第 4 章 微分中值定理与导数的应用

1. 验证函数 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, 0\le x\le 1.\\ 1-x^2. -1\le x\le 0.\end{cases}$ 在 $-1\le x\le 1$ 上是否满足拉格朗日定理条件？如满足, 求出满足定理的 ξ.

解: $\because \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$

$\therefore$ f(x) ~~有~~ 在 $[-1,1]$ 连续,

$f'_-(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{-x^2}{x} = 0$

$f'_+(0) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{x^2}{x} = 0$

$\therefore$ f(x) 在 $(-1,1)$ 内可导

$\because f'(\xi) = \dfrac{f(1)-f(-1)}{2} = 1$

$f'(x) = \begin{cases} 2x, & 0\le x\le 1 \\ -2x, & -1\le x\le 0\end{cases}$

$\therefore \xi = \pm\dfrac{1}{2}$.

2. 若 $\frac{a_n}{n+1}+\frac{a_{n-1}}{n}+\ldots+a_0=0$, 求证: 方程 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0=0$ 在(0,1)内至少有一实根.

证 ~~解~~: 设 $f(x) = \dfrac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \dfrac{a_{n-1}}{n}x^n + \cdots + a_0 x$

$\because f(0)=0$, $f(1)=0$

$\because$ f(x) 在 $[0,1]$ 内连续, 且在 $(0,1)$ 内可导

由罗尔定理得, $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ 在 $(0,1)$ 至少有一实根

3. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$ 连续, 在(a,b) 二阶可导, 且 $f(a)=f(b)=0$, $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$, 求证: 存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f''(\xi)<0$.

证:

$\because \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} > 0$.

$\therefore$ 存在一点 c $\in (a,b)$ 使得, $f(c) > f(a) = 0$.

$\therefore$ 由拉格朗日中值定理得

存在 $\xi_1 \in (a,c)$ 使

$f'(\xi_1) = \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a} > 0$.

同理: 存在 $\xi_2 \in (c,b)$ 使

$f'(\xi_2) = \dfrac{f(c)-f(b)}{c-b} < 0$.

由拉格朗日中值定理得, 存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2)$ 使

$f''(\xi) = \dfrac{f'(\xi_1)-f'(\xi_2)}{\xi_1-\xi_2} < 0$.

18. 求由方程$2y-x=(x-y)\ln(x-y)$ 所确定的函数 $y=y(x)$的微分dy.

$$2dy-dx=(dx-dy)\ln(x-y)+(x-y)\frac{dx-dy}{x-y}$$

$$dy=\frac{\ln(x-y)+2}{\ln(x-y)+3}dx$$

19. 计算下列各式近似值（精确到0.0001）:

(1) $\sin 1^o$.

$$\sin 1^{\circ}=\sin(0+\frac{\pi}{180})\approx\sin 0+\cos 0\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{180}\approx 0.0175$$

(2) $\sqrt[3]{998}$.

$$\sqrt[3]{998}=\sqrt[3]{1000-2}\approx\sqrt[3]{1000}+\frac{1}{3\sqrt[3]{1000^2}}(-2)=10-\frac{2}{300}\approx 9.9933$$

20. 求曲线$y=x^2$上一点$P_0(x_0,y_0)$, 使得过P_0的切线与$2x-6y+5=0$ 垂直.

解: $y'=2x$

$2x_0=-3$

$x_0=-\frac{3}{2}$

$\therefore P(-\frac{3}{2},\frac{9}{4})$