第九章　重　积　分

一、二重积分的 定义、可积性条件、性质

二、二重积分的 计算：

直角坐标系、极坐标系、相互转化

三、三重积分的 定义、性质

四、三重积分的 计算

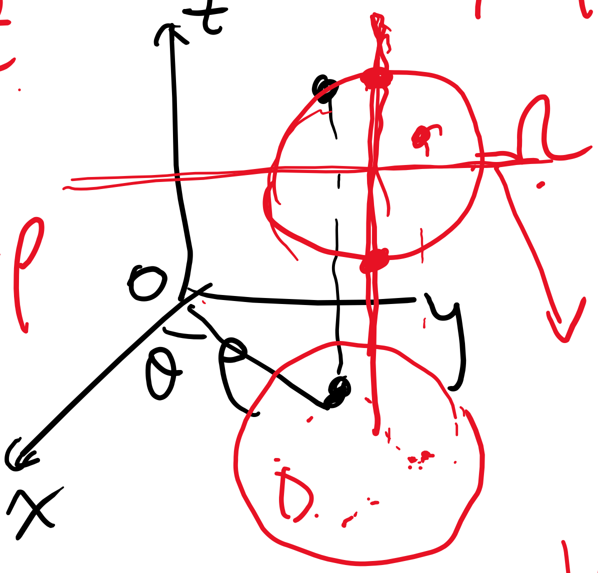
五、重积分的应用：

曲面面积、物体重心、平面薄板的转动惯量

$\cdot(x, y, z)$ $\quad dV = dx\,dy\,dz$ $\quad \cdot(\rho, \theta, z)$ $\quad \cdot(\rho, \theta, \varphi)$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\cdot\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad dV = \rho\, d\rho\, d\theta\, dz$$

$$|J| = \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, z)}\right| = \rho$$



