大学物理

Δ § 4.2 动能定理（kinetic energy theorem）

▲ 对质点，由牛顿第二定律

$$\boxed{\begin{aligned} dA &= F \bullet dr = \frac{dp}{dt} \bullet dr \\ &= mvdv = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{E_k = \frac{1}{2}m\upsilon^2}}$$

—— 动能

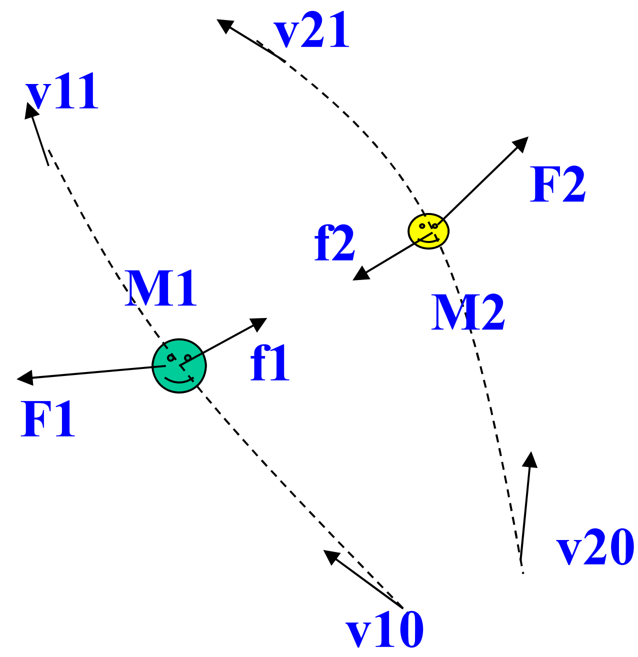
$$\left.\begin{aligned} &\boxed{\boldsymbol{dA = dE_k}} \\ &\boxed{\boldsymbol{A_{12} = E_{k2} - E_{k1}}} \end{aligned}\right\} \text{动能定理}$$

动能定理（或功能定理）：合外力对质点做的功等于质点动能的增量

▲ 对质点系

m1：$\boxed{\int_0^1 F_1 \bullet dr + \int_0^1 f_1 \bullet dr = \frac{1}{2}m_1 v_{11}^2 - \frac{1}{2}m_1 v_{10}^2}$

m2：$\boxed{\int_0^1 F_2 \bullet dr + \int_0^1 f_2 \bullet dr = \frac{1}{2}m_2 v_{21}^2 - \frac{1}{2}m_2 v_{20}^2}$



$$\boxed{A_{外} + A_{内} = E_{k2} - E_{k1}}$$

质点系动能定理

注意：内力虽成对出现，但内力功的和不一定为零（各质点位移不一定相同）。

内力能改变系统的总动能，但不能改变系统的总动量

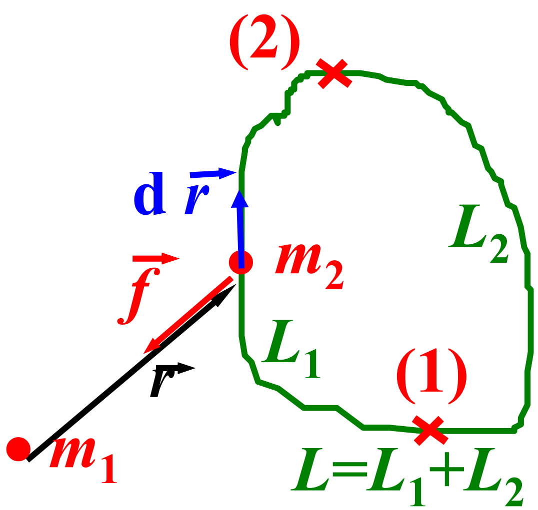
§ 4.3 保守力（conservative force）与势能（potential energy）

一. 定义

如果一力的功与相对移动的路径无关，而只决定于相互作用物体的始末相对位置，这样的力称为保守力。

若 $\vec{f}$为保守力，　　则：$\int_{(1)\,L_1}^{(2)} \vec{f}\cdot d\vec{r} = \int_{(1)\,L_2}^{(2)} \vec{f}\cdot d\vec{r}$

$$\int_{(1)\,L_1}^{(2)} \vec{f}\cdot d\vec{r} = -\int_{(2)\,L_2}^{(1)} \vec{f}\cdot d\vec{r}$$



$\Rightarrow$ $\boxed{\oint_L \vec{f}\cdot d\vec{r} = 0}$ （此式也可作为保守力的定义）

闭合回路积分为零

利用保守力的功与路径无关的特点，可引入“势能”（**potential energy**）的概念。

一. 系统的势能 E_p

定义：　　系统由位形(1)变到位形(2)的过程中，其势能的减少(增量的负值)等于保守内力的功。

$$\boxed{E_{p1}-E_{p2}=-\Delta E_p=A_{保12}}$$

若规定系统在位形（0）的势能为零，则：

$$\boxed{E_{p1}=\int_{(1)}^{(0)}\vec{f}_{保}\cdot \mathrm{d}\vec{r}}$$

说明：

1.势能属于相互作用的系统；

2.势能不依赖于参考系的选择，不要将势能零点的选择与参考系的选择相混淆。

二. 几种势能

1.万有引力势能

$$\boxed{E_p(r) = -\frac{GMm}{r} + C}$$

令 $E_p(\infty) = 0$，则 $C = 0$，

有

$$\boxed{E_p(r) = -\frac{GMm}{r}}$$

2.重力势能

$$\boxed{E_p(h) = mgh + C}$$

令 $E_p(0) = 0$， 有 $\boxed{E_p(h) = mgh}$

3.弹性势能

$$\boxed{E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 + C}$$

令 $E_p(0) = 0$，有 $\boxed{E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2}$

§ 4.4 机械能守恒定律

一. 功能原理（work-energy theorem）

对质点系有：$$\boxed{A_{外} + A_{内} = E_{k2} - E_{k1}}$$

$$A_{内} = A_{内保} + A_{内非} \qquad = -(E_{p2} - E_{p1}) + A_{内非}$$

$$A_{外} + A_{内非} = (E_{k2} + E_{p2}) - (E_{k1} + E_{p1})$$

引入系统的机械能 $$\boxed{E = E_k + E_p}$$

功能原理
$$\boxed{A_{外} + A_{内非} = E_2 - E_1} \quad \text{（积分形式）}$$
$$\boxed{\mathrm{d}A_{外} + \mathrm{d}A_{内非} = \mathrm{d}E} \quad \text{（微分形式）}$$

