8. 利用泰勒公式求极限:

(1) $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

解: ∵ $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots o(x^{2m+1})$

$e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{(\frac{x^2}{2})^2}{2!} + \cdots o(x^{2m+1})$

∴ 原式 $= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}) - (1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}) + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{12}$

(2) $\lim_{x\to\infty}(x - x^2\ln(1+\frac{1}{x}))$.

解: ∵ $\ln(1+\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} - \frac{\frac{1}{x^2}}{2} + o(\frac{1}{x^2})$

∴ $\lim_{x\to\infty}[x - x^2\ln(1+\frac{1}{x})] = \lim_{x\to\infty}[x - x^2(\frac{1}{x} - \frac{\frac{1}{x^2}}{2} + o(\frac{1}{x^2}))]$

$= \lim_{x\to\infty}(x - x + \frac{1}{2} + o(\frac{1}{x^2})) = \frac{1}{2}$

9. 求函数$f(x) = \sqrt{x}$按$(x-4)$的幂展开的带有拉格朗日余项的3阶泰勒公式。

解: $f(x) = f(4) + f'(4)(x-4) + \frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2 + \frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}$

$= 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{(x-4)^3}{2^9} - \frac{5}{2^7}\xi^{-\frac{7}{2}}(x-4)^4$

(ξ 在4和x之间).

10. 证明: (1) $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}) + o(x^6), (x\to 0)$.

解: $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$

$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$

∴ $\ln(\frac{1+x}{1-x}) = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}) + o(x^6)\ (x\to 0)$

(2) $\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + o(x^2), (x\to 0)$.

解: 要证 $\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)$

即证 $x = (e^x-1)(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2+o(x^2))$

即证 $\frac{x-(e^x-1)(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2)}{(e^x-1)x^2} = o(x^2)$

即证 $\lim_{x\to 0}\frac{x-(e^x-1)(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2)}{(e^x-1)x^2} = 0$

$\lim_{x\to 0}\frac{x-(e^x-1)(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2)}{(e^x-1)x^2}$

$= \lim\frac{x-(e^x-1)(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2)}{x^3}$

由泰勒公式

$\lim_{x\to 0}\frac{x-(e^x-1)(1-\frac{1}{2}x+\frac{1}{12}x^2)}{x^3}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{x-[x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)](1-\cdots}{x^3}$

$= \lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{x^3} = 0$ 成立.

∴ $\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 + o(x^2)$ 成立 证毕

11. 设$f(x)$ 在点$x=0$ 的某个邻域内二阶可导, 且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+xf(x)}{x^3}=1$，试求 $f(0), f'(0)$ 及$f''(0)$ 的值.

解：根据麦克劳林公式

$\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$.

$xf(x) = f(0)+xf(0)+\frac{2f'(0)}{2!}x^2+\frac{3f''(0)}{3!}x^3+o(x^3)$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x+xf(x)}{x^3}=\frac{f(0)+xf(0)+\frac{2f'(0)}{2!}x^2+\frac{3f''(0)}{3!}x^3+o(x^3)+x-\frac{x^3}{3}}{x^3}$

令 $\begin{cases} f(0)+1=0 \\ f'(0)=0 \\ \frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}=1 \end{cases}$ ∴ $f(0)=-1$. $f'(0)=0$. $f''(0)=\frac{7}{3}$

12. 判定函数$y=\sqrt{2}x+\sin x+\cos x$ 的单调性.

解：$y'=\sqrt{2}+\cos x-\sin x=\sqrt{2}+\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-x)$.

∵ $-\sqrt{2}\le\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}-x)\le\sqrt{2}$.

∴ y' 恒大于0

∴ y在R上单调递增

13. 确定下列函数的单调区间:

(1) $y=\frac{10}{4x^3-9x^2+6x}$. 定义域 $x\neq 0$.

$y'=\frac{-10(12x^2-18x+6)}{(4x^3-9x^2+6x)^2}$. 令$y'=0$. 即 $12x^2-18x+6=0$.

解得 $x_1=1$, $x_2=\frac{1}{2}$.

x	$(-\infty,0)$	$(0,\frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2},1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	−	−	0	+	0	−
y	↘	↘		↗		↘

∴ y在$(-\infty,0)$, $(0,\frac{1}{2})$. $(1,+\infty)$上单调递减

在$[\frac{1}{2},1]$上单调递增.

