§9.2 二重积分的计算法(二)

一、利用极坐标计算二重积分

二、小结 思考题

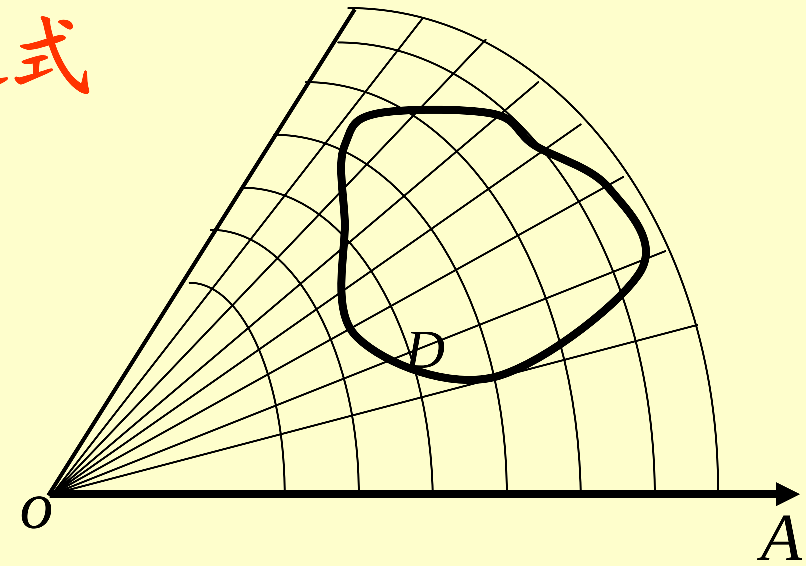
一、利用极坐标系计算二重积分

1.极坐标系下二重积分表达式

首先分割区域D

用

$\rho =$ 常数（一系列同心圆）

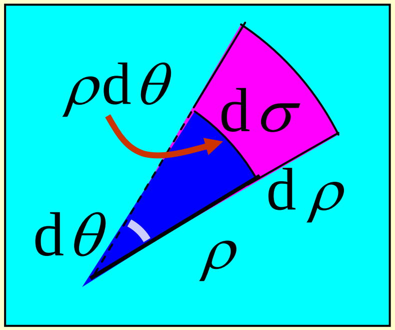


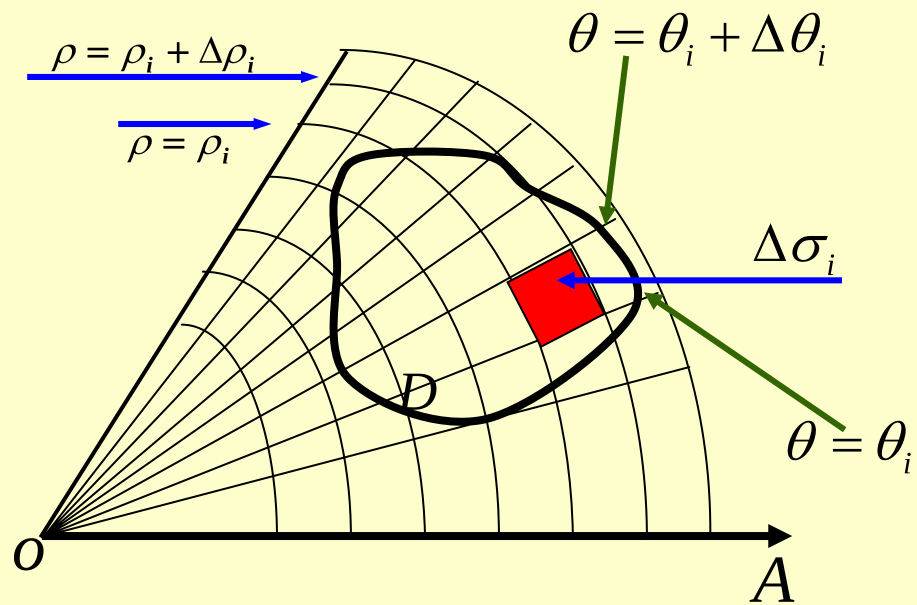
$\theta =$ 常数（一系列过极点的 射线）

两组曲线将D分割成许多小区域

Flash动画演示

分割区域





将典型小区域近似看作矩形（面积=长×宽）

则　面积元素　　$$d\sigma = \boxed{\rho d\theta}\cdot\boxed{d\rho}$$

扇形弧长　　径向宽度

再作代换 $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

可得下式

