第四届全国大学生数学竞赛决赛试题标准答案（数学类，2013 ）

一、 (本题 15 分) 设 A 为正常数，直线 l 与双曲线 $x^2-y^2=2\ (x>0)$ 所围的有限部分的面积为 A. 证明：

(i) 所有上述 l 与双曲线 $x^2-y^2=2\ (x>0)$ 的截线段的中点的轨迹为双曲线.

(ii) l 总是 (i) 中轨迹曲线的切线.

证明：将双曲线图形进行 45 度旋转，可以假定双曲线方程为 $y=1/x,\ x>0$. 设直线 l 交双曲线于 $(a,1/a)$ 和 $(ta,1/ta),\ t>1$, 与双曲线所围的面积为 A, 则有

$$\begin{aligned}A&=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t}\right)(t-1)-\int_a^{ta}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t}\right)(t-1)-\log t=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)-\log t.\end{aligned}$$

令 $f(t)=\dfrac{1}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)-\log t$. 由于

$$f(1)=0,\ f(+\infty)=+\infty,\ f'(t)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t}\right)^2>0,\ (t>1),$$

所以对常数 A 存在唯一常数 t 使得 $A=f(t)$ (5 分). l 与双曲线的截线段中点坐标为

$$x=\frac{1}{2}(1+t)a,\ y=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t}\right)\frac{1}{a}.$$

于是，中点的轨迹曲线为

$$xy=\frac{1}{4}(1+t)\left(1+\frac{1}{t}\right).\ \cdots\cdots(10\text{分})$$

故中点轨迹为双曲线，也就是函数 $y=\dfrac{1}{4}(1+t)\left(1+\dfrac{1}{t}\right)\dfrac{1}{x}$ 给出的曲线. 该曲线在上述中点处的切线斜率

$$k=-\frac{1}{4}(1+t)\left(1+\frac{1}{t}\right)\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{ta^2},$$

它恰等于过两交点 $(a,1/a)$ 和 $(ta,1/ta)$ 的直线 l 的斜率：

$$\frac{\dfrac{1}{ta}-\dfrac{1}{a}}{ta-a}=-\frac{1}{ta^2}.$$

故 l 为轨迹曲线的切线 (15 分).

二、(本题 15 分) 设函数 $f(x)$ 满足条件：1) $-\infty<a\leqslant f(x)\leqslant b<+\infty,\ a\leqslant x\leqslant b$; 2) 对于任意不同的 $x,y\in[a,b]$ 有 $|\,f(x)-f(y)|<L|\,x-y|$, 其中 L 是大于 0 小于

1 的常数. 设 $x_1 \in [a,b]$, 令 $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + f(x_n))$, $n = 1, 2, \cdots$. 证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ 存在，且 $f(x) = x$.

证明：由题设 $x_1 \in [a,b]$, $f(x) \in [a,b]$, $x_2 = \dfrac{1}{2}(x_1 + f(x_1)) \in [a,b], \cdots$, 继续下去，对任意 $n \geqslant 1$ 有 $a \leqslant x_n \leqslant b$, 所以 x_n 对任意 $n \geqslant 1$ 有意义 (3 分).

由条件 2), 有

$$\begin{aligned}
|x_3 - x_2| &= \frac{1}{2}|\,(x_2 - x_1) + (f(x_2) - f(x_1))| \\
&\leqslant \frac{1}{2}(|\,x_2 - x_1| + |\,f(x_2) - f(x_1)|) \\
&\leqslant \frac{1}{2}(|\,x_2 - x_1| + L|\,x_2 - x_1|) = \frac{1}{2}(1+L)|\,x_2 - x_1|.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|x_4 - x_3| &= \frac{1}{2}|\,(x_3 - x_2) + (f(x_3) - f(x_2))| \\
&\leqslant \frac{1+L}{2}|\,x_3 - x_2| \leqslant \left(\frac{1+L}{2}\right)^2 |\,x_2 - x_1|.
\end{aligned}$$

继续下去得

$$|\,x_{n+1} - x_n| \leqslant \left(\frac{1+L}{2}\right)^{n-1} |\,x_2 - x_1|,\ \forall n \geqslant 3.$$

由于 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{1+L}{2}\right)^k$ 收敛，从而 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|\,x_{k+1} - x_k|$ 收敛，当然 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(x_{k+1} - x_k)$ 也收敛. 故其前 n 项部分和 $\sum\limits_{k=1}^{n}(x_{k+1} - x_k) = x_{n+1} - x_1$ 当 $n \to \infty$ 时极限存在，即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在 (12 分).

记 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lambda$, $a \leqslant \lambda \leqslant b$. 由条件 2) 知，$f(x)$ 满足 Lipschitz 条件，从而是连续的. 在 $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(x_n + f(x_n))$ 中令 $n \to \infty$, 得 $\lambda = \dfrac{1}{2}(\lambda + f(\lambda))$, 即 $f(\lambda) = \lambda$ (15 分).

三、(本题 15 分) 设 n 阶实方阵 A 的每个元素的绝对值为 2. 证明：当 $n \geqslant 3$ 时，$|\,A| \leqslant \dfrac{1}{3} \cdot 2^{n+1} n!$.

证明：(i) 首先，$|\,A| = 2^n |\,A_1|$, 其中 $A_1 = \dfrac{1}{2}A$, 它的所有元素为 1 或 -1 (1 分).

(ii) 当 $n = 3$ 时,

$$\begin{aligned}
|\,A_1| &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \\
&\triangleq b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6.
\end{aligned}$$

上式 b_i 中每项为 ± 1, 且六项乘积为 -1, 至少有一个 b_i 为 -1, 从而这六项中至少有

两项相消，故有 $|A_1| \leqslant 4 = \dfrac{1}{3}\cdot 2\cdot 3!$. 于是命题对 $n=3$ 成立 (9 分).

(iii) 设此命题对于一切这样的 $(n-1)$ 阶方阵成立，那么对 n 阶矩阵的情形，将 $|A|$ 按第一行展开，记 1 行 k 列的代数余子式为 M_{1k}, 便有

$$\begin{aligned}|A| &= \pm 2M_{11} \pm 2M_{12} \pm \cdots \pm 2M_{1n}\\ &\leqslant 2(|M_{11}| + |M_{12}| + \cdots + |M_{1n}|)\\ &\leqslant 2n\cdot\frac{1}{3}\cdot 2^n(n-1)! = \frac{1}{3}\cdot 2^{n+1}n!.\ \cdots\cdots(15\text{分})\end{aligned}$$

四、(本题 15 分) 设 $f(x)$ 为区间 (a,b) 上的可导函数. 对 $x_0\in(a,b)$, 若存在 x_0 的邻域 U 使得任意的 $x\in U\backslash\{x_0\}$ 有 $f(x) > f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的凹点. 类似地, 若存在 x_0 的邻域 U 使得任意的 $x\in U\backslash\{x_0\}$ 有 $f(x) < f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的凸点. 证明：若 $f(x)$ 为区间 (a,b) 上的可导函数，且不是一次函数，则 $f(x)$ 一定存在凹点或凸点.

证明：因为 $f(x)$ 不是一次函数，故存在 $a<x_1<x_2<x_3<b$, 使得三点 $(x_1,f(x_1))$, $(x_2,f(x_2))$, $(x_3,f(x_3))$ 不共线. 不妨设

$$f(x_2) - \left(f(x_1) + \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}(x_2-x_1)\right) > 0.\ \cdots\cdots(3\text{分})$$

令

$$g(x) = -\varepsilon(x-x_2)^2 + f(x_2) + \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}(x-x_2).$$

取定 $\varepsilon>0$ 充分小，使得 $g(x_1)>f(x_1)$ 和 $g(x_3)>f(x_3)$. 令 $h(x)=g(x)-f(x)$, 则有 $h(x_1)>0$ 和 $h(x_3)>0$, 且 $h(x_2)=0$. 令 $h(\xi)=\min\limits_{x\in[x_1,x_3]} h(x)$, 则 $h(\xi)\leqslant 0$, $\xi\in(x_1,x_3)$, 并且 $f'(\xi)=g'(\xi)$ (10 分). 故

$$f(x) \leqslant g(x) - h(\xi),\ x\in(x_1,x_3).$$

注意到 $g(x)-h(\xi)$ 的图像是一个开口向下的抛物线，故对 $x\neq\xi$ 有

$$g(x)-h(\xi) < g'(\xi)(x-\xi) + g(\xi) - h(\xi) = f'(\xi)(x-\xi) + f(\xi),$$

即

$$f(x) < f'(\xi)(x-\xi) + f(\xi),\ x\in(x_1,x_3)\backslash\{\xi\}.\ \cdots\cdots(15\text{分})$$

五、(本题 20 分) 设 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}$ 实对称矩阵， A^* 为 A 的伴随矩阵.

记

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -x_2 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ -x_3 & a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ -x_4 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

若 $|A|=-12$, A 的特征值之和为 1, 且 $(1,0,-2)^T$ 为 $(A^*-4I)x=0$ 的一个解.

试给出一正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$, 使得 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 化为标准型.

