第一节

数列的极限

一、数列极限的定义

二、收敛数列的性质与极限的四则运算

三、极限存在准则

三、极限存在准则

迫收敛性;　单调有界准则;　柯西准则 .

例. 证明数列 $\left\{(1+\frac{1}{n})^{n}\right\}$ 与 $\left\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\right\}$ 都收敛且极限相同.

证：利用伯努里不等式

$$(1+x)^{n} \geq 1+nx,\ \ x>-1,\ \ n=1,2,3\cdots$$

（利用数学归纳法证明，作业！）

事实上

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n}$$

$$= \frac{(n(n+2))^n \cdot (n+2)}{(n+1)^{2n} \cdot (n+1)}$$

$$= (1 - \frac{1}{(n+1)^2})^n \cdot \frac{n+2}{n+1} \geq (1 - \frac{n}{(n+1)^2}) \cdot \frac{n+2}{n+1}$$

$$= \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{(n+1)^3} = \frac{(n+1)^3 + 1}{(n+1)^3} > 1$$

$$
\begin{aligned}
\frac{y_n}{y_{n+1}} &= \frac{(n+1)^{n+1}}{n^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^{n+2}}{(n+2)^{n+2}} \\
&= \frac{((n+1)^2)^{n+1}}{(n(n+2))^{n+1}} \cdot \frac{n+1}{n+2} \\
&= (1+\frac{1}{n(n+2)})^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \\
&\geq (1+\frac{n+1}{n(n+2)}) \cdot \frac{n+1}{n+2} > 1
\end{aligned}
$$

所以

$$2 \le (1+\frac{1}{n})^n \le (1+\frac{1}{n})^{n+1} \le 4, \quad n = 1,2,3,\cdots$$

根据准则 2 可知数列 $\{x_n\}$ **有极限 .**

记此极限为 e **即**

，

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

e **为无理数 , 其值为** $e = 2.718281828459045\cdots$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}(x_n \cdot (1+\frac{1}{n})) = \lim_{n\to\infty} y_n = e = 2.71828\cdots$$

例8. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^n$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{-1}=e$

例8　证明数列 $x_n = \sqrt{3+\sqrt{3+\sqrt{\cdots+\sqrt{3}}}}$ (n重根式)的极限存在.

证　显然 $x_{n+1} > x_n$，　$\therefore \{x_n\}$是单调递增的；

又 $\because x_1 = \sqrt{3} < 3$, 假定 $x_k < 3$, $x_{k+1} = \sqrt{3+x_k} < \sqrt{3+3} < 3$,

$\therefore \{x_n\}$是有界的；　$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

$\because x_{n+1} = \sqrt{3+x_n}$, $x_{n+1}^2 = 3 + x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1}^2 = \lim\limits_{n\to\infty}(3+x_n)$,

$A^2 = 3 + A$,　解得 $A = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$, $A = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$ (舍去)

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

3. 柯西极限存在准则 (P30)

数列 $\{x_n\}$ 极限存在的充要条件是:

$\forall \varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使当 $m > N$, $n > N$ 时,

有 $$\left| x_n - x_m \right| < \varepsilon$$

证明从略 .

柯西极限存在准则的等价描述

数列 $\{x_n\}$ 极限存在的充要条件是:

$\forall \varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使当 $n > N$ 时，对一切 $p \in N^+$,

有 $$\left| x_{n+p} - x_n \right| < \varepsilon$$

柯西极限存在准则的等价描述

数列 $\{x_n\}$ 极限存在的充要条件是:

$\forall \varepsilon > 0$,存在正整数 N,使当 $n > N$ 时，对一切 $p \in N^{+}$,

有

$$\left| x_{n+p} - x_n \right| < \varepsilon$$

例9. 设 $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$,证明 $\{x_n\}$ 收敛.

证明要点: $\left| x_{n+p} - x_n \right| = \dfrac{1}{(n+1)^2} + \dfrac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \dfrac{1}{(n+p)^2}$

$$< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p}\right)$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n}$$

内容小结

1. 数列极限的 “ $\varepsilon-N$ ” 定义及应用

2. 收敛数列的性质:

唯一性；有界性；保号性;

任一子数列收敛于同一极限

3. 极限存在准则:

夹逼准则；单调有界准则；柯西准则

思考与练习

1. 如何判断极限不存在?

方法1. 找一个趋于∞的子数列;

方法2. 找两个收敛于不同极限的子数列.