则 $$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta.$$

二重积分极坐标表达式

【注意】极坐标系下的面积元素为

$$d\sigma = \rho d\rho d\theta$$

直角坐标系下的面积元素为

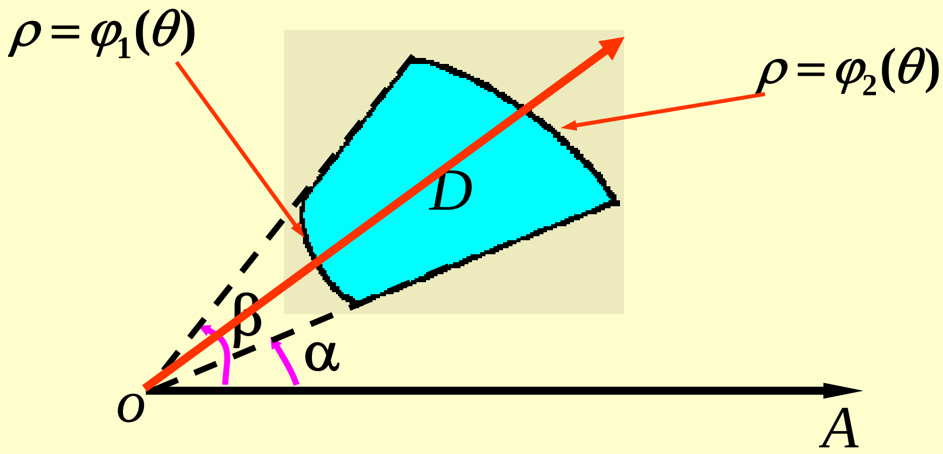
$$d\sigma = dxdy$$

区别

2. 二重积分化为二次积分的公式

（1）极点O在区域D的边界曲线之外时

区域特征如图



$$\alpha \le \theta \le \beta,$$

$$\varphi_1(\theta) \le \rho \le \varphi_2(\theta).$$

$$\iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

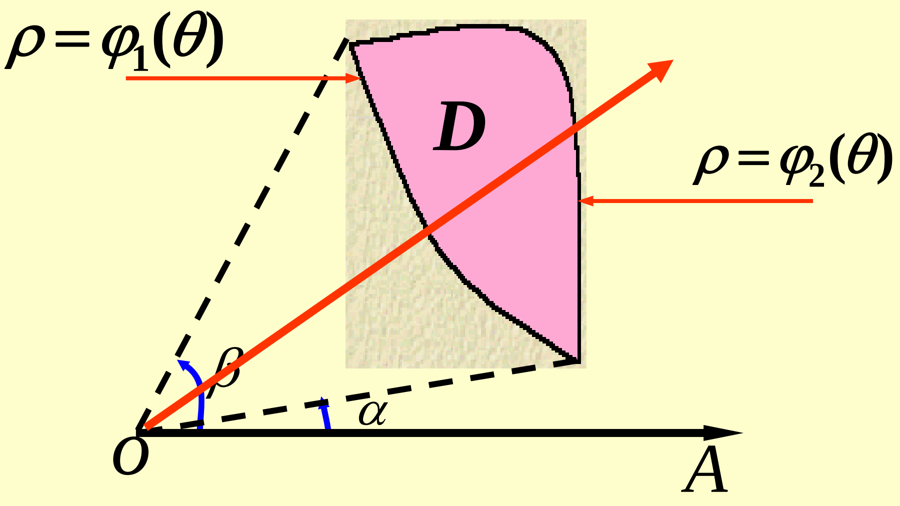
$$= \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