二. 机械能守恒定律

（law of conservation of mechanical energy）

在只有保守内力作功时，系统的机械能不变。

即 $$\boxed{若\ \mathrm{d}A_{外}=0\ 且\ \mathrm{d}A_{内非}=0，\ 则\ \boldsymbol{E}=常量}$$

—— 机械能守恒定律

显然，孤立的保守系统机械能守恒。

$$当\ \Delta \boldsymbol{E}=0\ 时，\ \Delta \boldsymbol{E}_k=-\Delta \boldsymbol{E}_p=\boldsymbol{A}_{内保}$$

即 $$\boldsymbol{E}_p \underset{\boldsymbol{A}_{保内}<0}{\overset{\boldsymbol{A}_{保内}>0}{\rightleftarrows}} \boldsymbol{E}_k$$

保守内力作功是系统势能与动能相互转化的手段和度量。

三. 普遍的能量守恒定律

如果考虑各种物理现象，计及各种能量，

则　一个孤立系统不管经历何种变化，

系统所有能量的总和保持不变。

——普遍的能量守恒定律

孤立系统（封闭系统）：不受外界作用的系统，即外力不做功

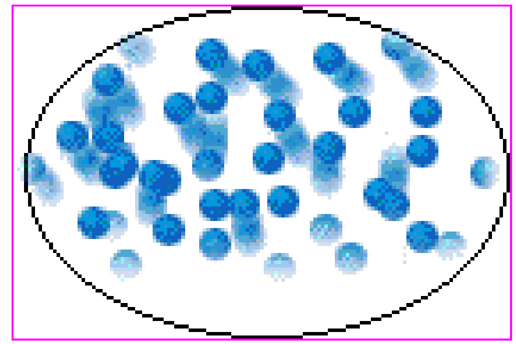
机械能守恒定律是普遍的能量守恒定律在机械运动范围内的体现。

§4.6 碰撞（Collision）

一、碰撞

1、概念

两个或两个以上的物体相遇，且相互作用持续一个极短暂的时间——碰撞。

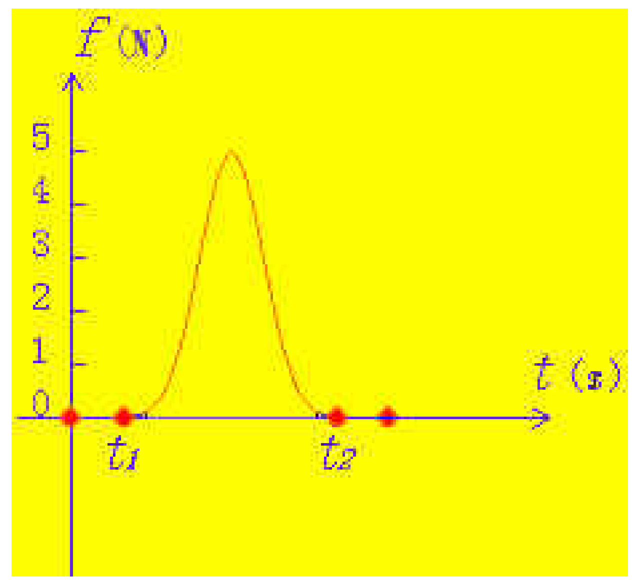


2、特点

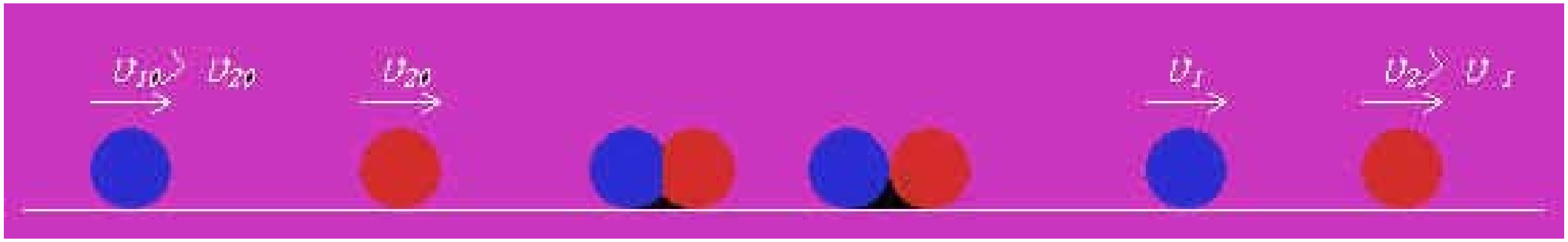
•物体间的相互作用是突发性，持续时间极短。

•作用力峰值极大，碰撞符合动量守恒定律的适用条件。

•碰撞过程中物体会产生形变。



3、碰撞过程的分析



接触阶段：　　两球对心接近运动

形变产生阶段：两球相互挤压，最后两球速度相同——动能转变为势能

形变恢复阶段：在弹性力作用下两球速度逐渐不同而分开运动——势能转变为动能

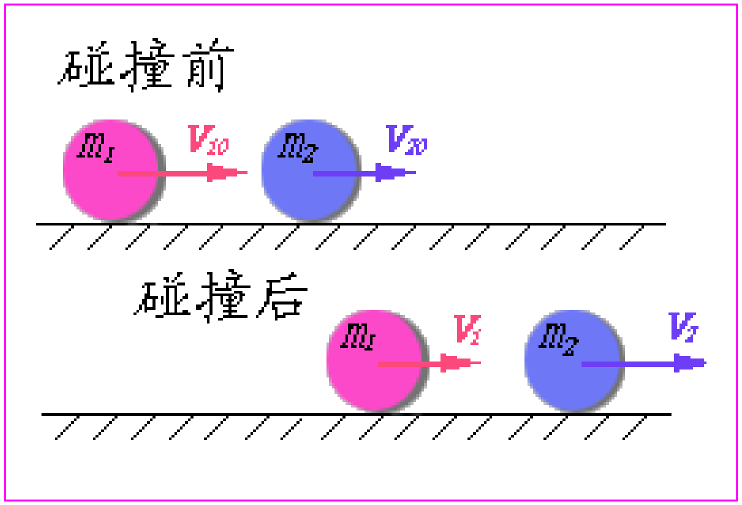
分离阶段：　　两球分离，各自以不同的速度运动

4、分类

- 完全弹性碰撞：　系统动能守恒
- 非弹性碰撞：　　系统动能不守恒
- 完全非弹性碰撞：系统以相同的速度运动

二、完全弹性碰撞

1、碰撞前后速度的变化



两球m_1，m_2对心碰撞，碰撞前速度分别为v_{10}、v_{20}，碰撞后速度变为v_1、v_2

动量守恒，动能守恒

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_{10} + m_2 v_{20} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 \qquad (2)$$

