第一篇 力学

第1章 质点机械运动状态的描述

第2章 物体机械运动状态变化的原因

第3章 质点的动量、角动量及其守恒定律

第4章 机械能和机械能守恒定律

第5章 具有周期性运动行为的振动和波动的描述

第6章 刚体机械运动状态的描述

第7章 刚体机械运动状态变化原因的描述

经典力学/牛顿力学

主要内容：研究物体的机械运动的规律

研究工具：微积分和矢量

力学总框架：

运动学(Kinematics)

---研究物体之间相对位置随时间的变化关系

动力学(Dynamics)

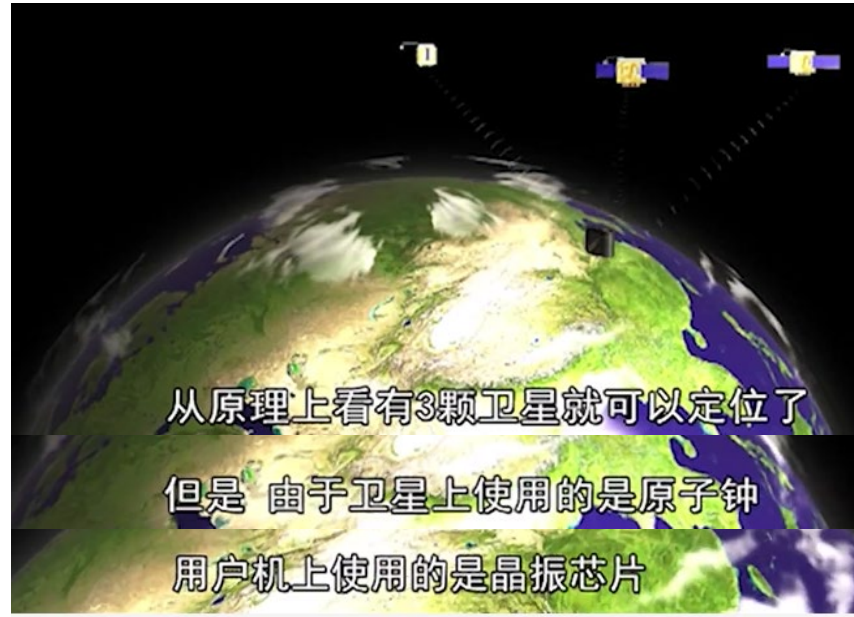
---研究物体间的相互作用,以及由此而引起的物体运动状态变化的规律

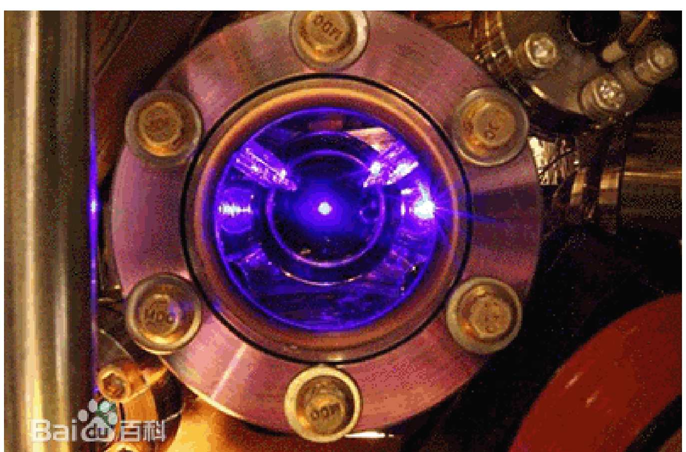
注：机械运动是指物体的位置随着时间的改变。

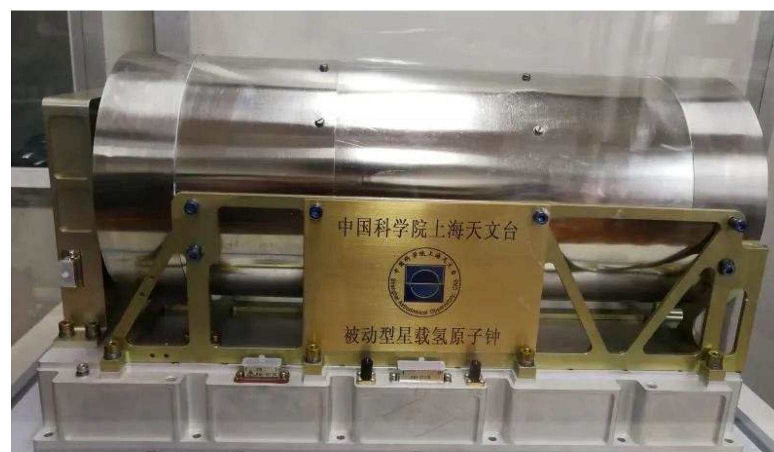
第一章 质点机械运动状态的描述

北斗卫星导航


北斗卫星导航系统
“三步走”发展战略
2000年
初步建成卫星
导航试验系统
2012年
导航系统将为中国
及周边地区提供服务
覆盖区内定位精度达到
10米
2020年
北斗卫星导航系统
形成全球覆盖能力
本图信息来源:
中国卫星导航系统
中新社2011年12月27日赵旭制图


从原理上看有3颗卫星就可以定位了
但是 由于卫星上使用的是原子钟
用户机上使用的是晶振芯片


Bai百科


中国科学院上海天文台
被动型星载氢原子钟

本章目录

一：运动参数

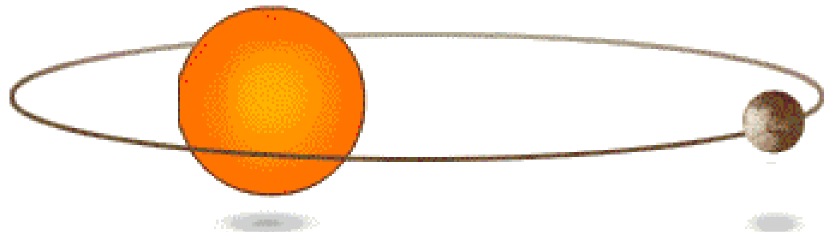
二：运动种类

三：运动的时空观

一：运动参数

§1.1 质点、参考系 、 坐标系

一、质点： 当物体的大小和形状忽略不计时，可以把物体当做只有质量没有形状和大小的点.



注：1. 质点是一种理想的力学模型。

2. 针对不同的研究问题，对于同一物体，有时可以看作质点，有时则不能。

例如：研究对象：地球

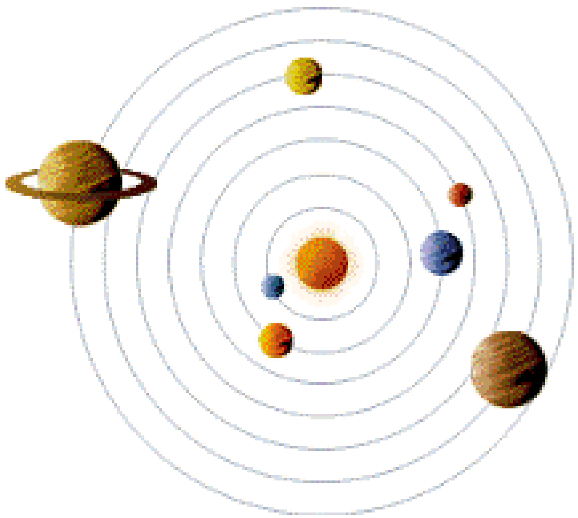
研究问题
- 地球公转：地球可以作为质点
- 地球自转：地球不可以作为质点

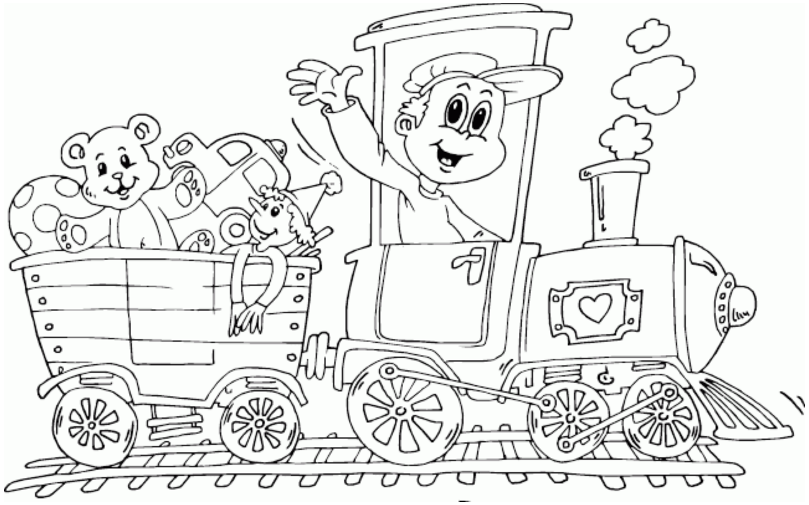
说明： 当两物体之间的距离l大于物体自身线度r时，物体可以视为一个质点；否则就不能视为一个质点。

