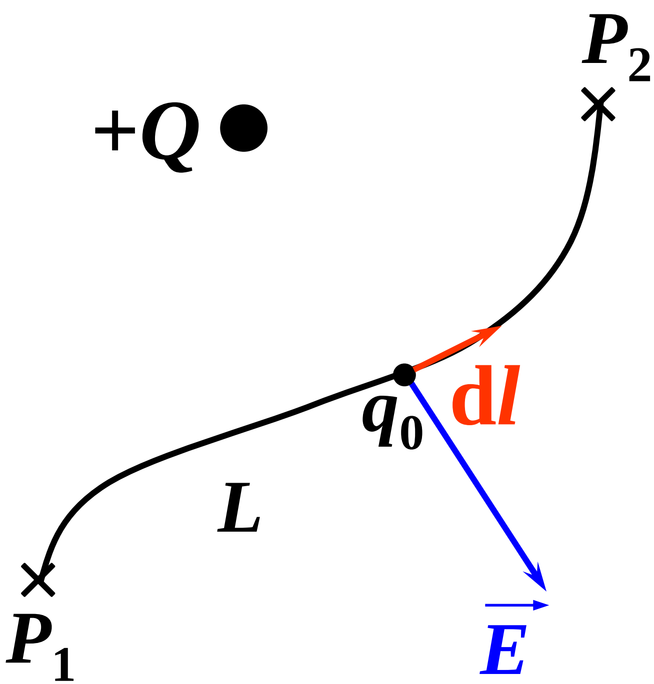
二、静电场的物理描述——电势

（一）静电力作功的特点



移动 实验点电荷q_0，电场力作功：

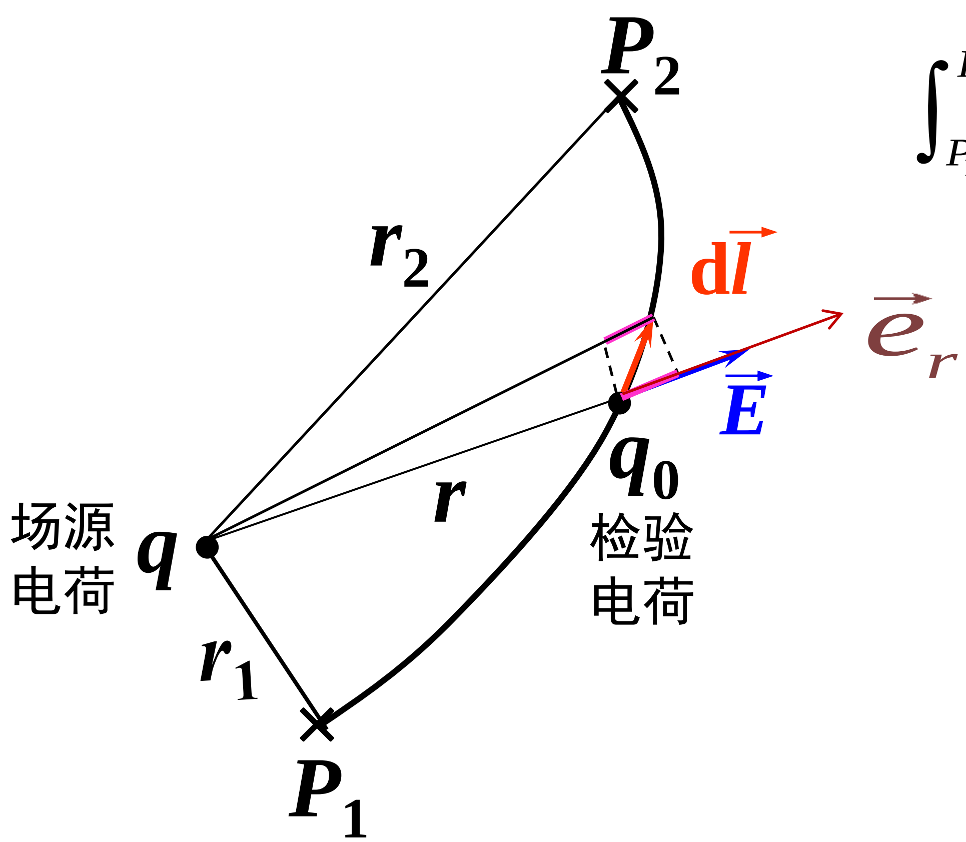
$$\boxed{A_{12}} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{P_1}^{P_2} q_0 \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= q_0 \boxed{\int_{P_1}^{P_2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

要搞清静电力作功的规律，就要研究 $\int_{L\,P_1}^{P_2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 的特点。

(1) 点电荷：$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \bullet d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$

$\int_{P_1 \atop L}^{P_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$：只与$P_1$、$P_2$位置有关，而与路径$L$无关。