由上面两式可得

$$m_1 (v_1 - v_{10}) = m_2 (v_{20} - v_2) \qquad (3)$$

$$m_1 (v_1^2 - v_{10}^2) = m_2 (v_{20}^2 - v_2^2) \qquad (4)$$

(4)/(3)得

$$v_1 + v_{10} = v_2 + v_{20}$$

$$v_{10} - v_{20} = v_2 - v_1 \qquad (5)$$

碰撞前两球相互趋近的相对速度（v_{10}-v_{20}）等于碰撞后两球相互分开的相对速度（v_2-v_1）

由（3）、（5）式可以解出

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_{10} + 2m_2 v_{20}}{m_1 + m_2}$$

$$v_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_{20} + 2m_1 v_{10}}{m_1 + m_2}$$

2、讨论

$$v_1=\frac{(m_1-m_2)v_{10}+2m_2v_{20}}{m_1+m_2}$$

$$v_2=\frac{(m_2-m_1)v_{20}+2m_1v_{10}}{m_1+m_2}$$

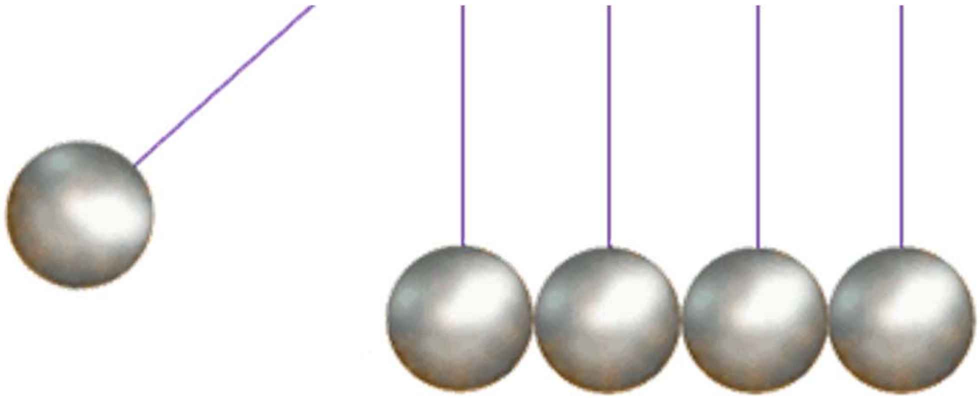
•若$m_1=m_2$，则$v_1=v_{20}$，$v_2=v_{10}$，两球碰撞时交换速度。

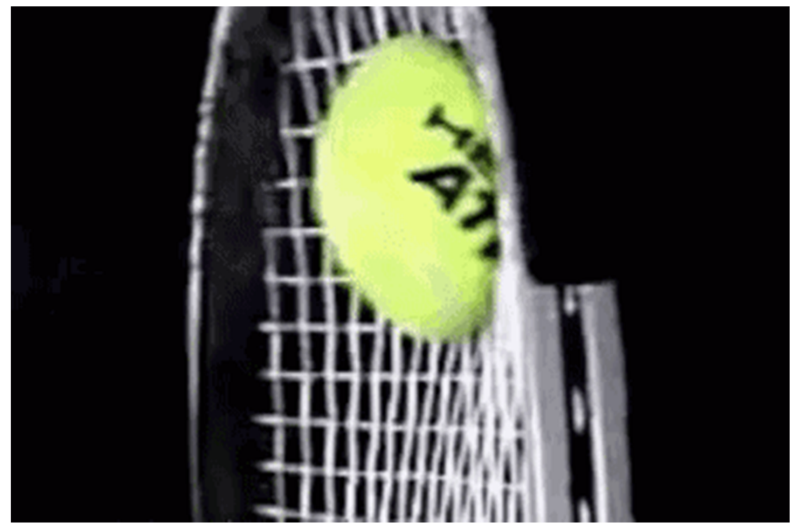
•若$v_{20}=0$，$m_1<<m_2$，则$v_1\approx -v_1$，$v_2=0$，m_1反弹，

即质量很大且原来静止的物体，在碰撞后仍保持不动，质量小的物体碰撞后速度等值反向。

•若$m_2<<m_1$，且$v_{20}=0$，则$v_1\approx v_{10}$，$v_2\approx 2v_{10}$，

即一个质量很大的球体，当它的与质量很小的球体相碰时，它的速度不发生显著的改变，但是质量很小的球却以近似于两倍于大球体的速度运动。





三、完全非弹性碰撞

碰撞后系统以相同的速度运动　　$v_1=v_2=v$

动量守恒　$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = (m_1 + m_2) v$

$$v = \frac{m_1 v_{10} + m_2 v_{20}}{m_1 + m_2}$$

动能损失为

$$\Delta E = \left(\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 \right) - \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2$$

$$= \frac{m_1 m_1}{2(m_1 + m_2)} (v_{10} - v_{20})^2$$

四、非完全弹性碰撞

恢复系数

牛顿提出碰撞定律：碰撞后两球的分离速度v_2-v_1与碰撞前两球的接近速度v_{10}-v_{20}之比为以定值，比值由两球材料性质决定。该比值称为恢复系数。

$$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}}$$

完全非弹性碰撞：

$e=0$，$v_2=v_1$

完全弹性碰撞：

$e=1$，$v_2-v_1 = v_{10}-v_{20}$

非完全弹性碰撞：

$0<e<1$

碰撞中的力 (以两物体碰撞为例)

（1）动量守恒： $$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \qquad (1)$$

（2）碰撞定律： $$e = \frac{v_2 - v_1}{v_{10} - v_{20}} \qquad (2)$$

（3）非完全弹性碰撞： $$\left.\begin{aligned} v_1 &= v_{10} - \frac{(1+e)m_2(v_{10} - v_{20})}{m_1 + m_2} \\ v_2 &= v_{20} + \frac{(1+e)m_1(v_{10} - v_{20})}{m_1 + m_2} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

（4）由动量定理 (对m_2) $$\bar{f} = \frac{m_2 v_2 - m_2 v_{20}}{\Delta t} \qquad (4)$$

将(3)代入(4) $$\boxed{\bar{f} = \frac{m_1 m_2 (1+e)(v_{10} - v_{20})}{(m_1 + m_2)\Delta t}}$$

