# 第十一章 无穷级数

1、常数项级数概念、性质及其审敛法；

2、幂级数的概念及其收敛性；

3、函数展开成幂级数及其幂级数展开式的应用；

4、傅里叶级数（正弦级数、余弦级数）的概念及函数展开成傅里叶级数（正弦级数、余弦级数）；

# 基本要求：

1、理解常数项级数收敛、发散及和等概念；熟悉级数收敛的必要条件，了解常数项级数的性质，熟悉几何级数和P-级数的收敛性；

2、掌握正项级数收敛的充要条件及其审敛准则（比较审敛法、比值审敛法和根值审敛法）；

3、掌握交错级数的莱布尼兹审敛法，熟悉绝对收敛和条件收敛及一般项级数的审敛准则；

4、熟悉函数项级数的收敛域、和函数等概念；

# 基本要求：（续）

5、掌握幂级数的概念及阿贝尔收敛定理，熟悉幂级数的收敛域和收敛半径的求法，了解幂级数的运算性质（包含分析运算性质）；

6、掌握泰勒定理，掌握将函数展开为泰勒级数（麦克劳林级数）的方法；

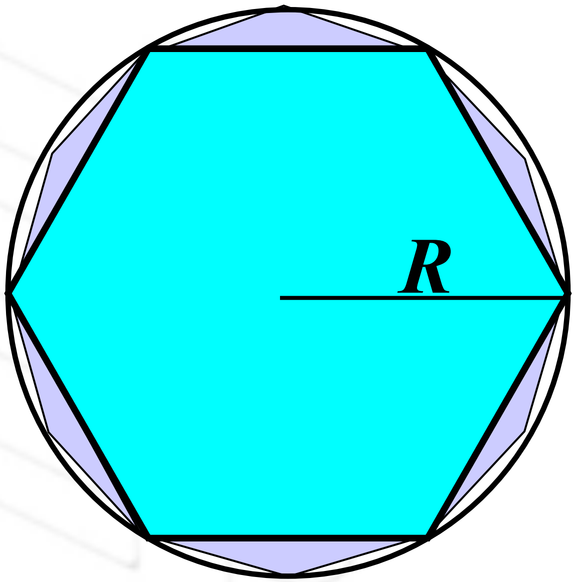
7、熟悉函数 $e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x), (1+x)^\lambda$ ($\lambda$为实数）的麦克劳林展开式；

8、理解傅里叶级数（正弦级数、余弦级数）的概念和收敛定理；熟悉将函数展开为傅里叶级数（正弦级数、余弦级数）的方法；

# 第一节 常数项级数的概念与性质

## 一、问题的提出

### 1. 计算圆的面积




正六边形的面积 $a_1$

正十二边形的面积 $a_1 + a_2$

正$3 \times 2^n$形的面积 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

即 $A \approx a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

2. $$\frac{1}{3} = \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots + \frac{3}{10^n} + \cdots$$

3. 在微积分中也遇到无穷项相加的问题

如：$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) +$$

$$\cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots$$

# 二、级数的概念

## 1. 级数的定义:

一般项

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

(常数项)无穷级数

级数的部分和

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

部分和数列

$$s_1 = u_1, \quad s_2 = u_1 + u_2, \quad s_3 = u_1 + u_2 + u_3, \cdots,$$

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \cdots$$

例：$\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{2})^n$，　$S_n=\sum_{i=0}^{n-1}(\frac{1}{2})^i=\dfrac{(\frac{1}{2})^n-1}{\frac{1}{2}-1}\to 2$,　$(n\to\infty)$

## 2.　级数的收敛与发散:

当$n$无限增大时，如果级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和数列$s_n$有极限$s$，即 $\lim_{n\to\infty}s_n=s$ 则称无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，这时极限$s$叫做级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的和. 并写成

$$s=u_1+u_2+\cdots+u_3+\cdots$$

如果$s_n$没有极限，则称无穷级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散.

