例3 求函数 $y=x^n$ (n为正整数)的导数.

解 $$(x^n)'=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h+\cdots+h^{n-1}]=nx^{n-1}$$

即 $$(x^n)'=nx^{n-1}.$$

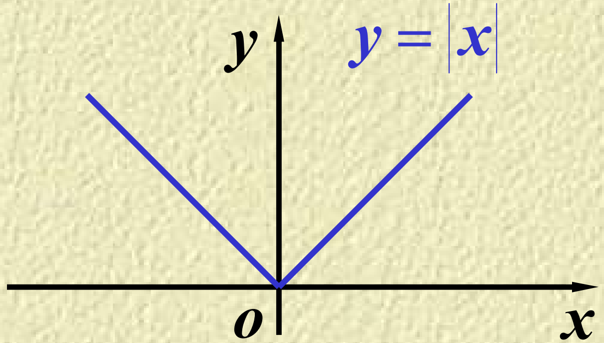
更一般地 $$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}. \qquad (\mu\in R)$$

例如, $$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$(x^{-1})'=(-1)x^{-1-1}=-\frac{1}{x^2}.$$

例6　讨论函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处的可导性.

解　$\because \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{|h|}{h}$,



$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1,$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1.$$

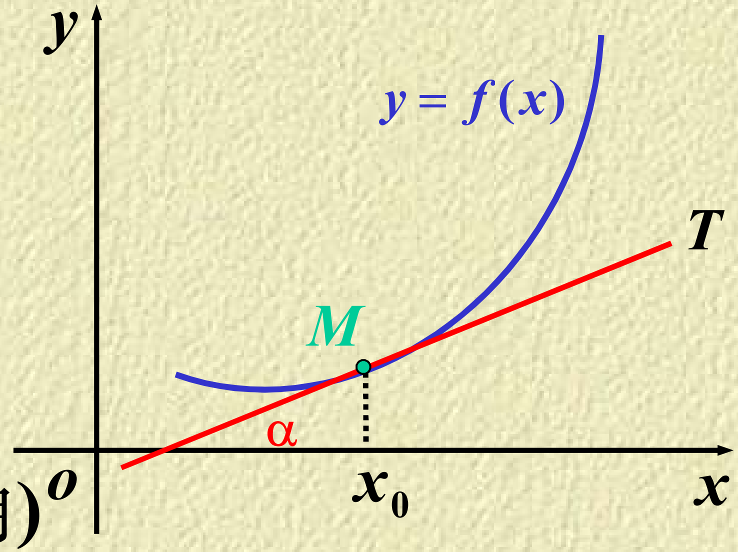
即 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$, $\therefore$ 函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 点不可导.

四、导数的几何意义

1.几何意义

$f'(x_0)$表示曲线 $y = f(x)$ 在点$M(x_0, f(x_0))$处的切线的斜率,即

$$f'(x_0) = \tan\alpha, \quad (\alpha\text{为倾角})$$



切线方程为 $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$

导数几何意义

法线方程为 $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$

上页 下页 返回

例7 求等边双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 在点$(\frac{1}{2},2)$处的切线的斜率,并写出在该点处的切线方程和法线方程.

解 由导数的几何意义，得切线斜率为

$$k=y'\Big|_{x=\frac{1}{2}}=(\frac{1}{x})'\Big|_{x=\frac{1}{2}}=-\frac{1}{x^2}\Big|_{x=\frac{1}{2}}=-4.$$

所求切线方程为$y-2=-4(x-\frac{1}{2})$，即 $4x+y-4=0$.

法线方程为 $y-2=\frac{1}{4}(x-\frac{1}{2})$，即 $2x-8y+15=0$.

上页 下页 返回

五、可导与连续的关系

定理　凡可导函数都是连续函数.

证　设函数 $f(x)$在点 x_0可导,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0) \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha$$

$$\alpha\to 0\quad(\Delta x\to 0)\qquad \Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x]=0$$

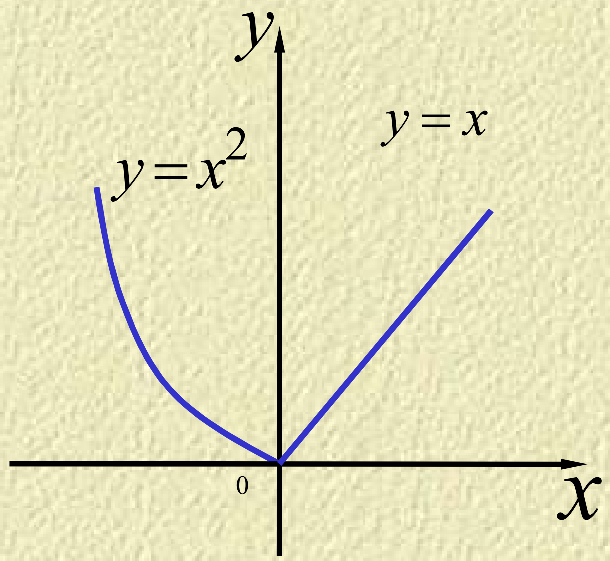
$\therefore$ 函数 $f(x)$在点 x_0连续 .

