第三章 质点的动量、角动量及其守恒定律

(Momentum and Angular Momentum)

------力在时间上的积累效应

本章目录

3.1 冲量，动量

定义：

质点的动量(momentum) —— $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$

根据牛顿第二定律 $\vec{F} = \dfrac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$，得到 $\vec{F}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p}$

力的冲量(impulse) —— $\boxed{\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t}$

3.2 质点动量定理、动量守恒

质点动量定理 —— $\boxed{\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \overrightarrow{p_2} - \overrightarrow{p_1}}$

质点动量定理：

在有限时间内外力产生的冲量等于质点动量的改变量。

根据牛顿第二定律 $\vec{F} = \dfrac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{p}}{\mathrm{d}t}$，得到 $\vec{F}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\,\vec{p}$

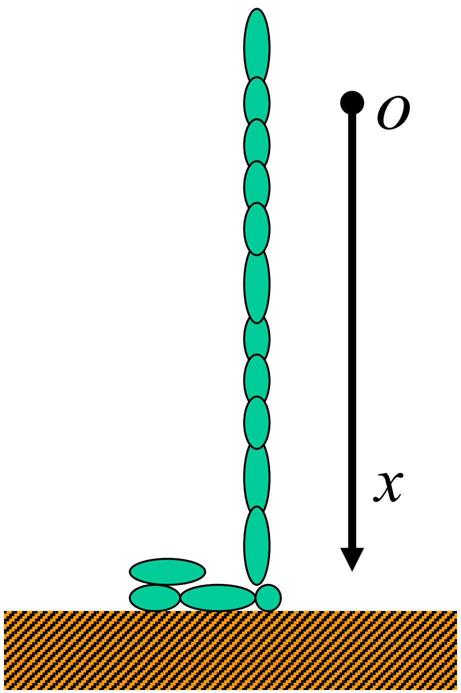
$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}t = \int d\overrightarrow{p}$$

质点动量守恒：

在某段时间内，若质点受到合外力为零，则其动量守恒。

当 $\vec{F}_{外} = 0$ 时，得到 $\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = 0$，即 $\overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{p_1}$

例1、一质量均匀分布的柔软细绳铅直地悬挂着，绳的下端刚好触到水平桌面上，如果把绳的上端放开，绳将落在桌面上。试证明：在绳下落的过程中，任意时刻作用于桌面的压力，等于已落到桌面上的绳重量的三倍。



