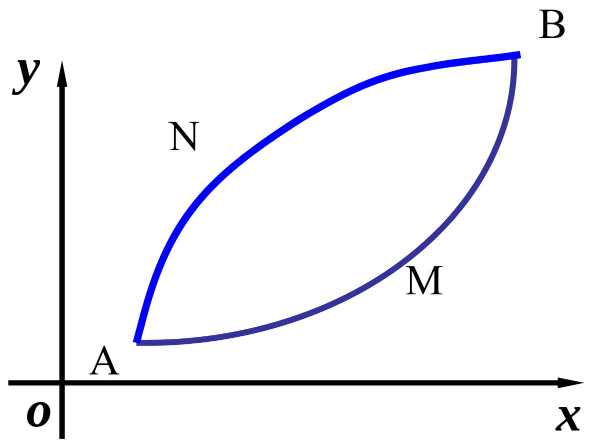
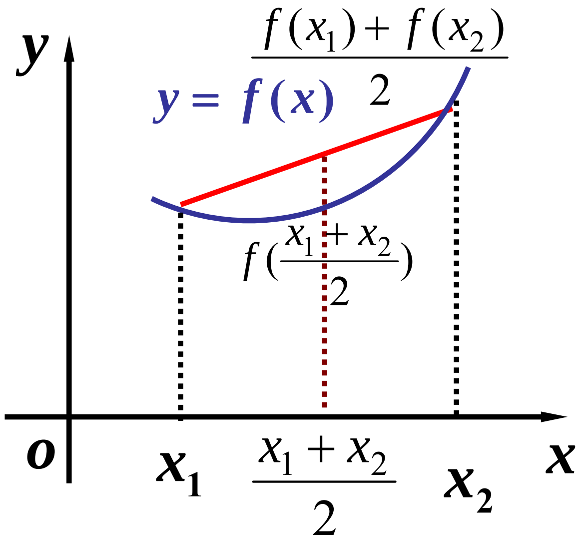
一、曲线凹凸的定义

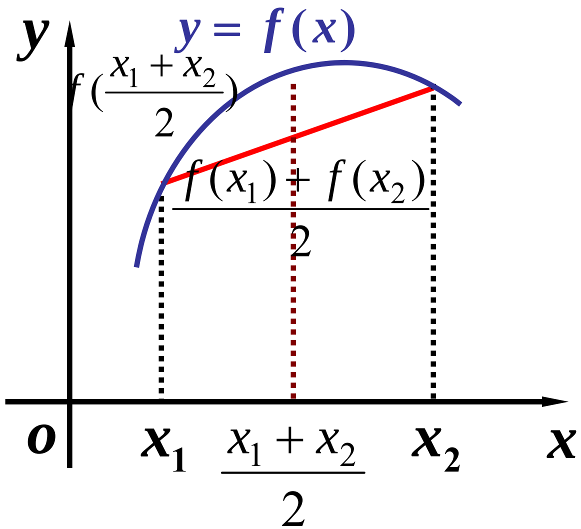


问题:如何研究曲线的弯曲方向?



图形上任意弧段位

于所张弦的下方



图形上任意弧段位

于所张弦的上方

下凸的四个等价定义：

假设f可导，$\forall x_1 \neq x_2, x \in I$

(1) $f(\frac{x_1+x_2}{2}) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,

(2) $f'(x)$严格单调递增

(3) $f(tx_1+(1-t)x_2) < tf(x_1)+(1-t)f(x_2), \forall t \in (0,1)$

即曲线在I内任意两点割线下方

(4) $f(x_2) > f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1)$

即曲线在I内任意点切线上方

说明:

1) 若在某点二阶导数为 0，在其两侧二阶导数不变号，则曲线的凸性不变 .

2) 根据拐点的定义及上述定理, 可得拐点的判别法如下:

若曲线 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续, $f''(x_0)=0$ 或不存在, 但 $f''(x)$ 在 x_0 两侧**异号**, 则点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一个拐点.

1) 若在某点二阶导数为 0 ，在其两侧二阶导数不变号,
则曲线的凸性不变 .

