大学物理

4.7 理想流体

1.流体的特性

- 液体特点：液体具有一定体积，几乎不可压缩
- 只有体积压缩弹性，没有拉压弹性和剪切弹性，因而都具有流动性

2.粘性概念

•当流体流动时，各流层之间存在着阻碍相对运动的内摩擦力，这就是流体的粘性。

•例如，河流中心流层流动最快，越靠近河岸流动越慢，岸边水几乎不流动，这种现象就是由于流层间存在内摩擦力造成的

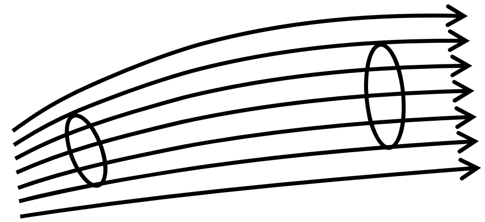
3.流体体元的特点

在流体力学中，常谈到流体体元、流体微团或流体质点，这里说的体元、微团、质点，都具有宏观小、微观大的特点

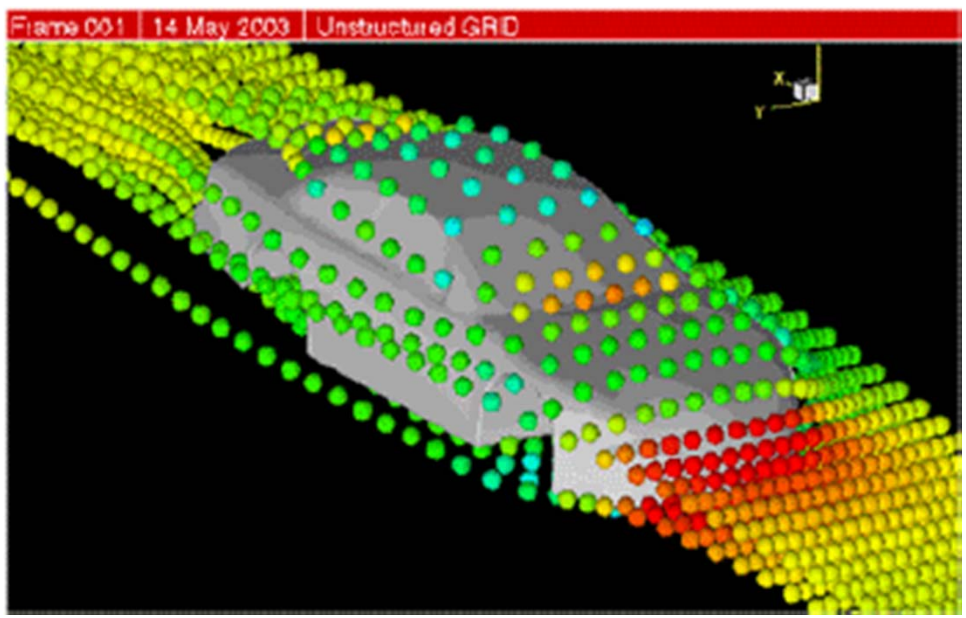
4.理想流体

- 理想流体就是不可压缩、无粘性的流体
- 在研究流体问题时，理想流体使问题变得简单

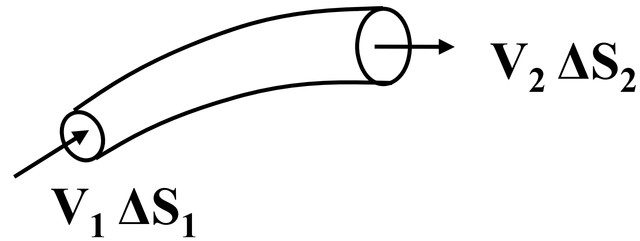
稳定流动与流线



- 稳定流动: 空间各点流速不随时间而变, 即 $\vec{v}=\vec{v}(x,y,z)$
- 流线： 在流速场中画一些曲线，使曲线上每点切线方向与该点的流速方向相同，这些曲线就叫流线，流线不能相交， 稳定流动中，流线分布才不随时间而变化



