# 第九章

## 重 积 分

一元函数积分学

$$\downarrow$$

多元函数积分学 $\begin{cases} \text{重积分} \\ \text{曲线积分} \\ \text{曲面积分} \end{cases}$

# 第一节

# 二重积分的概念与性质

一、引例

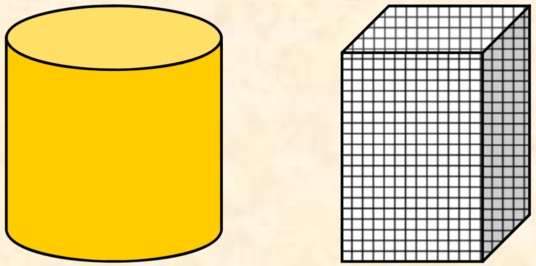
二、二重积分的定义与可积性

三、二重积分的性质

四、曲顶柱体体积的计算

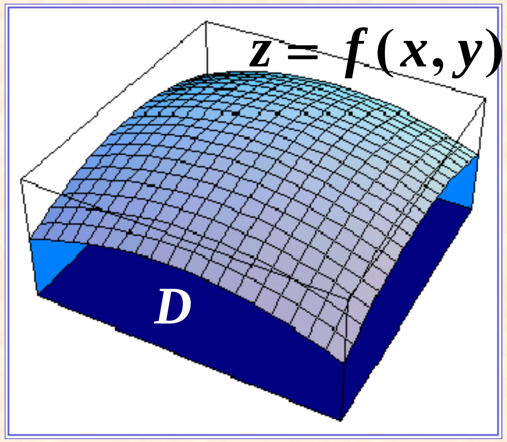
# 一、问题的提出

## 1．曲顶柱体的体积



柱体体积=底面积×高

**特点：平顶.**

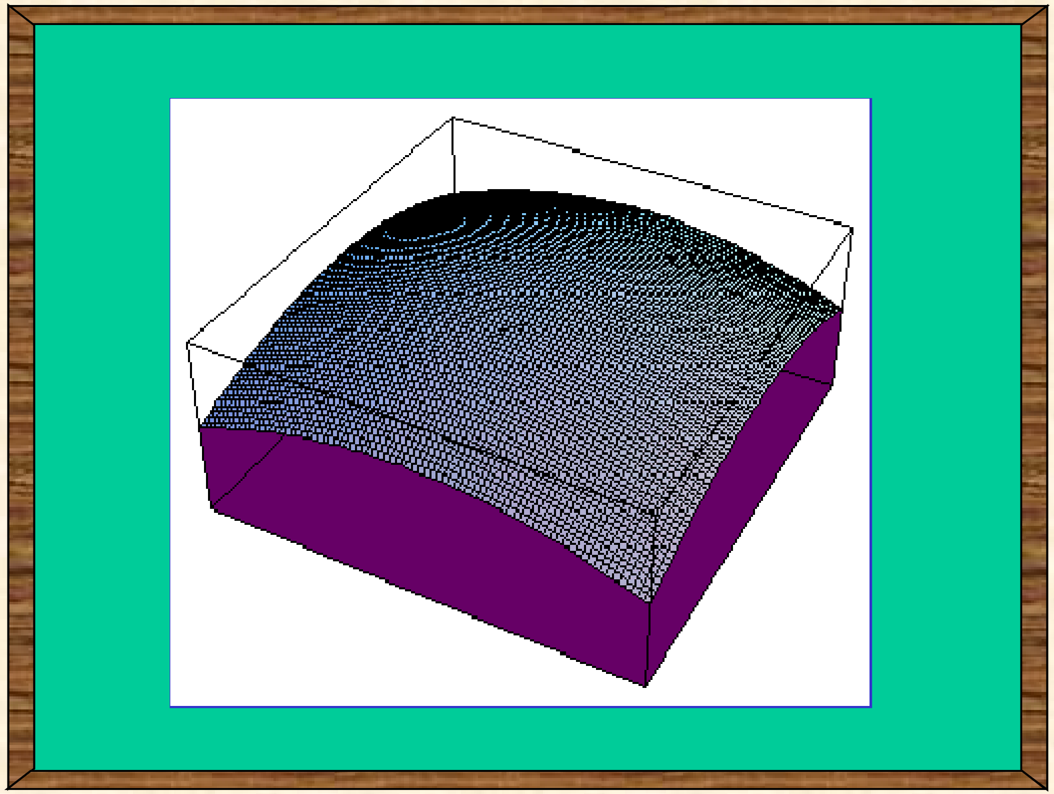



柱体体积=?

**特点：曲顶.**

曲顶柱体

求曲顶柱体的体积采用“分割、求和、取极限”的方法，如下动画演示.