2. 已知 $x_1=1,\ x_{n+1}=1+2x_n\ (n=1,2,\cdots)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 时, 下述作法是否正确? 说明理由.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cancel{=} a$, 由递推式两边取极限得

$$a=1+2a \Longrightarrow a=-1$$

不对! 此处 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$

例设 $x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})$ $(n=1,2,\cdots)$，且 $x_1>0$，$a>0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

利用极限存在准则

解： $\because x_{n+1}=\frac{1}{2}(x_n+\frac{a}{x_n})\geq\sqrt{x_n\cdot\frac{a}{x_n}}=\sqrt{a}$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1}{2}(1+\frac{a}{x_n^{\ 2}})\leq\frac{1}{2}(1+\frac{a}{a})=1$$

∴数列单调递减有下界，故极限存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$

则由递推公式有 $A=\frac{1}{2}(A+\frac{a}{A})\Longrightarrow A=\pm\sqrt{a}$

$\because\ x_1>0$，$\therefore\ x_n>0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt{a}$

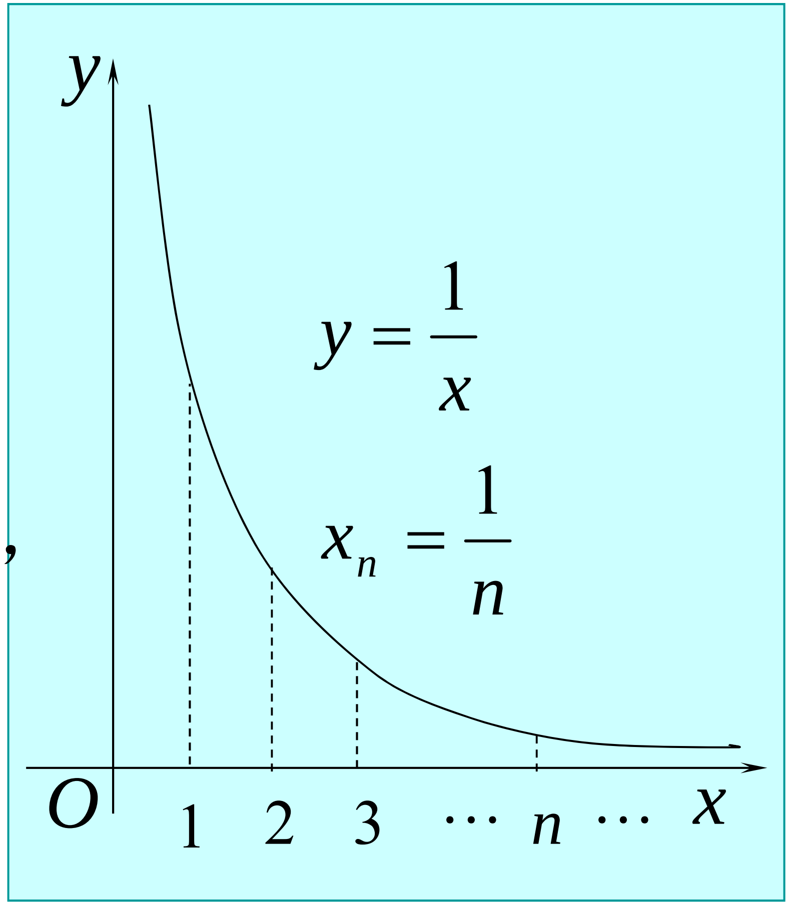
§2 函数的极限

一、$x \to +\infty$时, 函数 $f(x)$的极限

例如，从数列$\{x_n\}: x_n = \dfrac{1}{n}$与函数

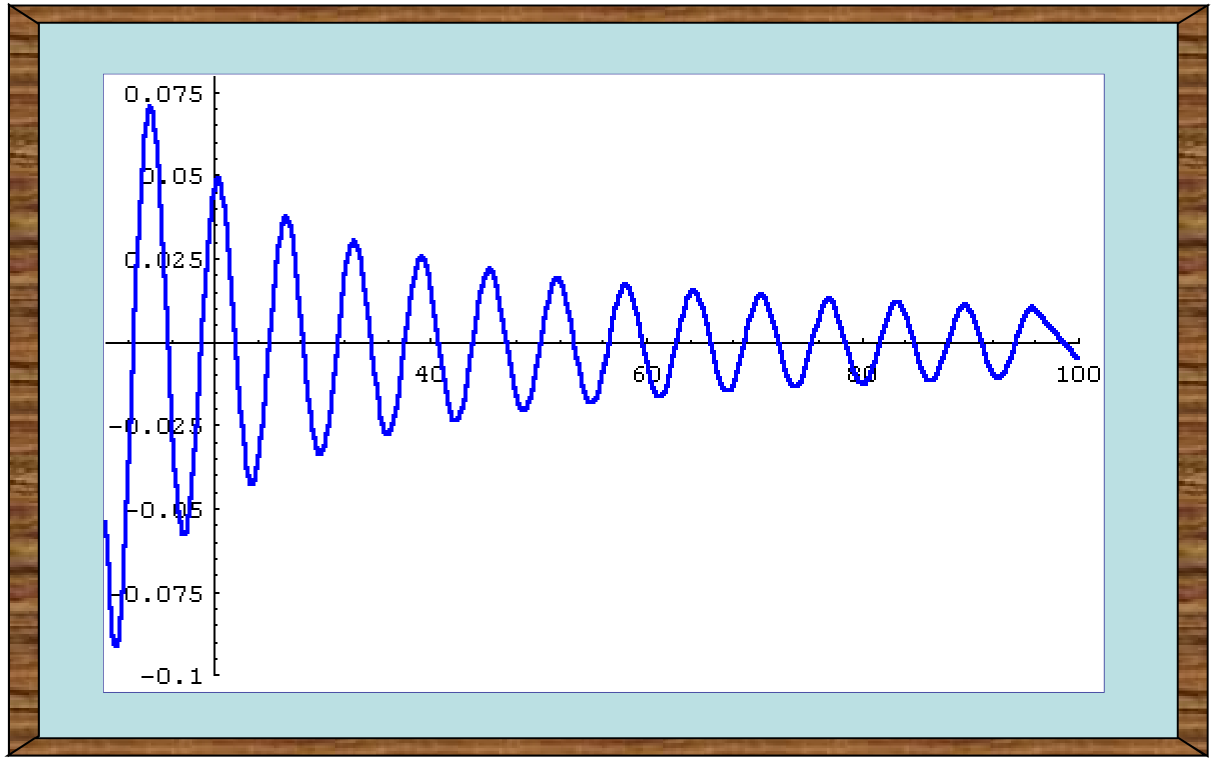
$y = \dfrac{1}{x}, x \in (0,+\infty)$的图形可以看出，

有 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0, \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0.$



一、自变量趋向无穷大时函数的极限

观察函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时的变化趋势.



问题: 函数 $y = f(x)$ 在 $x \to \infty$ 的过程中, 对应函数值 $f(x)$ 无限趋近于确定值 A.

通过上面演示实验的观察:

当 x 无限增大时, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 无限接近于 0.

问题: 如何用数学语言刻划函数 "无限接近".

$|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示 $|f(x) - A|$ 任意小;

$|x| > X$ 表示 $x \to \infty$ 的过程.

1. 定义：

定义 1 设函数 $f(x)$在$(a,+\infty)$上有定义，A 是一个确定的数。若对于任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在着正数$X(\geq a)$，使得对于适合不等式$x>X$的一切x，都满足不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$，

则常数A就叫函数$f(x)$当$x\to+\infty$时的极限，记作

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(当x\to+\infty)$$

"ε − X"定义 $\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \Leftrightarrow$

$\forall\varepsilon>0, \exists X>0,$ 使当$x>X$时，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon.$

2. $x \to -\infty$时，$f(x)$的极限

定义 1　设函数 $f(x)$在$(-\infty, a)$上有定义，A 是一个确定的数。若对于任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在着正数$X(\geq a)$，使得对于适合不等式$x < -X$的一切x，都满足不等式$|f(x) - A| < \varepsilon$，

则常数A就叫函数 $f(x)$当$x \to -\infty$时的极限，记作

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A(当 x \to -\infty)$$

$1^0.\ x \to +\infty$ 情形： $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使当$x > X$时, 恒有$|f(x) - A| < \varepsilon.$

$2^0.\ x \to -\infty$ 情形： $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 使当$x < -X$时, 恒有$|f(x) - A| < \varepsilon.$

1. 定义：

定义 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,a)\cup(a,+\infty),a>0$ 上有定义，若对于任意给定的正数 ε（不论它多么小），总存在着正数 X，使得对于适合不等式 $|x|>X$ 的一切 x，都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$，

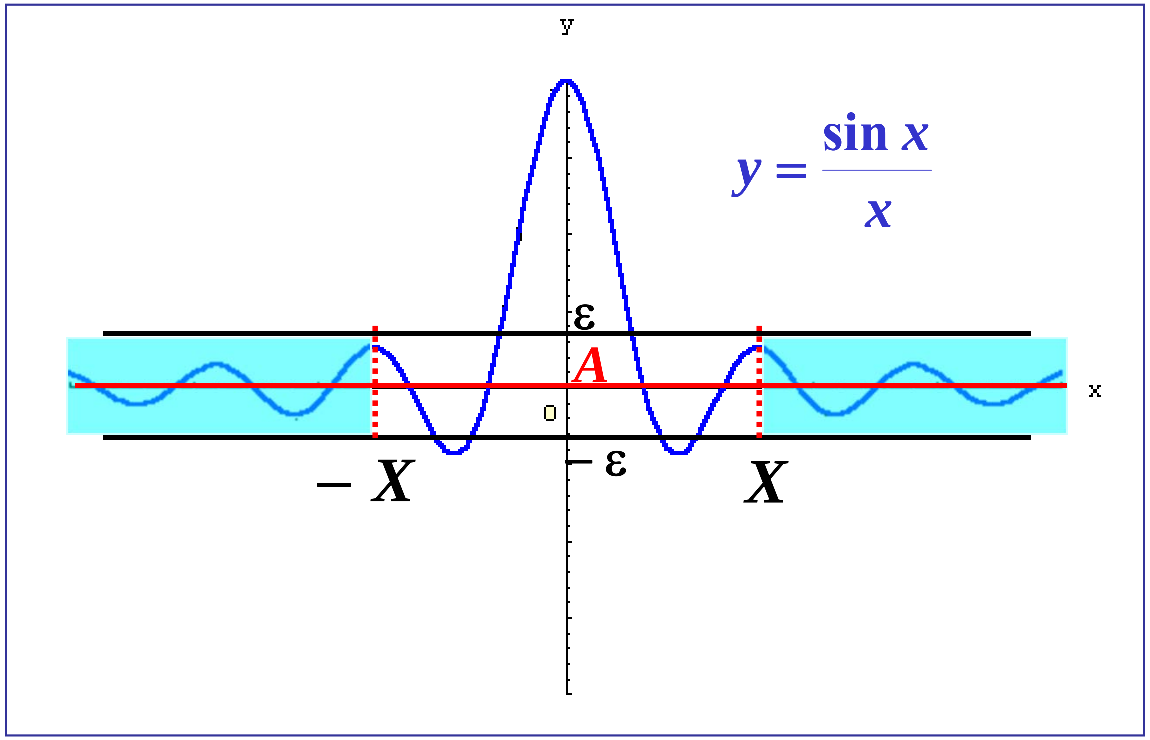
则常数 A 就叫函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \quad 或 \quad f(x)\to A(当 x\to\infty)$$

$\boxed{\text{"}\varepsilon - X\text{"定义}}$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow$

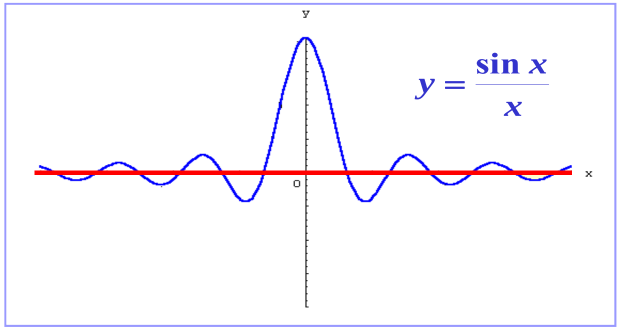
$\forall\varepsilon>0,\exists X>0,$ 使当 $|x|>X$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon.$

3.几何解释:



当$x < -X$或$x > X$时, 函数 $y = f(x)$图形完全落在以直线$y = A$为中心线, 宽为2ε的带形区域内.

例　证明 $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$



证　$\because \left|\frac{\sin x}{x}-0\right|=\left|\frac{\sin x}{x}\right|<\frac{1}{|x|}<\frac{1}{X}=\varepsilon,$

$\forall\varepsilon>0,$ 取 $X=\frac{1}{\varepsilon},$ 则当 $|x|>X$ 时恒有

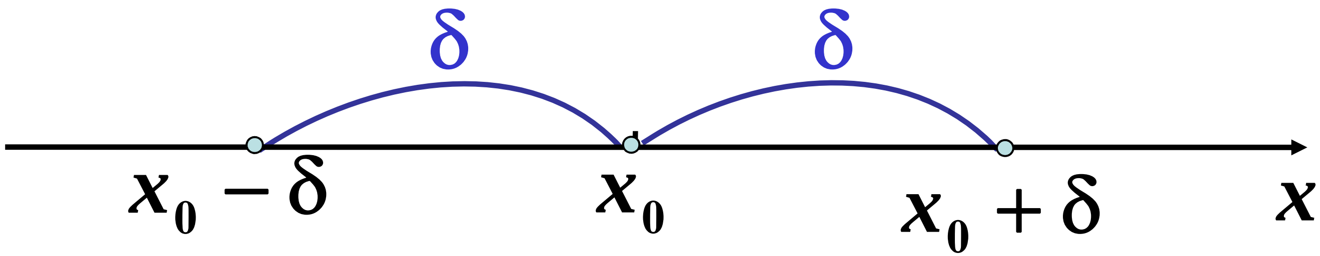
$\left|\frac{\sin x}{x}-0\right|<\varepsilon,$　　故 $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0.$

二、x 趋于有限值时, $f(x)$的极限

问题: 函数 $y = f(x)$在 $x \to x_0$ 的过程中,对应函数值 $f(x)$无限趋近于确定值 A.

$|f(x) - A| < \varepsilon$ 表示$|f(x) - A|$任意小;

$0 < |x - x_0| < \delta$ 表示$x \to x_0$的过程.



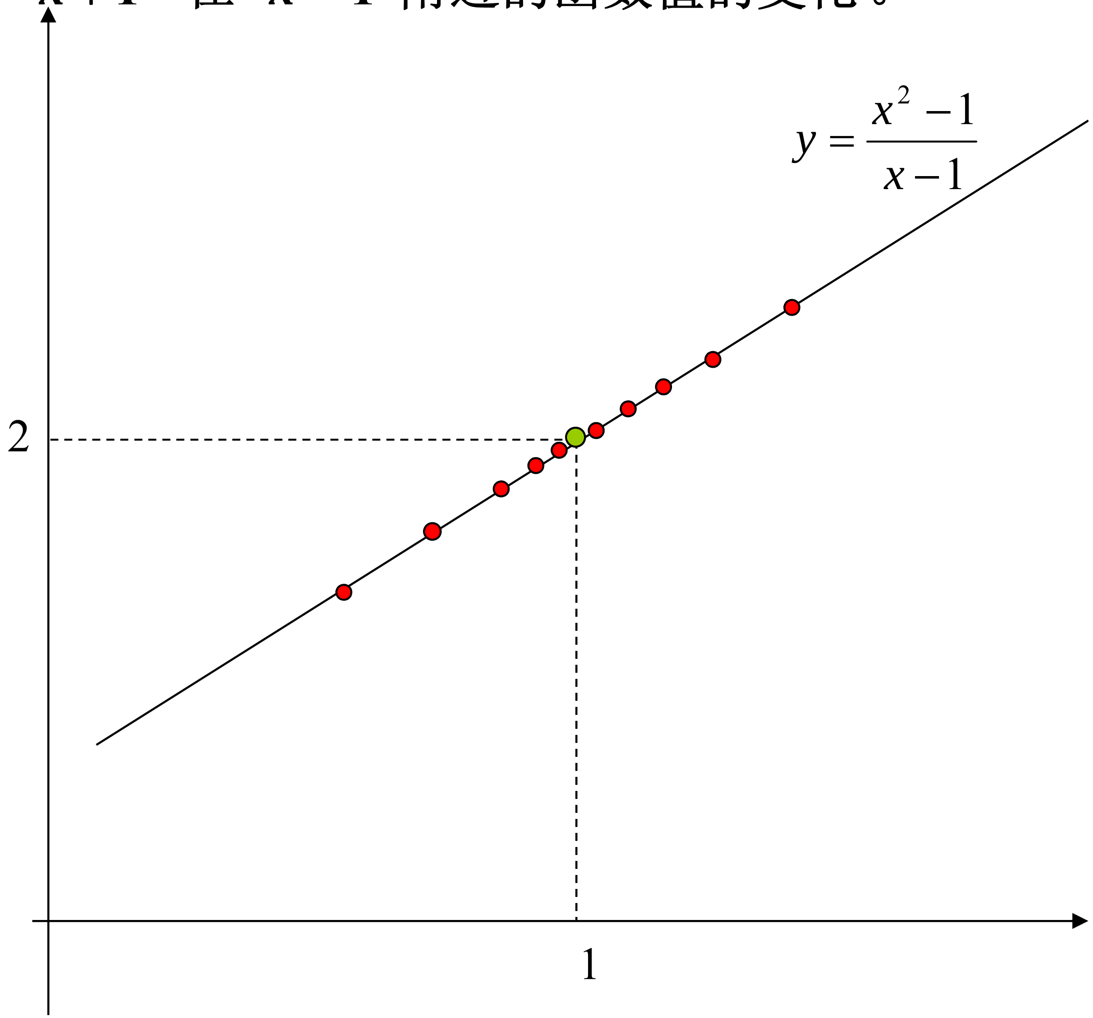
点x_0的去心δ邻域, δ体现x接近x_0程度.

一、函数极限的定义

考察函数 $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$ 在 $x = 1$ 附近的函数值的变化。

x	$f(x)$
0.9	1.9
0.99	1.99
0.999	1.999
0.9999	1.9999
0.99999	1.99999

x	$f(x)$
1.1	2.1
1.01	2.01
1.001	2.001
1.0001	2.0001
1.00001	2.00001



这一过程表示为：

$x \to 1$ 时，$y \to 2$

即：$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$

定义 设 $f(x)$ 在点 a 的某去心邻域内有定义，L 为实数，若 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，当 $0 < |x-a| < \delta$ 时，有 $|f(x)-L| < \varepsilon$，则称 L 为 $f(x)$ 当 $x \to a$ 时的极限，记为

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad 或 \quad f(x) \to L \ \ (x \to a)$$

说明 (1) ε 给定后，δ 的选择并不唯一，δ 依赖于 a 与 ε。

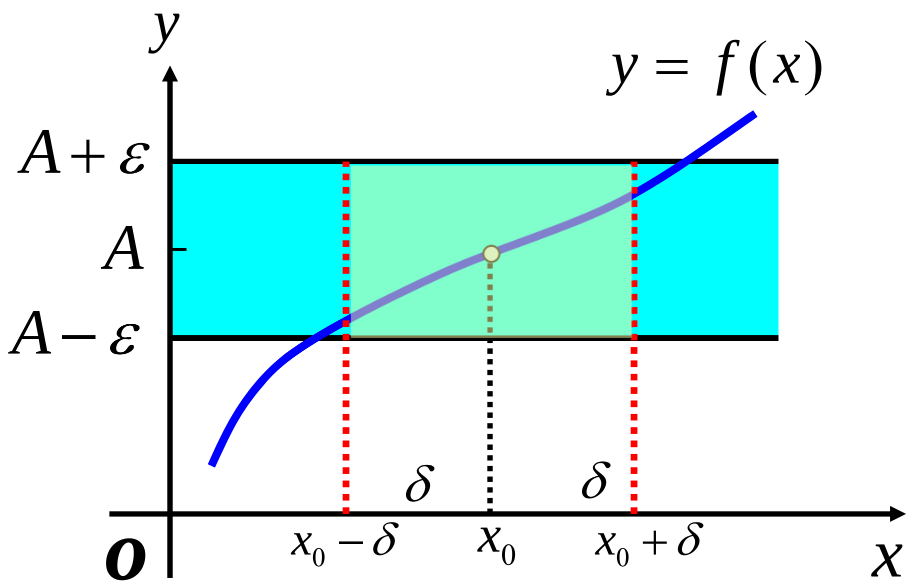
(2) 此极限的定义中，$0 < |x-a| < \delta$，指出 $x \neq a$，有两层含义：

I. a 可以不在 $f(x)$ 的定义域内；

II. a 可以属于 $f(x)$ 的定义域，但此时极限值与 $f(x)$ 在 a 处的函数值无关。

2.几何解释:

当x在x_0的去心δ邻域时,函数$y = f(x)$图形完全落在以直线$y = A$为中心线,宽为2ε的带形区域内.



显然,找到一个δ后,δ越小越好.