第八节 多元函数的极值及其求法

一、多元函数的极值

二、最值应用问题

三、条件极值

一、 多元函数的极值

定义: 若函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有

$$f(x, y) \le f(x_0, y_0) \quad (\text{或 } f(x, y) \ge f(x_0, y_0))$$

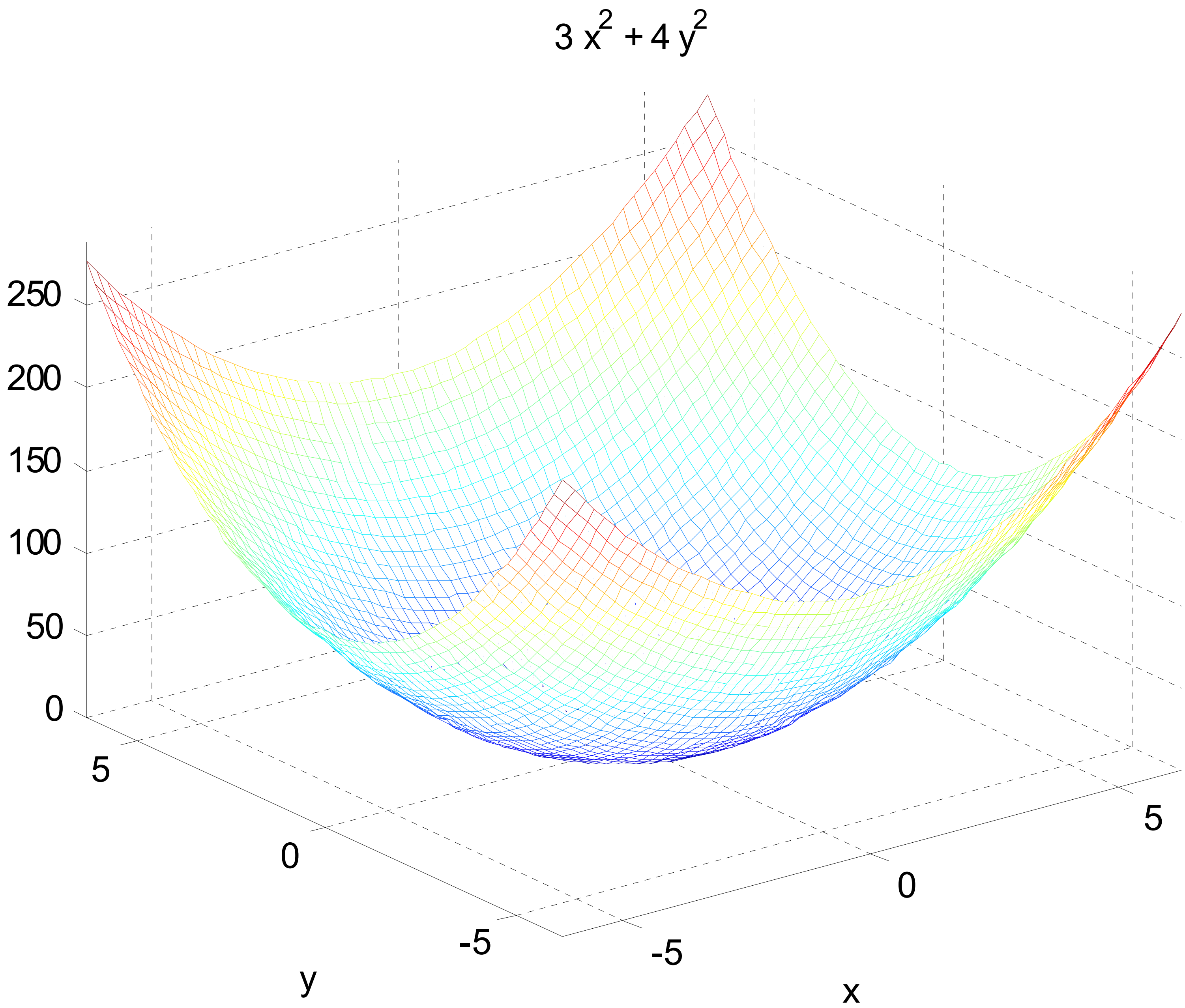
则称函数在该点取得极大值(极小值). 极大值和极小值统称为极值, 使函数取得极值的点称为极值点.

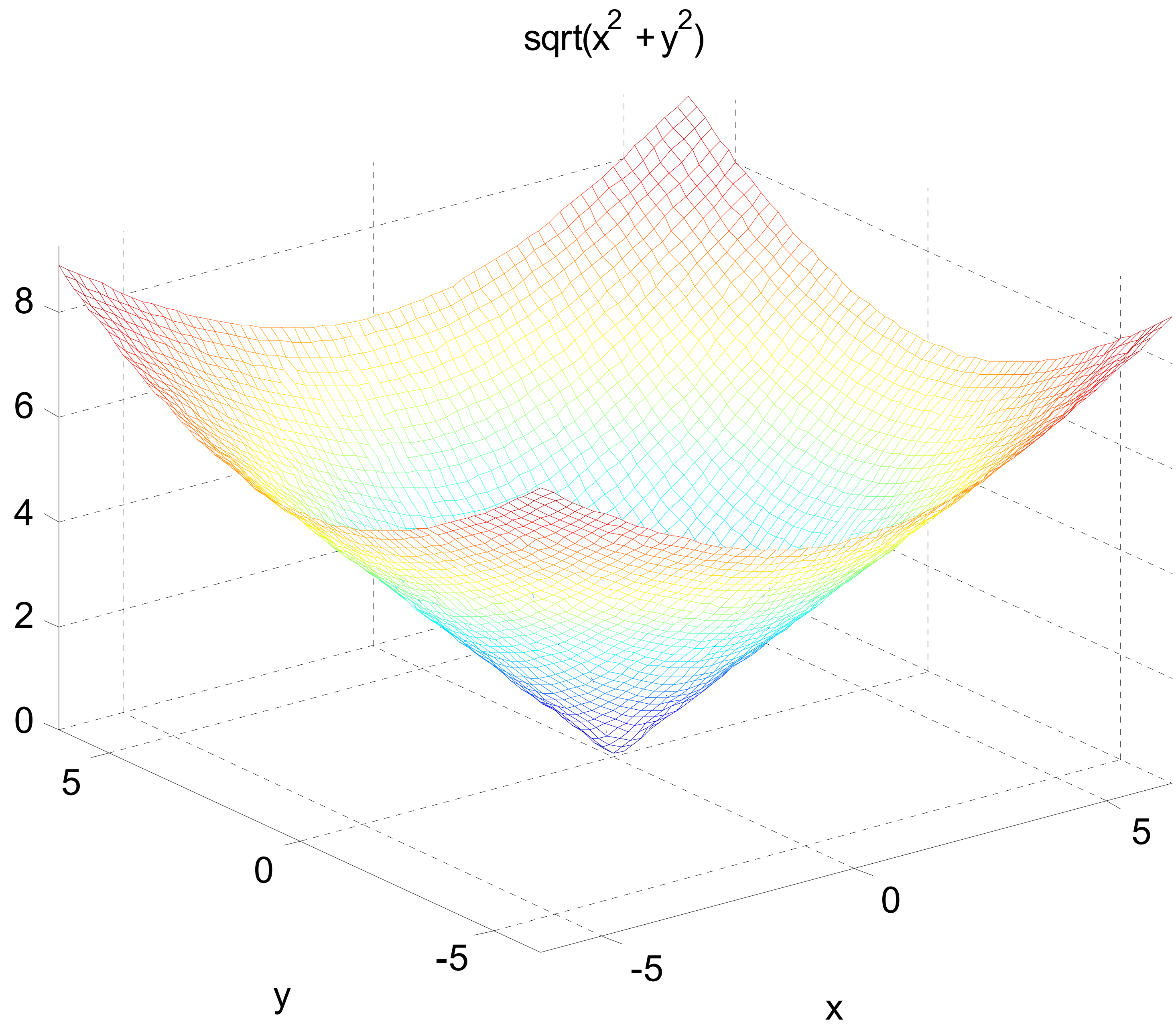
例如：

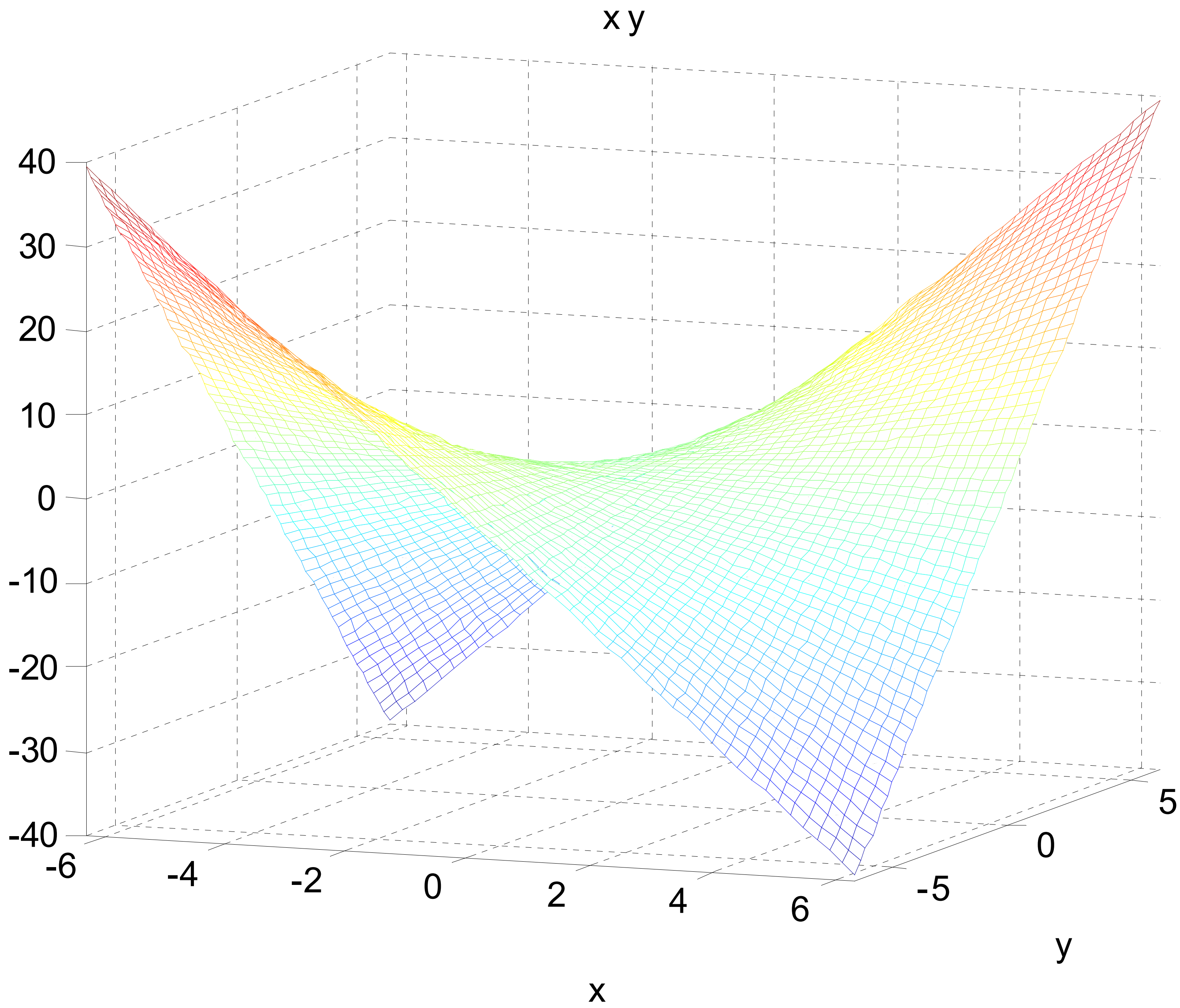
$z = 3x^2 + 4y^2$ 在点 (0,0) 有极小值;

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在点 (0,0) 有极小值;

$z = xy$ 在点 (0,0) 无极值.


$3 x^2 + 4 y^2$
250
200
150
100
50
0
5
0
-5
y
-5
0
5
x


sqrt(x2 +y2)
8
6
4
2
0
5
0
-5
y
-5
0
5
x


x y
40
30
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-6
-4
-2
0
2
4
6
x
5
0
-5
y

定理1 (必要条件) 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 存在偏导数, 且在该点取得极值 , 则有

$$f_x'(x_0, y_0) = 0 , \quad f_y'(x_0, y_0) = 0$$

证: 因 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 取得极值 , 故

$$z = f(x, y_0) \text{ 在 } x = x_0 \text{ 取得极值}$$

$$z = f(x_0, y) \text{ 在 } y = y_0 \text{ 取得极值}$$

据一元函数极值的必要条件可知定理结论成立.

