大学基础物理学

University Fundamental Physics

电子工程系@华东师范大学

李波

2019年

§ 2.1 静电场的保守性

- 对任意电荷系：$\int_{(P_1)\,(L)}^{(P_2)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 也应与L无关。

对任何静电场，$\int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 只取决于起点和终点的位置而与起点和终点间的路径无关

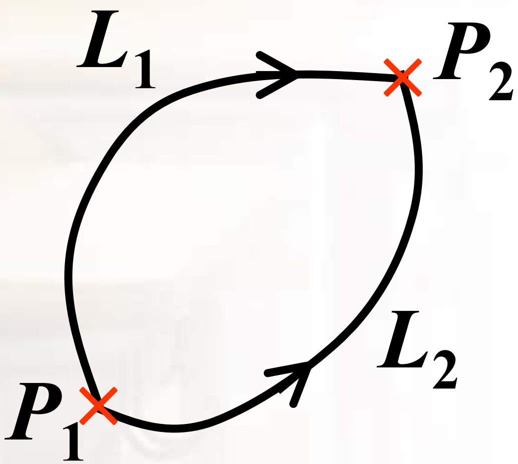
----------静电场的保守性

重力做功 ----------重力势能

静电场力做功 ----------静电场力势能（电势）

§ 2.1 静电场的保守性

二.环路定理（circuital theorem）



$$\int_{(P_1)\,(L_1)}^{(P_2)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{(P_1)\,(L_2)}^{(P_2)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_{(P_2)\,(L_2)}^{(P_1)} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\therefore \quad \boxed{\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0}$$ —— 静电场的环路定理

$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 称为静电场的“环流”（circulation）。

静电场的环路定理说明静电场为保守场，

§ 2.2 电势差和电势

一. 电势差（electric potential difference）

由$\int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$与路径无关，可引入电势差的概念。

定义P_1对P_2的电势差：

$$\boxed{\varphi_{12} = \int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

φ_{12}为移动单位正电荷由$P_1 \rightarrow P_2$电场力作的功。

§ 2.2 电势差和电势

二. 电势（electric potential）

设P_0为电势参考点，即$\varphi_0 = 0$，则任一点

P_1处电势为：

$$\varphi_1 = \varphi_{10} = \int_{(P_1)}^{(P_0)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\therefore \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(P_1)}^{(P_0)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} - \int_{(P_2)}^{(P_0)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \varphi_{12}$$

这说明 P_0点的不同选择，不影响电势差。

§ 2.3 电势叠加原理

电势叠加原理:

一个电荷系的电场中任意一点的电势等于每一个带电体**单独存在**时在该点所产生的电势的**代数和**。

§ 2.3 电势叠加原理

由 $\varphi = \int_{(P)}^{(P_0)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 及 $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$， 得：

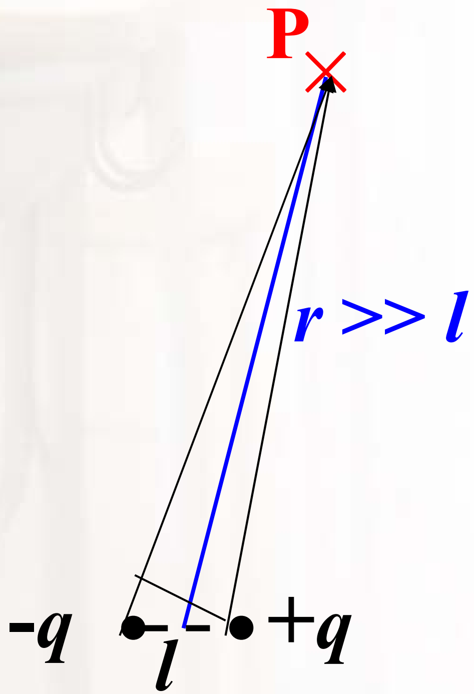
$$\varphi = \int_{(P)}^{(P_0)} (\sum_i \vec{E}_i) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum_i \int_{(P)}^{(P_0)} \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum_i \varphi_i$$

注意：电势零点P_0必须是共同的。

- 对点电荷系：$\varphi = \sum \dfrac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$， $\varphi_\infty = 0$
- 对连续电荷分布：$\varphi = \int_q \dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$， $\varphi_\infty = 0$

例1: 电偶极子的电场中的电势分布

$$\varphi = \sum \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}\,,\quad \varphi_\infty = 0$$