证明：

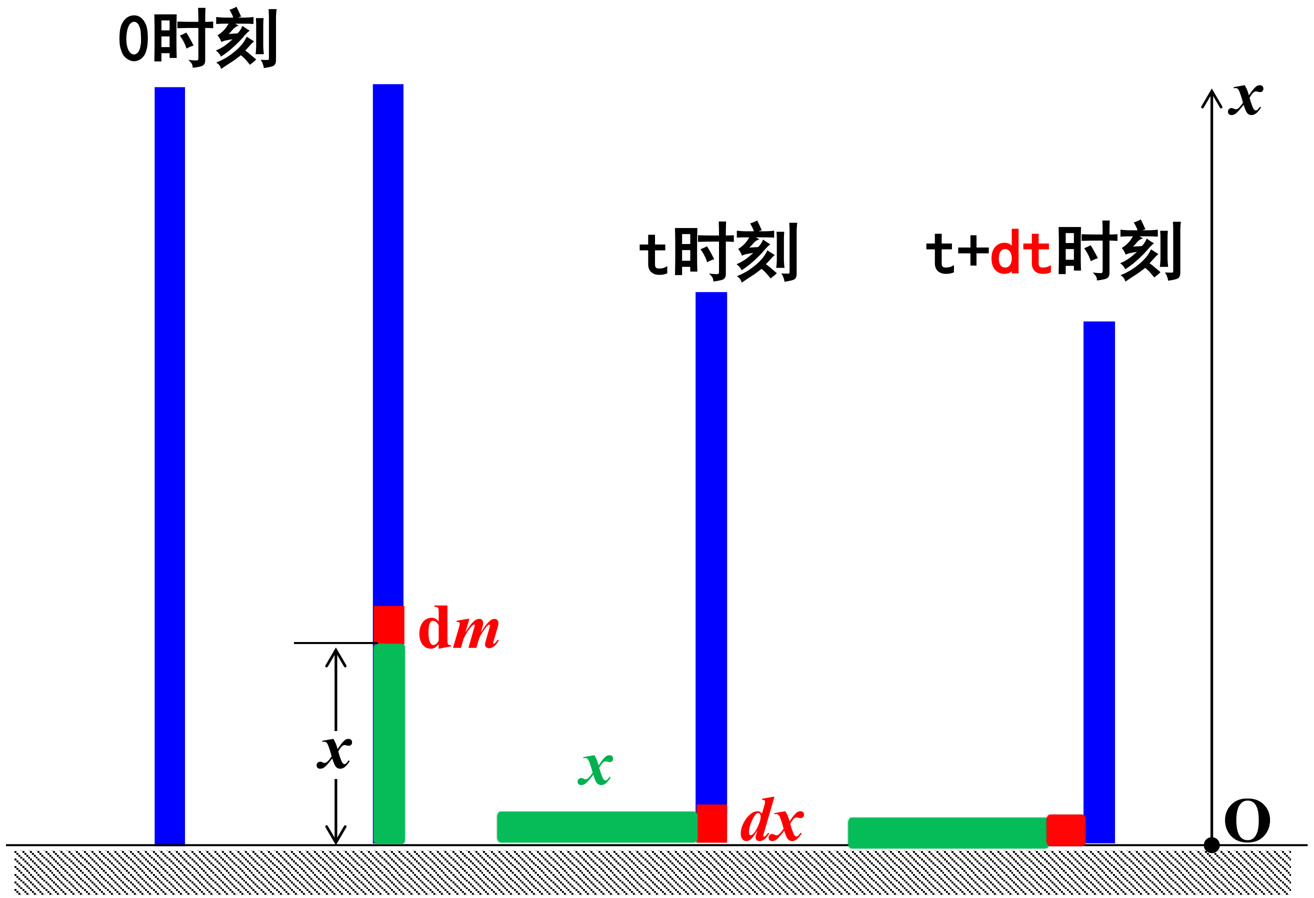
在t时刻落在桌面的细绳长度为x，

在dt时间内将有质量为ρdx(=Mdx/L)

的细绳以速率dx/dt碰到桌面而停止.

在dt时间内，dx段绳子动量的改变量：

$$dP = -\rho dx \cdot \frac{dx}{dt}$$



桌面受力：绳子x的压力

dx段绳子对桌面的冲力

根据动量定理，桌面对细绳的冲力为：

$$F' = \frac{dP}{dt} = \frac{-\rho dx \cdot \frac{dx}{dt}}{dt} = -\rho v^2$$

细绳对桌面的冲力$F = -F'$，即：

$$\left.\begin{aligned} F &= \rho v^2 = \frac{M}{L} v^2 \\ v^2 &= 2gx \end{aligned}\right\} F = 2Mgx / L$$

落到桌面的细绳质量

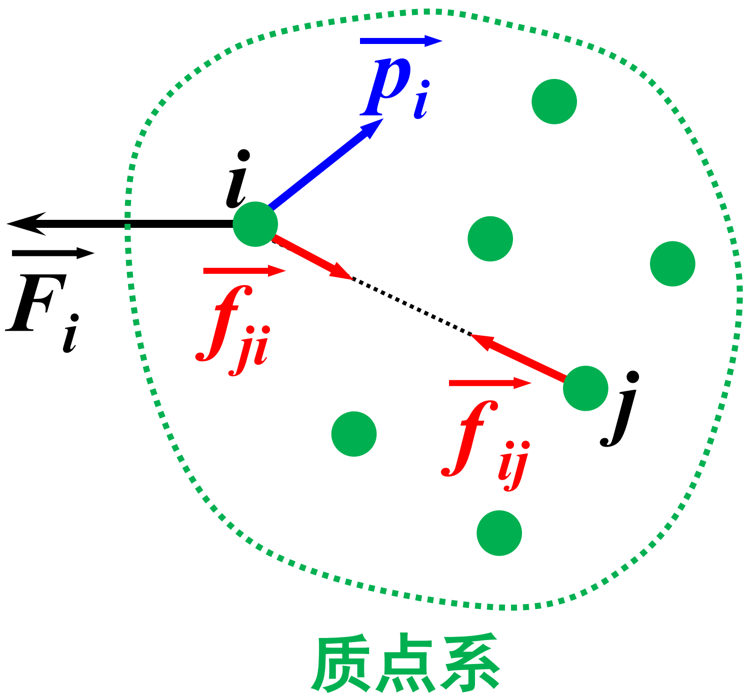
$$m = (M/L)x$$

因此

$$F_{总} = F + mg = 2Mgx/L + Mgx/L = 3mg$$

3.3 质点系动量定理

(theorem of momentum of particle system)

