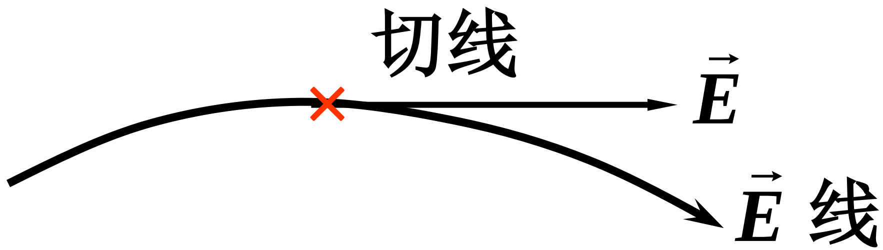
§ 12.6 静电场的几何描述方法

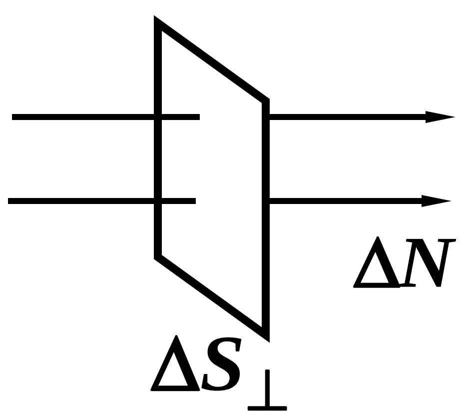
一.电场线（$\vec{E}$ 线）

为形象地描写场强的分布，引入 $\vec{E}$ 线。

1. $\vec{E}$ 线上某点的切向，即为该点 $\vec{E}$ 的方向；

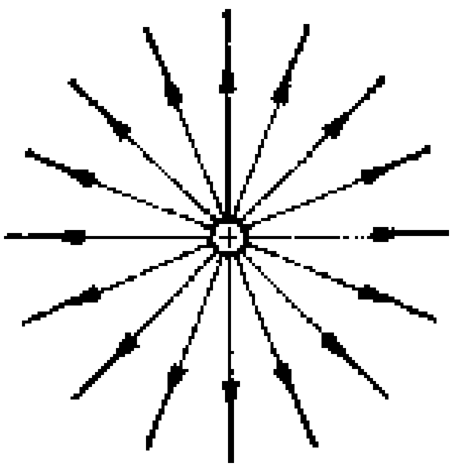


2. $\vec{E}$ 线的密度给出 $\vec{E}$ 的大小。

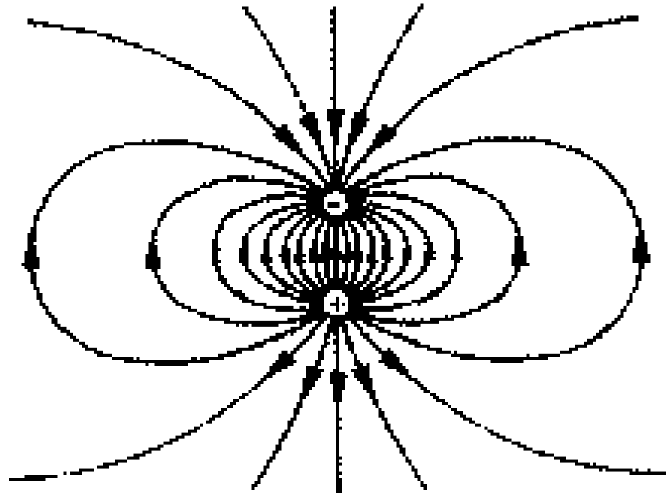


$$E = \lim_{\Delta S_{\perp} \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta S_{\perp}} = \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}S_{\perp}}$$