2) 根据拐点的定义及上述定理, 可得拐点的判别法如下:

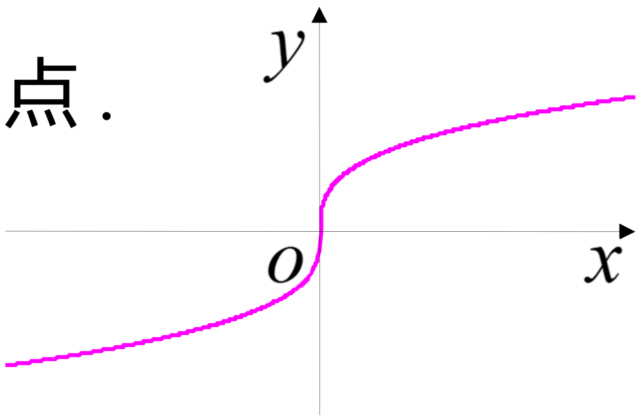
若曲线 $y = f(x)$ 在点 x_0 连续, $f''(x_0) = 0$ 或不存在,
但 $f''(x)$ 在 x_0 两侧**异号**，则点 $(x_0, f(x_0))$ 是曲线
$y = f(x)$ 的一个拐点.

例4. 求曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 的拐点.

解: $y'=\frac{1}{3}x^{-2/3}$ ， $y''=-\frac{2}{9}x^{-5/3}$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
y''	$+$	不存在	$-$
y	下凸	0	上凸

因此点 $(0,0)$ 为曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 的拐点 .



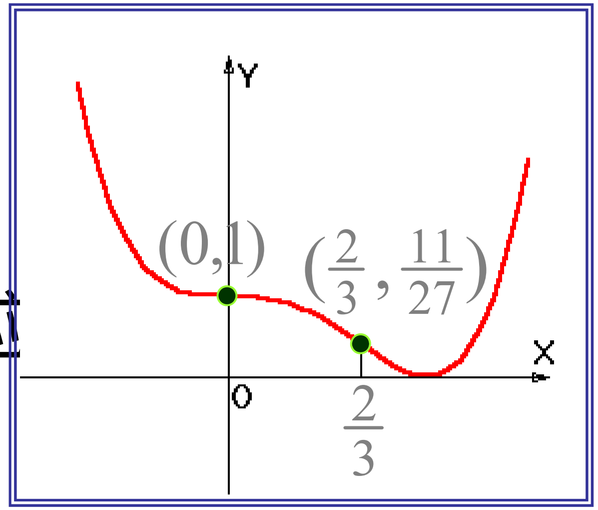
例5. 求曲线 $y=3x^4-4x^3+1$ 的凸性区间及拐点.

解: 1) 求 y''

$$y'=12x^3-12x^2,\quad y''=36x^2-24x$$

2) 求拐点可疑点坐标

令 $y''=0$ 得 $x_1=0$, $x_2=\frac{2}{3}$, 对应



3) 列表判别

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3},+\infty)$
y''	$+$	0	$-$	0	$+$
y	下凸	1	上凸	$\frac{11}{27}$	下凸

故该曲线在 $(-\infty,0)$ 及 $(\frac{2}{3},+\infty)$ 上下凸, 在 $(0,\frac{2}{3})$ 上上凸， 点 $(0,1)$ 及 $(\frac{2}{3},\frac{11}{27})$ 均为拐点.

利用凸性证明不等式

例6. 证明 $e^{\frac{x+y}{2}} < \frac{1}{2}\left(e^x + e^y\right)$

证明：$\because \left(e^x\right)'' = e^x > 0, \forall x, \therefore e^x$在$\left(-\infty, +\infty\right)$上是下凸的，

由下凸定义得证。

例7. 求证：$x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$

证明：令$F(x) = x\ln x$，则$F''(x) = \dfrac{1}{x} > 0, F$在$(0, +\infty)$下凸，

由下凸定义可得$\dfrac{x\ln x + y\ln y}{2} > \dfrac{(x+y)}{2}\ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$

即 $x\ln x + y\ln y > (x+y)\ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$

例8 证明: 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, 有 $\sin x > \frac{2}{\pi} x$.

