大学物理

§3.5质心（center of mass）

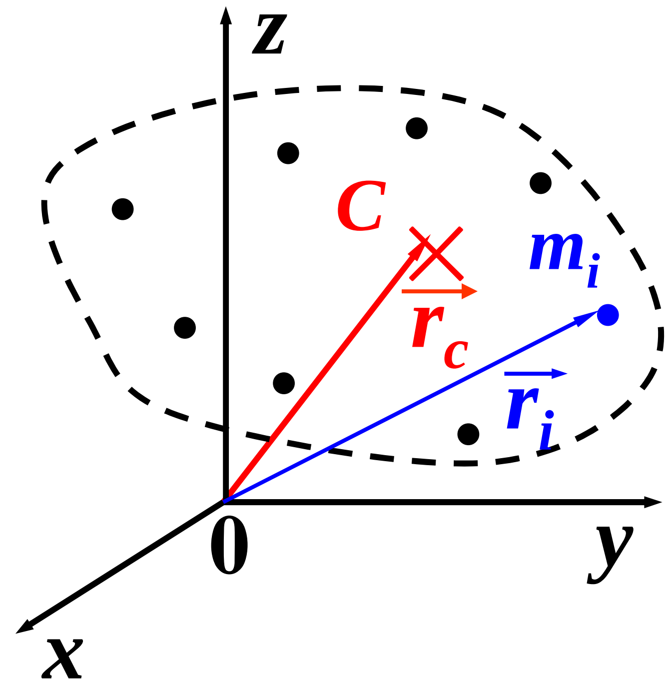
一. 质心的概念和质心位置的确定

为便于研究质点系总体运动，引入质心概念。

定义质心 C 的位矢为：

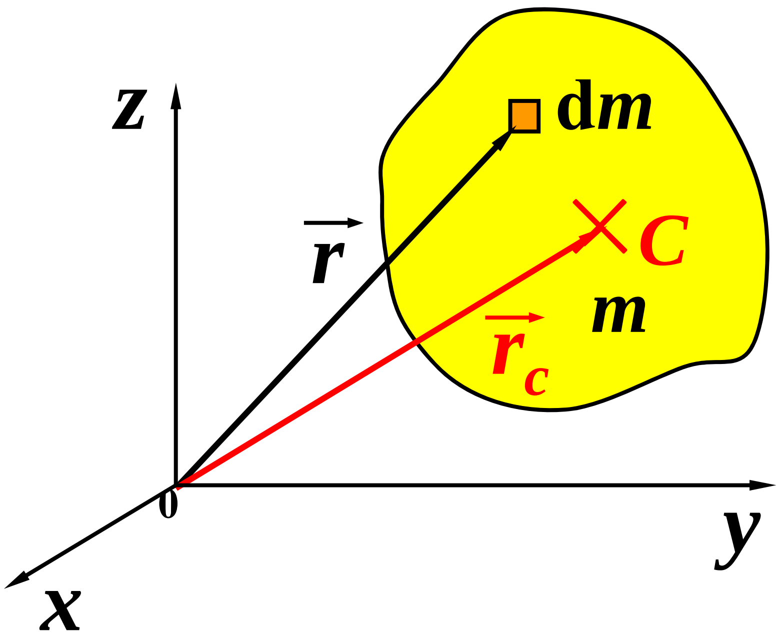
$$\boxed{\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}} \quad (m = \sum m_i)$$

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{\sum m_i x_i}{m} \\ y_C = \dfrac{\sum m_i y_i}{m} \\ z_C = \dfrac{\sum m_i z_i}{m} \end{cases}$$