讨论：力的大小与接近速度成正比，与接触时间成反比，还与物体的质量和材料有关。

碰撞中能量的损失

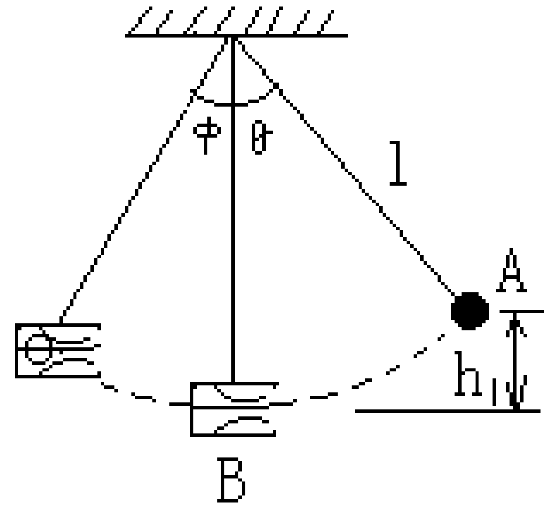
碰撞前后机械能的损失为：

$$\Delta E=(\frac{1}{2}m_1v_{10}^2+\frac{1}{2}m_2v_{20}^2)-(\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2) \tag{6}$$

将前面式(3)代入式 (6)便得：

$$\boxed{\Delta E=\frac{1}{2}(1-e^2)\frac{m_1m_2}{(m_1+m_2)}(v_{10}-v_{20})^2}$$

例题　求两物到达最高处的张角　ϕ



解：分三个过程：

（1）小球自A下落到B，机械能守恒：

$$\frac{1}{2}m_1v^2 = m_1gh_1 = m_1gl(1-\cos\theta) \quad (1)$$

（2）小球与蹄状物碰撞过程，动量守恒：

$$m_1v = (m_1+m_2)v' \quad (2)$$

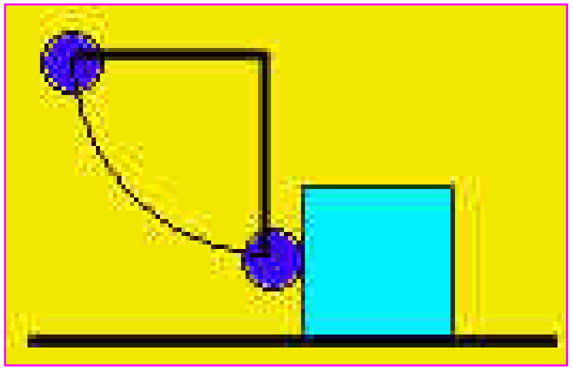
（3）小球与蹄状物开始运动到最高处，机械能守恒：

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v'^2 = (m_1+m_2)gl(1-\cos\phi) \quad (3)$$

由式(1)、(2)、(3)消去　v 和 v'

可求得：　$$\cos\phi = 1-\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2(1-\cos\theta)$$

例题：如图所示，质量为**1kg**的钢球，系在长为l=**0.8m**的绳子的一端，绳子的另一端固定。把绳子拉至水平位置后将球由静止释放，球在最低点与质量为**5kg**的钢块作完全弹性碰撞。求碰撞后钢球升高的高度。



解：本题分三个过程：

第一过程：钢球下落到最低点。以钢球和地球为系统，机械能守恒。以钢球在最低点为重力势能零点。

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgl \qquad (1)$$

第二过程：钢球与钢块作完全弹性碰撞，以钢球和钢块为系统，动能和动量守恒。

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 \qquad (2)$$

$$mv_0 = mv + MV \qquad (3)$$

第三过程：钢球上升。以钢球和地球为系统，机械能守恒。以钢球在最低点为重力势能零点。

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \tag{4}$$

解以上方程，可得

$$h = \left(\frac{m-M}{m+M}\right)^2 l$$

代入数据，得

$$h = \left(\frac{1-5}{1+5}\right)^2 \times 0.8 = 0.356\text{m}$$

他叫Robert Farquhar，之前在美国NASA工作了几十年，参与了很多太空探测项目....

他最擅长的，就是卫星轨道的计算... 别人都说，他能把任何飞船送入人们想要送去的任何地方.... 他就是“轨道计算的大师”......

在NASA里工作过的人都认识Robert， 都觉得他是全nasa最聪明的人.

他计算的轨道永远是对的..别人的不可能在他的手里都能成为现实。

而在Robert职业生涯里最传奇的一次经历。 还要从当年直接“借走”NASA的一颗卫星说起。

这颗卫星，叫国际日地探测卫星 - 3， 缩写叫ISEE-3

这是一颗主要用来探测太阳粒子的卫星.. 当时，主导这个卫星项目的，就是Robert ....

这颗卫星被发射到了一个地球和太阳之间的L1拉格朗日点上的一个叫“光晕” Halo的轨道上... 在这条轨道上，卫星受到的太阳和地球的引力相抵消，不用耗费什么燃料就可以在停留在地球和太阳之间相对静止的运行...

这是人类历史上第一颗被发送到L1拉格朗日点的卫星... 而算出这条“光晕”轨道的人，就是Robert...

这条轨道，就是他当年的博士论文.....

这个探测器在这个点上观察太阳观察了5年.... 卫星的使命也即将结束....

然而，在那个时候，全世界的宇航科学家们都在做一件事情： 哈雷彗星。

那时，这颗全世界最著名的彗星马上就要在1986年回归地球（每76年才回归一次）

在那个太空竞赛的年代，俄罗斯，欧洲和日本都争相发射了彗星探测器，准备要在1986年探测哈雷彗星.... 这些彗星探测器提前几年就开始向哈雷彗星飞奔，史称： 哈雷舰队...

然而，哈雷舰队里并没有美国的探测器....

美国表示，彗星任务太花钱，他们不准备去探索.....

然而，就在这样的大环境下..

