

专业: _____ 所在院校: _____ 准考证号: _____ 姓名: _____

第三届中国大学生数学竞赛决赛试卷 (数学类, 2012)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题 目	一	二	三	四	五	六	七	总分
满 分	15	15	10	10	15	20	15	100
得 分								

- 注意: 1. 所有答题都必须写在此试卷密封线右边, 写在其他纸上一律无效.
 2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
 3. 如当题空白不够, 可写在当页背面, 并标记题号.

得 分	
评阅人	

一、(本题 15 分) 设有空间中五点: $A(1, 0, 1)$, $B(1, 1, 2)$, $C(1, -1, -2)$, $D(3, 1, 0)$, $E(3, 1, 2)$. 试求过点 E 且与 A, B, C 所在平面 Σ 平行而与直线 AD 垂直的直线方程.

得 分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有两阶导数, 且 $f''(x)$ 在 $[a, b]$ 上黎曼可积, 证明

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t)f''(t) dt, \quad \forall x \in [a, b].$$

姓名: _____ 准考证号: _____ 所在院校: _____ 专业: _____

密 封 线

得 分	
评阅人	

三、(本题 10 分) 设 $k_0 < k_1 < \dots < k_n$ 为给定的正整数, A_1, A_2, \dots, A_n 为实参数. 指出函数 $f(x) = \sin k_0 x + A_1 \sin k_1 x + \dots + A_n \sin k_n x$ 在 $[0, 2\pi)$ 上零点个数的(当 A_1, A_2, \dots, A_n 变化时的)最小可能值并加以证明.

得 分	
评阅人	

四、(本题 10 分) 设正数列 a_n 满足 $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$,

$\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} a_n < +\infty$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = 1$. 求证:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = 1.$$

姓名: _____ 准考证号: _____ 所在院校: _____ 专业: _____

密 封 线

得 分	
评阅人	

五、(本题 15 分) 设 A, B 分别是 3×2 和 2×3 实矩

阵, 若 $AB = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ -\frac{3}{2} & 9 & -6 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. 求 BA .

得 分	
评阅人	

六、(本题 20 分) 设 $\{A_i\}_{i \in I}, \{B_i\}_{i \in I}$ 是数域 F 上两个矩阵集合, 称它们在 F 上相似: 如果存在 F 上与 $i \in I$ 无关的可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}A_iP = B_i, \forall i \in I$.

证明: 有理数域 \mathbb{Q} 上两个 矩阵集合 $\{A_i\}_{i \in I}, \{B_i\}_{i \in I}$, 如果它们在实数域 \mathbb{R} 上相似, 则它们在有理数域 \mathbb{Q} 上也相似.

得 分	
评阅人	

七、(本题 15 分) 设 $F(x), G(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的两个非负单调递减函数, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(F(x) + G(x)) = 0$.

(i) 证明: $\forall \varepsilon > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\varepsilon}^{+\infty} xF(xt) \cos t \, dt = 0$.

(ii) 若进一步有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} (F(t) - G(t)) \cos \frac{t}{n} \, dt = 0$.

证明: $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} (F(t) - G(t)) \cos(xt) \, dt = 0$.