$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{P_1}^{P_2} \frac{q\vec{e}_r \cdot \mathrm{d}\vec{l}}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

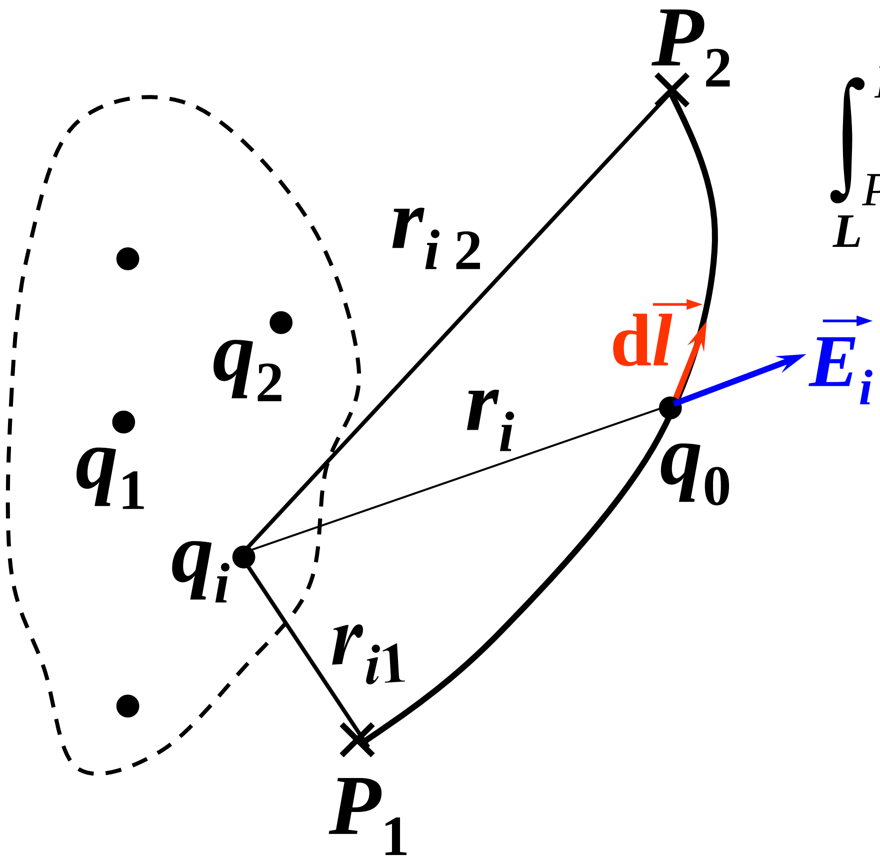
$$= \int_{P_1}^{P_2} \frac{q dr}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})$$

$$\vec{e}_r \bullet \mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}r$$

(2) 点电荷系:

$\int_{P_1\,(L)}^{P_2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$：只与$P_1$、$P_2$位置有关，而与路径$L$无关。



$$\int_{P_1\,(L)}^{P_2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{P_1\,(L)}^{P_2} (\sum_i \vec{E}_i)\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \sum_i \int_{P_1\,(L)}^{P_2} \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_{i1}} - \frac{1}{r_{i2}}\right)$$

（3）任意电荷系： $\int_{\substack{P_1 \\ L}}^{P_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 也与L无关。

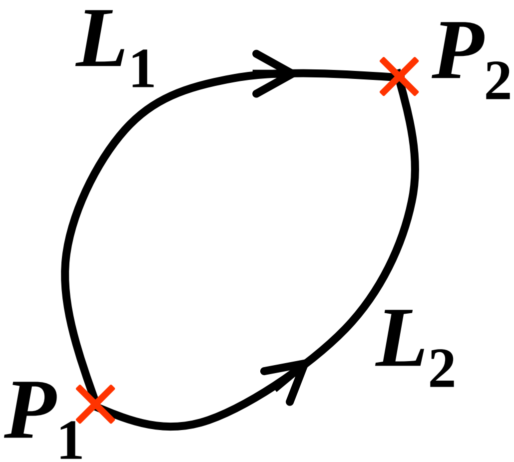
对任何静电场，$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 只取决于起点和终点的位置而与起点和终点间的路径无关。

-----------静电场的保守性

$$\begin{cases} \text{重力做功} \quad \text{-----重力势能} \\ \\ \text{静电场力做功} \quad \text{-----静电势能 (电势)} \end{cases}$$

（二）环路定理

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$



— 静电场的环路定理

$$\int_{P_1 (L_1)}^{P_2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{P_1 (L_2)}^{P_2} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_{P_2 (L_2)}^{P_1} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 称为静电场的“环流”。