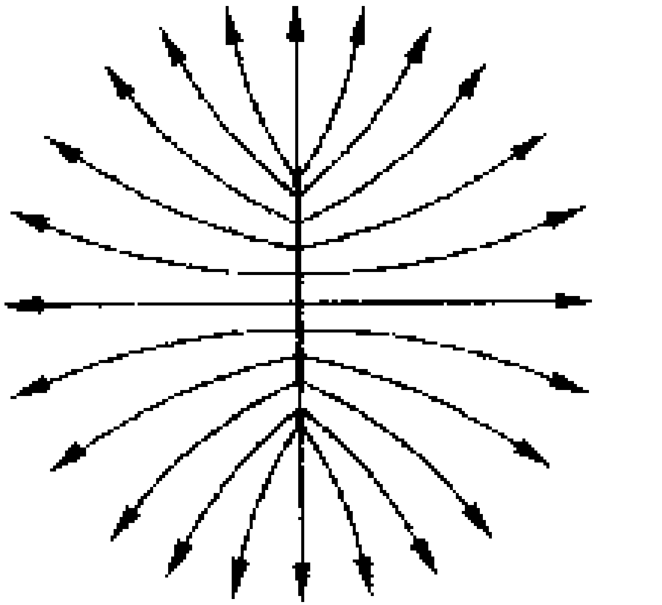
几种场源电荷的 $\vec{E}$ 线分布：



带正电的点电荷

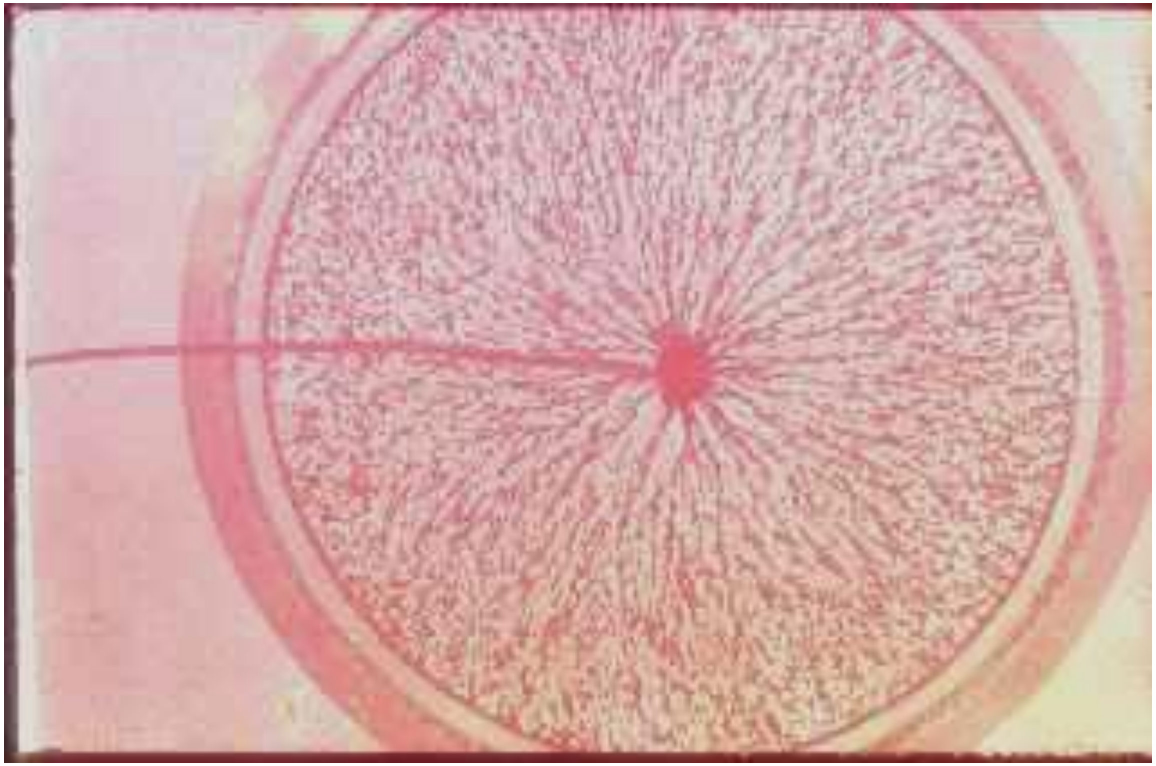


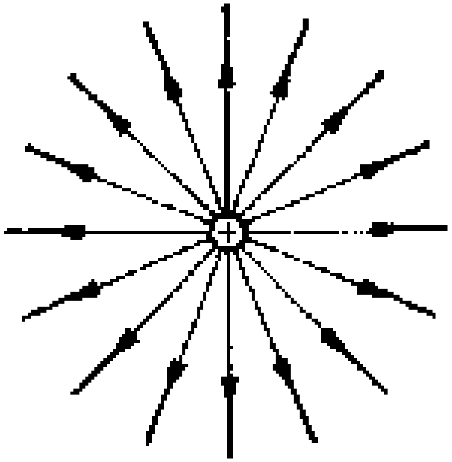
电偶极子



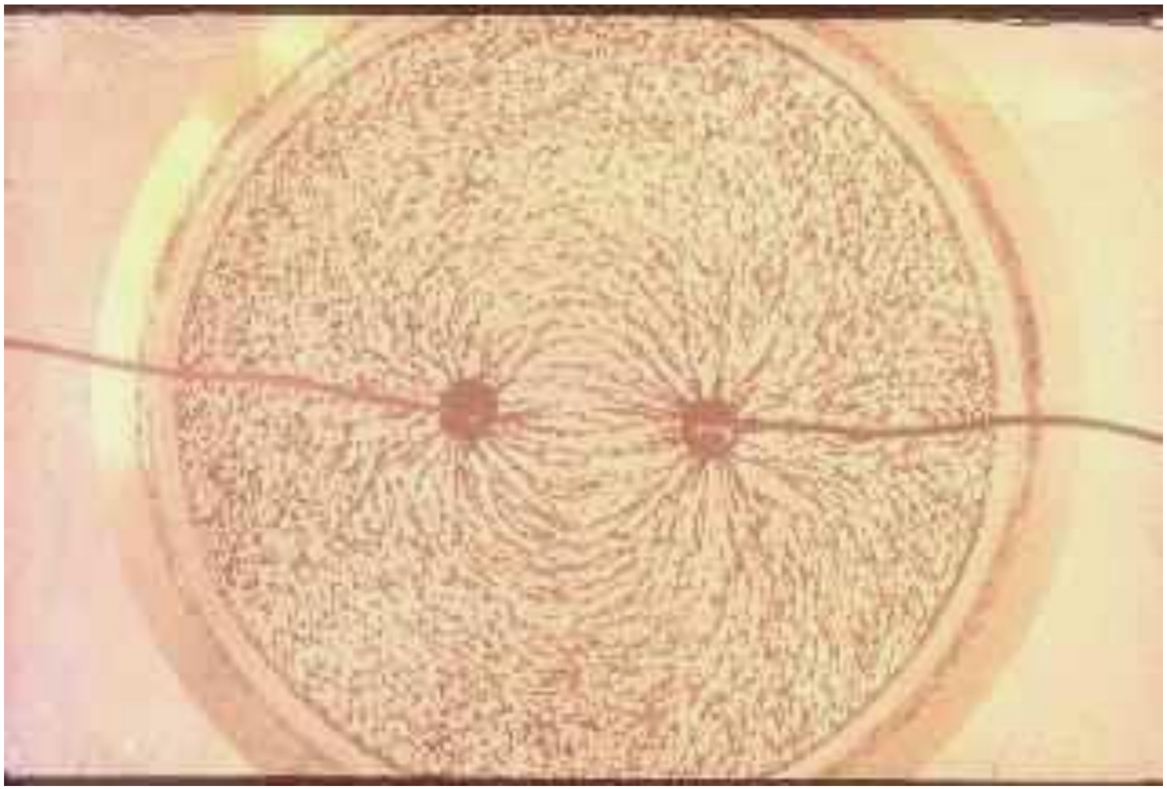
均匀带电的直线段

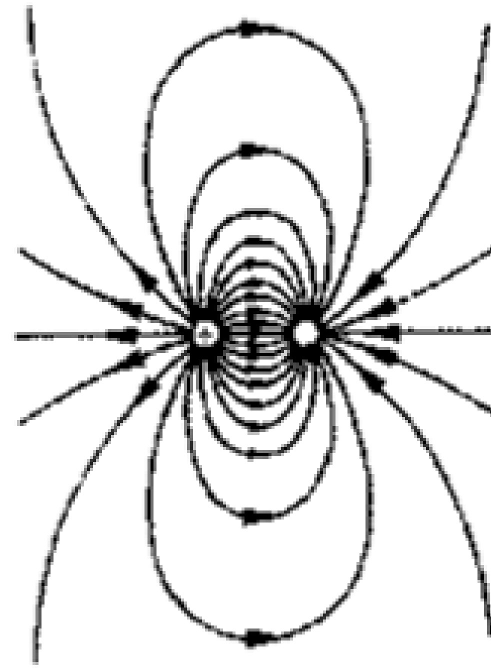
几种场源电荷的 $\vec{E}$ 线分布的实验现象：



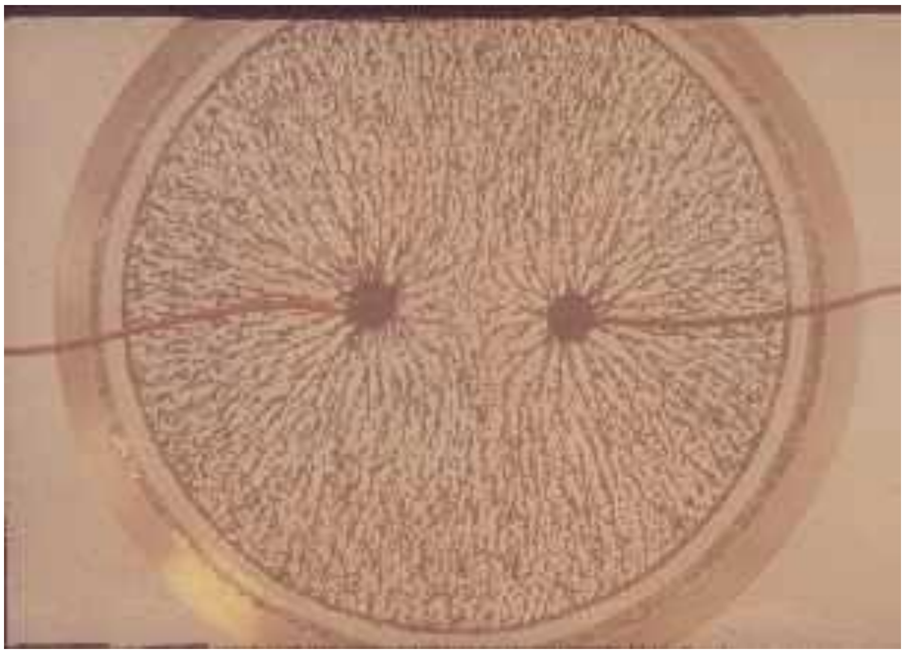


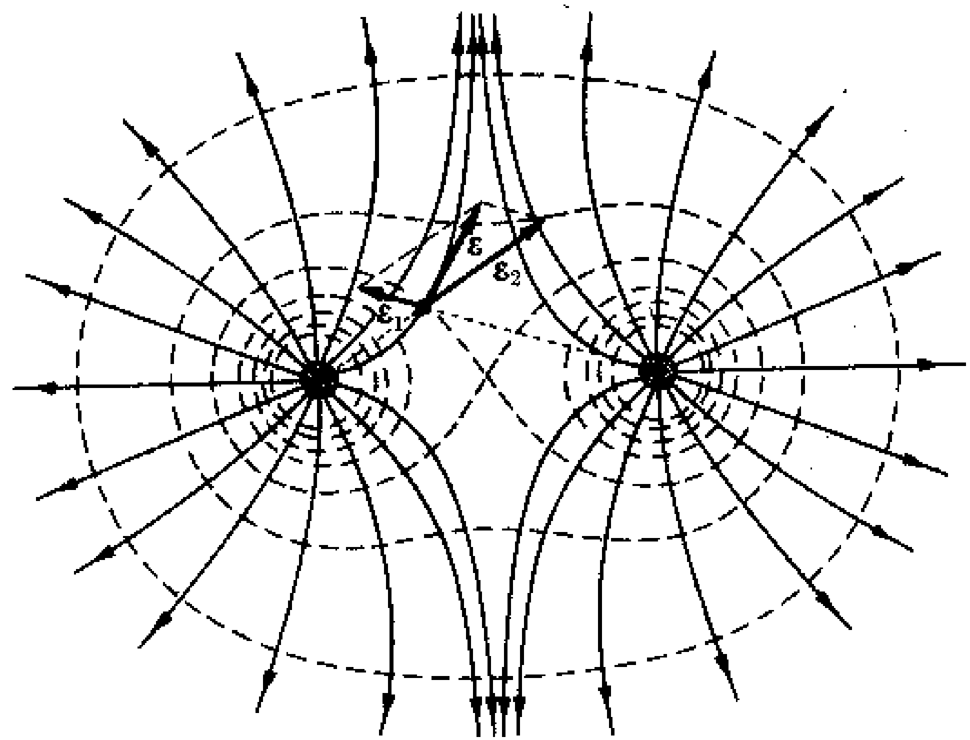
单个点电 极



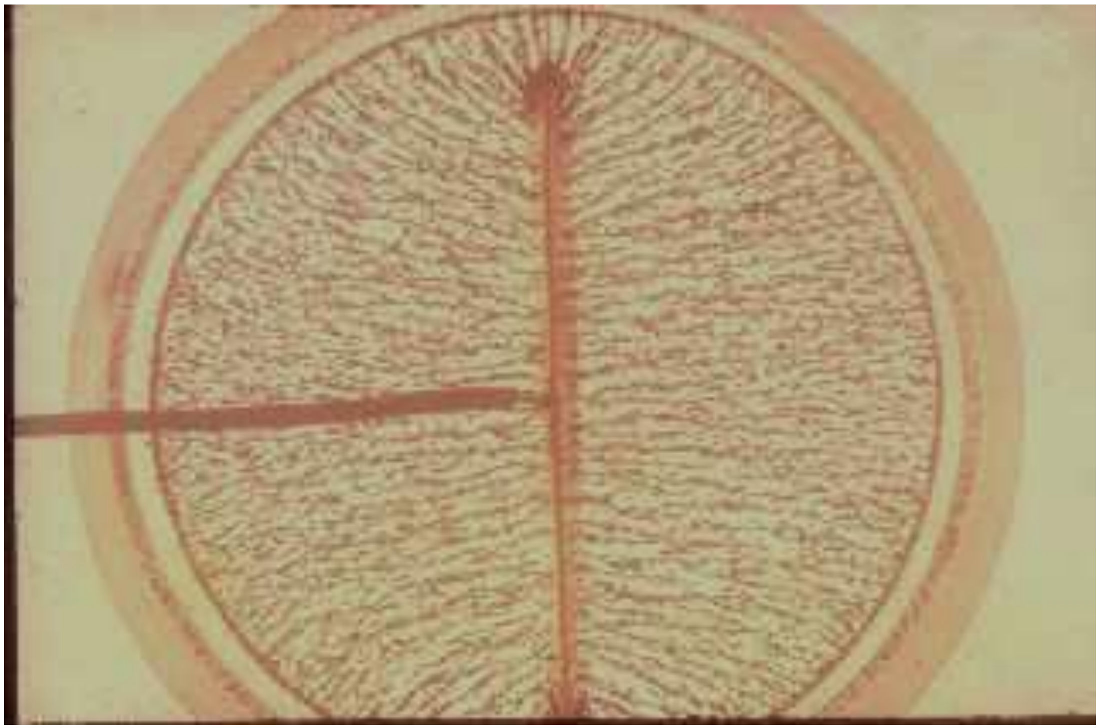


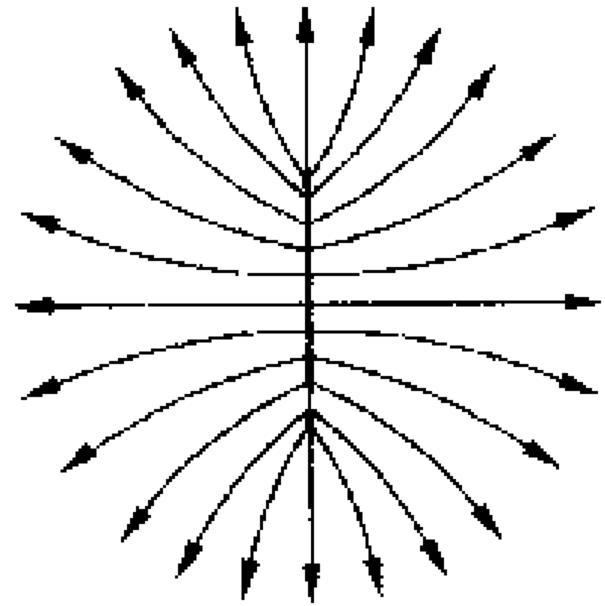
正 负 点 电 极



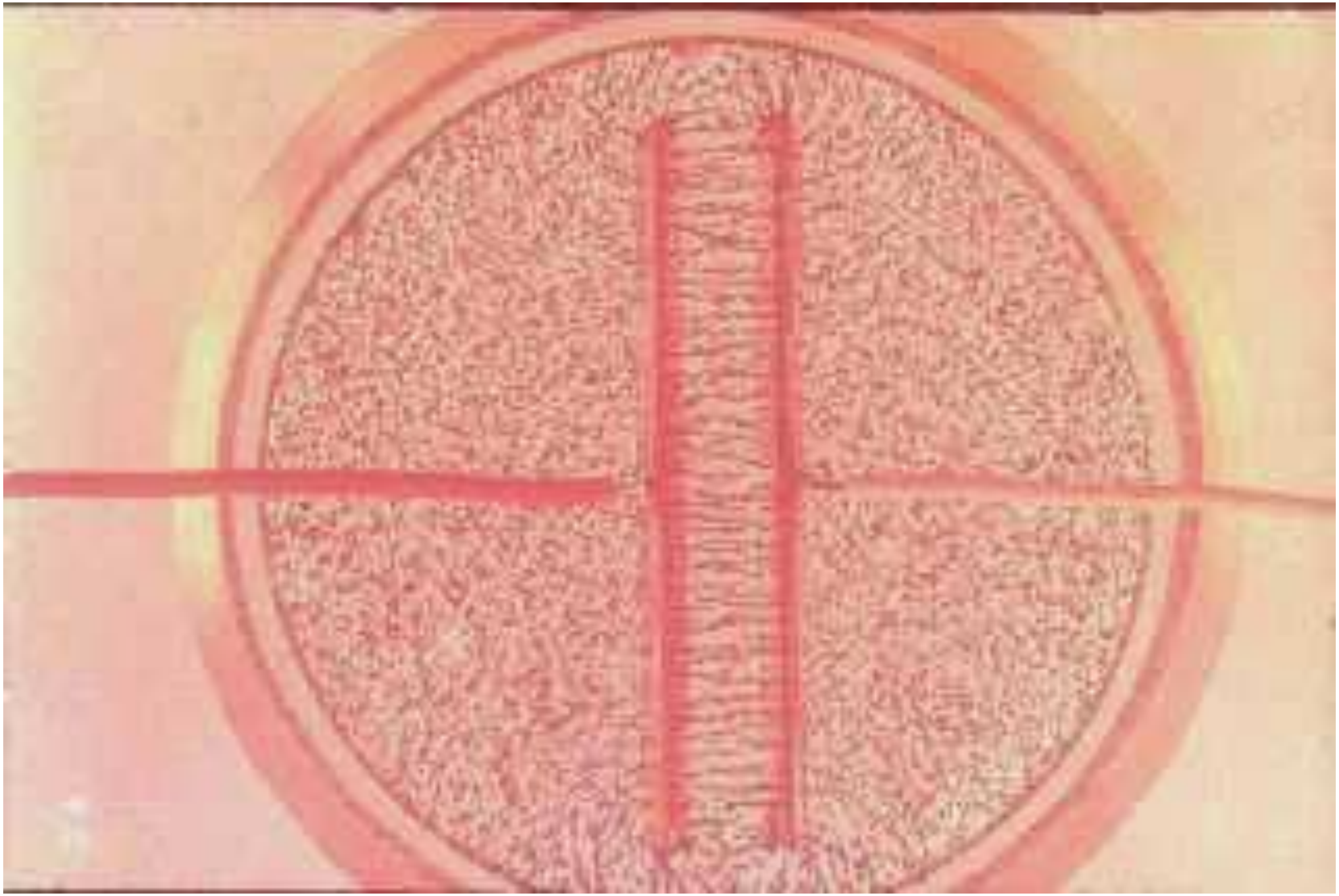