# 曲顶柱体的体积

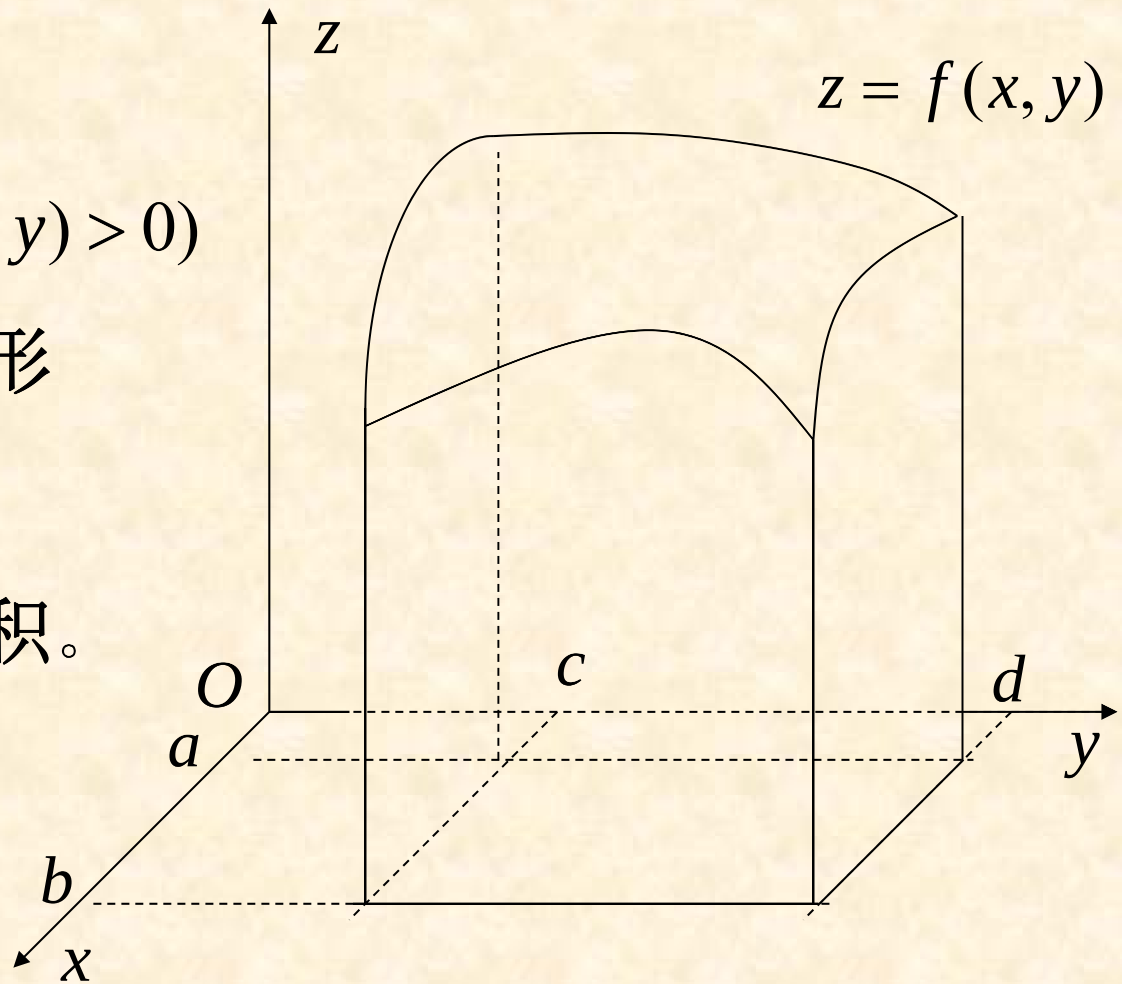
求以曲面

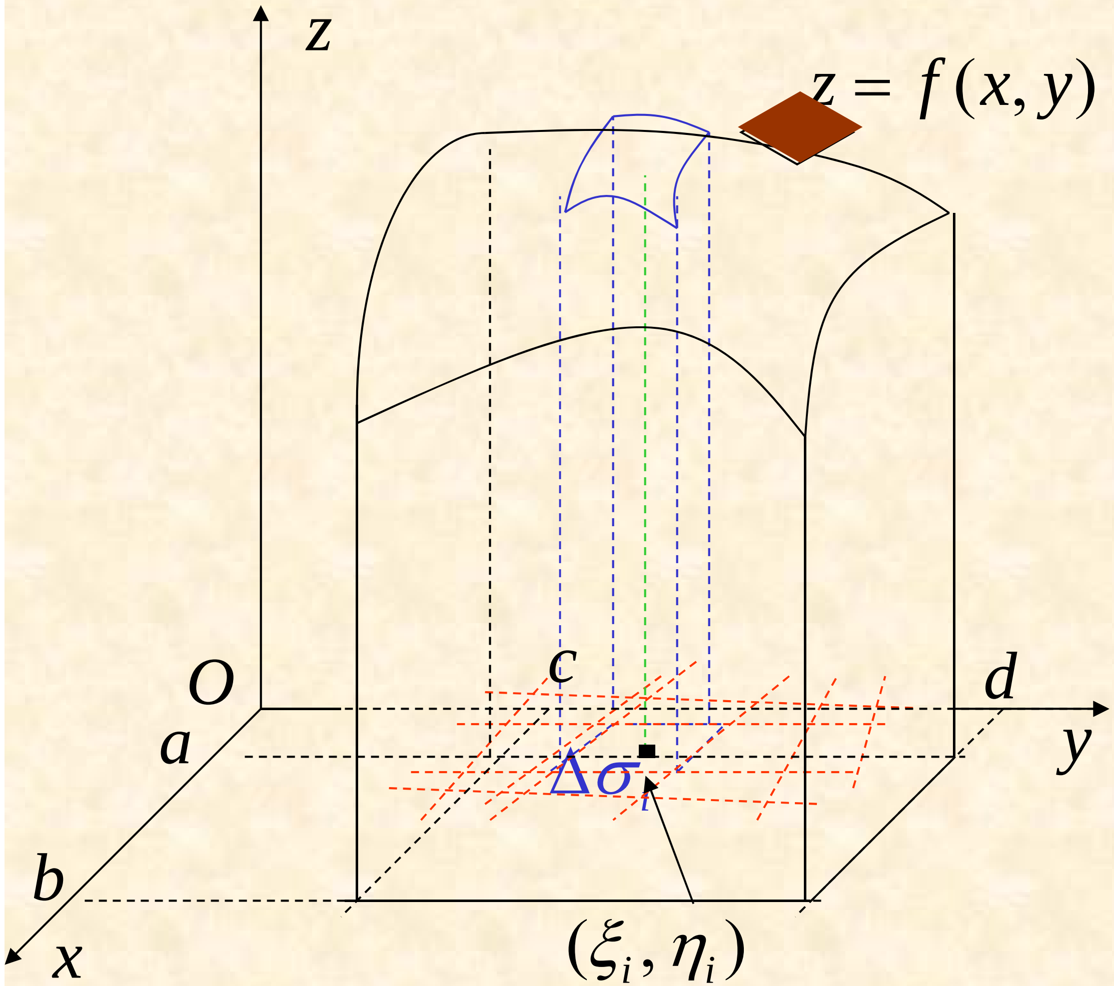
$z = f(x, y), \quad (f(x, y) > 0)$

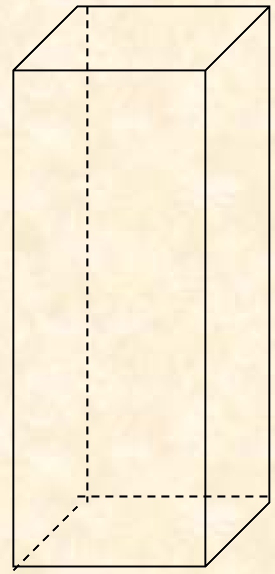
为顶，底面为矩形

$[a, b; c, d]$

的曲顶柱体的体积。





$$\Delta V_i \approx f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

$$V = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

$$V = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

分割 近似代替 求和 取极限

## 求曲顶柱体体积步骤如下：

(1) **分割：**将矩形 $[a,b;c,d]$ 任意分为 n 块可求面积的小块

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$$

其面积仍记为 $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$ 。相应地将曲顶柱体分割成 n 个小曲顶柱体，分别记为 $\Delta V_1, \Delta V_2, \cdots, \Delta V_n$

(2) **近似代替：**在每一小块上任意取一点 $M_i(\xi_i, \eta_i)$ 则小曲顶柱体的体积 $\Delta V_i$ 可用直柱体的体积近似代替，即

$$\Delta V_i \approx f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

(3) **求和：** 把 n 个小曲顶柱体的体积相加，便得到所求曲顶柱体体积的近似值

$$V=\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

