答案

例1. 设$\overrightarrow{n^0}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$,由题设条件得$\begin{cases}\left|\overrightarrow{n^0}\right|=1\\ \overrightarrow{n^0}\perp\vec{c}\\ \overrightarrow{n^0}\perp\vec{a}\times\vec{b}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1\\ 2x-2y+z=0\\ 2y+z=0\end{cases}$

解得$\overrightarrow{n^0}=\pm(\frac{2}{3}\vec{i}+\frac{1}{3}\vec{j}-\frac{2}{3}\vec{k})$

例2.解 过已知直线的平面束方程为$x+5y+z+\lambda(x-z+4)=0$,

即$(1+\lambda)x+5y+(1-\lambda)z+4\lambda=0$,其法向量$\vec{n}=(1+\lambda,5,1-\lambda)$.又已知平面的法向量$\overrightarrow{n_1}=(1,-4-8)$,由题意知

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{n_1}|}{|\vec{n}||\overrightarrow{n_1}|}=\frac{|(1+\lambda)\cdot 1+5\cdot(-4)+(1-\lambda)\cdot(-8)|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+(-8)^2}\sqrt{(1+\lambda)^2+5^2+(1-\lambda)^2}}$$

即$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|\lambda-3|}{\sqrt{2\lambda^2+27}}$，解得$\lambda=-\frac{3}{4}$,代回平面方程为$x+20y+7z-12=0$。

方程$x+5y+z+\lambda(x-z+4)=0$为缺少平面$x-z+4=0$的平面束，平面$x-z+4=0$的法向量$\overrightarrow{n_2}=(1,0,-1)$,由

$$\cos(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})=\frac{|1\cdot 1+(-1)\cdot(-8)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+(-4)^2+(-8)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

得夹角为$\frac{\pi}{4}$。从而$x-z+4=0$为所求平面方程。

答案

例3.解 将两已知直线方程化为参数方程为

$$L_1:\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=t-1 \end{cases},L_2:\begin{cases} x=t \\ y=3t-4 \\ z=2t-1 \end{cases}$$

设所求直线L与L_1,L_2的交点为$A(t_1,2t_1,t_1-1)$和$B(t_2,3t_2-4,2t_2-1)$

$\because M_0(1,1,1)$与A,B三点共线，故$\overrightarrow{M_0A},\overrightarrow{M_0B}$对应坐标成比例，即有

$$\frac{t_1-1}{t_2-1}=\frac{2t_1-1}{(3t_2-4)-1}=\frac{(t_1-1)-1}{(2t_2-1)-1}$$

解得$t_1=0,t_2=2,\therefore A(0,0,-1),B(2,2,3),$

$\because$ 点$M_0(1,1,1)$和$B(2,2,3)$同在直线L上，故L的方程为$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$

答案

例4. 过直线L的平面束方程为:$(2x-y+z-1)+\lambda(x+y-z+1)=0.$
即$(2+\lambda)x+(\lambda-1)y+(1-\lambda)z+(\lambda-1)=0$,又$\because$ 垂直于平面π,
$\therefore\ (2+\lambda)\cdot 1+(\lambda-1)\cdot 2+(1-\lambda)\cdot(-1)=0$,即$4\lambda-1=0$,故$\lambda=\frac{1}{4}$,将
λ代入到平面束方程，得$3x-y+z-1=0$.所求投影直线方程为

$$\begin{cases}3x-y+z-1=0\\ \quad x+2y-z=0\end{cases}.$$

例5. 设直线上一点$M_1(1,y_1,z_1)$,有$y_1=z_1$,旋转后$M_1(1,y_1,z_1)$
到达$M(x,y,z)$位置，由于高度不变，有$z=z_1$,又M和M_1到z轴的距离r不因旋转而改变，故$r^2=1+y_1^2=x^2+y^2$,由于$z=z_1=y_1$, 故所求旋转曲面方程为$x^2+y^2-z^2=1.$

答案

例6. $\because$平面ABC：$2x+y-z+1=0$,$\therefore$ 过D且垂直于平面的直线为

$\frac{x-4}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{-1}$,即$\begin{cases}x=4+2t\\ y=3+t\\ z=-t\end{cases}$,设对称点的坐标为$(4+2t,3+t,-t)$有距离公式

$|2(4+2t)+(3+t)-(-t)+1|=|2\cdot4+3-0+1|,t=-4$(舍去0)$\therefore$ 对称点为$(-4,-1,4)$

例7.设经过l且垂直于π的平面方程为π_1: $A(x-1)+By+C(z-1)=0$

则由条件可知$A-B+2C=0,A+B-C=0$, $((\mathrm{A,B,C})\perp s,n)$,由此解得

$A:B:C=-1:3:2$,于是π_1的方程为$x-3y-2z+1=0$,从而l_0的方程为

$\begin{cases}x-y+2z-1=0\\ x-3y-2z+1=0\end{cases}$即$\begin{cases}x=2y\\ z=-\frac{1}{2}(y-1)\end{cases}$,于是$l_0$绕$y$轴旋转一周所得曲面方程为

$x^2+z^2=4y^2+\frac{1}{4}(y-1)^2$