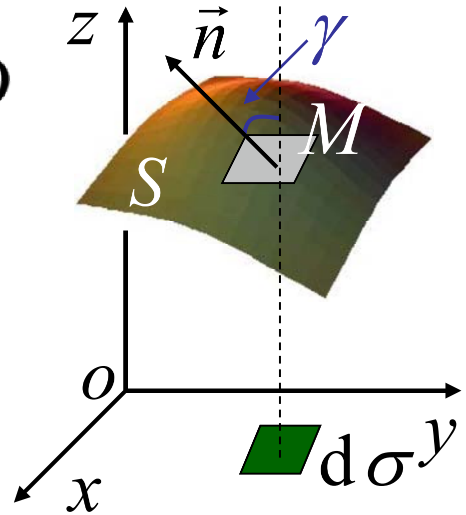

当你想放弃的时候，
请回头看看自己走了多远
坚强点，不要停下脚步

二、曲面的面积



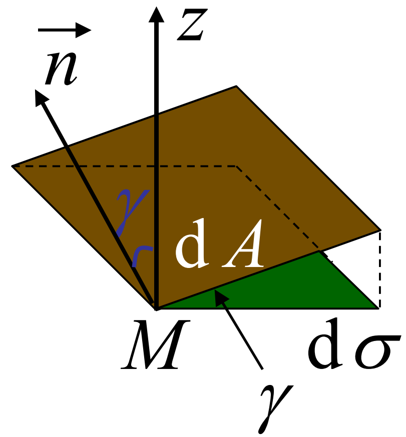
设光滑曲面 $S: z = f(x, y), (x, y) \in D$

则面积 A 可看成曲面上各点 $M(x, y, z)$ 处小切平面的面积 $\mathrm{d}A$ 无限积累而成.

设它在 D 上的投影为 $\mathrm{d}\sigma$, 则

$$\mathrm{d}\sigma = \cos\gamma \cdot \mathrm{d}A$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^{\,2}(x, y) + f_y^{\,2}(x, y)}}$$



$$\mathrm{d}A = \sqrt{1 + f_x^{\,2}(x, y) + f_y^{\,2}(x, y)}\ \mathrm{d}\sigma$$

(称为面积元素)

故有曲面面积公式

$$A=\iint_D \sqrt{1+f_x{}^2(x,y)+f_y{}^2(x,y)}\ \mathrm{d}\sigma$$

即 $$A=\iint_D \sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

若光滑曲面方程为 $x=g(y,z)$, $(y,z)\in D_{yz}$,则有

$$A=\iint_{D_{yz}} \sqrt{1+(\frac{\partial x}{\partial y})^2+(\frac{\partial x}{\partial z})^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

若光滑曲面方程为 $y = h(z, x)$, $(z, x) \in D_{zx}$,则有

$$A = \iint_{D_{zx}} \sqrt{1 + (\frac{\partial y}{\partial z})^2 + (\frac{\partial y}{\partial x})^2}\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}x$$

若光滑曲面方程为隐式 $F(x, y, z) = 0$, 且 $F_z \neq 0$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}, \qquad (x, y) \in D_{xy}$$

$$\therefore \quad A = \iint_{D_{xy}} \frac{\sqrt{F_x{}^2 + F_y{}^2 + F_z{}^2}}{|F_z|}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