§1.1 质点、参考系、坐标系

一. 参考系（frame of reference, reference system）

参考系： 为了确定物体的机械运动而选取的其他物体或物体系。



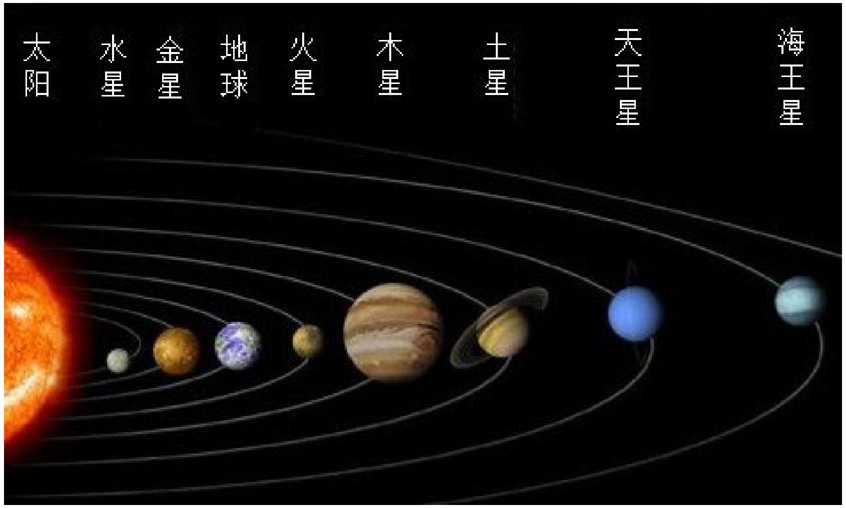


注： 1、物体的位置和运动总是相对的。

2、不同参考系中物体的运动形式(如轨迹、速度等)可以不同。

3、运动学中参考系可任选。

常用的参考系：

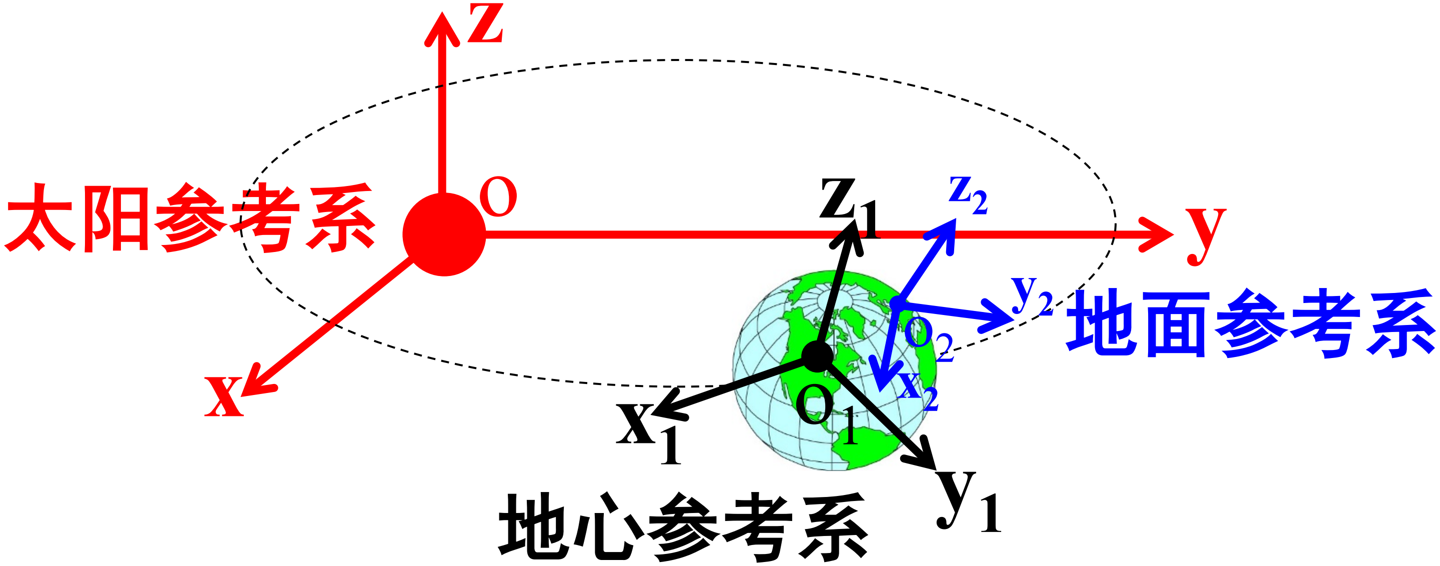


太阳参考系

地心参考系

地面参考系

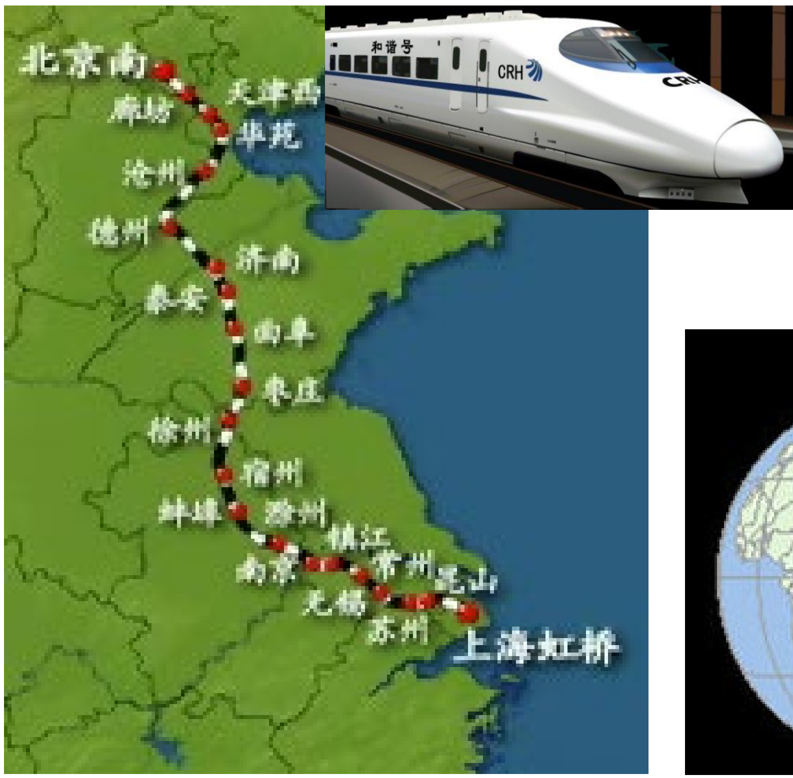
实验室参考系

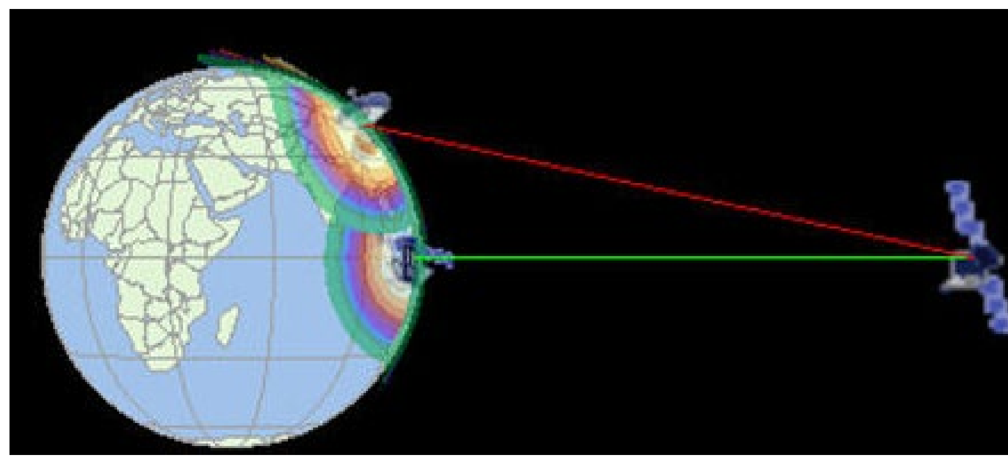


z
O
太阳参考系
y
x
z_1
z_2
y_2
地面参考系
O_2
x_2
x_1
O_1
y_1
地心参考系

二. 坐标系(coordinate system)

坐标系： 为了**定量地**描述质点的运动，在参考系上固结的一组有刻度的射线、曲线或角度。



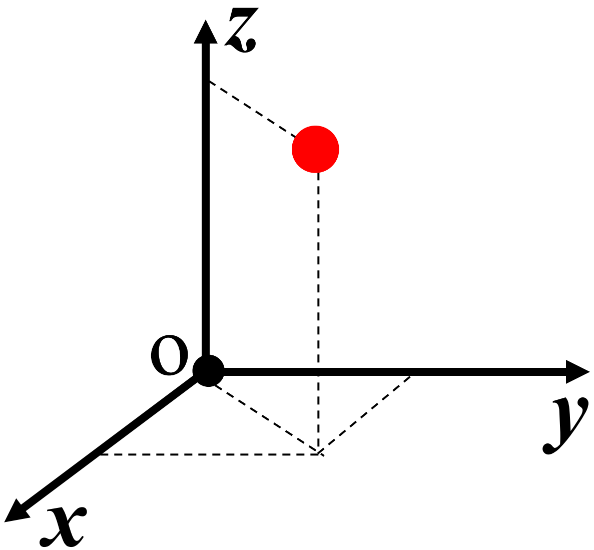


注： 1. 参考系选定后，坐标系还可任选。

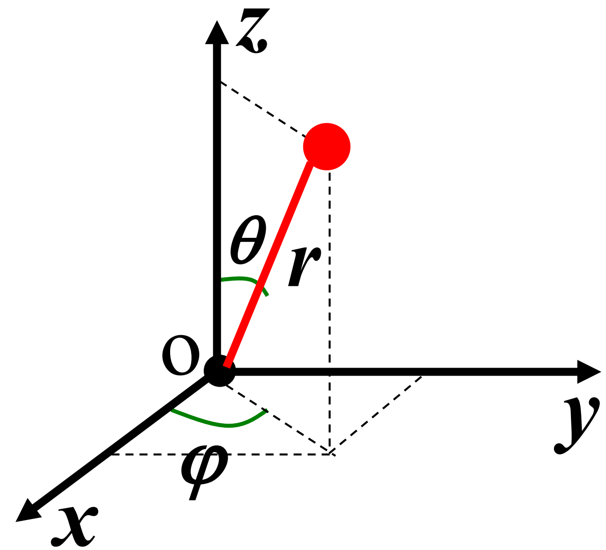
2. 不同坐标系中，运动的数学表述可以不同。

常用的坐标系：

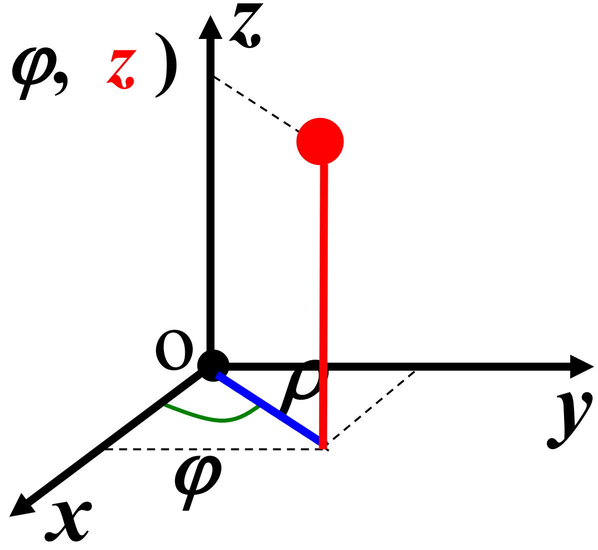
1. 直角坐标系 (x, y, z)



2. 球极坐标系 (r, θ, φ)



3. 柱坐标系 (ρ, φ, z)



§1.2 质点位矢、位移、速度、加速度

一. 质点位置矢量 (position vector of a particle)

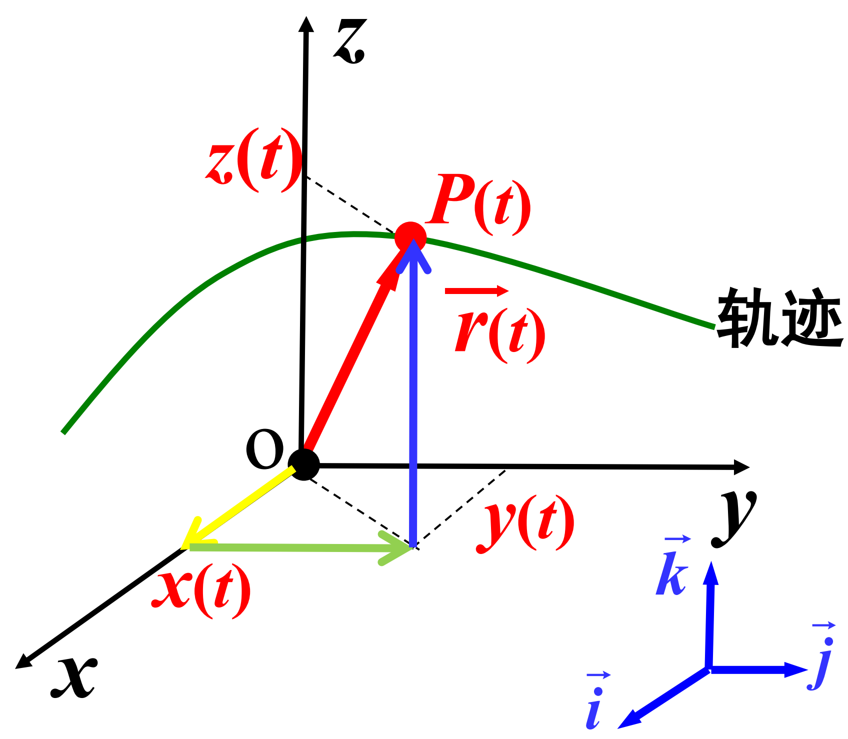
1、位置矢量：用来确定某时刻质点位置的矢量(用矢端表示)，也称为**位矢**或**矢径**。

位置矢量：

$$\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$$

$$= x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

或 $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$



轨迹：质点运动时经过的路线。

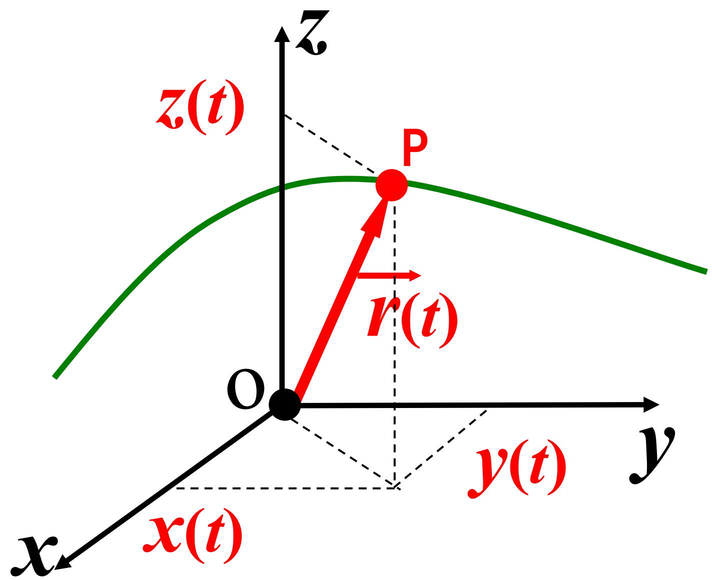
2. 运动方程 (function of motion)

机械运动：物体(质点)位置随时间的改变。

运动方程：位置坐标和时间的函数关系。

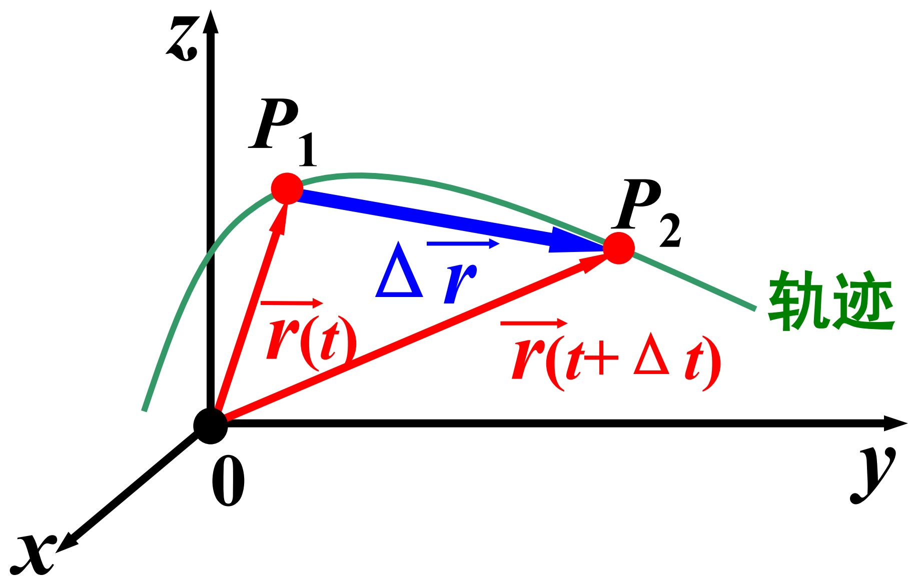
$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$$

$$\text{或}\quad \begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$$



二. 位移(displacement)

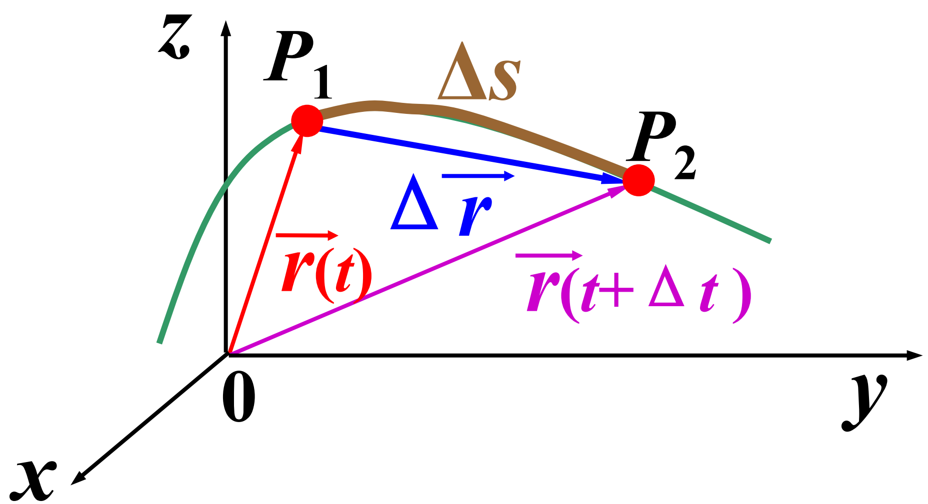
1、位移：在一段时间内质点的位置的改变。



位移：$\Delta\vec{r}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)\begin{cases}\text{大小：} \left|\Delta\vec{r}\right|=\overline{P_1P_2} \\ \text{方向：} P_1\to P_2\end{cases}$

2. 路程(path)

在一段时间内，质点实际运动轨迹的长度Δs叫路程。



当$\Delta t \longrightarrow 0$时，$|\Delta \vec{r}| \overset{?}{=} \Delta s$

注：$\Delta s \neq |\Delta \vec{r}|$

三. 速度(velocity)

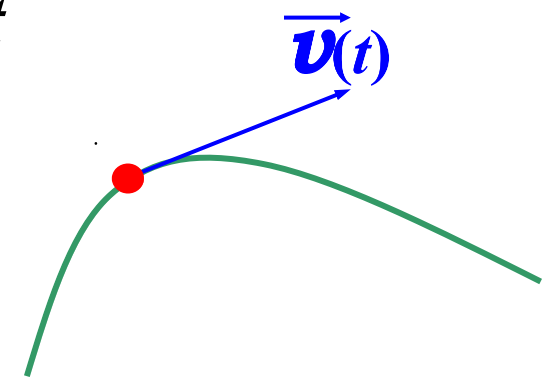
质点位矢对时间的变化率叫速度。

1. 平均速度(average velocity)：$\overline{\vec{v}} = \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

2. (瞬时)速度(instantaneous velocity)：

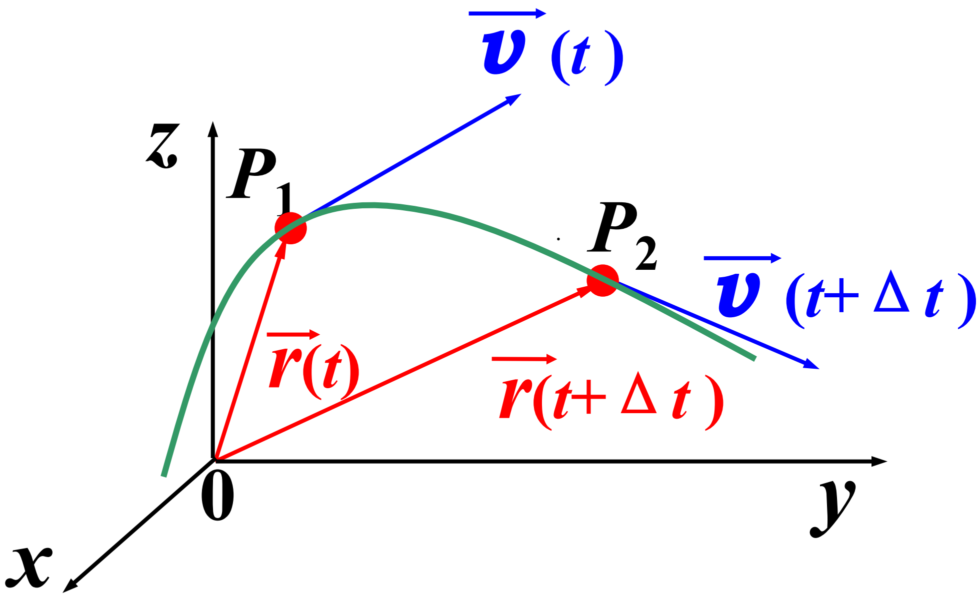
$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\,\vec{r}}{\mathrm{d}\,t} = \dot{\vec{r}}$$

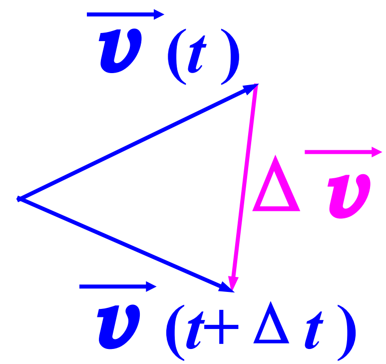
速度方向：沿轨迹切线方向。



四. 加速度(acceleration)

质点速度对时间的变化率叫加速度。





加速度：

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\ddot{\vec{r}}\begin{cases}\text{方向：}\vec{v}\text{变化的方向}\\ \text{大小：}a=|\vec{a}|=\left|\dfrac{d\vec{v}}{dt}\right|\end{cases}$$