突然有一天，Robert开出了新的脑洞。

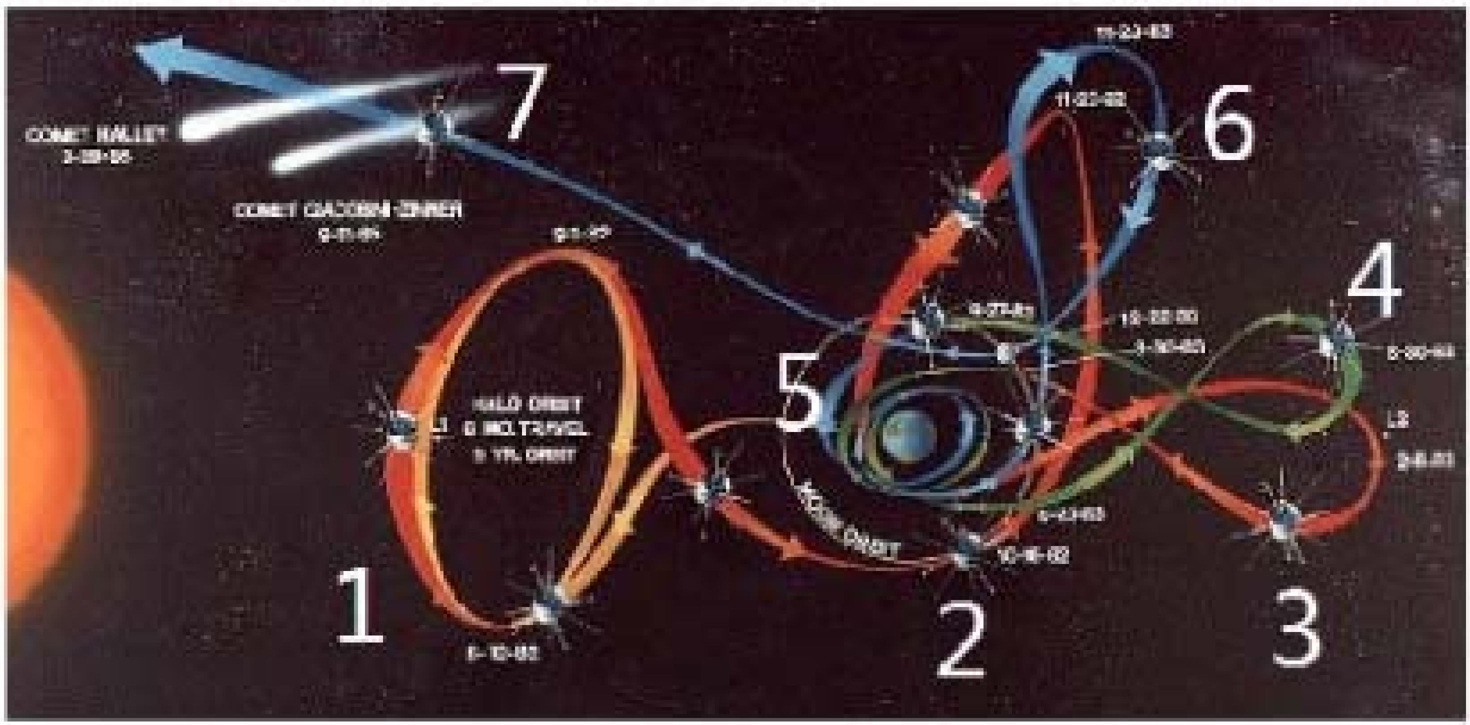
我这颗卫星不是已经完成任务使命了嘛？

不如我直接让他变个轨道，直接拿去探索哈雷彗星好了。

我计算过了，完全可以去到！

恩，他自己计算出了一个复杂的轨道... 先让这颗卫星返回地球，环绕N圈，利用月球的重力加速，去追赶彗星.....

让我们来感受一下他算出的这个轨道

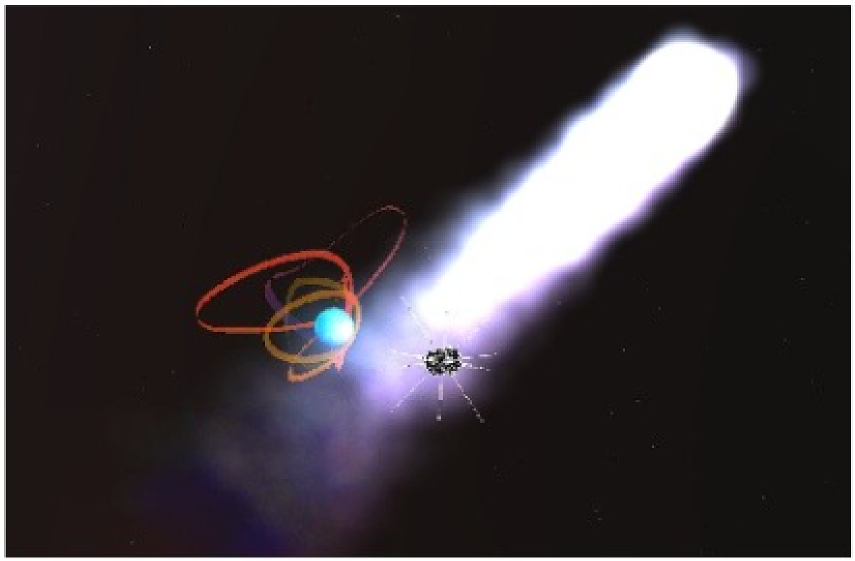


本来卫星一直稳定在1的位置，后来他让卫星返回地球附近，环绕几圈，利用月球引力加速，拐了3-4-5-6 好几圈.....
最后离开地球，在7的位置跟两颗彗星相遇.....

1985年的9月.... 在世界上其他所有国家发射的卫星到达哈雷彗星之前... 这颗卫星就已经穿越并探测了一颗叫Giacobini-Zinner的彗星...（正好在哈雷之前路过的另一颗彗星）

又在1年后的1986年.... 探测了哈雷彗星....

（他计算的一条轨道，正好能穿越两颗彗星的慧尾）



就这样，他的这颗卫星，不但成了世界宇航史上第一个探测彗星慧尾的探测器，还成为了第一个两次探测两颗不同彗星慧尾的探测器。

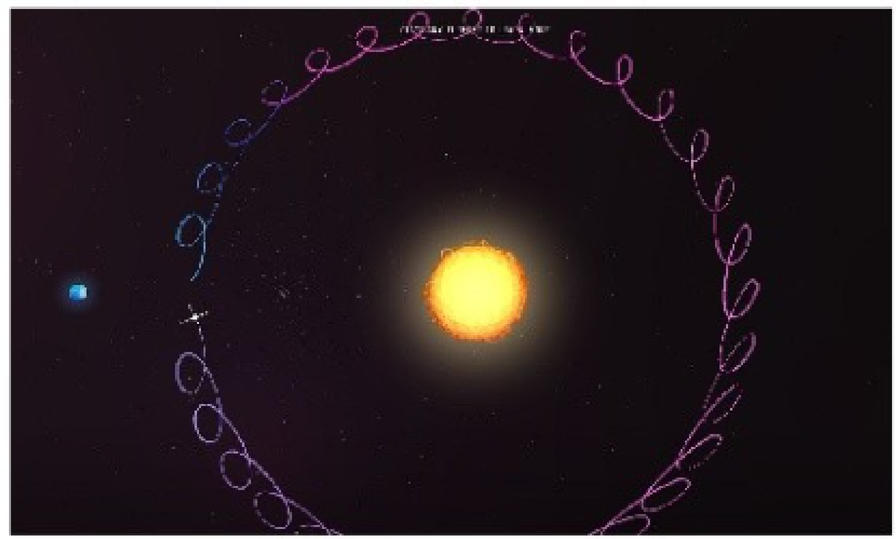
当时有不少还指望着这颗卫星继续观测太阳的科学家... 曾经各种写文章抨击他，说是他“偷走了他们的这颗卫星”.....

Robert当时回应说... **那不叫偷.... 那叫借！ 借知道么！**

因为...

在完成探测彗星的任务之后.... 他又给卫星设定了一条轨道......让它31年之后的2014年重新回归地球.....

就这么一条....



4.7 理想流体

1.流体的特性

- 液体特点：液体具有一定体积，几乎不可压缩
- 只有体积压缩弹性，没有拉压弹性和剪切弹性，因而都具有流动性

2.粘性概念

•当流体流动时，各流层之间存在着阻碍相对运动的内摩擦力，这就是流体的粘性。

•例如，河流中心流层流动最快，越靠近河岸流动越慢，岸边水几乎不流动，这种现象就是由于流层间存在内摩擦力造成的

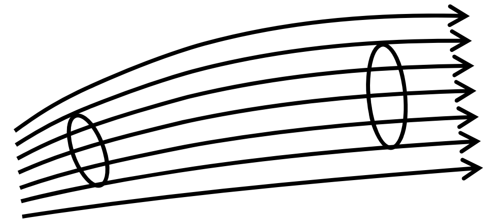
3.流体体元的特点

在流体力学中，常谈到流体体元、流体微团或流体质点，这里说的体元、微团、质点，都具有宏观小、微观大的特点

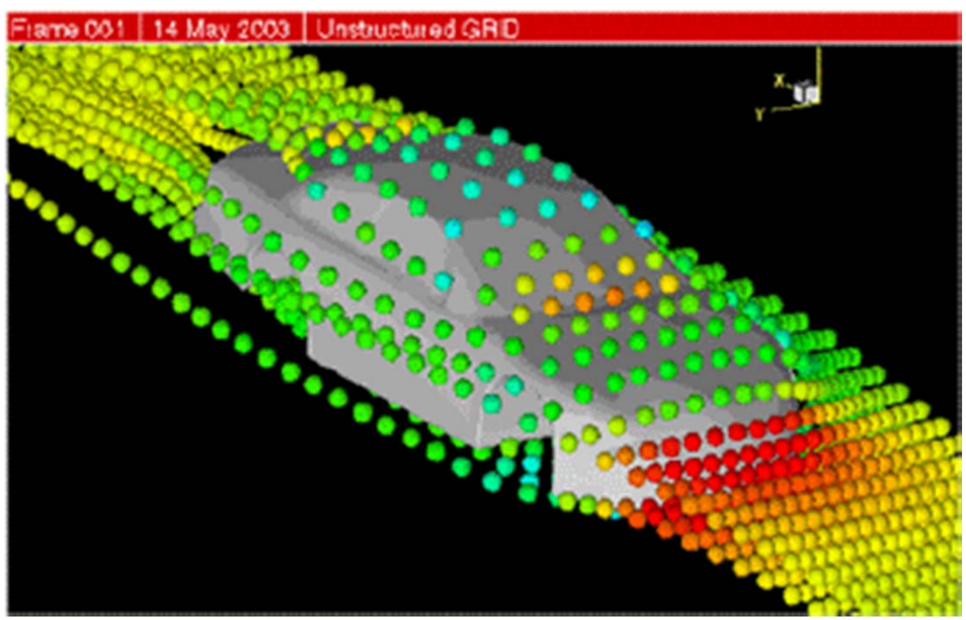
4.理想流体

- 理想流体就是不可压缩、无粘性的流体
- 在研究流体问题时，理想流体使问题变得简单

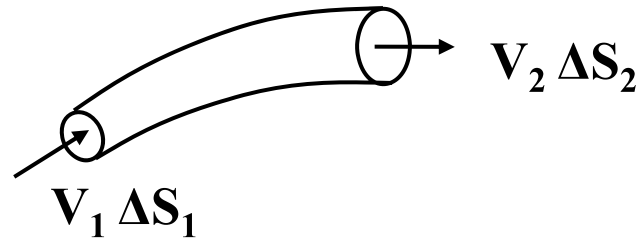
稳定流动与流线



- 稳定流动: 空间各点流速不随时间而变, 即 $\vec{v}=\vec{v}(x,y,z)$
- 流线：在流速场中画一些曲线，使曲线上每点切线方向与该点的流速方向相同，这些曲线就叫流线，流线不能相交， 稳定流动中，流线分布才不随时间而变化