质心位置是质点位置以质量为权重的平均值。

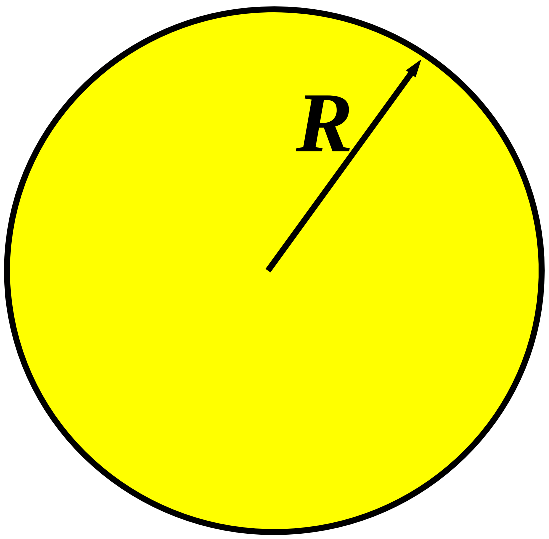
- 连续体

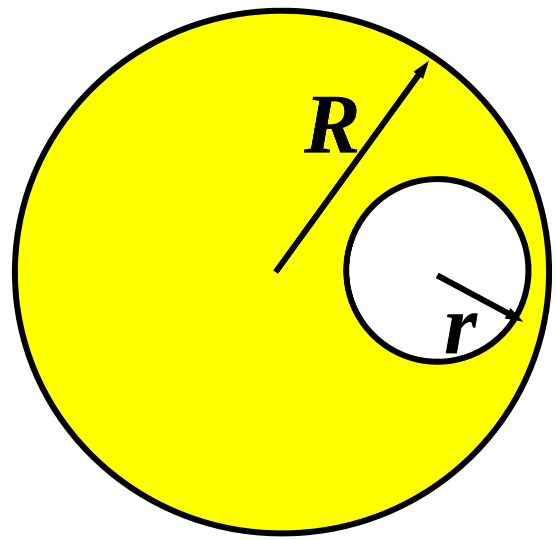


$$\vec{r}_C = \frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{m}$$

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{\int x\,\mathrm{d}m}{m} \\[2ex] y_C = \dfrac{\int y\,\mathrm{d}m}{m} \\[2ex] z_C = \dfrac{\int z\,\mathrm{d}m}{m} \end{cases}$$

- 均匀杆、圆盘、圆环、球，质心为其几何中心。
- “小线度”物体的质心和重心是重合的。

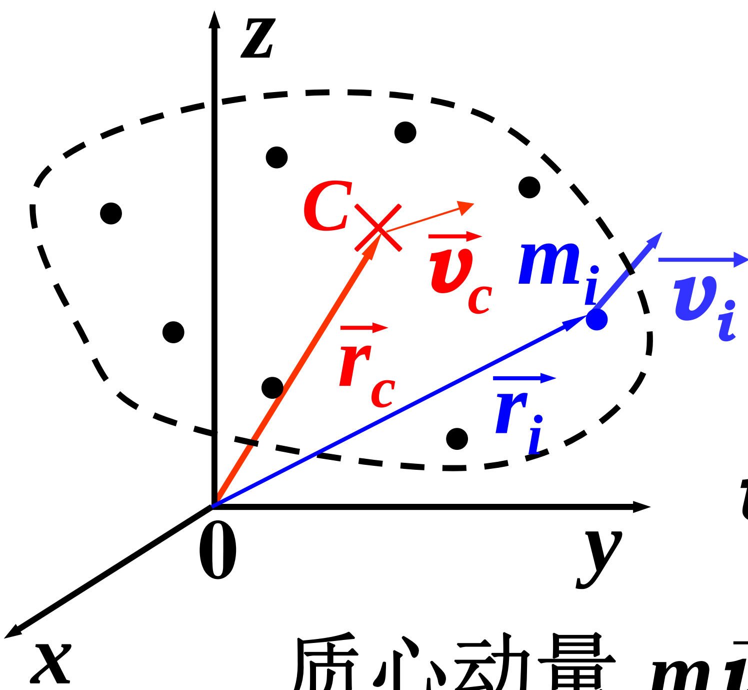




§ 3.6质心运动定理

（theorem of motion of center of mass）

一. 质心运动定理



$$\vec{v}_C = \frac{\mathrm{d}\vec{r}_C}{\mathrm{d}t} = \frac{\sum m_i \frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t}}{m}$$

$$= \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{m} \qquad (\vec{r}_C = \frac{\int \vec{r}\,\mathrm{d}m}{m})$$

$\vec{v}_C$是质点系的“平均”速度

质心动量 $m\vec{v}_C = \sum_i m_i \vec{v}_i =$ 总动量 $\vec{P}$

即质点系的总动量 $\boxed{\vec{P} = m\vec{v}_C}$

由 $$\vec{F}_{外}=\frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\vec{v}_C)=m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_C}{\mathrm{d}t}$$

