例. 验证曲线积分 $\int_\Gamma (y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz$ 与路径无关,

并求函数 $u(x,y,z)=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} (y+z)\,dx+(z+x)\,dy+(x+y)\,dz$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}=0 ,$$

① $\boxed{u_x = y+z,\quad u_y = z+x,\quad u_z = x+y}$

$\operatorname{grad} u = (y+z, z+x, x+y)$

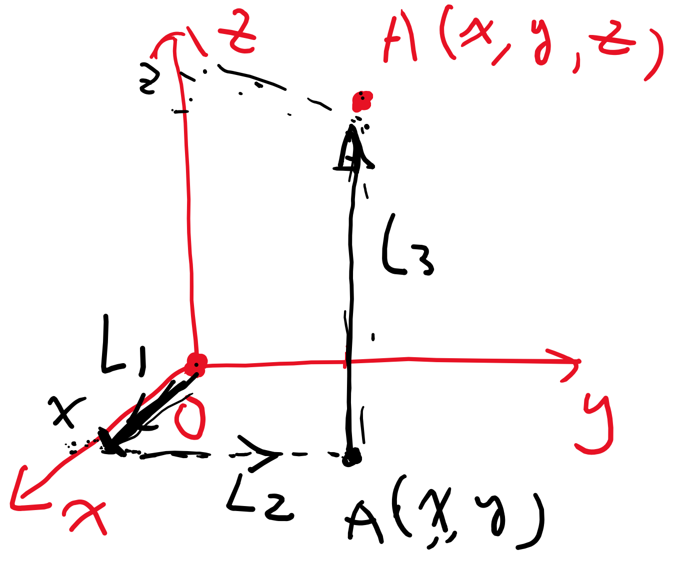
$u = (y+z)x + C(y,z)$

② L_1: $y=z=0$, $dy=dz=0$, $x: 0\to x$

L_2: $dx=dz=0$, $y: 0\to y$, $x=x$, $z=0$.

L_3: $x=x$, $y=y$, $(dx=dy=0)$, $z: 0\to z$

$$u=\int_0^x 0\,dx+\int_0^y x\,dy+\int_0^z (x+y)\,dz = xy+xz+yz$$



例. 验证曲线积分 $\int_\Gamma (y+z)\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}y+(x+y)\mathrm{d}z$ 与路径无关，

并求函数 $u(x,y,z)=\int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)}(y+z)\mathrm{d}x+(z+x)\mathrm{d}y+(x+y)\mathrm{d}z$

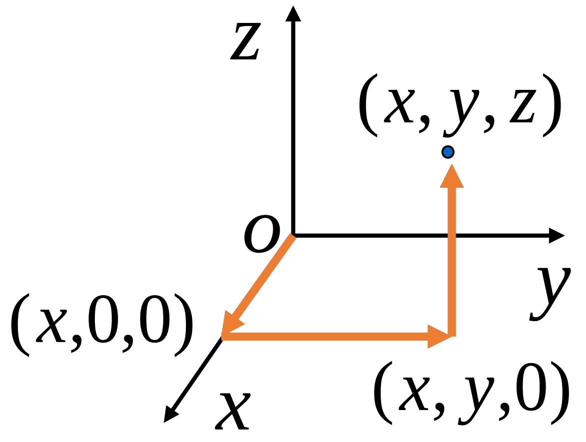
解: 令 $P=y+z\,,\ Q=z+x\,,\ R=x+y$

$$\because\quad \frac{\partial P}{\partial y}=1=\frac{\partial Q}{\partial x},\qquad \frac{\partial Q}{\partial z}=1=\frac{\partial R}{\partial y},\qquad \frac{\partial R}{\partial x}=1=\frac{\partial P}{\partial z}$$