流体的连续性方程



在不可压缩流体稳定流动的流速场中, 单位时间通过截面ΔS_1的流体体积与通过截面ΔS_2的流体体积必然相等，即

$$v_1\Delta S_1 = v_2\Delta S_2$$

表明：截面大处，流速小，流线疏；

截面小处，流速大，流线密

单位时间内通过某截面的流体体积 $Q=v\Delta S$，又叫作通过该截面的流量，因此，连续性方程可表述为：

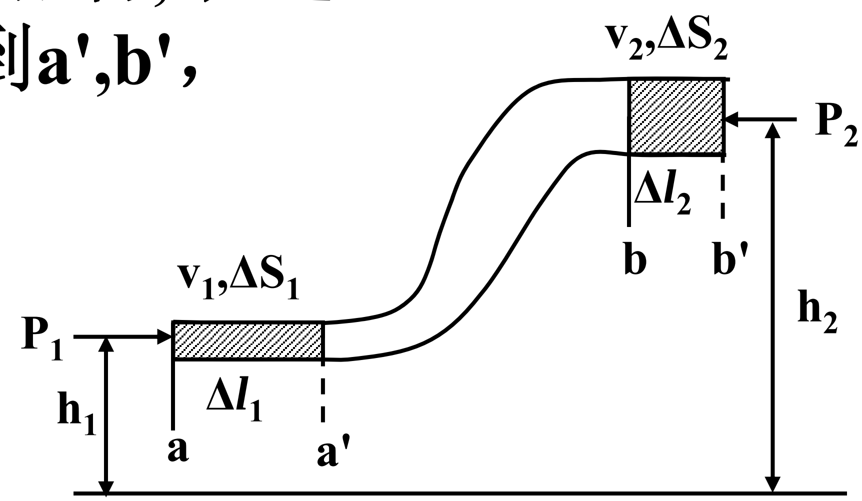
<u>当不可压缩流体做稳定流动时，流量守恒</u>

伯努利方程

伯努利方程是**理想流体稳定流动**的基本动力学方程，它是在理想流体中应用机械能定理推导出来的结果

(一)伯努利方程的推导

在稳定流动理想流体中取一细流管, 任选ab这一段流体, 在Δt时间内移动到a',b',



功能定理: $A_{外} + A_{非内} = E_2 - E_1$ ①

$A_{非内} = 0$, $A_{外} = p_1 \Delta s_1 \Delta l_1 - p_2 \Delta s_2 \Delta l_2$

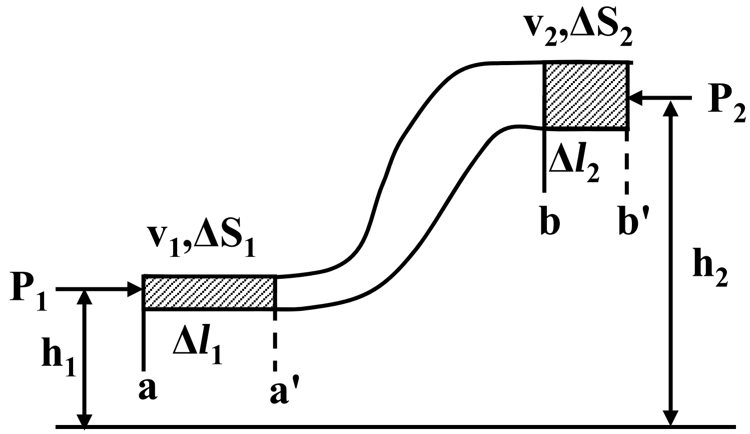
连续方程: $v_1 \Delta s_1 = v_2 \Delta s_2$

$v_1 = \Delta l_1 / \Delta t \qquad v_2 = \Delta l_2 / \Delta t$

$\therefore \Delta l_1 \Delta s_1 = \Delta l_2 \Delta s_2 = \Delta V = \Delta m / \rho \qquad A_{外} = (p_1 - p_2)\Delta m / \rho$ ②

$$E_2 - E_1 = E(a'b') - E(ab) = [E(a'b) + E(bb')] - [E(aa') + E(a'b)]$$
$$= E(bb') - E(aa') = (\tfrac{1}{2}\Delta m v_2{}^2 + \Delta m g h_2) - (\tfrac{1}{2}\Delta m v_1{}^2 + \Delta m g h_1) \quad ③$$

(一)伯努利方程的推导

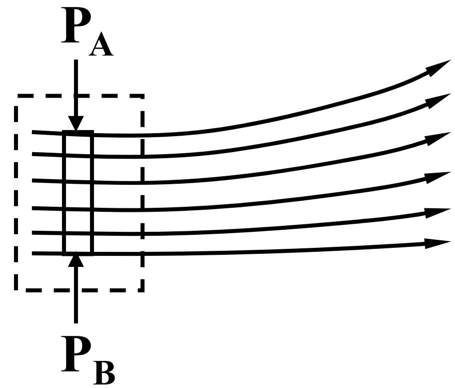


②③代入① $(p_1 - p_2)\Delta m/\rho = (\frac{1}{2}\Delta m v_2{}^2 + \Delta m g h_2) - (\frac{1}{2}\Delta m v_1{}^2 + \Delta m g h_1)$

消去Δm，两边同时乘ρ， $p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho v_2{}^2 + \rho g h_1 - \frac{1}{2}\rho v_1{}^2 - \rho g h_2$

把脚标相同的项放在一起：$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho v_1{}^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho v_2{}^2$

伯努利方程的表述



理想流体相对惯性系做稳定流动时，

$$p+\rho gh+\rho v^2/2=\text{恒量}$$

力 $\vec{F}$

时间积累 $\vec{I}=\int\vec{F}\mathrm{d}t$ $\xrightarrow[\text{牛II}]{\text{质点}}$ $\vec{P}=m\vec{v}$, $\vec{I}=\Delta\vec{P}$ $\xrightarrow[\text{牛III}]{\text{系}}$ $\vec{I}_{外}=\Delta\vec{P}$ $\longrightarrow$ $\vec{F}_{外}=0$, $\vec{P}=\vec{C}$

空间积累 $W=\int\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ $\xrightarrow[\text{牛II}]{\text{质点}}$ $E_k=\frac{1}{2}mv^2$, $W=\Delta E_k$ $\xrightarrow{\text{系}}$ $W_{外}+W_{内}=\Delta E_k$

空间积累 $W=\int\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$ $\xrightarrow[\text{力}]{\text{一对}}$ $\oint\vec{f}_{保}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=0$ $\xrightarrow[\text{牛III}]{\text{系}}$ $E_{p1}=\int_{(1)}^{(0)}\vec{f}_{保}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$, $W_{保}=-\Delta E_p$

$\longrightarrow$ $E=E_k+E_p$, $W_{外}+W_{内非}=\Delta E$ $\longrightarrow$ $\mathrm{d}W_{外}=0$, $\mathrm{d}W_{内非}=0$, $E=C$

转动效应 $\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$ $\xrightarrow{\text{质点}}$ $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{P}$, $\vec{M}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$ $\xrightarrow[\text{牛III}]{\text{系}}$ $\vec{M}_{外}=\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$ $\longrightarrow$ $\vec{M}_{外}=0$, $\vec{L}=\vec{C}$

第五章 刚体定轴转动

（Rotation of Rigid Body about a Fixed Axis）

一. 刚体（rigid body）的概念

不能变形的物体称为刚体。

显然，刚体是个理想化的模型，但是它有实际的意义。

刚体是特殊的质点系，其上各质点间的相对位置保持不变。质点系的规律都可用于刚体，而且考虑到刚体的特点，规律的表示还可较一般的质点系有所简化。

二. 刚体的运动形式

1.平动（translation）：

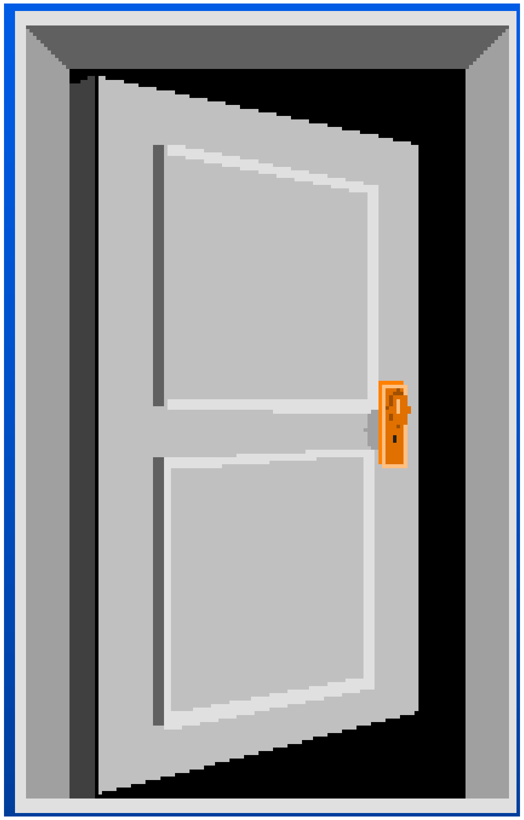
连接刚体内任意两点的直线在运动各个时刻的位置都**彼此平行**。刚体做平动时，刚体内各质元的的运动**轨迹都一样**，而且同一时刻的**速度和加速度都相同**。可用质心或其上任何一点的运动来代表整体的运动。