说明: 使偏导数都为 0 的点称为驻点 .

但驻点不一定是极值点.

例如, $z = xy$ 有驻点(0, 0), 但在该点不取极值.

定理2 (充分条件) 若函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的的某邻域内具有一阶和二阶连续偏导数, 且

$$f_x(x_0, y_0) = 0,\ f_y(x_0, y_0) = 0$$

令 $A = f_{xx}(x_0, y_0),\ B = f_{xy}(x_0, y_0),\ C = f_{yy}(x_0, y_0)$

则: 1) 当 $AC - B^2 > 0$ 时, 具有极值 $\begin{cases} A<0 \text{ 时取极大值;} \\ A>0 \text{ 时取极小值.} \end{cases}$

2) 当 $AC - B^2 < 0$ 时, 没有极值.

3) 当 $AC - B^2 = 0$ 时, 不能确定, 需另行讨论.

二、极值充分条件的证明

定理2 (充分条件) 若函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内具有一阶和二阶连续偏导数, 且

$$f_x(x_0, y_0) = 0, \; f_y(x_0, y_0) = 0$$

令 $A = f_{xx}(x_0, y_0), B = f_{xy}(x_0, y_0), C = f_{yy}(x_0, y_0)$

则: 1) 当 $AC - B^2 > 0$ 时, 具有极值 $\begin{cases} A < 0 \text{ 时取极大值;} \\ A > 0 \text{ 时取极小值.} \end{cases}$

2) 当 $AC - B^2 < 0$ 时, 没有极值.

3) 当 $AC - B^2 = 0$ 时, 不能确定, 需另行讨论.

证: 由二元函数的泰勒公式, 并注意

$$f_x(x_0, y_0) = 0,\ f_y(x_0, y_0) = 0$$

则有 $\Delta z = f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0)$

$$= \frac{1}{2}[f_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)h^2$$

$$+ 2f_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)hk$$

$$+ f_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)k^2]$$

由于 $f(x, y)$ 的二阶偏导数在点(x_0, y_0) 连续, 所以

$$f_{xx}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) = A + \alpha$$

$$f_{xy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) = B + \beta$$

$$f_{yy}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) = C + \gamma$$

其中α，β，γ是当$h \to 0$，$k \to 0$时的无穷小量，于是

$$\Delta z = \tfrac{1}{2}[\underline{Ah^2 + 2Bhk + Ck^2}] + \tfrac{1}{2}[\alpha h^2 + 2\beta hk + \gamma k^2]$$

$$= \tfrac{1}{2}Q(h,k) + o(\rho^2) \qquad (\rho = \sqrt{h^2 + k^2})$$

因此当$|h|$，$|k|$很小时，Δz的正负号可由$Q(h,k)$确定.

(1) 当$AC - B^2 > 0$时，必有$A \neq 0$，且A与C同号，

$$\because Q(h,k) = \frac{1}{A}[(A^2h^2 + 2ABhk + B^2k^2) + (AC - B^2)k^2]$$

$$= \frac{1}{A}[(Ah + Bk)^2) + (AC - B^2)k^2]$$

可见，当$A > 0$时，$Q(h,k) > 0$，从而$\Delta z > 0$，因此$f(x,y)$在点(x_0, y_0)有极小值；

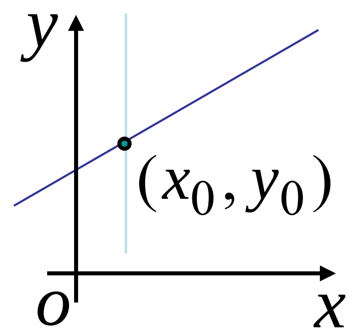
当$A<0$时，$Q(h,k)<0$，从而 $\triangle z<0$，因此 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 有极大值；

(2) 当 $AC-B^2<0$ 时，若A，C不全为零，无妨设 $A\neq 0$，

则 $$Q(h,k)=\frac{1}{A}[(Ah+Bk)^2)+(AC-B^2)k^2]$$

当(x,y)沿直线 $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ 接近(x_0,y_0) 时，有 $Ah+Bk=0$，故 $Q(h,k)$ 与 A 异号；

当(x,y)沿直线 $y-y_0=0$ 接近(x_0,y_0)时，有 $k=0$，故 $Q(h,k)$ 与 A 同号.