(2) $y = \frac{1}{x}\ln^2 x$. 定义域 $x>0$

解：$y' = -\frac{1}{x^2}\ln^2 x + \frac{1}{x} 2\ln x \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2}\ln^2 x + \frac{1}{x^2} 2\ln x$.

$= \frac{1}{x^2}(2\ln x - \ln^2 x)$

令 $y'=0$. 解得 $x_1 = e^2$ $x_2 = 1$

x	$(0,1)$	$(1, e^2)$	e^2	$(e^2, +\infty)$
y'	$-$	$+$	0	$-$
y	↘	↗		↘

∴ y 在 $(1, e^2)$ 单调递增，在 $(e^2, +\infty)$ 单调递减 $(0,1)$

14. 设$a > e$, 求证$a\ln(a + x) < (a + x)\ln a$, $(x > 0)$.

解：要证 $a\ln(a+x) < (a+x)\ln a$

即：$\frac{\ln(a+x)}{a+x} < \frac{\ln a}{a}$ 令 $f(t) = \frac{\ln t}{t}$

$f'(t) = \frac{1-\ln t}{t^2}$ 令 $f'(t)=0$. 解得 $t=e$.

∴ $f(t)$ 在 $t>e$ 时单调递减. ∵ $a>e$. $x>0$ ∴ $a+x>a>e$.

∴ $\frac{\ln(a+x)}{a+x} < \frac{\ln a}{a}$ 即 $a\ln(a+x) < (a+x)\ln a$.

15. 设$b > a > 0$, 求证$\ln\frac{b}{a} > \frac{2(b-a)}{b+a}$.

解：要证 $\ln\frac{b}{a} > \frac{2(b-a)}{b+a}$

即证 $\ln\frac{b}{a} - \frac{2(\frac{b}{a}-1)}{\frac{b}{a}+1} > 0$.

构造函数 $f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$

$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2(x+1)-2x+1}{(x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{3}{(x+1)^2}$

当 $x>1$ 时. $f'(x)>0$. $f(x)$ 单调递增 ∴ $f(x) > f(1) > 0$.

∴ $\ln x - \frac{2(x-1)}{(x+1)} > 0$. ∵ $\frac{b}{a} > 1$.

∴ $\ln\frac{b}{a} > \frac{2(b-a)}{b+a}$.

16. 证明当 $x>1$ 时, $0<\ln x+\frac{4}{x+1}-2<\frac{1}{12}(x-1)^3$.

解：令 $f(x)=\ln x+\frac{4}{x+1}-2$.

$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}$ ~~令 f'(x)=0. 解得~~ 当 $x>1$ 时. $f'(x)$ 恒大于 0.

$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增. $f(x)>f(1)=0$. $\therefore 0<\ln x+\frac{4}{x+1}-2$.

令 $g(x)=\ln x+\frac{4}{x+1}-2-\frac{1}{12}(x-1)^3$.

$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}-\frac{1}{4}(x-1)^2=\frac{(x-1)(4-x^3-2x^2-x)}{4x(x+1)^2}$. 当 $x>1$ 时.

$g'(x)<0$, 则 $g(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减. $\therefore \ln x+\frac{4}{x+1}-2<\frac{1}{12}(x-1)^3$.

答案参考群图片

17. 求 $y=\frac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x+3}$ 的极值.

解：$y=\frac{(x-1)^{\frac{2}{3}}}{x+3}$ $\quad y'=\frac{(x+3)\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}+(x-1)^{\frac{2}{3}}}{(x+3)^2}$

令 $y'=0$. 解得. $x_1=1$. $x_2=-\frac{3}{5}$

x	$(-\infty,-3)$	$-3,-\frac{3}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$(-\frac{3}{5},1)$	1	$(1,+\infty)$
y'	+	+	0	−	0	+
y	↗	↗		↘		↗

$\therefore$ 得 y 的极大值为 $\frac{5^{\frac{2}{3}}}{3}$. y 的极小值为 0.

18. 求 $f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$ 在 $x>0$ 上的最小值.

解：$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$ 令 $f'(x)=0$. 解得 $x=1$.

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	极小	↗

$\therefore f(x)$ 的最小值为 $f(1)=1$.

19. 求 $f(x)=x^2\sqrt{b^2-x^2}(0\le x\le b)$ 的最大、最小值.

解: $f'(x) = 2x\sqrt{b^2-x^2} + \frac{1}{2\sqrt{b^2-x^2}}\cdot(-2x)\cdot x^2$

$= 2x\left(\sqrt{b^2-x^2} - \frac{x^2}{2\sqrt{b^2-x^2}}\right)$

令 $f'(x)=0$. 解得 $x_1=0$. $x_2=\sqrt{\frac{2}{3}}b$. $x_3=b$.

x	$(0,\sqrt{\frac{2}{3}}b)$	$\sqrt{\frac{2}{3}}b$	$(\sqrt{\frac{2}{3}}b, b)$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗	极大	↘

∴ $f(x)$ 的最大值为 $f(\sqrt{\frac{2}{3}}b) = \frac{2}{9}\sqrt{3}b^3$.

$f(x)$ 的最小值为 $f(0)=f(b)=0$.

20. 求下列曲线的拐点及上凸和下凸区间:

(1) $y=x^4(12\ln x-7)$.

定义域 $x>0$

解: $y' = 4x^3(12\ln x-7) + x^4\frac{12}{x} = 4x^3(12\ln x-4)$.

$y'' = 12x^2(12\ln x-4) + 4x^3\cdot\frac{12}{x} = 144x^2\ln x$.

令 $y''=0$. 解得 $x_1=0$ (舍去). $x_2=1$.

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
y''	−	0	+
y	上凸		下凸

∴ y 的拐点为 $(1,-7)$.

上凸区间为 $(0,1)$. 下凸区间为 $[1,+\infty)$

(2) $y = 2x^2 - \ln x$.

解：定义域 $x>0$.

$y' = 4x - \frac{1}{x}$ $y'' = 4 + \frac{1}{x^2}$ ~~令~~ y'' 恒大于0.

∴ y是下凹的曲线，且 y不存在拐点.

21. 证明: 当 $0 < x < \pi$ 时, 有 $\sin\frac{x}{2} > \frac{x}{\pi}$.

解：令 $f(x) = \sin\frac{x}{2} - \frac{x}{\pi}$.

$f'(x) = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} - \frac{1}{\pi}$ $f''(x) = -\frac{1}{4}\sin\frac{x}{2}$ 恒小于0.

则 f(x) 是一个上凹函数.

∴ $f(x) > \min\{f(0), f(\pi)\} = 0$.

即 $\sin\frac{x}{2} - \frac{x}{\pi} > 0$ 即 $\sin\frac{x}{2} > \frac{x}{\pi}$.

22. 证明 $x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln(\frac{x+y}{2})$, $(x>0, y>0, x\neq y)$.

解：令 $f(x) = x\ln x$.

$f'(x) = x\frac{1}{x} + \ln x = \ln x + 1$.

$f''(x) = \frac{1}{x}$ ∴当 $x>0$ 时 $f''(x)$ 恒大于0.

∴ f(x) 是一个下凹函数.

∴ $\frac{x\ln x + y\ln x}{2} > \ln(\frac{x+y}{2})(\frac{x+y}{2})$

即 $x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln(\frac{x+y}{2})$.

23. 描绘函数 $y=(x+6)e^{\frac{1}{x}}$ 的图形．定义域 R．无奇偶性．对称性

解：$y'=e^{\frac{1}{x}}+(x+6)e^{\frac{1}{x}}(-\frac{1}{x^2})=e^{\frac{1}{x}}[(x+6)(-\frac{1}{x^2})+1]=e^{\frac{1}{x}}(1-\frac{x+6}{x^2})$

令 $y'=0$．解得 $x_1=-2$．$x_2=3$．

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,3)$	3	$(3,+\infty)$
y'	+	0	−	0	+
y	↗		↘		↗

