大学物理

§ 3.8 角动量守恒定律

（**law of conservation of angular momentum**）

$$\boxed{\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$$

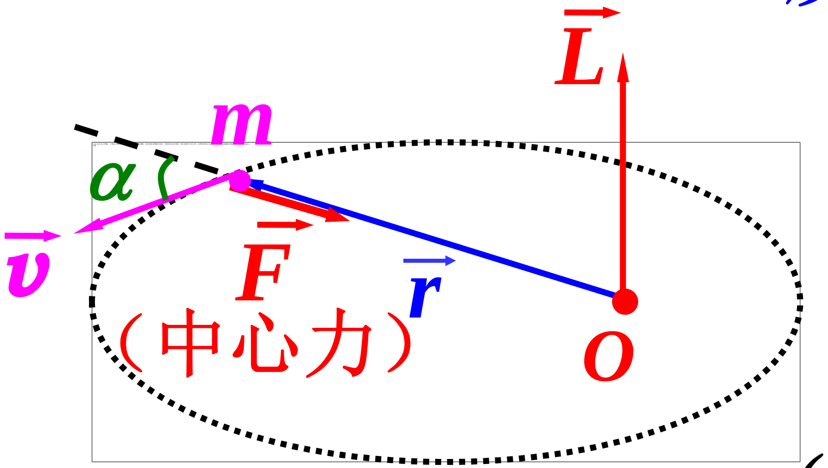
$$\boxed{\text{若 } \vec{M}=0\text{，则 } \vec{L}=\text{常矢量}}$$

——质点角动量守恒定律

$$\vec{M}=0\begin{cases}\vec{F}=0\,, \\ \vec{F}\text{过}O\text{点：中心力（如行星受中心恒星的万有引力）}\end{cases}$$

角动量守恒定律是物理学的基本定律之一，它不仅适用于宏观体系，也适用于微观体系，而且在高速低速范围均适用。

质点角动量守恒特征：



$$\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v}) = \text{常矢量}$$

（1） $mvr\sin\alpha$ =const.，

（2）轨道在同一平面内。


INCEPTION
DO YOU STILL DREAM, MR. COBB?

小结：动量与角动量的比较

动量 $\vec{p} = \sum_i m_i \vec{v}_i$

矢量

与固定点无关

与内力无关

守恒条件 $\sum_i \vec{F}_i = 0$

角动量 $\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$

矢量

与固定点有关

与内力矩无关

守恒条件 $\sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = 0$

第四章 功和能

（**Work and Energy**）

前言

——力对时间和空间的积累效应。

力在时间上的积累效应：

平动 ⟶ 冲量 ⟶ 动量的改变

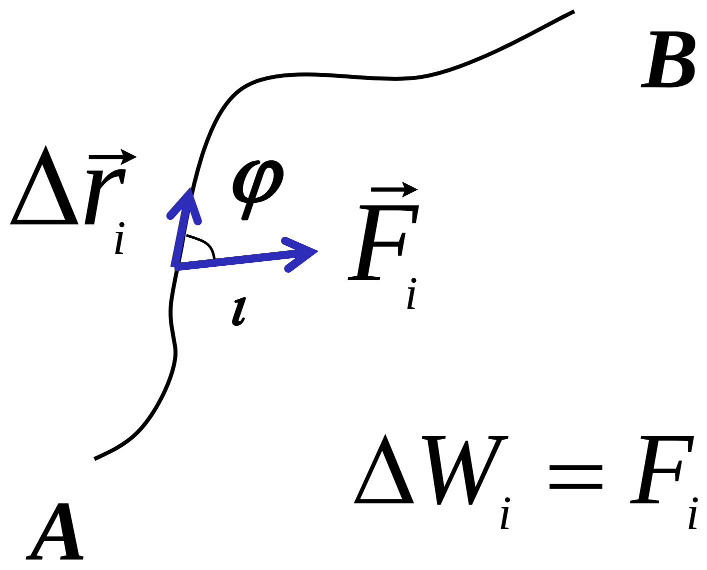
转动 ⟶ 冲量矩 ⟶ 角动量的改变

力在空间上的积累效应

⟶ 功 ⟶ 改变能量

§4.1 功

力的空间积累



点积（标量积）

$$\Delta W_i = F_i \Delta r_i \cos\varphi_i$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\varphi$$