(4) **取极限：** 记 $d=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta\sigma_i \text{的直径}\}$， 在和式中令 $d\to 0$

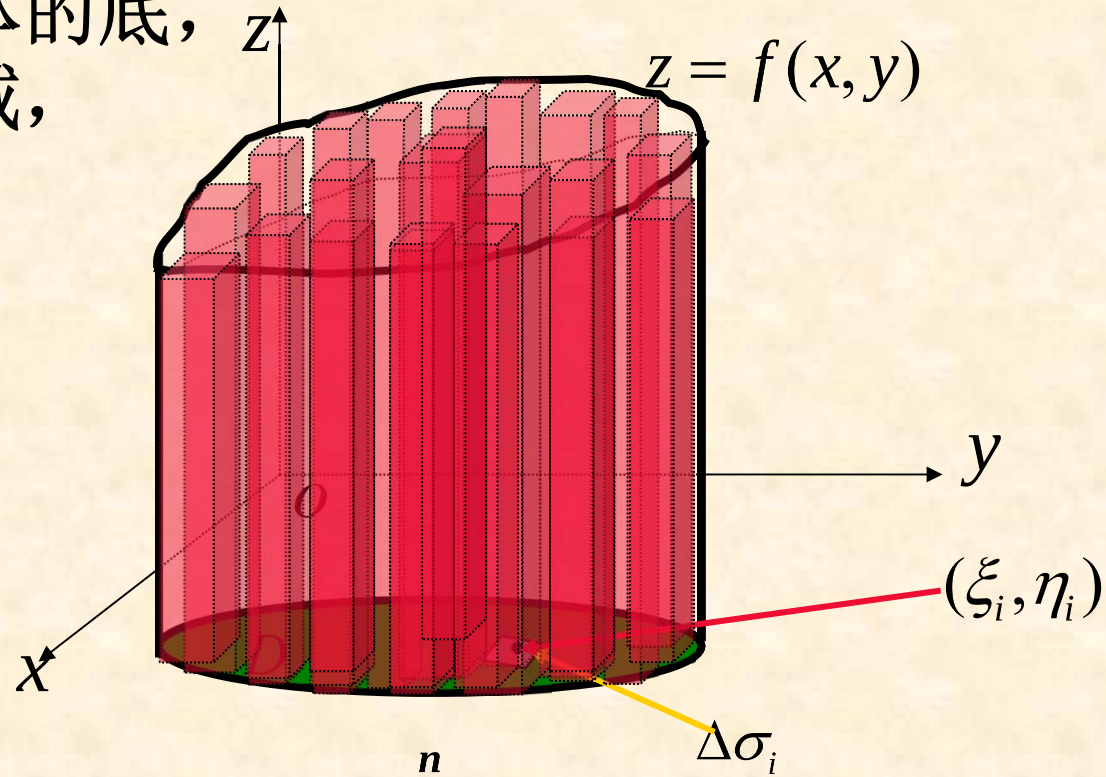
取极限，如果该极限存在，那末此极限值就定义为曲顶柱体的体积。这个和式的极限正好就是上一章引进的二重积分，故所求曲顶柱体的体积，等于相应的二重积分的值：

$$V=\lim_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i=\iint\limits_{[a,b;c,d]} f(x,y)\,dxdy$$

步骤如下：

先分割曲顶柱体的底，并取典型小区域，

用若干个小平顶柱体体积之和近似表示曲顶柱体的体积，




曲顶柱体的体积 $V = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.

# 二、二重积分的概念

定义　设$f(x,y)$是有界闭区域$D$上的有界函数，将闭区域$D$任意分成$n$个小闭区域$\Delta\sigma_1$，$\Delta\sigma_2$，$\cdots$，$\Delta\sigma_n$，其中$\Delta\sigma_i$表示第$i$个小闭区域，也表示它的面积，在每个$\Delta\sigma_i$上任取一点$(\xi_i,\eta_i)$，

作乘积　$f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$，　　$(i=1,2,\cdots,n)$，

并作和　$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$，

如果当各小闭区域的直径中的最大值$\lambda$趋近于零时，这和式的极限存在，则称此极限为函数$f(x,y)$在闭区域 D 上的**二重积分**，

记为$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma$，

即$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.