特别地

若区域特征如图

$\alpha \le \theta \le \beta,$

$\varphi_1(\theta) \le \rho \le \varphi_2(\theta).$

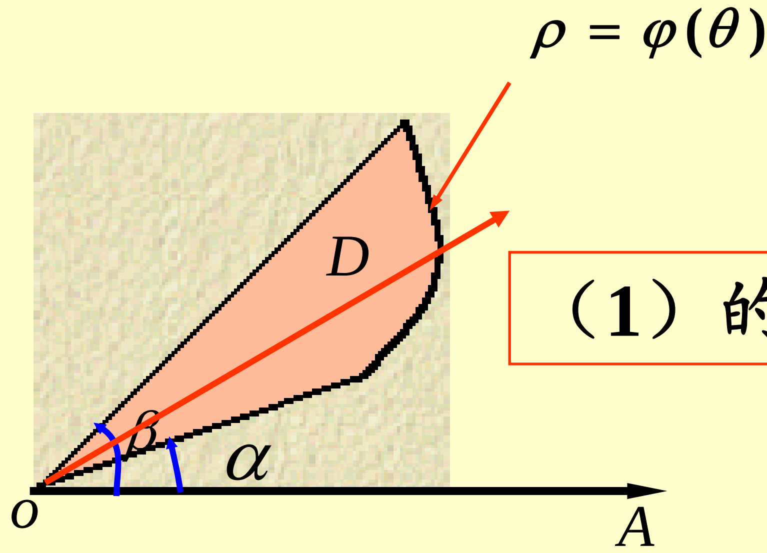


$$\iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

（2）极点O恰在区域D的边界曲线之上时

区域特征如图



（1）的特例

$$\alpha \le \theta \le \beta,$$

$$0 \le \rho \le \varphi(\theta).$$

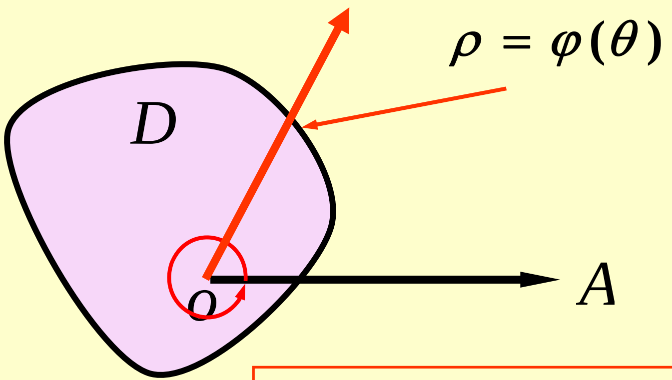
$$\iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

（3）极点O在区域D的边界曲线之内时

区域特征如图

$$0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le \rho \le \varphi(\theta).$$



（2）的特例

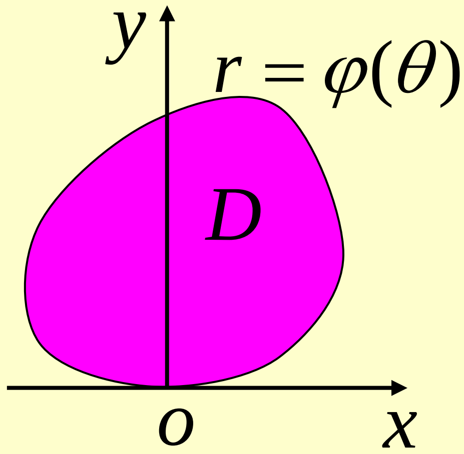
$$\iint_D f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

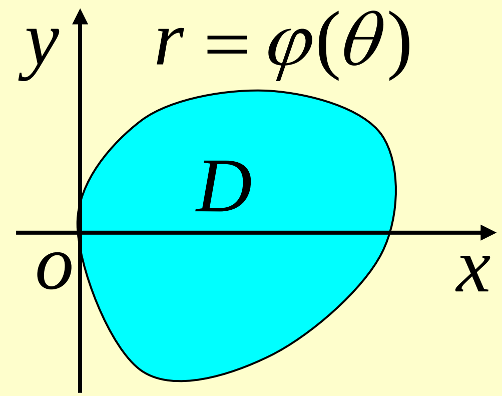
3. 极坐标系下区域的面积 $\quad \sigma = \iint_D \rho d\rho d\theta.$

［观察练习］ 下列各图中区域 D 分别与 x,y 轴相切于原点,试问θ的变化范围是什么?

