第三节 高阶微分方程—12.3.1 可降阶的微分方程

本节考虑n阶微分方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$

中的如下的三种特殊类型：

- $y^{(n)}=f(x)$
- $y^{(n)}=f(x,y^{(k)},\cdots,y^{(n-1)})$

  特点： 不显含未知函数 y及 $y',\cdots,y^{(k-1)}$.
- $y^{(n)}=f(y,y',\cdots,y^{(n-1)})$

  特点： 右端不显含自变量 x.

一 $y^{(n)} = f(x)$

解法: 视 $y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'$, 积分1次 $y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C$

共积分n次 $y = \int \cdots \int f(x)dx \cdots dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \cdots + C_n$

例1 $y^{(4)} = \sin x + x$

二 $y'' = f(x, y')$

降低了方程的阶数

解法: 令 $y' = p$, 则 $y'' = \dfrac{dp}{dx}$ 代入原方程 $\dfrac{dp}{dx} = f(x, p)$

这是关于p的一阶微分方程, 若能求出

$p = \varphi(x, c_1)$, 则 $y = \int \varphi(x, c_1)dx + c_2$

例2 $(1+x^2)y''-(y')^2=1$

三 $y''=f(y,y')$

解法:

令 $y'=p$, 则 $y''=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$ 代入原方程 $p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$

降低了方程的阶数

这是关于p的一阶微分方程, 若能求出

$p=\varphi(y,c_1)$, 则 $\int\frac{1}{\varphi(y,c_1)}dy=x+c_2$ 是所求通解

例3 $y''=\frac{1+(y')^2}{2y}$

例4 已知曲线,它的方程y=f(x)满足微分方程 $yy'' + y'^2 = 1$ 并且与另一条曲线$y=e^x$ 相切于点(0,1), 求此曲线的方程.

更一般的情况, 如

1、 $y^{(n)} = f(x, y^{(k)}, \cdots, y^{(n-1)})$型

特点: 不显含未知函数 y及 $y', \cdots, y^{(k-1)}$.

解法: 令 $y^{(k)} = P(x)$

则 $y^{(k+1)} = P', \ y^{(n)} = P^{(n-k)}$.

代入原方程, 得

P(x)的(n-k)阶方程

$$P^{(n-k)} = f(x, P(x), \cdots, P^{(n-k-1)}(x)).$$ 求得 $P(x)$,

将 $y^{(k)} = P(x)$ 连续积分k次, 可得通解.

例 5 求方程 $xy^{(5)} - y^{(4)} = 0$ 的通解.

2、 $y^{(n)}=f(x,y^{(k)},\cdots,y^{(n-1)})$型

特点： 右端不显含自变量 x.

解法： 设 $y'=p(y)$ 则 $y''=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dP}{dy}$,

$$y'''=P^2\frac{d^2P}{dy^2}+P(\frac{dP}{dy})^2,\quad\cdots\ \cdots,$$

代入原方程得到新函数 $P(y)$的$(n-1)$阶方程,

求得其解为 $\frac{dy}{dx}=P(y)=\varphi(y,\ C_1,\ \cdots,\ C_{n-1})$,

原方程通解为$\int\frac{dy}{\varphi(y,\ C_1,\ \cdots,\ C_{n-1})}=x+C_n$,

例 6 求方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解.

附1）恰当导数方程

特点 左端恰为某一函数 $\Phi(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$

对x的导数，即 $\dfrac{d}{dx}\Phi(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})=0.$

解法： 类似于全微分方程可降低一阶

$$\Phi(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})=C,$$

再设法求解这个方程.

例 7 求方程 $yy'' + y'^2 = 0$ 的通解.

附2) 齐次方程

特点：$F(x,ty,ty',\cdots,ty^{(n)})=t^k F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$

k次齐次函数

解法：可通过变换 $y=e^{\int z dx}$

将其降阶，得新未知函数 $z(x)$.

$\because\ y'=ze^{\int z dx}, \qquad y''=(z'+z^2)e^{\int z dx}, \quad \cdots\ \cdots,$

$$y^{(n)}=\Phi(z,z',\cdots,z^{(n-1)})e^{\int z dx},$$

代入原方程并消去 $e^{k\int z dx}$,

得新函数$z(x)$的$(n-1)$阶方程

$$f(x,z,z',\cdots,z^{(n-1)})=0.$$

例 8 求方程 $x^2yy''=(y-xy')^2$ 的通解.

解法小结 通过代换将其化成较低阶的方程来求解.

例 9 求方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解.

另解 原方程变为 $\dfrac{y''}{y'}=\dfrac{y'}{y}$,

两边积分,得 $\ln y'=\ln y+\ln C_1$, 即 $y'=C_1 y$,

原方程通解为 $y=C_2 e^{C_1 x}$.

补充题: 求方程 $xyy''-xy'^2=yy'$ 的通解.

解 设 $y=e^{\int z dx}$, 代入原方程,得 $z'x=z$,

解其通解为 $z=Cx$,

原方程通解为 $y=e^{\int Cx dx}=C_2 e^{C_1 x^2}$.

思考题

已知$y_1 = 3$，$y_2 = 3 + x^2$，$y_3 = 3 + x^2 + e^x$
都是微分方程

$$\left(x^2 - 2x\right)y'' - \left(x^2 - 2\right)y' + (2x - 2)y = 6(x - 1)$$

的解，求此方程所对应齐次方程的通解.