积分区域

被积函数

积分变量

被积表达式

面积元素

积分和

## 对二重积分定义的说明：

(1) 在二重积分的定义中，对闭区域的划分是任意的.

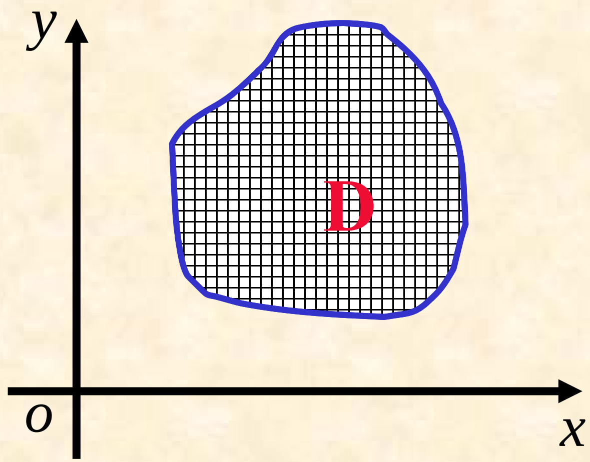
(2)当 $f(x,y)$在闭区域上连续时，定义中和式的极限必存在，即二重积分必存在.

## 二重积分的几何意义

当被积函数大于零时，二重积分是柱体的体积.

当被积函数小于零时，二重积分是柱体的体积的负值.

在直角坐标系下用平行于坐标轴的直线网来划分区域**D**，




则面积元素为 $d\sigma = dxdy$

故二重积分可写为

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_D f(x,y)dxdy$$

## 2．求平面薄片的质量

设有一平面薄片，占有$xoy$面上的闭区域$D$，在点$(x,y)$处的面密度为$\rho(x,y)$，假定$\rho(x,y)$在$D$上连续，平面薄片的质量为多少？

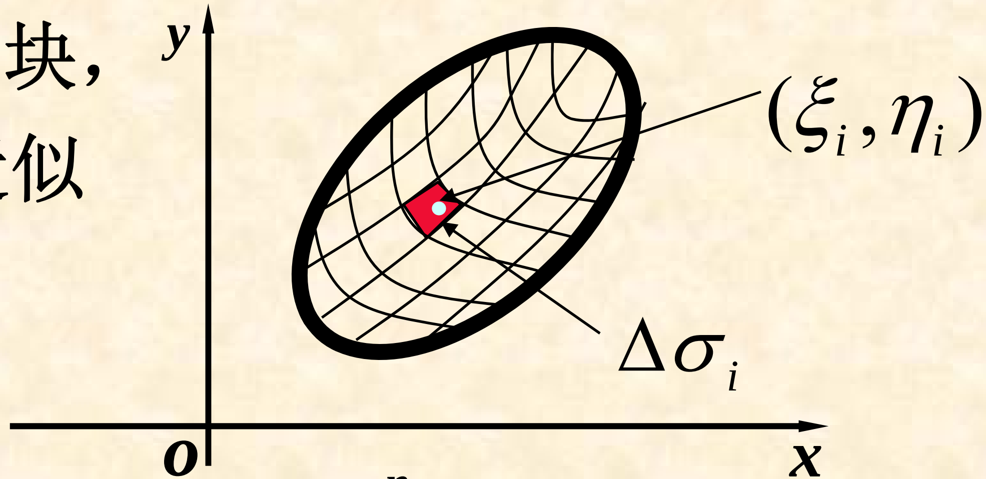
将薄片分割成若干小块，

取典型小块，将其近似

看作均匀薄片，

所有小块质量之和

近似等于薄片总质量



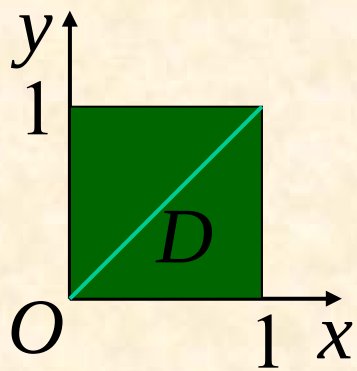

$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i.$$

**二重积分存在定理：** **(证明略)**

**定理1.** 若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $D$ 上连续, 则 $f(x,y)$ 在 $D$ 上**可积**.

定理2. 若有界函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 $D$ 上除去有限个点或有限条光滑曲线外都连续，则 $f(x,y)$ 在 $D$ 上可积.

**例如**, $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x-y}$ 在 $D:\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\end{cases}$




上二重积分存在；但 $f(x,y)=\dfrac{1}{x-y}$ 在 $D$ 上二重积分不存在 .

# 三、二重积分的性质

（二重积分与定积分有类似的性质）

性质１　当$k$为常数时,

$$\iint\limits_D kf(x,y)d\sigma = k\iint\limits_D f(x,y)d\sigma.$$

性质２　$\iint\limits_D [f(x,y)\pm g(x,y)]d\sigma$

$$= \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \pm \iint\limits_D g(x,y)d\sigma.$$

性质３　对区域具有可加性（$D = D_1 + D_2$）

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)d\sigma.$$

性质４　若 $\sigma$ 为D的面积，$\sigma = \iint_D 1 \cdot d\sigma = \iint_D d\sigma.$

性质５　若在D上 $f(x,y) \le g(x,y)$,

则有 $\iint_D f(x,y)d\sigma \le \iint_D g(x,y)d\sigma.$

特殊地　$\left|\iint_D f(x,y)d\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|d\sigma.$