第四节 对面积的曲面积分

一、第一型曲面积分的概念与性质

二、第一型曲面积分的计算法

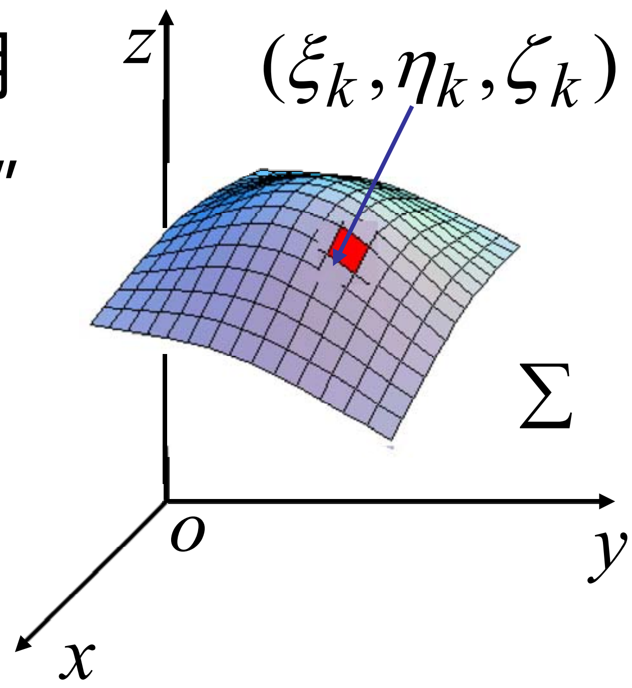
一、第一型曲面积分的概念与性质

引例: 设曲面形构件具有连续面密度 $\rho(x,y,z)$, 求质量 M.

类似求平面薄板质量的思想, 采用

"大化小, 常代变, 近似和, 求极限"

的方法, 可得



$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k$$

其中, λ 表示 n 小块曲面的直径的最大值 (曲面的直径为其上任意两点间距离的最大者).

定义: 设 Σ 为光滑曲面, $f(x, y, z)$ 是定义在 Σ 上的一个有界函数, 若对 Σ 做任意分割和局部区域任意取点, "乘积和式极限"

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta S_k \overset{\text{记作}}{=\!=} \iint_{\Sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}\,S$$

都存在, 则称此极限为函数 $f(x, y, z)$ 在曲面 Σ 上对面积的曲面积分 或第一型曲面积分. 其中 $f(x, y, z)$ 叫做被积函数, Σ 叫做积分曲面.

据此定义, 曲面形构件的质量为 $M = \iint_{\Sigma} \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}\,S$

曲面面积为 $S = \iint_{\Sigma} \mathrm{d}\,S$

第一型曲面积分与第一型曲线积分性质类似.

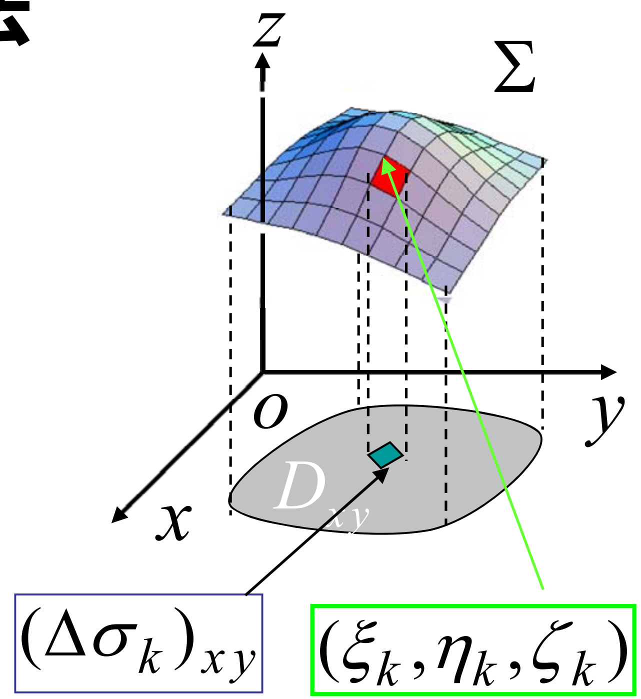
- 积分的存在性. 若 $f(x,y,z)$ 在光滑曲面 Σ 上连续, 则第一型曲面积分存在.
- 对积分域的可加性. 若 Σ 是分片光滑的, 例如分成两片光滑曲面 Σ_1, Σ_2, 则有

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

- 线性性质. 设 k_1, k_2 为常数, 则

$$\iint_{\Sigma}[k_1 f(x,y,z) \pm k_2 g(x,y,z)]\,\mathrm{d}S$$
$$= k_1 \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S \pm k_2 \iint_{\Sigma} g(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

二、第一型曲面积分的计算法



定理： 设有光滑曲面

$$\Sigma : z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$$

$f(x, y, z)$ 在 Σ 上连续, 则曲面积分

$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S$ 存在, 且有

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x^{\ 2}(x, y) + z_y^{\ 2}(x, y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

