第三节 三重积分

一、三重积分的概念

二、三重积分的计算

定义. 设 $f(x,y,z)$, $(x,y,z)\in\Omega$, 若对 Ω 作**任意分割**: $\Delta v_k\ (k=1,2,\cdots,n)$,**任意取点** $(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\in\Delta v_k$,下列"乘积和式" 极限

$$\lim_{\|\Delta V\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k \overset{\text{记作}}{=\!=\!=} \iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v$$

存在, 则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在Ω上的**三重积分**.

$\mathrm{d}v$称为**体积元素**, 在直角坐标系下常写作 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

性质: 三重积分的性质与二重积分相似. 例如

中值定理. 设 $f(x,y,z)$在有界闭域 Ω 上连续, V 为Ω 的体积, 则存在 $(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega$, 使得

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = f(\xi,\eta,\zeta)V$$

二、三重积分的计算

1. 利用直角坐标计算三重积分

先假设连续函数 $f(x,y,z)\geq 0$, 并将它看作某物体的密度函数，通过计算该物体的质量引出下列各计算方法:

方法1．投影法 (“先一后二”)

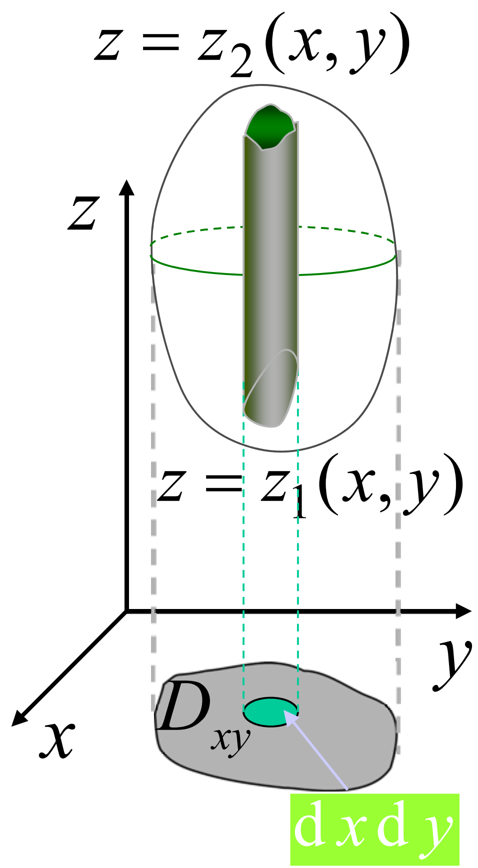
方法2．截面法 (“先二后一”)

方法3．三次积分法

最后, 推广到一般可积函数的积分计算.

方法1. 投影法 (“先一后二”)

$$\Omega:\begin{cases} z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y) \\ (x,y)\in D_{xy}\end{cases}$$



细长柱体微元的质量为

$$\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

该物体的质量为

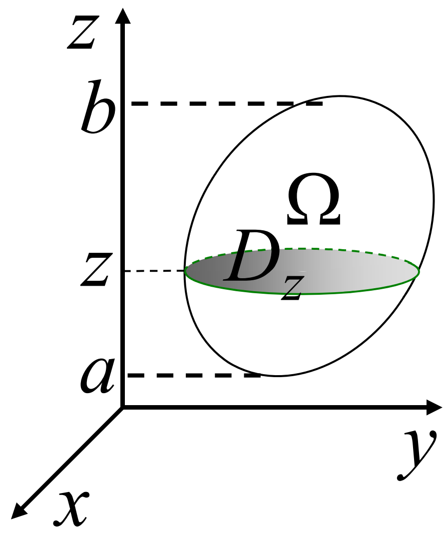
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$

$$=\iint_{D_{xy}}\left(\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\underline{\underline{\text{记作}}}\ \iint_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