性质６ 设$M$、$m$分别是$f(x,y)$在闭区域 D 上的最大值和最小值，$\sigma$为 D 的面积，则

$$m\sigma \le \iint_D f(x,y)d\sigma \le M\sigma$$

（二重积分估值不等式）

性质７ 设函数$f(x,y)$在闭区域$D$上连续，$\sigma$ 为$D$的面积，则在 D 上至少存在一点$(\xi,\eta)$使得

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\cdot\sigma$$

（二重积分中值定理）

例 1 不作计算，估计 $I=\iint\limits_D e^{(x^2+y^2)}d\sigma$ 的值，

其中$D$是椭圆闭区域：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \quad (0<b<a).$

**解** 区域 $D$ 的面积$\sigma=ab\pi$ ，

在$D$上 $\because 0\le x^2+y^2\le a^2,$

$$\therefore 1=e^0\le e^{x^2+y^2}\le e^{a^2},$$

由性质 6 知 $\sigma\le\iint\limits_D e^{(x^2+y^2)}d\sigma\le\sigma\cdot e^{a^2},$

$$ab\pi\le\iint\limits_D e^{(x^2+y^2)}d\sigma\le ab\pi e^{a^2}.$$

例 2　估计$I=\iint\limits_D \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$的值，

其中 D：　$0 \le x \le 1,\quad 0 \le y \le 2.$

解　$\because f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{(x+y)^2+16}}$，　区域面积$\sigma=2$,

在$D$上$f(x,y)$的最大值　$M=\frac{1}{4}\qquad (x=y=0)$

$f(x,y)$的最小值　$m=\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{1}{5}\quad (x=1, y=2)$

故$\frac{2}{5}\le I \le \frac{2}{4}\quad \Rightarrow 0.4 \le I \le 0.5.$

例 3 判断 $\iint\limits_{r \le |x|+|y| \le 1} \ln(x^2+y^2)dxdy$ 的符号.

解 当 $r \le |x|+|y| \le 1$ 时，$0 < x^2+y^2 \le (|x|+|y|)^2 \le 1$,

故 $\ln(x^2+y^2) \le 0$;

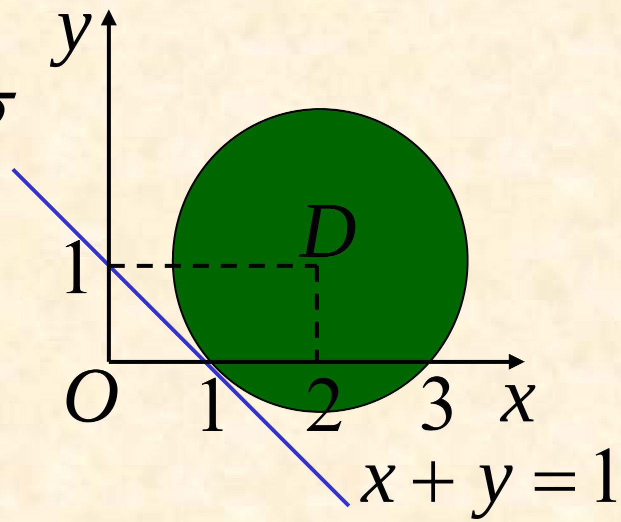
又当 $|x|+|y| < 1$ 时，$\ln(x^2+y^2) < 0$,

于是 $\iint\limits_{r \le |x|+|y| \le 1} \ln(x^2+y^2)dxdy < 0$.

**例4. 比较下列积分的大小:**

$$\iint_D (x+y)^2 \,\mathrm{d}\sigma\,, \quad \iint_D (x+y)^3 \,\mathrm{d}\sigma$$

**其中** $D:(x-2)^2+(y-1)^2 \le 2$




**解: 积分域 *D* 的边界为圆周**

$$(x-2)^2+(y-1)^2=2$$

**它在与 *x* 轴的交点 (1,0) 处与直线** $x+y=1$ 相切.

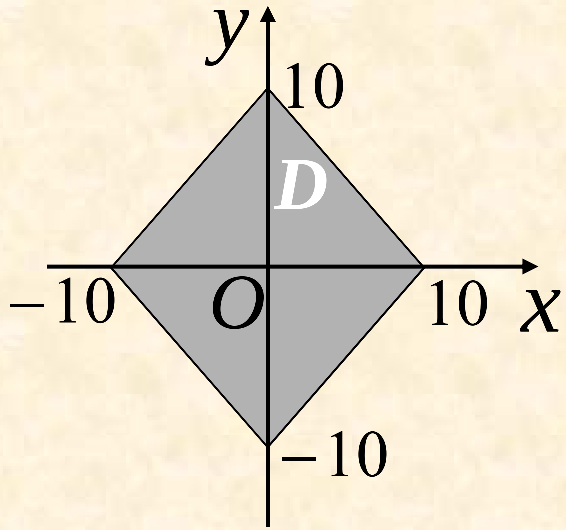
**而域 *D* 位于直线的上方, 故在 *D* 上** $x+y\ge 1$, **从而**

$$(x+y)^2 \le (x+y)^3$$

$$\therefore \quad \iint_D (x+y)^2 \,\mathrm{d}\sigma \le \iint_D (x+y)^3 \,\mathrm{d}\sigma$$

例5. **估计下列积分之值**

$$I=\iint_D \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{100+\cos^2 x+\cos^2 y} \qquad D: |x|+|y|\le 10$$




**解: $D$ 的面积为** $\sigma=(10\sqrt{2})^2=200$

由于

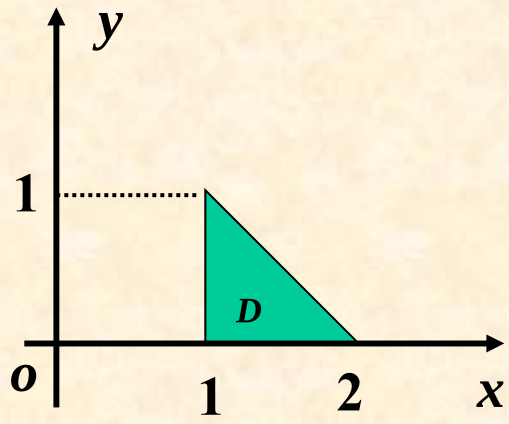
$$\frac{1}{102}\le\frac{1}{100+\cos^2 x+\cos^2 y}\le\frac{1}{100}$$

$\Big\downarrow$ **积分性质5**

$$\frac{200}{102}\le I\le\frac{200}{100}$$

即: $1.96\le I\le 2$

例 6　比较积分$\iint\limits_D \ln(x+y)d\sigma$与$\iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$的大小，其中 D 是三角形闭区域，三顶点各为(1,0) (1,1), (2,0).