$\therefore$ 积分与路径无关，因此

$$u(x,y,z)=\int_0^x 0\,\mathrm{d}x+\int_0^y x\,\mathrm{d}y+\int_0^z (x+y)\,\mathrm{d}z$$

$$=xy+(x+y)z=xy+yz+zx$$



第十一章 无穷级数

一、数项级数：概念和性质、柯西收敛准则

二、正项级数：收敛准则、三个判别法

三、一般项级数：绝对收敛和条件收敛、交错级数、绝对收敛级数

四、幂级数：收敛半径、幂级数运算

五、函数的幂级数展开式：泰勒级数、初等函数的幂级数展开

六、傅里叶级数：三角函数系、正交性、周期函数的傅里叶级数

第十一章　无穷级数

无穷级数
- 数项级数
- 幂级数
- 傅里叶级数

无穷级数是研究函数的工具
- 表示函数
- 研究性质
- 数值计算

第一节　数项级数的概念和性质

一、无穷级数的概念

二、级数收敛的必要条件

三、收敛级数的性质

四、柯西收敛准则

一、无穷级数的概念

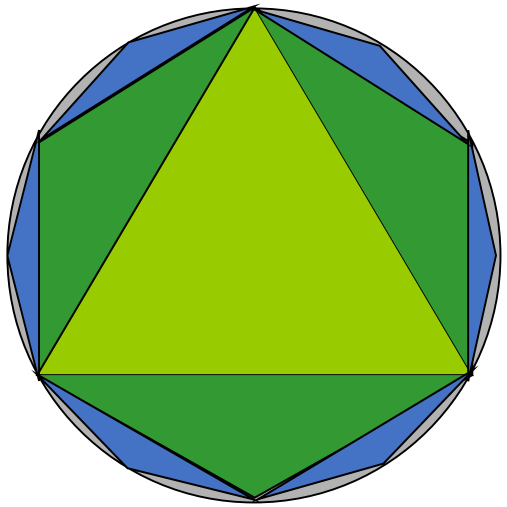
引例1. 用圆内接正多边形面积逼近圆面积.

依次作圆内接正 3×2^n $(n=0,1,2,\cdots)$边形，设 a_0 表示内接正三角形面积, a_k 表示边数增加时增加的面积, 则圆内接正

3×2^n 边形面积为 $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n$

$n\to\infty$时, 这个和逼近于圆的面积 A .

即 $A=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$



引例2. 小球从 1 米高处自由落下, 每次跳起的高度减少一半, 问小球是否会在某时刻停止运动?

解：由自由落体运动方程 $s=\frac{1}{2}g\,t^2$ 知 $t=\sqrt{\frac{2s}{g}}$

设 t_k 表示第 k 次小球落地的时间, 则小球运动的时间为

$$T=t_1+2t_2+2t_3+\cdots=\sqrt{\frac{2}{g}}\left[1+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{(\sqrt{2})^2}+\cdots\right)\right]$$

$q = 1/\sqrt{2}$

$$=\sqrt{\frac{2}{g}}\left[1+2\left(\sqrt{2}+1\right)\right]\approx 2.63(\,s\,)$$

数项级数定义：给定一个数列 $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$

将各项依次相加，简记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，

即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$ 称为**无穷级数**，

其中第 n 项 u_n 叫做级数的**一般项**，

级数的前 n 项和 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$ 称为**级数的部分和。**

关于n的函数.

$\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ 存在, ①

则称无穷级数**收敛**，并称 S 为级数的**和**, 记作 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$

若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在，则称无穷级数**发散**。

当级数收敛时, 称差值 $r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$ 为级数的**余项**。

显然 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$

$\lim\limits_{n\to\infty}(S-S_n) = S-S = 0$

例. 讨论等比级数 (又称几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a q^n = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^n + \cdots \quad (a \neq 0)$$

(q 称为公比) 的敛散性。

1) $q \neq 1$; $S_n = \sum_{n=0}^{n-1} a q^{n-1} = \dfrac{a(1-q^n)}{1-q} \to \begin{cases} \boxed{\dfrac{a}{1-q}, \quad |q|<1} \\ \infty, \quad |q|>1 \end{cases}$ $(n \to \infty)$

2) $q=1$, $\sum_{n=0}^{\infty} a q^n = \sum_{n=0}^{\infty} a$, $S_n = na \to \infty \quad (n \to \infty)$, $q=-1$时 S_n不存在.

$\therefore$ 当 $|q|<1$ 时收敛 当 $|q| \geq 1$ 时发散

例. 讨论等比级数 (又称几何级数)

$$\sum_{n=0}^{\infty} a q^n = a + a q + a q^2 + \cdots + a q^n + \cdots \quad (a \neq 0)$$

(q 称为公比) 的敛散性。

解: 1) 若 $q \neq 1$, 则部分和 $S_n = a + a q + a q^2 + \cdots + a q^{n-1} = \dfrac{a(1-q^n)}{1-q}$

当 $|q| < 1$ 时，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$ 级数收敛, 和为 $\dfrac{a}{1-q}$;

当 $|q| > 1$ 时, 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$ ， 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, 因此级数发散。

2). 若 $|q|=1$,则

当 $q=1$时, $S_n = na \to \infty$, 因此级数发散 ;

当 $q=-1$时, 级数成为 $a-a+a-a+\cdots+(-1)^{n-1}a+\cdots$

因此 $S_n = \begin{cases} a, & n\ \text{为奇数} \\ 0, & n\ \text{为偶数} \end{cases}$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在 , 因此级数发散。

综合 1)、2)可知, $|q|<1$ 时, 等比级数收敛 ;

$|q|\geq 1$ 时, 等比级数发散。

例. 判别下列级数的敛散性: (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

$$\ln\frac{n+1}{n} = \ln(n+1) - \ln n$$

$$S_n = \cancel{\ln 2} - \ln 1 + \cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 2} + \ln 4 - \cancel{\ln 3} + \cdots + \ln(n+1) - \ln n$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} ;\quad S_n = 1 - \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

例. 判别下列级数的敛散性: (1) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n+1}{n}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

解: (1)

$$S_n = \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n}$$

$$= (\cancel{\ln 2} - \ln 1) + (\cancel{\ln 3} - \cancel{\ln 2}) + \cancel{\cdots} + (\ln(n+1) - \cancel{\ln n})$$

$$= \ln(n+1) \to \infty \quad (n \to \infty)$$

所以级数 (1) 发散 ;

技巧:

利用 "拆项相消" 求和

(2) $$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$$

$$= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \to 1 \quad (n \to \infty)$$

所以级数 (2) 收敛, 其和为 1。

技巧:

利用 “拆项相消” 求和

二、级数收敛的必要条件

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} u_n = 0}$$

不能来推

u_n

$u_n = S_n - S_{n-1}$

发散

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = 0$$

~~收敛~~

$= S_1 - S_2 = 0$

$\lim_{n\to\infty} S_n$ 不存在.

∞

$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0 \ (a, \infty) \Rightarrow$ 发散.

二、级数收敛的必要条件

设收敛级数 $S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，则必有 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$

证: $u_n = S_n - S_{n-1}$ $\quad\therefore\quad \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$

可见: **若级数的一般项不趋于0，则级数必发散。**

例如, $\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}+\cdots$，其一般项为 $u_n=(-1)^{n-1}\frac{n}{n+1}$

当$n\to\infty$时，u_n不趋于0，因此这个级数发散。

注意: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 并非级数收敛的充分条件。

例如, 调和级数 $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$

虽然 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, 但此级数发散。

事实上, 假设调和级数收敛于 s, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) = 0$

但 $S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

矛盾! 所以假设不真。

例. 判断$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n}$级数的敛散性, 若收敛求其和。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^n n!}{n^n}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{e^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{e^n n!}$$

$$=\boxed{\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}}>1$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$$

$$u_{n+1}>u_n>u_{n-1}>\cdots>u_1=e$$

$$\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0 \quad \therefore 发散.$$

三、收敛级数的性质

性质1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛于 S，即 $S=\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，则各项乘以常数 c 所得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c\,u_n$ 也收敛，其和为 $c\,S$.