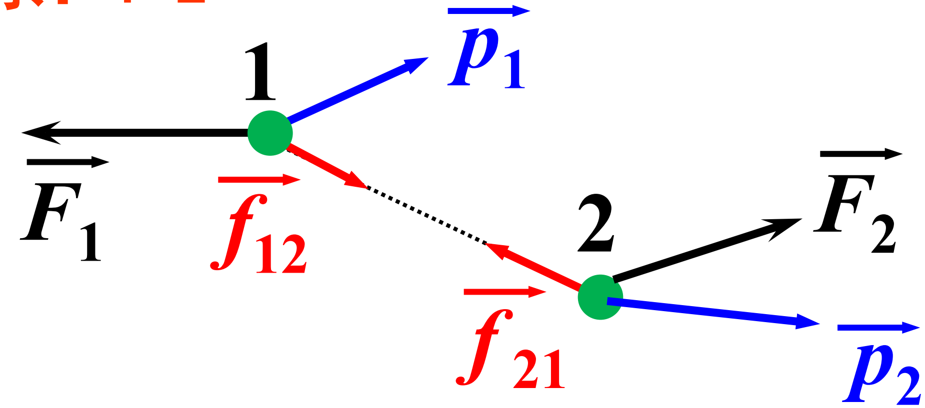


$\vec{F}_i$： 质点i受到的合外力

$\vec{f}_{ji}$： 质点 j对质点i的内力

$\vec{p}_i$： 质点i的动量

质点系：1+2



质点系:1+2

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\left(\vec{F}_1+\vec{F}_2\right)dt=\vec{p}\,'-\vec{p}}$$

质点系动量 $\boxed{\vec{p}=\vec{p}_1+\vec{p}_2}$

质点1： 合力：$\vec{F}_1+\vec{f}_{12}$

t$_1$时刻的动量：$\vec{p}_1$

t$_2$时刻的动量：$\vec{p}_1{}'$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\vec{F}_1+\vec{f}_{12}\right)dt=\vec{p}_1{}'-\vec{p}_1 \quad (1)$$

质点2： 合力：$\vec{F}_2+\vec{f}_{21}$

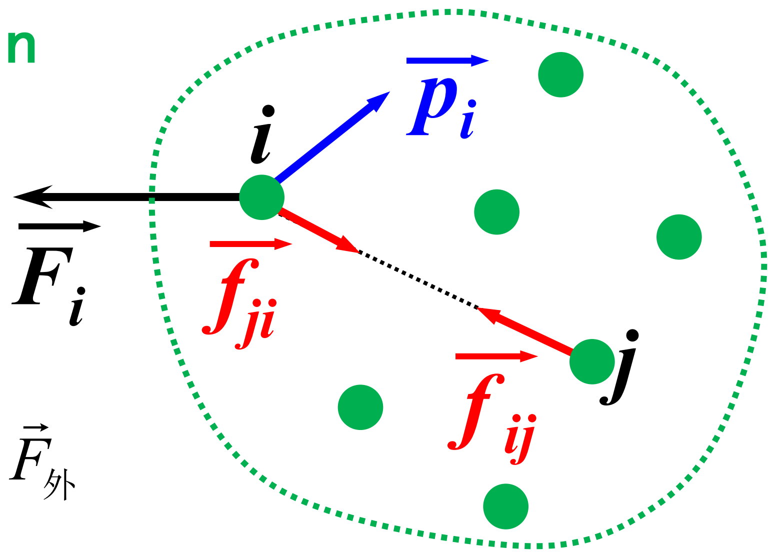
t$_1$时刻的动量：$\vec{p}_2$

t$_2$时刻的动量：$\vec{p}_2{}'$

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\vec{F}_2+\vec{f}_{21}\right)dt=\vec{p}_2{}'-\vec{p}_2 \quad (2)$$

质点系(1+2): $$\int_{t_1}^{t_2}\left(\vec{F}_1+\cancel{\vec{f}_{12}}+\vec{F}_2+\cancel{\vec{f}_{21}}\right)dt=\left(\vec{p}_1{}'+\vec{p}_2{}'\right)-\left(\vec{p}_1+\vec{p}_2\right)$$

质点系：1、2、3、……、n



质点系动量定理

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\left(\sum_i \vec{F}_i\right)dt=\vec{p}\,'-\vec{p}}$$

质点系动量 $\boxed{\vec{p}=\sum_i \vec{p}_i}$ $\qquad \sum_i \vec{F}_i=\vec{F}_{外}$

质点1：$\int_{t_1}^{t_2}\left(\vec{F}_1+\vec{f}_{12}+\vec{f}_{13}+\cdots\cdots+\vec{f}_{1i}+\cdots\cdots+\vec{f}_{1n}\right)dt=\vec{p}_1^{\,'}-\vec{p}_1$

质点2：$\int_{t_1}^{t_2}\left(\vec{F}_2+\vec{f}_{21}+\vec{f}_{23}+\cdots\cdots+\vec{f}_{2i}+\cdots\cdots+\vec{f}_{2n}\right)dt=\vec{p}_2^{\,'}-\vec{p}_2$

⋮

质点i：$\int_{t_1}^{t_2}\left(\vec{F}_i+\vec{f}_{i1}+\vec{f}_{i2}+\cdots\cdots+\vec{f}_{i,i-1}+\cdots\cdots+\vec{f}_{in}\right)dt=\vec{p}_i^{\,'}-\vec{p}_i$

⋮

质点n：$\int_{t_1}^{t_2}\left(\vec{F}_n+\vec{f}_{n1}+\vec{f}_{n2}+\cdots\cdots+\vec{f}_{ni}+\cdots\cdots+\vec{f}_{n,n-1}\right)dt=\vec{p}_n^{\,'}-\vec{p}_n$

质点系:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(\vec{F}_1+\vec{F}_2\cdots\cdots+\vec{F}_n\right)dt=\left(\vec{p}_1^{\,'}+\cdots\cdots+\vec{p}_{\mathrm{n}}^{\,'}\right)-\left(\vec{p}_1+\cdots\cdots+\vec{p}_{\mathrm{n}}\right)$$

质点系动量定理

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{外} \cdot \mathrm{d}t = \vec{P}' - \vec{P}}$$

注： 1. **系统总动量由外力的冲量决定，与内力无关。**

2. **用质点系动量定理处理问题可避开内力。**

质点系的动量守恒定律：

质点系受合外力为零时，质点系的总动量不随时间改变。

当 $\vec{F}_{外} = 0$ **时，得到** $\boxed{\vec{P} = 常矢量}$

几点说明：

1. 动量守恒定律只适用于惯性系?

动量守恒定律是比牛顿定律更普遍、更基本的定律。

2. 若某个方向上合外力为零，则该方向上动量守恒，尽管总动量可能并不守恒。

$$\boldsymbol{F}_x = 0 \qquad p_x = \sum m_i v_{ix} = const.$$

$$\boldsymbol{F}_y = 0 \qquad p_y = \sum m_i v_{iy} = const.$$

$$\boldsymbol{F}_z = 0 \qquad p_z = \sum m_i v_{iz} = const.$$

3. 当外力<<内力且作用时间极短时（如碰撞），可认为动量近似守恒。

解题步骤：

1．选择系统，分析要研究的物理过程；

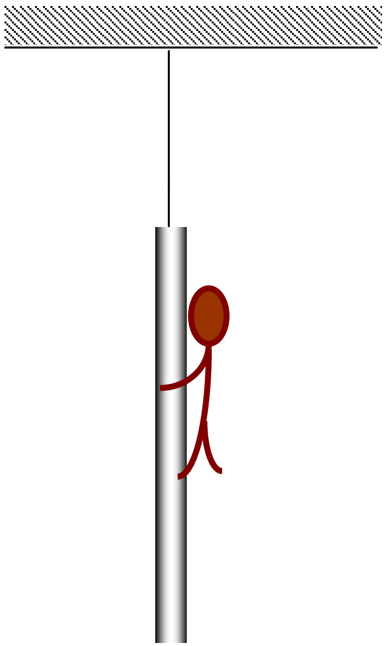
2．进行受力分析，判断守恒条件；

3．确定系统的初动量与末动量；

4．建立坐标系，列方程求解；

5．必要时进行讨论。

例2:如图示，悬绳突然断开，猴子以多大的加速度相对杆上爬，才能看上去不下落?假设猴子和杆的质量分别是m、M。



例2: 如图示，悬绳突然断开，猴子以多大的加速度相对杆上爬，才能看上去不下落?

解： 建坐标，如图所示

受力分析：

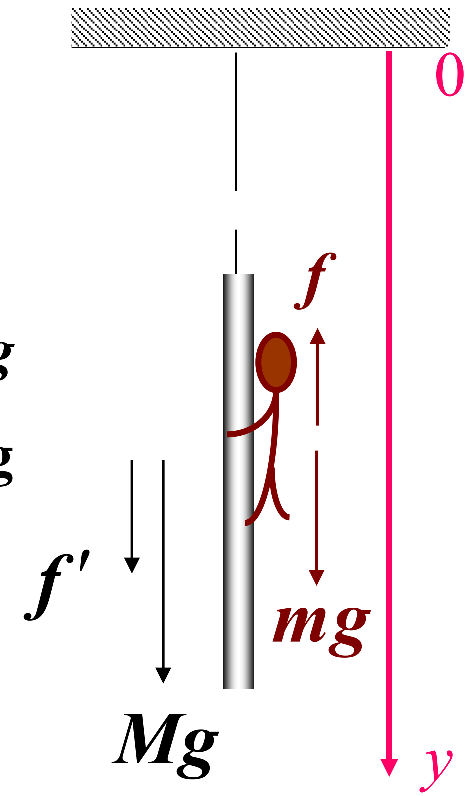
猴子：杆子对其作用力-f、重力mg

杆子：猴子对其作用力f'、重力Mg

用牛顿定律

$$mg - f = ma_m = 0$$

$$Mg + f' = Ma_M = -Ma'$$



得 $$a' = -\frac{m+M}{M}g$$

以地面为参考系

猴子加速度a_m

杆子加速度a_M

以杆子为参考系

猴子加速度a’

解法二：用质点系动量定理

$$\vec{F}_{外} = (m+M)\vec{g}$$

$$= \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2)$$

$$= \frac{d}{dt}[m\vec{u} + M\vec{v}]$$

$$(m+M)\vec{g} = \frac{d(m\vec{u})}{dt} + \frac{d(M\vec{v})}{dt}$$

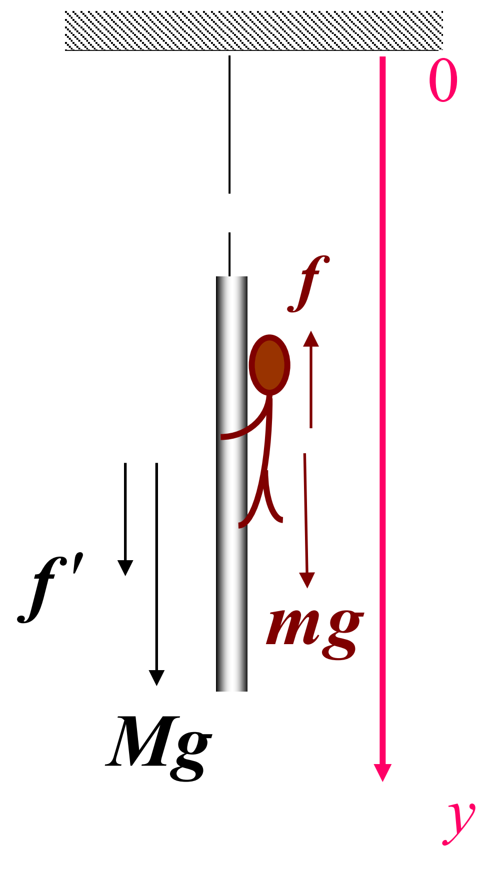
$$= 0 + M\frac{d\vec{v}}{dt}$$

得

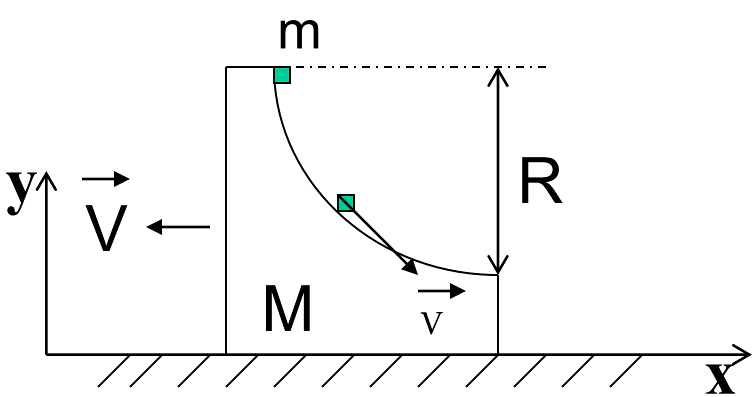
$$a = -\frac{m+M}{M}g$$

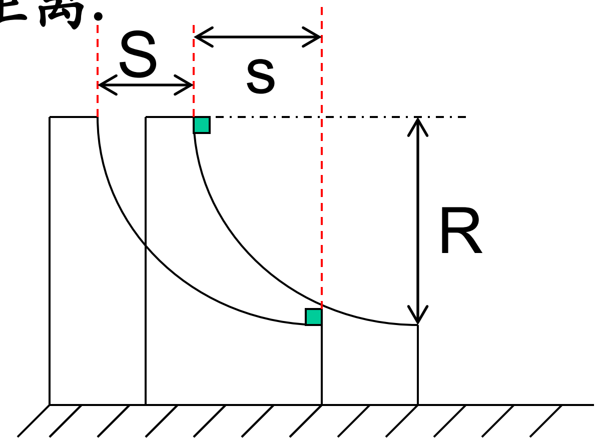
分析：

猴—杆系统



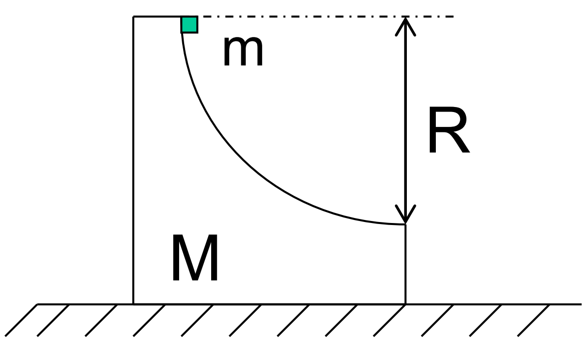
例3: 一个有1/4圆弧滑槽的大物体,质量为M,停在光滑的水平面上;另有一质量为m的小物体从圆弧顶点由静止滑下.求当小物体滑到底时大物体M在水平面上移动的距离.

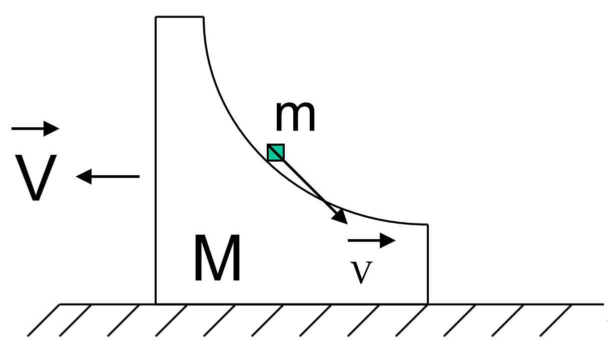


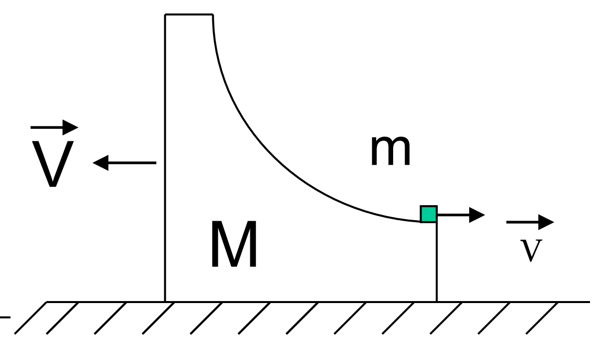


1、选择系统：m+M

分析过程：







2、受力分析： $F_x=0$

系统沿着x方向的动量 $\vec{P}_x =$ 常矢量

3、系统的初动量 $M\vec{V}_{x,0} + m\vec{v}_{x,0}$ =0

在某一个时刻t： $M\vec{V}_{x,\mathrm{t}} + m\vec{v}_{x,\mathrm{t}} = 0$

4、建坐标系，列方程求解

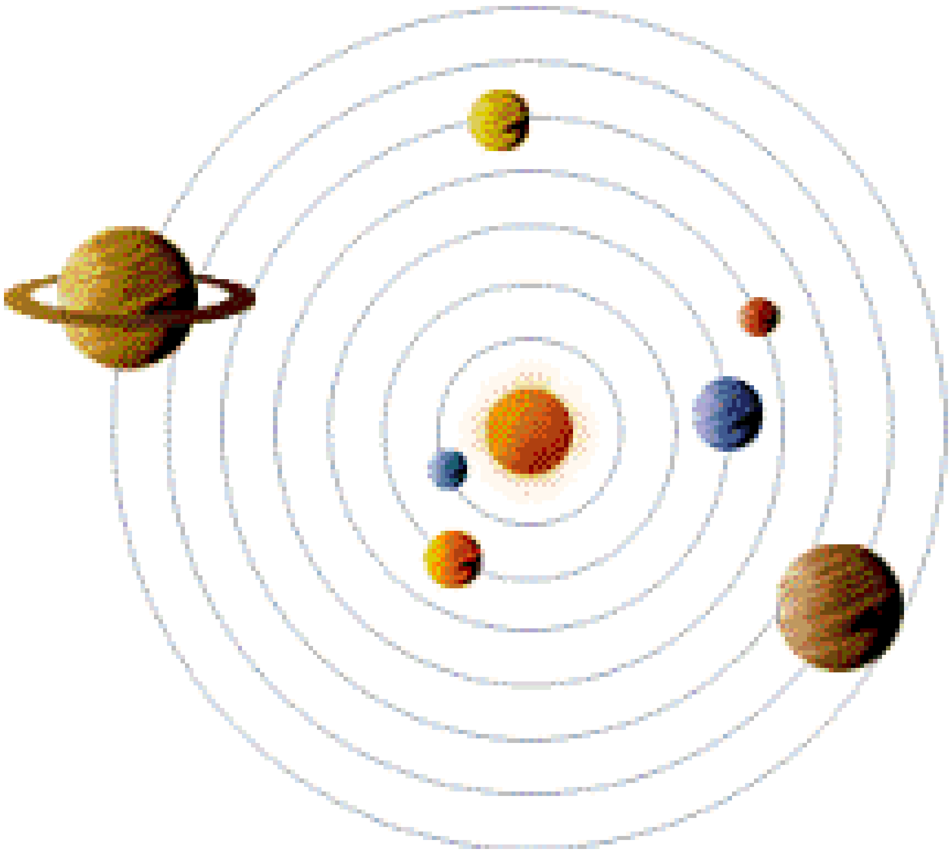
在t时刻： $-MV_{x,\mathrm{t}} + mv_{x,\mathrm{t}} = 0$

$$MV_{x,t}dt = mv_{x,t}dt \qquad MdS = mds$$

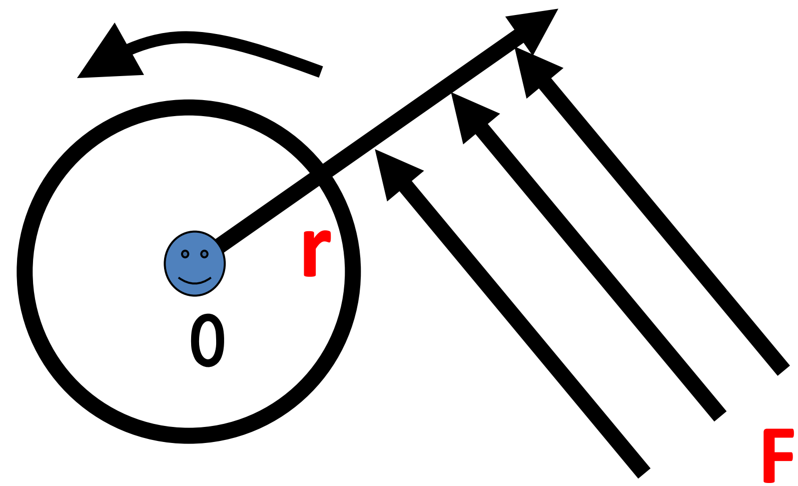
$$MS = ms \qquad S+s=R$$

3.4 质点的角动量

（angular momentum of a particle）

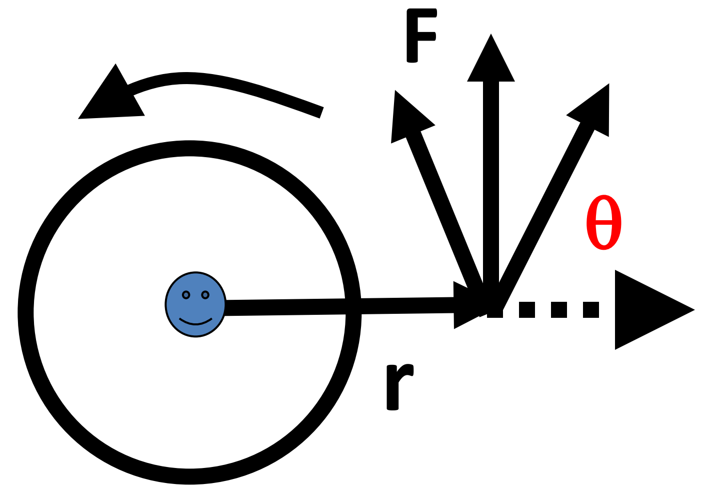


质点的角动量定理



主要参量(F, r, θ)

θ=90°, sinθ=1

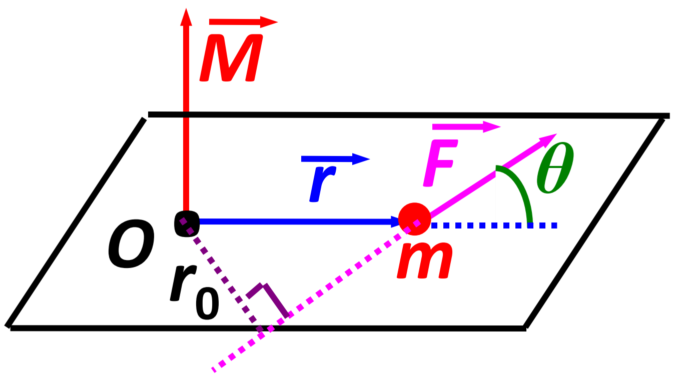


注：转动效果不但与力的大小有关，还与力的位置有关(相对于某一质点)。

力 矩

(moment of force)

力对定点O的力矩：$\boxed{\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}}$



大小：$M=rF\sin\theta$

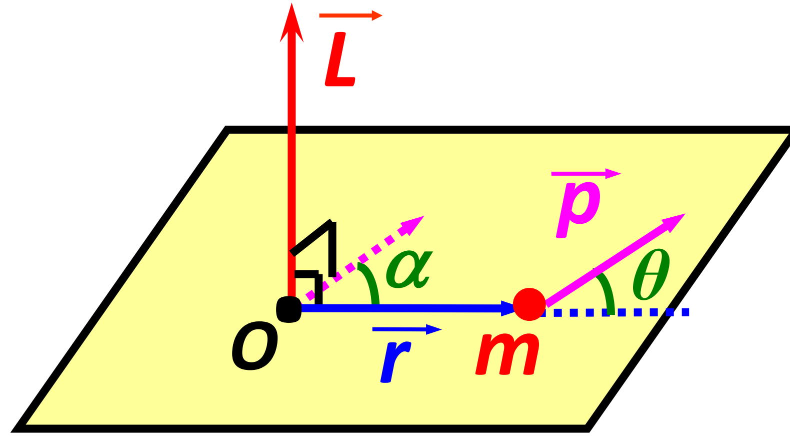
方向：垂直于r，F平面

$r_0=r\sin\theta$ 称为力臂

力矩的大小：$M=rF\sin\theta=r_0F$

角动量

角动量的定义：



$$\boxed{\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times(m\vec{v})}$$

大小：$L=rp\sin\theta=rm\mathrm{v}\sin\theta$

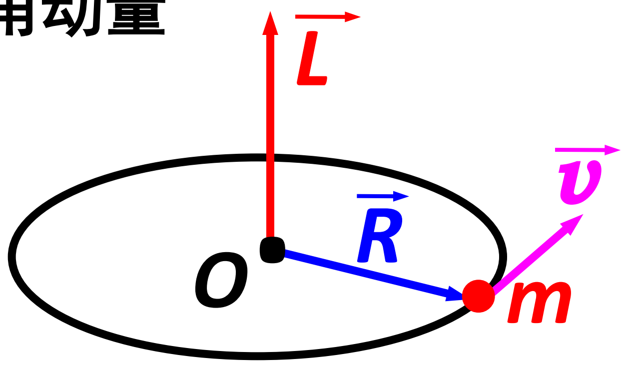
方向：$\perp\vec{r},\vec{p}(\vec{\mathrm{v}})$决定的平面（右螺旋）

单位：kg m²/s

力矩：
$$\left.\begin{aligned}\vec{M}&=\vec{r}\times\vec{F}=\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p})-\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}\\ \vec{M}&=\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p})-\vec{v}\times m\vec{v}\end{aligned}\right\}\ \boxed{\vec{M}=\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p})=\frac{d\vec{L}}{dt}}$$

匀速率圆周运动的角动量

当质点作匀速率圆周运动时，对圆心的角动量



大小：$L = mvR$

方向：⊥圆面

例： 1. 行星受中心恒星的万有引力(中心力)

例如：太阳，地球系统

$L = mvR = 6.0*10^{24} \times 1.5*10^{11} \times 3.0*10^{4}$

2. 电子受原子核的引力(中心力)

3.5 角动量定理、角动量守恒

质点角动量定理

$$\boxed{\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}} \quad \text{或} \quad \boxed{\mathrm{d}\vec{L} = \vec{M}\,\mathrm{d}t} \quad \text{(微分形式)}$$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} \cdot \mathrm{d}t = \vec{L}_2 - \vec{L}_1} \quad \text{(积分形式)}$$

$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\,\mathrm{d}t$ 称为**冲量矩**

——力矩对时间的积累作用