(1)



(2)

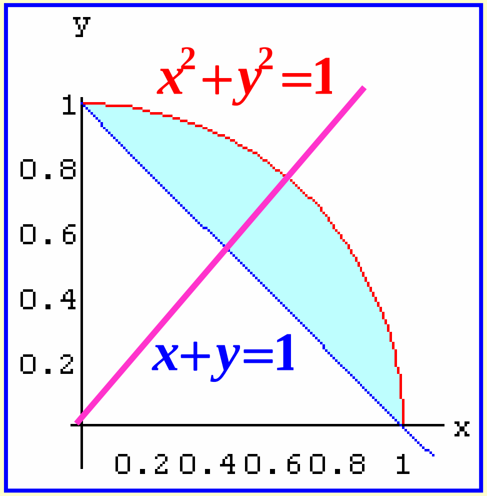


答: (1) $0 \le \theta \le \pi$; (2) $-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

【例 1】写出积分$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$的极坐标二次积分形式，其中积分区域

$$D=\{(x,y)\mid 1-x\le y\le\sqrt{1-x^2},\ 0\le x\le 1\}.$$

【解】在极坐标系下 $\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$



所以圆方程为 $\rho=1$，

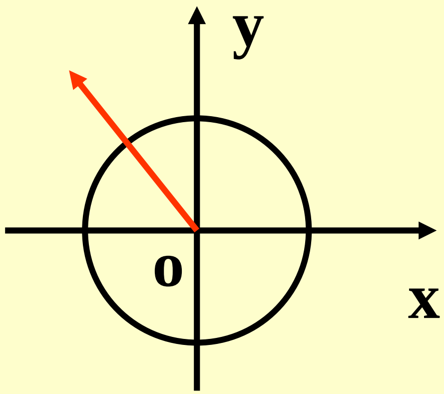
直线方程为$\rho=\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$，

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}}^{1} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho.$$

【例 2 】计算$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy$ ，其中 D 是由中心在原点，半径为 a 的圆周所围成的闭区域.

【解】 在极坐标系下

D：$0\le\rho\le a$，$0\le\theta\le 2\pi$.



$$\iint\limits_D e^{-x^2-y^2}dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a e^{-\rho^2}\rho d\rho$$

$$=\pi(1-e^{-a^2}).$$

【注】1.由于 e^{-x^2} 的原函数不是初等函数，故本题无法用直角坐标计算.

【注】2. 利用例2可得到一个在概率论与数理统计中以及工程上非常有用的反常积分公式

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad ①$$

事实上, 当 D 为 R^2 时,

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

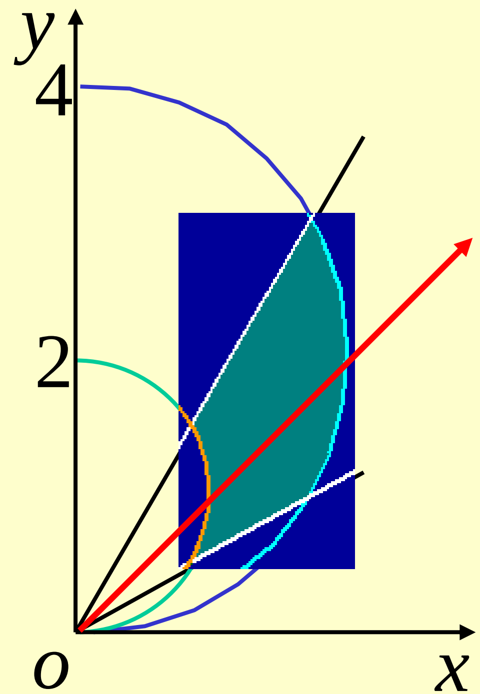
$$= 4\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2$$

利用例2的结果, 得

$$4\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)^2 = \lim_{a\to+\infty} \pi(1-e^{-a^2}) = \pi$$

故①式成立.

【例 3】 计算$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$，其中 D 为由圆 $x^2+y^2=2y$， $x^2+y^2=4y$及直线$x-\sqrt{3}y=0$， $y-\sqrt{3}x=0$ 所围成的平面闭区域.



【解】 $x^2+y^2=2y \Rightarrow r=2\sin\theta$

$x^2+y^2=4y \Rightarrow r=4\sin\theta$

$y-\sqrt{3}x=0 \Rightarrow \theta_2=\dfrac{\pi}{3}$

$x-\sqrt{3}y=0 \Rightarrow \theta_1=\dfrac{\pi}{6}$

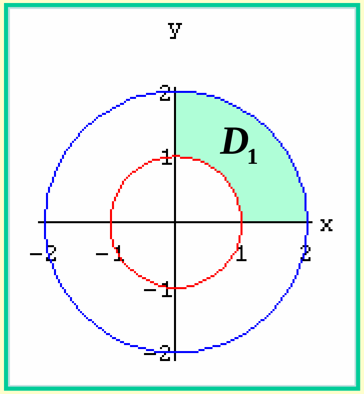
$$\therefore \iint\limits_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta} r^2\cdot r\,\mathrm{d}r=15\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}\right)$$

【例 4】计算二重积分 $\iint\limits_D \frac{\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$，

其中积分区域为 $D=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$.

【解】 由对称性，可只考虑第一象限部分，

$$D = 4D_1$$

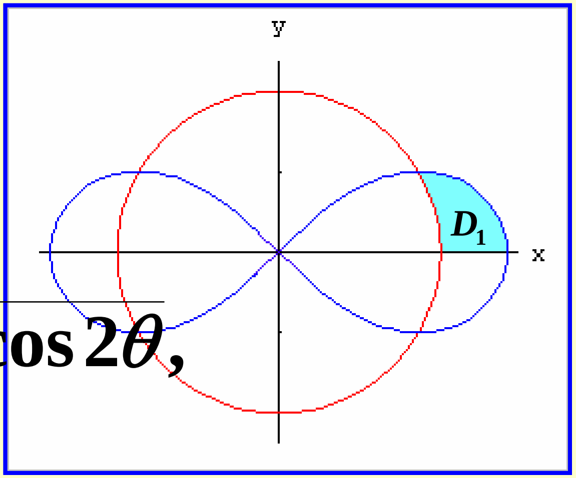


$$\iint\limits_D \frac{\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$$

$$= 4\iint\limits_{D_1} \frac{\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 \frac{\sin \pi\rho}{\rho}\rho d\rho$$

$$= -4.$$

【例 5】求曲线 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ 和 $x^2+y^2\ge a^2$ 所围成的图形的面积.



【解】 根据对称性有 $D=4D_1$

在极坐标系下 $x^2+y^2=a^2 \Rightarrow \rho=a$,

$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2) \Rightarrow \rho=a\sqrt{2\cos 2\theta}$,

由 $\begin{cases}\rho=a\sqrt{2\cos 2\theta}\\ \rho=a\end{cases}$, 得交点 $A=(a,\dfrac{\pi}{6})$,

所求面积 $\sigma=\iint\limits_D dxdy=4\iint\limits_{D_1}dxdy$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}d\theta\int_a^{a\sqrt{2\cos 2\theta}}\rho d\rho=a^2(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}).$$

【例6】（课本P_{90}例6）

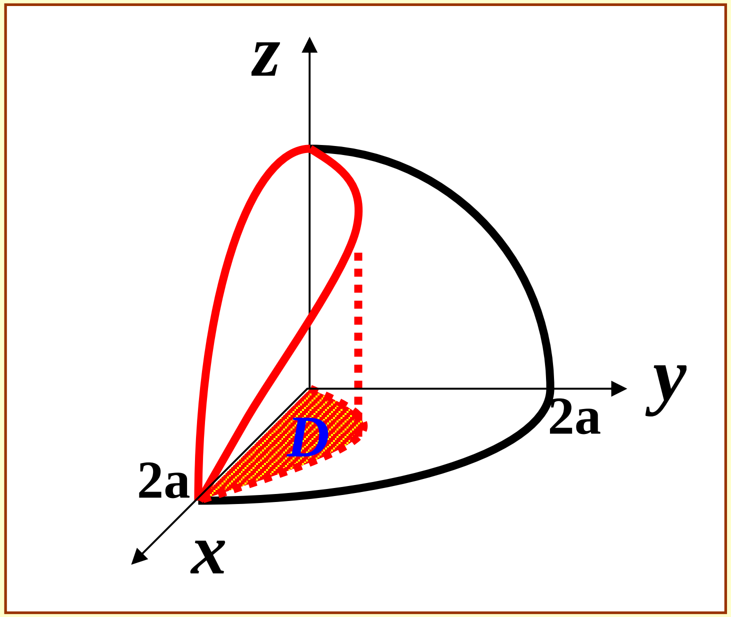
求球体$x^2+y^2+z^2\le 4a^2$被圆柱面$x^2+y^2=2ax\ (a>0)$所截得的（含在圆柱面 内的部分）立体的体积 .

【解】 由对称性 $V=4V_1$

其中

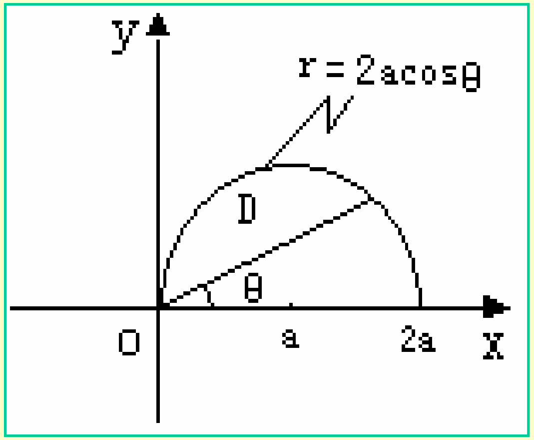
$$V_1=\iint\limits_D\sqrt{4a^2-x^2-y^2}\,dxdy$$

$D: x$ 轴与 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 所围



Flash 动画演示

用极坐标表示



$$D:\begin{cases} 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le \rho \le 2a\cos\theta \end{cases}$$

于是

$$V = 4\iint_D \sqrt{4a^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} \sqrt{4a^2-\rho^2}\,\rho\,d\rho$$

$$= \frac{32}{3}a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)\,d\theta = \frac{32}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

二、小结

二重积分在极坐标下的计算公式

$$\iint_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$

$$\begin{cases} =\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho. \\ =\int_\alpha^\beta d\theta\int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho. \\ =\int_0^{2\pi} d\theta\int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho. \end{cases}$$

（在积分中注意使用对称性）

【思考题】

交换积分次序:

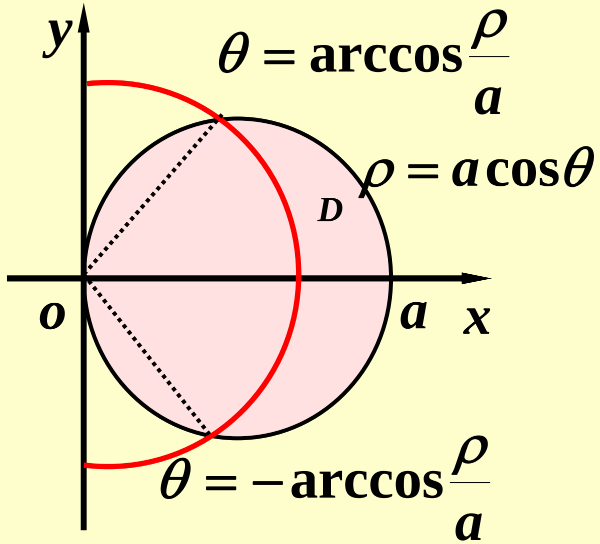
$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{0}^{a\cos\theta}f(\rho,\theta)d\rho \quad (a\geq 0).$$

即　　由先 ρ 后 θ 的二次积分化为

先 θ 后 ρ 的二次积分

【思考题解答】

$$D:\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}, \\ 0\le\rho\le a\cos\theta \end{cases}$$



$$I=\int_0^a d\rho\int_{-\arccos\frac{\rho}{a}}^{\arccos\frac{\rho}{a}} f(\rho,\theta)d\theta.$$