = \left\{ \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & d_n \end{pmatrix} \middle| d_1, \cdots, d_n \in \mathbb{R} \right\}$, 故 $dimV = dimW = n$. (12分)

(3)显然， $I, A, \ldots, A^{n-1} \in W$. 下证 $I, A, \ldots, A^{n-1}$ 线性无关. 事实上, 若 $x_0 I + x_1 A + \cdots + x_{n-1}A^{n-1} = 0$, 则得

$$x_0 + x_1\lambda_1 + \cdots + x_{n-1}{\lambda_1}^{n-1} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x_0 + x_1\lambda_n + \cdots + x_{n-1}{\lambda_n}^{n-1} = 0$$

其系数行列式为范德蒙行列式。由 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ 各不相同, 故 $I, A, \ldots, A^{n-1}$ 线性无关, 即 $I, A, \ldots, A^{n-1}$ 为其一组基. 证毕. (15分)

四、(本题 15 分) 设 $f(x,y)$ 为 $[a,b]\times R$ 上关于 y 单调下降的二元函数. 设 $y=y(x)$ 和 $z=z(x)$ 是可微函数, 且满足:

$$y'=f(x,y),\ z'\le f(x,z),x\in[a,b].$$

已知 $z(a)\le y(a)$. 求证: $z(x)\le y(x),x\in[a,b]$.

证明: 用反证法. 设存在 $x_0\in[a,b]$ 使得 $z(x_0)>y(x_0)$. 令 $M=\{x\in[a,b]\mid z(x)>y(x)\}$, 则 M 为 $[a,b]$ 的非空开子集. (5分)

故存在开区间 $(\alpha,\beta)\subset M$ 满足

$$y(\alpha)=z(\alpha),\ z(x)>y(x),\ x\in(\alpha,\beta).$$

这推出 $z(x)-y(x)$ 单调不增. 故 $z(x)-y(x)\le z(a)-y(a)=0$. 矛盾. (15分)

五、(本题 20 分) 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上非负可导函数, $f(0)=0$, $f'(x)\leqslant \frac{1}{2}$. 假设 $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ 收敛. 求证: 对任意 $\alpha>1$, $\int_0^{+\infty} f^\alpha(x)\,dx$ 也收敛, 并且

$$\int_0^{+\infty} f^\alpha(x)\,dx \leqslant \left(\int_0^{+\infty} f(x)\,dx\right)^\beta, \quad \beta=\frac{\alpha+1}{2}.$$

证明 令

$$g(t)=\left(\int_0^t f(x)\,dx\right)^\beta-\int_0^t f^\alpha(x)\,dx, \tag{5分}$$

则 $g(t)$ 可导, 且

$$g'(t)=f(t)\left[\beta\left(\int_0^t f(x)\,dx\right)^{\beta-1}-f^{\alpha-1}(t)\right].$$

令

$$h(t)=\beta^{\frac{1}{\beta-1}}\int_0^t f(x)\,dx-f^2(t). \tag{10分}$$

则有

$$h'(t)=f(t)\left[\beta^{\frac{1}{\beta-1}}-2f'(t)\right].$$

由于 $\beta>1$, $f'(x)\leqslant\frac{1}{2}$, 我们有 $h'(t)\geqslant 0$. 这说明 $h(t)$ 单调递增, (15分)

从 $h(0)=0$, 得 $h(t)\geqslant 0$. 因而 $g'(t)\geqslant 0$. 再从 $g(0)=0$, 可得 $g(t)\geqslant 0$, 即

$$\int_0^t f^\alpha(x)\,dx\leqslant\left(\int_0^t f(x)\,dx\right)^\beta.$$

令 $t\to+\infty$, 即得所证. (20分)

六、 (本题 20 分) 对多项式 $f(x)$, 记 $d(f)$ 表示其最大和最小实根之间的距离. 设 $n \geq 2$ 为自然数. 求最大实数 C, 使得对任意所有根都是实数的 n 次多项式 $f(x)$, 都有 $d(f') \geq Cd(f)$.

证明 $C_{\max} = \sqrt{1-\frac{2}{n}}$. (2分)

不妨 $f(x)$ 的最小实根为 0, 最大实根为 a. 设

$$f(x) = (x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n),\ \ 0 = x_1 \leq x_2, \cdots, x_{n-1} \leq x_n = a.$$

先证以下

引理: 若存在 $2 \leq k, m \leq n-1$ 使得 $x_k < x_m$, 令 $x_k < x_k' \leq x_m' < x_m$ 满足 $x_k + x_m = x_k' + x_m'$, 令

$$f_1(x) = (x-x_1')(x-x_2')\cdots(x-x_n'),\ \ x_i' = x_i,\ \ i \neq k, m.$$

则有 $d(f_1') \leq d(f')$. (5分)

证明: 注意到 $f(x) = f_1(x) - \delta F(x)$, 其中

$$F(x) = \frac{f_1(x)}{(x-x_k')(x-x_m')},\ \ \delta = x_k'x_m' - x_kx_m > 0.$$

设 α 和 β 分别为 $f_1'(x)$ 的最大和最小实根, 则有 $f_1(\alpha) \leq 0$, $f_1(\beta)(-1)^n \leq 0$. 由罗尔定理 $\alpha \geq x_m, \beta \leq x_k$, 并且

$$f'(\alpha) = \delta\frac{(2\alpha - x_k' - x_m')}{(\alpha - x_k')^2(\alpha - x_m')^2}f_1(\alpha).$$

则 $f'(\alpha)f_1(\alpha) \geq 0$. 故 $f'(\alpha) \leq 0$. 这表明 $f'(x) = 0$ 的最大实根大于或等于 α. 同理, $f'(x) = 0$ 最小实根小于或等于 β. 引理证毕. (12分)

令

$$g(x) = x(x-a)(x-b)^{n-2},\ \ b = \frac{x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1}}{n-2}.$$

由引理得到 $d(f') \geq d(g')$. (15分)

由于

$$g'(x) = (x-b)^{n-3}(nx^2 - ((n-1)a + 2b)x + ab),$$

$$d(g') = \sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{n} + \left(\frac{a-2b}{n}\right)^2} \geq \sqrt{1-\frac{2}{n}}\ a.$$

于是 C 的最大值 $C_{max} \geq \sqrt{1-\frac{2}{n}}$, 且当 $f(x) = x(x-a)(x-a/2)^{n-2}$ 时, $d(f') = \sqrt{1-\frac{2}{n}}d(f)$. (20分)