注意：该定理的逆定理不成立.(例6)

★ 连续函数不存在导数举例

例如，

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0 \\ x, & x>0 \end{cases},$$



在 $x=0$ 处不可导.

上页 下页 返回

例8 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$,

在$x=0$处的连续性与可导性.

解 $\because \sin\dfrac{1}{x}$是有界函数，$\therefore \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$

$\because f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$ $\therefore f(x)$在$x=0$处连续.

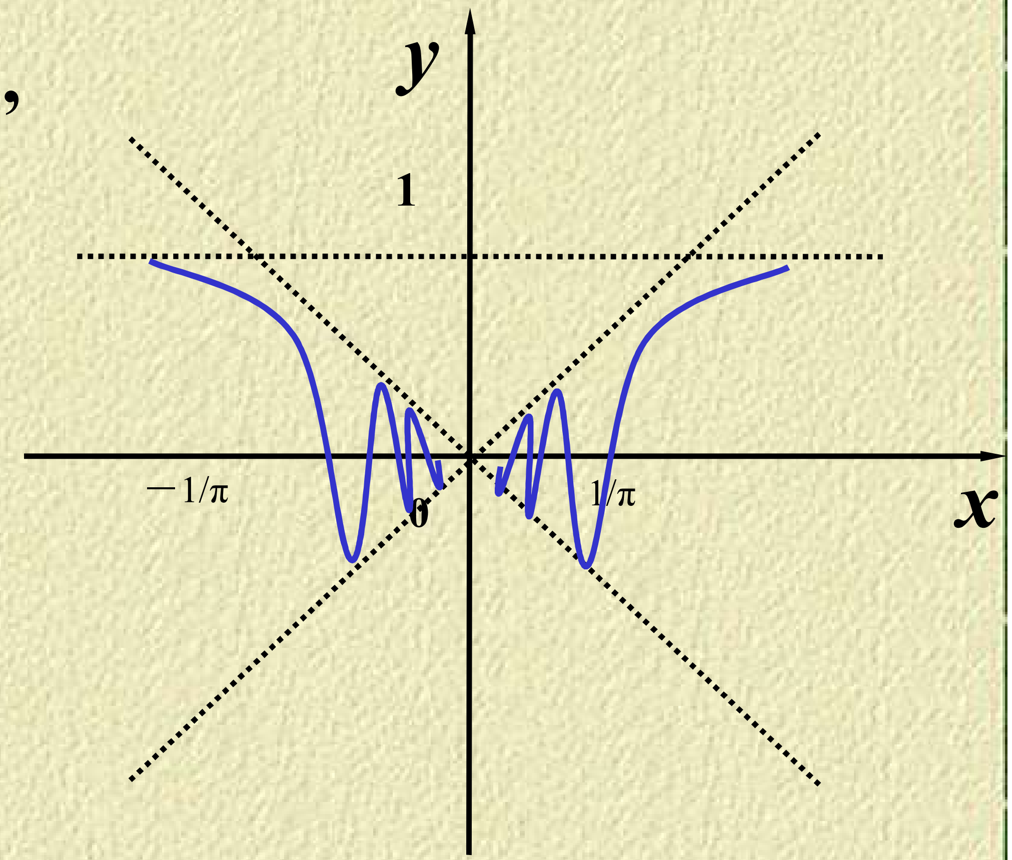
但在$x=0$处有 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{(0+\Delta x)\sin\dfrac{1}{0+\Delta x}-0}{\Delta x}=\sin\dfrac{1}{\Delta x}$

当$\Delta x\to 0$时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$在$-1$和$1$之间振荡而极限不存在.

$\therefore f(x)$在$x=0$处不可导.

上页 下页 返回

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases},$$



在$x=0$处不可导.

上页 下页 返回

六、小结

1. 导数的实质：增量比的极限；

2. $f'(x_0)=a \Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)=a;$

3. 导数的几何意义：切线的斜率；

4. 函数可导一定连续，但连续不一定可导；

5. 求导数最基本的方法：由定义求导数.

6. 判断可导性
- 不连续,一定不可导.
- 连续
  - 直接用定义；
  - 看左右导数是否存在且相等.

一、和、差、积、商的求导法则

定理　如果函数$u(x)$, $v(x)$在点x处可导,则它们的和、差、积、商(分母不为零)在点x处也可导, 并且

(1) $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$;

(2) $[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$;

(3) $\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\quad(v(x)\neq 0)$.

上页　下页　返回

证(1)、(2)略.

证(3) 设 $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)},(v(x)\neq 0),$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{u(x+h)}{v(x+h)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{u(x+h)v(x)-u(x)v(x+h)}{v(x+h)v(x)h}$$

上页 下页 返回

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[u(x+h)-u(x)]v(x)-u(x)[v(x+h)-v(x)]}{v(x+h)v(x)h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}\cdot v(x)-u(x)\cdot \dfrac{v(x+h)-v(x)}{h}}{v(x+h)v(x)}$$

$$= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

$\therefore f(x)$在x处可导.

