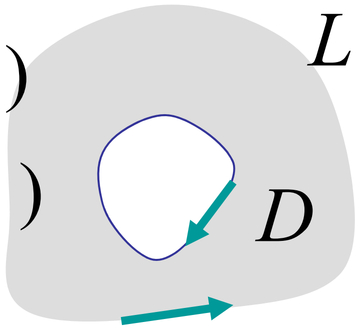
一、 格林公式

区域 D 分类 $\begin{cases} \text{单连通区域 (无“洞”区域)} \\ \text{多连通区域 (有“洞”区域)} \end{cases}$



域 D 边界L 的**正向**: **域的内部靠左**

定理1. 设区域 D 是由分段光滑正向曲线 L 围成, 函数 $P(x,y), Q(x,y)$在 D 上具有连续一阶偏导数, 则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \quad \text{（格林公式）}$$

或

$$\iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

格林公式 $\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint\limits_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$

推论: 正向闭曲线 *L* 所围区域 *D* 的面积

$$A = \frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$$

例如, 椭圆 $L: \begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = b\sin\theta \end{cases}$, $0 \le \theta \le 2\pi$ 所围面积

$$A = \frac{1}{2}\oint_L x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (ab\cos^2\theta + ab\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \pi\,ab$$

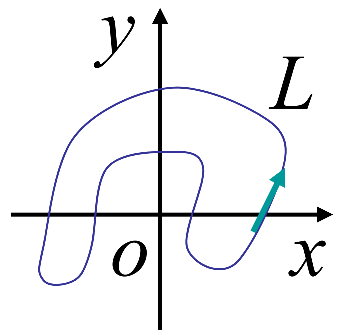
例3. 计算$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中$L$为一无重点且不过原点的分段光滑正向闭曲线.

解: 令 $P = \frac{-y}{x^2+y^2}$, $Q = \frac{x}{x^2+y^2}$

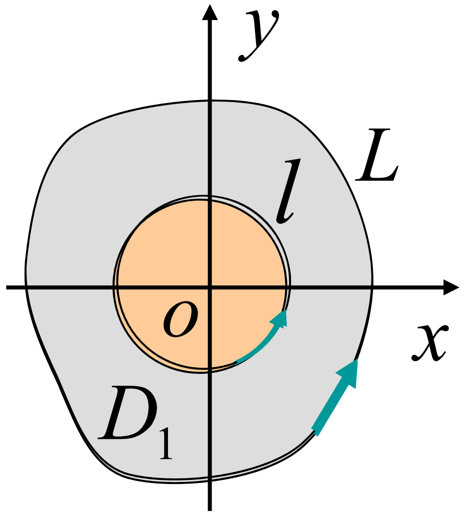
则当$x^2+y^2 \neq 0$时, $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$

设 L 所围区域为D, 当$(0,0) \notin D$时, 由格林公式知

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = 0$$



当$(0,0)\in D$时, 在D 内作圆周 $l: x^2+y^2=r^2$, 取逆时针方向, 记 L 和 l^- 所围的区域为 D_1, 对区域 D_1 应用格林公式, 得



$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}-\oint_l \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$=\oint_{L+l^-} \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\iint_{D_1} 0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$$

$$\therefore\quad \oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\oint_l \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$=\int_0^{2\pi} \frac{r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}{r^2}\mathrm{d}\theta=2\pi$$

二、平面上曲线积分与路径无关的等价条件

定理2. 设D 是单连通域 , 函数$P(x, y), Q(x, y)$在D 内具有一阶连续偏导数, 则以下四个条件等价:

(1) 沿D 中任意光滑闭曲线 L , 有 $\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0.$

(2) 对D 中任一分段光滑曲线 L, 曲线积分$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$

与路径无关, 只与起止点有关.

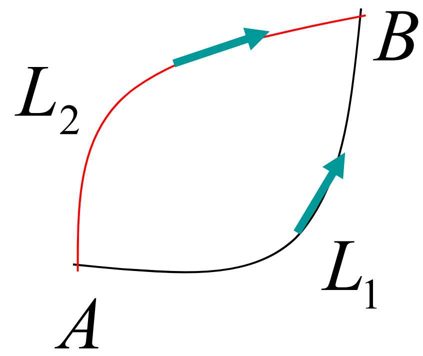
(3) $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$在 D 内是某一函数 $u(x, y)$的全微分,

即 $\mathrm{d}\,u(x, y) = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$

(4) 在 D 内每一点都有 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}.$

证明 (1) $\Longrightarrow$ (2)

设 L_1, L_2 为D 内任意两条由A 到B 的有向分段光滑曲线, 则



$$\int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y - \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

$$= \int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \int_{L_2^-} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

$$= \int_{L_1 + L_2^-} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0 \qquad \text{(根据条件(1))}$$

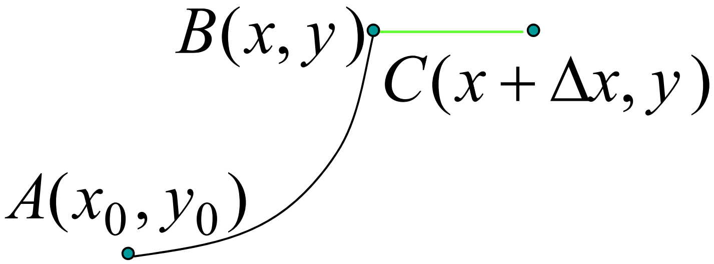
$$\therefore \quad \int_{L_1} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{L_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

说明: 积分与路径无关时, 曲线积分可记为

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_A^B P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

证明 (2) $\Longrightarrow$ (3)

在D内取定点$A(x_0, y_0)$和任一点$B(x, y)$, 因曲线积分与路径无关, 有函数



$$u(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

则 $\Delta_x u = u(x+\Delta x, y) - u(x,y)$

$$= \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,\, y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,\, y)} P\mathrm{d}x$$

$$= P(x+\theta\Delta x, y)\Delta x$$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} P(x+\theta\Delta x, y) = P(x, y)$$

同理可证 $\dfrac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$, 因此有 $\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$

证明 (3) $\Longrightarrow$ (4)

设存在函数 $u(x, y)$ 使得

$$\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

则 $$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$$

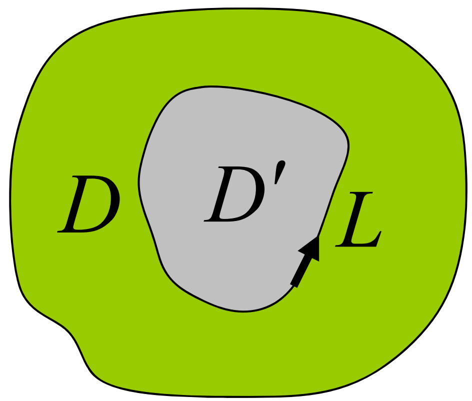
P, Q 在 D 内具有连续的偏导数, 所以 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$

从而在D内每一点都有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

证明 (4) $\Longrightarrow$ (1)

设L为D中任一分段光滑闭曲线, 所围区域为 $D' \subset D$ (如图), 因此在 D' 上



$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$$

利用**格林公式**, 得

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 0$$

证毕

说明: 根据定理2，若在某区域内 $\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$，则

1) 计算曲线积分时，可选择方便的积分路径;

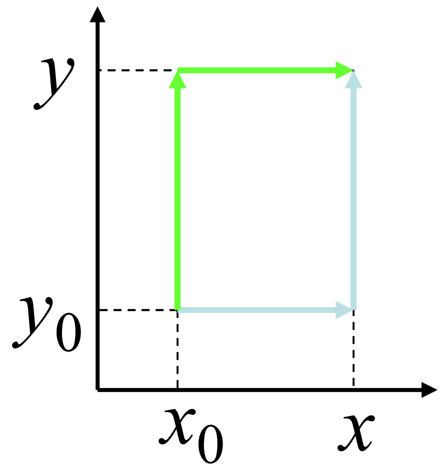
2) 求曲线积分时，可利用格林公式简化计算，
若积分路径不是闭曲线，可添加辅助线;

