高数上册知识点总结

知识点分类:

1. 极限的计算(微积分基础)
2. 连续及可导的定义及性质(一元函数微分学)
3. 连续及导数的应用(一元函数微分学应用)
4. 积分的计算(一元函数积分学)
5. 积分的应用(一元函数积分学应用)

基本知识点归纳:

1. 函数运算
2. 求数列或函数的极限
3. 利用已知极限求极限
4. 无穷小量的比较
5. 确定极限表达式中的参数
6. 函数的连续性（间断点）
7. 确定分段函数中的参数
8. 导数定义（通过定义求导数）
9. 复合函数求导
10. 隐函数、反函数求导
11. 参数方程求导
12. 高阶导数及 Taylor 展开
13. 函数不等式证明
14. 方程的根
15. 导数的应用（单调性,极值,最值,凹凸性, 拐点,切线,渐近线,曲率）
16. 微积分中值定理
17. 不定积分计算
18. 定积分计算（及性质）
19. 求解含定积分的函数方程
20. 变上限积分
21. 广义积分计算
22. 定积分的几何应用
23. 定积分的物理应用
24. 向量代数

1. 函数运算

知识点及题型:

1) 已知 $f(x)$， $g(x)$，求 $f[g(x)]$(特别是分段函数情形).

2）求反函数(特别是分段函数情形).

3) 已知 $f[g(x)]$，求 $f(x)$ (变量代换法).

4）求值域(可借助连续函数的性质，转化为求最值).

往年考题:

(12-13) 已知 $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x\le 0\\ \ln x, & x>0\end{cases}$，$g(x)=|x|+x$，则 $f\left[g(x)\right]=$ $\begin{cases}0, & x\le 0\\ \ln 2x, & x>0\end{cases}$。

(11-12) 已知 $f(2x+3)=xe^{x+1}$，则 $f(1+\ln x)=$ $\underline{\frac{1}{2}\sqrt{x}(\ln x-2)}$ 。

(10-11) 函数 $f(x)=\sin\frac{\pi x}{2(1+x^2)}$ 的值域是____________。

(09-10) 函数 $y=\begin{cases}1+x, x\le 0\\ e^x, \quad x>0\end{cases}$ 的反函数是 $y=$____________.

2. 求数列或函数的极限

知识点及题型:

1. 极限的四则运算法则

① 极限的四则运算法则是最基本也是最重要的公式，几乎所有的求极限题目中都会用到，所以要牢记；另外，一定要注意，使用的前提是极限存在!!!

② 无论是加减运算，还是乘除运算，都只适用于有限项。

③ 遇到无限项乘积或者之和的极限时，先进行合并计算，再求极限。

2. 单调有界准则和夹逼准则

① 含有阶乘、乘方形式的数列极限

② 对数列的通项有递推关系时，可考虑使用单调有界准则

③ 数列的通项为 n 个因子和或乘积的极限

3. 利用两个重要极限

① $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$，注意极限的特征为$\dfrac{0}{0}$型；

② $\lim\limits_{\varphi(x)\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}=e$或$\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\left(1+\varphi(x)\right)^{\frac{1}{\varphi(x)}}=e$，注意极限的特征为$1^{\infty}$型。

4. 等价无穷小代换

① 常用的等价无穷小

$\varphi(x)\to 0$时

$\sin\varphi(x)\sim\varphi(x)$，$\arcsin\varphi(x)\sim\varphi(x)$，$\tan\varphi(x)\sim\varphi(x)$，$\arctan\varphi(x)\sim\varphi(x)$，

$1-\cos\varphi(x)\sim\dfrac{\varphi^2(x)}{2}$，$\ln\left(1+\varphi(x)\right)\sim\varphi(x)$，$\log_a\left(1+\varphi(x)\right)\sim\dfrac{\varphi(x)}{\ln a}$，$e^{\varphi(x)}-1\sim\varphi(x)$，

$a^{\varphi(x)}-1\sim\varphi(x)\ln a$，$\left(1+\varphi(x)\right)^{\alpha}-1\sim\alpha\varphi(x)$

此外

$\varphi(x)-\sin\varphi(x)\sim\dfrac{\varphi^3(x)}{6}$，$\tan\varphi(x)-\varphi(x)\sim\dfrac{\varphi^3(x)}{3}$，$\tan\varphi(x)-\sin\varphi(x)\sim\dfrac{\varphi^3(x)}{2}$，

$\arcsin\varphi(x)-\varphi(x)\sim\dfrac{\varphi^3(x)}{6}$，$\varphi(x)-\arctan\varphi(x)\sim\dfrac{\varphi^3(x)}{3}$

② 必须注意：在替换过程中，无穷小量是以因式的身份出现的。

5. 左右极限

① 分段函数在分段点处的极限(含绝对值的函数要先化为分段函数)。

② 含$a^{\frac{1}{x}}$，$\arctan\dfrac{1}{x}$，$\operatorname{arc}\cot\dfrac{1}{x}$的函数。

6. 对数极限法

① 主要处理幂指函数的极限

7. 函数的连续性及变量代换法

8. 导数的定义(在后面第 8 个基本知识点处做详细介绍)

9. 洛必达法则

对$\dfrac{0}{0}$，$\dfrac{\infty}{\infty}$未定式(其他未定式可通分、取对数等转化为此两种类型)

(1) 结合其他方法，若可能，应先化简极限式；

(2) 化简，分离出非定式(有些情型先化简)

(3) 连续用洛比达法则，每次要检验极限类型

(4) 洛比达法则失效，改用其他方法

(5) 数列极限可用函数极限求之

注意使用条件

① 每次需检验极限类型；

② 分子分母函数在极限点邻近可导(此处极易出错)；

③ 若最后的极限表达式中含有未知函数的导数，此时要求未知函数的导函数连续，否则无法进一步计算极限(此处极易出错)。

10. 利用微分中值定理或泰勒公式(熟记 5 个常用函数的麦克劳林公式)

11. 定积分定义

例1. 设 $a_n=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{n}{n+1}}x^{n-1}\sqrt{1+x^n}\,dx$, 则极限 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=$ ____________.