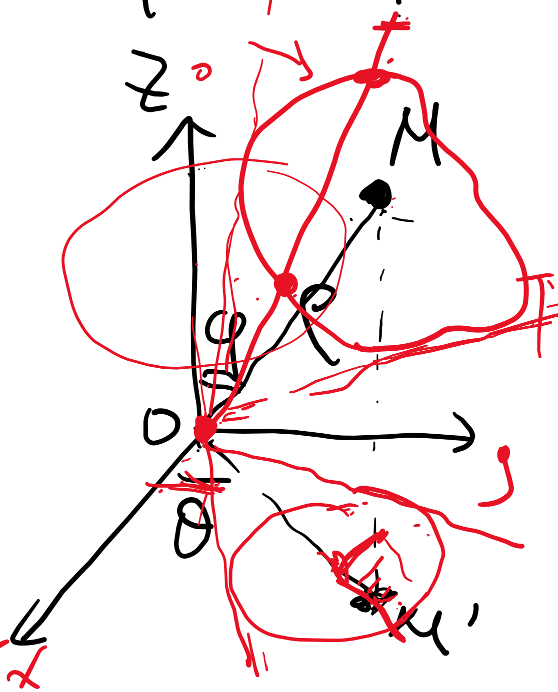
$F(\rho, \theta, z) = 0$

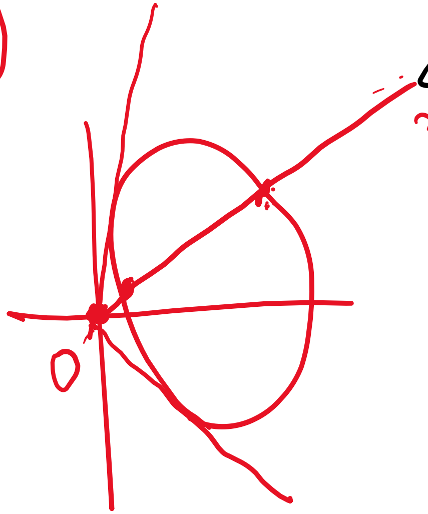
$\Downarrow$

$z = z(\rho, \theta)$

$0 \le \theta \le 2\pi$

$\rho \ge 0$





$0 \le \theta \le 2\pi$

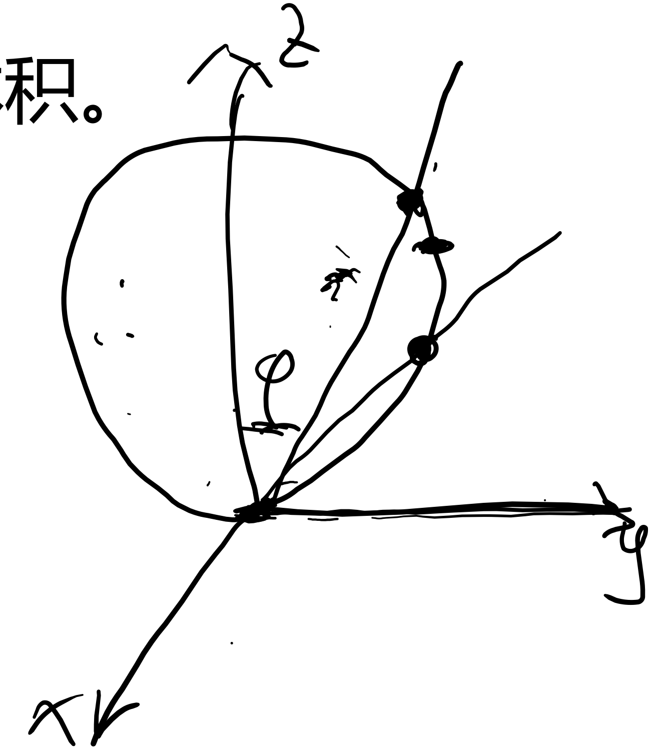
$0 \le \varphi \le \pi$

$\rho \ge 0$

$$\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \qquad dV = \boxed{\rho^2 \sin\varphi}\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$$|J| = \left|\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \varphi)}\right| \qquad \iiint_\Omega f(x, y, z)\, dV$$

例. 求曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^3 z\ (a>0)$ 所围立体体积。



$$V = \iiint \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$$V = \iint_D (z_2 - z_1)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \, d\varphi \int_0^{a\sqrt[3]{\cos\varphi}} \rho^2 \, d\rho$$

$$\rho^4 = a^3 \cdot \rho \cdot \cos\varphi$$

$$= 2\pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi \cdot \frac{1}{3} a^3 \cos\varphi \, d\varphi$$

$$\Rightarrow \rho(\rho^3 - a^3\cos\varphi) = 0 \quad (\rho(\rho^3 - a^3\cos\varphi) < 0)$$

$$\rho = 0, \quad \rho = a\sqrt[3]{\cos\varphi} \quad (\cos\varphi \geq 0)$$

$$\Downarrow$$

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

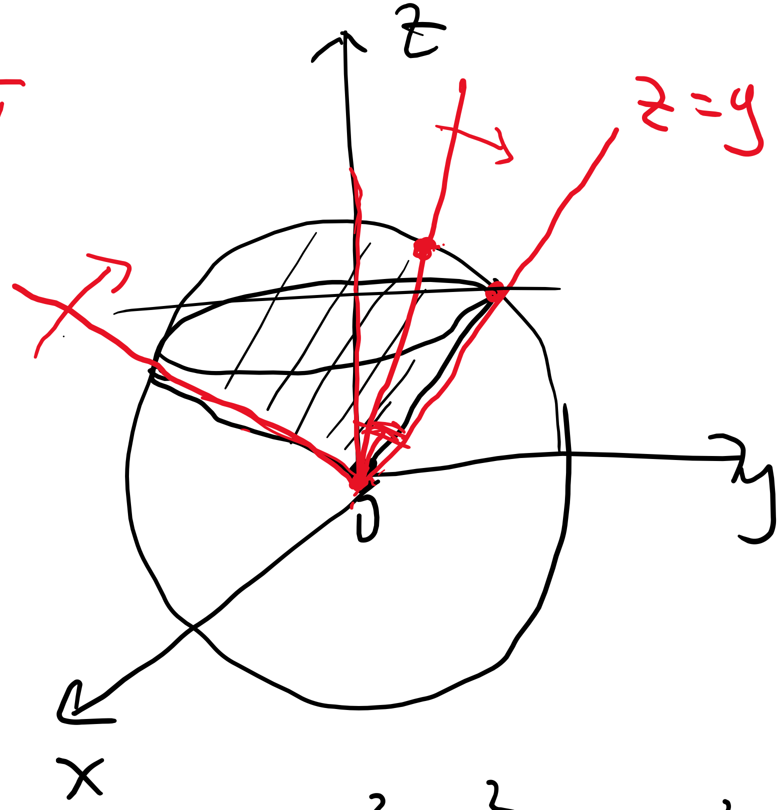
$$= \frac{2\pi}{3} a^3 \cdot \frac{1}{2} \sin^2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{3} a^3$$

例. 设 Ω 由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 和球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 所围成，

$\rho^2=4,\quad \rho=2$

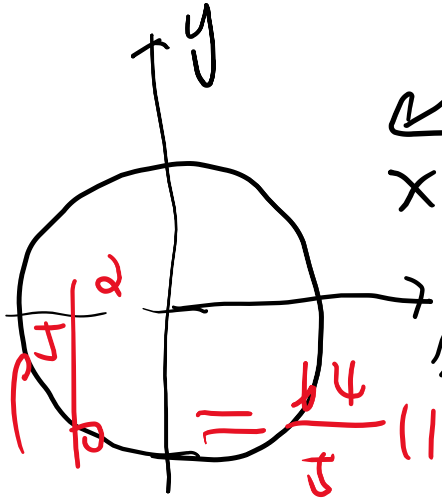
计算 $I=\iiint_{\Omega}(x+y+z)^2\mathrm{d}v$.