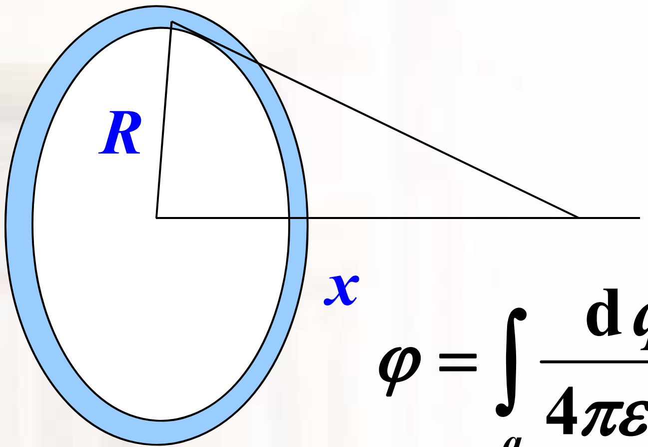
$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_-}$$

$$r_+ r_- = r^2 ; r_- - r_+ = l\cos\theta$$

$$\varphi = \frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p}\bullet\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

例2: 均匀带电圆环(R,q), 求轴线上电势

$$\varphi = \int_q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}, \quad \varphi_\infty = 0$$



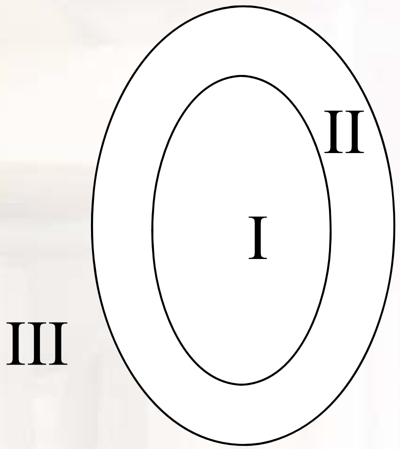
$$\varphi = \int_q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int \mathrm{d}q = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

当x=0

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

例3: 两个同心圆的均匀带电球面(R_A, R_B, q_A, q_B), 求电势分布

电势叠加原理! 两个带电球面的叠加



III $$\varphi_3=\varphi_{A3}+\varphi_{B3}=\frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0 r_3}+\frac{q_B}{4\pi\varepsilon_0 r_3}$$

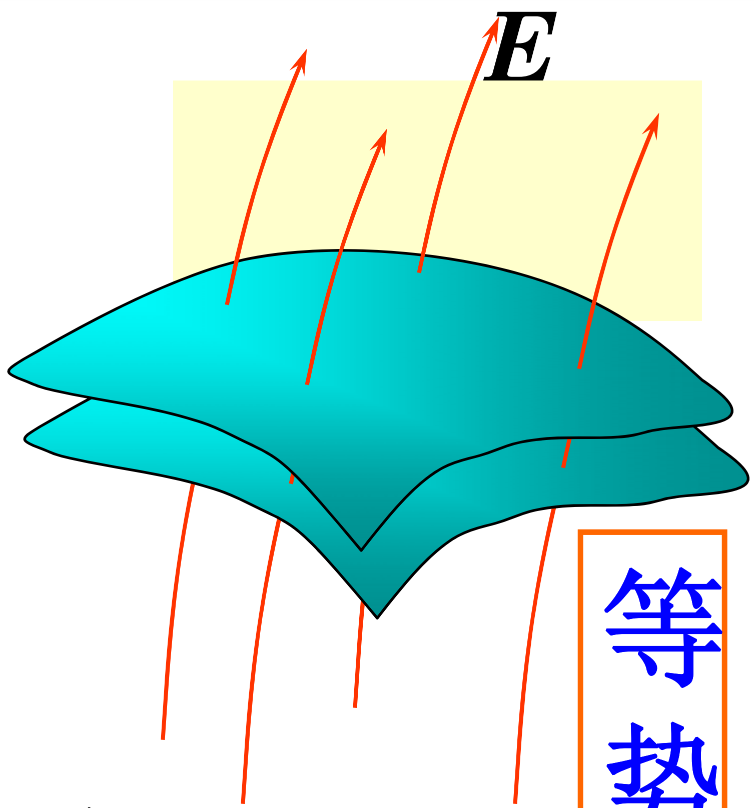
II $$\varphi_2=\varphi_{A2}+\varphi_{B2}=\frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0 r_2}+\frac{q_B}{4\pi\varepsilon_0 R_B}$$

I $$\varphi_1=\varphi_{A1}+\varphi_{B1}=\frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0 R_A}+\frac{q_B}{4\pi\varepsilon_0 R_B}$$