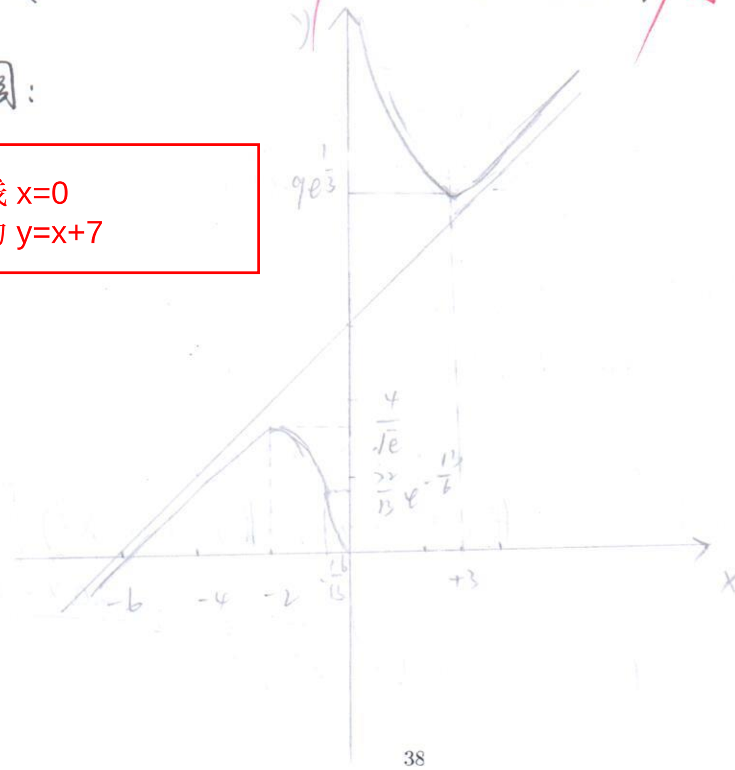
当 $x=-2$ 时 $y=\frac{4}{\sqrt{e}}$． 当 $x=3$ 时 $y=\frac{9}{\sqrt[3]{e}}$ 拐点为 $(\frac{9}{\sqrt[3]{e}},\frac{72}{13}e$

$y''=e^{\frac{1}{x}}(\frac{13x+6}{x^4})$． 令 $y''=0$．解得 $x=-\frac{6}{13}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+6)e^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+6)}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}=1.=k.$

$\lim\limits_{x\to\infty}[(x+6)e^{\frac{1}{x}}-x]=6$ ∴ 渐近线为 $y=x+6$

画图：



竖直渐近线 x=0
斜渐近线为 y=x+7

24. 描绘函数 $y = \frac{x^3+4}{x^2}$ 的图形.

解：(1) 定义域 $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. (2) 无奇偶性、周期性.

(3) $y' = 1 - \frac{8}{x^3}$ 令 $y' = 0$，解得 $x = 2$.

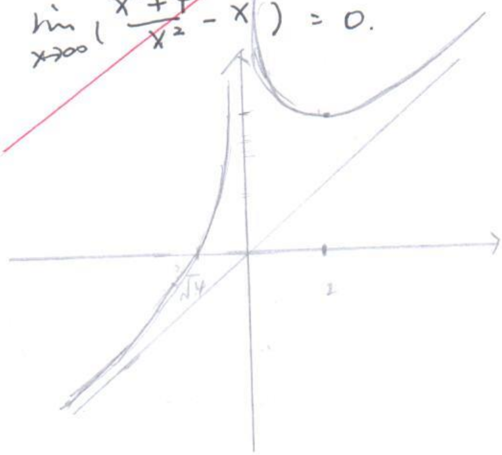
$y'' = 24x^{-4}$. y'' 恒大于 0，该函数为下凸函数.

(4) 直线 $x = 0$ 是函数的一条竖直渐近线.

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3+4}{x^3} = \lim\limits_{x\to\infty} 1 + \frac{4}{x^3} = 1$. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^3+4}{x^2} - x \right) = 0$.

∴ y 的斜渐近线为 $y = x$.

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
y'	+		−	0	+
y''	+	0	+		+
y	下凸 ↗		下凸 ↘		下凸 ↗



25. 求星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ 的曲率半径.

解 $y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}$ $y = (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$

$y' = \frac{3}{2}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}(-\frac{2}{3})x^{-\frac{1}{3}} = -x^{-\frac{1}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$

$y'' = \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} - x^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{2}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}} \times (-\frac{2}{3})x^{-\frac{1}{3}}$

$= \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}$

$K = \frac{(1+(y')^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} = \frac{3\left[1 + x^{-\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})\right]^{\frac{3}{2}}}{x^{-\frac{4}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}}$

$= \frac{3ax^{-1} \cdot x^{\frac{4}{3}}}{(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{2}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{2}}} = \frac{3ax^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{2}{3}}}$

$= 3a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{1}{3}}(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$