2.转动（rotation）：

转动也是刚体的基本运动形式之一，它又可分为定轴转动和定点转动。

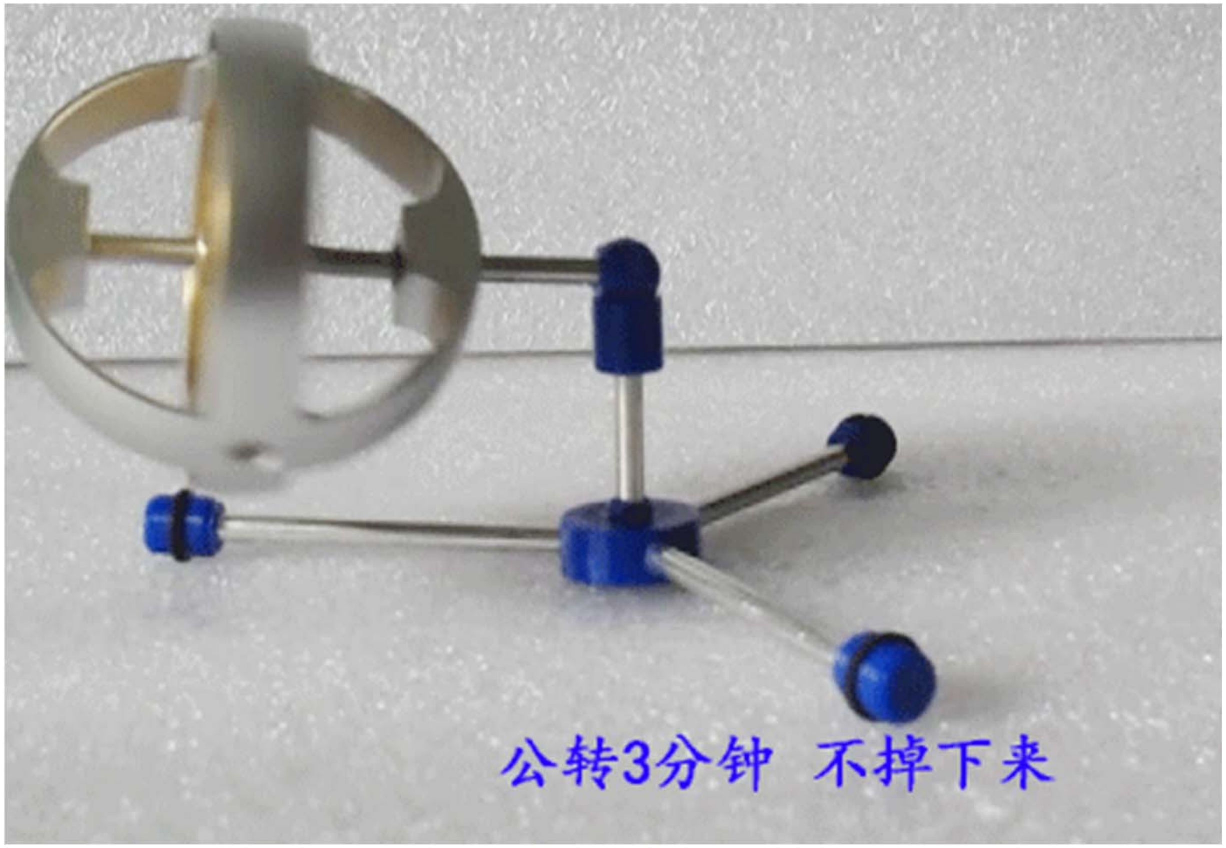
▲ 定轴转动：

运动中各质元均做圆周运动，且各圆心都在同一条固定的直线（转轴）上。



▲ 定点转动：

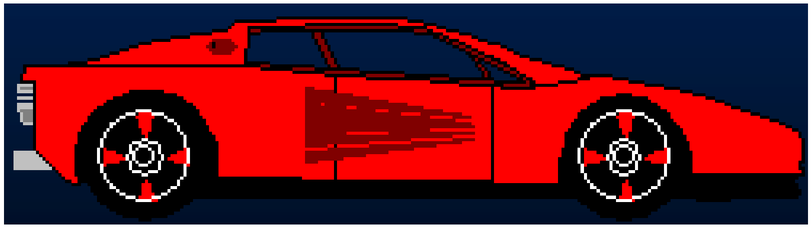
运动中刚体上只有一点固定不动，整个刚体绕过该定点的某一瞬时轴线转动。



3.一般运动：

刚体不受任何限制的的任意运动。它可分解为以下两种刚体的基本运动：

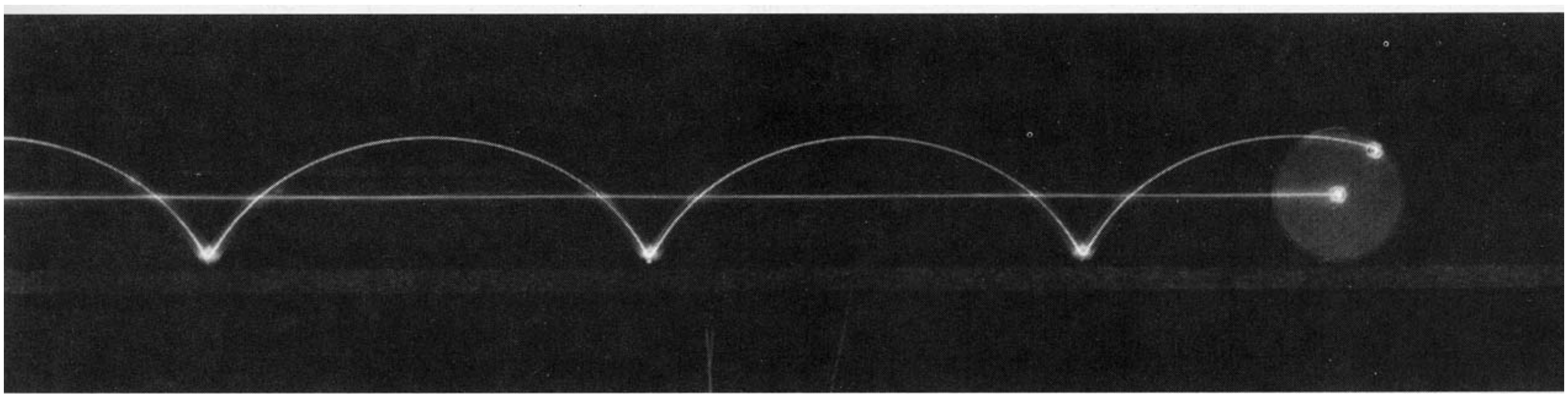
- ▲ 随基点O（可任选）的平动
- ▲ 绕通过基点O的瞬时轴的定点转动



轮子的滚动=轴心的平动+绕轴心的转动

4.一般运动：

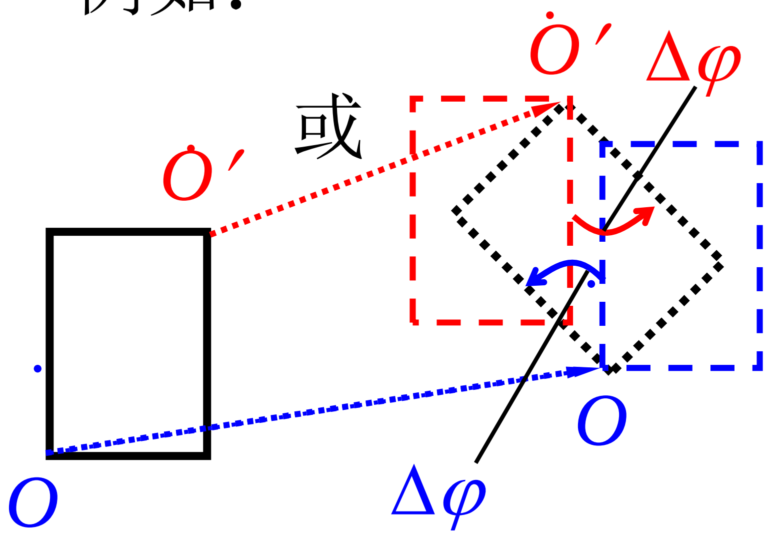
轮子的滚动=轴心的平动+绕轴心的转动



一转动着的轮子的时间一曝光相片。两个发亮点系在轮子上，一个系在轮子的中心，另一个系在边缘。系在边缘上的亮点的轨迹被称为轮转线。

转动与基点的选取无关。

例如：

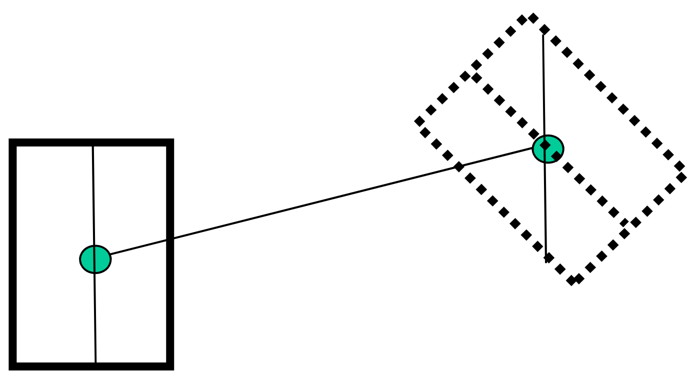


两种分解，基点选取不同，

平动可以不同，转动却相同，

转动与基点的选取无关。

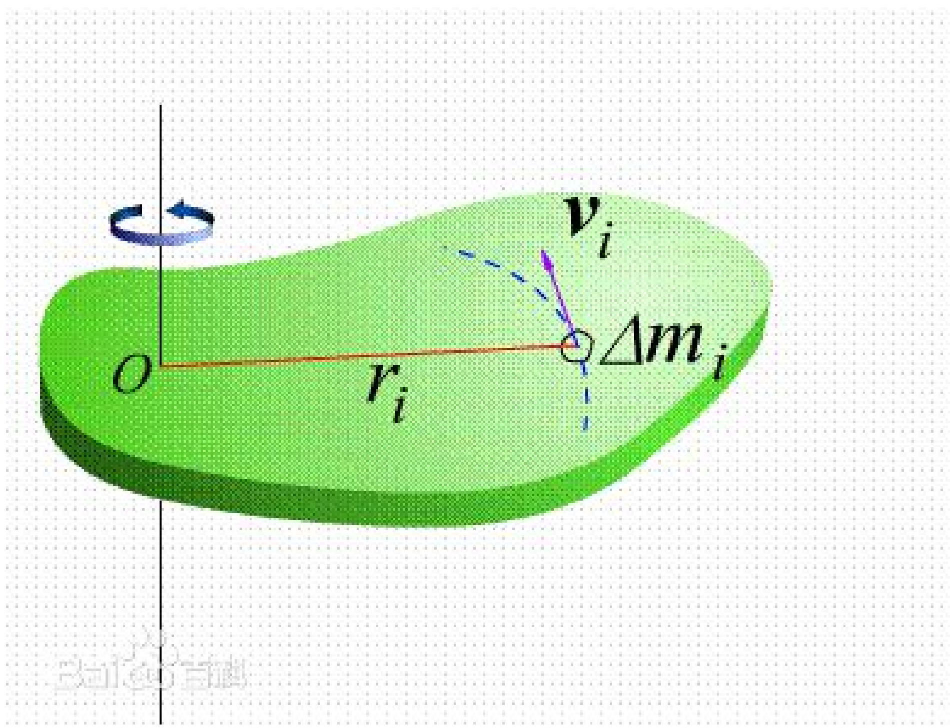
动力学中，常选质心为基点。



三．刚体转动的描述（运动学问题）

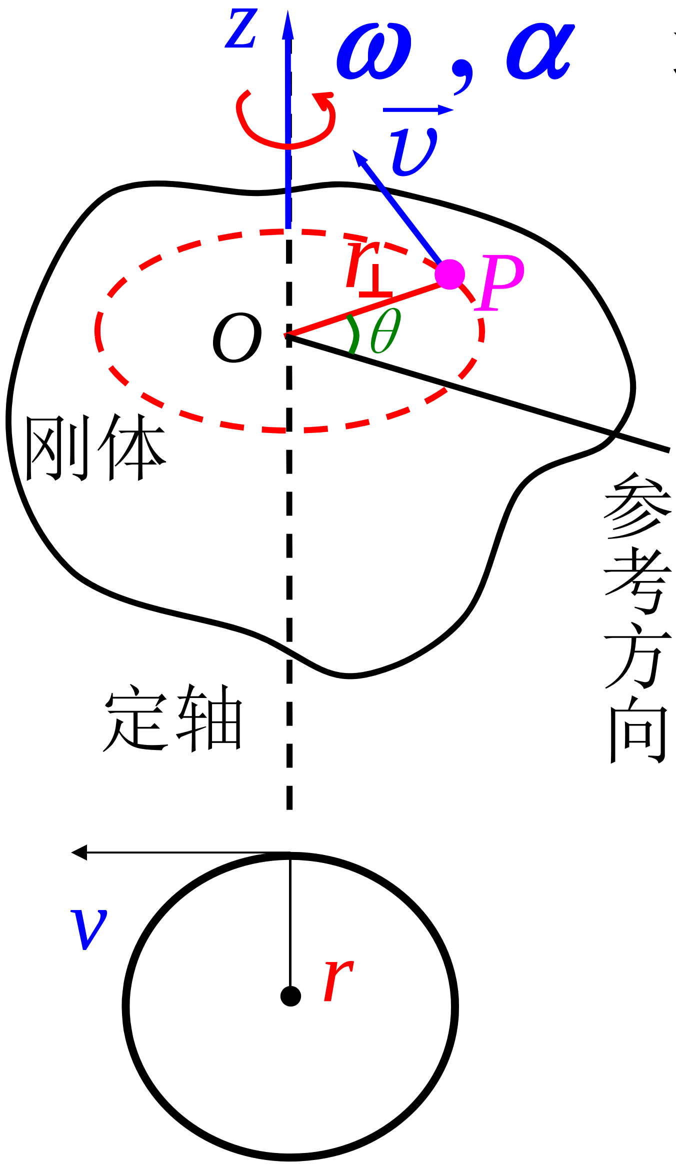
定轴转动（rotation about a fixed axis）

刚体绕某一固定转轴转动时，各质元的线速度和加速度是不同的。



为反映转动方向及刚体转动的快慢和转向，引入角速度 $\vec{\omega}$。

定轴转动（rotation about a fixed axis）



转轴固定，可在一个平面内讨论

$\vec{\omega}$ 和 $\vec{\alpha}$ 分别为代数量 ω和 α 。

$$v = r_\perp \omega$$

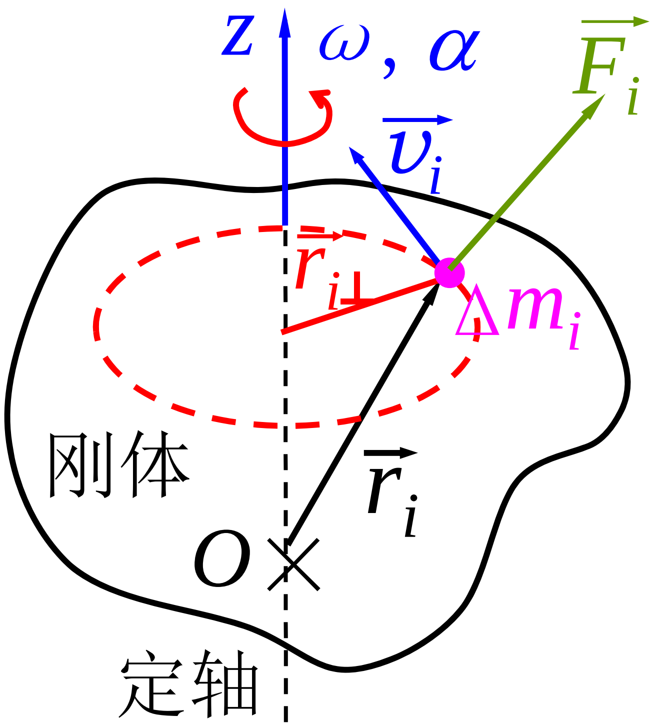
$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r_\perp \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = r_\perp \alpha$$

$$a_n = \frac{v^2}{r_\perp} = r_\perp \omega^2$$

若$\alpha = \text{const.}$