两 个 同 号 的 点 电 极

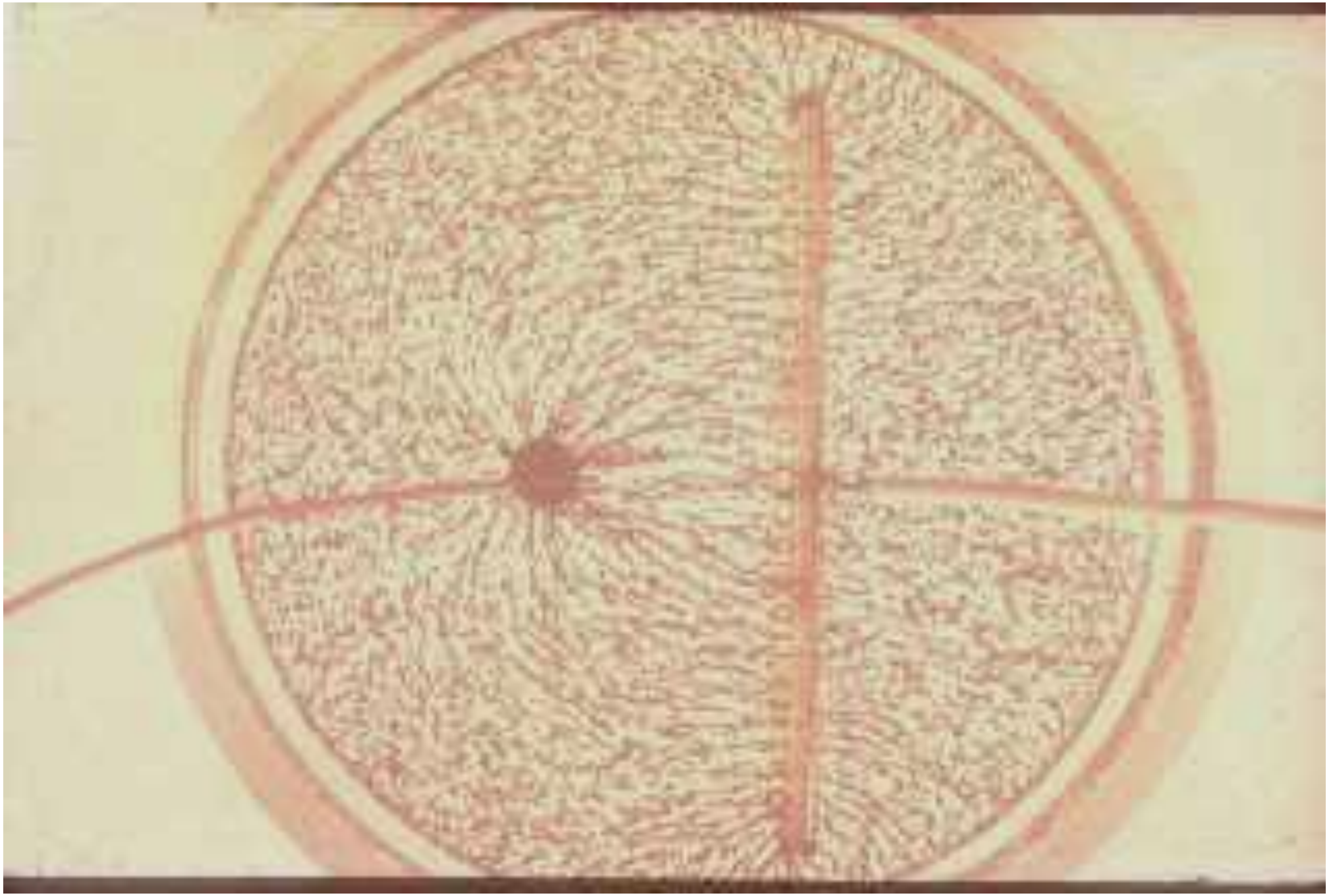




单 个 带 电 平 板 电 极



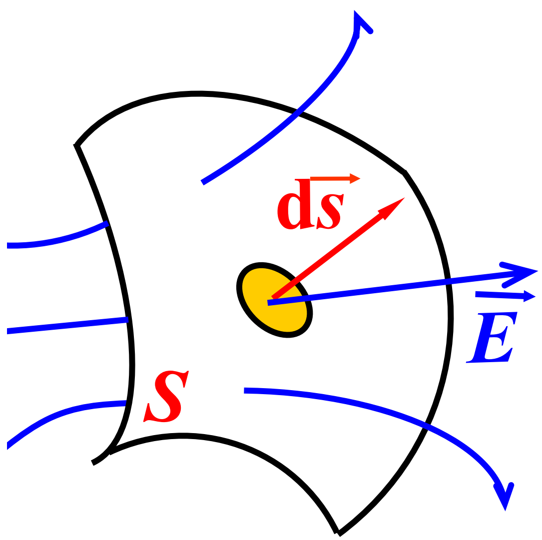
分 别 带 正 负 电 的 平 行 平 板 电 极

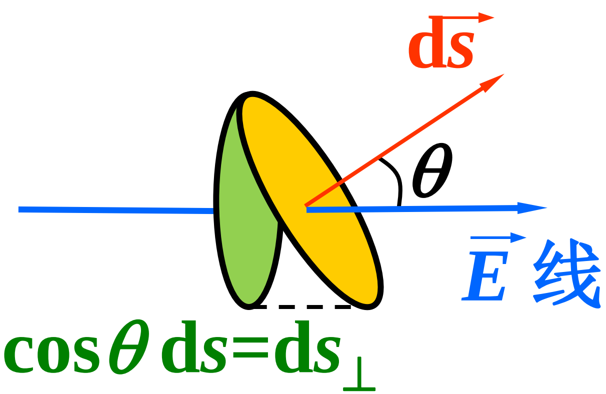


带 异 号 电 荷 的 点 电 极 和 平 板 电 极

“怒发冲冠”

二. 电通量 Φ_e





通过面元S的电通量：

$$\Phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

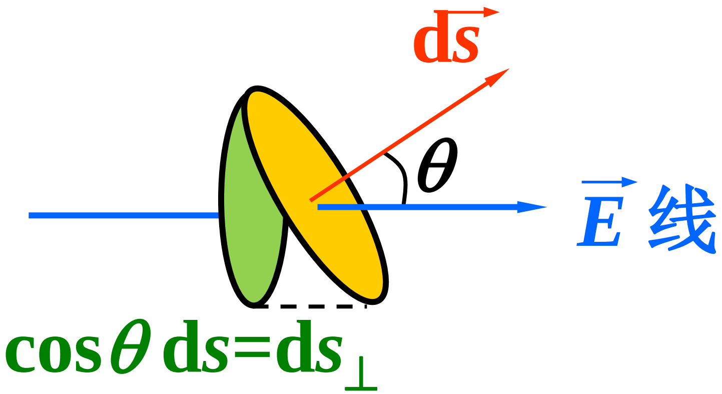
(1) Φ_e是对面而言，不是点函数

(2) Φ_e是代数量，有正、负之分

Φ_e的几何意义：

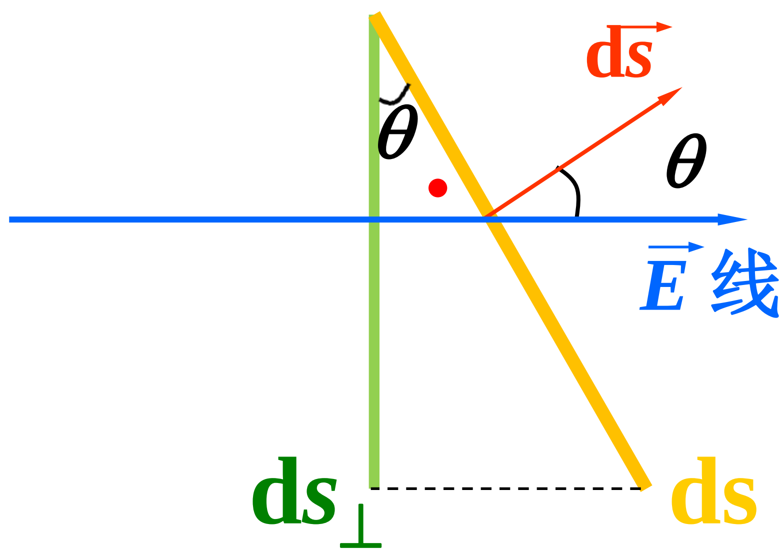
$$d\Phi_e = \vec{E} \cdot d\vec{s} = E\cos\theta \cdot ds$$