方法2. 截面法 ("先二后一")

$$\Omega:\begin{cases}(x,y)\in D_z\\ a\le z\le b\end{cases}$$



以D_z为底, d z 为高的柱形薄片质量为

$$\left(\iint_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$$

该物体的质量为

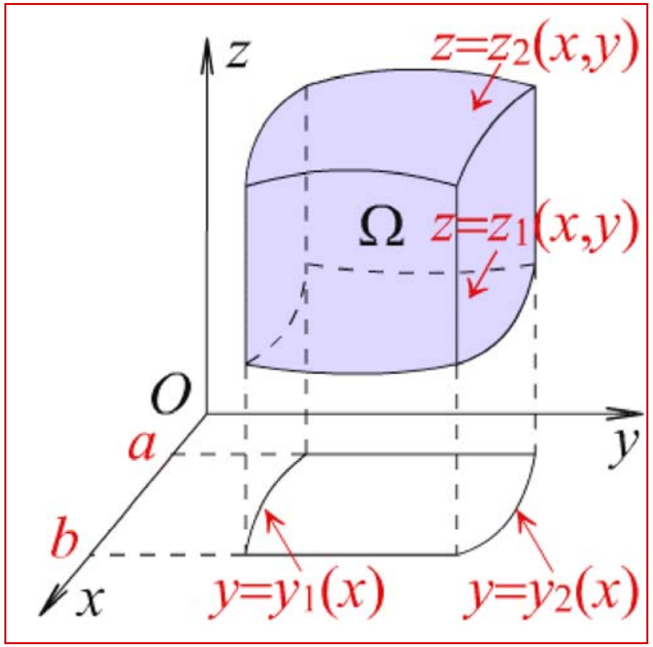
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$

$$=\int_a^b\left(\iint_{D_Z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}z$$

$$\underline{\underline{\text{记作}}}\int_a^b \mathrm{d}z\iint_{D_Z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

方法3. 三次积分法

- xy型区域
- yz型区域
- zx型区域



xy型区域:

$$\Omega=\left\{z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),y_1(x)\le y\le y_2(x),a\le x\le b\right\}$$

设区域 $\Omega:\begin{cases} z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y) \\ (x,y)\in D_{xy}:\begin{cases} y_1(x)\le y\le y_2(x) \\ a\le x\le b \end{cases} \end{cases}$

利用投影法结果，把二重积分化成二次积分即得:

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$$

$$=\int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

投影法

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

小结: 三重积分的计算方法

方法1. “先一后二”

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \iint_{D} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

方法2. “先二后一”

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \int_{a}^{b} \mathrm{d}z \iint_{D_Z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

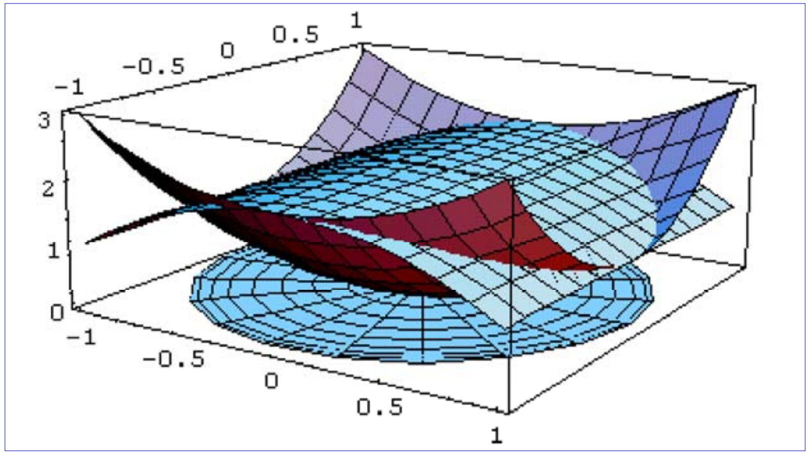
方法3. “三次积分”

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \int_{a}^{b} \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

三种方法(包含12种形式)各有特点, 具体计算时应根据被积函数及积分域的特点灵活选择.

例 1 化三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$ 为三次积分，其中积分区域Ω为由曲面 $z=x^2+2y^2$ 及$z=2-x^2$所围成的闭区域.