If qA=qB, 判断大小? $\varphi_1>\varphi_2>\varphi_3$

§ 2.4 等势面

1. 等势面：将电场中**电势相等**的点连接起来组成的**曲面**称为等势面。



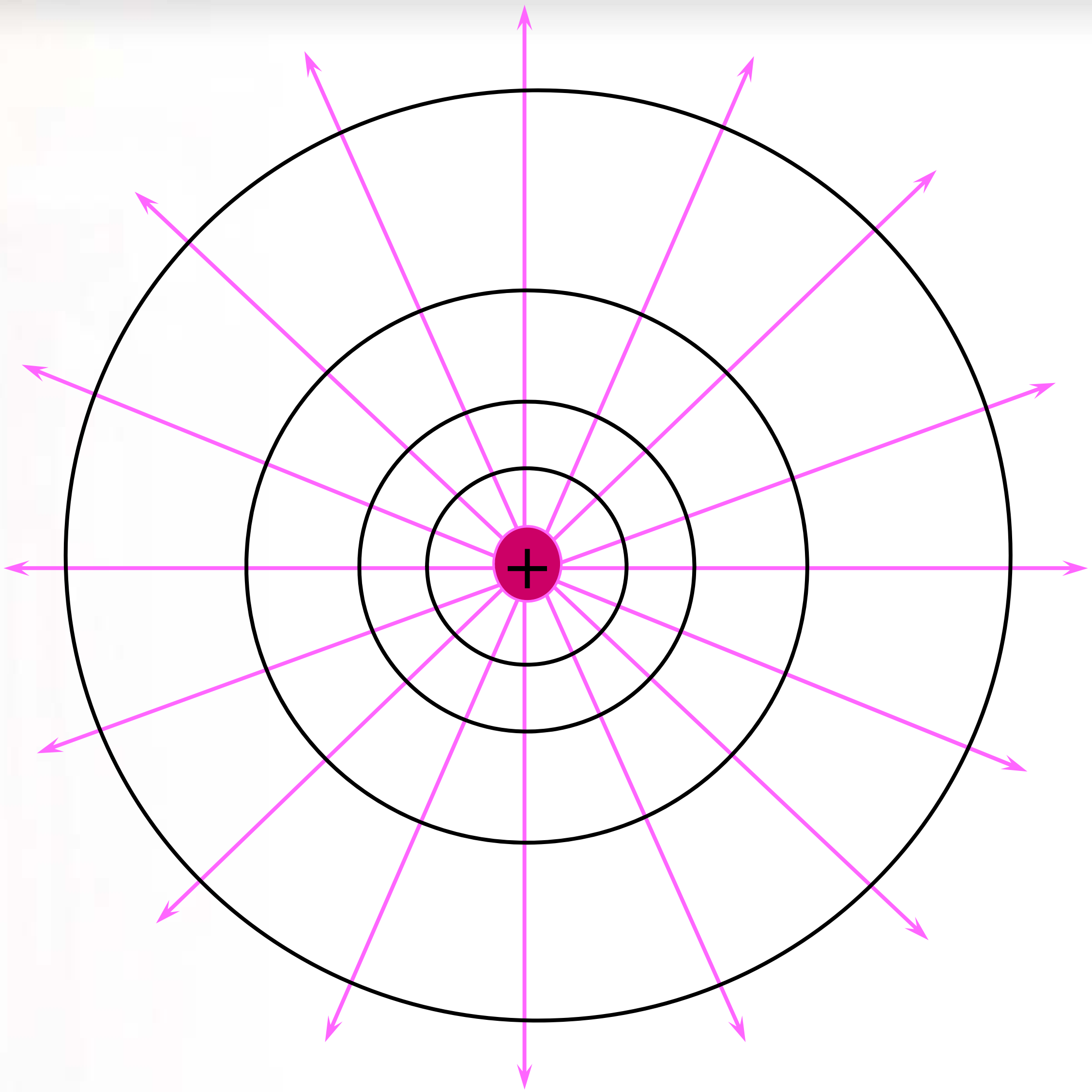
等势面

2. 等势面的性质

- 电力线与等势面垂直

$$\varphi_{12} = \int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

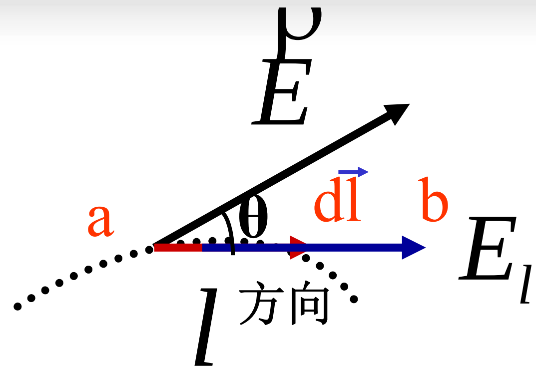
- 电力线的方向指向电势降落的方向
- 若规定两个相邻等势面的电势差相等，则等势面较密集的地方，场强较大。



