第十二章　微分方程

1、微分方程的基本概念；

2、一阶微分方程——可分离变量方程、齐次方程、一阶线性方程、全微分方程、伯努利方程及解法；

3、可降阶的高阶微分方程的三种特殊类型方程及其解法；

基本要求：

1、理解微分方程的一般概念—微分方程的定义、阶、解、通解、初始条件、特解、初值问题；

2、会判别一阶微分方程的类型：可分离变量方程、齐次方程、一阶线性方程、全微分方程、伯努利方程等，掌握可分离变量方程和一阶线性方程的解法，会解全微分方程；

3、熟悉可降阶的高阶微分方程的三种特殊类型方程：$y^{(n)}=f(x)$、$y''=f(x, y')$、$y''=f(y,y')$ 的解法；

基本要求：（续）

4、熟悉二阶（高阶）线性微分方程解的结构，掌握二阶（高阶）常系数线性齐次微分方程的解法；

5、掌握

$$f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}、f(x)=e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x+P_l(x)\sin\beta x]$$

两类二阶常系数线性非齐次微分方程的解法；

6、了解微分方程的幂级数解法，熟悉用微分方程解决简单实际问题的方法；

第一节 微分方程的基本概念

一、问题的提出

例 1 一曲线通过点(1,2),且在该曲线上任一点 $M(x,y)$处的切线的斜率为$2x$,求这曲线的方程.

例 2 列车在平直的线路上以 20 米/秒的速度行驶,当制动时列车获得加速度-0.4米/秒^2,问开始制动后多少时间列车才能停住?以及列车在这段时间内行驶了多少路程?

二、微分方程的定义

微分方程:

凡含有未知函数的导数（偏导数）或微分的方程叫微分方程.

例 $y' = xy,\qquad y'' + 2y' - 3y = e^x,$

$(t^2 + x)dt + xdx = 0,\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x} = x + y,$

实质: 联系自变量, 未知函数以及未知函数的某些导数(或微分)之间的关系式.

分类1： 常微分方程，偏常微分方程.

微分方程的阶： 微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数称之阶.

分类2：

一阶微分方程 $F(x,y,y')=0,\quad y'=f(x,y);$

高阶(n)微分方程 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0,$

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}).$$

分类3：线性与非线性微分方程.

$$y' + P(x)y = Q(x), \qquad x(y')^2 - 2yy' + x = 0;$$

分类4：单个微分方程与微分方程组.

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = 3y - 2z, \\ \dfrac{dz}{dx} = 2y - z, \end{cases}$$

三、主要问题——求方程的解

微分方程的解:

代入微分方程能使方程成为恒等式的函数称之.

设$y=\varphi(x)$在区间 I 上有 n 阶导数,

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))=0.$$

微分方程的解的分类:

(1) 通解: 微分方程的解中含有任意常数, 且任意常数的个数与微分方程的阶数相同.

例 $y' = y$,　　通解 $y = ce^x$;

$y'' + y = 0$,　　通解 $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$;

(2) 特解:　确定了通解中任意常数以后的解.

解的图象:　微分方程的积分曲线.

通解的图象:　积分曲线族.

初始条件:　用来确定任意常数的条件.

初值问题： 求微分方程满足初始条件的解的问题.

一阶: $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y\big|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$ 过定点的积分曲线;

二阶: $\begin{cases} y'' = f(x, y, y') \\ y\big|_{x=x_0} = y_0, y'\big|_{x=x_0} = y_0' \end{cases}$

过定点且在定点的切线的斜率为定值的积分曲线.

例 3 验证:函数$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$是微分方程$\dfrac{d^2x}{dt^2} + k^2 x = 0$的解. 并求满足初始条件

$$x\big|_{t=0} = A, \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$$的特解.

思考题

函数$y=3e^{2x}$是微分方程$y''-4y=0$的什么解?

第二节 一阶微分方程—12.2.1可分离变量的微分方程

一、可分离变量的微分方程

$g(y)dy = f(x)dx$ 可分离变量的微分方程.