$$= E \cdot ds_\perp = dN$$

$\therefore\ \Phi_e = N$（穿过S的$\vec{E}$线条数）



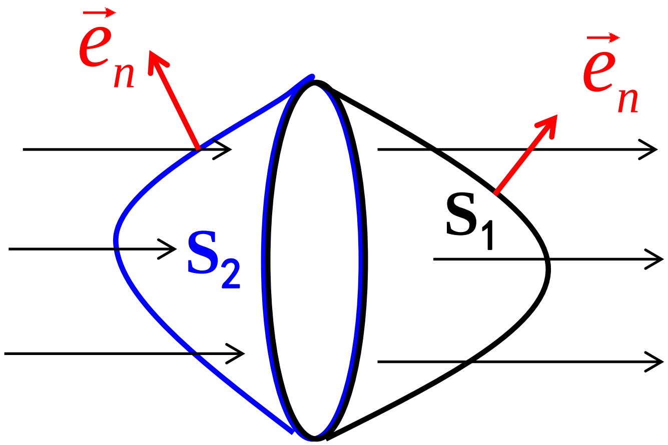
$$d\Phi_e = \vec{E}\cdot d\vec{s} = E\cos\theta \cdot d s$$

$$= E\cdot d s_\perp$$



对闭合曲面，

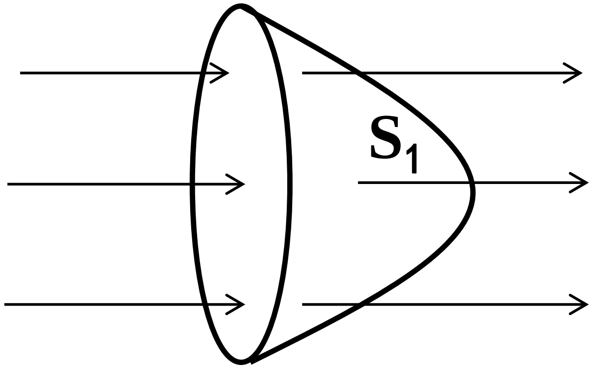
$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\,\vec{s}$$



约定：闭合曲面以向外为曲面法线的正方向。

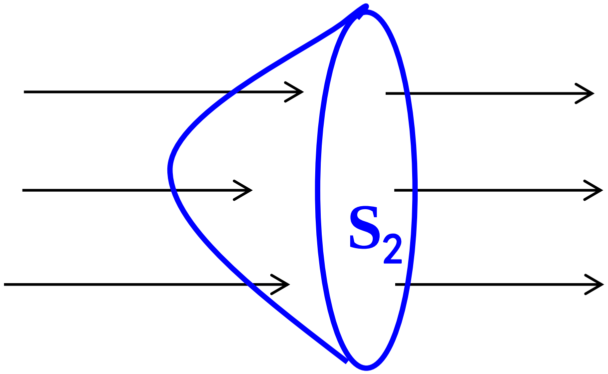
通过面元S_1的电通量：

$$\Phi_{e1} = \int_{S_1} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\,\vec{s}$$

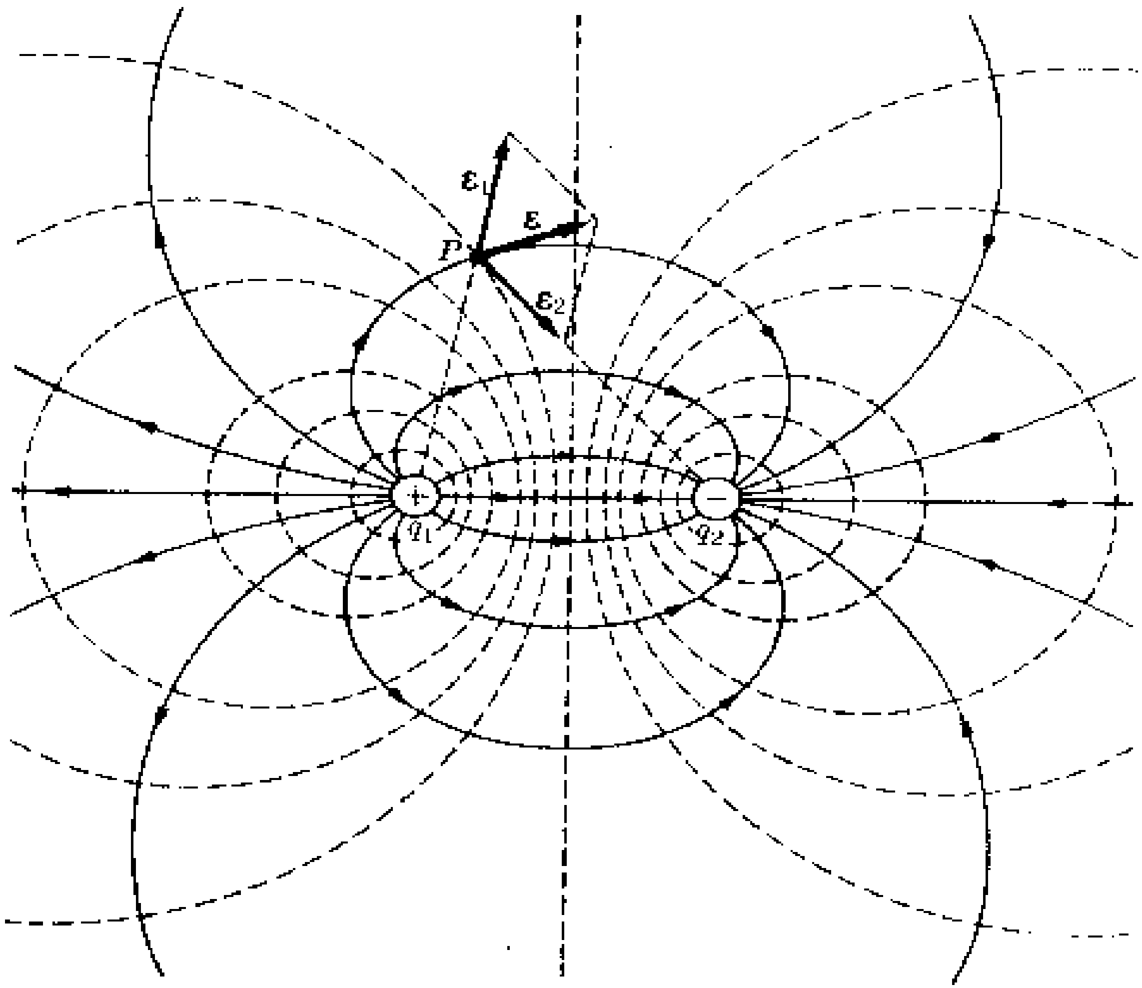


通过面元S_2的电通量：

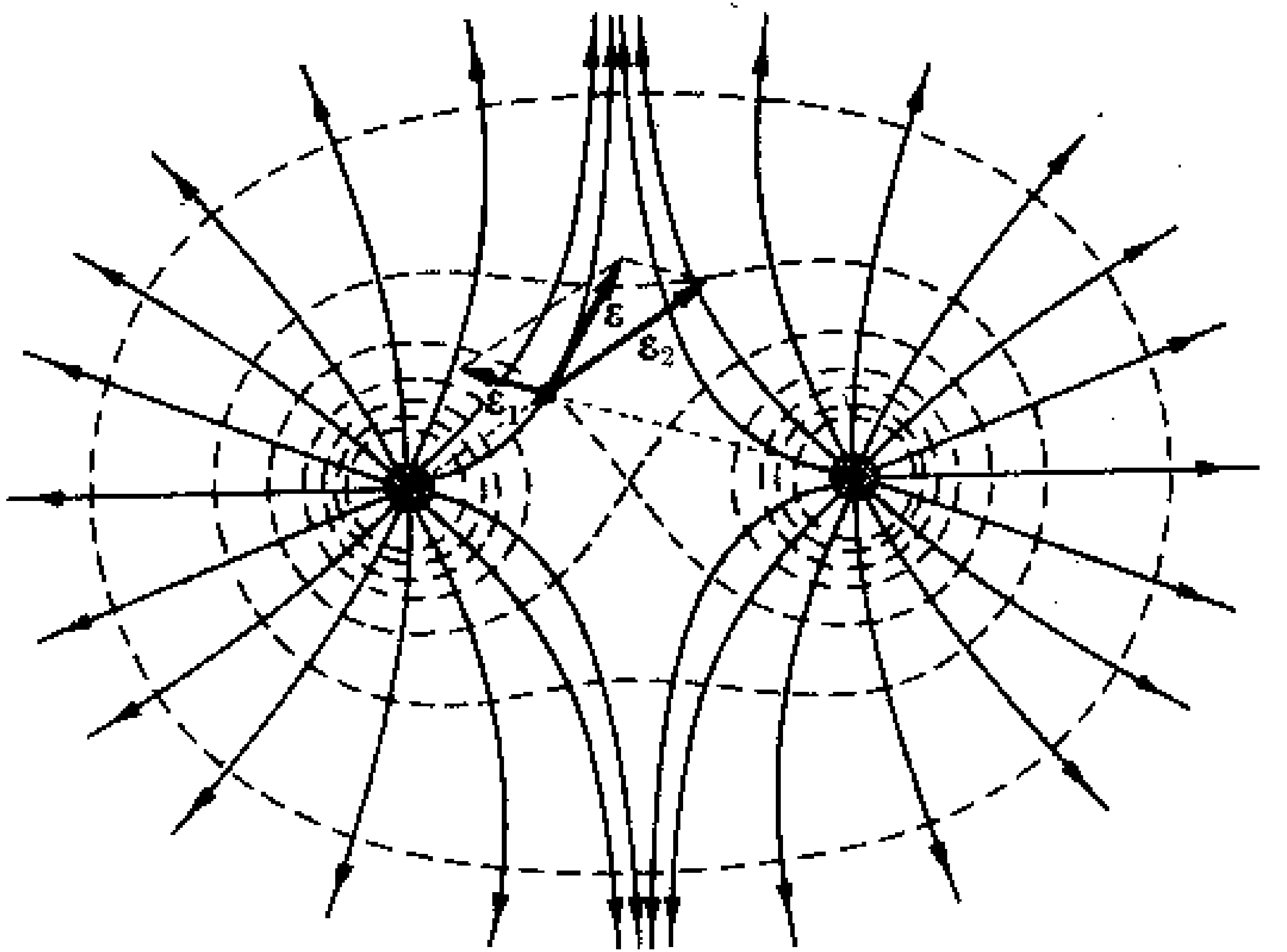
$$\Phi_{e2} = \int_{S_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\,\vec{s}$$



三、等势面：电势相等的点组成的曲面



电偶极子的电场线和等势面



两个等量的正电荷的电场线和等势面

等势面：电势相等的点组成的曲面

电势与电场的关系：

1：等势面与电场线处处正交

2：等势面相距较近处的场强数值大，相距较远的场强数值小

§ 12.7 静电场的高斯定理

高斯定理是反映静电场性质的一个基本定理。

一. 问题的提出：

由 $\vec{E}=\int_q \frac{\vec{e}_r\,\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$，原则上，任何电荷分布的电场强度都可以求出，为何还要引入高斯定理？

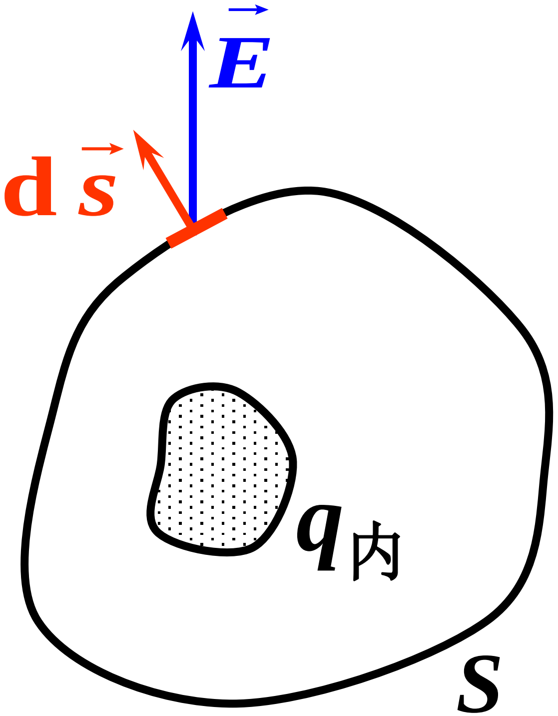
目的： ① 进一步搞清静电场的性质；

② 便于电场的求解；

③ 解决由场强求电荷分布的问题。

二. 高斯定理的内容

高斯定理： 在真空中的静电场内，通过任意闭合曲面的电通量，等于该曲面所包围电量的代数和除以ε_0。



$$\boxed{\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0}}$$

三. 高斯定理的证明

证明可按以下四步进行：

1. 求以点电荷为球心的球面的Φ_e

2. 求点电荷场中任意闭合曲面的电通量

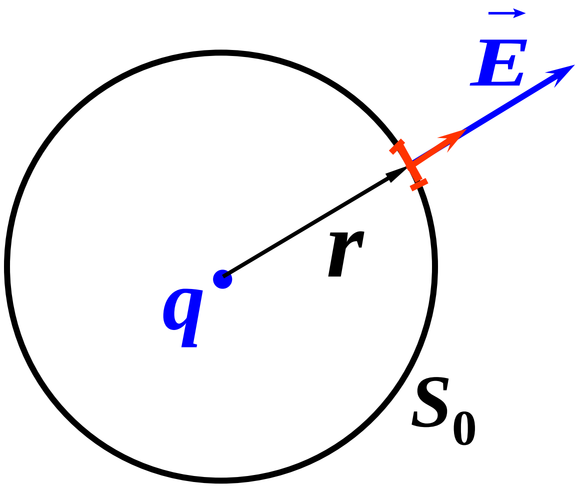
3. 求点电荷系的电场中任意闭合曲面的电通量

4. 将上结果推广至任意连续电荷分布

三. 高斯定理的证明

证明可按以下四步进行：

1. 求以点电荷为球心的球面的Φ_e



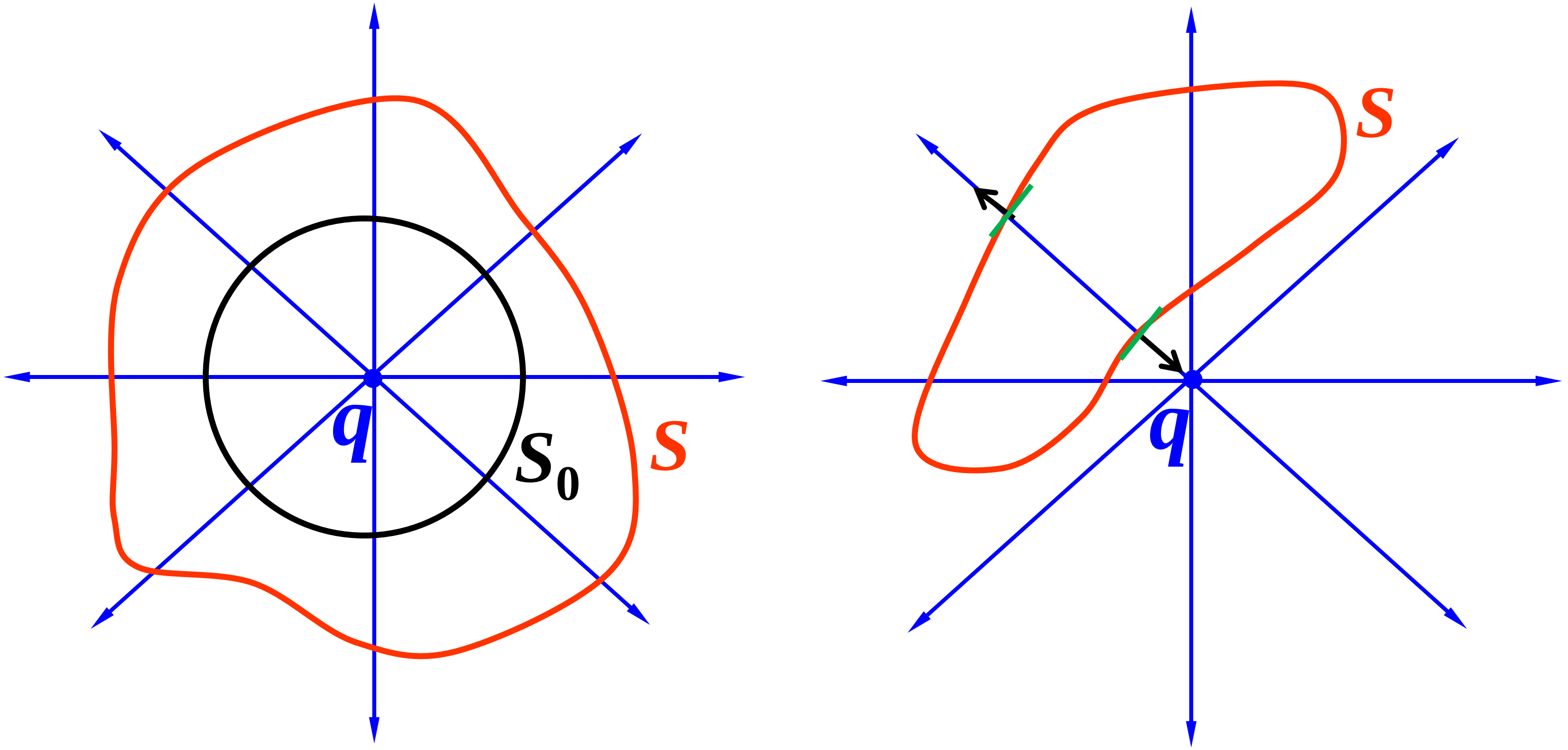
$$\Phi_e = \oint_{S_0} \vec{E}\cdot d\vec{s}_0 = \int_{S_0} \frac{q\vec{e}_r \cdot d\vec{s}_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$= \oint_{S_0} \frac{q\cdot d s_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q\cdot 4\pi r^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

由此可知： 点电荷电场对球面的Φ_e与 r 无关，

即各球面的 Φ_e连续 $\rightarrow$ 点电荷的$\vec{E}$线连续。

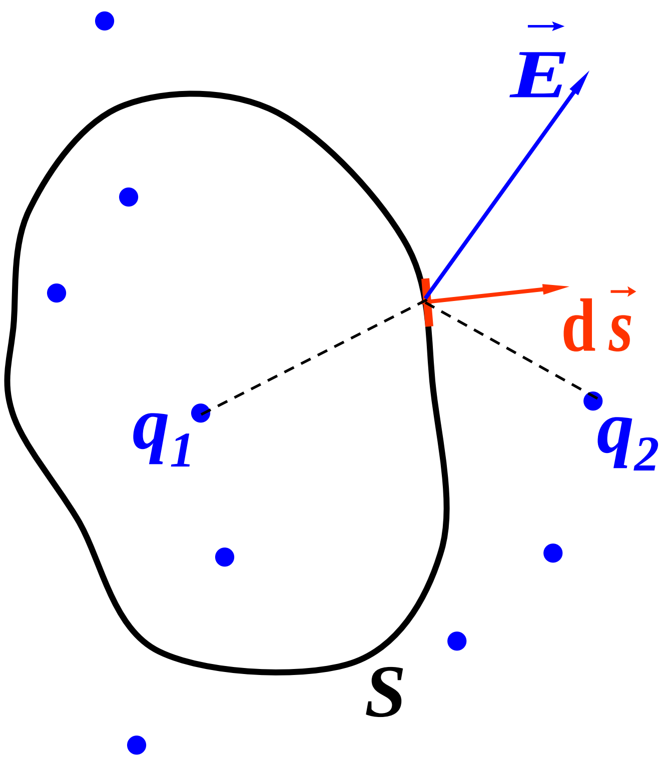
2. 求点电荷场中任意曲面的电通量



$$\therefore \quad \Phi_e = \begin{cases} \dfrac{q}{\varepsilon_0}, & q \text{ 在 } S \text{ 内；} \\ 0, & q \text{ 在 } S \text{ 外。} \end{cases}$$

3. 求点电荷系的电场中任意闭合曲面的电通量

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \ldots\ldots + \vec{E}_n$$



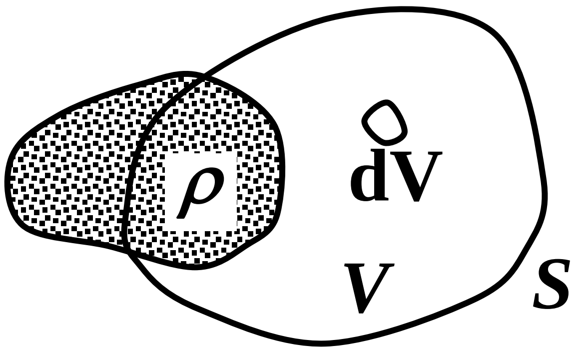
$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

$$= \oint_S (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \ldots + \vec{E}_n) \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

$$= \sum_{i=all} \Phi_{ei}$$

$$= \sum_{i=\text{internal}} \frac{q_i}{\varepsilon_0} + 0 = \frac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0}$$

4. 将上结果推广至任意连续电荷分布



$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \int_V \rho . \mathrm{d}\,\mathrm{V}$$

