第三节 高阶微分方程---12.3.4 二阶常系数非齐次线性微分方程

$y'' + py' + qy = f(x)$ 二阶常系数非齐次线性方程

对应齐次方程 $y'' + py' + qy = 0,$

通解结构 $y = Y + y^*,$

常见类型 $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}, \quad P_m(x)e^{\lambda x}\cos\beta x,$

$P_m(x)e^{\lambda x}\sin\beta x, \cdots$

难点： 如何求特解？ **方法：** 待定系数法.

一、$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型

设非齐方程特解为 $y^*=Q(x)e^{\lambda x}$ 代入原方程

$$Q''(x)+\underline{(2\lambda+p)}Q'(x)+\underline{(\lambda^2+p\lambda+q)}Q(x)=P_m(x)$$

(1) 若λ不是特征方程的根，$\lambda^2+p\lambda+q\neq 0$,

可设 $Q(x)=Q_m(x)$, $y^*=Q_m(x)e^{\lambda x}$;

(2) 若λ是特征方程的单根，

$\lambda^2+p\lambda+q=0$, $2\lambda+p\neq 0$,

可设 $Q(x)=xQ_m(x)$, $y^*=xQ_m(x)e^{\lambda x}$;

计算机科学与软件工程学院
School of Computer Science and Software Engineering

(3) 若λ是特征方程的重根，

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0, \qquad 2\lambda + p = 0,$$

可设 $Q(x) = x^2 Q_m(x)$, $\qquad y^* = x^2 Q_m(x) e^{\lambda x}.$

综上讨论

设 $y^* = x^k e^{\lambda x} Q_m(x)$， $k = \begin{cases} 0 & \lambda\text{不是根} \\ 1 & \lambda\text{是单根,} \\ 2 & \lambda\text{是重根} \end{cases}$

注意 上述结论可推广到n阶常系数非齐次线性微分方程（k是重根次数）.

特别地 $y'' + py' + qy = Ae^{\lambda x}$

$$y^* = \begin{cases} \dfrac{A}{\lambda^2 + p\lambda + q} e^{\lambda x}, & \lambda\text{不是特征方程的根} \\ \dfrac{A}{2\lambda + p} x e^{\lambda x} & \lambda\text{是特征方程的单根} \\ \dfrac{A}{2} x^2 e^{\lambda x} & \lambda\text{是特征方程的重根} \end{cases},$$

例1 求微分方程$y'' + y' = x^2$的通解。

例2 求方程$y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}$的通解。

例3 写出微分方程$y'' - 4y' + 4y = 6x^2 + 8e^{2x}$

的待定特解的形式。

二、$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$型

$f(x)=e^{\lambda x}[P_l\cos\omega x+P_n\sin\omega x]$ 利用欧拉公式

$$=e^{\lambda x}[P_l\frac{e^{j\omega x}+e^{-j\omega x}}{2}+P_n\frac{e^{j\omega x}-e^{-j\omega x}}{2j}]$$

$$=(\frac{P_l}{2}+\frac{P_n}{2j})e^{(\lambda+j\omega)x}+(\frac{P_l}{2}-\frac{P_n}{2j})e^{(\lambda-j\omega)x}$$

$$=P(x)e^{(\lambda+j\omega)x}+\overline{P}(x)e^{(\lambda-j\omega)x},$$

设 $y''+py'+qy=P(x)e^{(\lambda+j\omega)x}$， $y_1^*=x^kQ_me^{(\lambda+j\omega)x}$,

设 $y''+py'+qy=\overline{P}(x)e^{(\lambda-j\omega)x}$， $\overline{y}_1^{*}=x^kQ_me^{(\lambda-j\omega)x}$，

$$\therefore y^{*}=x^ke^{\lambda x}[Q_me^{j\omega x}+\overline{Q}_me^{-j\omega x}]$$

$$=x^ke^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x+R_m^{(2)}(x)\sin\omega x],$$

其中 $R_m^{(1)}(x),R_m^{(2)}(x)$是$m$次多项式，$m=\max\{l,n\}$

$$k=\begin{cases}0 & \lambda\pm j\omega\text{不是根}\\ 1 & \lambda\pm j\omega\text{是单根}\end{cases},$$

注意

上述结论可推广到n阶常系数非齐次线性微分方程.

例4　求方程 $y'' + y = 4\sin x$ 的通解.

例5　求方程 $y'' + y = x\cos 2x$ 的通解.

例6　求方程 $y'' + y = \tan x$ 的通解.

思考题

写出微分方程 $y'' - 4y' + 4y = 6x^2 + 8e^{2x}$

的待定特解的形式.

第三节 高阶微分方程---12.3.5 欧拉方程

形如

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$$

的方程(其中 $p_1, p_2 \cdots p_n$ 为常数) 叫**欧拉方程**.

特点： 各项未知函数导数的阶数与乘积因子自变量的方次数相同.

解法： 欧拉方程是特殊的变系数方程，通过变量代换可化为常系数微分方程.

作变量变换 $x = e^t$ 或 $t = \ln x$,

将自变量换为 t,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right), \quad \cdots\cdots$$

用 D 表示对自变量 t 求导的运算 $\dfrac{d}{dt}$，

上述结果可以写为

$$xy' = Dy,$$

$$x^2y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = (D^2 - D)y = D(D-1)y,$$

$$x^3y''' = \frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}$$

$$= (D^3 - 3D^2 + 2D)y = D(D-1)(D-2)y,$$

$$\cdots\cdots$$

一般地，$x^k y^{(k)} = D(D-1)\cdots(D-k+1)y.$

将上式代入欧拉方程，则化为以 t 为自变量的常系数线性微分方程. 求出这个方程的解后，把 t 换为 $\ln x$，即得到原方程的解.

例7 求欧拉方程

$$x^3 y''' + x^2 y'' - 4xy' = 3x^2$$ 的通解.