§ 2.5 电势梯度

$$\varphi_a - \varphi_b = \vec{E} \cdot d\vec{l} \qquad \varphi_b - \varphi_a = d\varphi$$

$$\varphi_a - \varphi_b = -d\varphi = \vec{E} \cdot d\vec{l} = Edl\cos\theta$$

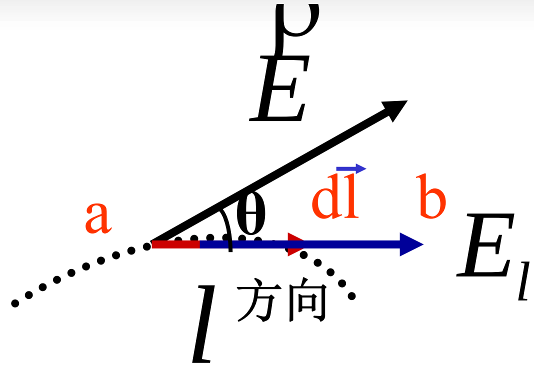


$$E_l = E\cos\theta = -\frac{d\varphi}{dl} \qquad \boxed{E_l = -\frac{d\varphi}{dl}}$$

$\dfrac{d\varphi}{dl}$ 为电势沿 l 方向的空间变化率

电场中某点场强沿某一方向的分量等于电势沿此方向的空间变化率的负值

$$E_l = E\cos\theta = -\frac{d\varphi}{dl} \qquad \vec{E} = -\left.\frac{d\varphi}{dl}\right|_{\max}$$



$$\left.\frac{d\varphi}{dl}\right|_{\max} \longrightarrow \boxed{\text{电势梯度}}$$

电势梯度是一个**矢量**，它的方向是该点附近**电势升高最快**的方向

电场中任一点的场强等于该点电势梯度的**负值**，即场强指向**电势降低**的方向

电势是空间坐标的函数

在直角坐标系中： $\varphi(x, y, z)$

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \qquad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\hat{k}\right)}$$

梯度算符 $\boldsymbol{grad} = \nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

$$\boxed{\therefore \vec{E} = -grad\varphi = -\nabla\varphi}$$

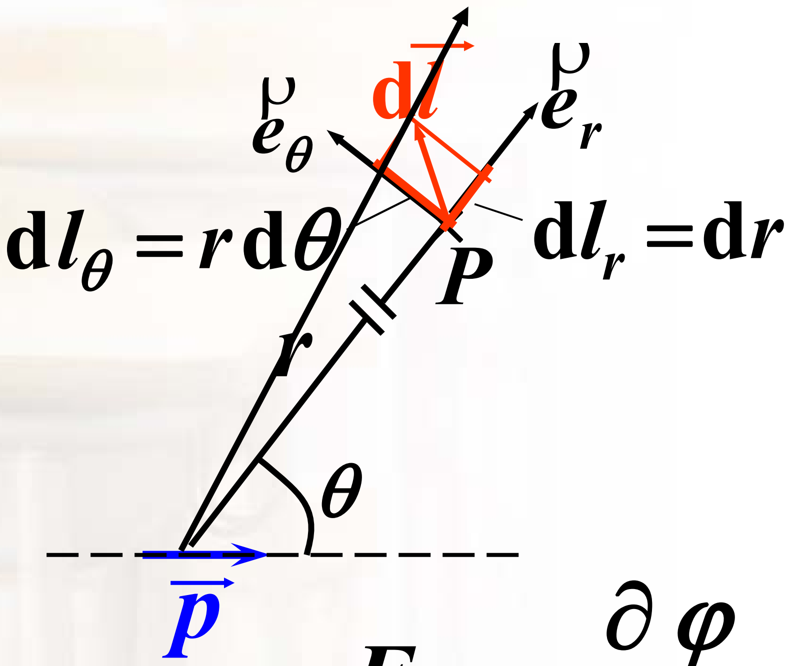
$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{k}\right)$$

电场强度与电势的微分关系

该公式说明，电场中某点的场强决定于电势在该点的空间变化率，而与该点电势值本身无直接关系

给出求电场的又一方法：由电荷分布 $\Rightarrow \varphi \Rightarrow \vec{E}$

[例] 由偶极子的电势求场强：



$$\varphi(\theta, r) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

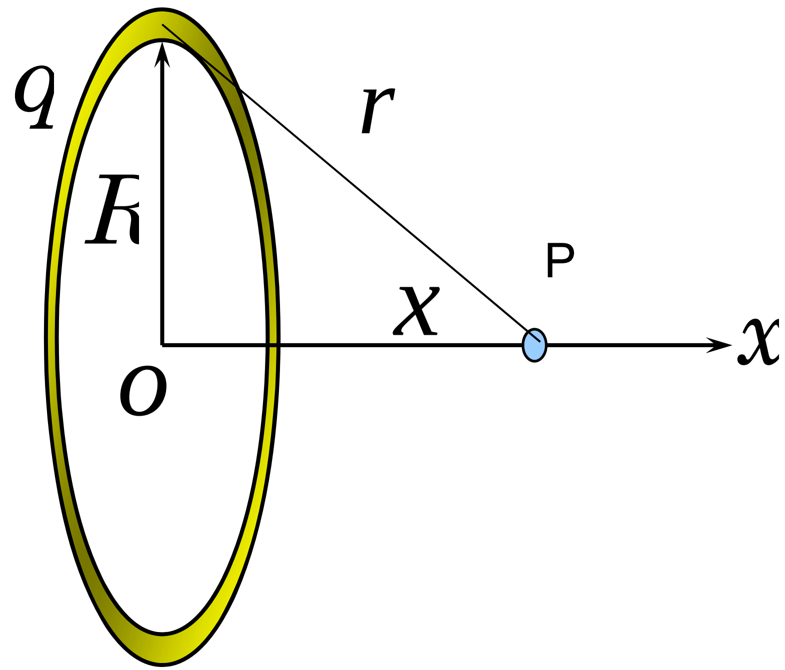
$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial l_r} = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = E_{//}$$

$$E_\theta = -\frac{\partial\varphi}{\partial l_\theta} = -\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = E_\perp$$

例. 求均匀带电圆环轴线上的场强分布

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (R^2 + x^2)^{1/2}}$$



$$E = E_x$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi = -\frac{d\varphi}{dx}\vec{i} = \frac{qx}{4\pi\varepsilon_0 (R^2 + x^2)^{3/2}}\vec{i}$$

➢计算场强的方法

1、以点电荷场强公式为基础，应用场强叠加原理求场强分布。原则上这种方法可计算任何带电体激发的电场分布，主要困难是积分运算。

2、当电荷分布具有对称性时可用高斯定理求场强分布。

3、若电势分布已知，则可利用 $\vec{E}=-\nabla\varphi$ 求出场强分布。

？思考以下问题

1、已知电场中某点的场强，能否计算出该点的电势？　（要已知场强分布）

2、在电势不变的空间，场强是否不变?

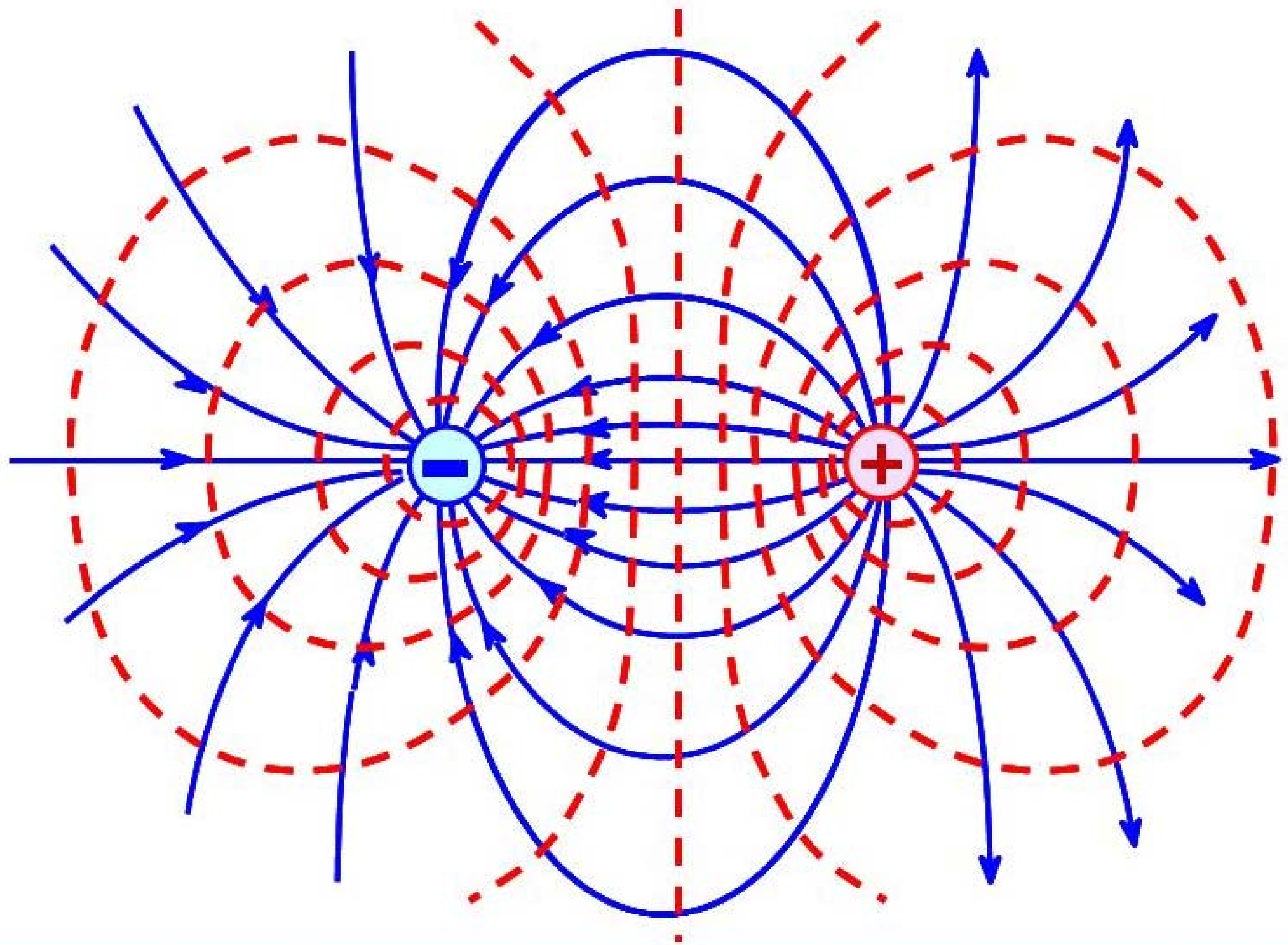
是，　$\therefore \vec{E} = -gradU = 0$

3、电势为零处，场强是否一定为零？

电偶极子的中垂线，电势为零，但电场不为零

4、场强为零处，电势是否一定为零？

均匀带电球面的内部，场强为零，电势不为零



§ 2.6 点电荷在外电场中的静电势能

$$A_{12} = \int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{(P_1)}^{(P_2)} q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \boldsymbol{q_0} \int_{(P_1)}^{(P_2)} \vec{E} \cdot \mathbf{d}\vec{l}$$

点电荷的电势能： $\boxed{W = q\varphi}$

一个电荷在外电场中的电势能是一种相互作用能,属于电荷与产生电场的电荷系所共有!

电势能的单位: J

常用单位: eV　　$1\mathrm{ev}=1.6\mathrm{x}10^{-19}\mathrm{J}$

例：电矩为p=ql的电偶极子在均匀外电场E中的电势能。

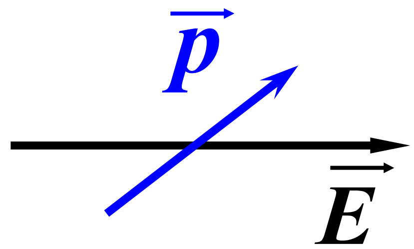
$$\boxed{W_{+} = q\varphi_{+}} \qquad \boxed{W_{-} = -q\varphi_{-}}$$

电偶极子的电势能：

$$\boxed{W = W_{+} + W_{-} = q(\varphi_{+} - \varphi_{-})} \qquad \boxed{E_l = E\cos\theta = -\frac{d\varphi}{dl}}$$

$$\boxed{W = -qlE\cos\theta}$$

$$\boxed{W = -\vec{p}\cdot\vec{E}}$$



$\vec{p} \parallel \vec{E}$ 时电势能最低。

下面说法正确的是

(A)等势面上各点场强的大小一定相等；

(B)在电势高处，电势能也一定高；

(C)场强大处，电势一定高；

(D)场强的方向总是从电势高处指向低处.

[D]

§2.7 点电荷系的静电能

点电荷的电势能：$\boxed{W = q\varphi}$

$$\boxed{W = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_{12}}}$$

点电荷系的相互作用能为：

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i \varphi_i}$$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\int_q \varphi dq}$$

q_i以外所有点电荷在q_i处的电势

电荷Q的所有电荷在dq处的电势

例：均匀带电球面（R，Q），求此带电系统的静电能。

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$W = \frac{1}{2}\int_q \varphi dq = \frac{1}{2}\int_q \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} dq$$

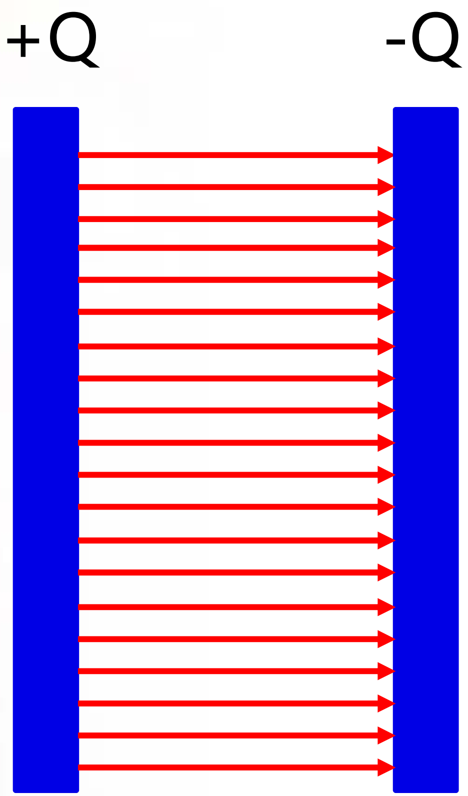
$$W = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