例2. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{\tan x}\sqrt{\sin t}\,dt}{\int_0^{\sin x}\sqrt{\tan t}\,dt}$.

例 3. 已知 $f(x)$ 可导，且 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]$，$\lim\limits_{x\to\infty}f'(x)=e$，求 c 值.

例 4. $\lim\limits_{x\to\infty}[x^2(e^{\frac{1}{x}}-1)-x]$(提示：倒代换)

例 5. $\lim\limits_{n\to\infty}[\tan(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n})]^n$

往年考题:

(12-13) $\lim\limits_{x\to 1}\ln(2x-1)\cdot\tan\frac{\pi}{2}x=\ -\frac{4}{\pi}$ 。

(12-13) 计算 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+3^x+5^x\right)^{\frac{1}{x}}$

(11-12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^x=\ \underline{e^{-3}}$ 。

(11-12) 设 $f'(1)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(\cos x)-f(1+x^2)}{x\sin x}$

(11-12) 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{3x}+x\right)^{\frac{1}{x-1}}$

(08-09) 设$0<a<b$，则$\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}}=$____________。

3. 利用已知极限求极限

知识点及题型:

1. 从结果出发凑出已知极限(或其变形形式)，然后再利用极限的四则运算法则将其转化为已知函数的极限。
2. 利用极限与无穷小的关系，直接从已知极限中解出抽象函数，然后代入待求极限，利用极限的四则运算将其转化为已知函数的极限。

往年考题:

(11-12) 已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{x}\right)}{2^x-1}=7$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x\sin x}$

(10-11) 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x+f(x)}{x^4}=1$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=$____________。

4. 无穷小量的比较

知识点及题型:

根据无穷小量比较的定义，计算相应比值的极限。求极限时可以用等价无穷小代换，洛必达法则，泰勒公式等。

例1. 设$x\to 0$时，$e^{\tan x}-e^x$与x^n是同阶无穷小，则$n=$______.

往年考题:

(09-10) 已知当$x\to 0$时，$\ln(1+x^2)+ax^2$是比x^2高阶的无穷小量，则$a=$________.

(08-09) 设当$x\to 0$时，$(1-\cos x)\ln(1+x^2)$是比$x\sin x^n$高阶的无穷小，而$x\sin x^n$是比$(e^{x^2}-1)$高阶的无穷小，则正整数$n=$__________。

5. 确定极限表达式中的参数

知识点及题型:

若极限表达式中仅含一个参数，通过直接计算该极限可得结果；若极限表达式中有多个参数，需进一步从所给极限中挖掘信息，获得额外关系式。特别地，

① 分段函数在分段点的极限：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$；

② 设$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$，则$\lim g(x)=\infty \Leftrightarrow \lim f(x)=\infty$，且两者是同阶无穷大；

③ 设$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$，则$\lim g(x)=0 \Leftrightarrow \lim f(x)=0$，且两者是同阶无穷小；

④ 设$\lim f(x)g(x)=A\neq 0$，则$\lim g(x)=0 \Leftrightarrow \lim f(x)=\infty$；

⑤ 设$\lim[f(x)-g(x)]=A$，则$\lim g(x)=\infty \Leftrightarrow \lim f(x)=\infty$，且两者是同阶无穷大。

例1. 确定常数a,b,c的值，使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x \frac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=c \quad (c\neq 0)$

例2. 已知$f(x)$内可导，且$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=e$， $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+c}{x-c})^x=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_{x-1}^x f(t)dt}{x}$，求$c$的值

往年考题:

(12-13) 已知$\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{a\cos x+bx}{\sin x}=5$ ，试确定待定常数a和b 的值。

(10-11) 设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\int_0^x(1+\sin at)^{\frac{3}{t}}dt=e^2$，则$a=$ ________________。

6. 函数的连续性（间断点）

知识点及题型:

1. 函数$f(x)$在一点x_0连续时：

① $f(x)$在点x_0的某邻域内有定义；

② $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$

或 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

或 $f(x_0^-)=f(x_0^+)=f(x_0)$

2. 基本初等函数在其定义域内连续，初等函数在其定义区间内连续；

3. 函数 $f(x)$ 在一点 x_0 间断时，有以下三种情形：

① $f(x)$ 在点 x_0 的左右邻域内有定义，而在 x_0 没有定义；

② $f(x)$ 在点 x_0 有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；

③ $f(x)$ 在点 x_0 有定义，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$；

4. 间断点的类型：

① 第一类间断点，左右极限都存在(包括：可去和跳跃间断点)；

② 第二类间断点，左右极限至少一个不存在(包括：无穷、震荡和其他间断点)；

5. 寻找间断点时先查无定义的点和分段点，再逐一判断类型。

6. 判断通过极限定义的函数的连续性，需要先通过讨论 x 的范围，计算出相应的极限表达式，然后再判断(注：此时得到的函数一般是分段函数)。

例 1. 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{\sin x}, & x<0\\ \dfrac{\int_0^{2x}\ln(1+t)dt}{2x^2}, & x>0\end{cases}$ 的连续性，并指出其间断点类型。

例 2. 研究函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$ 的连续性。

往年考题**:**

(10-11) 设函数 $f(x)=\dfrac{x^2-x}{\sin\pi x}$，则 $f(x)$ 只有__________个可去间断点。

7. 确定分段函数中的参数

知识点及题型**:**

1. 根据连续条件有：$f(x_0^-)=f(x_0^+)$；

2. 根据可导条件有：$f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$（极易错用为$f'(x_0^-)=f'(x_0^+)$）。

例 1. 设 $f(x)=\begin{cases} a\ln(1-x)+b, & x\le 0 \\ x\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+3^n+x^n}, & x>0 \end{cases}$，试确定常数 a,b，使$f(x)$在$x=0$处可导.

例 2．设 $f(x)=\begin{cases} 1+\ln(1-4x), & x\le 0 \\ a+be^x, & x>0 \end{cases}$，试确定$a,b$使$f(x)$在$x=0$处可导。

往年考题:

(12-13) 若函数 $f(x)=\begin{cases} ax+3 & x\le 0 \\ (1-x)^{\frac{a}{x}} & x>0 \end{cases}$ 在其定义域上连续，则$a=$ $-\ln 3$ 。

(11-12) 试确定a和b的值，使$f(x)=\begin{cases} ax+1, & x\le 2 \\ x^2+b, & x>2 \end{cases}$在其定义域内处处可微。

(10-11) 设$f(x)=\begin{cases} e^{ax}, & x\le 0 \\ b(1-x)^2, & x>0 \end{cases}$，试求常数$a$、$b$，使$f(x)$处处可导.

(09-10) 已知$f(x)=\begin{cases} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, & x\ne 0 \\ a, & x=0 \end{cases}$在$x=0$处连续，求$a$值.

(09-10) 设$f(x)=\begin{cases} e^{ax}, & x\le 0 \\ b(1-x)^2, & x>0 \end{cases}$，试求常数$a$、$b$，使$f(x)$处处可导

(08-09) 设$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & |x|\le c \\ \dfrac{2}{|x|}, & |x|>c \end{cases}$在$(-\infty,+\infty)$内连续，则$c=$__________。

(08-09) 设函数$f(x)=\begin{cases} 2e^x+a, & x<0 \\ x^2+bx+1, & x\ge 0 \end{cases}$，欲使$f(x)$处处连续且可导，$a$，$b$应为何值？

8. 导数定义（通过定义求导数、微分或极限）

知识点及题型：

1. 正确理解导数定义。函数 $y=f(x)$在x_0点的导数定义为

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

上式可推广为

$$f'(x_0)=\lim_{\varphi(\Delta x)\to 0}\frac{f(x_0+\varphi(\Delta x))-f(x_0)}{\varphi(\Delta x)}$$

2. 可导的充要条件： $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$；

3. 用导数的定义求导数和极限。

① 讨论抽象函数在某点的可导性或求其在某点的导数(极易错用洛必达法则)；

② 讨论分段函数在分段点处的可导性(包括通过极限定义的函数)。

例 1. 设下列极限存在，试求

(1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\frac{\Delta x}{3})-f(x_0)}{\Delta x}$ (2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(4)-f(8-x)}{2x-8}$

(3) $\lim\limits_{h\to\infty}h[f(a-\frac{5}{h})-f(a)]$ (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1+\tan^2 x)-f(1)}{3x^2}$

例 2. 设 $f(0)=1$，$f'(0)=-1$，求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(\ln x)-1}{1-x}$ (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^x f(x)-1}{x}$

例 3. 设 $f(x)=(x^{100}-1)g(x)$， 其中$g(x)$在$x=1$处连续，且 $g(1)=1$， 求 $f'(1)$.

往年考题：

(11-12) 设 $f'(1)=2$，求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\cos x)-f(1+x^2)}{x\sin x}$

(10-11) 设函数 $f(x)$在 $x=1$处可导，且$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=\dfrac{3}{2}$，则 $dy\big|_{x=1}=$ ________。

(09-10) 设函数 $f(x)$在 $x=1$处可导，且$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=\dfrac{3}{2}$，则 $f'(1)=$ ______.

(08-09) 设 $f(x)$ 为可导函数，且满足$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在

点$(1, f(1))$处的切线斜率为____________________。

(03-04) 函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$ 有__________个不可导点。

9. 复合函数求导

知识点及题型:

复合函数求导法则是重点也是难点。

1. 复合函数求导数：关键是分析清楚复合函数的构造，求导时按复合次序由最外层，向内一层层对中间变量求导，直到自变量求导为止。

2. 求复合函数导数易出现的错误：看错复合层次，中间漏层，没有达到对自变量求导和对导数的记号使用不当

例 1. 设 $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}$， $y=f(\dfrac{x+1}{x-1})$，求 $\dfrac{dy}{dx}$

例 2．求下列函数的导数

(1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}$，　　(2) $y=\sin x\cos x\cos 2x\cos 4x$

例 3：设 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx,$ 且$|f(x)|\le|\sin x|$，证明：

$$|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\le 1$$

往年考题:

(12-13) 设 $x\ln x$ 是可微函数 $f(x)$ 的一个原函数，试求 $\dfrac{d}{dx}f\left(\dfrac{e^x}{1+x}\right)$

(11-12) 已知 $y=\ln\sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$，则 $y'=$ $\underline{\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}}$ 。

(11-12) 已知 $f(x)=(5-\cos x)^{2x-3}$，则 $f'(0)=$ $\underline{\dfrac{\ln 2}{16}}$ 。

(10-11) $\left(\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{1+x}}\right)'\Bigg|_{x=1}=$ __________________。

(10-11) 设 $y=f\left(\dfrac{x}{1+\sqrt{x}}\right)$, 而 $f'(x)=\arcsin x$, 求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=1}$.

(09-10) 设 $f(x)$ 可导， $y=f\left(e^{\tan x}\right)$，则 $dy=$____________________.

(08-09) 设 $f(x)$ 可导， $y=f(\arctan x^2)$，则 $dy=$__________________。

10. 隐函数、反函数求导

知识点及题型:

1. 隐函数求导数

(1) 区分自变量和因变量

(2) 方程两端同时对 x 求导，得关于 y' 的方程

(3) 由上述方程解出 y'(结果中可以含 y)

2. 对数求导法

(1) 形如 $y=f(x)^{g(x)}$ 的幂指函数

(2) 若干个因子乘积、商、开方、方幂

3. 反函数求导数

对于反函数 $x=f^{-1}(y)$ 有

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\dfrac{dy}{dx}},\quad \frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{\dfrac{d}{dy}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}=-\frac{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)\dfrac{dx}{dy}}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}=-\frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3}$$

例 1．设 $x=y^2+y$， $u=(x^2+x)^{\frac{3}{2}}$，求 $\dfrac{dy}{du}$

例 2．求下列函数的导数

(1) $y=x^{x^x}+(\tan ax)^{\cot\frac{x}{b}}$

(2) $y=\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{(3+x)^2}}\cdot\dfrac{1-x}{1+x^2}$

例 3．设 $f(x)=(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$, 求 $f'(0)$.

例 4. 设函数 $y=y(x)$由方程 $y=\int_0^{2x+y}\sin t^2dt-\int_0^{x^2}e^{-\sqrt{t}}dt$(其中$x>0$)所确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

往年考题:

(12-13) 已知 $y=\sin 2x+e^x$，试求$\left.\dfrac{d^2x}{dy^2}\right|_{x=0}$

(11-12) 已知 $y=f(x)$的反函数二阶可导，则$\dfrac{d^2x}{dy^2}=$ $\underline{\quad -\dfrac{f''(x)}{[f'(x)]^3} \quad}$。

(11-12) 曲线 $y=x\ln y+x^2$在$(-1,1)$点处的切线方程为 $\underline{\ x+y=0\ }$。

(10-11) 在曲线$e^y+xy=e$上对应$x=0$点处的切线方程为____________。

(09-10) 曲线$e^y+xy=e$上对应$x=0$点处的切线方程是____________.

(08-09) 设函数 $y=y(x)$ 是由$\begin{cases}x=3t^2+2t+3\\ e^y\sin t-y+1=0\end{cases}$所确定的隐函数，求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}$。

11. 参数方程求导

知识点及题型:

对于参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}$有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\qquad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\varphi'(t)}$$

例 1. 由方程$\begin{cases}x=2t+3+\arctan t\\ y=2-3t+\ln(1+t^2)\end{cases}$确定 $y=f(x)$，求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=3}$

例 2. 设 $y=f(x)$ 由$\begin{cases}x=t^2+2t\\ t^2-y+a\sin y=1\qquad (0<a<1)\end{cases}$所确定，求$\dfrac{dy}{dx}$

往年考题:

(12-13) 试求经过$(1,-2)$点，与曲线$\begin{cases}x=2t+3\\ y=t^2+1\end{cases}$相切的直线方程。

(11-12) 已知$\begin{cases}x=2t+5\\ y=t\ln t\end{cases}$，则$\dfrac{d^2y}{dx^2}=$ $\dfrac{1}{4t}$ 。

(10-11) 设$\begin{cases} x = a(1-\cos t) \\ y = a\sin t \end{cases}$，求$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}y^2}$.

(09-10) 设$\begin{cases} x = \arctan t \\ y = \ln\left(1+t^2\right) \end{cases}$，求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

(08-09) 设函数 $y = y(x)$ 是由$\begin{cases} x = 3t^2+2t+3 \\ e^y \sin t - y + 1 = 0 \end{cases}$所确定的隐函数，求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}$。

12. 高阶导数及 Taylor 展开

知识点及题型**:**

1. 计算函数高阶导数的方法

① 直接法或归纳法

② 分解法或间接法——通过恒等变形将函数分解为易于求 n 阶导的函数或函数的代数和。易于求 n 阶导的函数有：

(1) $(a^x)^{(n)} = a^x \cdot \ln^n a \quad (a>0)$ $\qquad$ $(\mathrm{e}^x)^{(n)} = \mathrm{e}^x$

(2) $(\sin kx)^{(n)} = k^n \sin(kx + n\cdot\dfrac{\pi}{2})$

(3) $(\cos kx)^{(n)} = k^n \cos(kx + n\cdot\dfrac{\pi}{2})$

(4) $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$ $\qquad$ $(\dfrac{1}{x})^{(n)} = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$

(5) $(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$

③ 莱布尼兹公式$(u\,v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)}\,v^{(k)}$，$(u^{(0)} = u，v^{(0)} = v)$

④ 特别地，对于函数在 $x=0$ 处的 n 阶导，可通过两种方法来计算：

2. 函数的 Taylor 展式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k\,!}(x-x_0)^k + R_n(x)$$

$$R_n(x) = o((x-x_0)^n) \quad 或 \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)\,!}(x-x_0)^{n+1}, (\xi 介于 x_0 与 x 之间)$$

常用函数的麦克劳林展式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m}(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + R_{2m+1}(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

例 1：设 $f(x) = x(x+1)\cdots\cdots(x+n)$，求 $f^{(n)}(x)$

例 2. 设 $f(x) = x^2\ln(1+x)$, 求 $f^{(n)}(0)\quad(n \geq 3)$.

例 3：$y = \dfrac{\ln x}{x}$，求$y^{(n)}$

例 4：求下列函数的 n 阶导数

(1) $y = \dfrac{x+1}{2x^2+x}$ (2) $y = \ln(x^2+2x-3)$ (3) $y = \sin^6 x + \cos^6 x$

例 5：设 $y = (x^2 - x + 1)\ln(2x+1)$，求 $y^{(n)}(0)$, 其中$n \geq 3$

往年考题:

(12-13) 已知 $f(x) = \dfrac{3x+1}{e^x}$，则 $f^{(2012)}(0) =\ -6035$ 。

(11-12) 已知 $f(x) = (3x+2)e^{2x-1}$，则 $f^{(2011)}(0) = \underline{6037 \times 2^{2010} \cdot e^{-1}}$ 。

(10-11) 设函数 $y = \sin 2x$，则 $y^{(n)} =$ ________________ 。

(09-10) 设函数 $y = \cos 2x$，则 $y^{(n)} =$ ________________.

(08-09) 设函数 $y = \dfrac{1}{2x+3}$，求 $y^{(n)}(0)$ 。

13. 函数不等式证明

知识点及题型:

1. 利用中值定理

(1) 恰当选择辅助函数和区间

(2) 使用 Lagrange 中值定理

(3) 考察 $f'(x)$ 的符号或有界性，或有高阶导数时用 Taylor 公式

例 1：当 $x>-1, x\neq 0$ 时，$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$ (提示：对 $\ln(1+x)$ 用 Lagrange 定理)

例 2：$x>0$，证 $(1+x)^{1/3}>1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2$ (提示：二阶 lagrange 型余项 Taylor 展开)

2 利用函数或曲线性态

(1) 用函数单调性，极值

(2) 用函数最值

(3) 用函数的凹凸性

注：对于含有定积分的函数值不等式，常常通过将积分上限换为变量得到需要的辅助函数。

例 1：$x>0$，证明：$(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$

(提示：$F(x)=x^2-(1+x)\ln^2(1+x)$，一阶导数符号不易判断，借助二阶导数判断)

例 2：设 $b>a>e$，试证 $a^b>b^a$

例 3：设 $f(x)$在$[a,b]$上可导，且 $f'(x)\le M, f(a)=0,$ 证明：$\int_a^b f(x)dx\le\frac{M}{2}(b-a)^2.$

(提示：以上两种方法均可)

往年考题:

(12-13) 试证明 $x>\frac{1}{2}$ 时，$\frac{\ln x}{\ln(1+x)}<1+\frac{1}{x}$

(08-09) 证明：当 $x\ge 0$ 时，$1+x\ln(x+\sqrt{x^2+1})\ge\sqrt{1+x^2}$ 。

14. 方程的根

知识点及题型:

思路：判断$f(x)=0$根的个数

1° 确定$f(x)$的单调区间；

2° 在各单调区间的端点处查$f(x)$的值或极限是否异号.

① 存在性：零点定理，罗尔定理；

② 唯一性：罗尔定理(反证法)或函数的单调性。一般地，

(a) 若 $f'(x)$ 在 (a,b) 内无零点，则 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内最多 1 根

(b) 若 $f'(x)$ 在 (a,b) 内 m 个零点，则 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内最多 $m+1$ 根

例 1. 证明：方程$\ln x=\frac{x}{e}-\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos 2x}dx$在$(0,+\infty)$内有且只有两个不同的实根.

例 2. 设 $f(x)$在$[a,+\infty)$上连续，且当$x>a$时，$f'(x)>k>0$, 其中k为常数，证明：若 $f(a)<0$, 则方程 $f(x)=0$在$(a,+\infty)$内有且仅有一个实根.

往年考题**:**

(12-13) 证明 方程$\int_a^x\frac{e^t}{1+t^2}dt+\int_b^x\frac{e^{-t}}{1+t^2}dt=0$在区间$(a,b)$内有且只有一个实根。

(11-12) 试判断方程$x^4-2x^2-1=0$有几个实根。

(10-11) 证明方程$\int_0^x\frac{xt^2}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{10}$在$(0,1)$内有且仅有一个实根。

(09-10) 证明方程$\int_0^x\frac{xt^2}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{10}$在$(0,1)$内有且仅有一个实根.

(08-09) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，则在此区间内方程 $\int_a^x f(t)dt+\int_b^x\frac{1}{f(t)}dt=0$ 的根的个数为____________。

15. 导数的应用(单调性, 极值, 最值, 凹凸性, 拐点, 切线, 渐近线, 曲率)

知识点及题型**:**

1. 求极值时，先找极值可疑点(不可导的点和导数为零的点)，然后再判断(建议列表)；

2. 求闭区间连续函数最值时，找出所有极值可疑点，直接比较极值可疑点及区间端点处的函数值，最大者为最大值，最小者为最小值；
3. 函数的凹凸区间一般写为闭区间(建议判断时列表)；
4. 极坐标给出的曲线求切线时，需要先将其转化到直角坐标系(可用参数方程表示)，然后再求切线；
5. 求渐近线时注意其类型及条数。一般地，铅直渐近线可有若干条；水平渐近线最多两条；斜渐近线最多两条；
6. 曲率计算公式

$$K=\left|\frac{d\alpha}{ds}\right|=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}$$

例 1. 求对数螺线 $r=e^{\theta}$在点 $(e^{\frac{\pi}{2}},\frac{\pi}{2})$处的切线方程.

例 2. 求曲线$\begin{cases}x=\arctan t\\2y-ty^2+e^t=5\end{cases}$在点$(0,2)$处的切线方程.

往年考题**:**

(12-13) 函数 $f(x)=xe^x$ 在区间 $[-2,-1]$ 上单调递减、且下凸。

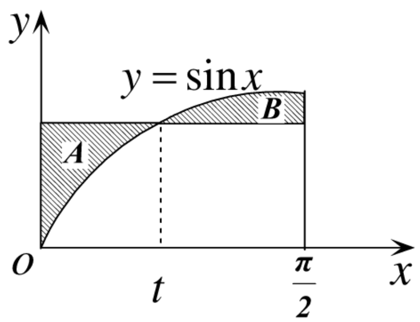
(12-13) 试求经过$(1,-2)$点，与曲线$\begin{cases}x=2t+3\\y=t^2+1\end{cases}$相切的直线方程。

(10-11) 在曲线$e^y+xy=e$上对应$x=0$点处的切线方程为____________。

(10-11) 平面曲线 $y=x\ln(1+x)$在区间________________是向上凹的。

(10-11) 已知$0<a<2$, 且 $I(a)=\int_0^1\left|2x^2-ax\right|dx$, 求函数 $I(a)$ 的最小值。

(09-10) 求图中阴影部分面积的最大值和最小值（其中$t\in[0,\pi/2]$）.



(09-10) 曲线$e^{y}+xy=e$上$x=0$对应点处的切线方程是__________.

(09-10) 平面曲线$y=x\ln(1+x)$在区间______________是向上凹的.

(08-09) 求函数$y=xe^{-x}$的单调区间、极值点和极值，并求曲线$y=xe^{-x}$的拐点和渐近线。

16. 微积分中值定理

知识点及题型：

解题思路：构造辅助函数，由已知$F'(x)$推出$F(x)$使用微分中值定理

(1) 恒等变形，使不含ξ的式子分离到左端，含ξ的式子分离到右端；

(2) 若欲证存在$\xi,\eta\in(a,b)$，且欲证等式中含$f'(\xi),f'(\eta)$，一般两次用微分中值定理，这是将含ξ的项和含η的项分写在等式两端，分别观察（此情形常用Lagrange或Cauchy）；

(3) 若含$f''(\xi)$时，须两次用微分中值定理；

(4) 若给出$f(x)$若干点的函数值和导数值，而欲证等式中含二阶或二阶以上导数，可考虑用Taylor公式证明。

(5) 常用辅助函数类型：$F(x)=f(x)\pm g(x)$，$F(x)=f(x)g(x)$，$F(x)=f(x)/g(x)$，$F(x)=f(x)e^{g(x)}$

(6) 特别地，对于$f'(\xi)+g(\xi)f(\xi)=0$的情形，可构造辅助函数$F(x)=f(x)e^{\int g(x)dx}$

注：在需要多次使用中值定理时，常常需要在所给区间内部找一个点将区间分割为两部分，该点常取为：区间中点、函数值或导数值为零的点、最值点、函数值已知的点。

例1：设$f(x)$是$[a,b]$上的正值可微函数，证明$\exists\xi\in(a,b)$，使

$$\ln\frac{f(b)}{f(a)}=\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}(b-a)$$

例 2：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $ab>0$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{ab}{b-a}[bf(b)-af(a)]=\xi^2[f(\xi)+\xi f'(\xi)]$$

例 3：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 内连续，$(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=\frac{\pi}{4}$，证：$\exists\xi\in(0,1)$

使 $(1+\xi^2)f'(\xi)=1$

例 4：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内连续，(a,b) 内可导（$a>0$），且 $f(a)=f(b)=1$，试证：

$\exists\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^{n-1}=f(\xi)+\frac{\xi}{n}f'(\xi)$

例 5：已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：

（1）$\exists c\in(0,1)$ 使得 $f(c)=1-c$

（2）存在两个不同点 $\xi,\eta\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)f'(\eta)=1$

例 6：设函数 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 内连续，(a,b) 内二阶可导，且存在相等最大值，又 $f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，证明 $\exists\xi\in(a,b)$ 使 $f''(\xi)=g''(\xi)$

例 7：设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导，$f(0)=f(1)=1$，$f'(1)=1$，证明 $\exists\xi\in(0,1)$，使 $f''(\xi)=2$

例 8：试构造下列结果的辅助函数

1. $f'(\xi)=\frac{f(a)}{a}$

2. $f'(\xi)=1$

3. $2\xi f(\xi)+(1+\xi^2)\ln(1+\xi^2)\cdot f'(\xi)=0$

4. $\frac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

5. $f'(\xi)(1+\xi)\ln(1+\xi)=f(\xi)$

6. $f''(\xi)=\frac{2f(\xi)}{(1-\xi)^2}$

7. $f'(\xi)=2f(\xi)$

8. $f'(\xi)+\xi f(\xi)=0$

9. $\xi f'(\xi)+(2\xi+1)f(\xi)=0$

（提示：可利用分部积分）

往年考题：

(11-12) 设 $f(x)$ 二阶可导，且 $f''(x)>0$，$f(0)=0$。试用微分中值定理证明，对

于任何$0<a<b$，都有$f(a+b)>f(a)+f(b)$。

(10-11)设$f(x)$在闭区间$[1,2]$上有二阶导数，且$f(1)=f(2)$，证明：存在$\xi\in(1,2)$，使$2f'(\xi)+(\xi-1)f''(\xi)=0$。

(09-10) $f(x)$在$[0,1]$上可导，且$f(0)=2\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{f(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$，试证：存在$\xi\in(0,1)$，使$(1+\xi^2)f'(\xi)-2\xi f(\xi)=0$.

(08-09) 设$f(x)$在区间$[a,b]$上连续，$(0<a<b)$，在(a,b)内可导，求证：在(a,b)内存在ξ，η，使 $f'(\xi)=\frac{\eta^2 f'(\eta)}{ab}$ 。

17. 不定积分计算

知识点及题型：

1. 性质
2. 基本积分公式
3. 第一换元法(凑微分法)
4. 第二换元法(5 种代换，变量要回代)
5. 分部积分法(选u的原则，会出现循环型和递推型)
6. 有理分式的积分，可先将其化为部分分式和的形式再积分
7. 常用技巧：

① “1”的妙用(利用三角公式、将 1 适当拆分、加 1 减 1 等)；

② 分子分母同乘一个函数；

例 1. $\int\frac{1}{x(x^{10}+2)}dx$(同乘$x^9$)

例 2. $\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx$(同乘$1-\cos x$)

③ 伴侣法；

例 1. $I_1=\int\frac{\sin x}{a\sin x+b\cos x}dx$(伴侣积分$I_2=\int\frac{\cos x}{a\sin x+b\cos x}dx$)

例 2. $I_1=\int\frac{1}{1+x^4}dx$ (伴侣 $I_2=\int\frac{x^2}{1+x^4}dx$，计算 I_1+I_2 和 I_1-I_2 时分子分母同除 x^2)

④　抵消法.

例 1. $\int\frac{\ln x-1}{\ln^2 x}dx$ ($\int\frac{1}{\ln x}dx-\int\frac{1}{\ln^2 x}dx$,对前者分部积分)

例 2. $\int e^{\sin x}\frac{x\cos^3 x-\sin x}{\cos^2 x}dx$ (两部分分别分部积分)

注：任意常数 C 千万不能丢。

往年考题:

(12-13) $\int\frac{\arccos\sqrt{x}}{\sqrt{x-x^2}}dx=$ $-\left(\arccos\sqrt{x}\right)^2+C$ 。

(12-13) 计算 $\int\frac{\sqrt{4x^2-1}}{x}dx$

(12-13) 计算 $\int x\arctan\sqrt{x}\,dx$

(11-12) $\int\frac{\sin x+\cos x}{1-\sin 2x}dx=$ $\frac{1}{\cos x-\sin x}$ 。

(10-11) 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $\sin x$，则 $\int xf'(x)\mathrm{d}x=$________。

(09-10) 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $\sin x$，则 $\int xf'(x)\mathrm{d}x=$________.

(09-10) 求不定积分 $\int\frac{xe^{x^2}}{1-2e^{x^2}}\mathrm{d}x$.

(08-09) $\int\frac{\ln(\tan x)}{\sin x\cos x}dx=$________。

18. 定积分计算（及性质）

知识点及题型:

1. 性质

① 线性性；　② 关于积分区间的可加性；　③ 保号性；

④ 估值性；　⑤ 积分中值定理　⑥ 奇偶性；　⑦ 周期性.

2. 牛顿—莱布尼茨公式

3. 配元法(类似于不定积分的凑微分法，由于不需显式写出变换，所以不需换限)

3. 换元法(换元一定要换限：上限 $\leftrightarrow$上限，下限 $\leftrightarrow$下限；注意对变换的连续性和单值性要求；特别地，做变换$t=a+b-x$时，可以保持积分限不变)

4. 分部积分法

5. Wallis 公式：

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为偶数}(n\ge 2);\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot 1, & n\text{为奇数}(n\ge 3).\end{cases}$$

6. 几个重要关系

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x,\cos x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x,\sin x)dx$$

$$\int_0^{\pi}f(\sin x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)dx$$

$$\int_0^{\pi}x\,f(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$$

$$\int_{-a}^{a}f(x)dx=\int_0^{a}[f(x)+f(-x)]dx$$

设 $f(x)$是以T为周期的连续函数，则$\int_a^{a+T}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{T}f(x)\,\mathrm{d}x$

7. 分段函数的定积分要分段求。

例 1. 设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt$, 则 $F(x)$(　　).

(A) 为正常数；　(B) 为负常数；　(C) 恒为零；　(D) 不为常数.

例 2. 计算下列积分

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}dx$　　　　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^n x}{\sin^n x+\cos^n x}dx.$

例 3. 设 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$, $g(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，求 $h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)g(t-x)dx.$

例 4. 求 $I(x)=\int_{-1}^{1}|t-x|e^t dt$在$[-1,1]$上的最大值.

往年考题:

(12-13) $\int_{-1}^{1}\frac{2+\sin 3x}{1+x^2}dx=\ \ \pi$ 。

(12-13) 已知 $f(x)=\int_1^x e^{(x-t+1)^2}dt$，求 $\int_0^1 f(x)dx$

(11-12) 已知 $f(x)=x-\int_0^1 f(x)dx$，求 $\int_0^1 |f(1-x)|dx$

(11-12) 已知 $f(x)=\int_0^x e^{(x-t)^2}dt$，求 $\int_0^1 [f(x)-f(1)]dx$。

(10-11) $I=\int_{-1}^{1}(\frac{|x|^3}{\sqrt{1-x^2}}+x^4\tan x)dx=$____________________。

(10-11) 设 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\ge 0\\ x^2+1, & x<0\end{cases}$，求 $\int_{-1}^{2} f(x-1)\mathrm{d}x$.

(10-11) 计算定积分 $I=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{e^x\sin^2 x}{1+e^x}dx$

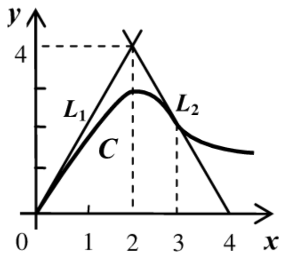
(09-10) $\int_{-1}^{1}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)^2\mathrm{d}x=$________________.

(09-10) 已知 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x\ge 0\\ x^2+1, & x<0\end{cases}$，求 $\int_{-1}^{2} f(x-1)\mathrm{d}x$.

(08-09) $\int_{-1}^{1}(|x|+x)e^{-x}dx=$____________________。

(08-09) 设 $\int_x^{2\ln 2}\frac{dt}{\sqrt{e^t-1}}=\frac{\pi}{6}$，求 x 。

(08-09) 如图，曲线 C 的方程为 $y=f(x)$，点 $(3,2)$ 是它的一个拐点，直线 L_1 与 L_2 分别是曲线 C 在点 $(0,0)$ 与 $(3,2)$ 处的切线，其交点为 $(2,4)$，设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数，计算定积分 $\int_0^3(x^2+x)f'''(x)dx$ 。



19. 求解含定积分的函数方程

知识点及题型:

1. 设题目条件中的定积分为常数 c，然后将等式适当变形后两端积分，得到关于 c 的方程，求出 c 后即可得到待求量。

例1. 设 $f(x)=x^2-x\int_1^2 f(x)dx+2\int_0^1 f(x)dx$，求 $f(x)$

例2. 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续，且 $f(x)=\dfrac{x}{1+\cos^2 x}+\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x dx$，求 $f(x)$

往年考题:

(11-12) 已知 $f(x)=x-\int_0^1 f(x)dx$，求 $\int_0^1 |f(1-x)|dx$

(08-09) 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=x^2-\int_0^1 f(x)dx$，求 $f(x)$。

20. 变上限积分

知识点及题型:

1. 变限积分是可导的函数;
2. 变限积分求导

① 直接对变限积分求导

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,\mathrm{d}t == f[u(x)]u'(x)-f[v(x)]v'(x)$$

② 先作变量替换，去掉被积函数中的参变量 x，使 x 只能在积分号外和积分限中出现;

③ 如果定积分可求出，也可求出定积分后再求导。

3. 变限积分函数的应用包括：求极限、判断函数的单调性、判断方程的根、证

明积分不等式等。

例1. 已知$f(x)$连续，且$\int_0^x t\,f(2x-t)dt=\frac{1}{2}\arctan x^2,\ f(1)=1,$则 $\int_1^2 f(t)dt=$______.

例 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)dt]du}{x(1-\cos x)}=$______.

往年考题**:**

(12-13) 设$f(x)$在$(-2,3)$上连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{3x}f(t)e^{\sin t}dt}{e^{2x}-1}=4$，试求$f(0)$

(12-13) 已知$f(x)=\int_1^x e^{(x-t+1)^2}dt$，求$\int_0^1 f(x)dx$

(12-13) 证明 方程$\int_a^x\frac{e^t}{1+t^2}dt+\int_b^x\frac{e^{-t}}{1+t^2}dt=0$在区间$(a,b)$内有且只有一个实根。

(11-12) 已知$f(x)=\int_0^x e^{(x-t)^2}dt$，求$\int_0^1[f(x)-f(1)]dx$。

(10-11) 证明方程$\int_0^x\frac{xt^2}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{10}$在$(0,1)$内有且仅有一个实根。

(09-10) 函数$y=\int_0^x t(t-1)\mathrm{d}t$的极小值点是________________.

(09-10) 证明方程$\int_0^x\frac{xt^2}{1+t^2}\mathrm{d}t=\frac{1}{10}$在$(0,1)$内有且仅有一个实根.

(08-09) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)>0$，则在此区间内方程

$\int_a^x f(t)dt+\int_b^x\frac{1}{f(t)}dt=0$的根的个数为____________。

21. 广义积分计算

知识点及题型**:**

1. 求定积分的方法均可使用，在端点处(暇点或无穷点)将原来的直接计算的函数值改为极限值(即：牛顿-莱布尼兹公式+求极限);
2. 通过换元法，广义积分和常义积分有时可互相转化;

3. 注意区间内部的暇点，若有暇点应分段，此时当两部分都收敛时原广义积分收敛；
4. 当一个题目含有两类(个)广义积分时，应划分为两类(个)广义积分计算；
5. 对广义积分要慎用线性性。

往年考题:

(10-11) 求 $I=\int_0^{+\infty}\frac{xe^x}{(1+e^x)^2}dx$

22. 定积分的几何应用

知识点及题型:

1. 平面图形的面积

① 直角坐标系(小曲边梯形)： $A=\int_a^b|y_2-y_1|dx$ 或 $A=\int_c^d|x_2-x_1|dy$

② 参数坐标系(小曲边梯形)：$A=\int_\alpha^\beta|\psi_2(t)-\psi_1(t)|d\varphi(t)$ 或 $A=\int_\alpha^\beta|\varphi_2(t)-\varphi_1(t)|d\psi(t)$

③ 极坐标系(小曲边扇形)： $A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\rho^2d\theta$

2. 空间立体的体积

情形 1：平行截面面积已知时 $V=\int_a^b A(x)dx$ 或 $A=\int_c^d A(y)dy$

情形 2：旋转体

① 圆柱法：$V_x=\int_a^b\pi y^2dx$ 或 $V_y=\int_c^d\pi x^2dy$ (常常出现旋转体内部空心的情形，此时微元由内外两个圆柱围成，相当于“圆环柱法”)

② 柱壳法：$V_y=\int_a^b \underline{2\pi x}\,\underline{y}\,\underline{dx}$ 或 $V_x=\int_c^d \underline{2\pi y}\,\underline{x}\,\underline{dy}$

3. 平面曲线的弧长

$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}$

① 直角坐标系： $ds=\sqrt{1+y'^2}dx$ 或 $ds=\sqrt{1+x'^2}dy$

② 参数坐标系： $ds=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$

③ 极坐标系： $ds=\sqrt{\rho^2+\rho'^2}d\theta$

注：三种坐标系积分微元均为“直线段”；积分时积分下限<上限。

往年考题:

(12-13) 设平面点集 $A=\{(x,\ y)\mid y\geq ax^2, y\leq 2x-x^2\}$ 的面积为 S_A，平面点集 $B=\{(x,\ y)\mid y\leq ax^2, y\geq 2x-x^2, x\leq 2\}$的面积为 S_B。试确定 a 的值，使 $S_A=S_B$。

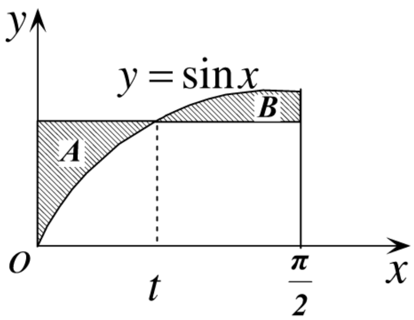
(11-12) 计算曲线 $y=\ln x$ 与坐标轴围于第四象限的平面区域绕 x 轴旋转形成的几何体的体积。

(11-12) 证明心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 的长度与摆线段 $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)\ (0\leq t\leq 2\pi)$的长度相等。

(10-11) 过坐标原点作曲线 $y=\ln x$ 的切线，该切线与曲线 $y=\ln x$ 及 x 轴围成平面图形为 D。(1) 求D的面积;(2) 求D绕直线 $x=e$旋转一周所得旋转体的体积V.

(09-10) 求由曲线 $y=2x-x^2$ 及 x 轴所围成的图形绕直线 $x=1$旋转所得的旋转体的体积.

(09-10) 求图中阴影部分面积的最大值和最小值（其中 $t\in[0,\pi/2]$）.



(08-09) 设 D 是位于曲线 $y=\sqrt{x}a^{-\frac{x}{2a}}$ $(a>1,\ 0\leq x<+\infty)$ 下方、x 轴上方的无界区域。1) 求区域 D 绕 x 轴旋转一周所成旋转体的体积 $V(a)$；2) 当 a 为何值时，$V(a)$ 最小？并求此最小值。

23. 定积分的物理应用

24. 向量代数

知识点及题型:

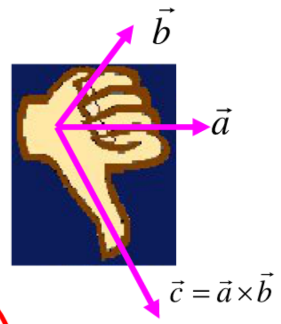
设$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z),\vec{b}=(b_x,b_y,b_z),\vec{c}=(c_x,c_y,c_z)$

1. 向量运算

加减: $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$

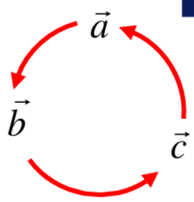
数乘: $\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$

点积: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$



叉积: $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$, $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$,

混合积: $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}$



2. 向量关系

$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$

$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$共面$\Leftrightarrow(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=0$

往年考题:

(12-13) 向量$\vec{\alpha}=\{2,-1,\sqrt{3}\}$与向量$\vec{\beta}=\{-2,\sqrt{3},1\}$的夹角$\theta=$ $\frac{2\pi}{3}$ 。

(11-12) 若$A(0,2)$, $B(-1,a)$, $C(3,-4)$为顶点的三角形面积为 5, 则$a=\frac{2}{3},\frac{22}{3}$。

(10-11) 设向量$\vec{a}=(1,\ 0,\ 1)$, $\vec{b}=\vec{j}+\vec{k}$, 则$\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{a}\times\vec{b}|=$ ____________。