一、反函数的导数

定理 如果函数$x=\varphi(y)$在某区间I_y内单调、可导且$\varphi'(y)\neq 0$，那末它的反函数 $y=f(x)$在对应区间I_x内也可导，且有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}.$$

二、复合函数的求导法则

定理　如果函数$u=\varphi(x)$在点 x_0可导，而$y=f(u)$在点$u_0=\varphi(x_0)$可导，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在点x_0可导，且其导数为

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}=f'(u_0)\cdot\varphi'(x_0).$$

即　因变量对自变量求导，等于因变量对中间变量求导，乘以中间变量对自变量求导.（链式法则）

推广 设 $y = f(u),\ u = \varphi(v),\ v = \psi(x)$,

则复合函数 $y = f\{\varphi[\psi(x)]\}$的导数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

例3 求函数 $y = \ln \sin x$ 的导数.

解 $\because y = \ln u, u = \sin x.$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

例4　求函数 $y=(x^2+1)^{10}$ 的导数.

解　$$\frac{dy}{dx}=10(x^2+1)^9\cdot(x^2+1)'$$

$$=10(x^2+1)^9\cdot 2x=20x(x^2+1)^9.$$

例5　求函数 $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$ 的导数. $(a>0)$

解　$$y'=\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}\right)'+\left(\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right)'$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$=\sqrt{a^2-x^2}.$$

例6 求函数 $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{x-2}}\ (x>2)$ 的导数.

解 $\because y=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)-\dfrac{1}{3}\ln(x-2)$,

$$\therefore y'=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x-\frac{1}{3(x-2)}=\frac{x}{x^2+1}-\frac{1}{3(x-2)}$$

例7 求函数 $y=e^{\sin\frac{1}{x}}$ 的导数.

解 $$y'=e^{\sin\frac{1}{x}}(\sin\frac{1}{x})'=e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(\frac{1}{x})'$$

$$=-\frac{1}{x^2}e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}.$$

例8 已知 $y = \ln\cos\left(e^x\right)$, 求 $\dfrac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = [\ln\cos(e^x)]'$$

$$= \frac{1}{\cos\left(e^x\right)}[\cos(e^x)]'$$

$$= \frac{-\sin\left(e^x\right)}{\cos\left(e^x\right)}\left(e^x\right)'$$

$$= -e^x\tan(e^x).$$

上页 下页 返回

例9 已知 $y = \sin nx \cdot \sin^n x \quad (n\text{为常数})$，求 y'.

解 $y' = (\sin nx)' \sin^n x + \sin nx \cdot (\sin^n x)'$

$$= n\cos nx \cdot \sin^n x + \sin nx \cdot n\sin^{n-1} x \cdot \cos x$$

$$= n\sin^{n-1} x(\cos nx \cdot \sin x + \sin nx \cdot \cos x)$$

$$= n\sin^{n-1} x \cdot \sin(n+1)x.$$

例10 求函数 $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ 的导数.

解 $$y'=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}(x+\sqrt{x+\sqrt{x}})'$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}(x+\sqrt{x})')$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}(1+\frac{1}{2\sqrt{x}}))$$

$$=\frac{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}.$$

例11 求函数 $y = f^{n}[\varphi^{n}(\sin x^{n})]$ 的导数.

解 $y' = nf^{n-1}[\varphi^{n}(\sin x^{n})]\cdot f'[\varphi^{n}(\sin x^{n})]$

$\cdot n\varphi^{n-1}(\sin x^{n})\cdot\varphi'(\sin x^{n})\cdot\cos x^{n}\cdot nx^{n-1}$

$= n^{3}\cdot x^{n-1}\cos x^{n}\cdot f^{n-1}[\varphi^{n}(\sin x^{n})]\cdot$

$\varphi^{n-1}(\sin x^{n})\cdot f'[\varphi^{n}(\sin x^{n})]\cdot\varphi'(\sin x^{n})$.

三、隐函数的导数

定义:由方程所确定的函数 $y = y(x)$称为隐函数.

$y = f(x)$ 形式称为显函数.

$F(x, y) = 0 \Longrightarrow y = f(x)$　隐函数的显化

问题:隐函数不易显化或不能显化如何求导?

隐函数求导法则:

用复合函数求导法则直接对方程两边求导.

例1 求由方程 $xy - e^x + e^y = 0$所确定的隐函数 y的导数 $\frac{dy}{dx}, \frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$.

解 方程两边对x求导,

$$y + x\frac{dy}{dx} - e^x + e^y\frac{dy}{dx} = 0$$

解得 $\frac{dy}{dx} = \frac{e^x - y}{x + e^y}$, 由原方程知 $x = 0, y = 0,$

$$\therefore \frac{dy}{dx}\Big|_{x=0} = \frac{e^x - y}{x + e^y}\Big|_{\substack{x=0\\y=0}} = 1.$$

上页 下页 返回

例2 设曲线C的方程为$x^3+y^3=3xy$，求过C上点$(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$的切线方程，并证明曲线$C$在该点的法线通过原点.

解 方程两边对x求导， $3x^2+3y^2y'=3y+3xy'$

$$\therefore y'\Big|_{(\frac{3}{2},\frac{3}{2})}=\frac{y-x^2}{y^2-x}\Big|_{(\frac{3}{2},\frac{3}{2})}=-1.$$

所求切线方程为 $y-\frac{3}{2}=-(x-\frac{3}{2})$ 即 $x+y-3=0.$

法线方程为 $y-\frac{3}{2}=x-\frac{3}{2}$ 即 $y=x$， 显然通过原点.

四、对数求导法

观察函数 $y = \dfrac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2 e^x}$， $y = x^{\sin x}$.

方法:

先在方程两边取对数，然后利用隐函数的求导方法求出导数.

--------对数求导法

适用范围:

多个函数相乘和幂指函数 $u(x)^{v(x)}$ 的情形.

例4 设 $y=\dfrac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}$, 求$y'$.

解 等式两边取对数得

$$\ln y=\ln(x+1)+\frac{1}{3}\ln(x-1)-2\ln(x+4)-x$$

上式两边对 x求导得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1$$

$$\therefore y'=\frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}\left[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1\right]$$

例5　设 $y = x^{\sin x}\ (x > 0)$, 求y'.

解　等式两边取对数得 $\ln y = \sin x \cdot \ln x$

上式两边对x求导得

$$\frac{1}{y}y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

$$\therefore\ y' = y(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x})$$

$$= x^{\sin x}(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x})$$

一般地

$$f(x) = u(x)^{v(x)} \quad (u(x) > 0)$$

$$\because \ln f(x) = v(x) \cdot \ln u(x)$$

$$又\because \frac{d}{dx}\ln f(x) = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{d}{dx} f(x)$$

$$\therefore f'(x) = f(x) \cdot \frac{d}{dx}\ln f(x)$$

$$\therefore f'(x) = u(x)^{v(x)}[v'(x) \cdot \ln u(x) + \frac{v(x)u'(x)}{u(x)}]$$