答案

例2. 设$M(x,y,z)$是曲面上任一点，根据题意有

$\frac{|MO|}{|MM_0|}=\frac{1}{2}$,即$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2}}=\frac{1}{2}$，所求方程为

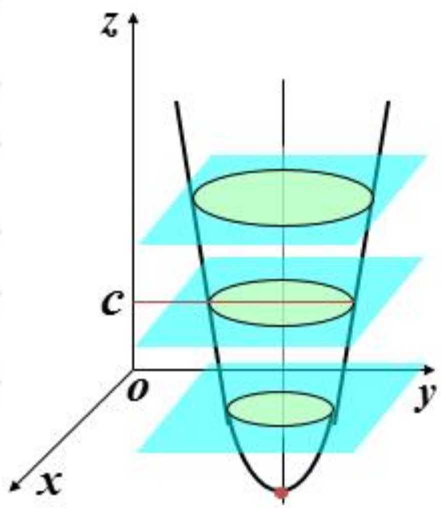
$(x+\frac{2}{3})^2+(y+1)^2+(z+\frac{4}{3})^2=\frac{116}{9}$.

例3. 设$M(x,y,z)$是所求平面上任一点，根据题意有$|MA|=|MB|$,即$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}$,整理得

$$2x-6y+2z-7=0.$$

答案

例4. 根据题意有$z \geq -1$,用平面z=c去截图形得圆：$(x-1)^2+(y-2)^2=1+c \ (c \geq -1)$,当平面z=c上下移动时，得到一系列圆，圆心在(1,2,c),半径为$\sqrt{1+c}$,半径随着c的增大而增大，圆形上不封顶，下封底。



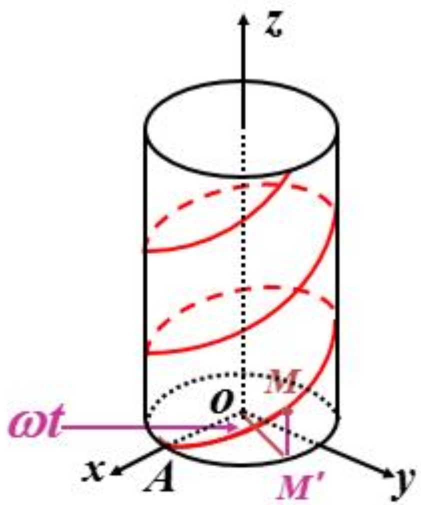
空间曲线在坐标面上的投影

例6. 解 $x^2+y^2=1$表示圆柱面，$2x+3y+3z=6$表示平面，

$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3y+3z=6 \end{cases}$交线为椭圆。

例7.解 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 表示上半球面，$(x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}$表示圆柱面，交线如例题图。

例8. 取时间t为参数，动点从A点出发，经过t时间，运动到M点，M在xOy面的投影$M'(x,y,0)$



$$x=a\cos\omega t$$
$$y=a\sin\omega t$$
$$z=vt$$

答案

螺旋线的参数方程还可以写为

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta\,(\theta = \omega t, b = \dfrac{v}{\omega}) \\ z = b\,\theta \end{cases}$$

螺旋线的重要性质：上升的高度与转过的角度成正比，即θ: $\theta_0 \to \theta_0 + \alpha$, $z: b\theta_0 \to b\theta_0 + b\alpha$

$\alpha = 2\pi$,上升的高度 $h = 2b\pi$

例9. (1)方程组消去z后得$x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$,在xOy上的投影为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{3}{4} \\ z = 0 \end{cases}$$

答案

(2)因为曲线在平面$z=\frac{1}{2}$上，所以在xOz面上的投影为线段

$$\begin{cases} z=\dfrac{1}{2}, \\ y=0 \end{cases} \qquad |x| \le \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(3)同理，在yOz面上的投影也为线段

$$\begin{cases} z=\dfrac{1}{2}, \\ x=0 \end{cases} \qquad |y| \le \frac{\sqrt{3}}{2}$$

答案

例10. 截线方程为

$$\begin{cases} y^2+z^2=x \\ x+2y-z=0 \end{cases}$$

(1) 消去z得投影$\begin{cases} x^2+5y^2+4xy-x=0 \\ z=0 \end{cases}$

(2) 消去y得投影$\begin{cases} x^2+5z^2-2xz-4x=0 \\ y=0 \end{cases}$

(3) 消去x得投影$\begin{cases} y^2+z^2+2y-z=0 \\ x=0 \end{cases}$