§ 2.8 静电场的能量

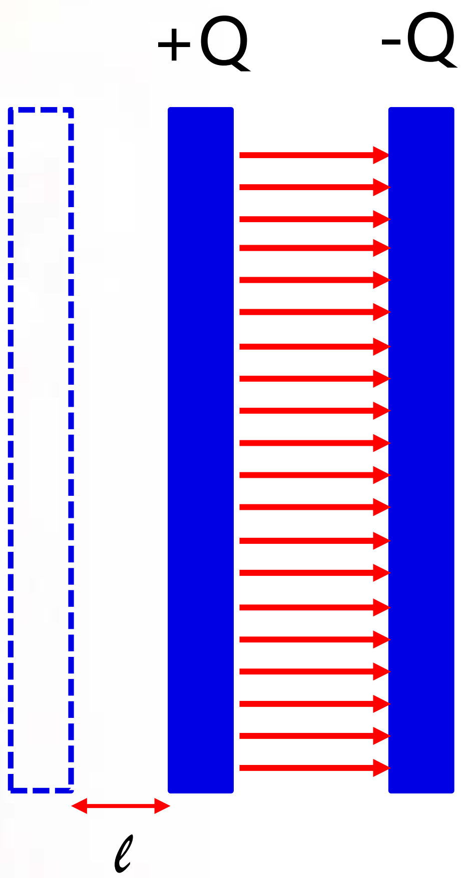
电荷系的静电能表示式 $$W=\frac{1}{2}\int_q \varphi \,\mathrm{d}q$$

似乎能量集中在电荷上。但从场的角度来看，

能量应该是储存在电场中。



$$E = \frac{Q}{\varepsilon_o S}$$



$$F = fs = \frac{Q^2}{2\varepsilon_o S}$$

$$A = Fl = fsl = \frac{Q^2}{2\varepsilon_o S} l$$

$$W = A = \frac{Q^2}{2\varepsilon_o S} l$$

$$\boxed{W = \frac{\varepsilon_o E^2}{2} Sl = \frac{\varepsilon_o E^2}{2} V}$$

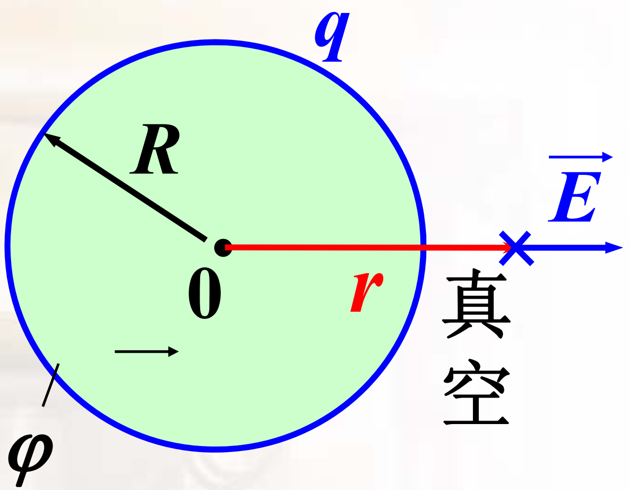
$$\boxed{W=\frac{\varepsilon_o E^2}{2}Sl=\frac{\varepsilon_o E^2}{2}V}$$

$$\boxed{w_e=\frac{W}{V}=\frac{\varepsilon_o E^2}{2}}$$

如果知道一个带电系统的电场分布,对全空间V进行积分

$$\boxed{W=\int_V w_e dV=\int_V \frac{\varepsilon_o E^2}{2}dV}$$

例，对均匀带电球体的电场能W：



在球体外

$$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2$$

在球体内

$$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)^2$$

$$W=\int_0^R\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\right)\cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r+\int_R^\infty\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)\cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r \qquad W=\frac{3q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$$

例，对均匀带电球面的电场能W：

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

$$\boxed{W = \int_V w_e dV = \int_V \frac{\varepsilon_o E^2}{2} dV}$$

$$W = \int_R^{\infty} \frac{q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4} \cdot 4\pi\, r^2 \,\mathrm{d}r = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$W=\frac{1}{2}\int_q \varphi\,\mathrm{d}q$$

球面电势 $\varphi=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

$$W=\frac{1}{2}\int_q \varphi\,\mathrm{d}q=\frac{1}{2}\varphi\cdot q=\frac{1}{2}\cdot\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

