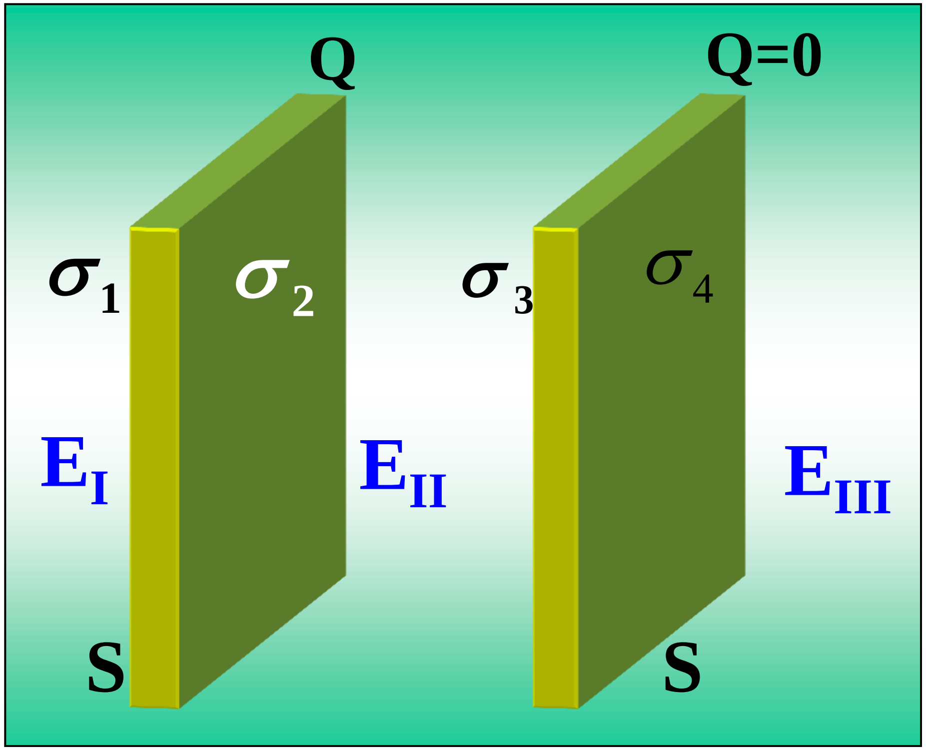
有导体存在时静电场的分析与计算

例: 两块平行放置的面积为S的金属板，各带电量Q、0，板距与板的线度相比很小。

求: ① 静电平衡时，金属板电荷的分布和周围电场的分布。

② 若把第二块金属板接地，以上结果如何？



依据: 静电平衡条件

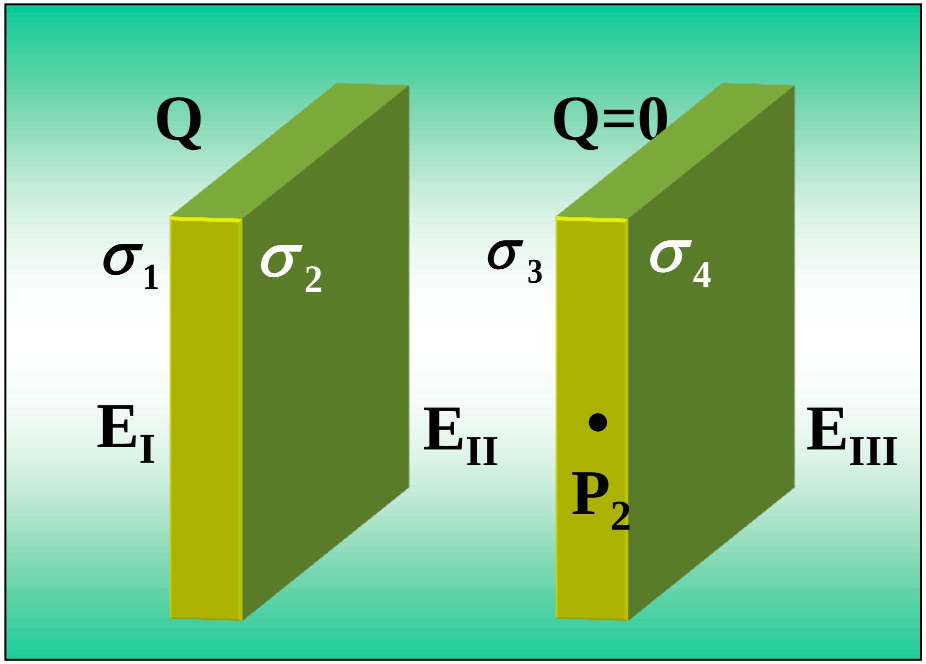
电荷守恒

高斯定理

解： 电荷守恒

$$(\sigma_1+\sigma_2)S=Q$$

$$(\sigma_3+\sigma_4)S=0$$



静电平衡条件：

导体内部的场强为零

P_2点的电场强度为零，即：

$$\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_o}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_o}+\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_o}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_o}=0$$

$$E_I=-\frac{Q/S}{2\varepsilon_o}$$

高斯定理： $\sigma_2+\sigma_3=0$

解得：

$$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_4=\frac{Q}{2s}$$

$$\sigma_3=-\frac{Q}{2s}$$

$$E_{II}=\frac{Q/S}{2\varepsilon_o}$$

$$E_{III}=\frac{Q/S}{2\varepsilon_o}$$

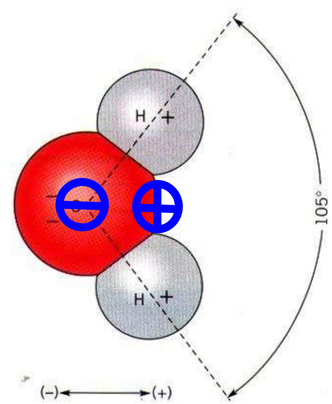
二、静电场与电介质的相互作用

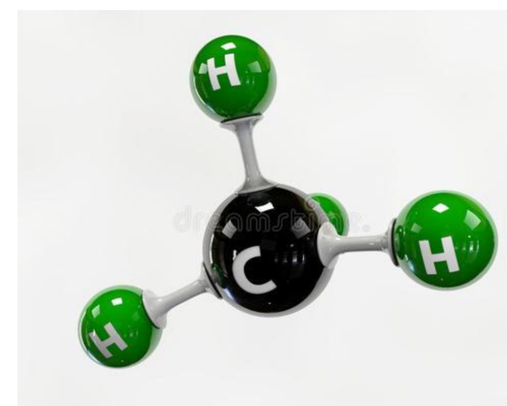
1. 电介质的分类

(1) 有极分子 − +

分子电荷的正、负“重心”分开，具有固有电偶极矩，

$p \sim 10^{-30}\ \mathrm{C \cdot m}$。如:水， HCl，NH_3 …





(2) 无极分子 ±

分子电荷的正、负“重心”重合， 无固有电偶极矩。

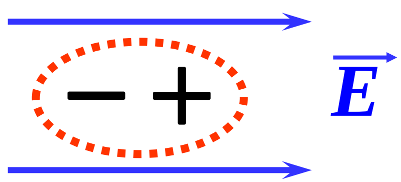
如：He，Ne， CH_4 …

二、静电场与电介质的相互作用

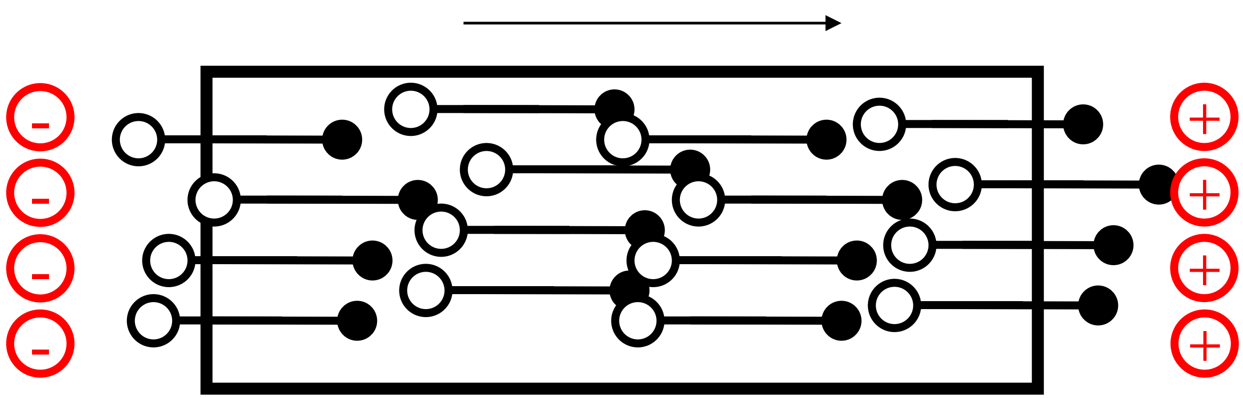
2. 极化：介质在电场中表面出现附加电荷称为极化

(1) 位移极化

对无极分子 ± $\vec{p}=0$



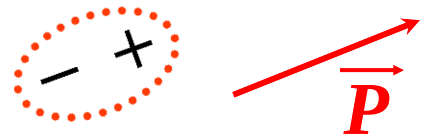
$\vec{p}\,/\!/\,\vec{E}$， $\vec{E}\uparrow \rightarrow \vec{p}\uparrow$