例如 $\dfrac{dy}{dx} = 2x^2 y^{\frac{4}{5}} \Rightarrow y^{-\frac{4}{5}}dy = 2x^2dx,$

解法 设函数$g(y)$和$f(x)$是连续的,

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx$$

分离变量法

设函数$G(y)$和$F(x)$是依次为$g(y)$和$f(x)$的原函数, $G(y) = F(x) + C$ 为微分方程的解.

二、典型例题

例1 求解微分方程$\frac{dy}{dx}=2xy$及$\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{1+x^2}$的通解。

例2 求方程$f(xy)ydx+g(xy)xdy=0$通解。

例3 衰变问题：衰变速度与未衰变原子含量M成正比，已知$M|_{t=0}=M_0$，求衰变过程中铀含量$M(t)$随时间变化的规律。

例 4 有高为1米的半球形容器, 水从它的底部小孔流出, 小孔横截面积为1平方厘米(如图). 开始时容器内盛满了水, 求水从小孔流出过程中容器里水面的高度h(水面与孔口中心间的距离)随时间t的变化规律.

例5 某车间体积为12000立方米, 开始时空气中含有0.1%的CO_2, 为了降低车间内空气中CO_2的含量, 用一台风量为每秒2000立方米的鼓风机通入含0.03%的CO_2的新鲜空气, 同时以同样的风量将混合均匀的空气排出, 问鼓风机开动6分钟后, 车间内CO_2的百分比降低到多少?

思考题

求解微分方程 $\dfrac{dy}{dx}+\cos\dfrac{x-y}{2}=\cos\dfrac{x+y}{2}$.

第二节 一阶微分方程---12.2.2 齐次型微分方程

齐次方程

1. **定义** 形如 $\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 的微分方程称为齐次方程.

2. **解法** 作变量代换 $u=\dfrac{y}{x}$, 即 $y=xu$,

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx},$$

代入原式 $\quad u+x\dfrac{du}{dx}=f(u),$

即 $\quad \dfrac{du}{dx}=\dfrac{f(u)-u}{x}.$

可分离变量的方程

当 $f(u)-u\neq 0$时，得 $\int\frac{du}{f(u)-u}=\ln\left|C_1 x\right|$,

即 $x=Ce^{\varphi(u)}$, （$\varphi(u)=\int\frac{du}{f(u)-u}$）

将 $u=\frac{y}{x}$代入，得通解 $x=Ce^{\varphi(\frac{y}{x})}$,

当$\exists u_0$, 使 $f(u_0)-u_0=0$, 则 $u=u_0$是新方程的解,

代回原方程，得齐次方程的解 $y=u_0 x.$

例 1 求解微分方程

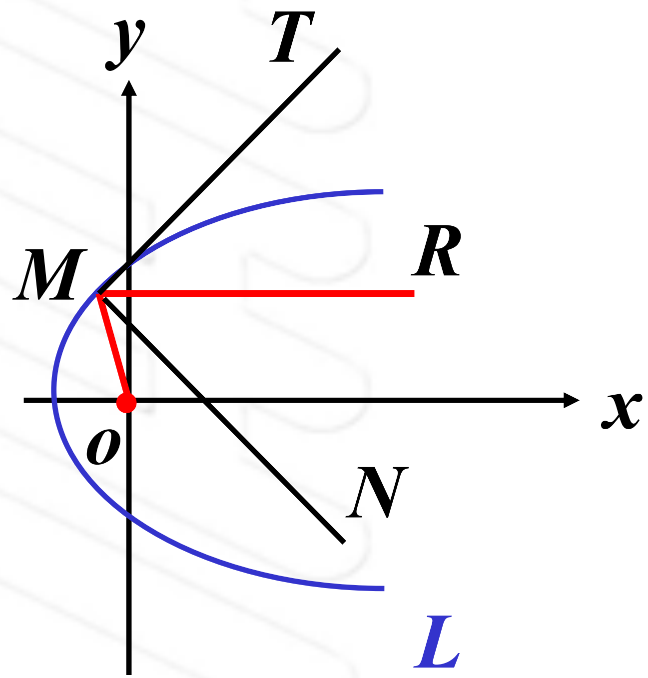
$$\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}\,dy = 0.$$