$0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\quad 0\le\rho\le 2,\quad 0\le\theta\le 2\pi$



$$I=\iiint_{\Omega}(\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{\rho^2}+\cancel{2xy}+\cancel{2yz}+\cancel{2xz})\,dv$$

$$=\iiint \rho^2\,\rho^2 d\rho\sin\varphi\, d\varphi\, d\theta$$



$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\, d\varphi\int_0^2\rho^4 d\rho=2\pi(-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}\cdot\frac{1}{5}\rho^5\Big|_0^2=\frac{64}{5}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\pi$$

$x^2+y^2=4-z^2$

$$\left[\int_a^t f(x)\,dx\right]' = f(t)$$

$$\left[\int_a^{\varphi(t)} f(x)\,dx\right]' = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

$$\left[\int_{g(t)}^{h(t)} f(x)\,dx\right]' = f(h(t))h'(t) - f(g(t))g'(t)$$

$f(x)>0$

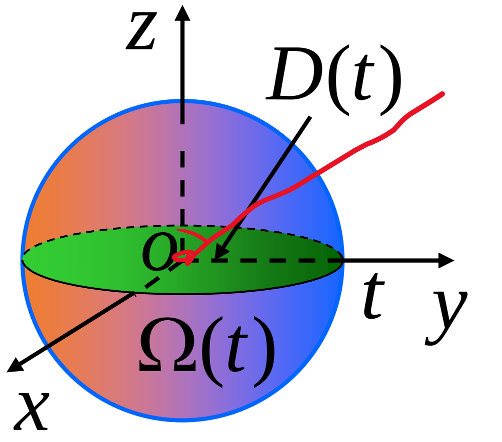
例. 设函数 $f(x)$ 连续且恒大于零, $F(t)=\dfrac{\iiint_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v}{\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma}$

$$G(t)=\frac{\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma}{\int_{-t}^{t} f(x^2)\,\mathrm{d}x}$$ 其中

$\Omega(t)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le t^2\}$, $\rho^2\le t^2$

$\boxed{0\le\rho\le t}$

$D(t)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le t^2\}$.



(1) 讨论 $F(t)$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内的单调性; $F'(t)$

(2) 证明 $t>0$ 时, $F(t)>\dfrac{2}{\pi}G(t)$. $F(t)-\frac{2}{\pi}G(t)>0$

$$F(t)=\frac{\iiint_{\Omega(t)} f(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}v}{\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)\,\mathrm{d}\sigma}$$

$$\Omega(t)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le t^2\},$$

$$D(t)=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le t^2\}.$$

$$=\frac{\int_0^{2\pi}\cancel{d\theta}\int_0^{\pi}\sin\varphi\, d\varphi\int_0^{t} f(\rho^2)\,\rho^2 d\rho}{\int_0^{2\pi}\cancel{d\theta}\int_0^{t} f(\rho^2)\,\rho\, d\rho}=\frac{2\int_0^{t} f(\rho^2)\,\rho^2 d\rho}{\int_0^{t} f(\rho^2)\,\rho\, d\rho}$$

$tf(t^2)$

$(0\le\rho\le t)$

$$F'(t)=2\,\frac{t f(t^2)\int_0^{t} f(\rho^2)\rho\, d\rho-\cancel{tf(t^2)}\int_0^{t} f(\rho^2)\rho^2 d\rho}{\left[\int_0^{t} f(\rho^2)\rho\, d\rho\right]^2}=\frac{2t f(t^2)\int_0^{t} f\rho(t-\rho)\,d\rho}{\left[\int_0^{t} f(\rho^2)\rho\, d\rho\right]^2}>0$$

$F(t)\nearrow$

$0 \quad \rho \quad t$

$\rho>0,\ (t-\rho)>0$

$$F(t) > \frac{2}{\pi} G(t).$$

$$G(t) = \frac{\iint_{D(t)} f(x^2+y^2)\,d\sigma}{\int_{-t}^{t} f(x^2)\,dx}$$

$$D(t) = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le t^2\}.$$

$$G(t) = \frac{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^t f(\rho^2)\,\rho\,d\rho}{2\int_0^t f(\rho^2)\,d\rho} = \frac{\pi \int_0^t f(\rho^2)\,\rho\,d\rho}{\int_0^t f(\rho^2)\,d\rho}$$

$$F(t) - \frac{2}{\pi} G(t) = \frac{H(t)}{\int \cdot \int} > 0$$

$H'(t) \ldots > 0$ $\qquad H(0) = 0$

解: (1) 因为

$$F(t)=\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r^2)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r}=\frac{2\int_0^t f(r^2)r^2\,\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r}$$

两边对 t 求导, 得

$$F'(t)=2\frac{t\,f(t^2)\int_0^t f(r^2)r(t-r)\,\mathrm{d}r}{\left[\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r\right]^2}$$

$\therefore$ 在 $(0,+\infty)$ 上 $F'(t)>0$,

故 $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调增加.

(2) 问题转化为证 $t>0$时, $F(t)-\frac{2}{\pi}G(t)>0$

$$G(t)=\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r}{2\int_0^t f(r^2)\,\mathrm{d}r}=\frac{\pi\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r}{\int_0^t f(r^2)\,\mathrm{d}r}$$

即证 $g(t)=\int_0^t f(r^2)r^2\,\mathrm{d}r\int_0^t f(r^2)\,\mathrm{d}r-[\int_0^t f(r^2)r\,\mathrm{d}r]^2>0$

因 $g'(t)=f(t^2)\int_0^t f(r^2)(t-r)^2\,\mathrm{d}r>0$

故 $g(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调增, 又因 $g(t)$ 在 $t=0$ 连续, 故有

$$g(t)>g(0)=0\qquad(t>0)$$

因此 $t>0$ 时, $F(t)-\frac{2}{\pi}G(t)>0.$

例. 设 $f(u)\in C$, $f(0)=0$, $\boxed{f'(0)\text{存在}}$, 求 $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\pi t^4}F(t)$, $\dfrac{0}{0}$

其中 $F(t)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,dx\,dy\,dz$

$$F(t)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi\int_0^t f(\rho)\cdot\rho^2 d\rho=4\pi\int_0^t f(\rho)\rho^2 d\rho$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{4\pi\int_0^t f(\rho)\rho^2 d\rho}{\pi t^4}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)t^2}{t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{f(t)}{t}\overset{\text{导义}}{=}\lim_{t\to 0}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=f'(0)$$

$\left(\dfrac{0}{0}\right)$

$f'(t)$

$t=0$

第九章　重 积 分

一、二重积分的 定义、可积性条件、性质

二、二重积分的 计算

直角坐标系、极坐标系、相互转化

三、三重积分的 定义、性质

四、三重积分的 计算

五、重积分的应用：

曲面面积、物体重心、平面薄板的转动惯量

第四节 重积分的应用

$$dv = dx\,dy\,dz$$

$$\iiint_{\Omega} dv \begin{cases} dv = \rho\, d\rho\, d\theta\, dz \\ dv = \rho^2 \sin\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi \end{cases}$$

一、立体体积

二、曲面的面积

三、物体的重心

四、物体的转动惯量

1. 能用重积分解决的实际问题的特点

$$\text{所求量是}\begin{cases}\text{分布在有界闭域上的整体量}\\ \text{对区域具有可加性}\end{cases}$$

2. 用重积分解决问题的方法

- 用微元分析法 (元素法)
- 从定积分定义出发建立积分式

3. 解题要点

画出积分域、选择坐标系、确定积分序、定出积分限、计算要简便

一、立体体积

- **曲顶柱体**的顶为连续曲面 $z = f(x, y), (x, y) \in D,$ 则其体积为

$$V = \iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

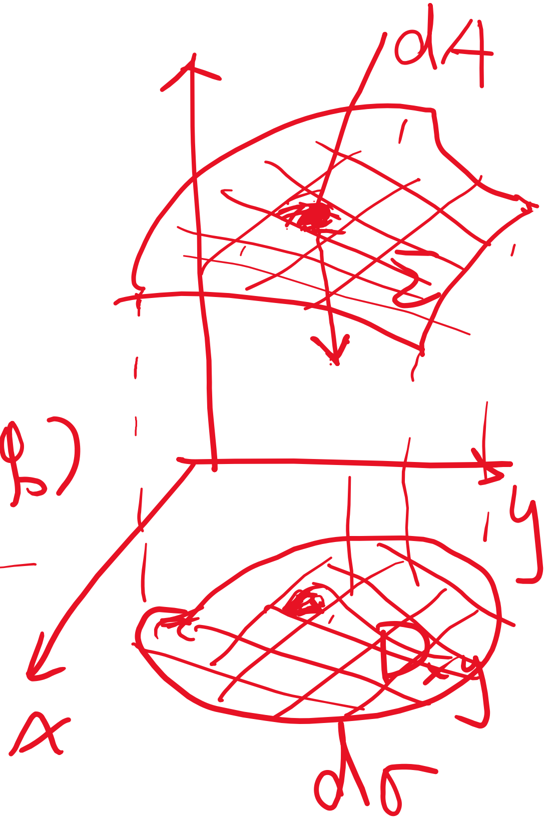
- 占有**空间有界域 Ω** 的立体的体积为

$$V = \iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$F = f(x,y) - z = 0$

二、光滑曲面的面积

$z = f(x,y)$, $(x,y) \in D_{xy}$



$= f(x_0, y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

$+ o(\rho)$

$z = z_0 + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$

$f_x(x_0,y_0)x + f_y(x_0,y_0)y - z = f_x x_0 + f_y y_0 - z_0$

C.

$\vec{n} = (f_x, f_y, -1) = \nabla(f(x,y) - z)$

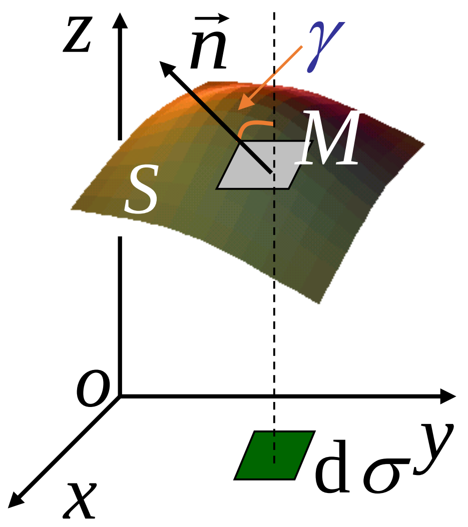
二、曲面的面积

设光滑曲面 $S: z = f(x, y)\,,\,(x, y) \in D$

则面积 A 可看成曲面上各点 $M(x, y, z)$

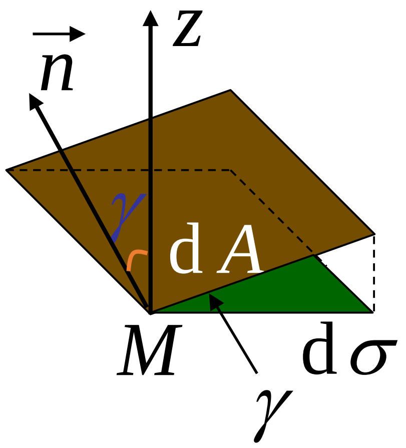
处小切平面的面积 $\mathrm{d}\,A$ 无限积累而成。

设它在 D 上的投影为 $\mathrm{d}\sigma$, 则



$$\mathrm{d}\sigma = \cos\gamma \cdot \mathrm{d}\,A$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^{\,2}(x, y) + f_y^{\,2}(x, y)}}$$



$$\mathrm{d}\,A = \sqrt{1 + f_x^{\,2}(x, y) + f_y^{\,2}(x, y)}\;\mathrm{d}\sigma$$

(称为面积元素)

故有曲面面积公式 $A = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2(x,y) + f_y^2(x,y)}\, \mathrm{d}\sigma$

即 $A = \iint_D \sqrt{1 + (\frac{\partial z}{\partial x})^2 + (\frac{\partial z}{\partial y})^2}\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ $\frac{\cos\gamma}{}$

若光滑曲面方程为 $x = g(y,z)$, $(y,z) \in D_{yz}$,则有

$$A = \iint_{D_{yz}} \sqrt{1 + (\frac{\partial x}{\partial y})^2 + (\frac{\partial x}{\partial z})^2}\, \mathrm{d}y\mathrm{d}z \qquad \frac{\cos\alpha}{}$$

若光滑曲面方程为 $y = h(z, x)$, $(z, x) \in D_{zx}$, 则有

$$A = \iint_{D_{zx}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\, \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$ ωβ

若光滑曲面方程为隐式 $F(x, y, z) = 0$, 且 $F_z \neq 0$, 则

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}, \qquad (x, y) \in D_{xy}$$

$$\therefore \quad A = \iint_{D_{xy}} \frac{\sqrt{F_x{}^2 + F_y{}^2 + F_z{}^2}}{\left| F_z \right|}\, \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

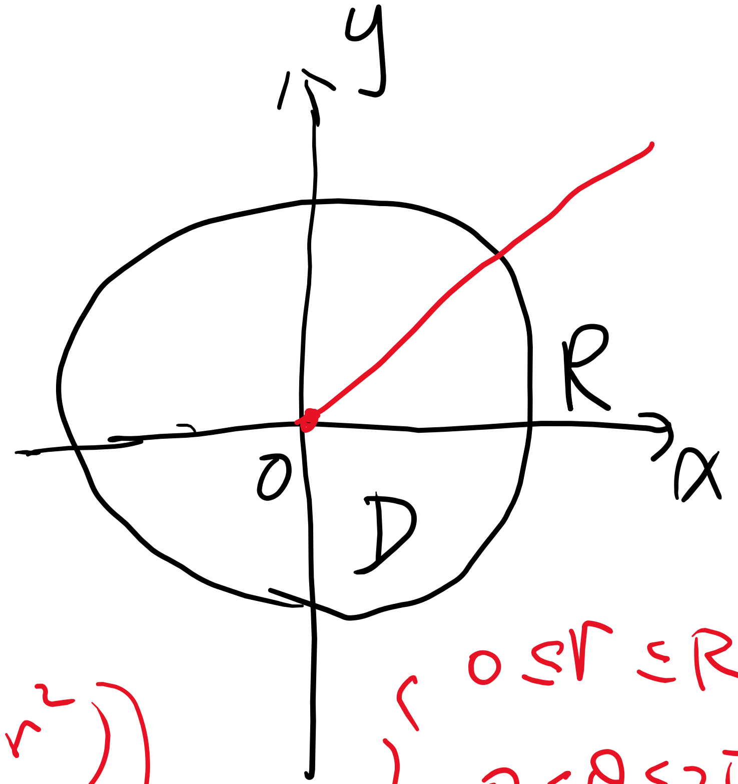
例. 计算双曲抛物面$z = xy$ 被柱面$x^2 + y^2 = R^2$所截出的面积 A。

$$A = \iint_D \sqrt{1+(z_x)^2+(z_y)^2}\, dxdy$$

$$= \iint_D \sqrt{1+y^2+x^2}\, dxdy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \sqrt{1+r^2}\, r dr \qquad \left(\frac{1}{2} d(1+r^2)\right)$$

$$\begin{cases} 0 \le r \le R \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$



$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (1+r^2)^{3/2} \Big|_0^R = \frac{2\pi}{3}\left[(1+R^2)^{3/2} - 1\right]$$

三、物体的重心

设空间有 n 个质点, 位于(x_k, y_k, z_k),其质量分别为 m_k $(k=1,2,\cdots,n)$,

由力学知, 该质点系的重心坐标

$$x_G=\frac{\sum_{k=1}^{n}x_k m_k}{\sum_{k=1}^{n}m_k},\quad y_G=\frac{\sum_{k=1}^{n}y_k m_k}{\sum_{k=1}^{n}m_k},\quad z_G=\frac{\sum_{k=1}^{n}z_k m_k}{\sum_{k=1}^{n}m_k}$$

设物体占有空间域 Ω , 有连续密度函数 $\rho(x,y,z)$,则

采用 "大化小, 常代变, 近似和, 取极限" 可导出其重心公式

将 Ω 分成 n 小块, 在第 k 块上任取一点 (ξ_k,η_k,ζ_k), 将第 k 块看作质量集中于点 (ξ_k,η_k,ζ_k) 的质点, 此质点系的重心坐标就近似该物体的重心坐标。例如,

$$x_G \approx \frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k \rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k}{\sum_{k=1}^{n} \rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k}$$

令各小区域的最大直径 $\lambda \to 0$,即得

$$x_G = \frac{\iiint_{\Omega} x\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_{\Omega} \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

同理可得

$$y_G = \frac{\iiint_\Omega y\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z} \qquad z_G = \frac{\iiint_\Omega z\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}$$

当$\rho(x,y,z) \equiv$常数时, 则得形心坐标:

$$x_G = \frac{\iiint_\Omega x\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V}, \quad y_G = \frac{\iiint_\Omega y\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V}, \quad z_G = \frac{\iiint_\Omega z\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z}{V}$$

$\left(V = \iiint_\Omega \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\right.$为$\Omega$的体积$\left.\right)$

若物体为占有xoy面上区域D的平面薄片,其面密度为$\mu(x,y)$,

则它的重心坐标为

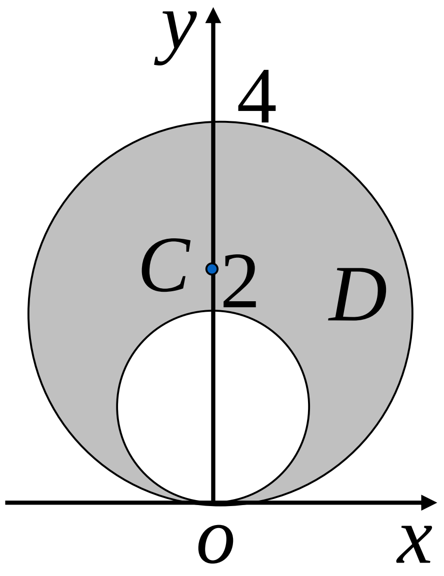
$$x_G=\frac{\iint_D x\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y} \qquad y_G=\frac{\iint_D y\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

$\rho=$常数时, 得D的形心坐标: $x_G=\dfrac{\iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{A}$, $y_G=\dfrac{\iint_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{A}$

(A为D的面积)

例. 求位于两圆 $r=2\sin\theta$ 和 $r=4\sin\theta$ 之间均匀薄片的重心。

解: 利用对称性可知 $x_G=0$



而 $y_G=\dfrac{1}{A}\iint_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\frac{1}{3\pi}\iint_D r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

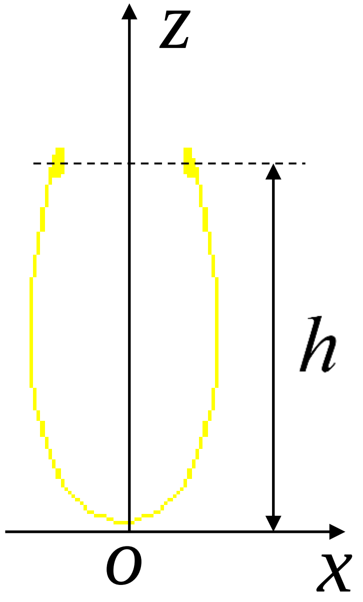
$$=\frac{1}{3\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}r^2\,\mathrm{d}r=\frac{56}{9\pi}\int_0^{\pi}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{56}{9\pi}\cdot 2\int_0^{\pi/2}\sin^4\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{56}{9\pi}\cdot 2\cdot\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot=\frac{7}{3}$$

例. 一个炼钢炉为旋转体形, 剖面壁线的方程为

$9x^2 = z(3-z)^2, 0 \le z < 3$, 若炉内储有高为 h 的均质钢液,

不计炉体的自重, 求它的重心。



解: 利用对称性可知质心在 z 轴上，故其坐标为

$$x_G = y_G = 0, \qquad z_G = \frac{\iiint_\Omega z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{V}$$

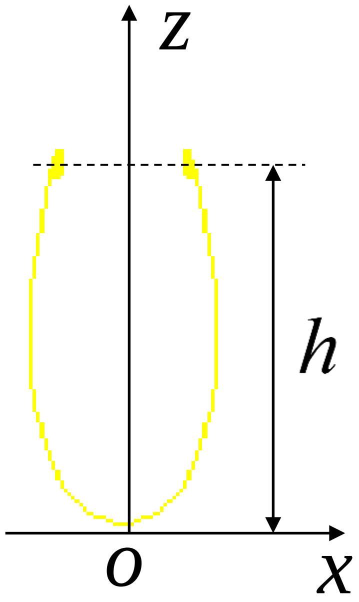
采用柱坐标, 则炉壁方程为 $9r^2 = z(3-z)^2$， 因此

$$V = \iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^h \mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^h \frac{\pi}{9} z(3-z)^2 \mathrm{d}z = \frac{\pi}{9} h^2 (\frac{9}{2} - 2h + \frac{1}{4} h^2)$$

$$z_G = \frac{\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{V}$$

$$V = \frac{\pi}{9}h^2\left(\frac{9}{2} - 2h + \frac{1}{4}h^2\right)$$

$$\iiint_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^h z\mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



$$= \int_0^h \frac{\pi}{9} z^2 (3-z)^2 \mathrm{d}z$$

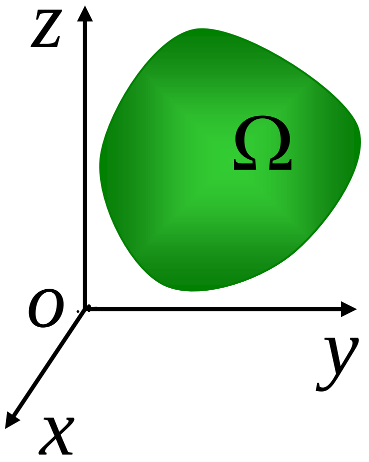
$$= \frac{\pi}{9} h^3 \left(3 - \frac{3}{2}h + \frac{1}{5}h^2\right)$$

$$\therefore \quad z_G = h\frac{60 - 30h + 4h^2}{90 - 40h + 5h^2}$$

四、物体的转动惯量

因质点系的转动惯量等于各质点的转动惯量之和, 故连续体的转动惯量可用积分计算。

设物体占有空间区域 Ω , 有连续分布的密度函数 $\rho(x, y, z)$.



该物体位于(x , y , z) 处的微元对 z 轴的转动惯量为

$$\mathrm{d} I_z = (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\mathrm{d} v$$

因此物体 对 z 轴 的转动惯量: $I_z = \iiint_\Omega (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

类似可得:

对 x 轴的转动惯量

$$I_x = \iiint_\Omega (y^2 + z^2)\ \rho(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

对 y 轴的转动惯量

$$I_y = \iiint_\Omega (x^2 + z^2)\ \rho(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

对原点的转动惯量

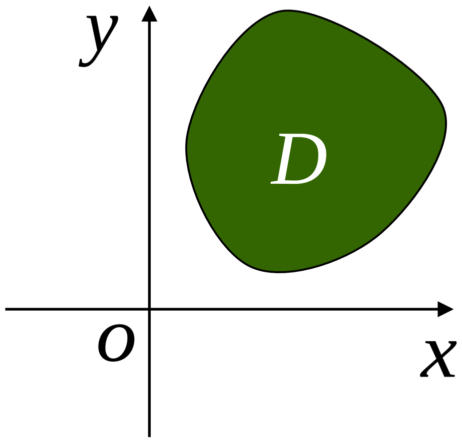
$$I_o = \iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2)\ \rho(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

如果物体是平面薄片，面密度为 $\mu(x,y),(x,y)\in D$

则转动惯量的表达式是二重积分。

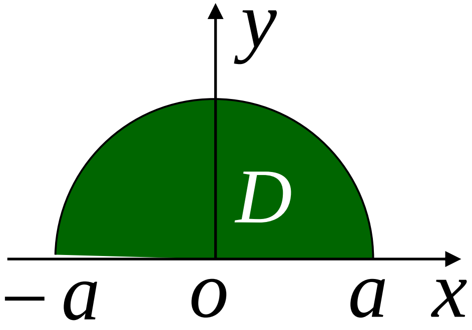
$$I_x=\iint_D y^2\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I_y=\iint_D x^2\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



$$I_o=\iint_D (x^2+y^2)\mu(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例. 求半径为 a 的均匀半圆薄片对其直径的转动惯量。



解: 建立坐标系如图, $D:\begin{cases} x^2+y^2\le a^2 \\ y\ge 0 \end{cases}$

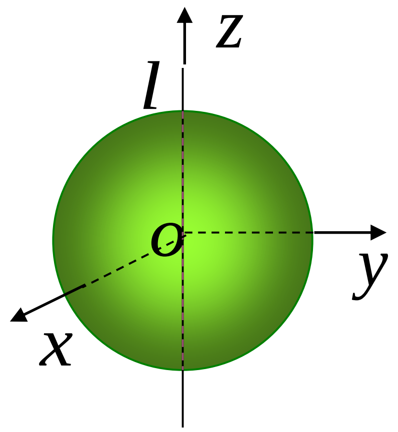
$$\therefore I_x=\iint_D \mu\, y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\mu\iint_D r^3\sin^2\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\mu\int_0^{\pi}\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^a r^3\,\mathrm{d}r=\frac{1}{4}\mu a^4\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

半圆薄片的质量 $M=\dfrac{1}{2}\pi a^2\mu$

$$=\frac{1}{4}Ma^2$$

例． 求均匀球体对于过球心的一条轴 l 的转动惯量。



解: 取球心为原点, z 轴为 l 轴, 设球所占域为

$$\Omega: x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2, \quad \text{(用球坐标)}$$

则 $$I_z = \iiint_\Omega (x^2 + y^2)\rho \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \rho \iiint_\Omega (r^2 \sin^2\varphi \cos^2\theta + r^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta) \cdot r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\pi} \sin^3\varphi \,\mathrm{d}\varphi \int_0^a r^4 \,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2}{5}\pi\rho a^5 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{5} a^2 M$$

球体的质量

$$M = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$$