即　常数项级数收敛(发散)$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n$ 存在(不存在)

余项 $r_n = s - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} u_{n+i}$

即　$s_n \approx s$　　误差为$|r_n|$　　$(\lim_{n\to\infty} r_n = 0)$

**无穷级数收敛性举例：Koch雪花.**

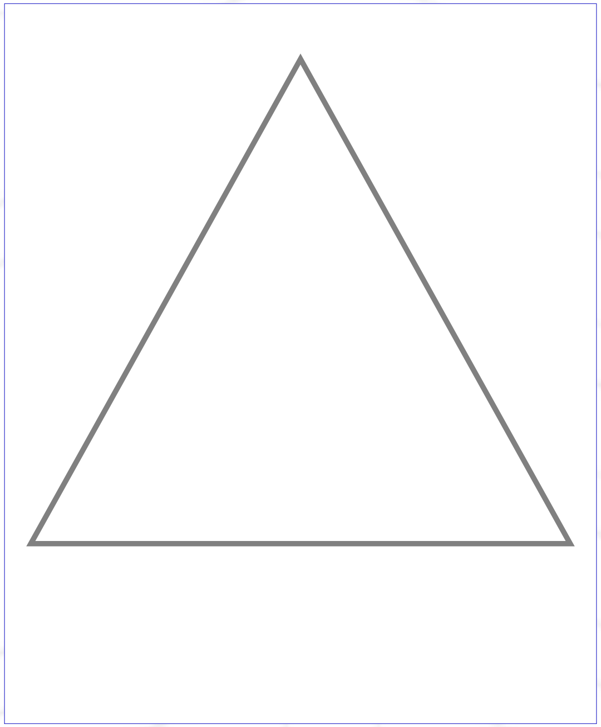
做法：先给定一个正三角形，然后在每条边上对称的产生边长为原边长的1/3的小正三角形．如此类推在每条凸边上都做类似的操作，我们就得到了面积有限而周长无限的图形——“Koch雪花”．