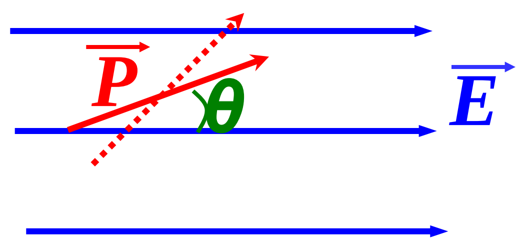


二、静电场与电介质的相互作用

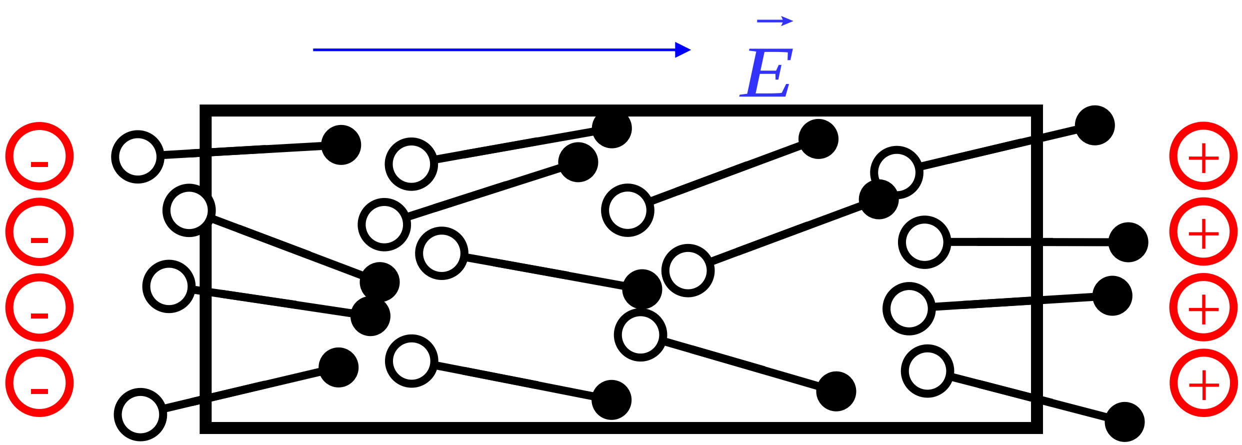
（2）取向极化

对有极分子





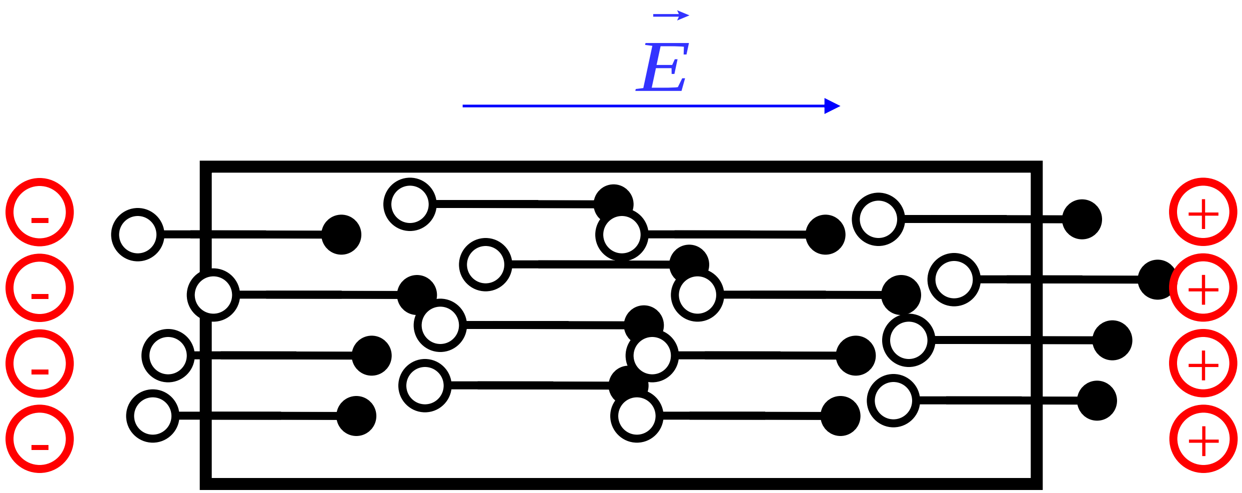
$\vec{E}\uparrow\rightarrow\theta\downarrow$，$\vec{p}\rightarrow$ 平行$\vec{E}$