证明: 由定义知

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta S_k$$

而 $\Delta S_k = \iint_{(\Delta\sigma_k)_{xy}} \sqrt{1+z_x{}^2(x,y)+z_y{}^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\,y$

$$= \sqrt{1+z_x{}^2(\xi_k',\eta_k')+z_y{}^2(\xi_k',\eta_k')}\,(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

$$\therefore \iint_\Sigma f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,z(\underline{\xi_k,\eta_k}))\cdot \sqrt{1+z_x{}^2(\underline{\xi_k',\eta_k'})+z_y{}^2(\underline{\xi_k',\eta_k'})}\,(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,z(\xi_k,\eta_k))\cdot \sqrt{1+z_x{}^2(\xi_k,\eta_k)+z_y{}^2(\xi_k,\eta_k)}\,(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

(Σ光滑)

$$= \iint_{D_{xy}} f(x,y,\ z(x,y))\sqrt{1+z_x{}^2(x,y)+z_y{}^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

说明:

1) 如果曲面方程为

$$x = x(y,z), (y,z) \in D_{yz}$$

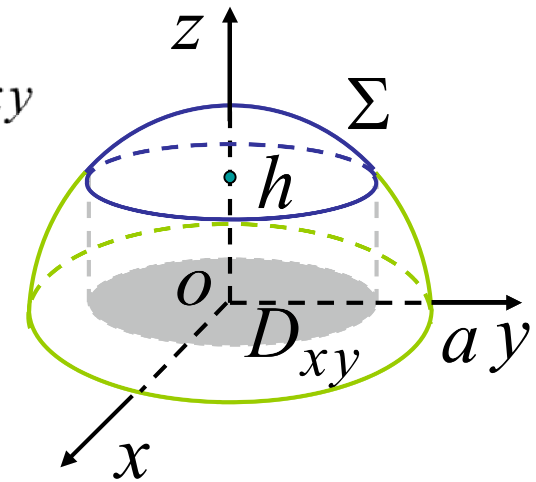
或 $$y = y(x,z), (x,z) \in D_{xz}$$

可有类似的公式.

2) 若曲面为参数方程, 只要求出在参数意义下$\mathrm{d}S$的表达式 , 也可将第一型曲面积分转化为对参数的二重积分.)

例1. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}S}{z}$, 其中$\Sigma$是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$被平面 $z=h\,(0<h<a)$ 截出的顶部.

解: $\Sigma : z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,,(x,y)\in D_{xy}$



$$D_{xy} : x^2+y^2 \le a^2-h^2$$

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$$

$$\therefore \iint_{\Sigma} \frac{\mathrm{d}S}{z}=\iint_{D_{xy}} \frac{a\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{a^2-x^2-y^2}=a\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{r\mathrm{d}\,r}{a^2-r^2}$$

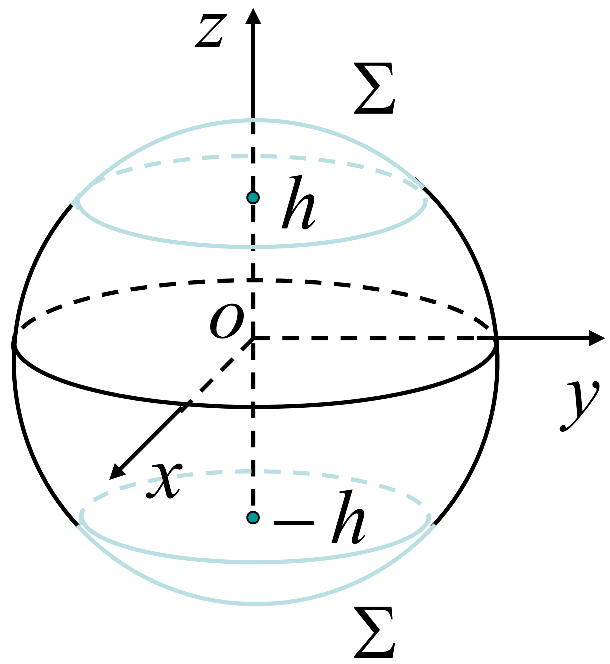
$$=2\pi\, a\left[-\frac{1}{2}\ln(a^2-r^2)\right]_0^{\sqrt{a^2+h^2}}=2\pi\, a\ln\frac{a}{h}$$

思考:

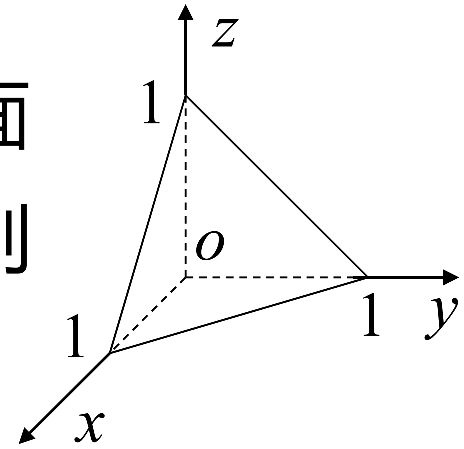
若 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平行平面 $z=\pm h$ 截出的上下两部分, 则

$$\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{z}=(\qquad 0 \qquad)$$

$$\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{|z|}=(\ 4\pi a\ln\frac{a}{h}\ )$$



例2. 计算 $\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$ 是由平面 $x+y+z=1$ 与坐标面所围成的四面体的表面.



解: 设 $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ 分别表示Σ 在平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 上的部分, 则

$$\text{原式} = \left(\iint_{\Sigma_1} + \iint_{\Sigma_2} + \iint_{\Sigma_3} + \iint_{\Sigma_4}\right) xyz\,\mathrm{d}S$$

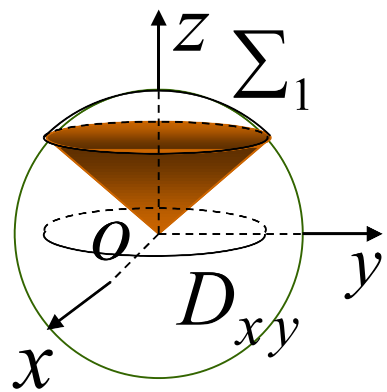
$$= \iint_{\Sigma_4} xyz\,\mathrm{d}S$$

$$\Sigma_4 : z = 1 - x - y,\quad (x, y) \in D_{xy} : \begin{cases} 0 \le y \le 1 - x \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$$

$$= \sqrt{3}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x \int_0^{1-x} y(1-x-y)\,\mathrm{d}y = \sqrt{3}/120$$

例3. 设 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2$

$$f(x,y,z)=\begin{cases} x^2+y^2, & 当 z\ge\sqrt{x^2+y^2} \\ 0, & 当 z<\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$



计算 $I=\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$.

解: 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的交线为 $x^2+y^2=\frac{1}{2}a^2,\ z=\frac{1}{2}a$.

设 Σ_1 为上半球面夹于锥面间的部分,它在 xoy 面上的投影域为 $D_{xy}=\left\{(x,y)\,\middle|\, x^2+y^2\le\frac{1}{2}a^2\right\}$,则

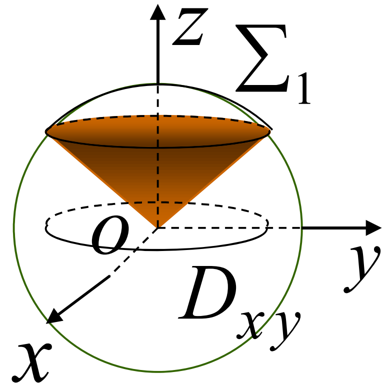
$$I=\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$$

$$I=\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}\,a}\frac{a\,r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}\,r\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{6}\pi a^4(8-5\sqrt{2})$$



思考: 若例3 中被积函数改为

$$f(x,y,z)=\begin{cases}x^2+y^2, & \text{当}\,|z|\ge\sqrt{x^2+y^2}\\ 0, & \text{当}\,|z|<\sqrt{x^2+y^2}\end{cases}$$

计算结果如何？

例4. 计算$I=\iint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{\lambda-z}\ (\lambda>R)$, $\sum: x^2+y^2+z^2=R^2$.

解: 取球面坐标系, 则$\Sigma: z=R\cos\varphi$,

$$\mathrm{d}S=R^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\frac{R^2\sin\varphi}{\lambda-R\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

$$=2\pi R\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}(\lambda-R\cos\varphi)}{\lambda-R\cos\varphi}$$