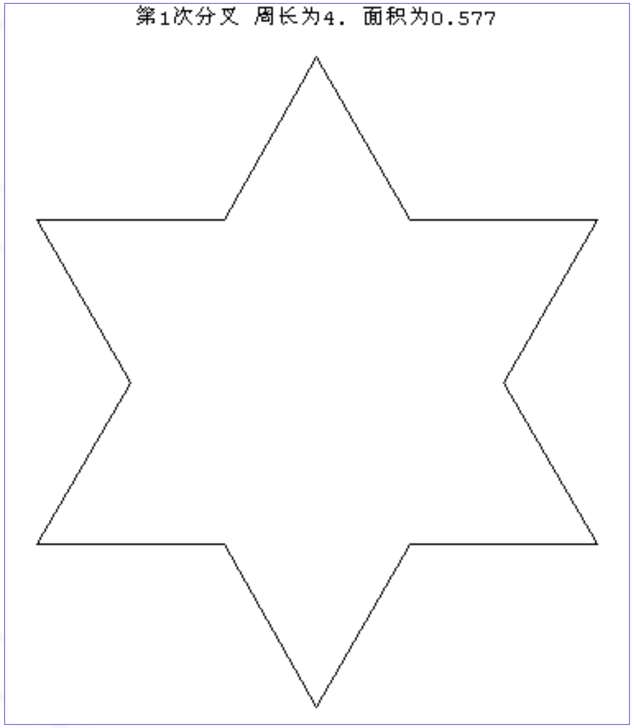
# 观察雪花分形过程

设三角形

周长为 $P_1 = 3,$

面积为 $A_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{4};$

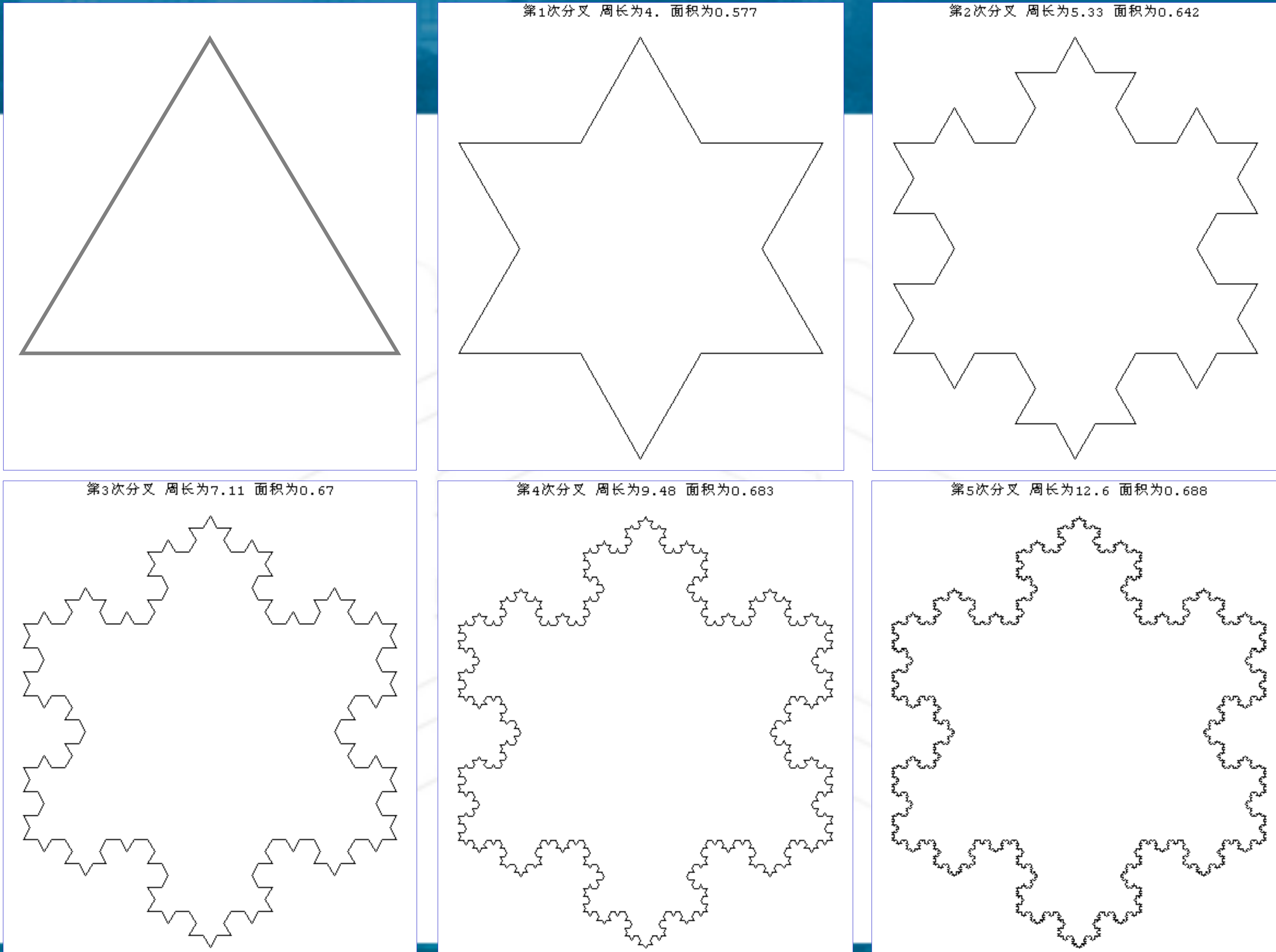





第一次分叉:

周长为 $P_2 = \dfrac{4}{3} P_1,$

面积为 $A_2 = A_1 + 3 \cdot \dfrac{1}{9} \cdot A_1;$ 依次类推


第1次分叉 周长为4. 面积为0.577
第2次分叉 周长为5.33 面积为0.642
第3次分叉 周长为7.11 面积为0.67
第4次分叉 周长为9.48 面积为0.683
第5次分叉 周长为12.6 面积为0.688

第 $n$ 次分叉：

周长为 $P_n=(\frac{4}{3})^{n-1}P_1 \quad n=1,2,\cdots$

面积为

$$A_n=A_{n-1}+3\{4^{n-2}[(\frac{1}{9})^{n-1}A_1]\}$$

$$=A_1+3\cdot\frac{1}{9}A_1+3\cdot 4\cdot(\frac{1}{9})^2A_1+\cdots+3\cdot 4^{n-2}\cdot(\frac{1}{9})^{n-1}A_1$$

$$=A_1\{1+[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}(\frac{4}{9})+\frac{1}{3}(\frac{4}{9})^2+\cdots+\frac{1}{3}(\frac{4}{9})^{n-2}]\}$$

$n=2,3,\cdots$

于是有

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A_1\left(1+\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{4}{9}}\right) = A_1\left(1+\frac{3}{5}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

雪花的面积存在极限（收敛）.