二、静电场与电介质的相互作用

(3) 极化面电荷

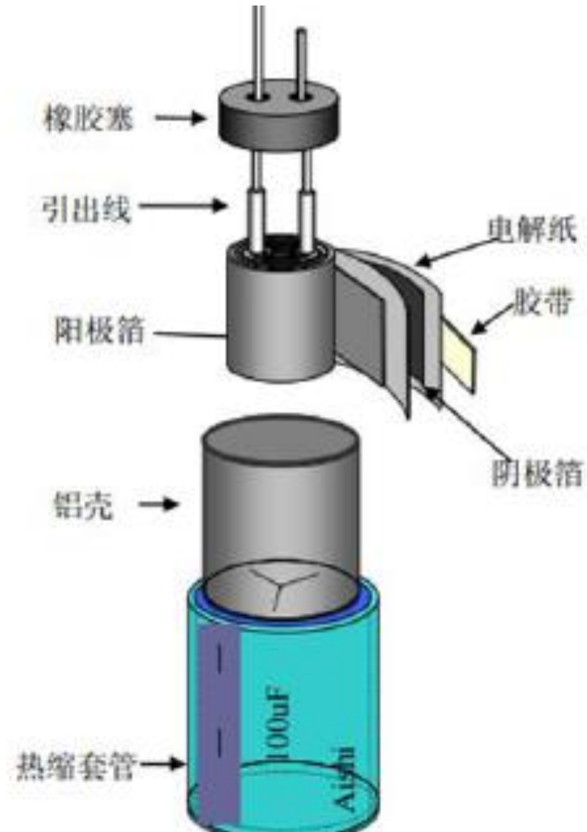
以位移极化为例，设在电场力作用下正电荷 向电场方向移动。



$$\vec{E}\uparrow \rightarrow \sigma \uparrow$$

二、静电场与电介质的相互作用

3. 电容器及电容

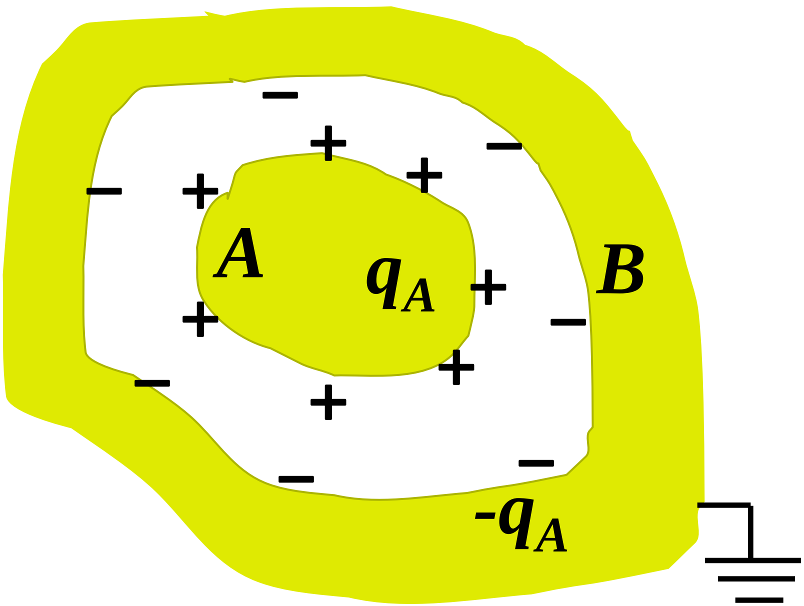


二、静电场与电介质的相互作用

3. 电容器及电容

(1) 电容器

两个带有等值而异号电荷的导体所组成的系统，叫做**电容器。**



电容器两个极板所带的电量为+Q、-Q，它们的电势分别为V_A、V_B，定义**电容器的电容**为：

$$\boxed{C=\frac{Q}{U_{AB}}=\frac{Q}{V_A-V_B}}$$

单位

法拉 $1\mathrm{F}=1\mathrm{C.V}^{-1}$

微法 $1\mu\mathrm{F}=10^{-6}\mathrm{F}$

皮法 $1\mathrm{pF}=10^{-12}\mathrm{F}$

（2）电容器电容的计算

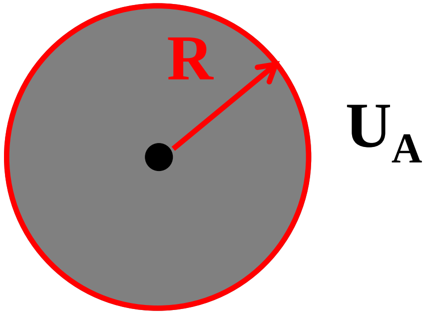
计算电容的一般**步骤**为：

- 设电容器的两极板带有**等量异号**电荷**Q**；
- 求出两极板之间的**电场强度E**的分布；
- 计算两极板之间的**电势差U**；
- 根据电容器电容的定义求得**电容C=Q/U**。

例1： 真空中一个半径为R、带电量为Q 的**孤立球形导体**的电容

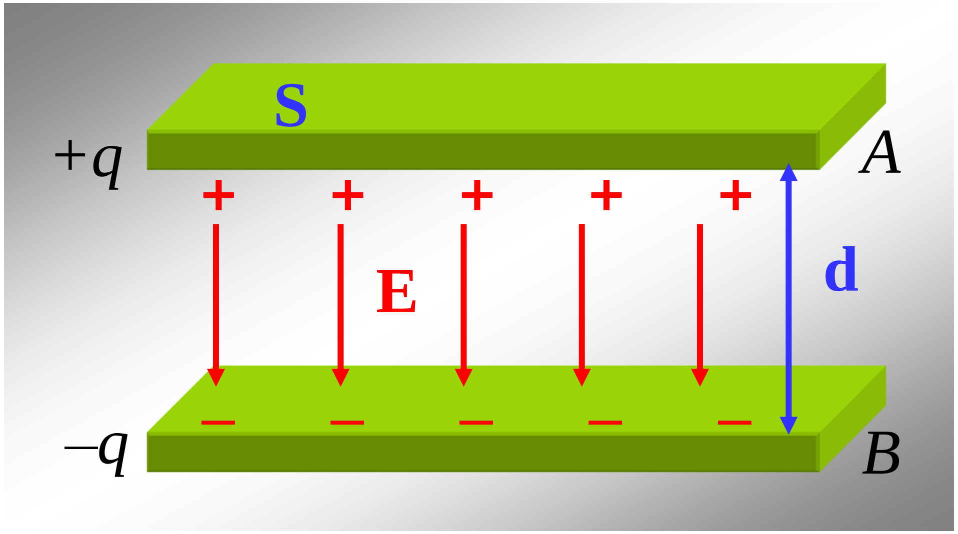
$$U_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\varepsilon_0 R$$



孤立导体的电容与导体的形状有关，与其带电量和电势无关。

例2：平行板电容器的电容



解: 设电容器两极板电量 ± q，且d 很小，S 很大，其电场：

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_o}=\frac{q/S}{\varepsilon_o}$$

板间电势差：

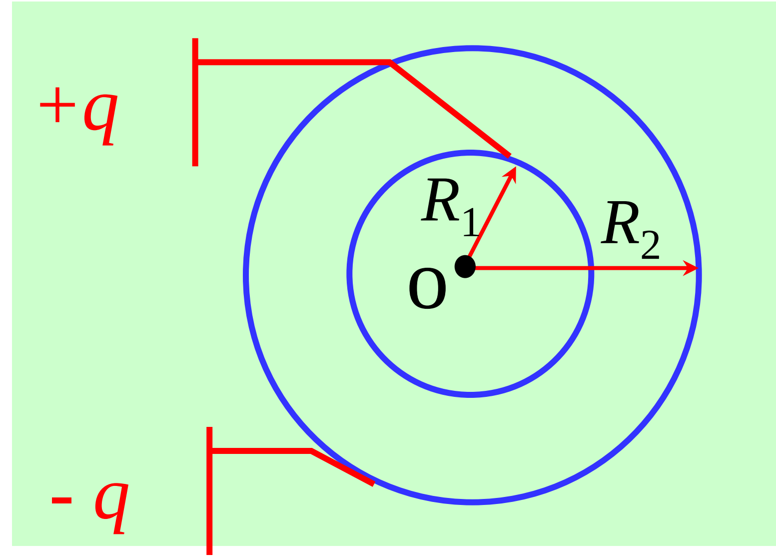
$$U_{AB}=E\cdot d=\frac{qd}{\varepsilon_o S}$$

电容：

$$C=\frac{q}{U_{AB}}=\frac{\varepsilon_o S}{d}$$

平板电容器的电容与极板的面积成正比，与极板之间的距离成反比，还与电介质的性质有关。

例3：球形电容器



解：两极板间**电场**

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o r^2} \qquad (R_1 < r < R_2)$$

板间**电势差**

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

电容

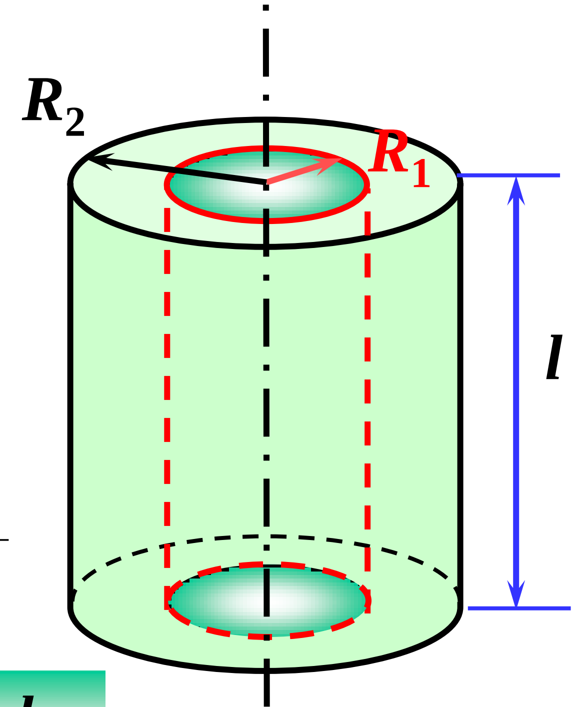
$$C = \frac{4\pi\varepsilon_o R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

讨论：当$R_2 \to \infty$时，

$$C = 4\pi\varepsilon_o R_1,$$

孤立导体球电容。

例4：圆柱形电容器



解： 设两极板**带电量** $\pm q$，且 $l >> R_2 - R_1$

板间**电场** $E = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_o rl}$ $\quad (R_1 < r < R_2)$

板间**电势差** $U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_o l} \ln\dfrac{R_2}{R_1}$

圆柱形电容器的**电容** $C = \dfrac{q}{U_{12}} = \dfrac{2\pi\varepsilon_o l}{\ln(R_2/R_1)}$

- 圆柱越长，电容越大；两圆柱之间的间隙越小，电容越大。
- 令$d=R_2—R_1$，当$d<<R_1$ 时，$\ln\dfrac{R_2}{R_1} = \ln\dfrac{R_1+d}{R_1} = \ln(1+\dfrac{d}{R_1}) \approx \dfrac{d}{R_1}$，其电容

$$C \approx \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{d/R_1} \approx \frac{2\pi\varepsilon_0 lR_1}{d} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

——平板电容器

孤立球形导体的电容 $C=\dfrac{Q}{U}=4\pi\varepsilon_0 R$

平行板电容器的电容 $C=\dfrac{q}{U_{AB}}=\dfrac{\varepsilon_o S}{d}$

$$\boxed{C=\frac{Q}{U_{AB}}=\frac{Q}{V_A-V_B}}$$

球形电容器 $C=\dfrac{4\pi\varepsilon_o R_1 R_2}{R_2-R_1}$

圆柱形电容器 $C=\dfrac{q}{U_{12}}=\dfrac{2\pi\varepsilon_o l}{\ln(R_2/R_1)}$

关于电容的说明：

- 电容是导体的一种性质，与导体是否带电无关；
- 电容是反映导体储存电荷或电能能力的物理量；
- 只与导体本身的性质和尺寸有关。

(3) 电容器的并联和串联

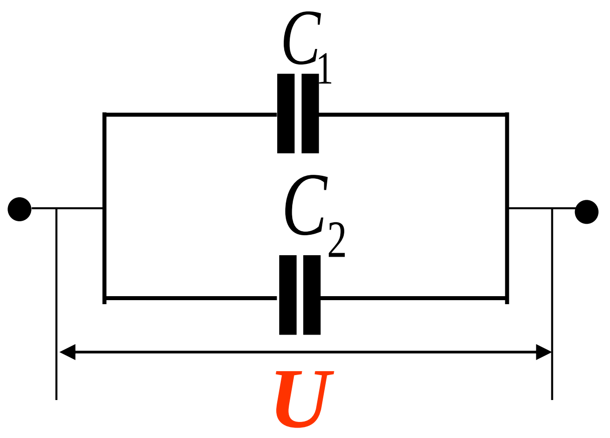
衡量电容器能力的指标：

1：电容的大小

2：耐电压能力

希望电容大，耐压能力强 → 电容器的并联和串联

a) 电容器的并联



特点：每个电容器两端的电势差相等

等效电容：

$$C=\frac{Q}{U}=C_1+C_2$$

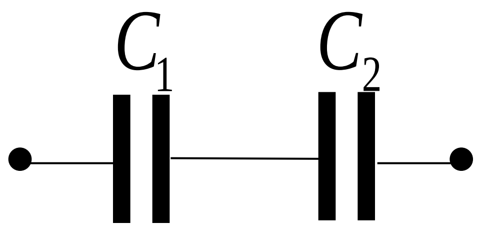
当几个电容器并联时，等效电容等于几个电容器电容之和；

并联让总电容增大。

总电量：

$$Q=Q_1+Q_2=C_1U+C_2U=(C_1+C_2)U$$

(3) 电容器的并联和串联



b) 电容器的串联

特点： 每个电容器极板所带的电量相等

等效电容 $$C=\frac{Q}{U}=\frac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}}$$

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$$

当几个电容器串联时，其等效电容的倒数等于几个电容器电容的倒数之和；串联让耐压能力提高。

总电压

$$U=U_1+U_2=\frac{Q}{C_1}+\frac{Q}{C_2}=\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)Q$$

讨论：

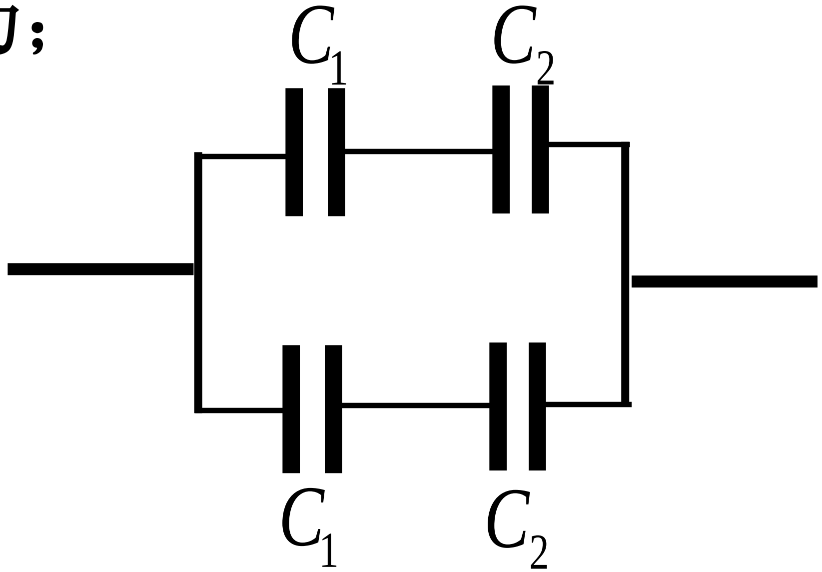
$$C=\sum_i C_i$$ **并联电容器**的电容等于各个电容器电容的和。

$$\frac{1}{C}=\sum_i \frac{1}{C_i}$$ **串联电容器**总电容的倒数等于各串联电容倒数之和。

当电容器的耐压能力不被满足时，常用串并联使用来改善。

串联使用可提高耐压能力；

并联使用可以提高容量。



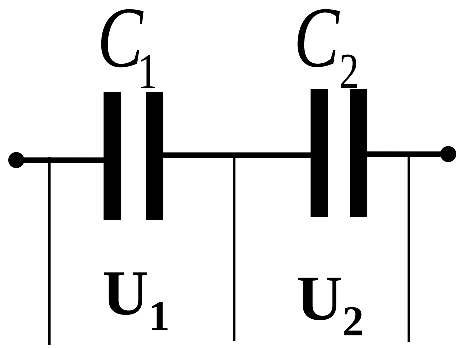
例： **C_1和C_2是两个电容器，其上分别标明200pF、300V和300pF、900V。把它们串联起来，两端加1000V电压，则（ C ）**