可见 $\triangle z$ 在 (x_0,y_0) 邻近有正有负，因此 $f(x,y)$ 在点(x_0,y_0)无极值；

若 $A=C=0$,则必有 $B\neq 0$， 不妨设 $B>0$，此时

$$Q(h,k)=Ah^2+2Bhk+Ck^2=2Bhk$$

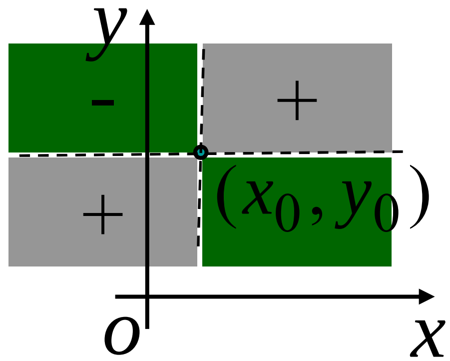
对点 (x_0+h, y_0+k)

当 h, k 同号时, $Q(h,k)>0$, 从而 $\Delta z>0$,

当 h, k 异号时, $Q(h,k)<0$, 从而 $\Delta z<0$,

可见 Δz 在 (x_0, y_0) 邻近有正有负,

因此 $f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 无极值 ;



(3) 当 $AC-B^2=0$ 时,

$$\left.\begin{array}{l}\text{若 } A\neq 0,\ \text{则 } Q(h,k)=\frac{1}{A}(Ah+Bk)^2 \\ \text{若 } A=0,\ \text{则 } B=0,\ Q(h,k)=Ck^2\end{array}\right\} \begin{array}{l}Q(h,k)\text{可能} \\ \text{为零或非零}\end{array}$$

此时

$$\Delta z = \frac{1}{2} Q(h,k) + o(\rho^2)$$

因为 $Q(h,k) = 0$ 时, Δz 的正负号由 $o(\rho^2)$ 确定, 因此不能断定 (x_0, y_0) 是否为极值点 .

例1. 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值.

解: 第一步 求驻点.

解方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0 \\ f_y(x,y)=-3y^2+6y=0 \end{cases}$

得驻点: (1, 0) , (1, 2) , (–3, 0) , (–3, 2) .

第二步 判别. 求二阶偏导数

$\underset{A}{\underline{f_{xx}(x,y)=6x+6}}$, $\underset{B}{\underline{f_{xy}(x,y)=0}}$, $\underset{C}{\underline{f_{yy}(x,y)=-6y+6}}$

在点(1,0) 处 $A=12,\ B=0,\ C=6,$

$$AC-B^2=12\times 6>0,\ A>0,$$

$\therefore f(1,0)=-5$ 为极小值;

在点(1,2) 处 $A=12, B=0, C=-6$

$$AC-B^2=12\times(-6)<0,\ \therefore f(1,2)\text{不是极值;}$$

在点(−3,0) 处 $A=-12,\ B=0,\ C=6,$

$$AC-B^2=-12\times6<0,\ \therefore f(-3,0)\text{不是极值;}$$

在点(−3,2) 处 $A=-12,\ B=0,\ C=-6$

$$AC-B^2=-12\times(-6)>0,\ A<0,$$

$$\therefore f(-3,2)=31\text{为极大值.}$$

$f_{xx}(x,y)=6x+6,\ f_{xy}(x,y)=0,\ f_{yy}(x,y)=-6y+6$

A B C

例2.讨论函数 $z=x^3+y^3$ 及 $z=(x^2+y^2)^2$ 在点(0,0)是否取得极值.

解: 显然 (0,0) 都是它们的驻点 , 并且在 (0,0) 都有

$$AC-B^2=0$$

$z=x^3+y^3$ 在(0,0)点邻域内的取值

可能为 $\begin{cases}\textbf{正}\\ \textbf{负}\\ 0\end{cases}$, 因此 $z(0,0)$ 不是极值.

当 $x^2+y^2\neq 0$ 时, $z=(x^2+y^2)^2>z\big|_{(0,0)}=0$

因此 $z(0,0)=(x^2+y^2)^2\big|_{(0,0)}=0$ 为极小值.