说明： 1) 高斯定理是平方反比定律的必然结果；

2) Φ_e 由 $\sum q_{内}$ 的值决定，与 $q_{内}$ 分布无关；

3) $\vec{E}$ 是总场强，它由$q_{内}$ 和 $q_{外}$共同决定；

4) 高斯定理也适用于变化电场；

1、下列关于高斯定理的说法正确的是（ A ）

A、如果高斯面上*E*处处为零，则面内未必无电荷。

B、如果高斯面上*E*处处不为零，则面内必有静电荷。

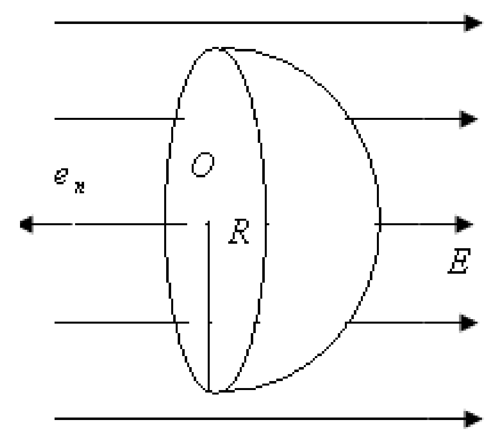
C、如果高斯面内无电荷，则高斯面上*E*处处为零。

D、如果高斯面内有净电荷，则高斯面上*E*处处不为零。

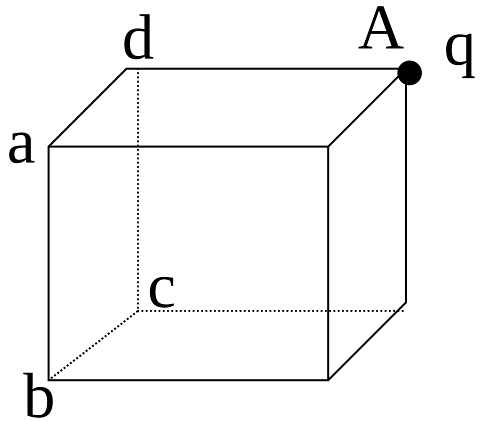
2. 如图所示，在电场强度E的均匀电场中，有一半径为R的半球面，场强E的方向与半球面的对称抽平行，穿过此半球面的电通量为（ D ）

A、$2\pi R^2 E$　　B、$\sqrt{2}\pi R^2 E$

C、$\frac{1}{2}\pi R^2 E$　　D、$\pi R^2 E$

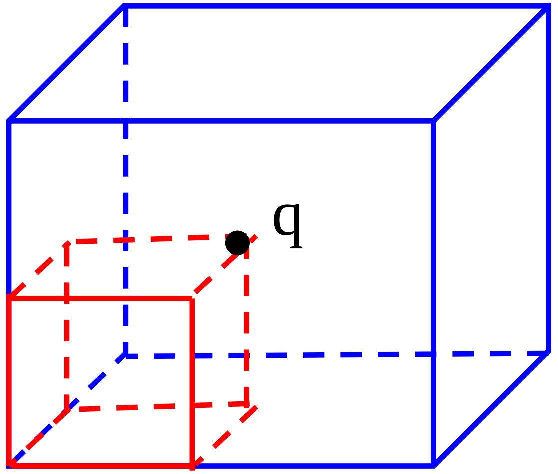


3. 如图所示，一个点电荷位于立方体一顶点A上，则通过abcd面上的电通量为（　C　）



A、$\dfrac{q}{36\varepsilon_0}$　　B、$\dfrac{q}{6\varepsilon_0}$

C、$\dfrac{q}{24\varepsilon_0}$　　D、$\dfrac{q}{12\varepsilon_0}$



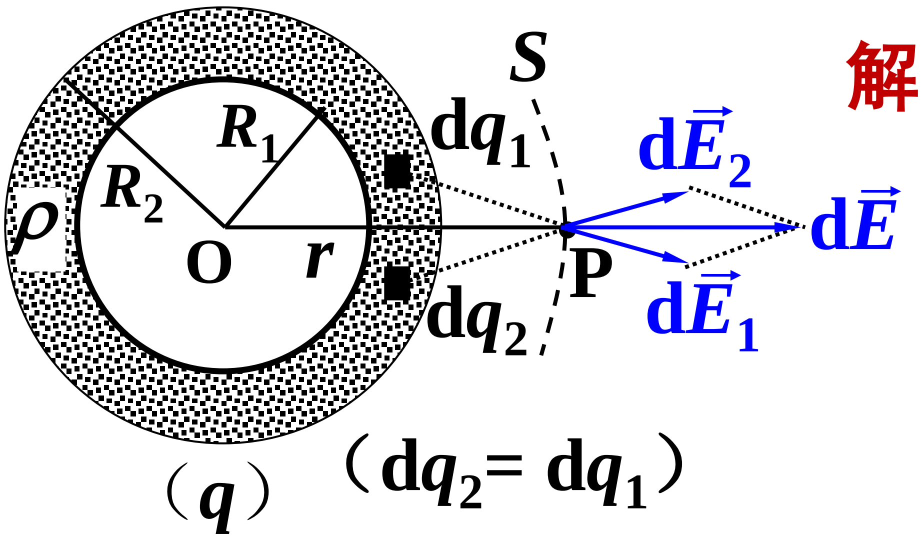
四、高斯定理应用

高斯定理 $\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \dfrac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0}$

$$\text{应用}\begin{cases}\text{求解电场} \\ \text{分析电场} \\ \text{由场强求电荷分布}\end{cases}$$

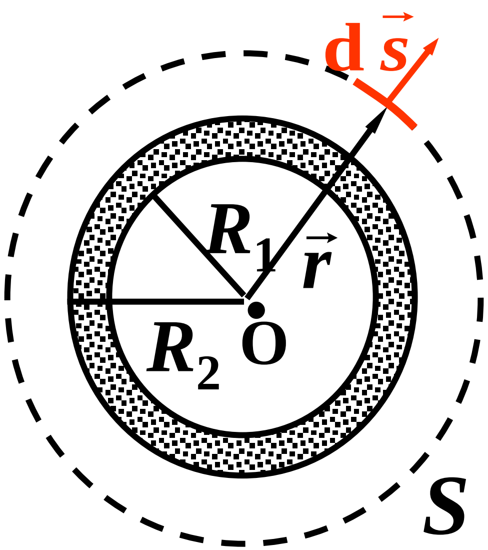
例1 已知：均匀带电球壳的ρ (或 q) 及R_1、R_2

求：电场强度的分布。



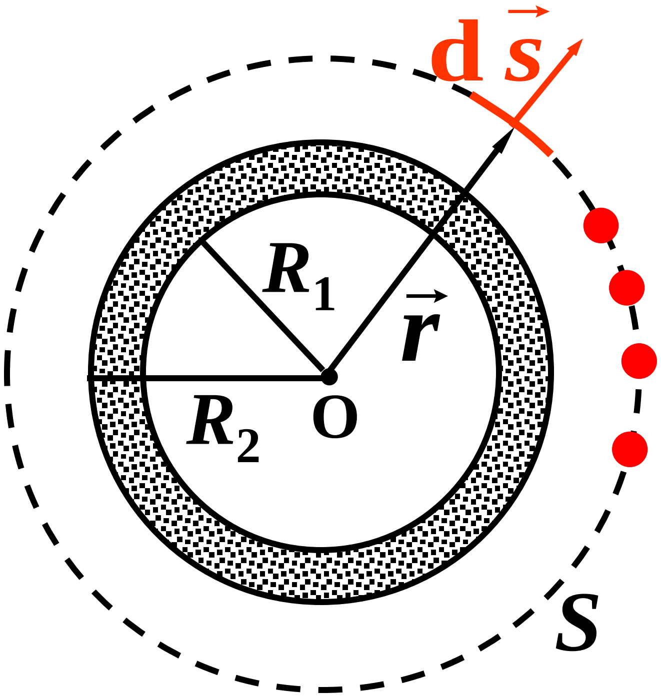
解： $\vec{E}$ 的分布：$\vec{E} = E_{(r)} \cdot \vec{e}_r$

——球对称性



选高斯面S为与带电球壳同心的球面，有：

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S E(r)\vec{e}_r \cdot d\vec{s}$$



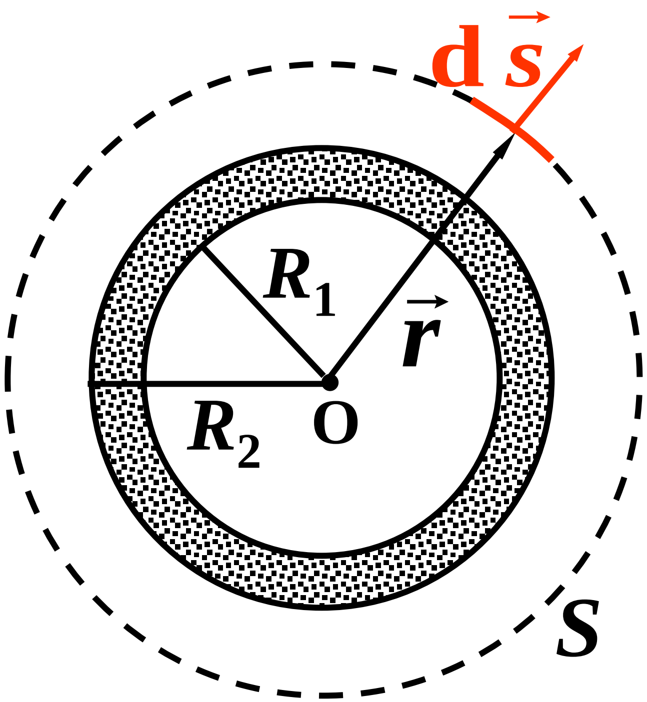
$$\vec{E} = E(r)\vec{e}_r = \frac{q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \oint_S E(r)\vec{e}_r \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \oint_S E(r)\,\mathrm{d}s$$

$$= E(r)\int ds_0$$

$$= 4\pi r^2 \cdot E(r)$$

根据高斯定理 $\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \dfrac{q_{内}}{\varepsilon_0}$ $\quad 4\pi r^2 \cdot E(r) = \dfrac{q_{内}}{\varepsilon_0}$



$$\vec{E} = E(r)\vec{e}_r = \frac{q_{内}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$