结论：雪花的周长是无界的，而面积有界.

例 1 讨论等比级数(几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots \quad (a \neq 0)$$

的收敛性.

**例 2** 判别无穷级数

$$\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} + \cdots$$ 的收敛性.

例3：判断调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots \frac{1}{n} + \cdots$

的敛散性。

# 三、基本性质

性质 1 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛, 则$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$亦收敛.

**结论**: 级数的每一项同乘一个不为零的常数,

敛散性不变.

性质 2 设两收敛级数$s=\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sigma=\sum_{n=1}^{\infty} v_n$,

则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$收敛, 其和为$s \pm \sigma$.

**结论**: 收敛级数可以逐项相加与逐项相减.

推论　设$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$收敛,$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$发散，则$\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n \pm v_n)$一定发散。

注意：设$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$发散,$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$发散，则$\sum_{n=1}^{+\infty}(u_n \pm v_n)$不一定发散。

例:$\sum_{1}^{\infty}(-1)^n$发散,$\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n+1}$发散　　例:$\sum_{1}^{n}[\frac{(-1)^n}{3^n}+\frac{2}{n}]$

例4：判断级数$\sum_{1}^{\infty}(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n})$的敛散性。

例5 判断级数$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots$的敛散性。

性质 3 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛, 则 $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} u_n$也收敛

$(k \geq 1)$. 且其逆亦真.

**证明** $u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+n} + \cdots$

$$\sigma_n = u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_{k+n}$$

$$= s_{n+k} - s_k,$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty} s_{n+k} - \lim\limits_{n\to\infty} s_k = s - s_k$.

类似地可以证明在级数前面加上有限项不影响级数的敛散性.

性质 4　收敛级数加括弧后所成的级数仍然收敛于原来的和.

证明　$(u_1+u_2)+(u_3+u_4+u_5)+\cdots$

$$\sigma_1=s_2,\quad \sigma_2=s_5,\quad \sigma_3=s_9,$$

$$\cdots,\sigma_m=s_n,\quad \cdots$$

则 $\lim\limits_{m\to\infty}\sigma_m=\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s.$

注　收敛级数去括弧后所成的级数不一定收敛.

例如　$(1-1)+(1-1)+\cdots$　收敛

$1-1+1-1+\cdots$　发散

推论　如果加括弧后所成的级数发散, 则原来级数也发散.

例6：判断级数 $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots$
$+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\cdots$的敛散性。

例如调和级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$

$$\underbrace{(1+\frac{1}{2})}_{2项}+\underbrace{(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})}_{2项}+\underbrace{(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})}_{4项}+\underbrace{(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{16})}_{8项}$$

$$+\cdots+\underbrace{(\frac{1}{2^m+1}+\frac{1}{2^m+2}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}})}_{2^m项}+\cdots$$

每项均大于 $\frac{1}{2}$

即前 $m+1$ 项大于 $(m+1)\frac{1}{2}$ $\therefore$ 级数发散.

由性质4推论, 调和级数发散.

# 四、收敛的必要条件

**级数收敛的必要条件:**

当$n$无限增大时，它的一般项 $u_n$趋于零，即

$$\text{级数收敛} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

**证明** $\because \quad s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad$ 则 $\quad u_n = s_n - s_{n-1},$

$$\therefore \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0.$$

**注意**

1. 如果级数的一般项不趋于零, 则级数发散;

例如 $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}+\cdots$ 发散

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{100n+9}$, $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n})^{\frac{1}{n}}$ 均发散.

2. 必要条件不充分.

例如调和级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$

有 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$, 但级数是否收敛?

**讨论**

$$\because \quad s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2},$$

假设调和级数收敛，其和为$s$.

于是$\lim\limits_{n\to\infty}(s_{2n} - s_n) = s - s = 0,$

便有 $0 \geq \dfrac{1}{2} \quad (n \to \infty)$ 这是不可能的.

$\therefore$ 级数发散.

# 思考题

设$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$都收敛，且$b_n \le a_n \le c_n$

$(n = 1,2,\cdots)$，能否推出$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛？