第五节

第二型曲面积分

一、有向曲面及曲面元素的投影

二、第二型曲面积分的概念与性质

三、第二型曲面积分的计算法

四、两类曲面积分的联系

内容小结

1. 两类曲面积分及其联系

性质: $$\iint_{\Sigma^-} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= -\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

联系: $$\iint_{\Sigma} P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

当 $\Sigma: z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 时,

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pm\iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y))\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

(上侧取“+”, 下侧取“–”)

类似可考虑在 yoz 面及 zox 面上的二重积分转化公式 .

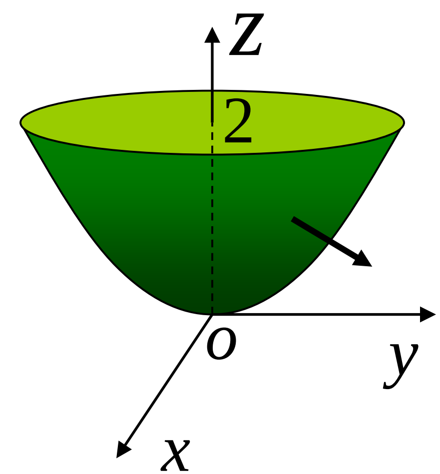
• 指定了侧的曲面叫有向曲面, 其方向用法向量指向表示 :

方向余弦	$\cos\alpha$	$\cos\beta$	$\cos\gamma$	封闭曲面
侧的规定	>0 为前侧 <0 为后侧	>0 为右侧 <0 为左侧	>0 为上侧 <0 为下侧	外侧 内侧

例6. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma}(z^2+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,其中$\Sigma$

旋转抛物面 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$介于平面 $z=0$

及 $z=2$ 之间部分的下侧.



解: 利用两类曲面积分的联系, 有

$$\iint_{\Sigma}(z^2+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

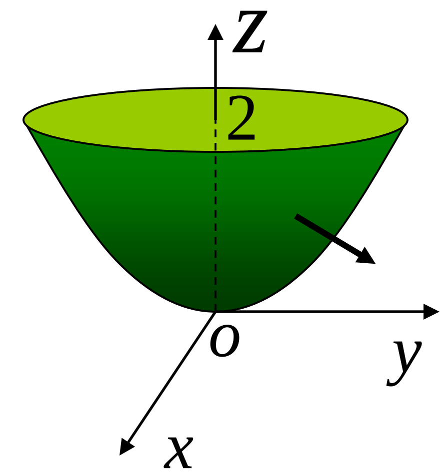
$$=\iint_{\Sigma}(z^2+x)\cos\alpha\,\mathrm{d}S$$

$$=\iint_{\Sigma}(z^2+x)\,\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\boxed{\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\\ \cos\gamma &= \frac{-1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\end{aligned}}$$

$$\therefore\ \text{原式}=\iint_{\Sigma}\left[\,(z^2+x)\,(-x)-z\,\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

将 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ 代入，得



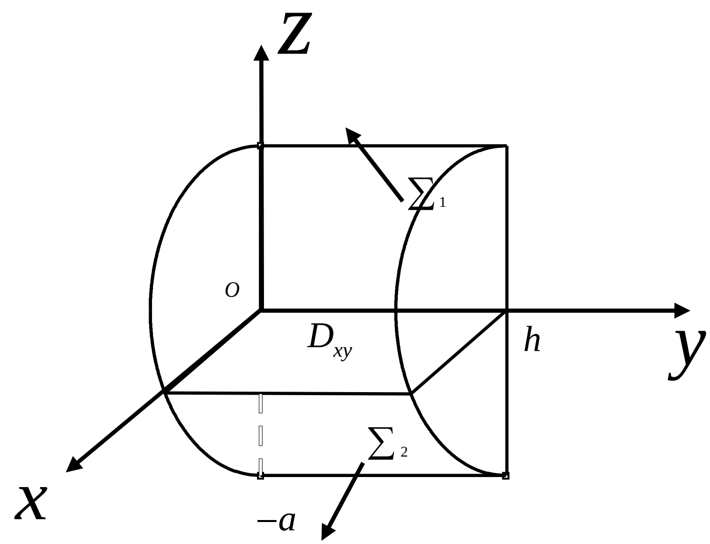
$$\text{原式}=-\iint_{D_{xy}}\left\{\left[\frac{1}{4}(x^2+y^2)^2+x\right](-x)-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left[x^2+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2(r^2\cos^2\theta+\frac{1}{2}r^2)\,r\,\mathrm{d}r$$

$$=8\pi$$

例7. 计算$I = \iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + z^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$,其中Σ是圆柱面 $x^2 + z^2 = a^2$ 在 $x \geq 0$ 的一半被平面 $y=0$ 和 $y=h\ (h>0)$ 所截下部分的外侧.



解: 先计算 $I_1 = \iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,

把 Σ 分为上下两部分

$$\begin{cases} \Sigma_1 : z = \sqrt{a^2 - x^2}, \\ \Sigma_2 : z = -\sqrt{a^2 - x^2}, \end{cases}$$

$$(x, y) \in D_{xy}:\ 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq h,$$

根据对称性，有

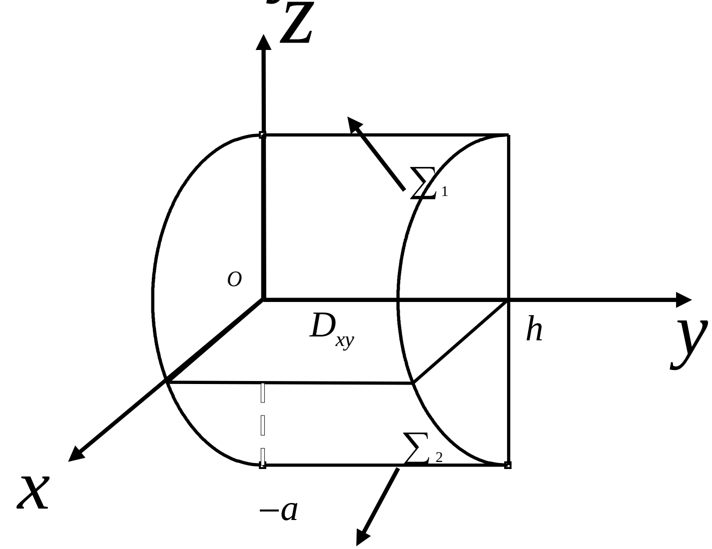
$$\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\iint_{\Sigma_1} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$I_1 = 2\iint_{\Sigma_1} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^h xy\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_0^a x\sqrt{a^2 - x^2}\,\mathrm{d}x \int_0^h y\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{3}h^2a^3.$$



Σ在 yOz 平面上的投影区域为

$D_{yz}: 0 \le y \le h, -a \le z \le a$，$\Sigma$的正侧为前侧，故

$$I_2 = \iint_{\Sigma} xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iint_{D_{yz}} z\sqrt{a^2 - z^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

注意到积分区域 D_{yz} 关于 y 轴对称，被积函数是z 的奇函数，于是 $I_2 = 0.$

$$I_1 = \frac{1}{3}h^2a^3, \qquad I_2 = 0.$$

Σ在 zOx 平面上投影为一曲线， $\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = 0$, 因此

$$I_3 = \iint_{\Sigma} z^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x \;= 0.$$

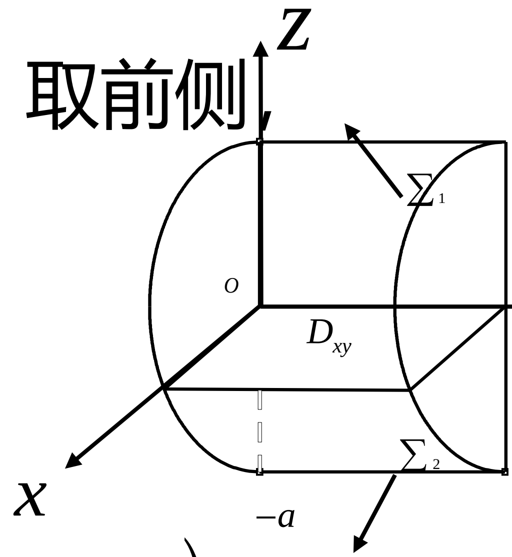
最终得到：

$$I = I_1 + I_2 + I_3 \;= \frac{1}{3}h^2a^3 + 0 + 0$$

$$= \frac{1}{3}h^2a^3$$

在例7中, 将Σ的方程看成 $x=\sqrt{a^2-z^2}$, 取前侧,

则有 (将Σ投影到yOz平面)



$$\iint_{\Sigma} xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + xz\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + z^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left(yz\sqrt{a^2-z^2}\cdot\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}} + z\sqrt{a^2-z^2} + z^2\cdot 0\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^h y\,\mathrm{d}y\int_{-a}^{a} z^2\,\mathrm{d}z = \frac{1}{3}h^2a^3.$$

$$n=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)//\left(1,0,x_z=\frac{z}{\sqrt{a^2-z^2}}\right)$$

例8. 设函数 $f(x,y,z)$连续, Σ: $x-y+z=1$在第四卦限部分的上侧. 试求

$$I=\iint_{\Sigma}(f+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(2f+y)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(f+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解: Σ 的方程为$z=1-x+y$, $n\,//\,(1,-1,1)$, D_{xy}为 Σ 在xOy平面上的投影，于是

$$\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \mathrm{d}x\mathrm{d}z=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$I=\iint_{D_{xy}}\big[(f+x)+(2f+y)(-1)+(f+z)\big]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

$$=\iint_{D_{xy}}(x-y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.$$

一、高斯 (Gauss ） 公式

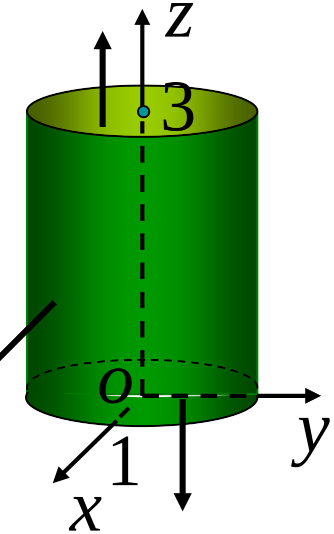
定理1. 设空间闭区域 Ω 由分片光滑的闭曲面Σ 所围成, Σ 的方向取外侧, 函数 P, Q, R 在 Ω 上有连续的一阶偏导数，则有

$$\iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$= \oiint_\Sigma P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \text{(Gauss 公式)}$$

例1. 用Gauss 公式计算 $\oiint_{\Sigma}(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+(y-z)x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

其中Σ 为柱面 $x^2+y^2=1$ 及平面 $z=0$, $z=3$ 所围空间闭域 Ω 的整个边界曲面的外侧.



解: 这里 $P=(y-z)x,\ Q=0,\ R=x-y$

利用Gauss 公式, 得

$$\text{原式}=\iiint_{\Omega}(y-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \quad \text{(用柱坐标)}$$

$$=\iiint_{\Omega}(r\sin\theta-z)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

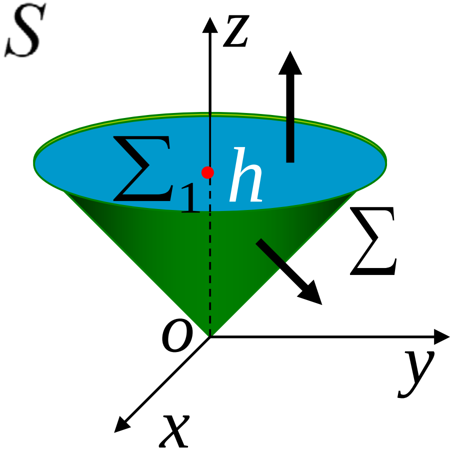
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_0^3(r\sin\theta-z)\,\mathrm{d}z=-\frac{9\pi}{2}$$

思考: 若 Σ 改为内侧, 结果有何变化?

若 Σ 为圆柱侧面(取外侧) , 如何计算?

例2. 利用Gauss 公式计算积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$



其中 Σ 为锥面 $x^2+y^2=z^2$ 介于 $z=0$ 及 $z=h$ 之间部分的下侧.

解: 作辅助面

$$\Sigma_1: z=h,\ (x,y)\in D_{xy}: x^2+y^2\le h^2, \text{ 取上侧}$$

记 Σ,Σ_1所围区域为Ω, 则

$$\boxed{\text{在 }\Sigma_1\text{ 上 }\alpha=\beta=\frac{\pi}{2},\gamma=0}$$

$$I=\left(\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}\right)(x^2\cos\alpha+y^2\cos\beta+z^2\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

$$=2\iiint_{\Omega}(x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-\iint_{D_{xy}}h^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

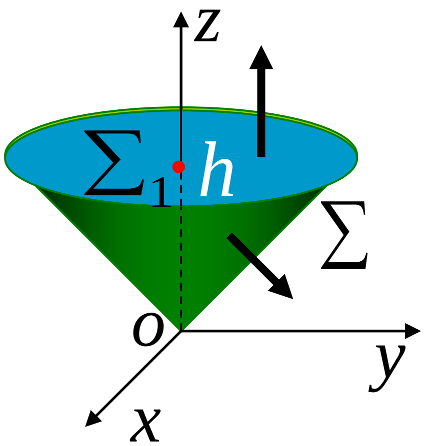
$$I = 2\iiint_{\Omega}(x+y+z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint_{D_{xy}} h^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

利用重心公式, 注意 $\bar{x} = \bar{y} = 0$

$$= 2\iiint_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \pi h^4$$

$$= 2\int_0^h z \cdot \pi z^2\,\mathrm{d}z - \pi h^4$$

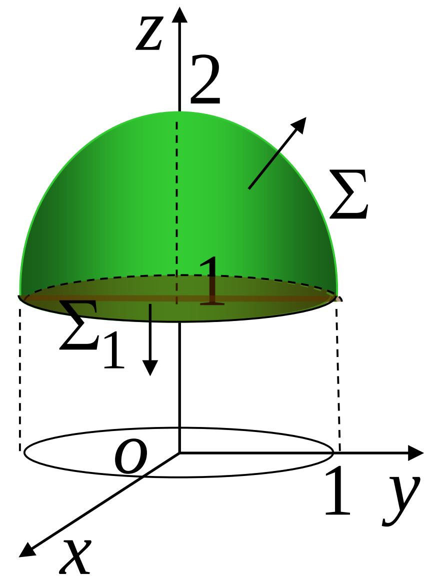
$$= -\frac{1}{2}\pi h^4$$



例3. 设Σ 为曲面 $z=2-x^2-y^2,\ 1\le z\le 2$ 取上侧, 求

$$I=\iint_{\Sigma}(x^3z+x)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-x^2yz\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x-x^2z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

解: 作取下侧的辅助面



$$\Sigma_1: z=1\ (x,y)\in D_{xy}: x^2+y^2\le 1$$

$$I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}$$

用柱坐标

用极坐标

$$=\iiint_{\Omega}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z-(-1)\iint_{D_{xy}}(-x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\,\mathrm{d}r\int_1^{2-r^2}\mathrm{d}z-\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{4}$$