$$\begin{cases} \omega = \omega_0 + \alpha t \\ (\theta - \theta_0) = \omega t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2 \\ \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha(\theta - \theta_0) \end{cases}$$

§ 5.2 刚体的定轴转动定律

把刚体看作无限多质元构成的质点系。



$$M_{外z} = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} \quad (对\ z\ 轴)$$

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \sum_i \Delta m_i v_i r_{i\perp}$$

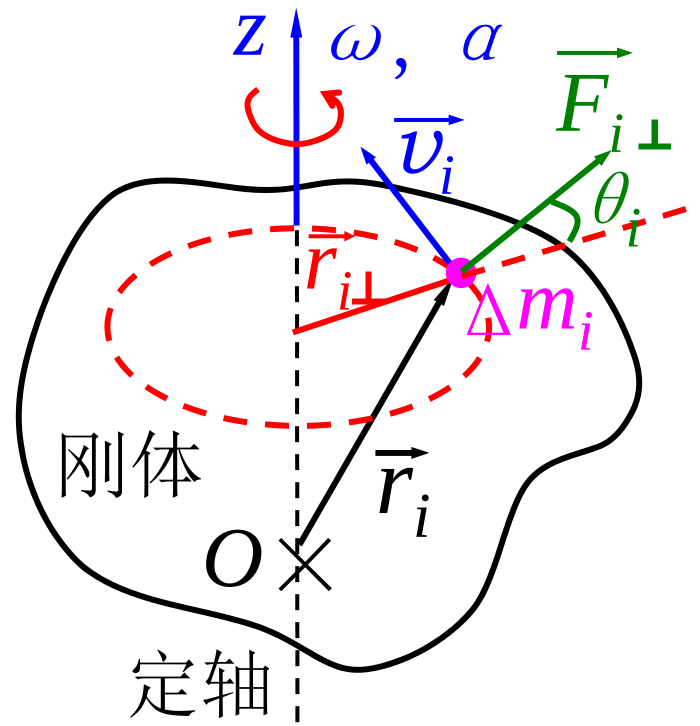
$$= (\sum_i \Delta m_i r_{i\perp}^2) \cdot \omega$$

转动惯量 $J = \sum \Delta m_i r_{i\perp}^2$

则 $\boxed{L_z = J_z \cdot \omega}$

$$M_{外z} = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = J_z \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

即 $\boxed{M_{外z} = J_z \alpha}$ ——转动定律



其中 $M_{外z} = \sum_i F_{i\perp} r_{i\perp} \cdot \sin\theta_i$

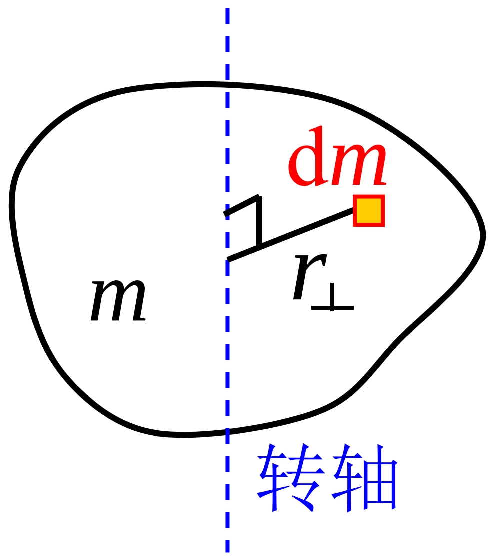
定轴情况下，可不写下标 z，记作：

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{M = J\alpha} \\ \\ \boxed{F = ma} \quad \text{牛顿第二定律} \end{array} \right.$$

§ 5.3 转动惯量的计算

质点系 $J = \sum \Delta m_i r_{i\perp}^2$

连续体 $J = \int_m r_\perp^2 \cdot \mathrm{d}\, m$



J 由质量对轴的分布决定。

1：总质量

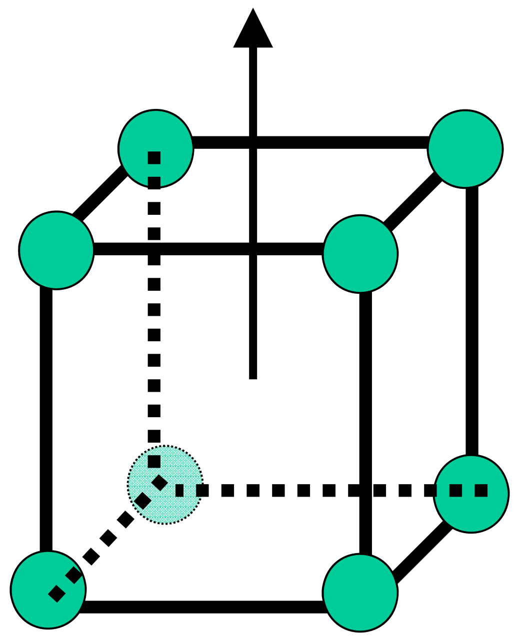
2：质量分布

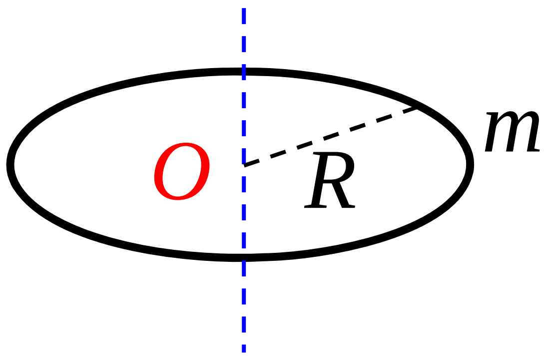
3：转轴

一. 常用的几种转动惯量表示式

质点系 $J=\sum \Delta m_i r_{i\perp}^2$

求关于z轴的转动惯量?



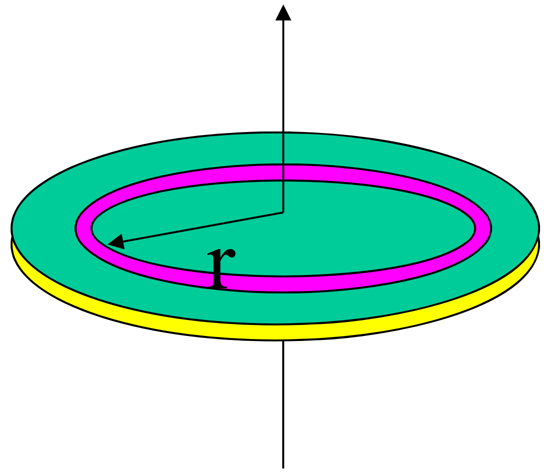


细圆环：

$$J_o = \sum \Delta m_i R^2 = R^2 \sum \Delta m_i$$

$$\boxed{J_O = mR^2}$$

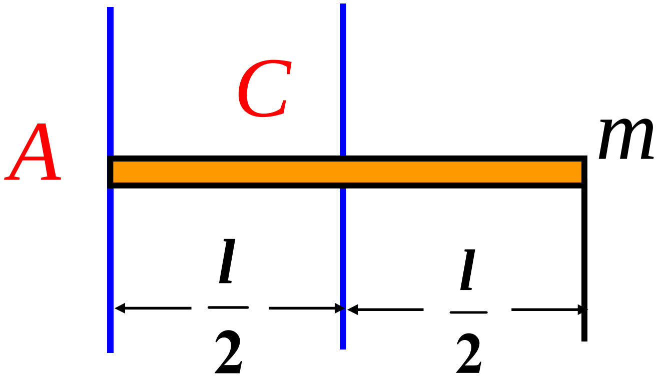
均匀圆盘：



$$J=\int r^{2}dm=\int_{0}^{R}r^{2}\sigma 2\pi rdr$$

$$=\frac{\pi\sigma R^{4}}{2}=\frac{1}{2}mR^{2}$$

$$\boxed{J_{C}=\frac{1}{2}mR^{2}}$$



$$J_C = \int x^2 dm = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx \lambda$$

$$= \frac{1}{12} ml^2$$

$$\boxed{J_C = \frac{1}{12} ml^2}$$

均匀细杆：

$$J_A = \int x^2 dm = \int_0^l x^2 dx\lambda$$

$$= \frac{\lambda l^3}{3} = \frac{1}{3} ml^2$$

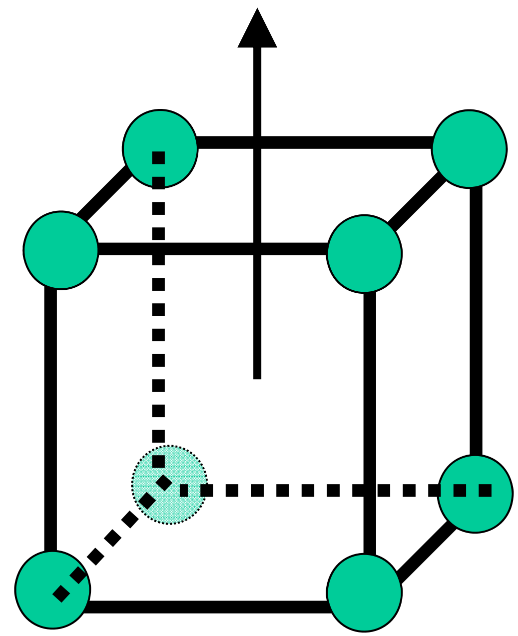
$$\boxed{J_A = \frac{1}{3} ml^2}$$

计算转动惯量的几条规律

1.对同一轴J具有可叠加性

$$\boxed{J = \sum J_i}$$

$$J = \Delta m_i r_i^2$$

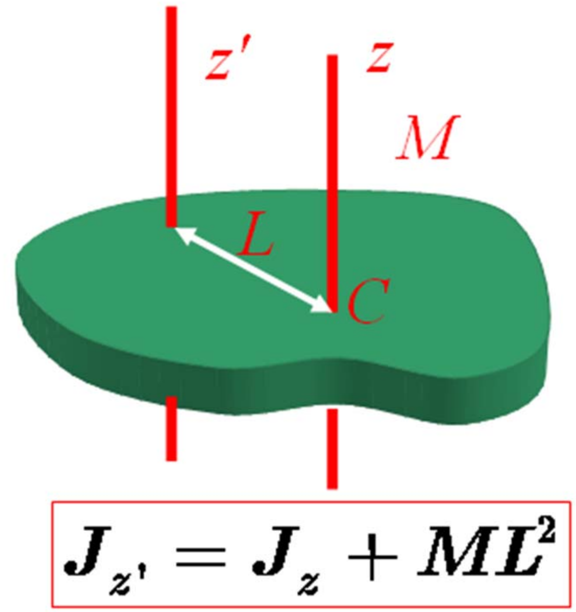


2.平行轴定理

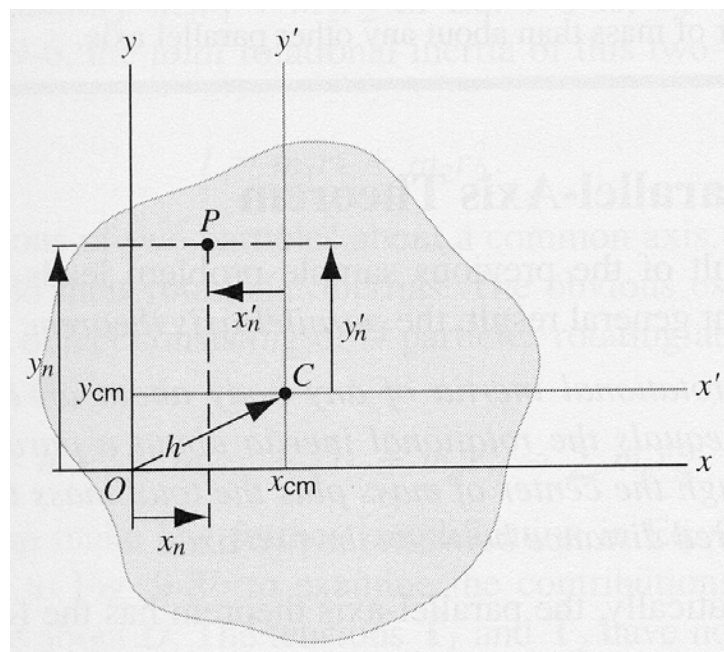
任意物体相对任意轴的转动惯量等于相对经过质心的轴的转动惯量加上总质量乘于两轴距离平方的积。

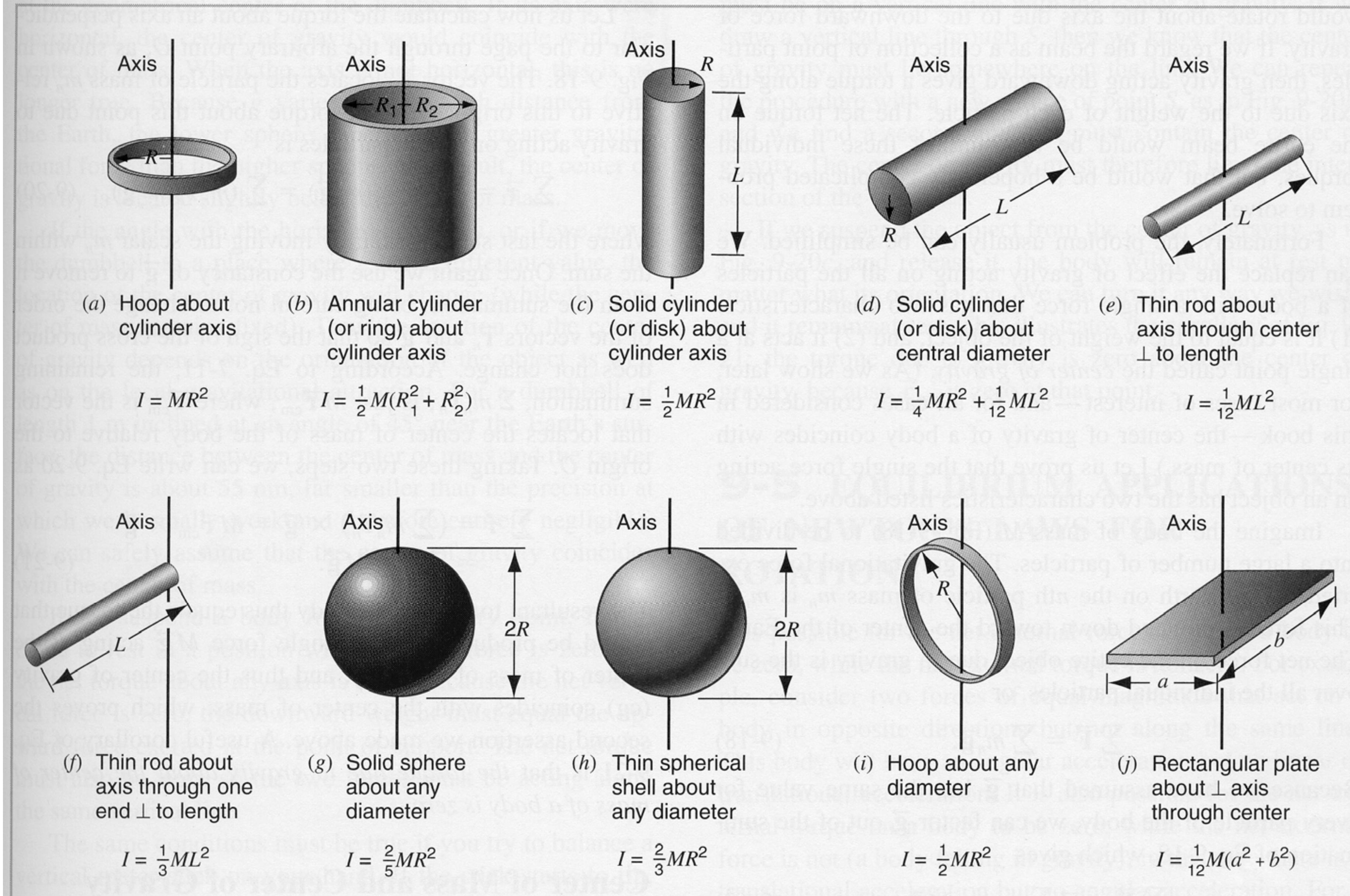
$$\boxed{J = J_C + mh^2}$$

C为刚体的质心，J_C为通过质心轴的转动惯量



平行轴定理





(*a*) Hoop about cylinder axis

$I = MR^2$

(*b*) Annular cylinder (or ring) about cylinder axis

$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$

(*c*) Solid cylinder (or disk) about cylinder axis

$I = \frac{1}{2}MR^2$

(*d*) Solid cylinder (or disk) about central diameter

$I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$

(*e*) Thin rod about axis through center ⊥ to length

$I = \frac{1}{12}ML^2$

(*f*) Thin rod about axis through one end ⊥ to length

$I = \frac{1}{3}ML^2$

(*g*) Solid sphere about any diameter

$I = \frac{2}{5}MR^2$

(*h*) Thin spherical shell about any diameter

$I = \frac{2}{3}MR^2$

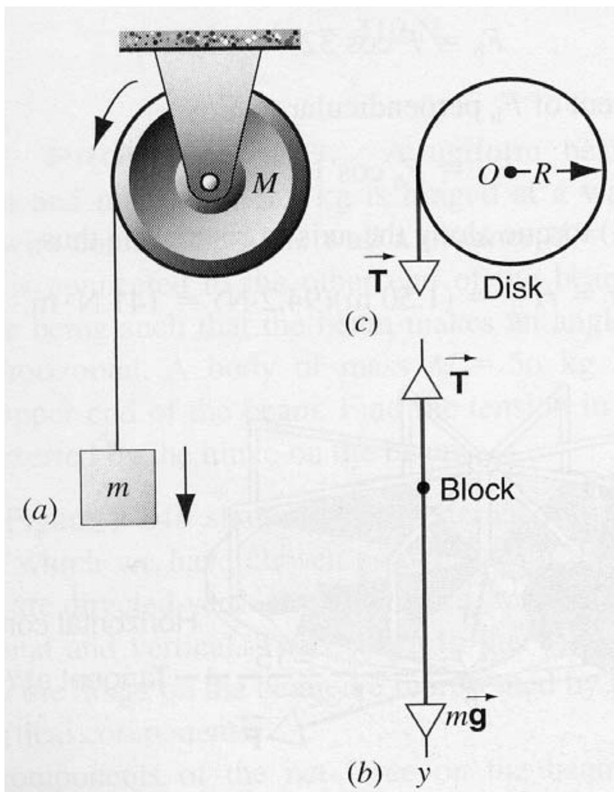
(*i*) Hoop about any diameter

$I = \frac{1}{2}MR^2$

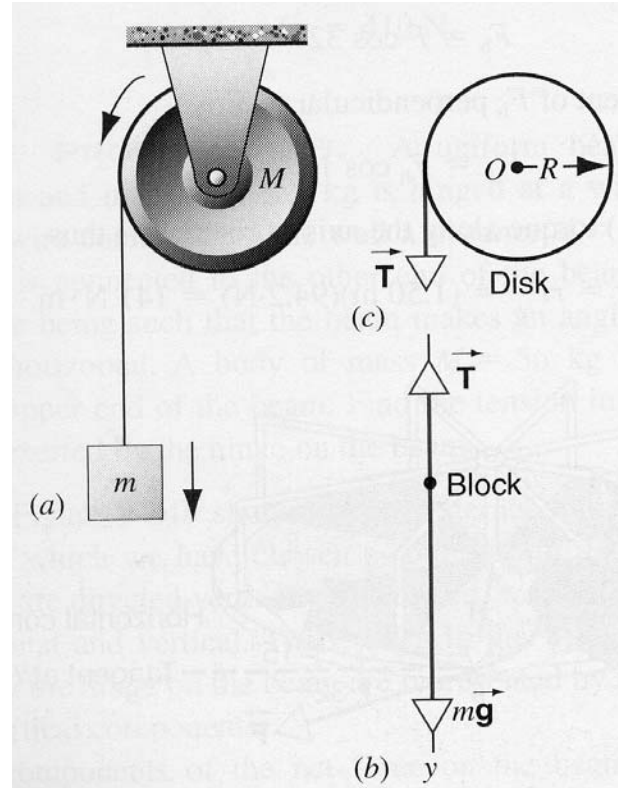
(*j*) Rectangular plate about ⊥ axis through center

$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$

例：如图，一个可被认为是质量M＝2.5kg，半径R＝20cm，质量均匀的滑轮，安放在一个水平轴上（无摩擦）。一个质量m＝1.2kg的木块，通过绕在滑轮边缘的轻绳挂着。请问木块下降的加速度，绳子的拉力，滑轮的角加速度。



$$\left.\begin{aligned} &\sum F_y = mg - T \\ &TR = I\alpha_z \\ &I = \frac{1}{2}MR^2 \\ &\alpha_z = a_T / R \end{aligned}\right\}$$



$$a = g\frac{2m}{M+2m} = 4.8m/s^2$$

$$T = mg\frac{M}{M+2m} = 6.0N$$

$$\boxed{L_z = J_z \cdot \omega}$$

$$M_{外z} = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = J_z \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{M_{外z} = J_z \alpha}$$

§ 5.4 刚体定轴转动的角动量定理和角动量守恒定律

讨论力矩对时间的积累效应。

质点系：

对轴：$$\int_{t_1}^{t_2} M_{外z}\,\mathrm{d}t = L_{2z} - L_{1z}$$

刚体：$$L_z = J_z\omega$$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} M_{外z}\,\mathrm{d}t = J_z\omega_2 - J_z\omega_1}$$

——刚体定轴转动的角动量定理

刚体定轴转动的角动量守恒定律：

$$\boxed{M_{外z}=0\text{，则 }J_z\omega=\text{const.}}\quad\begin{cases}\text{大小不变}\\\text{正、负不变}\end{cases}$$

对刚体系， $M_{外z}=0$ 时

$$\sum J_{iz}\omega_i=\text{const.}$$

此时角动量可在系统内部各刚体间传递，

而却保持刚体系对转轴的总角动量不变。

谢谢！！！