流体的连续性方程



在不可压缩流体稳定流动的流速场中, 单位时间通过截面ΔS_1的流体体积与通过截面ΔS_2的流体体积必然相等, 即

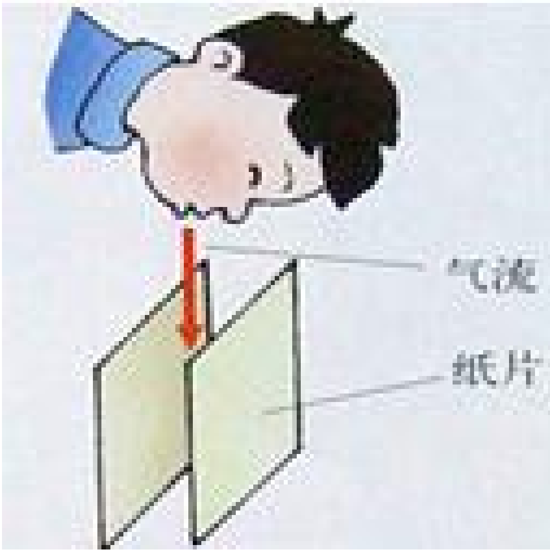
$$v_1\Delta S_1 = v_2\Delta S_2$$

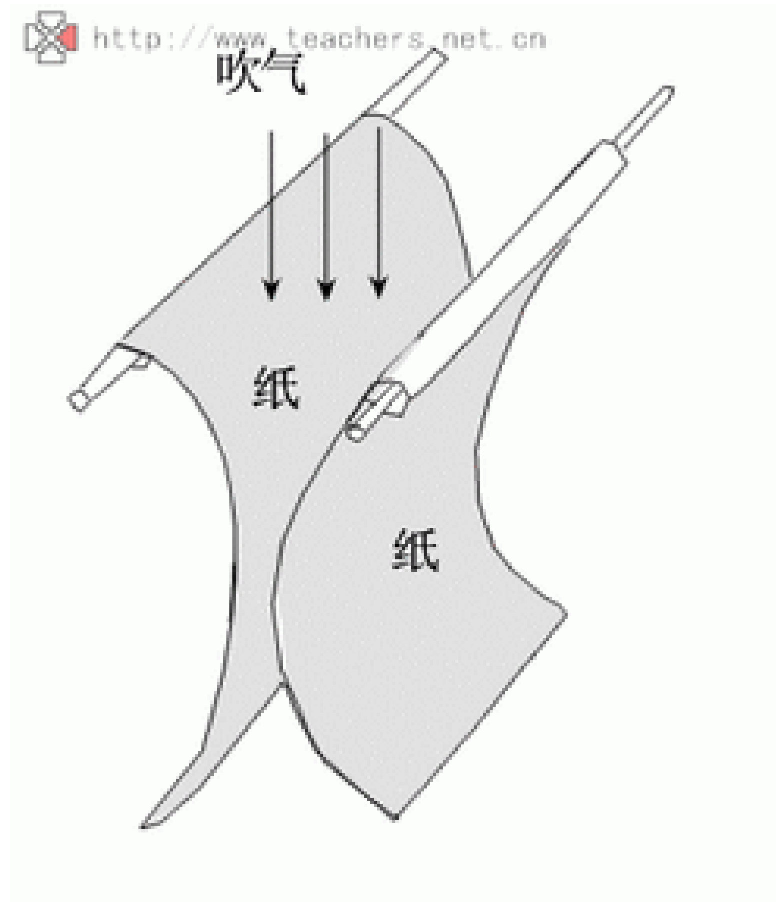
表明：截面大处，流速小，流线疏；

截面小处，流速大，流线密

单位时间内通过某截面的流体体积 $Q=v\Delta S$，又叫作通过该截面的流量，因此，连续性方程可表述为：

<u>当不可压缩流体做稳定流动时，流量守恒</u>


气流
纸片

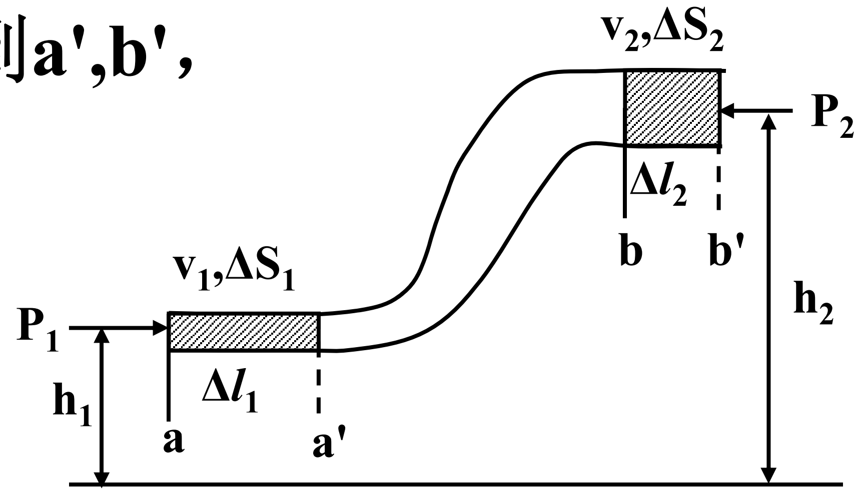

http://www.teachers.net.cn
吹气
纸
纸

伯努利方程

伯努利方程是理想流体稳定流动的基本动力学方程，它是在理想流体中应用机械能定理推导出来的结果

(一)伯努利方程的推导

在稳定流动理想流体中取一细流管, 任选ab这一段流体, 在Δt时间内移动到a',b',



功能定理: $A_{外}+A_{非内}=E_2-E_1$ ①

$A_{非内}=0$, $A_{外}=p_1\Delta s_1\Delta l_1-p_2\Delta s_2\Delta l_2$

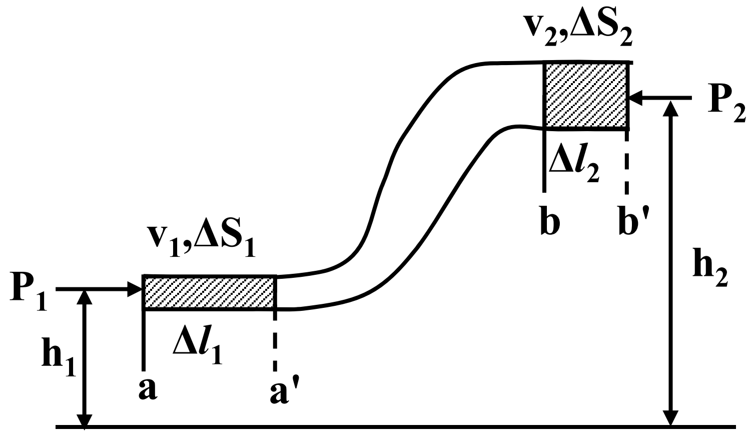
连续方程: $v_1\Delta s_1=v_2\Delta s_2$

$v_1=\Delta l_1/\Delta t \qquad v_2=\Delta l_2/\Delta t$

$\therefore \Delta l_1\Delta s_1=\Delta l_2\Delta s_2=\Delta V=\Delta m/\rho \qquad A_{外}=(p_1-p_2)\Delta m/\rho$ ②

$$E_2-E_1=E(a'b')-E(ab)=[E(a'b)+E(bb')]-[E(aa')+E(a'b)]$$
$$=E(bb')-E(aa')=(\tfrac{1}{2}\Delta mv_2{}^2+\Delta mgh_2)-(\tfrac{1}{2}\Delta mv_1{}^2+\Delta mgh_1) \quad ③$$

㈠伯努利方程的推导

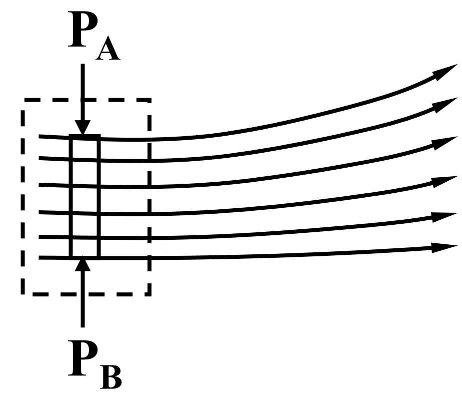


②③代入① $(p_1 - p_2)\Delta m/\rho = (\frac{1}{2}\Delta m v_2{}^2 + \Delta m g h_2) - (\frac{1}{2}\Delta m v_1{}^2 + \Delta m g h_1)$

消去Δm，两边同时乘ρ，　$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho v_2{}^2 + \rho g h_1 - \frac{1}{2}\rho v_1{}^2 - \rho g h_2$

把脚标相同的项放在一起：$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1{}^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2{}^2$