功

$$\Delta W_i = \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

A到B做功 $$W_{AB} = \sum_i \Delta W_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i = \int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

▲ 功是标量，有正、负之分。

说明：功是标量，没有方向，只有大小，但有正负

θ<π/2，功W为正值，力对物体作正功；

θ=π /2，功W=0，　　力对物体不作功；

θ>π /2，功W为负值，力对物体作负功，或物体克服该力作功。

$$A_{12} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\,\vec{r} = \int_{(1)}^{(2)} (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n) \cdot \mathrm{d}\,\vec{r}$$

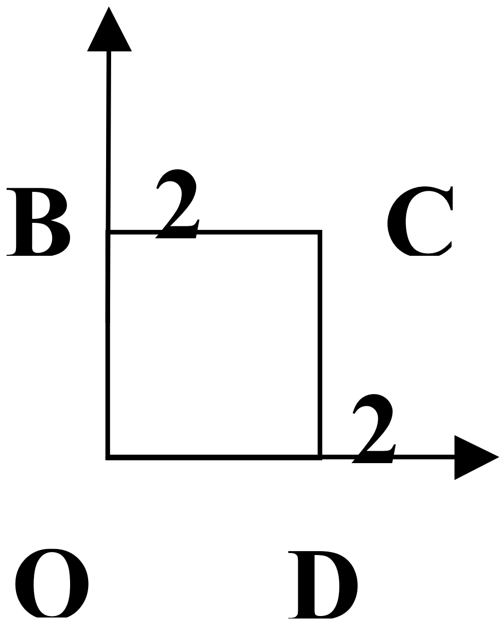
$$= \int_{(1)}^{(2)} \vec{F}_1 \cdot \mathrm{d}\,\vec{r} + \int_{(1)}^{(2)} \vec{F}_2 \cdot \mathrm{d}\,\vec{r} + \cdots + \int_{(1)}^{(2)} \vec{F}_n \cdot \mathrm{d}\,\vec{r}$$

$$= A_1 + A_2 + \cdots + A_n$$

国际单位：焦尔（J）　1J=1N.M

常用单位：电子伏（eV）1ev=1.6×10^{-19}J

例．一个质点沿如图所示的路径运行，求力 $\vec{F}=(4-2y)\vec{i}$ (SI) 对该质点所作的功，（1）沿ODC；（2）沿OBC。



解：$\vec{F}=(4-2y)\vec{i}$　$F_x=4-2y$　　$F_y=0$

（1）OD段：y=0,dy=0, DC段：x=2,Fy=0

$$W_{ODC}=\int_{OD}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_{DC}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^2(4-2\times 0)dx+0=8J$$

（2）OB段：Fy=0，BC段：y=2

$$W_{OBC}=\int_{OB}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_{BC}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^2(4-2\times 2)dx+0=0$$

结论：力作功与路径有关，即力沿不同的路径所作的功是不同的

*功率

•定义：单位时间内完成的功，叫做功率

$$\overline{P}=\frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad \boxed{P=\frac{dW}{dt}}$$

•物理意义：表示作功的快慢

•功率的公式

$$\boxed{W=\frac{dW}{dt}=\frac{\vec{F}\cdot d\vec{S}}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{v}}$$

•单位：瓦特（W）

几个功率的数量级：

睡觉	70－80W(基础代谢)	闲谈	70－80W
走路	170－380W	听课	70－140W
跑步	700－1000W	足球	630－840W

Δ § 4.2 动能定理（kinetic energy theorem）

▲ 对质点，由牛顿第二定律

$$\boxed{\begin{aligned} dA &= F \bullet dr = \frac{dp}{dt} \bullet dr \\ &= mvdv = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \end{aligned}}$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}mv^2}$$