上页 下页 返回

推论

(1) $\left[\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right]' = \sum_{i=1}^{n} f_i'(x);$

(2) $[Cf(x)]' = Cf'(x);$

(3) $$\left[\prod_{i=1}^{n} f_i(x)\right]' = f_1'(x) f_2(x) \cdots f_n(x) + \cdots + f_1(x) f_2(x) \cdots f_n'(x)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} f_i'(x) f_k(x);$$

上页 下页 返回

二、例题分析

例1　求 $y = x^3 - 2x^2 + \sin x$ 的导数 .

解　$y' = 3x^2 - 4x + \cos x.$

例2　求 $y = \sin 2x \cdot \ln x$ 的导数 .

解　$\because y = 2\sin x \cdot \cos x \cdot \ln x$

$$y' = 2\cos x \cdot \cos x \cdot \ln x + 2\sin x \cdot (-\sin x) \cdot \ln x$$

$$+ 2\sin x \cdot \cos x \cdot \frac{1}{x}$$

$$= 2\cos 2x \ln x + \frac{1}{x}\sin 2x.$$

例3　求 $y=\tan x$ 的导数．

解　$y'=(\tan x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'$

$$=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

即　$(\tan x)'=\sec^2 x.$

同理可得　$(\cot x)'=-\csc^2 x.$

例4 求 $y=\sec x$ 的导数.

解 $$y'=(\sec x)'=\left(\frac{1}{\cos x}\right)'$$

$$=\frac{-(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\tan x.$$

同理可得 $(\csc x)'=-\csc x\cot x.$

例5 求 $y=\sinh x$ 的导数.

解 $$y'=(\sinh x)'=\left[\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\right]'=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\cosh x.$$

同理可得 $(\cosh x)'=\sinh x$ $\quad(\tanh x)'=\dfrac{1}{\cosh^2 x}$

上页 下页 返回

例6　设 $f(x)=\begin{cases} x, & x<0 \\ \ln(1+x), & x\geq 0 \end{cases}$，求$f'(x)$.

解　当$x<0$时，　$f'(x)=1$,

当$x>0$时，

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+x+h)-\ln(1+x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\ln(1+\frac{h}{1+x})$$

$$=\frac{1}{1+x},$$

上页　下页　返回

当$x=0$时,

$$f'_-(0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{(0+h)-\ln(1+0)}{h}=1,$$

$$f'_+(0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{\ln[1+(0+h)]-\ln(1+0)}{h}=1,$$

$$\therefore\ f'(0)=1.$$

$$\therefore\ f'(x)=\begin{cases}1, & x\le 0\\ \dfrac{1}{1+x}, & x>0\end{cases}.$$

上页 下页 返回

三、小结

注意: $[u(x)\cdot v(x)]' \neq u'(x)+v'(x)$;

$$[\frac{u(x)}{v(x)}]' \neq \frac{u'(x)}{v'(x)}.$$

分段函数求导时，分界点导数用左右导数求.

思考题

求曲线 $y = 2x - x^3$ 上与 x 轴平行的切线方程.

上页 下页 返回

思考题解答

$y' = 2 - 3x^2$ 令 $y' = 0$ $\Rightarrow$ $2 - 3x^2 = 0$

$$x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \qquad x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$$

切点为 $\left(\sqrt{\frac{2}{3}},\ \frac{4\sqrt{6}}{9}\right)$ $\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},\ -\frac{4\sqrt{6}}{9}\right)$

所求切线方程为 $y = \frac{4\sqrt{6}}{9}$ 和 $y = -\frac{4\sqrt{6}}{9}$

上页 下页 返回

一、反函数的导数

定理 如果函数$x=\varphi(y)$在某区间I_y内单调、可导且$\varphi'(y)\neq 0$，那末它的反函数 $y=f(x)$在对应区间I_x内也可导，且有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}.$$

即 **反函数的导数等于直接函数导数的倒数.**

证 任取$x \in I_x$，给x以增量Δx $(\Delta x \neq 0, x+\Delta x \in I_x)$

由$y = f(x)$的单调性可知 $\Delta y \neq 0,$

于是有 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}},$ $\because f(x)$连续,

$\therefore \Delta y \to 0 \quad (\Delta x \to 0),$ 又知 $\varphi'(y) \neq 0$

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{\varphi'(y)}$$

即 $f'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(y)}.$

例1　求函数 $y=\arcsin x$ 的导数.

解　$\because x=\sin y$ 在 $I_y\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内单调、可导，

且 $(\sin y)'=\cos y>0$,　　$\therefore$ 在 $I_x\in(-1,1)$ 内有

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

同理可得　$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2};\qquad (\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

上页　下页　返回

例2　求函数 $y=\log_a x$ 的导数.

解　$\because x=a^y$ 在 $I_y\in(-\infty,+\infty)$ 内单调、可导，

且 $(a^y)'=a^y\ln a\neq 0$，　$\therefore$ 在 $I_x\in(0,+\infty)$ 内有，

$$(\log_a x)'=\frac{1}{(a^y)'}=\frac{1}{a^y\ln a}=\frac{1}{x\ln a}.$$

特别地　$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}.$

上页　下页　返回