A、C_1被击穿，C_2不被击穿

B、 C_2被击穿，C_1不被击穿

C、两者都被击穿

D、两者都不被击穿



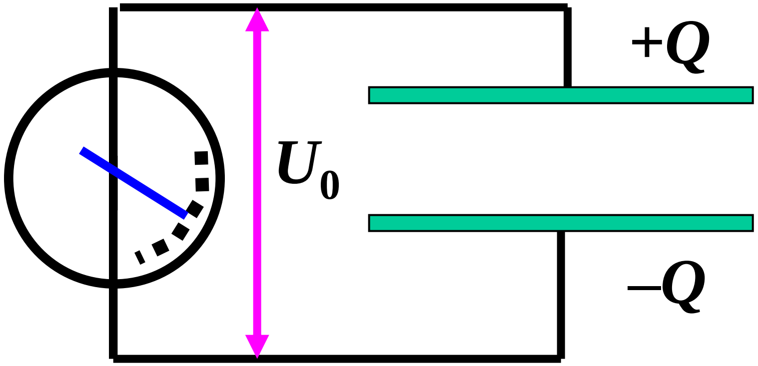
电容器串联，电量相等 $Q = C_1U_1 = C_2U_2$

因此得到 $\dfrac{U_1}{U_2} = \dfrac{C_2}{C_1} = \dfrac{3}{2}$

C_1和C_2上的电压分别是 $U_1 = 600\text{V}$ $U_2 = 400\text{V}$

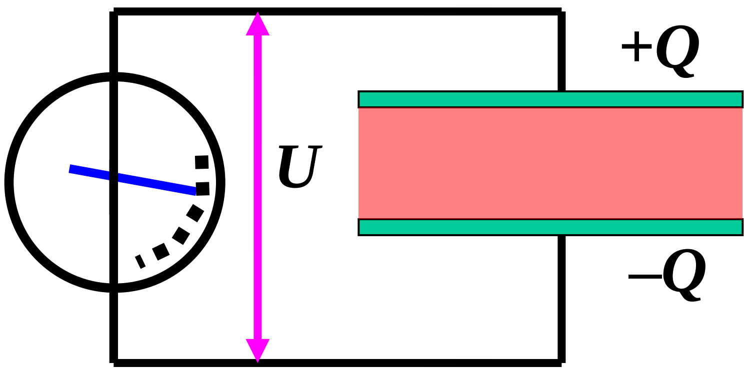
因此C_1先被击穿，然后1000V电压全部降到C_2，超过其耐压值，也被击穿。

（4）充满电介质的电容器电容



$$C_0 = \frac{Q}{U_0}$$

$$E_0 = \frac{U_0}{d}$$



$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{U_0/\varepsilon_r} = \varepsilon_r C_0$$

$$U = \frac{U_0}{\varepsilon_r}$$

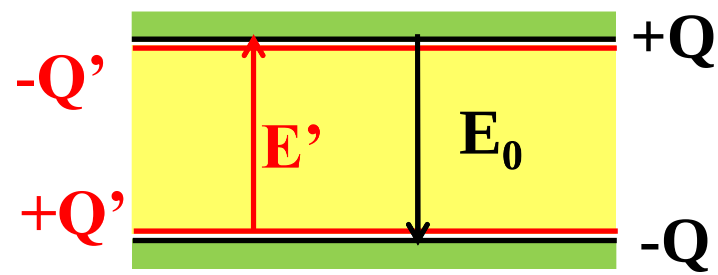
$$E = \frac{U}{d} = \frac{U_0/\varepsilon_r}{d} = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

极板间充满电介质所电容器的电容为真空电容的ε_r倍。

ε_r：介质的**相对介电常数，与介质有关**

例1：一平行板电容器间充满ε_r的电介质,求当它带电量为Q时，电介质面束缚电荷是多少？

理论分析 $\sigma = \dfrac{Q}{S}$ $\qquad \sigma' = \dfrac{Q'}{S}$



$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad E' = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0}$$

根据电场强度叠加原理 $E = E_0 - E' = \dfrac{\sigma - \sigma'}{\varepsilon_0}$

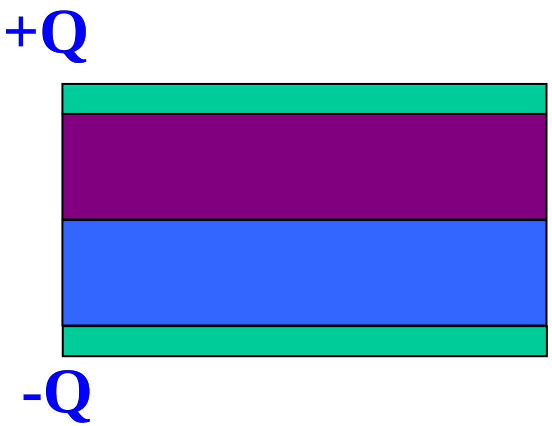
实验结果合场强 $E = \dfrac{E_0}{\varepsilon_r}$

$$\sigma' = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}\sigma$$

因此得到 $E = \dfrac{\sigma - \sigma'}{\varepsilon_0} = \dfrac{E_0}{\varepsilon_r} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}$

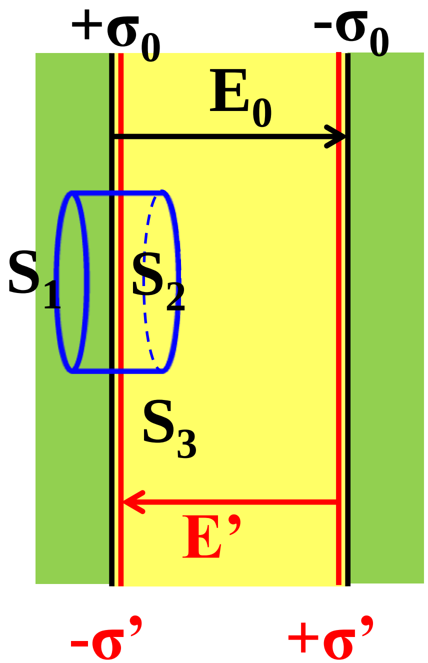
$$Q' = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}Q$$

作业： 一平行板电容器间充满ε_{r1}和 ε_{r2}的电介质,面积为S，间距为d，求电容。



(5) 电介质存在的高斯定律

在有介质时，$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0$仍成立，而高斯定理与电荷有关，所以需要修改。



$$\sigma_0 \to \vec{E}_0 \qquad \sigma' \to \vec{E}'$$

$$\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'$$

根据高斯定理

$$\oint \vec{E}\bullet d\vec{S}=\int_{S_1}\vec{E}\bullet d\vec{S}+\int_{S_2}\vec{E}\bullet d\vec{S}+\int_{S_3}\vec{E}\bullet d\vec{S}$$

$$=\quad 0 \quad + \quad ES_2 \quad +0$$

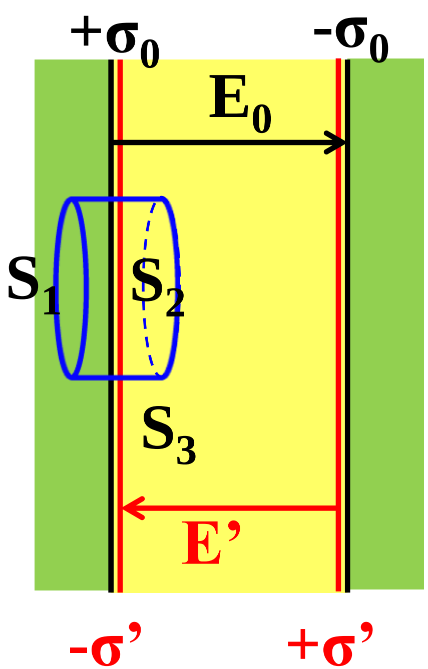
$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}(\sigma_0 S_2-\sigma' S_2) \qquad \sigma'=\frac{\varepsilon_r-1}{\varepsilon_r}\sigma$$