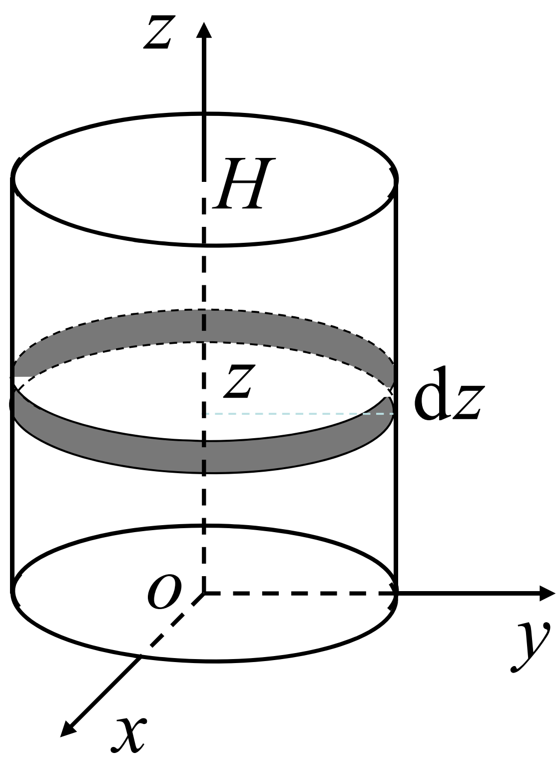
$$=2\pi R\ln\frac{\lambda+R}{\lambda-R}$$

例5. 计算 $I=\oiint_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ 是介于平面

$z=0,z=H$ 之间的圆柱面 $x^2+y^2=R^2$.

分析: 若将曲面分为前后(或左右)

两片，则计算较繁.



解: 取曲面面积元素

$$\mathrm{d}S=2\pi R\mathrm{d}z$$

则

$$I=\int_0^H\frac{2\pi R\,\mathrm{d}z}{R^2+z^2}$$

$$=2\pi\arctan\frac{H}{R}$$

内容小结

1. 定义: $\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$

2. 计算: 设$\Sigma: z = z(x,y), (x,y)\in D_{xy}$, 则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(曲面的其他两种情况类似)

- 注意利用球面坐标、柱面坐标、对称性、重心公式简化计算的技巧.

备用题 1. 已知曲面壳 $z = 3-(x^2+y^2)$ 的面密度 $\mu = x^2+y^2+z$, 求此曲面壳在平面 $z=1$ 以上部分 Σ 的质量 M.

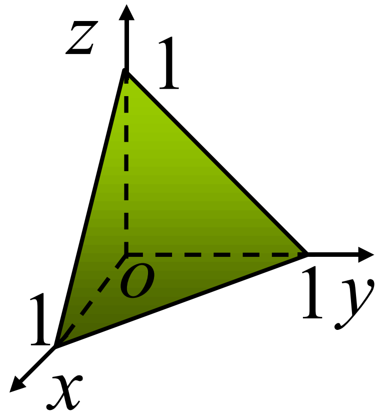
解: Σ 在 xoy 面上的投影为 $D_{xy}: x^2+y^2 \le 2$，故

$$M = \iint_{\Sigma} \mu \, \mathrm{d} S = \iint_{D_{xy}} 3\sqrt{1+4(x^2+y^2)}\, \mathrm{d} x \mathrm{d} y$$

$$= 3\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sqrt{2}} r\sqrt{1+4r^2}\, \mathrm{d} r$$

$$= 6\pi \cdot \frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{1+4r^2}\, \mathrm{d}(1+4r^2) = 13\pi$$

2. 设 Σ 是四面体 $x+y+z\le 1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$, $z\ge 0$的表面, 计算 $I=\oiint_{\Sigma}\frac{1}{(1+x+y)^2}\,\mathrm{d}S.$



解: 在四面体的四个面上

平面方程	$\mathrm{d}S$	投影域
$z=1-x-y$	$\sqrt{3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	$D_{xy}:0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1-x$
$z=0$	$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$	同上
$y=0$	$\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$	$D_{zx}:0\le z\le 1,\ 0\le x\le 1-z$
$x=0$	$\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$	$D_{yz}:0\le z\le 1,\ 0\le y\le 1-z$

$$\therefore I = (\sqrt{3}+1)\int_0^1 \mathrm{d}\,x\int_0^{1-x}\frac{1}{(1+x+y)^2}\,\mathrm{d}\,y +$$

$$+\int_0^1 \mathrm{d}\,z\int_0^{1-z}\frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$+\int_0^1 \mathrm{d}\,z\int_0^{1-z}\frac{1}{(1+y)^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{2}+(\sqrt{3}-1)\ln 2$$