解 由$\begin{cases} z=x^2+2y^2 \\ z=2-x^2 \end{cases}$，



得交线投影区域

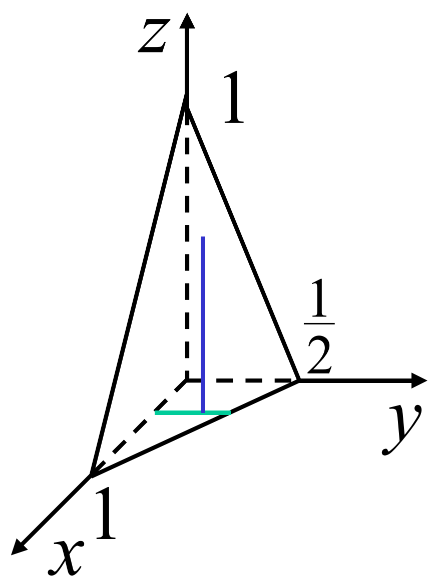
$$x^2+y^2\le 1,$$

故 Ω： $\begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}, \\ x^2+2y^2 \le z \le 2-x^2 \end{cases}$

$$\therefore I = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+2y^2}^{2-x^2} f(x,y,z)dz.$$

例2. 计算三重积分 $\iiint_\Omega x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中$\Omega$ 为三个坐标面及平面 $x+2y+z=1$ 所围成的闭区域 .

解: $\Omega:\begin{cases} 0\le z\le 1-x-2y \\ 0\le y\le \frac{1}{2}(1-x) \\ 0\le x\le 1 \end{cases}$



$$\therefore \iiint_\Omega x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(1-x)}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-2y}\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^1 x\,\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{2}(1-x)}(1-x-2y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^1(x-2x^2+x^3)\mathrm{d}x=\frac{1}{48}$$

例3. 计算$\iiint\limits_{\Omega} y\,dxdydz$,其中$\Omega$是由球面$x^2+y^2+z^2=1$

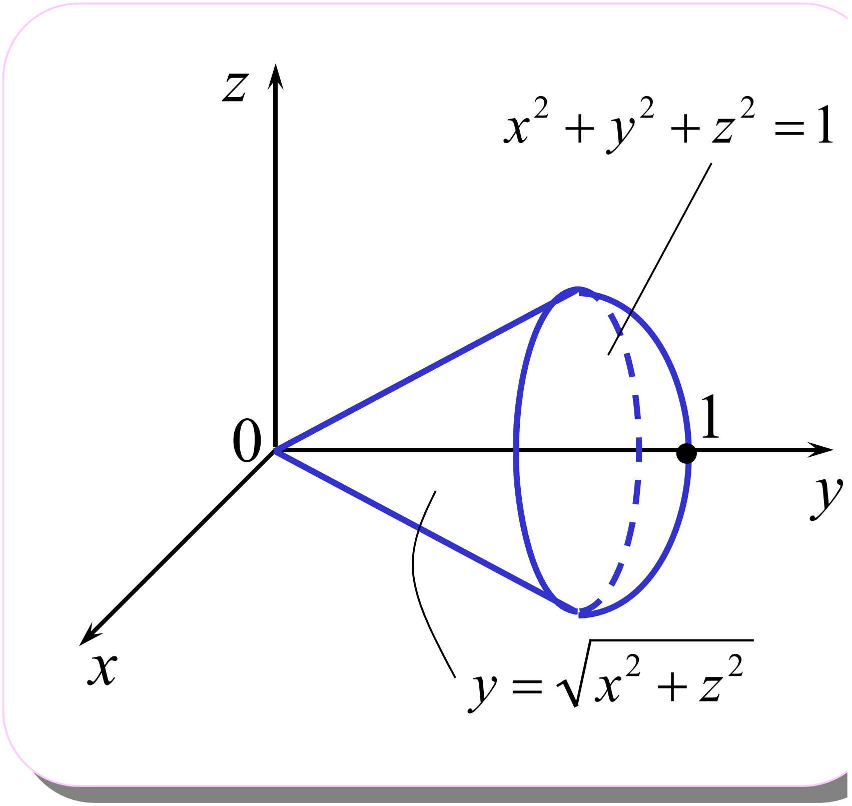
与锥面$y=\sqrt{x^2+z^2}$所围成的区域.

解: $\iiint\limits_{\Omega} y\,dxdydz=\iint\limits_{D_{xz}} dxdz\int_{\sqrt{x^2+z^2}}^{\sqrt{1-x^2-z^2}} y\,dy$

$$=\iint\limits_{D_{xz}}\left[\frac{1}{2}-(x^2+z^2)\right]dxdz$$

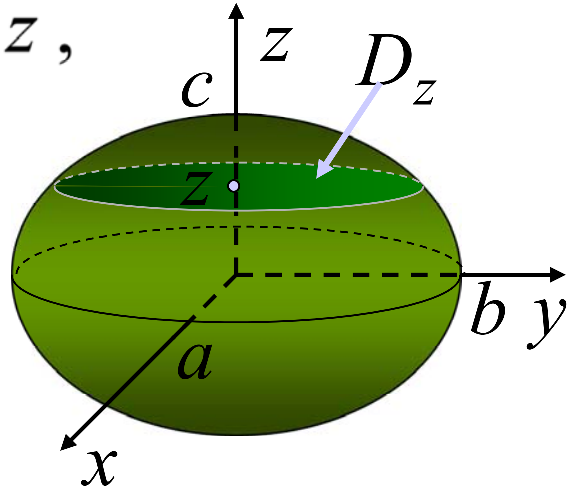
(令$x=r\cos\theta, z=r\sin\theta$)

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{1}{2}-r^2\right)\cdot r\,dr$$



例4. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，

其中$\Omega: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1.$



解: $\Omega: \begin{cases} -c \le z \le c \\ D_z: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1-\dfrac{z^2}{c^2} \end{cases}$

用"先二后一"

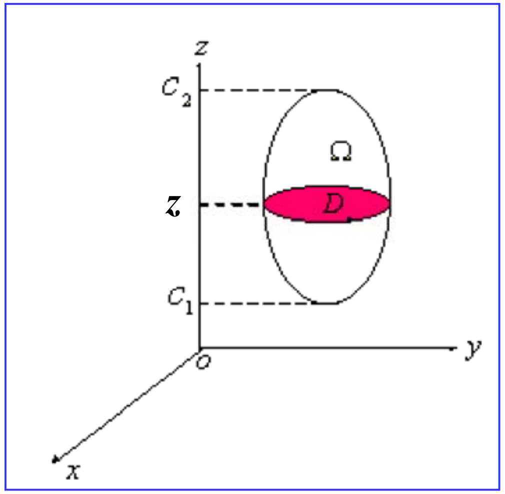
$$\therefore \quad \iiint_{\Omega} z^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{-c}^{c} z^2 \,\mathrm{d}z \iint_{D_z} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_0^c z^2 \pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z = \frac{4}{15}\pi abc^3$$

截面法的一般步骤：

(1) 把积分区域 Ω 向某轴（例如 z 轴）投影，得投影区间 $[c_1, c_2]$；

(2) 对 $z \in [c_1, c_2]$ 用过 z 轴且平行 xoy 平面的平面去截 Ω，得截面 D_z；



(3) 计算二重积分 $\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)dxdy$

其结果为 z 的函数 $F(z)$；

(4) 最后计算单积分 $\int_{c_1}^{c_2} F(z)dz$ 即得三重积分值.

关于利用对称性积分. 设有界闭区域Ω的形状关于xy面对称，且$f(x,y,-z)=-f(x,y,z)$,

则$\displaystyle\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=0.$ 若$f(x,y,-z)=f(x,y,z)$,

则$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dv=2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)dv,$$

其中 Ω_1是Ω中处于xy面上方部分.

类似可得Ω关于xz面对称, 而$f(x, y, z)$关于y是奇, 偶函数的结论, 以及Ω关于yz面对称, 而$f(x, y, z)$关于x是奇, 偶函数的结论.

问不积分， 求$\iiint\limits_{\Omega} z^3 dv, \iiint\limits_{\Omega} x dv, \iiint\limits_{\Omega} \sin y dv.$

其中Ω为单位球$x^2+y^2+z^2 \le 1.$

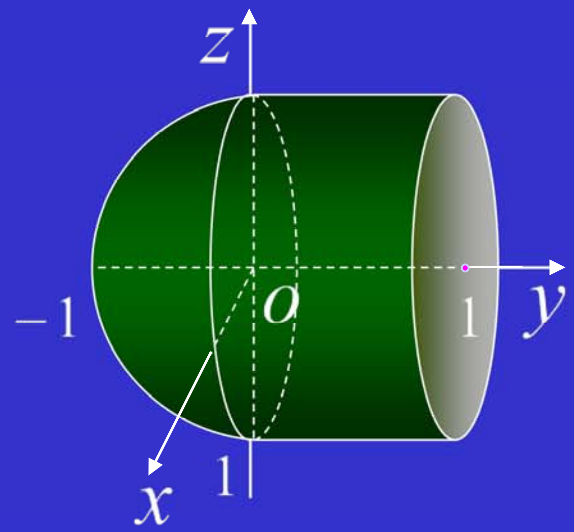
例5. 计算 $I=\iiint_\Omega y\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，其中 Ω 由

$y=-\sqrt{1-x^2-z^2}\,,\ x^2+z^2=1\,,\ y=1$ 所围成.

分析： 若用"先二后一"，则有

$$I=\int_{-1}^{0} y\,\mathrm{d}y\iint_{D_y}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$

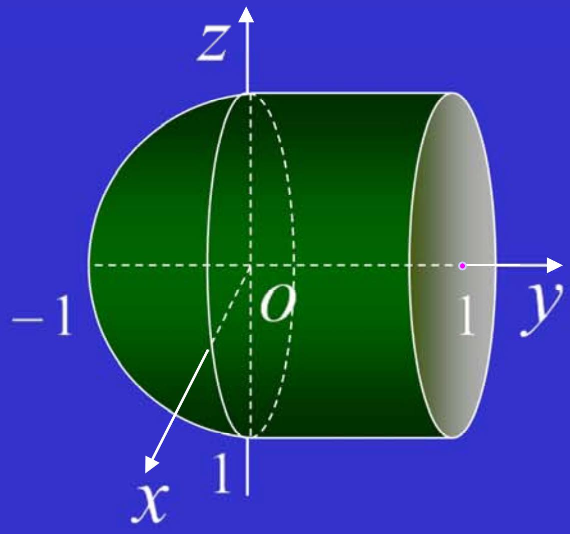
$$+\int_{0}^{1} y\,\mathrm{d}y\iint_{D_y}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$$



计算较繁！采用"三次积分"较好.

解: Ω由$y=-\sqrt{1-x^2-z}$, $x^2+z^2=1$, $y=1$ 所围, 故可表为

$$\Omega:\begin{cases}-\sqrt{1-x^2-z^2}\le y\le 1\\ -\sqrt{1-x^2}\le z\le\sqrt{1-x^2}\\ -1\le x\le 1\end{cases}$$

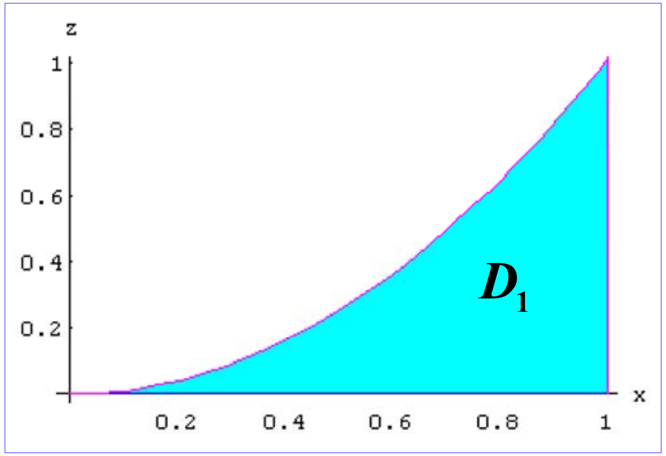


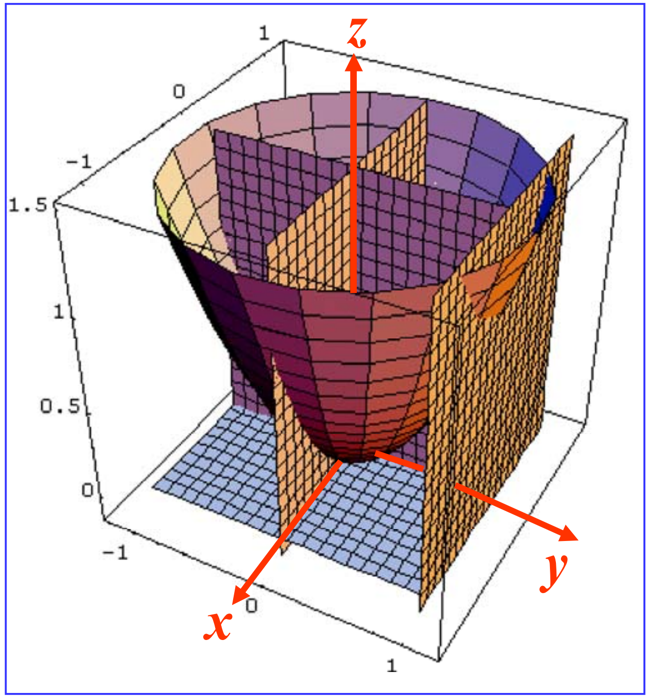
$$I=\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{1-x^2-z^2}}^{1}y\,\mathrm{d}y$$

$$=\cdots=\frac{28}{45}$$

思考题： 将$\int_0^1 dx\int_0^1 dy\int_0^{x^2+y^2} f(x,y,z)dz$按$y,z,x$的次序积分.

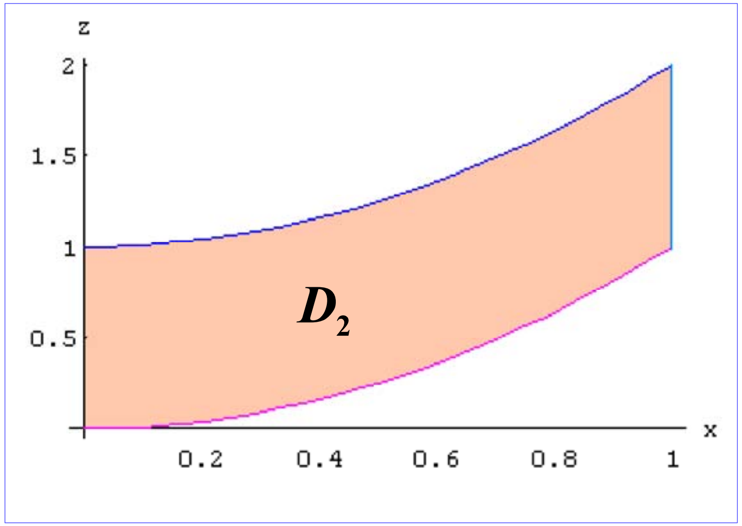
解





$$D_1:\begin{cases}0\le z\le x^2\\ 0\le y\le 1\end{cases}$$

$$D_2:\begin{cases} x^2 \le z \le x^2+1 \\ \sqrt{z-x^2} \le y \le 1 \end{cases}$$



$$原式=\int_0^1 dx\int_0^{x^2} dz\int_0^1 f(x,y,z)dy+$$

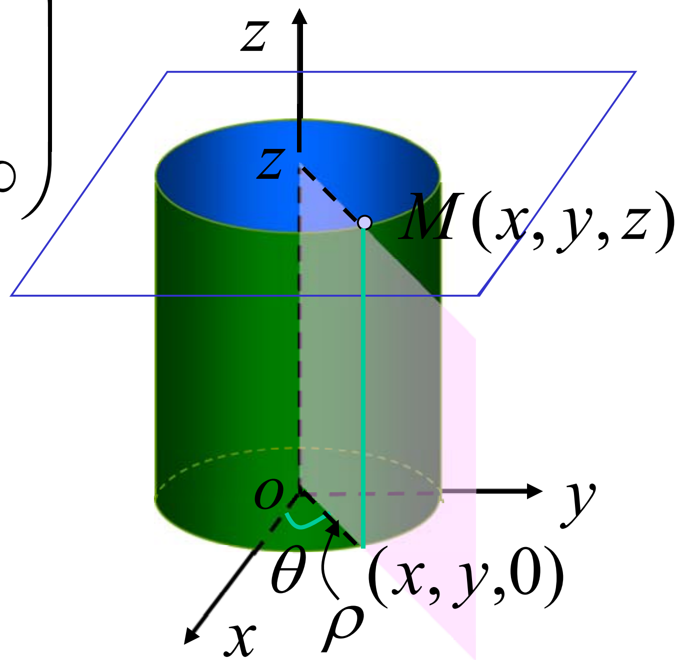
$$\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x^2+1} dz\int_{\sqrt{z-x^2}}^1 f(x,y,z)dy.$$

2. 利用柱坐标计算三重积分

设 $M(x,y,z)\in \mathrm{R}^3$,将x,y用极坐标ρ,θ代替,则(ρ,θ,z)

就称为点M 的柱坐标. 直角坐标与柱面坐标的关系:

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0\le\rho<+\infty \\ 0\le\theta\le 2\pi \\ -\infty<z<+\infty \end{pmatrix}$$



坐标面分别为

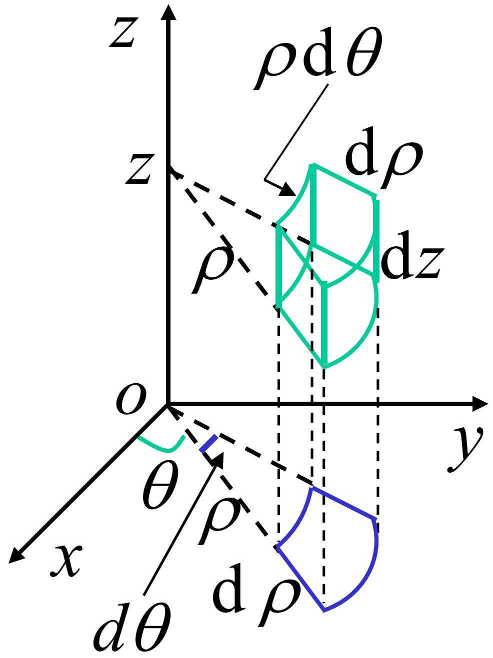
$\rho =$ 常数 ⟶ 圆柱面

$\theta =$ 常数 ⟶ 半平面

$z =$ 常数 ⟶ 平面

如图所示, 在柱面坐标系中体积元素为

$$\mathrm{d}v = \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z$$



因此
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= \iiint_{\Omega} F(\rho,\theta,z)\rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z$$

其中 $F(\rho,\theta,z) = f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta,\ z)$

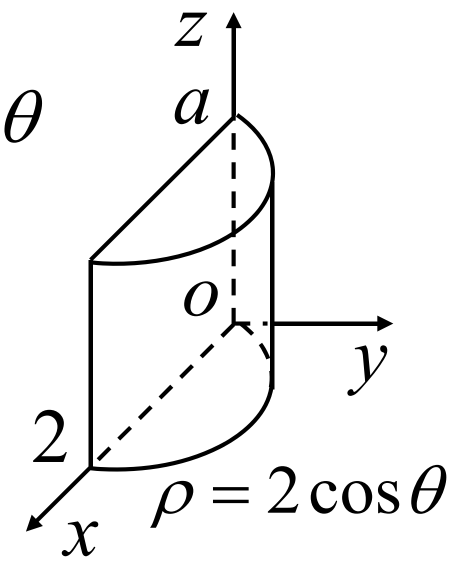
适用范围:

1) **积分域**表面用柱面坐标表示时**方程简单**;

2) **被积函数**用柱面坐标表示时**变量互相分离**.

例6. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 其中Ω为由柱面 $x^2+y^2=2x$ 及平面 $z=0,\ z=a\ (a>0),\ y=0$ 所围成半圆柱体.

解: 在柱面坐标系下 $\Omega:\begin{cases} 0\le z\le a \\ 0\le \rho \le 2\cos\theta \\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2} \end{cases}$



$$\text{原式}=\iiint_{\Omega} z\,\rho^2\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\,\mathrm{d}\rho\int_0^{a} z\mathrm{d}z$$

$$=\frac{4a^2}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{8}{9}a^3$$

$$\boxed{\mathrm{d}v=\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z}$$