/

华东师范大学期末试卷（A卷） 参考答案

2013 – 2014 学年 第二学期

课程名称: 高等数学A(二)　　课程性质: 专业必修　考试日期: 2014. 06. 23

学生姓名________________　　　　学　　号________________

专　　业________________　　　　年级/班级____2013____

一	二	三	总 分	阅卷人签名

一、填空题（每小题4分，共20分）

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}(1+xy)^{\frac{1}{x}}=$ <u>e</u>.

2. 已知$z=f(xy^2,x^2y)$,其中函数f一阶可导，则$dz=$ <u>$(y^2f_1+2xyf_2)dx+(2xyf_1+x^2f_2)dy$</u>.

3. 已知$f(x,y)$连续，交换积分顺序$\int_0^4 dy\int_{-\sqrt{4-y}}^{\frac{1}{2}(y-4)}f(x,y)dx=$ <u>$\int_{-2}^{0}dx\int_{2x+4}^{4-x^2}f(x,y)dy$</u>.

4. 函数$y(x)$满足微分方程$\frac{dy}{dx}-y=e^x$,且$y|_{x=0}=1$,则方程的特解为 <u>$(x+1)e^x$</u>.

5. 设当$0\le x<\frac{\pi}{2}$时，$f(x)=1$；当$\frac{\pi}{2}\le x<\pi$时，$f(x)=0$, $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$是$f(x)$展开的正弦级数,则$s(\frac{\pi}{2})=$ <u>$\frac{1}{2}$</u>.

二、简答题（本题共40分，要求给出主要解题步骤）

1. (6分)解微分方程$(xy+x^2+y^2)dx-x^2dy=0$ $(x\neq 0)$.

解: 原方程化为 $\left[\frac{y}{x}+1+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]dx=dy$.
令 $\frac{y}{x}=u$，则 $y=ux$. ---- 2'

原方程化为 $u^2+u+1=u+xu'$. ------ 1'

即 $\frac{du}{u^2+1}=\frac{dx}{x}$ ------ 1'

$\Rightarrow \arctan u=\ln|x|+C$

$\Rightarrow y=\tan(\ln|x|+C)x$ 或 $\cancel{\arctan\frac{y}{x}=\ln|x|+C}$ -- 2'

2. (6分) 求微分方程$y''-3y'+2y=e^{-x}$的通解.

解: 先解齐次方程 $y''-3y'+2y=0$:
特征方程的根为 $r_1=2$, $r_2=1$ --- 1'

$\Rightarrow y_h=C_1e^{2x}+C_2e^{x}$ ----- 1'

令非齐次的通解为
$y_p=Ae^{-x}$

$\Rightarrow A=\frac{1}{6}$ --- 2'

$\therefore y=C_1e^{2x}+C_2e^{x}+\frac{1}{6}e^{-x}$

---- 2'

3. (6分) 求函数 $f(x)=\frac{1}{2x^2-3x+1}$ 在点 $x=0$处的幂级数展开式.

$$\frac{1}{2x^2-3x+1}=\frac{2}{2x-2}-\frac{2}{2x-1}$$

$$=-\frac{1}{1-x}+\frac{2}{1-2x} \quad ----2'$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}x^n+2\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n \quad \cdots\cdots 2'$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1}-1)x^n \quad ------2'$$

4. (10分) 判别下列级数的敛散性 .

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=1 \quad ----2'$$

$\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散 ----- 1'

$\therefore$ 原级数发散. --- 2'

(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{e^n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{e^n}}{\frac{n-1}{e^{n-1}}}=\frac{1}{e}<1 \quad \cdots 2'$$

$\Rightarrow$ 原级数绝对收敛 ---- 1'

$\Rightarrow$ 原级数收敛. --- 2'

5. (12分) 设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内具有连续一阶导数，L是上半平面$(y>0)$内有向分段光滑曲线，其起点和终点分别为$(1,2),(2,1)$，记

$$I=\int_L\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy.$$

(1) 证明曲线积分I与积分路径无关; (2) 计算I的值.

解：令 $P=\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]$, $Q=\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]$,

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2f+xy^3f-1}{y^2}, \quad ----2'$$

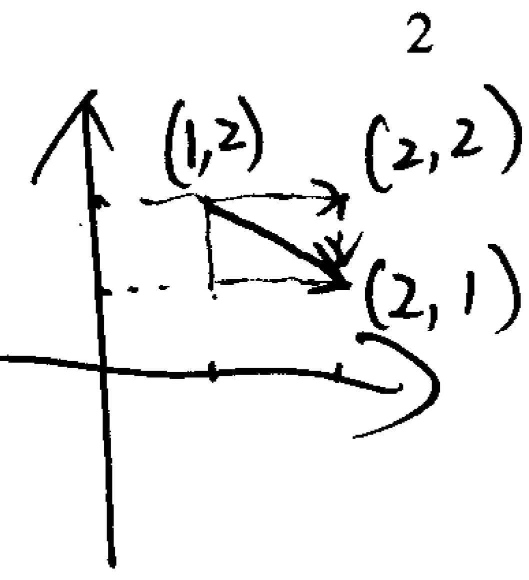
$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2f-1+xy^3f'}{y^2} \quad ---2'$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \quad ----2'$$

$$I=\int_1^2\frac{1+4f(2x)}{2}dx+\int_2^1\frac{2}{y^2}[y^2f(2y)-1]dy \quad ----2'$$

$$=\frac{1}{2}+\int_1^2 2f(2x)dx-\int_1^2 2f(2y)dy+1 \quad ----2'$$

$$=\frac{3}{2} \quad ---2'$$



三、解答题 (本题共40分，要求给出主要解题步骤)

1. (8分) 求二元函数 $f(x,y)=3x^2+6x-\frac{1}{3}y^3+2y^2+1$ 的极值.

