一、线性方程

一阶线性微分方程的标准形式:

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

当$Q(x)\equiv 0$, 上方程称为**齐次的**.

当$Q(x)\not\equiv 0$, 上方程称为**非齐次的**.

例如 $\frac{dy}{dx}=y+x^2$, $\frac{dx}{dt}=x\sin t+t^2$, 线性的;

$yy'-2xy=3$, $y'-\cos y=1$, 非线性的.

一阶线性微分方程的解法

1. 线性齐次方程 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=0.$

(使用分离变量法)

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx,\qquad \int\frac{dy}{y}=-\int P(x)dx,$$

$$\ln y=-\int P(x)dx+\ln C,$$

齐次方程的通解为 $y=Ce^{-\int P(x)dx}.$

2. 线性非齐次方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x).$

讨论 $\because \frac{dy}{y}=\left[\frac{Q(x)}{y}-P(x)\right]dx,$

两边积分 $\ln|y|=\int\frac{Q(x)}{y}dx-\int P(x)dx,$

设 $\int\frac{Q(x)}{y}dx$ 为 $v(x)$, $\therefore \ln|y|=v(x)-\int P(x)dx,$

即 $y=e^{v(x)}e^{-\int P(x)dx}.$ 非齐次方程通解形式

与齐次方程通解相比: $C\Rightarrow u(x)$

常数变易法

把齐次方程通解中的常数变易为待定函数的方法.

实质: 未知函数的变量代换.

新未知函数 $u(x) \Rightarrow$ 原未知函数 $y(x)$,

作变换 $$y = \underline{u(x)e}^{-\int P(x)dx}$$

$$y' = u'(x)e^{-\int P(x)dx} + u(x)[-P(x)]e^{\int P(x)dx},$$

将y和y'代入原方程得 $u'(x)e^{-\int P(x)dx}=Q(x)$,

积分得 $u(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C$,

一阶线性非齐次微分方程的通解为:

$$y=[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C]e^{-\int P(x)dx}$$

$$=\underbrace{Ce^{-\int P(x)dx}}_{\text{对应齐次方程通解}}+\underbrace{e^{-\int P(x)dx}\cdot\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx}_{\text{非齐次方程特解}}$$

例1、若连续函数$f(x)$满足关系式

$$f(x)=\int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right)dt+ln2,$$ 求$f(x)$。

例2、求方程$y'+\frac{1}{x}y=\frac{sinx}{x}$的通解。

例3、求方程$(1+y^2)ydx+2(2xy^2-1)dy=0$的通解。

例4 如图所示，平行与 y 轴的动直线被曲线 $y = f(x)$与 $y = x^3$ $(x \geq 0)$截下的线段PQ之长数值上等于阴影部分的面积，求曲线 $f(x)$.

二、伯努利方程

伯努利(Bernoulli)方程的标准形式

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \qquad (n\neq 0,1)$$

当$n=0,1$时，方程为线性微分方程.

当$n\neq 0,1$时，方程为非线性微分方程.

解法：需经过变量代换化为线性微分方程.

两端除以y^n，得 $y^{-n}\dfrac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x)$,

令$z=y^{1-n}$， 则 $\dfrac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$,

代入上式 $\dfrac{dz}{dx}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$,

求出通解后，将 $z=y^{1-n}$ 代入即得

$$\therefore y^{1-n}=z$$

$$=e^{-\int(1-n)P(x)dx}\left(\int Q(x)(1-n)e^{\int(1-n)P(x)dx}dx+C\right).$$

例 5 求方程 $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{4}{x}y=x^2\sqrt{y}$ 的通解.

例6 用适当的变量代换解下列微分方程:

思考题

求微分方程 $y' = \dfrac{\cos y}{\cos y \sin 2y - x \sin y}$ 的通解.

一、全微分方程及其求法

1. 定义： **若有全微分形式**

$$du(x,y)=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

则 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$

全微分方程
或恰当方程

例如 $xdx+ydy=0$, $\because u(x,y)=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$,

$\therefore du(x,y)=xdx+ydy$, 所以是全微分方程.

全微分方程 $\Leftrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$.

2.解法:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$ 全微分方程

①应用曲线积分与路径无关. $\because \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$

通解为 $u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy$

$=\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx$, $u(x,y)=C$;

② 用直接凑全微分的方法.

例1 求方程$(x^3-3xy^2)dx+(y^3-3x^2y)dy=0$的通解.

例2 求方程$\frac{2x}{y^3}dx+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$的通解.

二、积分因子法

定义: $\mu(x,y)\neq 0$连续可微函数，使方程

$\mu(x,y)P(x,y)dx+\mu(x,y)Q(x,y)dy=0$成为全微分方程. 则称$\mu(x,y)$为方程的**积分因子**.

问题: 如何求方程的积分因子?

1. 公式法: $\because \dfrac{\partial(\mu P)}{\partial y}=\dfrac{\partial(\mu Q)}{\partial x},$

$$\mu\frac{\partial P}{\partial y}+P\frac{\partial \mu}{\partial y}=\mu\frac{\partial Q}{\partial x}+Q\frac{\partial \mu}{\partial x}$$ 两边同除μ,

$$Q\frac{\partial \ln\mu}{\partial x}-P\frac{\partial \ln\mu}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}$$ 求解不容易

特殊地:

a.当μ只与x有关时; $\dfrac{\partial \mu}{\partial y}=0,\quad \dfrac{\partial \mu}{\partial x}=\dfrac{d\mu}{dx},$

$$\therefore \frac{d\ln\mu}{dx} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = f(x)$$

$$\therefore \mu(x) = e^{\int f(x)dx}.$$

$b.$当μ只与y有关时; $\frac{\partial \mu}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{d\mu}{dy},$

$$\therefore \frac{d\ln\mu}{dy} = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = g(y)$$

$$\therefore \mu(y) = e^{\int g(y)dy}.$$

2.观察法: 凭观察凑微分得到$\mu(x,y)$

常见的全微分表达式

$xdx+ydy=d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)$	$\frac{xdy-ydx}{x^2}=d\left(\frac{y}{x}\right)$
$\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}=d\left(\arctan\frac{y}{x}\right)$	$\frac{xdy+ydx}{xy}=d(\ln xy)$
$\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}=d\left(\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\right)$	
$\frac{xdy-ydx}{x^2-y^2}=d\left(\frac{1}{2}\ln\frac{x+y}{x-y}\right)$	

例3 利用观察法求下列方程的积分因子，并求其通解。

$$(1)\ (x+y)(dx-dy)=dx+dy$$

$$(2)\ (xdy+ydx)(y+1)+x^2y^2dy=0$$

例4 求微分方程

$(3xy+y^2)dx+(x^2+xy)dy=0$的通解.

例5 求微分方程

$2x(1+\sqrt{x^2-y})dx-\sqrt{x^2-y}dy=0$的通解.

例6 求微分方程

$$2xy\ln y dx+(x^2+y^2\sqrt{1+y^2})dy=0$$的通解.

例7 求微分方程$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2+x^3+y}{1+x}$$的通解.

思考题

方程$\dfrac{2x}{y^3}dx+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$

是否为全微分方程?