3) 可用积分法求 $\mathrm{d}\,u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 在域 D 内的原函数:
取定点 $(x_0, y_0)\in D$ 及动点 $(x, y)\in D$，则原函数为

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)\mathrm{d}y$$

或 $$u(x,y)=\int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)\mathrm{d}y+\int_{x_0}^{x} P(x,y)\mathrm{d}x$$



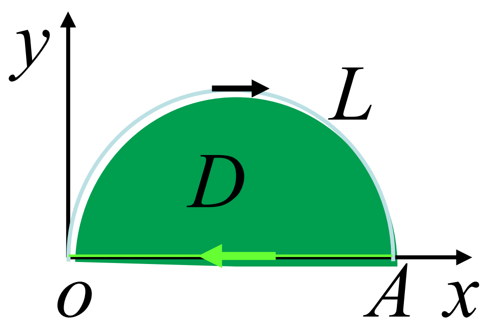
例4. 计算 $\int_L (x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$, 其中$L$ 为上半圆周 $y=\sqrt{4x-x^2}$ 从 $O\,(0,0)$ 到 $A\,(4,0)$.

解: 为了使用格林公式, 添加辅助线段 $\overline{AO}$,它与L 所围区域为D , 则

$$\text{原式} = \oint_{L+\overline{AO}} (x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

$$+\int_{\overline{OA}} (x^2+3y)\,\mathrm{d}x+(y^2-x)\,\mathrm{d}y$$

$$=4\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y+\int_0^4 x^2\,\mathrm{d}x$$



$$=8\pi+\frac{64}{3}$$

例5. 验证 $xy^2\,\mathrm{d}x + x^2y\,\mathrm{d}y$ 是某个函数的全微分, 并求出这个函数.

证: 设 $P = xy^2,\ Q = x^2y$, 则 $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2xy = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$

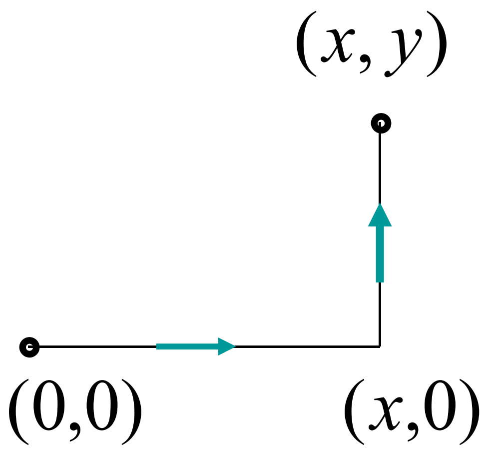
由定理2 可知, 存在函数 $u\,(x\,,\,y)$ 使

$$\mathrm{d}u = xy^2\,\mathrm{d}x + x^2y\,\mathrm{d}y$$

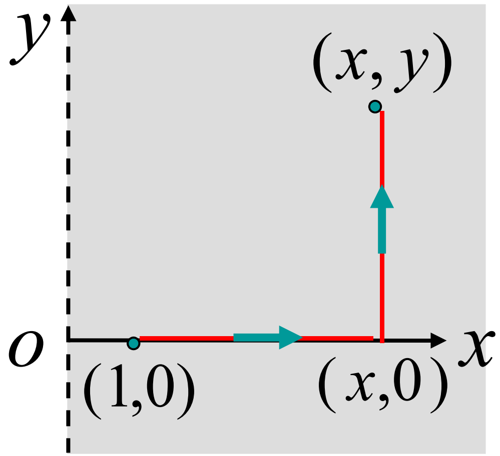
$$u(x,y) = \int_{(0,0)}^{(x,y)} xy^2\mathrm{d}x + x^2y\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^x x\cdot 0\,\mathrm{d}x \quad + \int_0^y x^2y\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^y x^2y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}x^2y^2$$



例6. 验证 $\dfrac{x\,\mathrm{d}\,y - y\,\mathrm{d}\,x}{x^2+y^2}$ 在右半平面 $(x>0)$ 内存在原函数，并求出它.



证: 令 $P=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$，$Q=\dfrac{x}{x^2+y^2}$

则 $$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial Q}{\partial x}\qquad (x>0)$$

由**定理 2** 可知存在原函数

$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{x\,\mathrm{d}\,y-y\,\mathrm{d}\,x}{x^2+y^2}$$

$$=-\int_1^x 0\cdot \mathrm{d}x+x\int_0^y\frac{\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}\qquad (x>0)$$

或

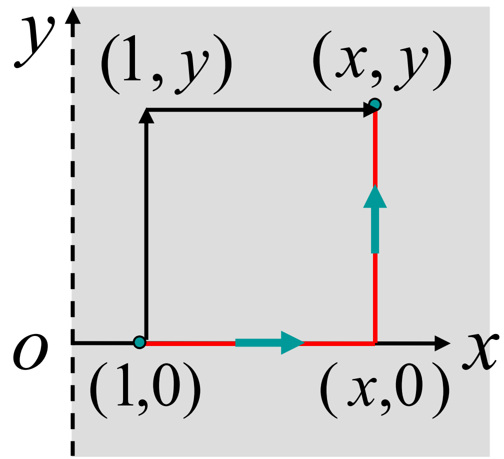
$$u(x,y)=\int_{(1,0)}^{(x,y)}\frac{x\,\mathrm{d}\,y-y\,\mathrm{d}\,x}{x^2+y^2}$$

$$=\int_0^y\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}-y\int_1^x\frac{\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$=\arctan y+\arctan\frac{1}{y}-\arctan\frac{x}{y}$$

$$=\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{x}{y}$$

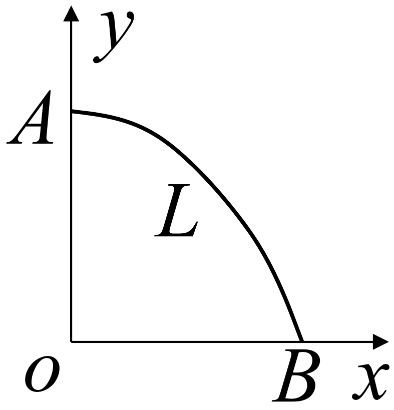
$$=\arctan\frac{y}{x}\qquad(x>0)$$



例7. 设质点在力场 $\vec{F}=\dfrac{k}{r^2}(y,-x)$ 作用下沿曲线 L：

$y=\dfrac{\pi}{2}\cos x$由 $A(0,\dfrac{\pi}{2})$移动到$B(\dfrac{\pi}{2},0)$,求力场所作的功W

(其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$).



解: $W=\int_L \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}=\int_L \dfrac{k}{r^2}(y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y)$

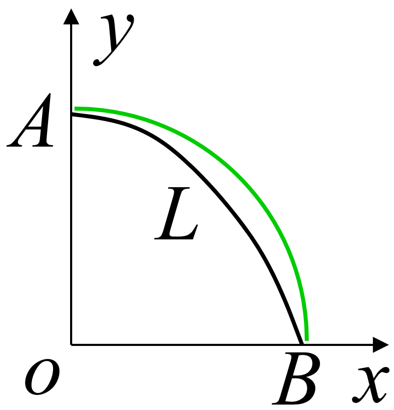
令 $P=\dfrac{ky}{r^2},\ Q=-\dfrac{kx}{r^2}$, 则有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{k(x^2-y^2)}{r^4}=\frac{\partial Q}{\partial x}\quad (x^2+y^2\neq 0)$$

可见, 在不含原点的单连通区域内积分与路径无关.

取圆弧 $\overset{\frown}{AB}$: $x=\dfrac{\pi}{2}\cos\theta,\ y=\dfrac{\pi}{2}\sin\theta\ \ (\theta:\dfrac{\pi}{2}\to 0)$

$$W=\int_{\overset{\frown}{AB}}\frac{k}{r^2}(y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y)$$



$$=k\int_{\pi/2}^{0}-(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\pi}{2}k$$

思考: 积分路径是否可以取 $\overline{AO}\cup\overline{OB}$? 为什么?

注意, 本题只在不含原点的单连通区域内积分与路径无关！

内容小结

1. 格林公式 $\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

2. 等价条件

设 P, Q 在 D 内具有一阶连续偏导数, 则有

$\int_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 在 D 内与路径无关.

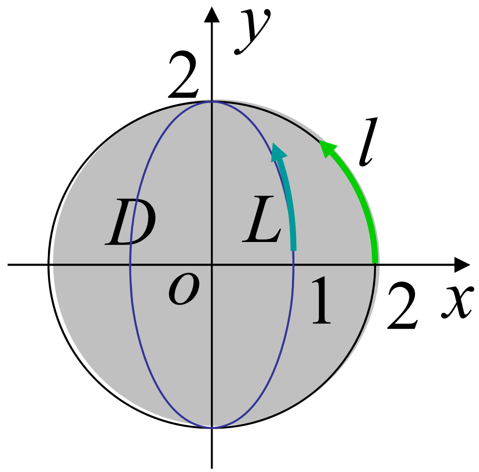
$\Longleftrightarrow$ 对 D 内任意闭曲线 L 有 $\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0$

$\Longleftrightarrow$ 在 D 内有 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$

$\Longleftrightarrow$ 在 D 内有 $\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$

思考与练习

1\. 设 $L: x^2+\frac{1}{4}y^2=1$, $l: x^2+y^2=4$,



且都取正向, 问下列计算是否正确?

(1) $$\oint_L \frac{x\,\mathrm{d}y-4y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} \cancel{=} \oint_l \frac{x\,\mathrm{d}y-4y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{1}{4}\oint_l x\,\mathrm{d}y-4y\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\iint_D 5\,\mathrm{d}\sigma=5\pi$$

(2) $$\oint_L \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \oint_l \frac{x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{1}{4}\oint_l x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\iint_D 2\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=2\pi$$

提示: $x^2+y^2\neq 0$时

(1) $$\frac{\partial Q}{\partial x}\neq\frac{\partial P}{\partial y}$$

(2) $$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

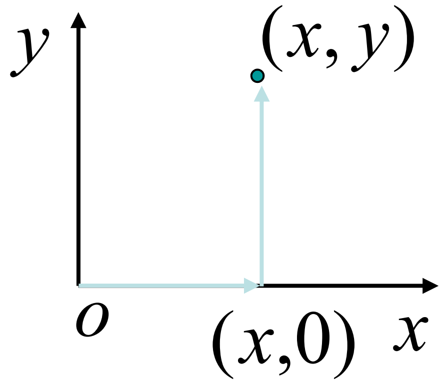
2. 设 $\operatorname{grad} u(x,y)=(x^4+4xy^3,6x^2y^2-5y^4)$，求 $u(x,y)$.