例 2 求解微分方程 $\dfrac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \dfrac{dy}{2y^2 - xy}.$

例 3 抛物线的光学性质

实例：车灯的反射镜面------旋转抛物面

解 如图 设旋转轴 ox轴



光源在$(0,0)$，$L: y = y(x)$

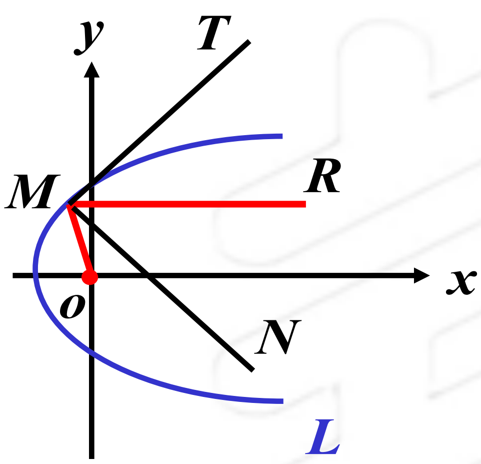
设$M(x, y)$为上任一点，

MT为切线，斜率为 y'，

MN为法线，斜率为 $-\dfrac{1}{y'}$，

$\because \angle OMN = \angle NMR,$

$$\therefore \tan\angle OMN = \tan\angle NMR,$$



由夹角正切公式得

$$\begin{cases} \tan\angle OMN = \dfrac{-\dfrac{1}{y'} - \dfrac{y}{x}}{1 - \dfrac{y}{xy'}} \\ \tan\angle NMR = \dfrac{1}{y'} \end{cases}$$

得微分方程

$$yy'^2 + 2xy' - y = 0, \quad 即\ y' = -\frac{x}{y} \pm \sqrt{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1}.$$

第二节 一阶微分方程-- 12. 2. 3可化为齐次的方程

1. 定义 形如$\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$的微分方程

当$c=c_1=0$时，为齐次方程. 否则为非齐次方程.

2. 解法 令$x=X+h$,（其中h和k是待定的常数）

$y=Y+k$, $dx=dX$, $dy=dY$

$$\frac{dY}{dX}=f\left(\frac{aX+bY+\underline{ah+bk+c}}{a_1X+b_1Y+\underline{a_1h+b_1k+c_1}}\right)$$

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0, \\ a_1 h + b_1 k + c_1 = 0, \end{cases}$$

(1) $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0,$ 有唯一一组解.

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY}{a_1 X + b_1 Y}\right)$$ 得通解代回 $\begin{cases} X = x - h, \\ Y = y - k, \end{cases}$

(2) $\Delta = 0,$ 未必有解, 上述方法不能用.

当$b_1 = 0$时, a_1与b中必至少有一个为零 .

若 $b=0$, 可分离变量的微分方程.

若 $b\neq 0, a_1=0$, 令 $z=ax+by$, $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{b}(\dfrac{dz}{dx}-a)$,

$\dfrac{1}{b}(\dfrac{dz}{dx}-a)=f(\dfrac{z+c}{c_1})$ 可分离变量的微分方程.

当$b_1\neq 0$时, 令 $\dfrac{a_1}{a}=\dfrac{b_1}{b}=\lambda$,

方程可化为$\dfrac{dy}{dx}=f(\dfrac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1})$, 令 $z=ax+by$,

则 $\dfrac{dz}{dx}=a+b\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{1}{b}(\dfrac{dz}{dx}-a)=f(\dfrac{z+c}{\lambda z+c_1})$. 可分离变量.

例4 求$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+1}{x+y-3}$的通解。

例5 求$\frac{dy}{dx}=(x+y)^2$的通解。

例6 求方程$f(xy)ydx+g(xy)xdy=0$通解。

思考题

方程$\int_0^x \left[2y(t)+\sqrt{t^2+y^2(t)}\right]dt = xy(x)$

是否为齐次方程?