运动学的两类问题：

$$\boxed{\vec{v},\vec{a}} \underset{\text{求导}}{\overset{\text{积分}}{\rightleftarrows}} \boxed{\vec{r}(t)}$$

$$\boxed{\vec{a}}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}=\boxed{\ddot{\vec{r}}}$$

$$\boxed{\vec{v}}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\boxed{\dot{\vec{r}}}$$

例1 一质点的运动函数如下：$\begin{cases} y=-t^4+2t^2 \\ x=-t^2 \end{cases}$

则，（1）在xy平面内质点的运动轨迹是什么？

（2）在x=-4时，质点的速度、加速度和速率各是多少？

解： （1）根据运动函数得到，$y=-x^2-2x$

因此在xy面内质点运动轨迹是抛物线

（2）质点的速度和加速度分别为

$$\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}\ ;\qquad \vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}$$

$$\vec{v}=-2\mathrm{t}\vec{i}+(-4\,\mathrm{t}^3+4\,\mathrm{t})\vec{j}\ ;$$

$$\vec{a}=-2\vec{i}+(-12\,\mathrm{t}^2+4)\vec{j}$$

当x=-4时，$\vec{v}=\mp 4\vec{i}\mp 24\vec{j}$ ；

$$\vec{a}=-2\vec{i}-44\vec{j}$$

$$v_x=\frac{dx}{dt}$$

$$v_y=\frac{dy}{dt}$$

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$a_y=\frac{dv_y}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2}$$

例2 某一质点运动时其加速度a=常矢量，假设其沿着x轴方向运动，初始时刻的位置和速度分别是 $x_0, v_{0,x}$，求任一时刻该质点的速度和位置。

解：

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \mathrm{a} \qquad dv_x = \mathrm{adt} \qquad \int_{v_{0,x}}^{v} dv_x = \int_0^t \mathrm{adt} \qquad v_x = v_{0,x} + at$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad dx = v_x \mathrm{dt} \qquad \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v_x \mathrm{dt} \qquad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$\text{公式}\begin{cases} v_x = v_{0,x} + at \\ x = x_0 + v_0 t + \dfrac{1}{2} a t^2 \\ v^2 - v_0^2 = 2a\left(x - x_0\right) \end{cases}$$

——匀变速直线运动

$\vec{a}_x = a_x \vec{i}$ =常矢量

$\vec{a}_y = a_y \vec{j}$=常矢量

$\vec{a}_z = a_z \vec{k}$=常矢量

$$\begin{cases} v_x = v_{0,x} + a_x t \\ x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_y = v_{0,y} + a_y t \\ y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_z = v_{0,z} + a_z t \\ z = z_0 + v_{0z} t + \frac{1}{2} a_z t^2 \end{cases}$$

$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$ =常矢量

初始条件：$\vec{r}_0, \vec{v}_0$

$$\begin{cases} \vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \\ \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t \\ \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \end{cases}$$

二：运动种类

§ 1.3 匀变速运动
(uniformly acceleration motion)

一、匀变速运动

$\vec{a}$=常矢量　　　初始条件：$\vec{r}_0, \vec{v}_0$

公式：

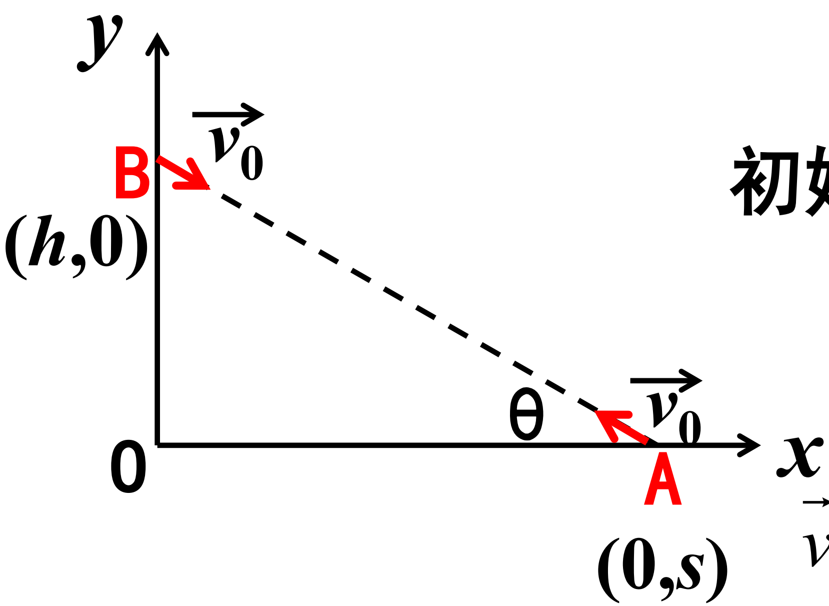
$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}\,t}$$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0\,t + \frac{1}{2}\vec{a}\,t^2}$$

例3

山上和山下两炮各瞄准对方同时以相同初速各发射一枚炮弹,这两枚炮弹会不会在空中相碰?为什么?(忽略空气阻力)如果山高h=50m,两炮相隔的水平距离s=200m.要使这两枚炮弹在空中相碰,它们的速率至少应等于多少?

A: $\vec{a}_{\mathrm{A}} = 0\vec{i} + g(-\vec{j})$ =常矢量



初始态

$$\vec{v}_{0,A} = -v_0\cos\theta\vec{i} + v_0\sin\theta\vec{j}$$

$$\vec{r}_{0,A} = s\vec{i} + 0\vec{j}$$

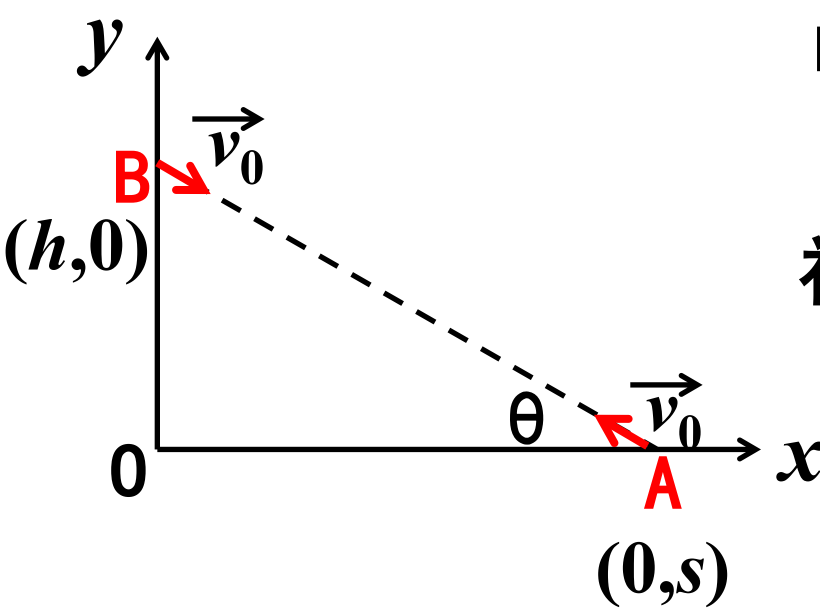
任意t时刻,A的速度和位矢

$$\vec{v}_A = -v_0\cos\theta\vec{i} + (v_0\sin\theta - gt)\vec{j}$$

$$\vec{r}_A = (s - v_0 t\cos\theta + 0)\vec{i} + (0 + v_0 t\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2)\vec{j}$$

例3

山上和山下两炮各瞄准对方同时以相同初速各发射一枚炮弹，这两枚炮弹会不会在空中相碰？为什么？（忽略空气阻力）如果山高h=50m，两炮相隔的水平距离s=200m．要使这两枚炮弹在空中相碰，它们的速率至少应等于多少？