解：首先,

$$\begin{aligned} & f(x_1,x_2,x_3,x_4) \\ =\ & x_1^2|A|-x_2\begin{vmatrix} -x_2 & a_{12} & a_{13} \\ -x_3 & a_{22} & a_{23} \\ -x_4 & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}+x_3\begin{vmatrix} -x_2 & a_{11} & a_{13} \\ -x_3 & a_{12} & a_{23} \\ -x_4 & a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}-x_4\begin{vmatrix} -x_2 & a_{11} & a_{12} \\ -x_3 & a_{12} & a_{22} \\ -x_4 & a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} \\ =\ & -12x_1^2+(x_2,x_3,x_4)A^*\begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由此 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 为关于 x_1,x_2,x_3,x_4 的二次型 (2 分).

其次，由 $(A^*-4I)x=0$ 得 $(|A|I-4A)x=0$, 即 $(A+3I)x=0$. 故由 $(1,0,-2)^T$ 为 $(A^*-4I)x=0$ 的一个解知，A 有特征值 -3 (4 分). 现可设 A 的特征值为 $\lambda_1,\lambda_2,-3$. 于是由 $|A|=-12$ 及 A 的特征值之和为 1, 得方程组

$$\lambda_1+\lambda_2-3=1,\ -3\lambda_1\lambda_2=-12,$$

得 $\lambda_1=\lambda_2=2$. 所以 A 的全部特征值为 $2,2,-3$. 结果，对应特征值 -3 的特征空间 V_{-3} 的维数为 1, 对应特征值 2 的特征空间 V_2 的维数为 2 (6 分).

注意到 $(1,0,-2)^T$ 是 A 相应于特征值 -3 的一个特征向量，因此它是 V_{-3} 的基. 求解下列线性方程组的基础解系：$t_1-2t_3=0$, 得到正交基础解：$\alpha=(0,1,0)^T$, $\beta=\left(2/\sqrt{5},0,1/\sqrt{5}\right)^T$, 且令 $\gamma=\left(1/\sqrt{5},0,-2/\sqrt{5}\right)^T$, 则 α,β 为 V_2 的标准正交基, α,β,γ 为 $\mathbb{R}^3$ 的标准正交基. 事实上，因为 A 为实对称矩阵, $V_2=V_3^{\perp}$, 它是唯一的，维数为 2 (12 分). 现在 A 可写成 $A=P\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}P^{-1}$, 其中 $P=$

$\begin{pmatrix} 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$, 从而得

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \ A^{-1} = P \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} P^T,$$

$$A^* = |A|\, A^{-1} = -12P \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} P^T = P \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^T. \text{(15分)}$$

令 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$, 则由 P 为正交矩阵知 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ 为正交变换，其中 $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{5} & -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$, 它使得

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= -12x_1^2 + (x_2, x_3, x_4) P \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^T \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \\ &= -12y_1^2 - 6y_2^2 - 6y_3^2 + 4y_4^2 \end{aligned}$$

为 $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 的标准型 (20 分).

六、(本题 20 分) 设 $\mathbb{R}$ 为实数域， n 为给定的自然数， A 表示所有 n 次首一实系数多项式组成的集合. 证明：

$$\inf_{b\in\mathbb{R},\ a>0,\ P(x)\in A} \frac{\int_b^{b+a} |P(x)|\,\mathrm{d}x}{a^{n+1}} > 0.$$

证明：我们证明对任意 n 次首一实系数多项式，都有 $\int_b^{b+a} |P(x)|\,\mathrm{d}x \geqslant c_n a^{n+1}$, 其中 c_n 满足 $c_0 = 1$, $c_n = \dfrac{n}{2^{n+1}} c_{n-1}$, $n \geqslant 1$ (3 分). 我们对 n 用归纳法. $n = 0$ 时 $P(x) = 1$, 则

$$\int_b^{b+a} |P(x)|\,\mathrm{d}x = a \geqslant c_0 a,$$

结论成立 (5 分). 下设结论在 $k \leqslant n-1$ 时成立. 设 $P(x)$ 是一个 n 次首一多项式, 则对任意给定的 $a>0$ 来说 $Q(x)=\dfrac{2}{na}(P(x+a/2)-P(x))$ 是一个 $(n-1)$ 次首一多项式. 由归纳法假设, 有

$$\int_b^{b+a/2} |\,Q(x)|\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{c_{n-1}}{2^n}a^n. \cdots\cdots(10分)$$

由此推出

$$\begin{aligned}\int_b^{b+a} |\,P(x)|\,\mathrm{d}x &= \int_b^{b+a/2}(|\,P(x)|+|\,P(x+a/2)|\,)\mathrm{d}x \\ &\geqslant \int_b^{b+a/2} |\,P(x+a/2)-P(x)|\,\mathrm{d}x = \frac{na}{2}\int_b^{b+a/2} |\,Q(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\geqslant \frac{na}{2}c_{n-1}\left(\frac{a}{2}\right)^n = c_n a^{n+1}. \cdots\cdots(20分)\end{aligned}$$