**解** 三角形斜边方程　$x+y=2$

在 D 内有　$1 \le x+y \le 2 < e$,

故 $\ln(x+y) < 1$,

于是$\ln(x+y) > [\ln(x+y)]^2$,

因此　$\iint\limits_D \ln(x+y)d\sigma > \iint\limits_D [\ln(x+y)]^2 d\sigma$.

## 4。关于对称性

利用对称性来简化重积分的计算是十分有效的，它与利用奇偶性来简化定积分的计算是一样的，不过重积分的情况比较复杂，在运用对称性是要兼顾被积分函数和积分区域两个方面，不可误用

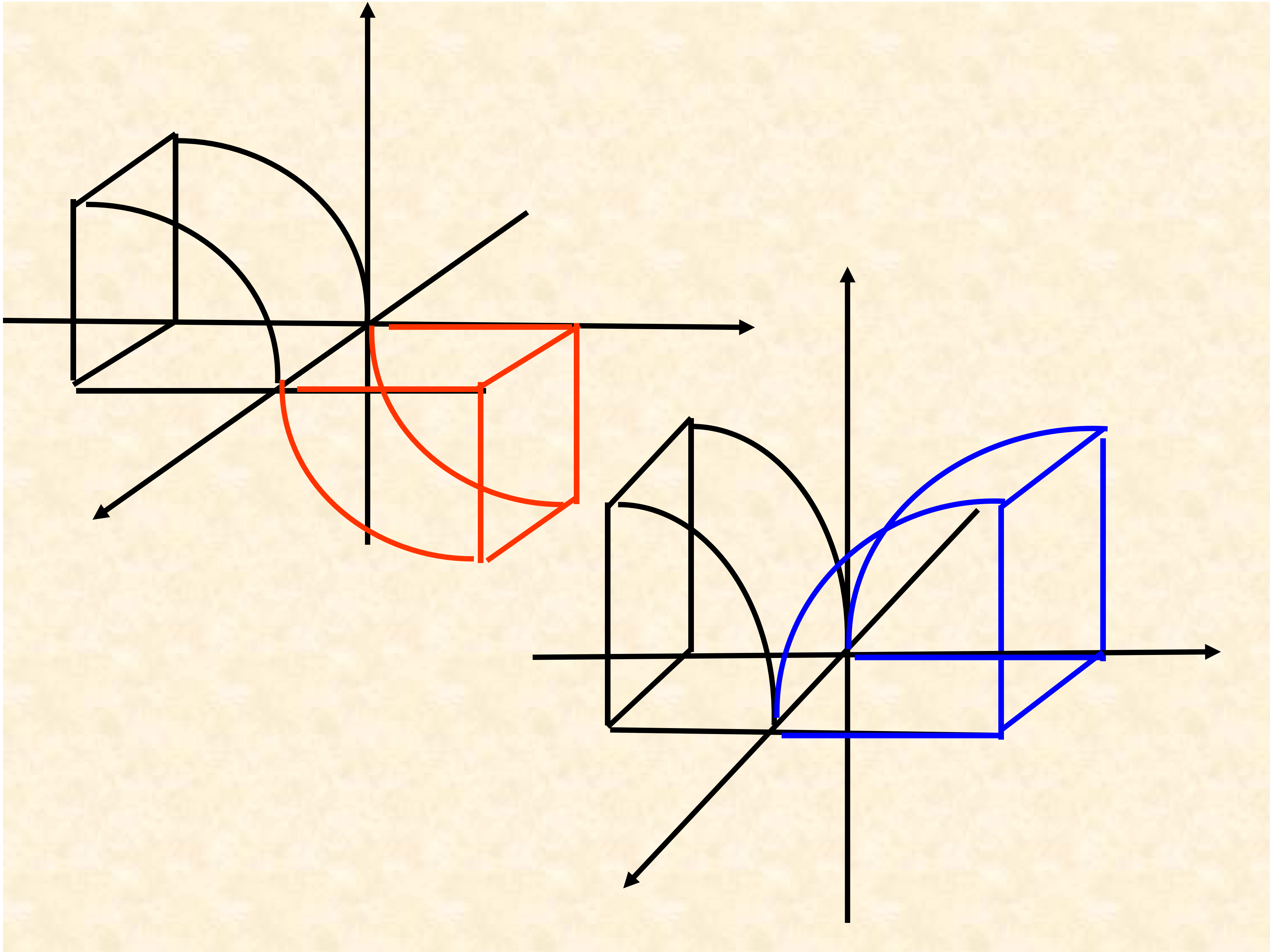
对 $I = \iint\limits_D f(x, y)dxdy$

①若D关于 $x$ 轴对称

(1)当 $f(x,-y) = -f(x,y)$ 时 $I = 0$

(2)当 $f(x,-y) = f(x,y)$ 时 $I = 2\iint\limits_{D_2} f(x,y)dxdy$

$$D_2 = \{(x,y) \in D, y \geq 0\}$$



②若D关于 $y$ 轴对称

(1)当 $f(-x,y)=-f(x,y)$ 时 $I=0$

(2)当 $f(-x,y)=f(x,y)$ 时 $I=2\iint\limits_{D_1} f(x,y)dxdy$

$$D_1=\{(x,y)\mid(x,y)\in D, x\geq 0\}$$

③若D关于原点对称

(1)当 $f(-x,-y)=-f(x,y)$ 时 $I=0$

(2)当 $f(-x,-y)=f(x,y)$ 时 $I=4\iint\limits_{D_3} f(x,y)dxdy$

$$D_3=\{(x,y)\in D, x\geq 0, y\geq 0\}$$

④若 D 关于直线 $y=x$ 对称

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D f(y,x)dxdy$$

——称为关于积分变量的轮换对称性

是多元积分所独有的性质

①、②、③简单地说就是

奇函数关于对称域的积分等于0，偶函数关于对称域的积分等于对称的部分区域上积分的两倍，完全类似于 对称区间上奇偶函数的定积分的性质

简述为“你对称，我奇偶”