解：令 $\begin{cases} f_x = 6x+6=0 \\ f_y = -y^2+4y=0. \end{cases}$ ------ 2′

$\Rightarrow \begin{cases} x=-1, \\ y=0, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-1, \\ y=4. \end{cases}$ ---- 2′

又 $A=f_{x^2}=6,\ B=f_{xy}=0,\ C=f_{y^2}=-2y+4.$ ---- 2′

$H|_{(-1,0)}=AC-B^2=24>0$

$\Rightarrow (-1,0)$ 为极小值点，极小值为 -2. ---- 1′

$H|_{(-1,4)}=AC-B^2<0$

$\Rightarrow (-1,4)$ 为非极值点， ---- 1′

2. (8分) 计算曲线积分 $\oint_L (z-y)dx+(x-z)dy+(x-y)dz$, 其中 L 是 $x^2+y^2=1$ 与 $x-y+z=2$ 的交线，从 z 轴负向看为顺时针方向.

解：令 $P=z-y,\ Q=x-z,\ R=x-y,$

$\Rightarrow I=\iint_\Sigma \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)dydz+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)dzdx+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$ --- 2′

—— 2′

$=2\iint_\Sigma dxdy$

$=2\times\iint_{x^2+y^2\le 1} dxdy$ —— 2′

$=2\times\pi = 2\pi.$ —— 2′

另解：

令 $\left.\begin{array}{l} x=\cos\theta, \\ y=\sin\theta, \\ z=2-\cos\theta+\sin\theta, \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{array}\right\}$ --- 4′

代入 ---- 2′

求得 ---- 2′

3. (8分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2(n-1)}$ 的收敛域与和函数.

解：$\rho=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\frac{2n-1}{2^n}}{\frac{2n-3}{2^{n-1}}}=\frac{1}{2}$ ---- 1′

$\Rightarrow |x^2|<2$ ---- 1′

$\Rightarrow |x|<\sqrt{2}$ ---- 1′

当 $x=\pm\sqrt{2}$ 时级数发散；---- 1′

$\Rightarrow$ 收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

令 $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$

$\Rightarrow \int_0^x s(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}$

$=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n$ ---- 1′

$=\frac{x}{2-x^2}$ ---- 1′

$\Rightarrow s(x)=\left(\frac{x}{2-x^2}\right)'$ ---- 1′

$=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$ ---- 1′

4. (8分) 计算曲面积分$\oiint\limits_{\Sigma} z^2 ds$,其中$\Sigma$为锥面$z = \sqrt{x^2+y^2}$在柱体$x^2+y^2 \le 2x$内的部分.

解: $\oiint\limits_{\Sigma} z^2 dS = \iint\limits_{x^2+y^2\le 2x} (x^2+y^2)\sqrt{2}\, dxdy$ - - - - 2'

$\left(dS = \sqrt{z_x^2+z_y^2+1}\, dxdy = \sqrt{2}\, dxdy\right)$ - - - 2'

$\xrightarrow[y=r\sin\theta,\ -\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}]{\text{令} x=r\cos\theta,} \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} r^3 dr$ - - - 2'

$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2}\cdot 4\cos^4\theta\, d\theta$

$= 4\sqrt{2} \times 2 \times \frac{3}{16}\pi = \frac{3\sqrt{2}}{2}\pi$ - - - 2'

5. (8分) 设$\varphi(x)$连续,且满足$\varphi(x) = e^x + \int_0^x t\varphi(t)dt - x\int_0^x \varphi(t)dt$,求$\varphi(x)$.

解: $\varphi(x) = e^x + \int_0^x t\varphi(t)dt - x\int_0^x \varphi(t)dt$

$\Rightarrow \varphi'(x) = e^x + x\varphi(x) - \int_0^x \varphi(t)dt - x\varphi(x)$

$= e^x - \int_0^x \varphi(t)dt$ - - - - 2'

$\Rightarrow \varphi''(x) = e^x - \varphi(x)$ - - - 2'

下解 $y''+y=e^x$ $r=\pm i$ - - - - - 1'

齐次通解为 $C_1\cos x + C_2\sin x$, - - - - 1'

非齐次特解为 $\frac{1}{2}e^x$ - - - 1'

$\Rightarrow \varphi(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}e^x$ - - - 1'

$\varphi(0)=1 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \varphi(x) = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}e^x$

$\varphi'(0)=1 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2}$