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{\sigma_0 S_2}{\varepsilon_r\varepsilon_0}$$

(5) 电介质存在的高斯定律

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sum q_0$$ —$\vec{D}$ 的高斯定理

在有电介质存在的静电场中，通过闭合曲面的电位移通量等于闭合曲面包含的自由电荷的代数和。



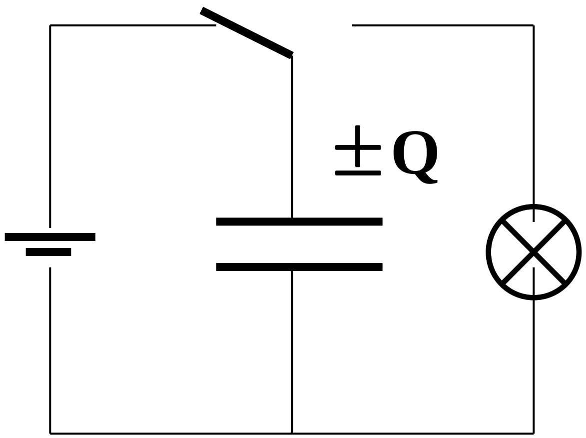
$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sigma_0 S_2}{\varepsilon_r \varepsilon_0}$$

$$\oint_S \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \sigma_0 S_2 \qquad \vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}$$

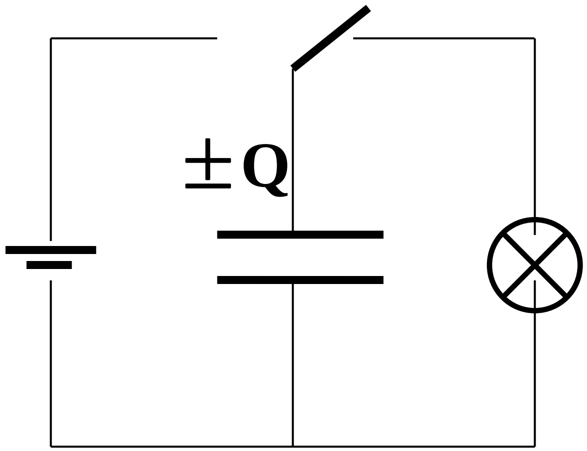
$\vec{D}$ 称为电位移矢量

$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ 称介质的介电常数

§ 12.9 电容器的能量和静电场的能量



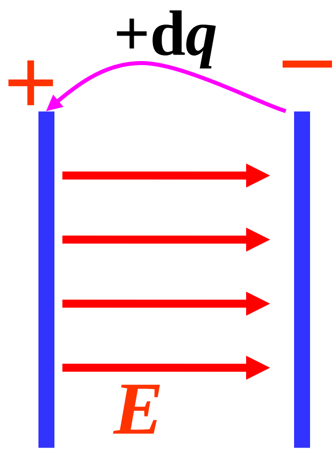
充电



放电

充电过程

设在某时刻两极板之间的电势差为U，此时若把+dq电荷从带负电的负极板搬运到带正电的正极板，外力所作的功为



$$dA = Udq = \frac{q}{C}dq$$

若使电容器的两极板分别带有±Q的电荷，则外力所作的功为

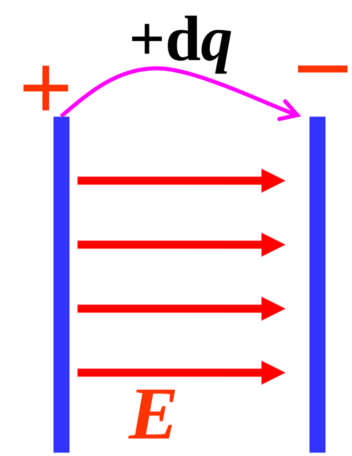
$$A = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2$$

电容器所储存的静电能

$$W_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CU^2$$

外力克服静电场力作功，把非静电能转换为带电体系的静电能.

放电过程



设在某时刻两极板之间的电势差为*U*，此时若把+d*q*电荷从带正电的正极板搬运到带负电的负极板，电场力所作的功为

$$dA = Udq = \frac{q}{C}dq$$

若使电容器的两极板±Q的电荷中和，则电场力所作的功为

$$A = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2$$

电容器所储存的静电能

$$W_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CU^2$$

带电体系的静电能通过灯泡释放出来

若认为是极板间充满电介质ε_r的平行板电容器（S, d）

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d} \qquad E = \frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}$$

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{2}\left(\frac{Q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}\right)^2 Sd = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{2}E^2 Sd = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{2}E^2 V$$

$$w_e = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{2}E^2$$

$$or \qquad w_e = \frac{1}{2}DE$$

$$\Rightarrow \quad W = \int w_e dV = \int \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r}{2}E^2 dV$$

电源 $\xrightarrow{\text{充电}}$ 电容 $\xrightarrow{\text{放电}}$ 灯泡