证明: 令 $F(x) = \sin x - \frac{2}{\pi} x$, 则 $F(0) = 0,\ F(\frac{\pi}{2}) = 0$

$$\because \quad F'(x) = \cos x - \frac{2}{\pi}$$

$$F''(x) = -\sin x < 0$$

$\therefore \quad F(x)$ 是上凸函数

$$\therefore \quad F(x) > \min\{F(0), F(\frac{\pi}{2})\} = 0$$ (自证)

即 $\quad \sin x > \frac{2}{\pi} x \qquad (0 < x < \frac{\pi}{2})$

内容小结

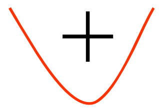
1. 可导函数单调性判别

$$f'(x)>0,\ x\in I \Longrightarrow f(x)\text{在 } I \text{ 上严格单调递增}$$

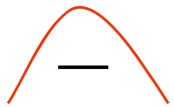
$$f'(x)<0,\ x\in I \Longrightarrow f(x)\text{在 } I \text{ 上严格单调递减}$$

2.曲线凸性与拐点的判别

$$f''(x)>0,x\in I \Longrightarrow \text{曲线 } y=f(x) \text{ 在 } I \text{ 上下凸}$$



$$f''(x)<0,x\in I \Longrightarrow \text{曲线 } y=f(x) \text{ 在 } I \text{ 上上凸}$$



拐点 — 连续曲线上凸下凸的分界点

思考与练习

1. 设在$[0,1]$上 $f''(x)>0$, 则 $f'(0), f'(1)$, $f(1)-f(0)$ 或 $f(0)-f(1)$ 的大小顺序是 (***B***)

(*A*) $f'(1)>f'(0)>f(1)-f(0)$

(*B*) $f'(1)>f(1)-f(0)>f'(0)$

(*C*) $f(1)-f(0)>f'(1)>f'(0)$

(*D*) $f'(1)>f(0)-f(1)>f'(0)$

提示: 利用 $f'(x)$ 严格单调增加，及

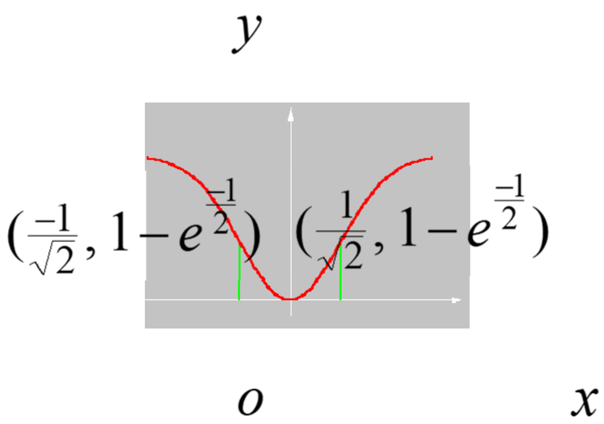
$$f(1)-f(0)=f'(\xi)\quad(0<\xi<1)$$

2. 曲线 $y=1-e^{-x^2}$ 的下凸区间是 $\underline{(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})}$;

上凸区间是 $\underline{(-\infty, \frac{-1}{\sqrt{2}})}$ **及** $\underline{(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)}$;

拐点为 $\underline{(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 1-e^{\frac{-1}{2}})}$.

提示: $y''=2e^{-x^2}(1-2x^2)$



求 增减区间 与凸向区间方法比较

增减区间	凸向区间
写出函数的定义域	写出函数的定义域
求 $y'=0$ 或y' 不存在的点	求 $y''=0$ 或y'' 不存在的点
上述各点分定义域为若干区间考察 y'符号	上述各点分定义域为若干区间考察y''符号
若 $y'>0$ 函数单增 若 $y'<0$ 函数单减	若 $y''>0$ 曲线下凸 若 $y''<0$ 曲线上凸

极值点与拐点比较

极值点	拐点
函数的定义域	函数的定义域
求 $y'=0$ 或 y' 不存在的点 x_0	求 $y''=0$ 或 y'' 不存在的点 x_1
若 x_0 的两侧 y' 异号, x_0 为函数极值点	若 x_1 的两侧 y'' 异号 $(x_1, f(x_1))$ 为拐点

综上可知：一阶导数知升降　导数二阶行凸向

备用题

1.求证曲线 $y=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ 有位于一直线的三个拐点.

证明： $y' = \dfrac{(x^2+1)-(x+1)2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2}$

$$y'' = \frac{(-2-2x)\ (x^2+1)^2-(1-2x-x^2)\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4}$$

$$= \frac{2(x^3+3x^2-3x-1)}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{2(x-1)(x+2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3})}{(x^2+1)^3}$$

令 $y''=0$ 得

$$x_1=1,\quad x_2=-2-\sqrt{3},\quad x_3=-2+\sqrt{3}$$

从而三个拐点为

$$(1,1),\quad (-2-\sqrt{3},\frac{-1-\sqrt{3}}{8+4\sqrt{3}}),\quad (-2+\sqrt{3},\frac{-1+\sqrt{3}}{8-4\sqrt{3}})$$

因为

$$\frac{\frac{-1-\sqrt{3}}{8+4\sqrt{3}}-1}{-2-\sqrt{3}-1}=\frac{\frac{-1+\sqrt{3}}{8-4\sqrt{3}}-1}{-2+\sqrt{3}-1}$$

所以三个拐点共线.

第五节 函数图形的描绘

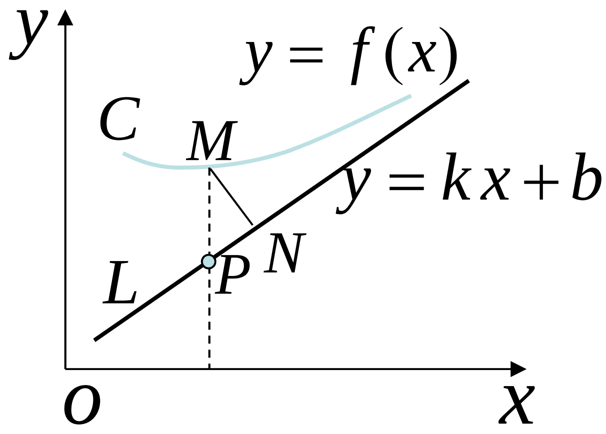
一、 曲线的渐近线

二、 函数图形的描绘

一、 曲线的渐近线

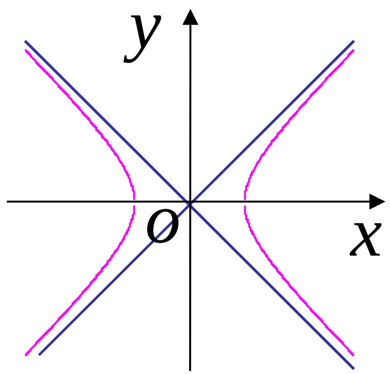
定义 . 若曲线 C 上的点 M 沿着曲线无限地远离原点时，点 M 与某一直线 L 的距离趋于 0，则称直线 L 为曲线 C 的**渐近线 .**

或为**“纵坐标差”**



例如, 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$

有渐近线 $\dfrac{x}{a}\pm\dfrac{y}{b}=0$



但抛物线 $y=x^2$ 无渐近线 .

1. 水平与竖直渐近线

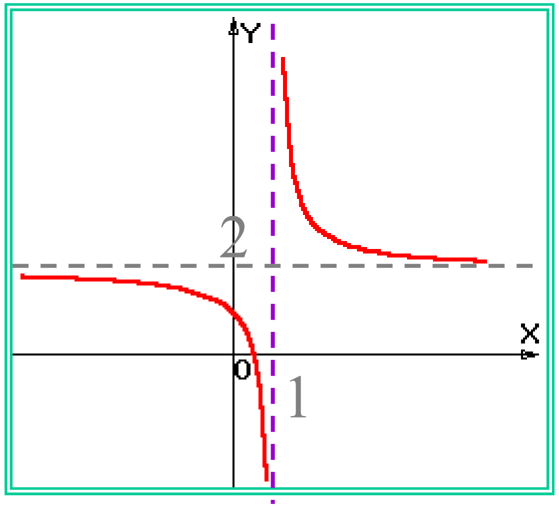
若 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$,则曲线 $y=f(x)$ 有水平渐近线 $y=b$.