伯努利方程的表述

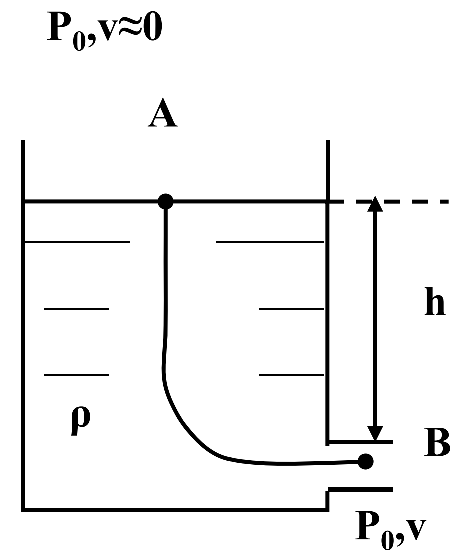


理想流体相对惯性系做稳定流动时，

$$p + \rho gh + \rho v^2/2 = 恒量$$

若液体静止，或速度一致？

若高度相等？



例：求小孔流速

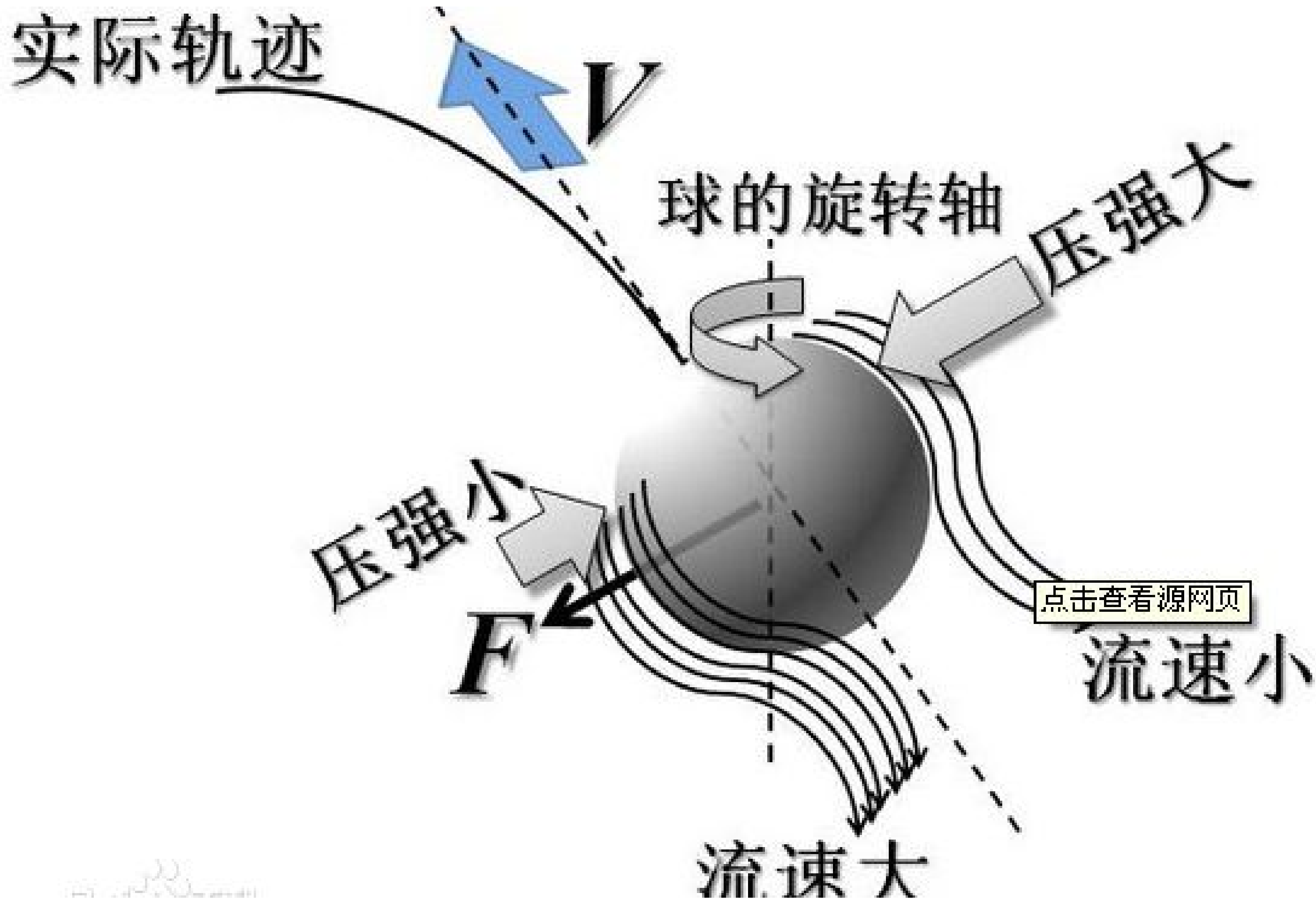
解：由于容器线度远大于小孔，在短时间内可视为理想流体稳定流动，且$v_A << v_B$，可认为$v_A = 0$

由伯努利方程：$p_0 + \rho g h_A = p_0 + \rho g h_B + \frac{1}{2}\rho v^2$

$$\frac{1}{2}\rho v^2 = \rho g(h_A - h_B) = \rho g h, \quad \therefore v = \sqrt{2gh}$$



EDS


实际轨迹
V
球的旋转轴
压强大
压强小
F
点击查看源网页
流速小
流速大

力 $\vec{F}$

时间积累 $\vec{I}=\int \vec{F}\,\mathrm{d}t$ $\xrightarrow[\text{牛II}]{\text{质点}}$ $\vec{P}=m\vec{v}$, $\vec{I}=\Delta\vec{P}$ $\xrightarrow[\text{牛III}]{\text{系}}$ $\vec{I}_{外}=\Delta\vec{P}$ $\longrightarrow$ $\vec{F}_{外}=0$, $\vec{P}=\vec{C}$

空间积累 $W=\int \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$

$\xrightarrow[\text{牛II}]{\text{质点}}$ $E_k=\dfrac{1}{2}mv^2$, $W=\Delta E_k$ $\xrightarrow{\text{系}}$ $W_{外}+W_{内}=\Delta E_k$

$\xrightarrow[\text{力}]{\text{一对}}$ $\oint \vec{f}_{保}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=0$ $\xrightarrow[\text{牛III}]{\text{系}}$ $E_{p1}=\int_{(1)}^{(0)}\vec{f}_{保}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$, $W_{保}=-\Delta E_p$

$\longrightarrow$ $E=E_k+E_p$, $W_{外}+W_{内非}=\Delta E$ $\longrightarrow$ $\mathrm{d}W_{外}=0$, $\mathrm{d}W_{内非}=0$, $E=C$

转动效应 $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$ $\xrightarrow{\text{质点}}$ $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}$, $\vec{M}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$ $\xrightarrow[\text{牛III}]{\text{系}}$ $\vec{M}_{外}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$ $\longrightarrow$ $\vec{M}_{外}=0$, $\vec{L}=\vec{C}$

习题：

4.2 & 4.6 & 4.7 & 4.10 & 4.14 & 4.17

谢谢！！！