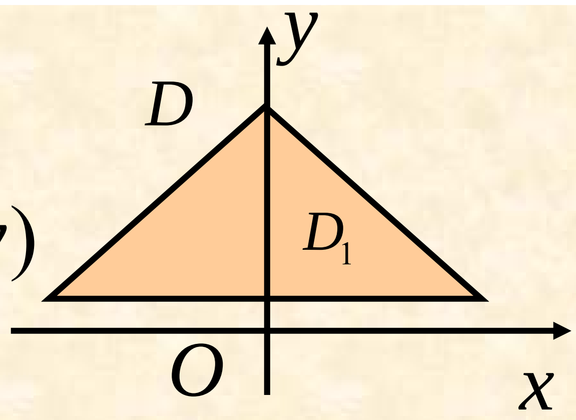
## 一、 常用的有关二重积分的对称性定理

**定义 1：** 若二元函数 $f(x,y)$ 的定义域 $D$ 关于 $y$ 轴对称，且满足 $f(-x,y)\equiv -f(x,y)$（或 $f(-x,y)\equiv f(x,y)$），则称 $f(x,y)$ 关于 $x$ 为奇（偶）函数。

**定义 2：** 若二元函数 $f(x,y)$ 的定义域 $D$ 关于 $x$ 轴对称，且满足 $f(x,-y)\equiv -f(x,y)$（或 $f(x,-y)\equiv f(x,y)$），则称 $f(x,y)$ 关于 $y$ 为奇（偶）函数。

**定义 3：** 若二元函数 $f(x,y)$ 的定义域 $D$ 关于直线 $y=x$ 对称，且满足 $f(x,y)\equiv f(y,x)$ 则称 $f(x,y)$ 关于 $x$ 和 $y$ 对称。

**定理 1**

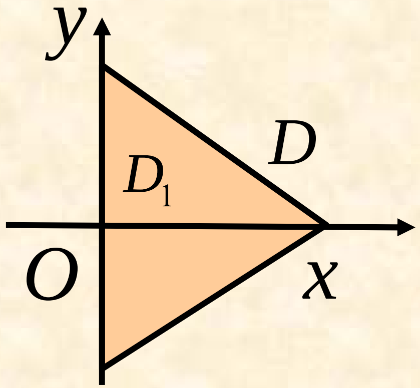



若有界闭区域$D$关于$y$ 轴对称, $f(x, y)$ 在区域 $D$ 上连续， 则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \begin{cases} 0 & \text{当 } f(x,y) \text{ 关于} x \text{ 为奇函数时} \\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y & \text{当} f(x,y) \text{ 关于} x \text{ 为偶函数时} \end{cases}$$

$$D_1 = \{(x, y) \in D \mid x \geq 0\}$$

**定理** 1′



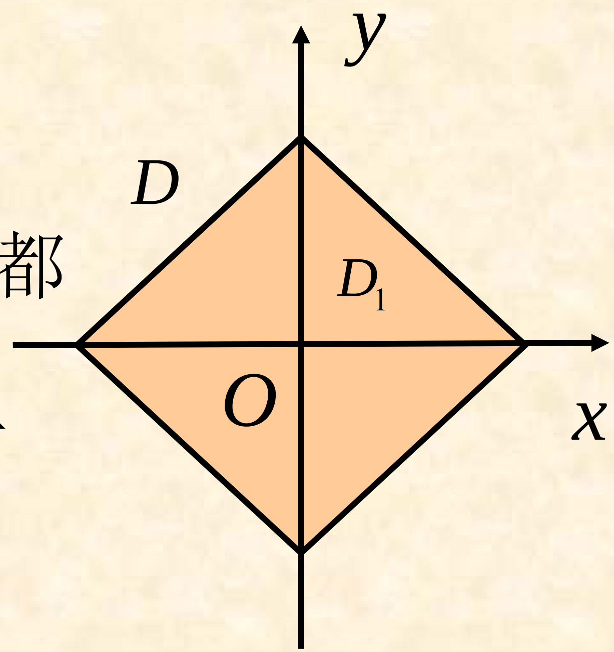

若有界闭区域 $D$ 关于 $x$ 轴对称，$f(x,y)$ 在区域 $D$ 上连续， 则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\begin{cases}0 & \text{当 } f(x,y) \text{ 关于} y \text{ 为奇函数时}\\ 2\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y & \text{当 } f(x,y) \text{ 关于 } y \text{ 为偶函数时}\end{cases}$$