(或 $x\to-\infty$)

若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$,则曲线 $y=f(x)$ 有垂直渐近线 $x=x_0$.

(或 $x\to x_0^-$)

例1. 求曲线 $y=\dfrac{1}{x-1}+2$ 的渐近线 .



解: $\because \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{x-1}+2\right)=2$

$\therefore$ $y=2$ 为水平渐近线;

$\because \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}+2\right)=\infty$, $\therefore$ $x=1$为垂直渐近线.

2. 斜渐近线

若 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (\text{或}x\to-\infty)}}[f(x)-(kx+b)]=0$，则曲线 $y=f(x)$ 有斜渐近线 $y=kx+b$.

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}x\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0$$

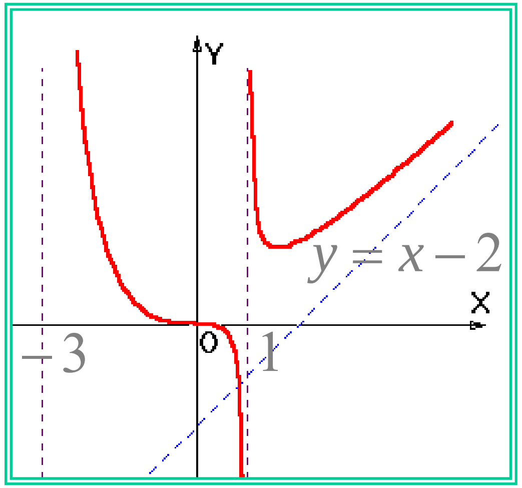
$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0$$

$$k=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-\frac{b}{x}\right]$$

$$\therefore\quad \boxed{k=\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (\text{或}x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}}$$

$$\boxed{b=\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (\text{或}x\to-\infty)}}[f(x)-kx]}$$

例2. 求曲线$y=\dfrac{x^3}{x^2+2x-3}$的渐近线.



解: $\because\ y=\dfrac{x^3}{(x+3)(x-1)},\ \lim\limits_{\substack{x\to-3\\(\text{或}x\to1)}} y=\infty,$

所以有垂直渐近线$x=-3$及$x=1$

又因 $$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2+2x-3}=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to\infty}\frac{-2x^2+3x}{x^2+2x-3}=-2$$

$\therefore\quad y=x-2$为曲线的斜渐近线.

思考与练习

1. 曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ （ D ）

(A) 没有渐近线; (B) 仅有水平渐近线;

(C) 仅有铅直渐近线;

(D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线.

提示: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=1$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=\infty$

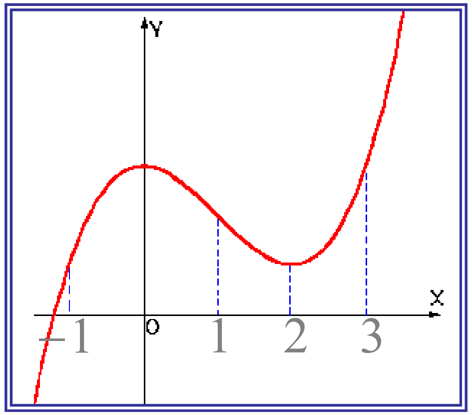
二、函数图形的描绘

步骤：

1. 确定函数 $y=f(x)$的定义域，并考察其对称性及周期性；
2. 求$f'(x), f''(x)$，并求出$f'(x)$及$f''(x)$为 0 和不存在的点；
3. 列表判别增减及凸性区间，求出极值和拐点；
4. 求渐近线；
5. 确定某些特殊点，描绘函数图形．

例3. 描绘 $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+2$ 的图形.

解: 1) 定义域为 $(-\infty,+\infty)$,无对称性及周期性.



2) $y'=x^2-2x,\ y''=2x-2,$

令 $y'=0$, 得 $x=0,\ 2$

令 $y''=0$, 得 $x=1$

3)

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
y''	$-$		$-$	0	$+$		$+$
y		2		$\frac{4}{3}$		$\frac{2}{3}$	
		(极大)		(拐点)		(极小)	

4)

x	-1	3
y	$\frac{2}{3}$	2