(1) 当r<R_1时，$q_{内} = 0$，有

$$E = 0$$

(2) 当R_1<r<R_2时，

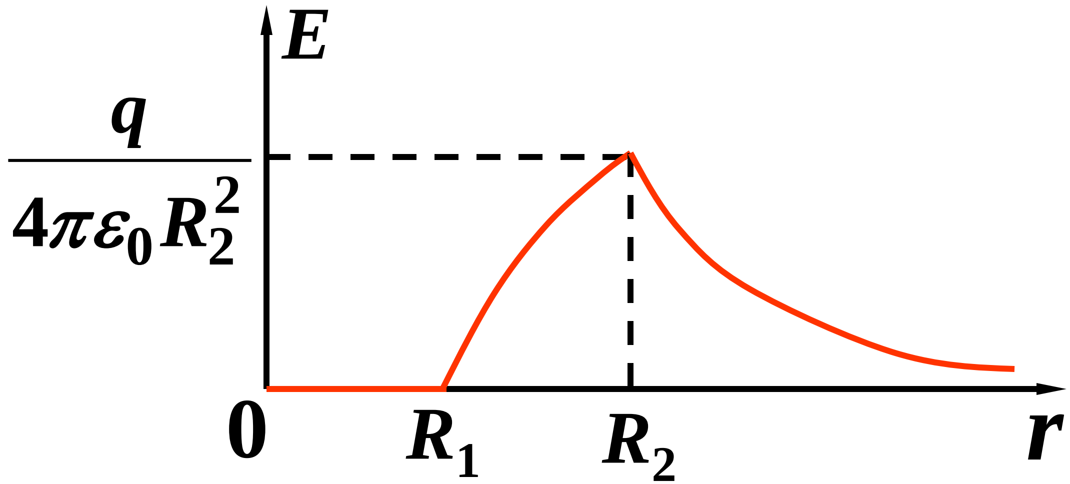
$$q_{内} = \frac{4\pi}{3}(r^3 - R_1^3)\rho \quad \vec{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(r - \frac{R_1^3}{r^2})\vec{e}_r$$

(3) 当r>R_2时，$q_{内} = \frac{4\pi}{3}(R_2^3 - R_1^3)\rho = q$，

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$$ （同点电荷的电场）

讨论：

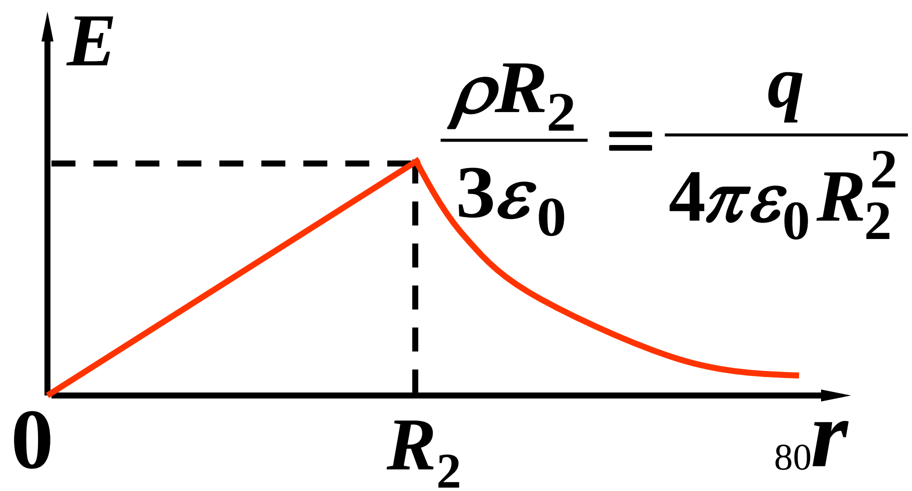
1. E 的分布



2. 特殊情况

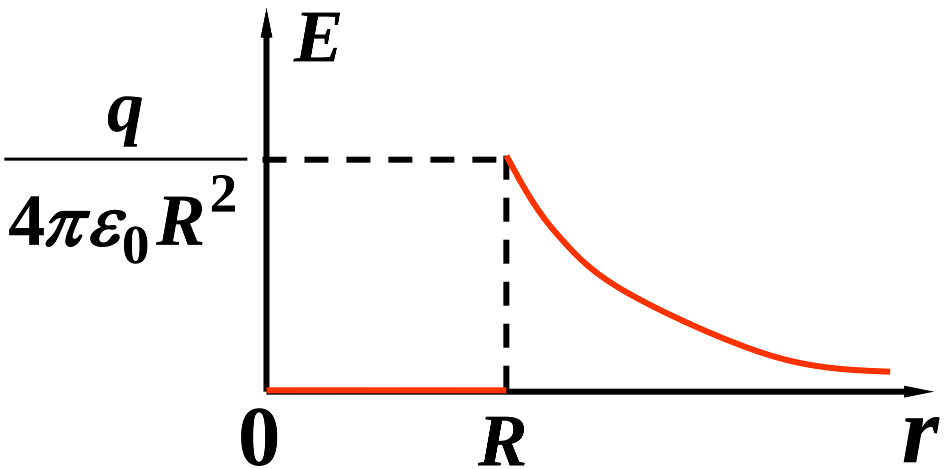
1）令$R_1 = 0$，得**均匀带电球**的情形：

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho\,\vec{r}}{3\varepsilon_0} & \text{（球内）} \\ \dfrac{q\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{（球外）} \end{cases}$$



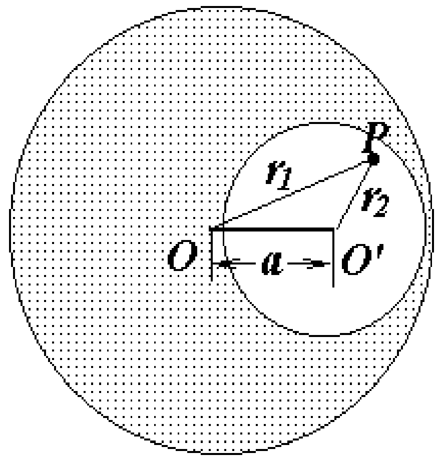
2）令$R_1 = R_2 = R$，且 q 不变，得**均匀带电球面**

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & \text{（球面内）} \\ \dfrac{q\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & \text{（球面外）} \end{cases}$$



在 $r = R$ 处 E 不连续，这是因为忽略了电荷层的厚度。

5. 如图，在电荷体密度为ρ的均匀带电球体中，存在一个球形空腔，若将带电体球心*O*指向球形空腔球心O'的矢量用 $\vec{a}$ 表示。证明球形空腔中任一点电场强度是常数。



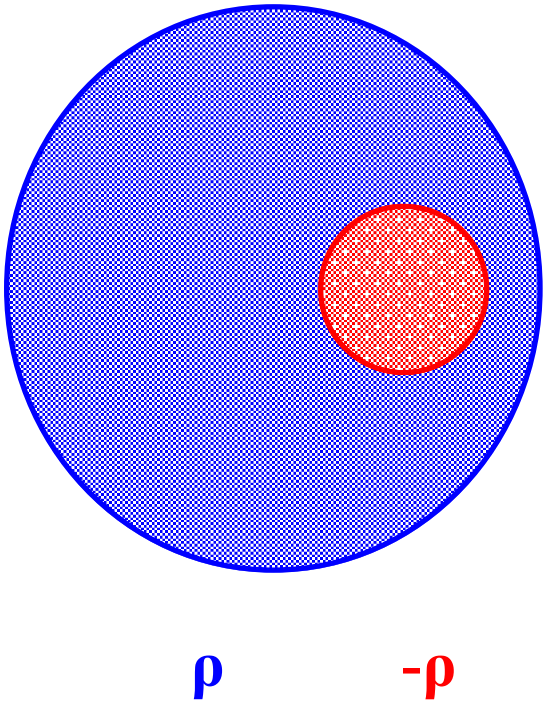
证： 球形空腔可以看成是由电荷体密度分别为**ρ和- ρ**的均匀带电大球体和小球体叠加而成。空腔内任一点*P*处的场强，可表示为

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_1 + \frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

其中 E_1 和 E_2 分别为带电大球体和小球体在*P*点的场强。

有几何关系 $\vec{\mathbf{r}}_1 - \vec{\mathbf{r}}_2 = \vec{\mathbf{a}}$

因此 $\boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{3\varepsilon_0}\boldsymbol{a}$


ρ
-ρ