证: 令 $S_n=\sum_{k=1}^{n} u_k$，则 $\sigma_n=\sum_{k=1}^{n} c\,u_k=c\,S_n$，

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\sigma_n=c\lim_{n\to\infty}S_n=c\,S$$

这说明 $\sum_{n=1}^{\infty} c\,u_n$ 收敛，其和为 $c\,S$。

说明: 级数各项乘以非零常数后其敛散性不变。

性质2. 设有两个收敛级数 $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sigma=\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$

收+收 ⇒ 收

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛, 其和为 $S \pm \sigma$.

发+发 ⇒ 不定

证: 令 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n} u_k$，$\sigma_n=\sum\limits_{k=1}^{n} v_k$，则

发+收 ⇒ 发散.

$$\tau_n=\sum_{k=1}^{n}(u_k \pm v_k)=S_n \pm \sigma_n \to S \pm \sigma \quad (n\to\infty)$$

这说明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛, 其和为 $S \pm \sigma$.

说明:

(1) 性质 2 表明收敛级数可逐项相加或减。

(2) 若两级数中一个收敛一个发散, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 必发散 .

(用反证法可证)

但若二级数都发散 , $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 不一定发散。

例如, 取 $u_n = (-1)^{2n}$, $v_n = (-1)^{2n+1}$,

而 $u_n + v_n = 0$

性质3. 在级数前面加上或去掉**有限项**, 不会影响级数的敛散性。

证: 将级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的前 k 项去掉, 所得新级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_{k+n}$

的部分和为 $\sigma_n = \sum_{l=1}^{n} u_{k+l} = S_{k+n} - S_k$

由于 $n \to \infty$ 时, σ_n 与 S_{k+n} 极限状况相同, 故新旧两级数敛散性相同.

当级数收敛时, 其和的关系为 $\sigma = S - S_k$.

类似可证前面加上有限项的情况。

性质4. 收敛级数加括弧后所成的级数仍收敛于原级数的和。

证: 设收敛级数$S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, 若按某一规律加括弧, 例如

$$(u_1+u_2)+(u_3+u_4+u_5)+\cdots$$

则新级数的部分和序列 $\sigma_m\ (m=1,2,\cdots)$ 为原级数部分和序列

$S_n\ (n=1,2,\cdots)$ 的一个子序列, 因此必有 $\lim\limits_{m\to\infty}\sigma_m=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$

推论: 若加括弧后的级数发散, 则原级数必发散。

用反证法可证

注意: 收敛级数去括弧后所成的级数不一定收敛。

例如, $(1-1)+(1-1)+\cdots=0$, 但 $1-1+1-1+\cdots$ 发散。

例. 判断级数的敛散性:

$$\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)}_{u_1}+\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}\right)}_{u_2}+\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{4}-1}-\frac{1}{\sqrt{4}+1}\right)}_{u_3}+\cdots$$

$$+\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}\right)}_{u_{n-1}}+\cdots$$

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+1}=\frac{2}{n}=2\cdot\frac{1}{n}$$

$\because 2\sum_{n=1}^{n}\frac{1}{n}$ 发散

$\therefore$ 原级数发散

四、柯西收敛准则：级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists N \in Z^+$, 当 $n > N$ 时，对任意 $p \in Z^+$,

有 $\left| u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} \right| < \varepsilon$

证: 设所给级数部分和数列为 $S_n (n = 1, 2, \cdots)$,

因为 $\left| u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} \right| = \left| S_{n+p} - S_n \right|$

所以, 利用数列 $S_n (n = 1, 2, \cdots)$ 的柯西收敛准则

即得本定理的结论。

例. 利用柯西收敛准则判别级数 $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}}$ 的敛散性.

解: 对任意 $p \in Z^+$, 有

$$\underline{\left|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\right|} = \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}$$

$$< \frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\cancel{\frac{1}{n+1}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{n+1}}-\cancel{\frac{1}{n+2}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n+p-1}}-\frac{1}{n+p}\right)$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}, \text{ 取 } N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$$

$\therefore \forall \varepsilon > 0$, 取 $N \geq [\frac{1}{\varepsilon}]$, 当 $n > N$ 时，对任意 $p \in Z^{+}$,

都有 $\left| u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p} \right| < \frac{1}{n} < \varepsilon$

由柯西收敛准则可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛.