8. 利用高斯公式计算曲面积分:

(1) $\oiint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是柱面 $x^2+y^2=a^2\ (a>0)$和$z=0,z=1$ 所围的外侧.

解: $\oiint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$=\pi a^2$

(2) $\oiint\limits_{\Sigma} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$, 其中 Σ 为平面 $x+y+z=1,x=0,y=0,z=0$ 所围立体表面的外侧.

解: 原式$=\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$=3\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}x\,\mathrm{d}z$

$=\frac{3}{2}\int_0^1(x-2x^2+x^3)\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{8}$

(3) $\oiint\limits_{\Sigma} \mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 是圆锥面 $z = -\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z = -1$ 所截下的有限部分曲面的上侧.

解：补一曲面 Σ_1：$z=-1$，$x^2+y^2\le 1$. 取下侧.

$$\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} dydz+ydzdx+2zdxdy=\iiint\limits_{\Omega}(0+1+2)dxdydz=3\iiint\limits_{\Omega}dV=3\cdot\frac{1}{3}\pi=\pi$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1} dydz+ydzdx+2zdxdy=-(-2\iint\limits_{D_{xy}}dxdy)=2\pi$$

$$\oiint\limits_{\Sigma} dydz+ydzdx+2zdxdy=(\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1})dydz+ydzdx+2zdxdy=-\pi.$$

(4) $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 为下半球面 $z = -\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧.

解. 补一圆面 Σ_1：$x^2+y^2=a^2$，取下侧

$$则原式=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1} xdydz+ydzdx+zdxdy-\iint\limits_{\Sigma_1} xdydz+ydzdx+zdxdy$$

$$=-\iiint\limits_{\Omega}(1+1+1)dV-0$$

$$=-2\pi a^3$$

9. 求向量场 $\vec{u}(x,y,z) = xy^2\vec{i} + ye^z\vec{j} + x\ln(1+z)^2\vec{k}$ 在点 $P(1,1,0)$ 处的散度 $div\,\vec{u}$

解. $P=xy^2$ $Q=ye^z$ $R=x\ln(1+z)^2$

$$\frac{\partial P}{\partial x}\Big|_{(1,1,0)}=1$$

$$\frac{\partial Q}{\partial y}\Big|_{(1,1,0)}=1$$

$$\frac{\partial R}{\partial z}\Big|_{(1,1,0)}=\frac{2x}{1+z}\Big|_{(1,1,0)}=2$$

$$\therefore div\,\vec{u}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=4.$$