虽然如此，两种表示反映的却是两种不同观点。在变化的电磁场中，电场储能的概念被证明为不仅必要，而且是唯一客观的实在了。

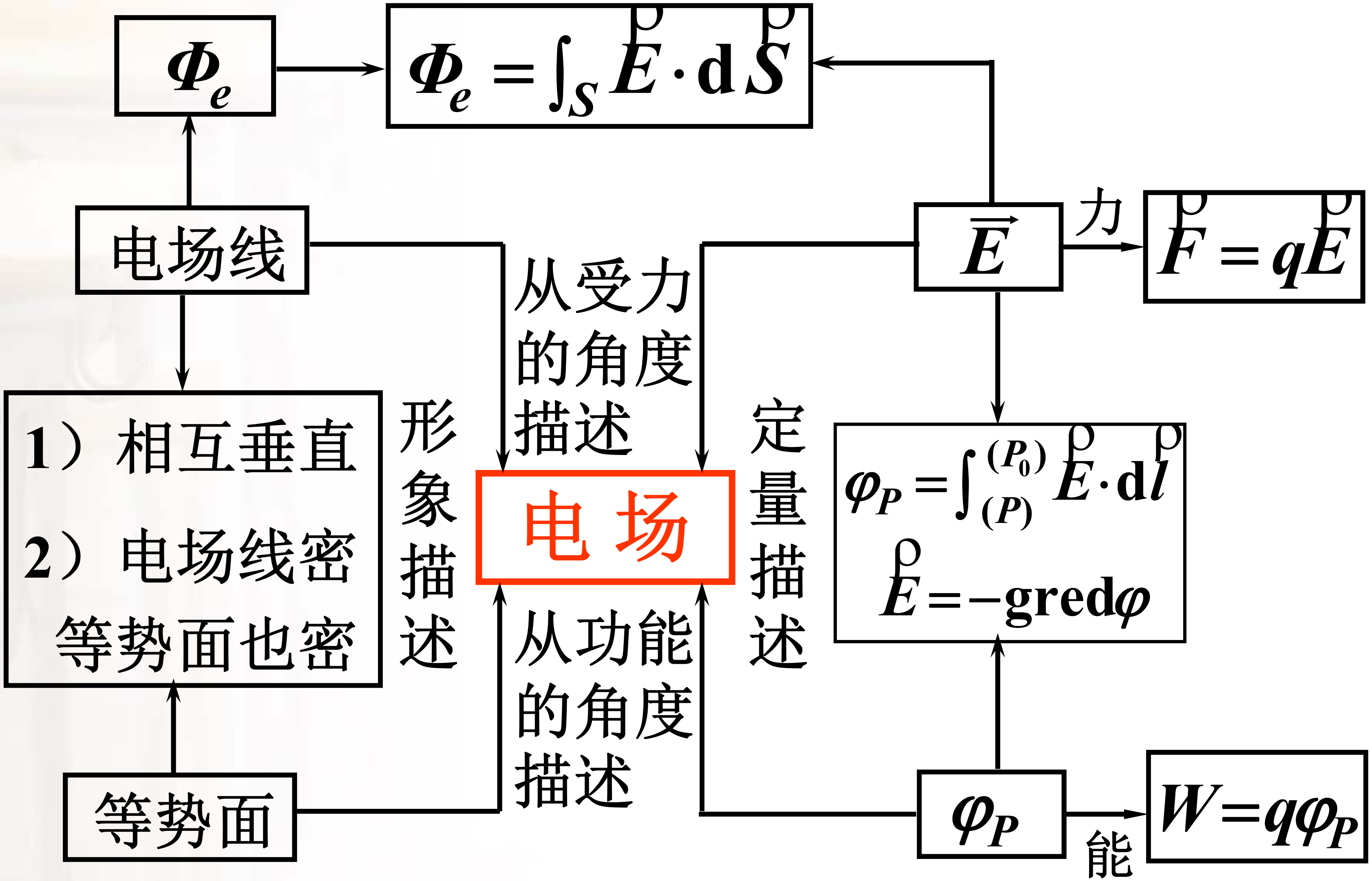
真空中静电场小结提纲

一. 线索（基本定律、定理）：

$$\left.\begin{array}{l}\text{库仑定律}\\ \vec{E}=\vec{F}/q_0\\ \vec{E}=\sum\vec{E}_i\end{array}\right] \rightarrow \vec{E}=\sum_i \frac{q_i\vec{e}_{r_i}}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2} \rightarrow \left[\begin{array}{l}\oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\dfrac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0}\\ \oint_L \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0\end{array}\right.$$

还有电荷守恒定律，它时刻都起作用。

二. 基本物理量之间的关系:



三. 求场的方法：

1. 求$\vec{E}$

叠加法（补偿法）： $\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i$，

$$\vec{E}=\int_q \frac{\vec{e}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}q;$$

高斯定理法： $\oint_s \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s}=\frac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0}$；

微分法： $\vec{E}=-\nabla\varphi$， $E_l=-\frac{\partial\varphi}{\partial l}$。

2.求φ

场强积分法：$\varphi_p = \int_{(P)}^{(P_0)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$，

（$\vec{E}$分段，积分也要分段）；

叠加法（补偿法）：$\varphi = \sum_i \varphi_i$（零点要同）；

$$\varphi = \int_q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}，\quad（\varphi_\infty = 0）。$$

谢谢！