—— 动能

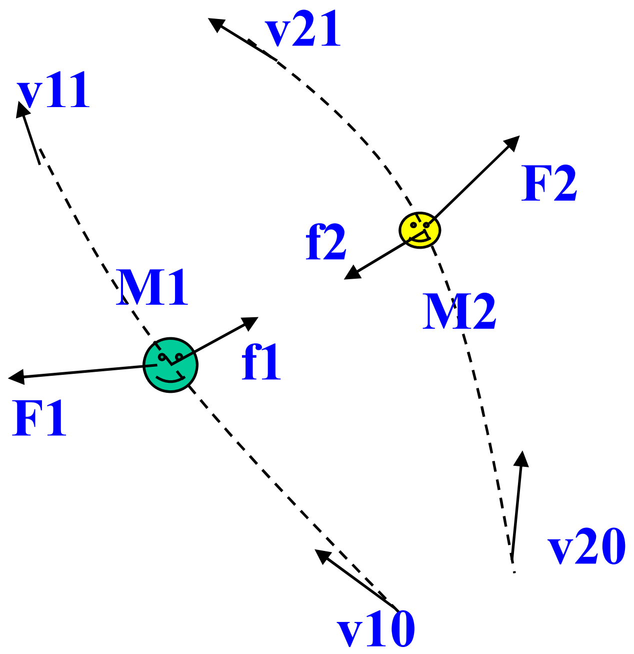
$$\left.\begin{aligned} &\boxed{dA = dE_k} \\ &\boxed{A_{12} = E_{k2} - E_{k1}} \end{aligned}\right\} \text{动能定理}$$

动能定理（或功能定理）：合外力对质点做的功等于质点动能的增量

▲ 对质点系

m1： $\boxed{\int_0^1 F_1 \bullet dr + \int_0^1 f_1 \bullet dr = \frac{1}{2} m_1 v_{11}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2}$

m2： $\boxed{\int_0^1 F_2 \bullet dr + \int_0^1 f_2 \bullet dr = \frac{1}{2} m_2 v_{21}^2 - \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2}$



$$\boxed{A_{外} + A_{内} = E_{k2} - E_{k1}}$$

质点系动能定理

注意：内力虽成对出现，但内力功的和不一定为零（各质点位移不一定相同）。

内力能改变系统的总动能，但不能改变系统的总动量

对质点 i：

$$\left(\vec{F}_i + \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij}\right) \mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p}_i$$

对质点系：

$$\sum_i \left(\vec{F}_i + \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij}\right) \mathrm{d}t = \sum_i \mathrm{d}\vec{p}_i$$

由牛顿第三定律有：

$$\sum_i \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij} = 0$$

$$\left(\sum_i \vec{F}_i\right) \mathrm{d}t = \sum_i \mathrm{d}\vec{p}_i$$

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_{外}\text{，}\quad \sum_i \vec{p}_i = \vec{P}$$

质心系

$$\sum m_i \vec{\mathrm{v}}_i' = (\sum m_i)\vec{\mathrm{v}}_{\mathrm{C}}' = 0$$

$$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i (v_c + v_i')^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i'^2 + \sum_i m_i v_i' v_c + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_c^2$$

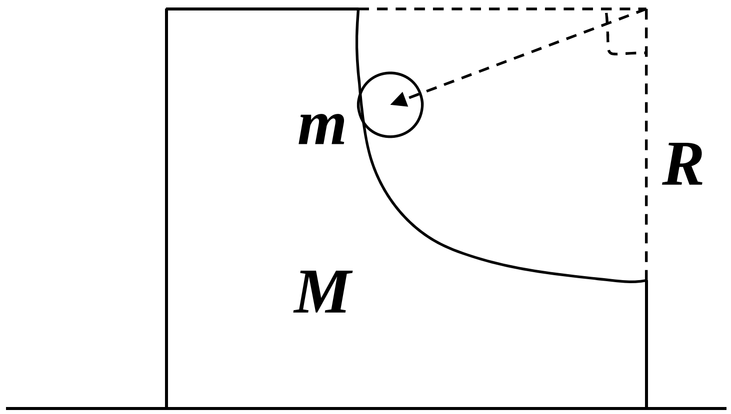
$$\sum_i m_i v_i' v_c = v_c \sum_i m_i v_i' = 0$$

$$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_c^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \frac{1}{2} m v_c^2$$

柯尼希定理

例题：有一面为1/4凹圆柱面（半径R）的物体（质量M）放置在光滑水平面，一小球（质量m），从静止开始沿圆面从顶端无摩擦下落（如图），小球从水平方向飞离大物体时速度 v ，求：1）重力所做的功；2）内力所做的功。

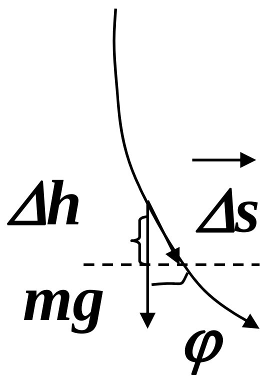
internal force



解：重力只对小球做功

$$\Delta A_{\text{重力}} = mg\Delta s\cos\varphi = mg\Delta h$$

$$A_{\text{重力}} = mgR$$



水平方向无外力，系统保持水平方向动量守恒。

$$mv - MV = 0 \qquad (\because V = \frac{mv}{M})$$

$$A_{重力}+A_{内力}=\frac{1}{2}MV^2+\frac{1}{2}mv^2$$

对M，内力所做的功 $\frac{1}{2}MV^2=\frac{m^2v^2}{2M}$ $\quad(\because V=\frac{mv}{M})$

internal force

对m ，内力所做的功 $\frac{1}{2}mv^2-mgR$

由机械能守恒定律: $mgR=\frac{1}{2}MV^2+\frac{1}{2}mv^2$

The law of conservation of mechanical energy

由于 $A_{重力}=mgR$, 可见，内力所做功 $A_{内力}=0$

内力与相对位移总垂直，故内力所做的功总和为零。

internal force

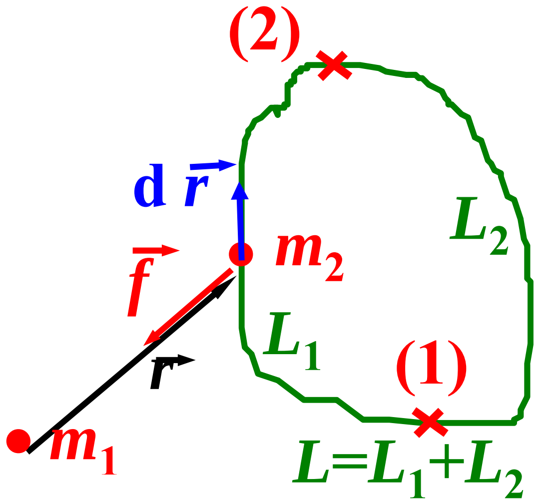
§ 4.3 保守力（conservative force）与势能（potential energy）

一. 定义

如果一力的功与相对移动的路径无关，而只决定于相互作用物体的始末相对位置，这样的力称为保守力。

若 $\vec{f}$ 为保守力，　　则：$\int_{(1)\,L_1}^{(2)} \vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{(1)\,L_2}^{(2)} \vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$

$$\int_{(1)\,L_1}^{(2)} \vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\int_{(2)\,L_2}^{(1)} \vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

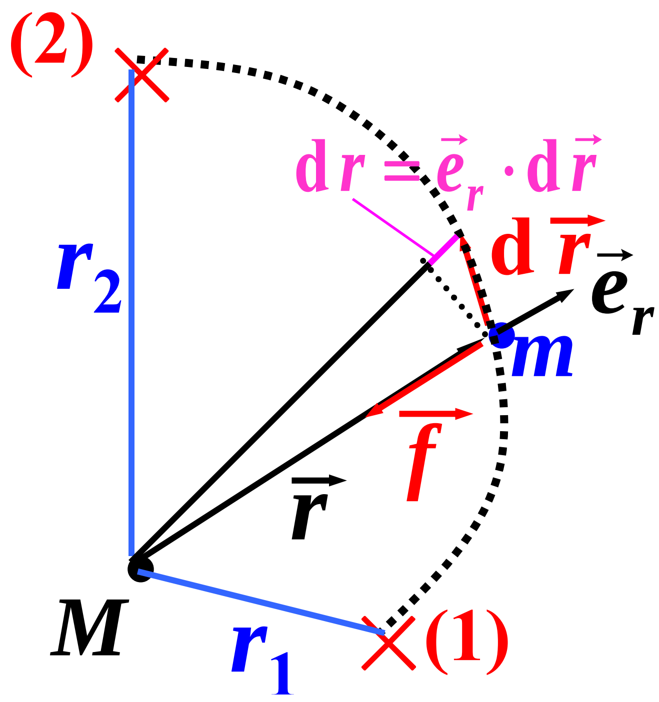


$\Rightarrow$ $\boxed{\oint_L \vec{f}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = 0}$ （此式也可作为保守力的定义）

闭合回路积分为零

二. 几种保守力

1.万有引力



$$A_{12\text{对}} = \int_{(1)}^{(2)} \vec{f} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_{(1)}^{(2)} -\frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} -\frac{GMm}{r^2} \mathrm{d}r$$

$$= \frac{GMm}{r_2} - \frac{GMm}{r_1}$$

任何中心力 $f(r)\vec{e}_r$ 都是保守力。

利用保守力的功与路径无关的特点，可引入“势能”（**potential energy**）的概念。

一. 系统的势能 E_p

定义：系统由位形(1)变到位形(2)的过程中，其势能的减少(增量的负值)等于保守内力的功。

$$\boxed{E_{p1} - E_{p2} = -\Delta E_p = A_{保12}}$$

若规定系统在位形（0）的势能为零，则：

$$\boxed{E_{p1} = \int_{(1)}^{(0)} \vec{f}_{保} \cdot \mathrm{d}\vec{r}}$$

说明：

1.势能属于相互作用的系统；

2.势能不依赖于参考系的选择，不要将势能零点的选择与参考系的选择相混淆。

二. 几种势能

1.万有引力势能

$$\boxed{E_p(r) = -\frac{GMm}{r} + C}$$

令 $E_p(\infty) = 0$，则 $C = 0$，

有

$$\boxed{E_p(r) = -\frac{GMm}{r}}$$

2.重力势能

$$\boxed{E_p(h) = mgh + C}$$

令 $E_p(0) = 0$， 有 $\boxed{E_p(h) = mgh}$

3.弹性势能

$$\boxed{E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 + C}$$

令 $E_p(0) = 0$，有 $\boxed{E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2}$

§ 4.4 机械能守恒定律

一. 功能原理（work-energy theorem）

对质点系有： $\boxed{A_{外} + A_{内} = E_{k2} - E_{k1}}$

$$A_{内} = A_{内保} + A_{内非} \quad = -(E_{p2} - E_{p1}) + A_{内非}$$

$$A_{外} + A_{内非} = (E_{k2} + E_{p2}) - (E_{k1} + E_{p1})$$

引入系统的机械能 $\boxed{E = E_k + E_p}$

功能原理

$$\boxed{A_{外} + A_{内非} = E_2 - E_1} \quad （积分形式）$$

$$\boxed{\mathrm{d}A_{外} + \mathrm{d}A_{内非} = \mathrm{d}E} \quad （微分形式）$$

二. 机械能守恒定律

（ law of conservation of mechanical energy）

在只有保守内力作功时，系统的机械能不变。

即 $$\boxed{\text{若}\ \mathrm{d}\boldsymbol{A}_{\text{外}}=0\ \text{且}\ \mathrm{d}\boldsymbol{A}_{\text{内非}}=0,\ \text{则}\ \boldsymbol{E}=\text{常量}}$$

——机械能守恒定律

显然，孤立的保守系统机械能守恒。

$$\text{当}\ \Delta\boldsymbol{E}=0\ \text{时},\ \Delta\boldsymbol{E}_{k}=-\Delta\boldsymbol{E}_{p}=\boldsymbol{A}_{\text{内保}}$$

即 $$\boldsymbol{E}_{p}\ \underset{\boldsymbol{A}_{\text{保内}}<0}{\overset{\boldsymbol{A}_{\text{保内}}>0}{\rightleftarrows}}\ \boldsymbol{E}_{k}$$

保守内力作功是系统势能与动能相互转化的手段和度量。

三. 普遍的能量守恒定律

如果考虑各种物理现象，计及各种能量，

则　一个孤立系统不管经历何种变化，

系统所有能量的总和保持不变。

—— 普遍的能量守恒定律

孤立系统（封闭系统）：不受外界作用的系统，即外力不做功

机械能守恒定律是普遍的能量守恒定律在机械运动范围内的体现。

§ 4.5 守恒定律的意义

自然界中许多物理量如动量、角动量、机械能、电荷、质量等等，都具有相应的守恒定律。

物理学特别注意对守恒量和守恒定律的研究，这是因为：

第一，从方法论上看：

利用守恒定律研究问题，可避开过程的细节，而对系统始、末态下结论（特点、优点）。

第二，从适用性来看：

守恒定律适用范围广，宏观、微观、高速、低速均适用。

第三，从认识世界来看：

守恒定律是认识世界的很有力的武器。

在新现象研究中，若发现某守恒定律不成立，则往往作以下考虑：

（1）寻找被忽略的因素，从而使守恒定律成立，如中微子的发现。

（2）引入新概念，使守恒定律更普遍化(补救)。

（3）当无法补救时，则宣布该守恒定律不成立，如弱相互作用宇称（**parity**）不守恒。

例1、中微子的发现

•问题的提出:

·β衰变：核A $\longrightarrow$ 核B + e

·如果核 A静止,则由动量守恒应有 $\vec{P}_B + \vec{P}_e = 0$

·但β衰变云室照片表明, B、e的径迹并不在一条直线上。

•问题何在? 是动量守恒有问题? 还是有其它未知粒子参与?

•物理学家坚信动量守恒。

• 1930年泡利(W.Pauli)提出中微子假说，以解释β衰变各种现象。

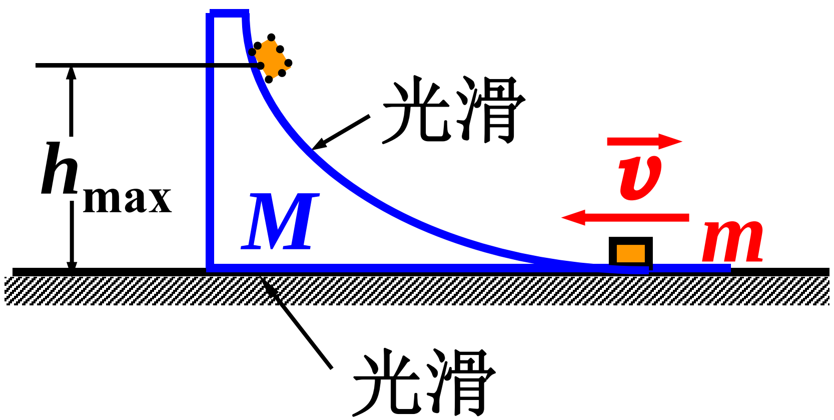
• 1956年(26年后)终于在实验上直接找到中微子。

• 1962实验上正式确定有两种中微子:

电子中微子ν_e　　μ子中微子ν_μ

四.守恒定律联合应用举例

[例1] 已知：$m = 0.2\text{kg}$， $M=2\text{kg}$， $\upsilon = 4.9\text{m/s}$ 。



求：$h_{max} = ?$

解： $m + M +$ 地球：

$W_{外} = 0$， $W_{内非} = 0$ ，

故机械能守恒。

当 $h = h_{max}$ 时，M 与 m有相同的水平速度$\vec{V}$ 。

取地面 $E_p = 0$，有：

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 + \cancel{E_{pM}} = \frac{1}{2}(m+M)V^2 + \cancel{E_{pM}} + mgh_{max} \qquad (1)$$

$m+M$：水平方向$F_{外}=0$，故水平方向动量守恒

$$mv=(m+M)V \tag{2}$$

由(1)、(2) 得：
$$h_{max}=\frac{1}{1+\frac{m}{M}}\cdot\frac{v^2}{2g}$$

分析结果的合理性：● 量纲对。

● $\frac{m}{M}\to 0$， $h_{max}=\frac{v^2}{2g}$ $\longrightarrow$ $mgh_{max}=\frac{1}{2}mv^2$，正确。

代入数据：
$$h_{max}=\frac{1}{1+\frac{0.2}{2}}\times\frac{4.9^2}{2\times 9.8}=1.11\ \mathrm{m}$$

谢谢！！！