有 $$\boxed{\vec{F}_{外}=m\vec{a}_C}$$ —质心运动定理

质心的运动如同一个在质心位置处的质点的运动，该质点集中了整个质点系的质量和所受的外力。在质点力学中所谓“物体”的运动，实际上是物体质心的运动。

二. 动量守恒与质心的运动

$$
\text{若合外力为零，则}\begin{cases}\text{质点系动量守恒}\\ \vec{a}_c = 0 \rightarrow \vec{v}_c = \text{常矢量}\end{cases}
$$

$$
\text{若合外力分量为0，则}\begin{cases}\text{质点系分动量守恒}\\ \text{相应的质心分速度不变}\end{cases}
$$

如：$\sum_i F_{ix} = 0 \longrightarrow v_{cx} = \text{常量}$

质点系动量守恒和质心匀速运动等价！

三. 质心（参考）系（**frame of center of mass**）

1. 质心系

讨论天体运动及碰撞等问题时常用到质心系。

质心系是固结在质心上的平动参考系。

质心系不一定是惯性系。

质点系的复杂运动通常可分解为：

质点系整体随质心的运动；

各质点相对于质心的运动 ——

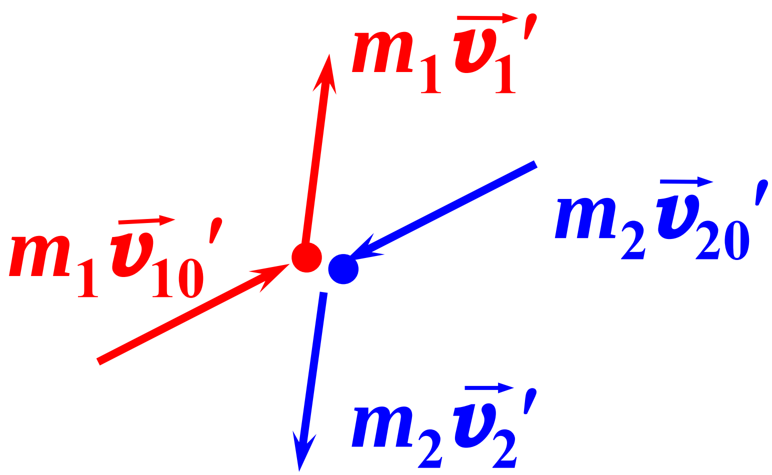
在质心系中考察质点系的运动。

2.质心系的基本特征

$$\sum m_i \vec{v}_i' = (\sum m_i)\vec{v}_C' = 0$$

质心系是零动量参考系。

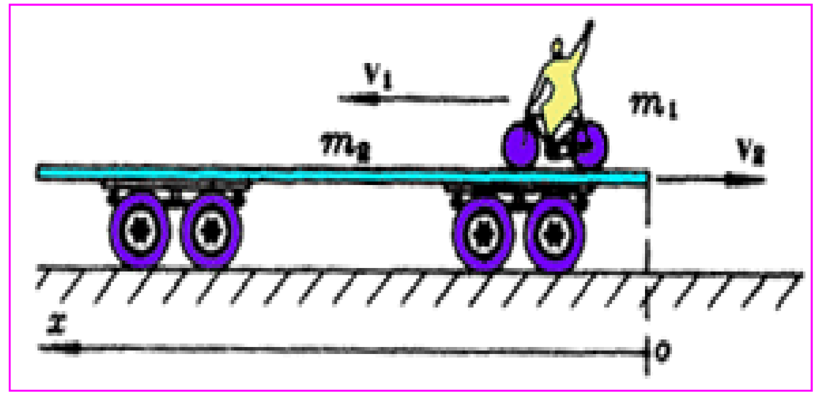
$$\boxed{\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m} = 0}$$

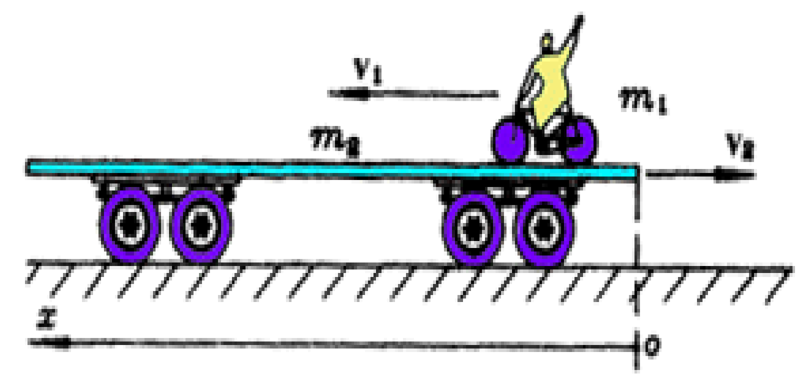


质心系中看两粒子碰撞

两质点系统在其质心系中，总是具有等值、反向的动量。

例:水平光滑铁轨上有一车,长度为l,质量为m_2,车的一端有一人(包括所骑自行车),质量为m_1,人和车原来都静止不动.当人从车的一端走到另一端时,人、车各移动了多少距离?





例:水平光滑铁轨上有一车,长度为l,质量为m_2,车的一端有一人(包括所骑自行车),质量为m_1,人和车原来都静止不动.当人从车的一端走到另一端时,人、车各移动了多少距离?

解：以人、车为系统，在水平方向上不受外力作用，动量守恒。

建立如图所示的坐标系，有 $m_1v_1-m_2v_2=0$ 即 $v_2=m_1v_1/m_2$

人相对于车的速度 $u=v_1+v_2=(m_1+m_2)v_1/m_2$

设人在时间t 内从车的一端走到另一端，则有

$$l=\int_0^t u dt=\int_0^t \frac{m_1+m_2}{m_2}v_1 dt=\frac{m_1+m_2}{m_2}\int_0^t v_1 dt$$

在这段时间内人相对于地面的位移为 $x_1=\int_0^t v_1 dt=\frac{m_2}{m_1+m_2}l$

小车相对于地面的位移为 $x_2=-l+x_1=-\frac{m_1}{m_1+m_2}l$

本章目录

（第二部分）

§3.7 质点的角动量

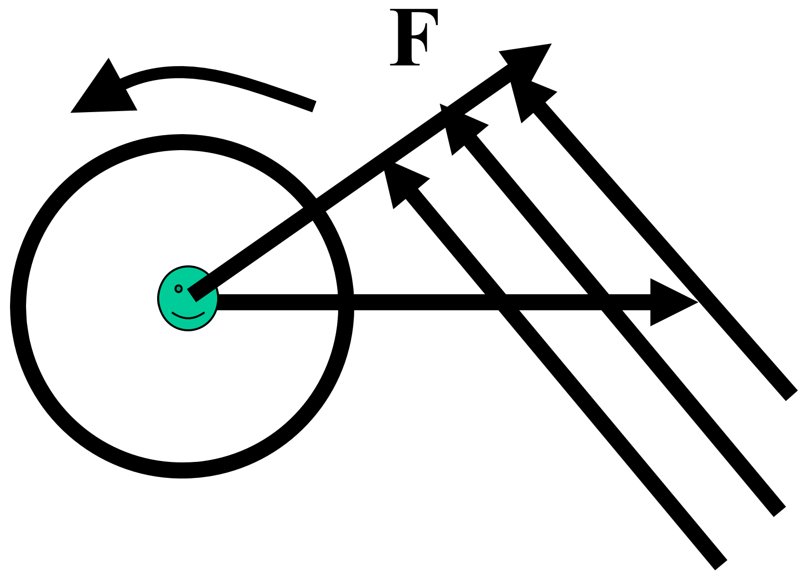
§3.8 角动量守恒定律

§ 3.7 质点的角动量

（angular momentum of a particle）

质点的角动量定理

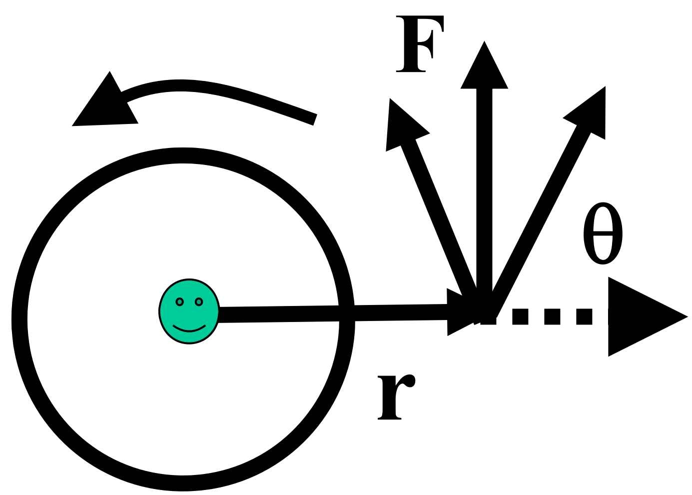
转动效果不但与力的大小有关，还与力的位置有关（相对于某一质点）



主要参量（**F, r, θ** ）

θ=90, sinθ=1

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

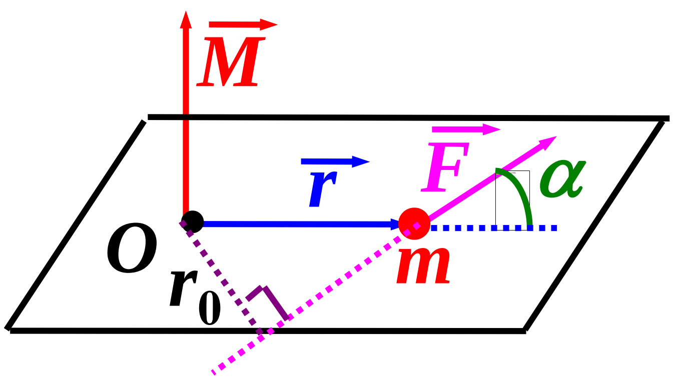


$$M = rF\sin\theta$$

方向：垂直于**r**，**F**平面

定义力对定点 O 的力矩 (moment of force) 为:

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

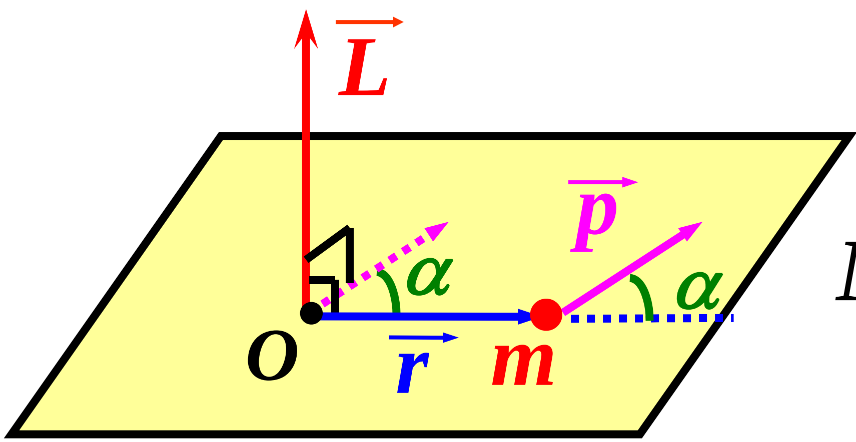


$$M = rF\sin\alpha = r_0 F$$

$r_0 = r\sin\alpha$ 称力臂

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = r \times \frac{dp}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}(r \times p) - \frac{dr}{dt} \times p$$

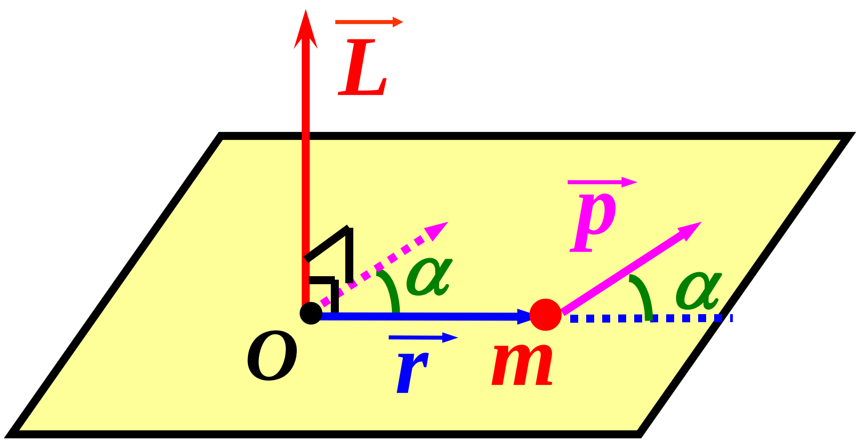


$$\vec{M} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{mv}$$

$$\boxed{\vec{M} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) = \frac{\boldsymbol{dL}}{\boldsymbol{dt}}}$$

$$\boxed{\vec{M}=\frac{d}{dt}(r\times p)=\frac{dL}{dt}}$$

定点O的角动量定义为：



$$\boxed{\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times(m\vec{v})}$$

大小：$L=rp\sin\alpha=rmv\sin\alpha$，单位：kg m^2/s

方向：⊥于$\vec{r}$，$\vec{p}$（$\vec{v}$）决定的平面（右螺旋）

于是有 $$\boxed{\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$$

或 $$\boxed{\mathrm{d}\vec{L}=\vec{M}\,\mathrm{d}t}$$

质点角动量定理

（微分形式）

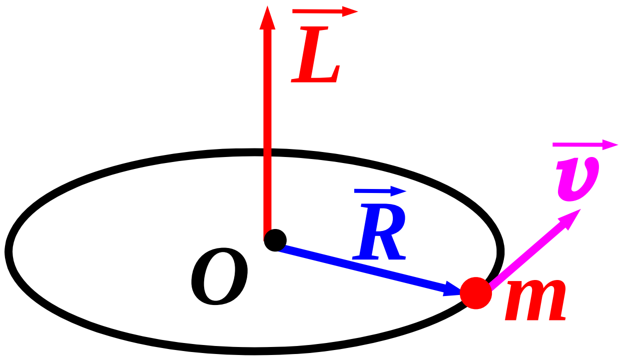
积分 $$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\cdot\mathrm{d}t=\vec{L}_2-\vec{L}_1}$$

质点角动量定理

（积分形式）

$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\,\mathrm{d}t$ 称冲量矩

——力矩对时间的积累作用。



质点作匀速率圆周运动时，

对圆心的角动量的大小为

$L = m\upsilon R$，方向⊥圆面不变。

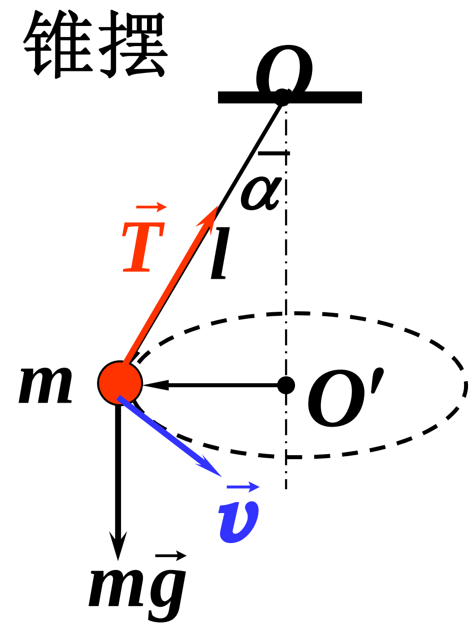
如：中心力, 如行星受中心恒星的万有引力

如电子受原子核的引力

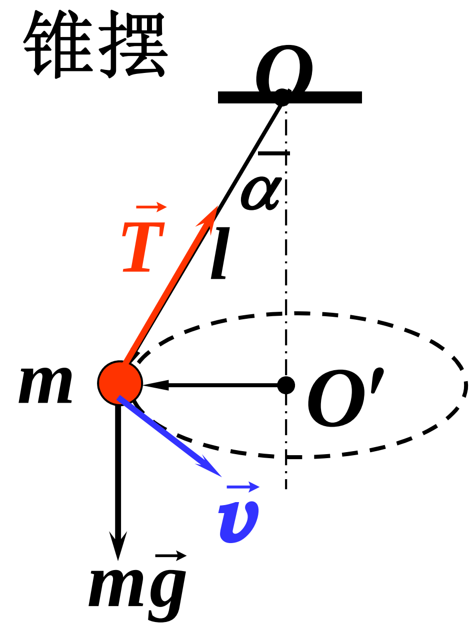
例如：太阳，地球系统

$$L = m\upsilon R = 6.0 * 10^{24} \times 1.5 * 10^{11} \times 3.0 * 10^{4}$$

例: 锥摆的角动量



例1: 锥摆的角动量



对O点： $\vec{r}_{om}\times\vec{T}=0$

$$\left|\vec{r}_{om}\times m\vec{g}\right|=l\sin\alpha\,(mg)$$

合力矩不为零，角动量变化。

对O'点： $\vec{r}_{o'm}\times\vec{T}=\vec{r}_{o'm}\times(-m\vec{g})\neq 0$

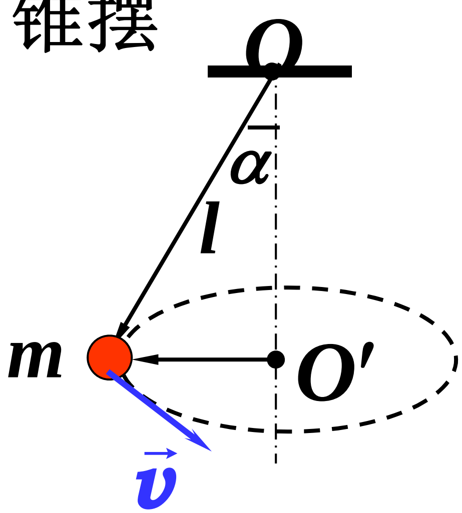
$$\vec{r}_{o'm}\times m\vec{g}=-\vec{r}_{o'm}\times\vec{T}$$

合力矩为零，角动量大小、方向都不变。

（合力不为零，动量改变！）

同一质点的同一运动，其角动量却可以随固定点的不同而改变。例如：

锥摆



$$\vec{L}_O = \vec{r}_{om} \times m\vec{v} \quad \begin{cases} L_O = lmv \\ \text{方向变化} \end{cases}$$

$$\vec{L}_{O'} = \vec{r}_{o'm} \times m\vec{v} \quad \begin{cases} L_{O'} = lmv\sin\alpha \\ \text{方向竖直向上不变} \end{cases}$$

§3.8 角动量守恒定律

（law of conservation of angular momentum）

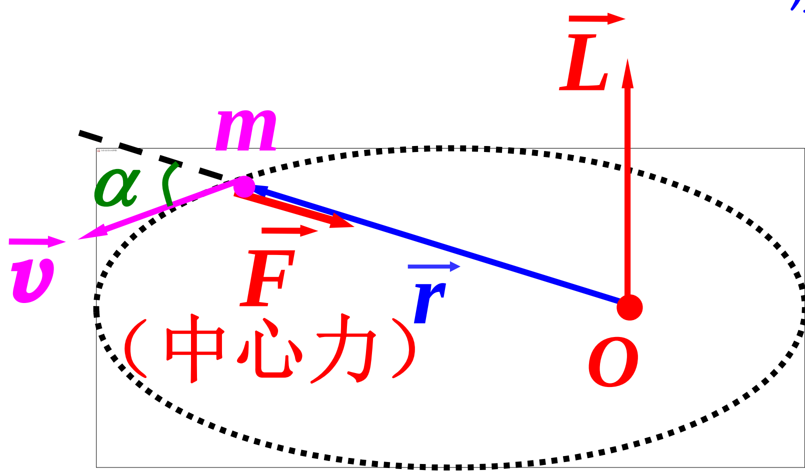
$$\boxed{\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$$

$\boxed{\text{若 } \vec{M}=0\text{，则 } \vec{L}=\text{常矢量}}$

——质点角动量守恒定律

$$\vec{M}=0\begin{cases}\vec{F}=0\,, \\ \vec{F}\text{过}O\text{点：中心力（如行星受中心恒星的万有引力）}\end{cases}$$

角动量守恒定律是物理学的基本定律之一，它不仅适用于宏观体系，也适用于微观体系，而且在高速低速范围均适用。



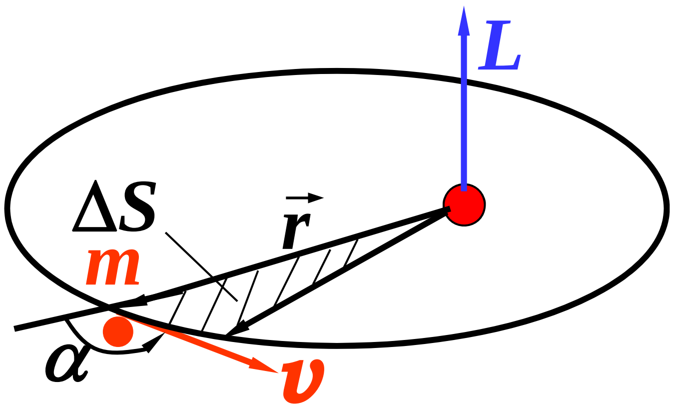
质点角动量守恒特征：

$$\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v}) = 常矢量$$

（1） $m v r \sin\alpha = \text{const.}$，

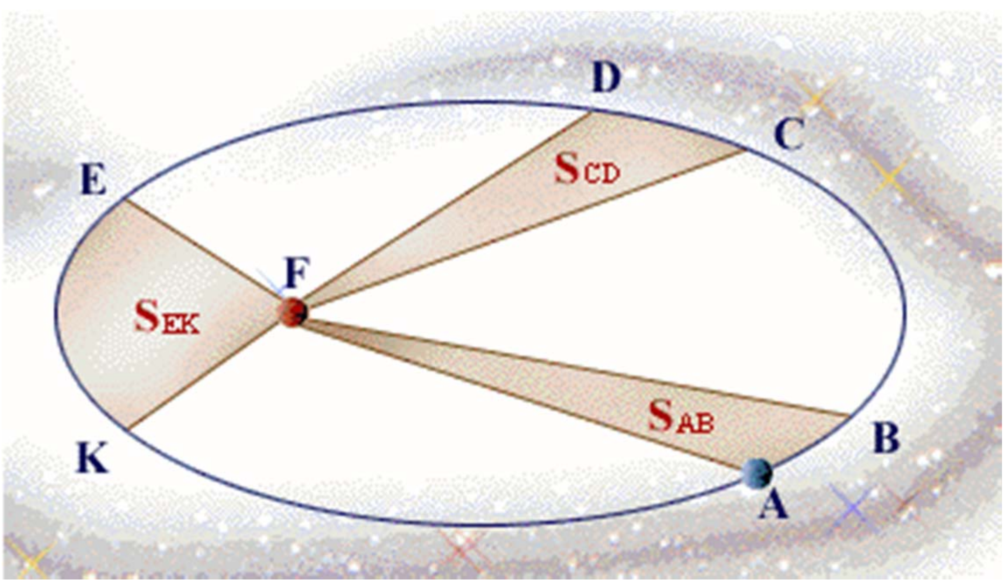
（2）轨道在同一平面内。

例1:角动量守恒定律可导出行星运动的开普勒第二定律:
行星对太阳的径矢在相等的时间内扫过相等的面积.



$$L = m\upsilon \cdot r\sin\alpha = 常量$$

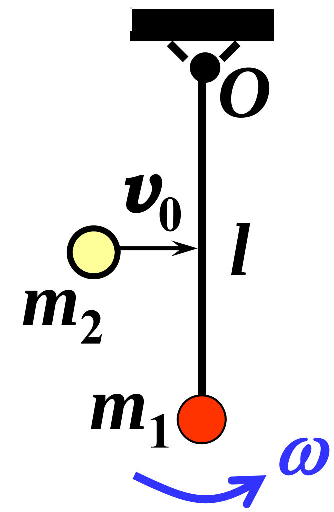
$$\rightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = 常量$$



$$L = mvr\sin\alpha = m\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}r\sin\alpha$$

$$= 2m\frac{\frac{1}{2}|\Delta\vec{r}|r\sin\alpha}{\Delta t} = 2m\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

例2:一根长为l的轻质杆，端部固结一小球m_1，另一小球m_2以水平速度v_0碰杆中部并与杆粘合。求:碰撞后杆的角速度ω



解：选m_1（含杆）+ m_2为系统

碰撞时重力和轴力都通过O，对O力矩为零，故角动量守恒。

有 $$\frac{l}{2}m_2 v_0 = l m_1 \omega l + \frac{l}{2}m_2 \omega \frac{l}{2}$$

解得: $$\omega = \frac{2m_2}{4m_1 + m_2}\cdot\frac{v_0}{l}$$

$\boxed{\text{思考}}$（$m_1 + m_2$）的水平动量是否守恒?

谢谢！！！