提示: $\mathrm{d}\,u(x,y)=(x^4+4xy^3)\,\mathrm{d}x+(6x^2y^2-5y^4)\,\mathrm{d}y$

$$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(x^4+4xy^3)\,\mathrm{d}x+(6x^2y^2-5y^4)\mathrm{d}y+C$$

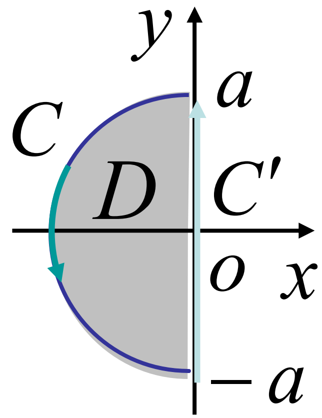
$$=\int_0^x x^4\,\mathrm{d}x+\int_0^y(6x^2y^2-5y^4)\,\mathrm{d}y+C$$

$$=\frac{1}{5}x^5+2x^2y^3-y^5+C$$



3. 设 C 为沿 $x^2+y^2=a^2$ 从点 $(0,a)$ 依逆时针到点 $(0,-a)$ 的半圆, 计算

$$\int_C \underline{\frac{y^2}{\sqrt{a^2+x^2}}}\,\mathrm{d}x+\left[\underline{ax+2y\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)}\right]\mathrm{d}y$$



解: 添加辅助线如图 ,利用格林公式 .

$$\text{原式}=\int_{C+C'}-\int_{C'}$$

$$=\iint_D\left[a+\cancel{\frac{2y}{\sqrt{a^2+x^2}}}-\cancel{\frac{2y}{\sqrt{a^2+x^2}}}\right]\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$-\int_{-a}^{a}\cancel{(2y\ln a)}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\pi a^3$$

第四节 对面积的曲面积分

一、第一型曲面积分的概念与性质

二、第一型曲面积分的计算法

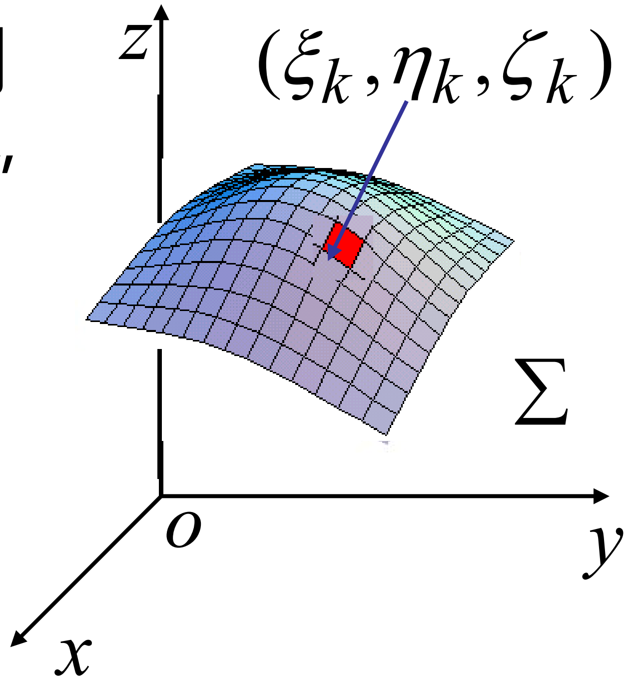
一、第一型曲面积分的概念与性质

引例： 设曲面形构件具有连续面密度 $\rho\,(x,y,z)$, 求质量 M.

类似求平面薄板质量的思想, 采用

"大化小, 常代变, 近似和, 求极限"

的方法, 可得



$$M=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n}\rho(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k$$

其中, λ 表示 n 小块曲面的直径的最大值 (曲面的直径为其上任意两点间距离的最大者).

定义: 设 Σ 为光滑曲面, $f(x, y, z)$ 是定义在 Σ 上的一个有界函数, 若对 Σ 做任意分割和局部区域任意取点, "乘积和式极限"

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k \overset{\text{记作}}{=\!=} \iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}\,S$$

都存在, 则称此极限为函数 $f(x, y, z)$ 在曲面 Σ 上对面积的曲面积分 或第一型曲面积分. 其中 $f(x, y, z)$ 叫做被积函数, Σ 叫做积分曲面.

据此定义, 曲面形构件的质量为 $M = \iint_{\Sigma} \rho(x,y,z)\,\mathrm{d}\,S$

曲面面积为 $S = \iint_{\Sigma} \mathrm{d}\,S$

第一型曲面积分与第一型曲线积分性质类似.

- 积分的存在性. 若 $f(x,y,z)$ 在光滑曲面 Σ 上连续, 则第一型曲面积分存在.
- 对积分域的可加性. 若 Σ 是分片光滑的, 例如分成两片光滑曲面 Σ_1, Σ_2, 则有

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S + \iint_{\Sigma_2} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

- 线性性质. 设 k_1, k_2 为常数, 则

$$\iint_{\Sigma}[k_1 f(x,y,z) \pm k_2 g(x,y,z)]\,\mathrm{d}S$$
$$= k_1\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S \pm k_2\iint_{\Sigma} g(x,y,z)\,\mathrm{d}S$$

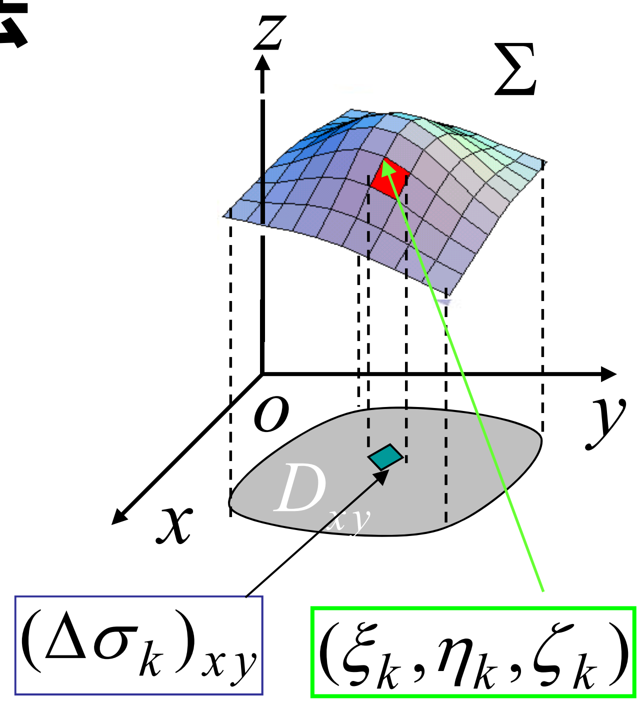
二、第一型曲面积分的计算法

定理: 设有光滑曲面

$$\Sigma : z = z(x, y), (x, y) \in D_{xy}$$

$f(x, y, z)$ 在 Σ 上连续, 则曲面积分

$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S$ 存在, 且有



$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S$$

$$= \iint_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x^{\,2}(x, y) + z_y^{\,2}(x, y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

证明: 由定义知

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\Delta S_k$$

而 $\Delta S_k = \iint_{(\Delta\sigma_k)_{xy}} \sqrt{1 + z_x^{\ 2}(x, y) + z_y^{\ 2}(x, y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}\,y$

$$= \sqrt{1 + z_x^{\ 2}(\xi_k', \eta_k') + z_y^{\ 2}(\xi_k', \eta_k')}\,(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

$\therefore \iint_{\Sigma} f(x, y, z)\,\mathrm{d}S$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) \cdot \sqrt{1 + z_x^{\ 2}(\xi_k', \eta_k') + z_y^{\ 2}(\xi_k', \eta_k')}\,(\Delta\sigma_k)_{xy}$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, z(\xi_k, \eta_k)) \cdot \sqrt{1 + z_x^{\ 2}(\xi_k, \eta_k) + z_y^{\ 2}(\xi_k, \eta_k)}\,(\Delta\sigma_k)_{xy}$$ (Σ光滑)

$$= \iint_{D_{xy}} f(x, y,\ z(x, y))\sqrt{1 + z_x^{\ 2}(x, y) + z_y^{\ 2}(x, y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$