$D_1=\{(x,y)\in D \mid y\geq 0\}$

**推论 1.1**

若 有界闭区域 $D$ 关于 $x$ 轴 和 $y$ 轴都对称，$f(x,y)$ 在区域 $D$ 上连续，且关于 $x$ 和 $y$ 均为偶函数，则

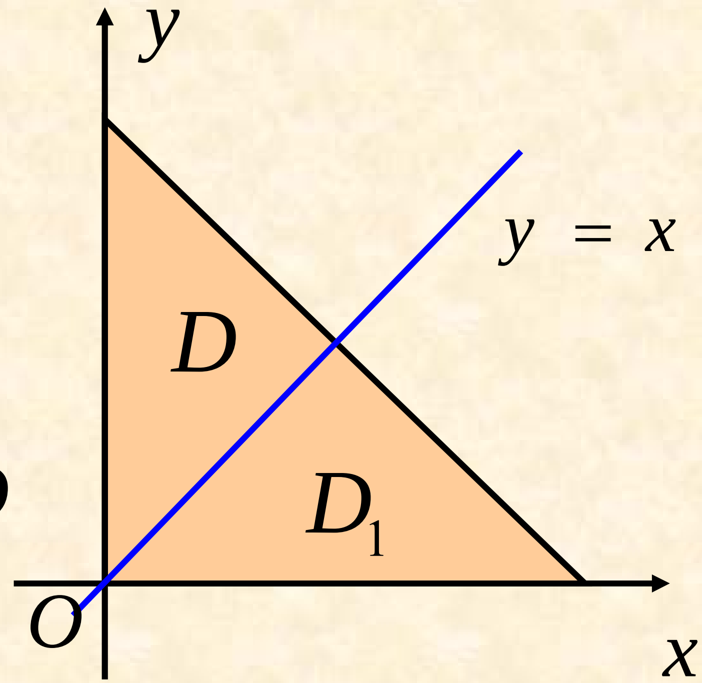



$$\boxed{\iint\limits_{D} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 4\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}$$

$$D_1 = \{(x,y)\in D \mid x\geq 0, y\geq 0\}$$

**定理 2**

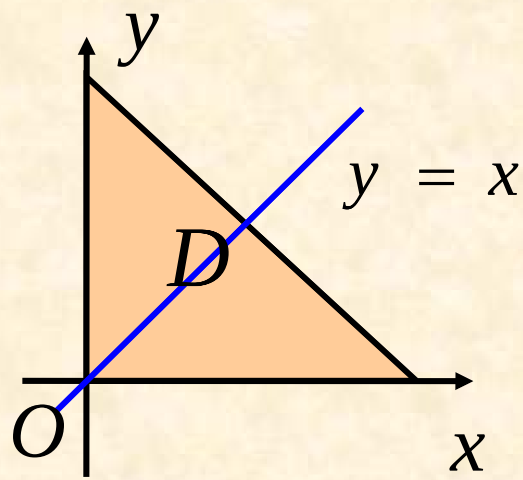
若有界闭区域 $D$ 与区域 $D_1$ 关于直线 $y = x$ 对称，$f(x,y)$ 在区域 $D$ 上连续，则




$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D_1} f(y,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

**推论 2.1**

若有界闭区域$D$关于直线$y=x$对称，$f(x,y)$在区域$D$上连续，则




$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_D f(y,x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

## 二、定理的应用

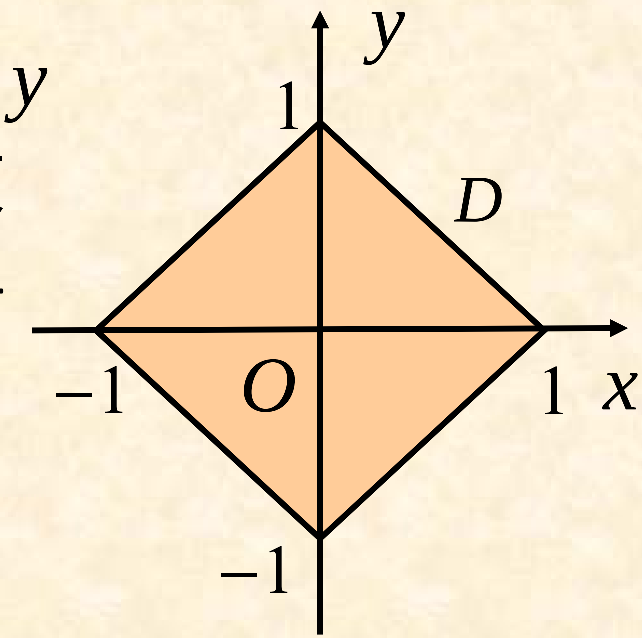
例1. 计算 $I=\iint\limits_D (x+y^3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)\,\big|\,|x|+|y|\le 1\}$.

解： $I=\iint\limits_D (x+y^3)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint\limits_D y^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$=I_1+I_2$,

如图，由于积分区域 $D$ 关于 $x$ 轴, $y$ 轴都对称，且 $I_1$ 和 $I_2$ 中的被积函数分别关于 $x, y$ 是奇函数，根据定理1和定理1′得

$I=I_1+I_2=0+0=0.$



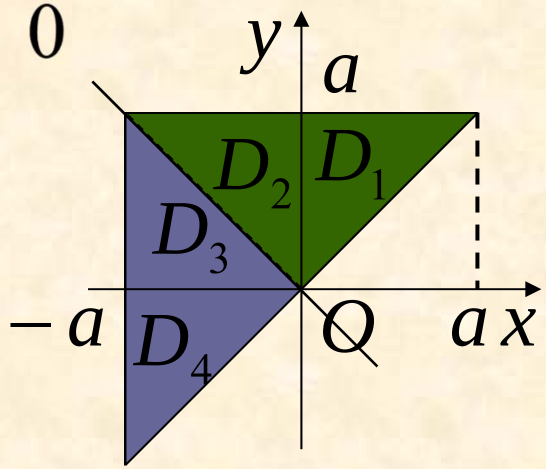
**例2.** 设有平面闭区域 $D=\{(x,y)\,|\,-a\le x\le a, x\le y\le a\}$,

$D_1=\{(x,y)\,|\,0\le x\le a, x\le y\le a\}$, 则

$\iint_D (xy+\cos x\sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=$ ____A____.

(A) $2\iint_{D_1}\cos x\sin y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ (B) $2\iint_{D_1} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

(C) $4\iint_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ (D) 0




提示: 如图，$D=D_1\cup D_2\cup D_3\cup D_4$.