B：$\vec{a}_B = 0\vec{i} + g(-\vec{j})$=常矢量

初始态

$$\vec{v}_{0,B} = v_0 \cos\theta \vec{i} - v_0 \sin\theta \vec{j}$$

$$\vec{r}_{0,B} = 0\vec{i} + h\vec{j}$$

任意t时刻，B的速度和位矢

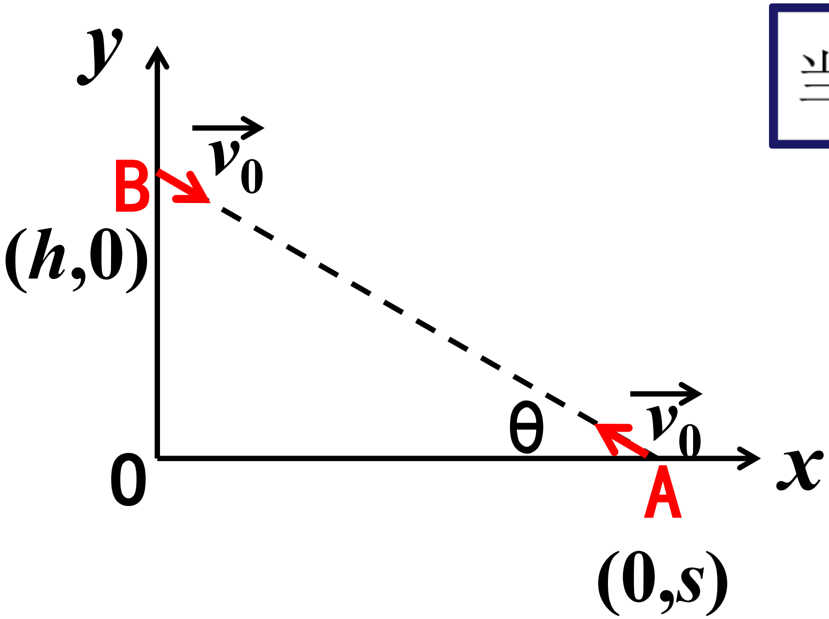
$$\vec{v}_B = v_0 \cos\theta \vec{i} + (-v_0 \sin\theta - gt)\vec{j}$$

$$\vec{r}_B = (0 + v_0 \mathrm{t} \cos\theta + 0)\vec{i} + \left(h - v_0 \mathrm{t} \sin\theta - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{j}$$

例3

山上和山下两炮各瞄准对方同时以相同初速各发射一枚炮弹，这两枚炮弹会不会在空中相碰？为什么？（忽略空气阻力）如果山高h=50m，两炮相隔的水平距离s=200m．要使这两枚炮弹在空中相碰，它们的速率至少应等于多少？

A、B在空中相遇条件：



$$\boxed{当x_A = x_B时，\ \Delta y = y_A - y_B \overset{?}{=} 0}$$

$$\begin{cases} x_A = s - (v_0\cos\theta)t + 0 \\ y_A = 0 + (v_0\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

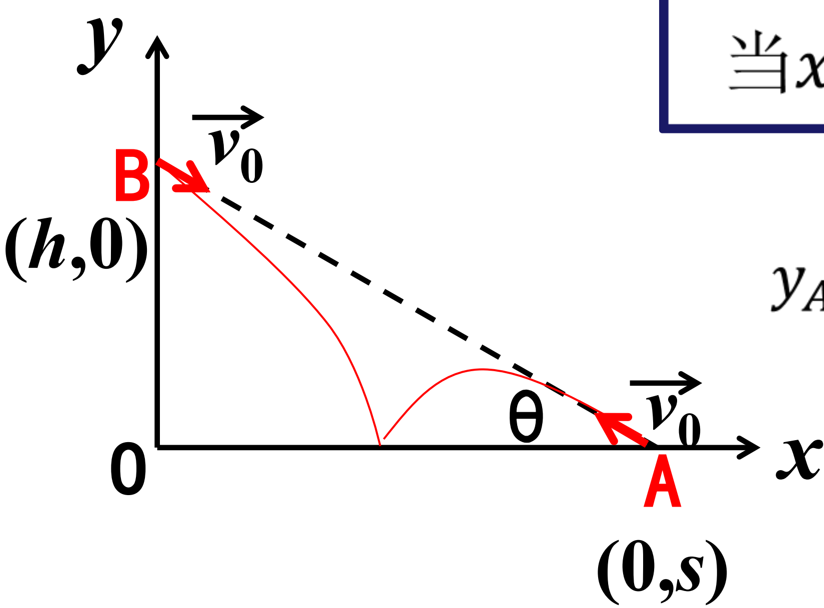
$$\begin{cases} x_B = 0 + (v_0\cos\theta)t + 0 \\ y_B = h - (v_0\sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

当$x_A=x_B$时，$t = \dfrac{s}{2v_0\cos\theta}$ 此时，$\Delta y = y_A - y_B = 2v_0\sin\theta\cdot t - h = 0$

$$\boxed{由此可以看到，当x_A = x_B时，满足y_A - y_B = 0，可以在空中相遇。}$$

例3

山上和山下两炮各瞄准对方同时以相同初速各发射一枚炮弹，这两枚炮弹会不会在空中相碰？为什么？（忽略空气阻力）如果山高h=50m，两炮相隔的水平距离s=200m. 要使这两枚炮弹在空中相碰，它们的速率至少应等于多少？



$$\boxed{\text{当}x_A = x_B\text{时，满足}y_A - y_B = 0}$$

$$y_A = 0 + (v_0 \sin\theta)t + \frac{1}{2}(-g)t^2 \ \geq 0$$

$$v_0 \geq \sqrt{\frac{s}{4\sin\theta\cos\theta}} \approx 45.63 \text{ m/s}$$

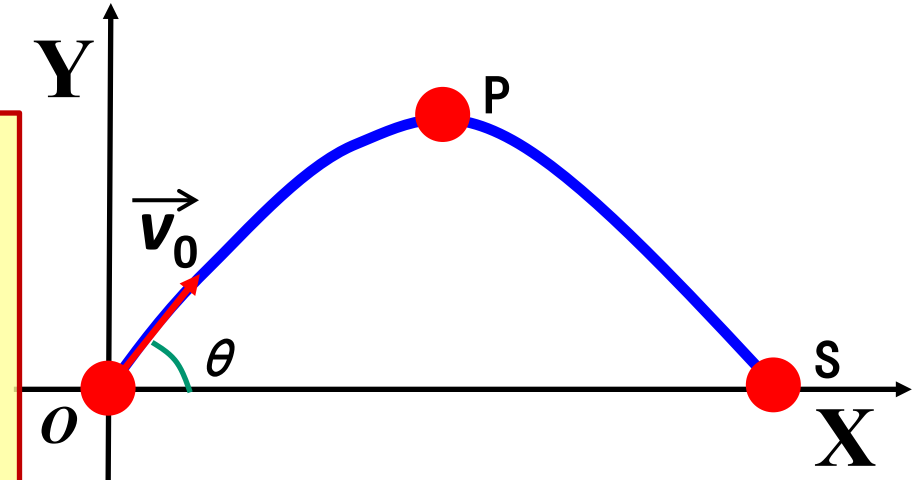
约束条件：炮弹在A弹落地前相遇 → $\boxed{y_A \geq 0}$

2. 抛体运动

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j}$$ =常矢量

$$\vec{v}_0 = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}$$

$$\vec{r}_0 = x_0 \vec{i} + y_0 \vec{j}$$



加速度 $\begin{cases} \boldsymbol{a}_x = 0 \\ \boldsymbol{a}_y = -\boldsymbol{g} \end{cases}$ 初始条件 $\begin{cases} \boldsymbol{v}_{0x} = \boldsymbol{v}_0 \cos\boldsymbol{\theta} \\ \boldsymbol{v}_{0y} = \boldsymbol{v}_0 \sin\boldsymbol{\theta} \end{cases}$ $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$

在任意时刻t，小球的速度和位置：$\begin{cases} \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t \\ \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \dfrac{1}{2}\vec{a}t^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos\theta \\ v_y = v_0 \sin\theta - gt \end{cases} \qquad \begin{cases} x = v_0 \cos\theta \cdot t \\ y = v_0 \sin\theta \cdot t - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

$$\boxed{y = x\tan\theta - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2\theta}}$$

讨论：

a) 物体到达最高点需要的时间

$$t_P = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

b） 飞行中的最大高度

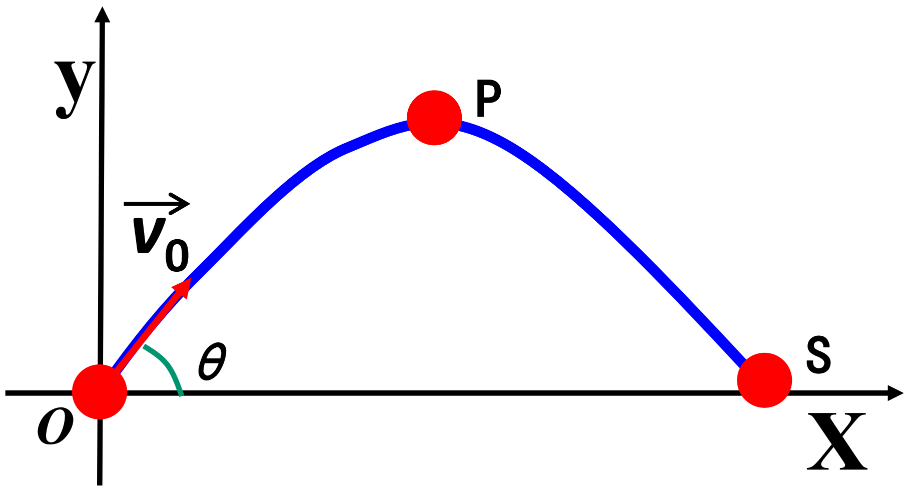
$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

c） 物体回落到抛出点高度所用的时间

$$t_s = 2t_p = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$$

d） 飞行的射程

$$|OS| = \frac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$$



例4

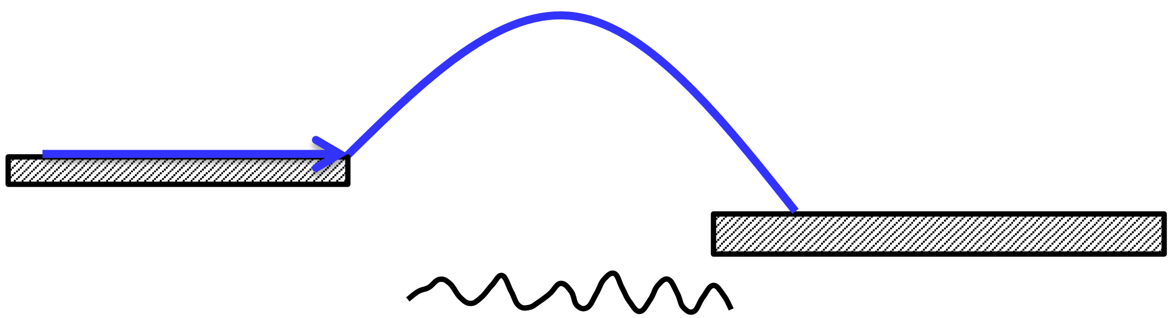
为迎接香港回归，柯受良1997年6月1日驾车飞越黄河壶口。东岸跑道长265m，柯驾车从跑道东端起动，到达跑道终端时速度为150km/h，他随即以仰角5°冲出，飞跃跨度为57m，安全落到西岸木桥上。

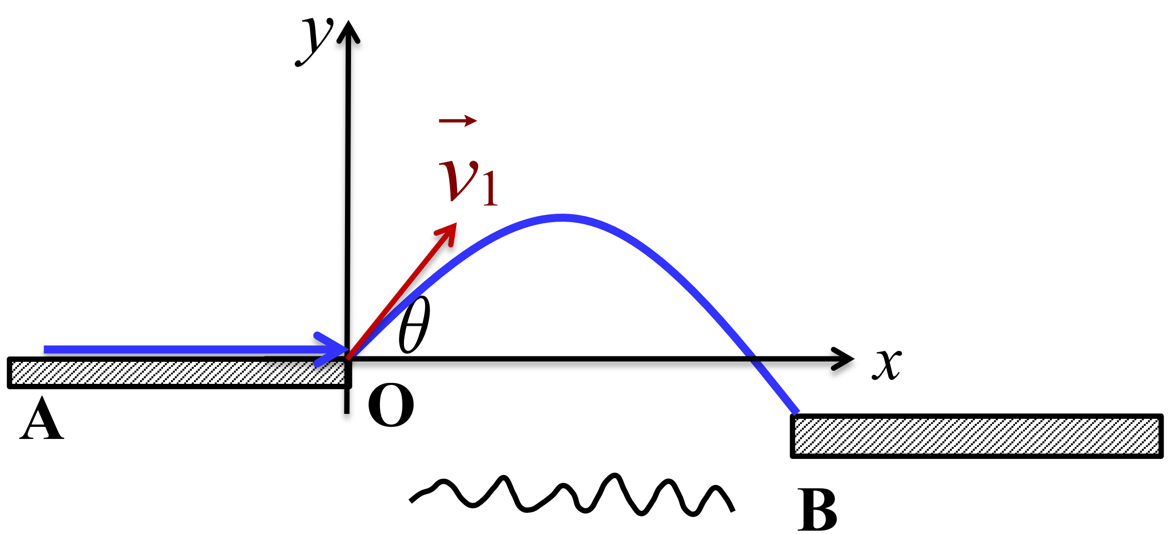
（1）按匀加速运动计算，柯在东岸驱车的加速度和时间各是多少？

（2）柯跨越黄河用了多长时间？

（3）若起飞点高出河面10.0m，柯驾车飞行的最高点离河面几米？

（4）西岸木桥桥面和起飞点的高度差是多少？





A⟶O: 第一阶段是匀加速直线运动 $\vec{a}_1 = a\vec{i} + 0\vec{j}$

加速度均为常矢量

O⟶B: 第二阶段是抛体运动 $\vec{a}_2 = 0\vec{i} + (-g)\vec{j}$

$\vec{a}$=常矢量

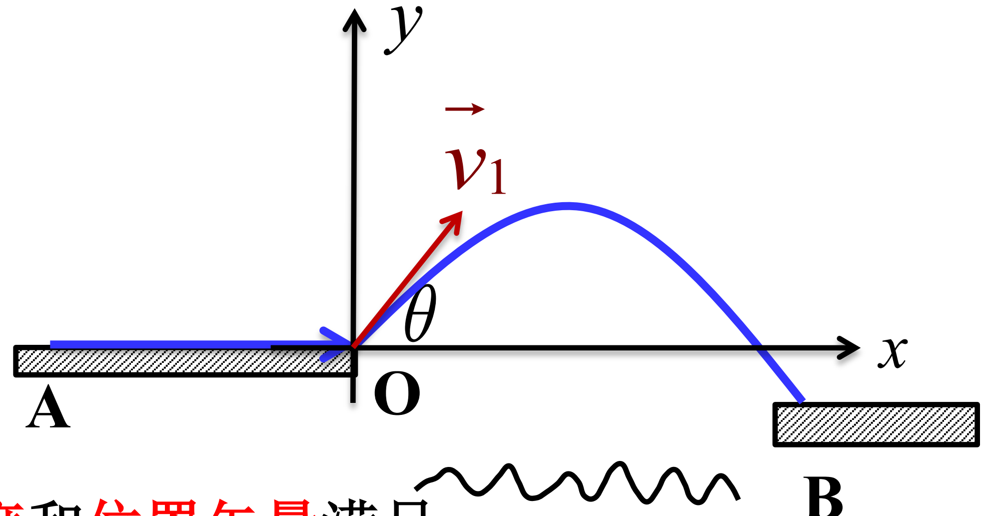
初始条件: $\vec{r}_0, \vec{v}_0$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t}$$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2}$$

（1）按匀加速运动计算，柯在东岸驱车的加速度和时间各是多少？

在东岸驱车是第一阶段，从A点到坐标原点O



加速度 $\vec{a}_x = a\vec{i}$

初始条件 $\vec{v}_{0,x} = 0\vec{i}$

$\vec{x}_0 = -256\vec{i}$

在加速过程的任一时刻，其速度和位置矢量满足

$$\begin{cases} \vec{v}_x = \vec{v}_{0,x} + \vec{a}_x t = at\vec{i} \\ \vec{x}_1 = \vec{x}_0 + \vec{v}_{0,x} t + \dfrac{1}{2}\vec{a}_x t^2 = \left(-265 + \dfrac{1}{2}at^2\right)\vec{i} \end{cases}$$

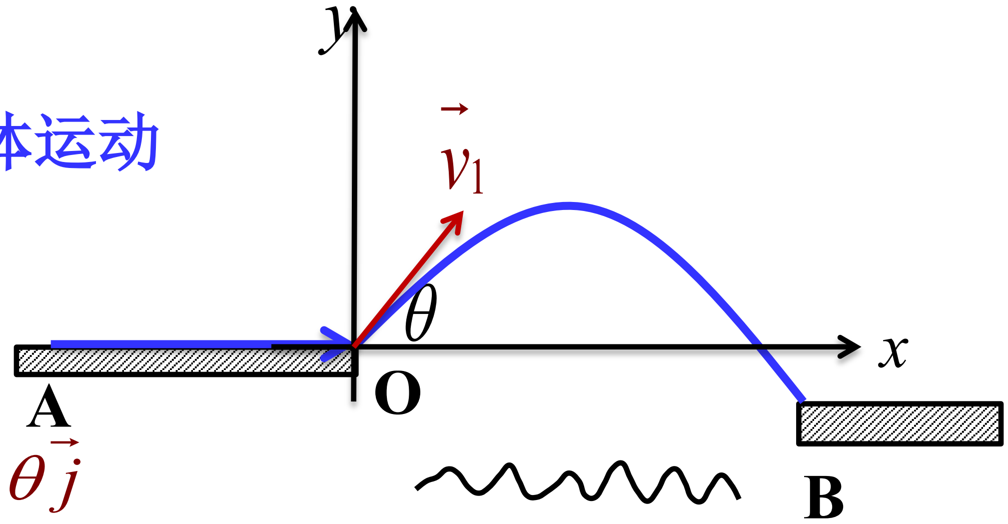
当到达O点时，v_1=150km/h，x=0km，即

$$v_1 = at = 150\text{km/h} \qquad x_1 = -265 + \frac{1}{2}at^2 = 0$$

由此得到a=3.28m/s^2 t=12.7s

（2）柯跨越黄河用了多长时间？

O ⟶ B: 第二阶段是抛体运动



加速度 $\vec{a}_2 = 0\vec{i} + (-g)\vec{j}$

初始条件

$$\vec{v}_0 = v_1\cos\theta\vec{i} + v_1\sin\theta\vec{j}$$

$$\vec{r}_0 = 0\vec{i} + 0\vec{j}$$

在任意t时刻，其速度和位矢如下：

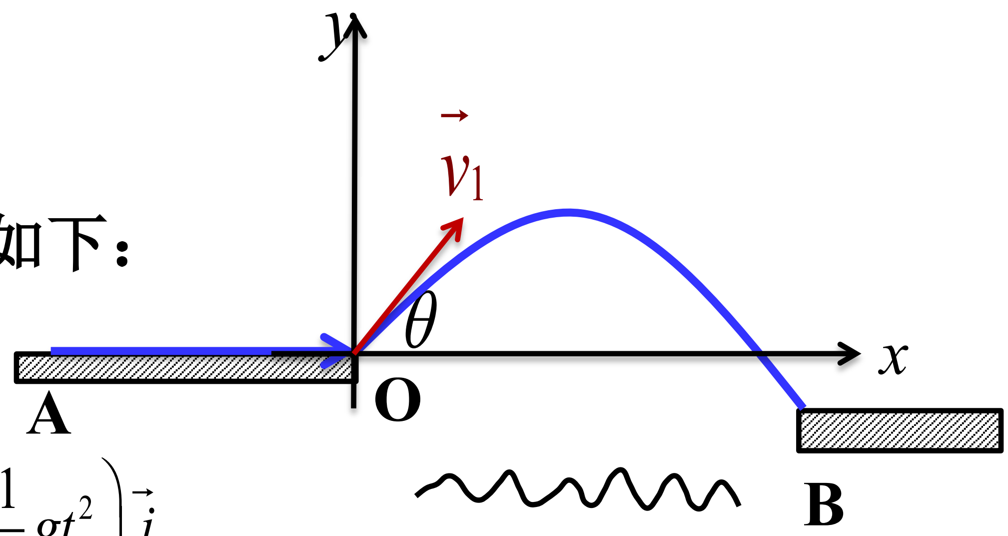
$$\vec{v}_t = (v_1\cos\theta + 0)\vec{i} + (v_1\sin\theta - gt)\vec{j}$$

$$\vec{r}_t = \left(0 + v_1 t\cos\theta + 0\right)\vec{i} + \left(0 + v_1 t\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2\right)\vec{j}$$

跨越黄河时，$x = v_1 t\cos\theta = 57m$

t=1.37s

（3）若起飞点高出河面10.0m，柯驾车飞行的最高点离河面几米？



在任意t时刻，其速度和位矢如下：

$$\vec{v}_t=(v_1\cos\theta+0)\vec{i}+(v_1\sin\theta-gt)\vec{j}$$

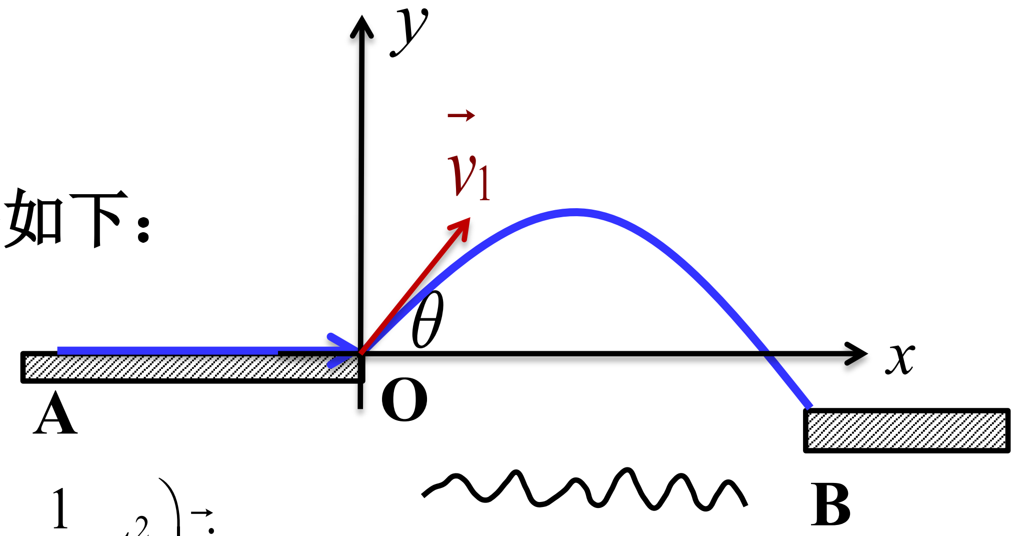
$$\vec{r}_t=\left(0+v_1t\cos\theta+0\right)\vec{i}+\left(0+v_1t\sin\theta-\frac{1}{2}gt^2\right)\vec{j}$$

在最高点时，满足 $v_y=v_1\sin\theta-gt=0$

由此得到最高点时 $y=v_1t\sin\theta-\frac{1}{2}gt^2$

最高点距离河面：**h=10+y**

（4）西岸木桥桥面和起飞点的高度差是多少？



在任意t时刻，其速度和位矢如下：

$$\vec{v}_t=(v_1\cos\theta+0)\vec{i}+(v_1\sin\theta-gt)\vec{j}$$

$$\vec{r}_t=\left(0+v_1t\cos\theta+0\right)\vec{i}+\left(0+v_1t\sin\theta-\frac{1}{2}gt^2\right)\vec{j}$$

当到达西岸木桥时， $x=v_1t\cos\theta=57m$

$y=v_1t\sin\theta-\dfrac{1}{2}gt^2$ 这就是西岸木桥和起飞点的高度差