静电场的环路定理表明静电场是保守场。

（三）. 电势的定义

1、电势差

由$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$与路径无关，可引入电势差的概念。

定义P_1对P_2的电势差：

$$\boxed{\varphi_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$

φ_{12}等于单位正电荷从P_1移动P_2电场力作的功。

（三）. 电势的定义

2. 电势

设P_0为电势参考点，即$\varphi_0 = 0$，则任一点

P_1处电势为:

$$\varphi_1 = \varphi_{10} = \int_{P_1}^{P_0} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{P_1}^{P_0} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} - \int_{P_2}^{P_0} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \varphi_{12}$$

这说明 P_0点的不同选择，不影响电势差。

P_0选择有任意性，习惯上如下选取电势零点。

理论中：对有限电荷分布，选 $\varphi_\infty = 0$ 。

对无限大电荷分布，选有限区域中的某适当点为电势零点。

实际中：选大地或机壳、公共线为电势零点。

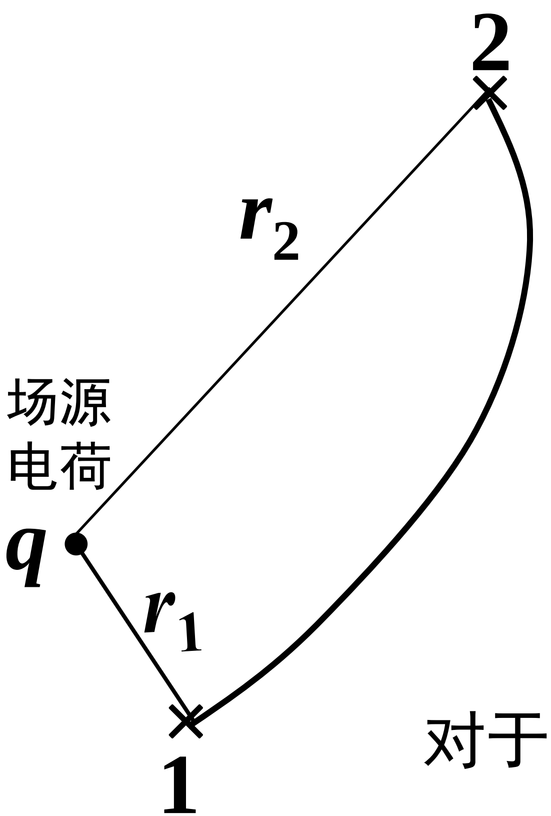
利用电势定义可以求：

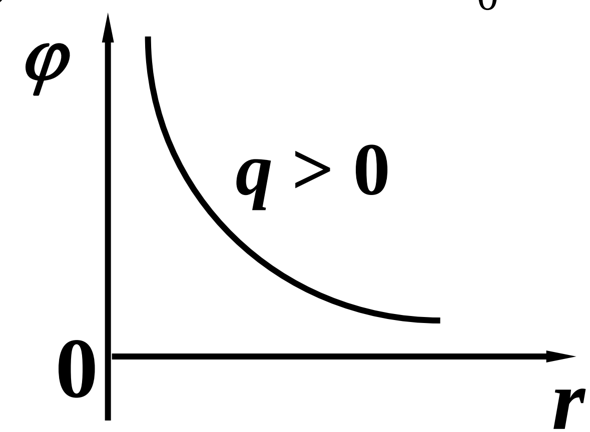
例1：点电荷的电势

取无穷远处为电势零点 $\varphi_{\infty}=0$

距离点电荷r处的电势

$$\varphi=\int_{(r)}^{(\infty)}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}$$





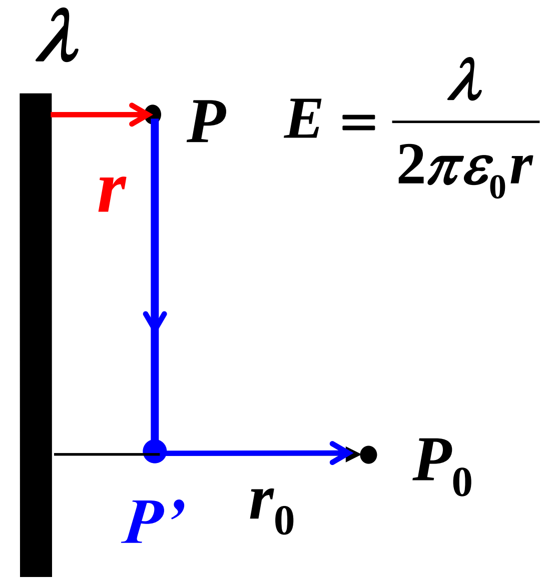
对于点电荷，1和2两点的电势差

$$U_{12}=\varphi_1-\varphi_2=\int_1^2\vec{E}\bullet d\vec{l}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

例2：无限长均匀带电直线的电势

取距离棒垂直距离是r_0处为电势零点 $\varphi_{r_0}=0$

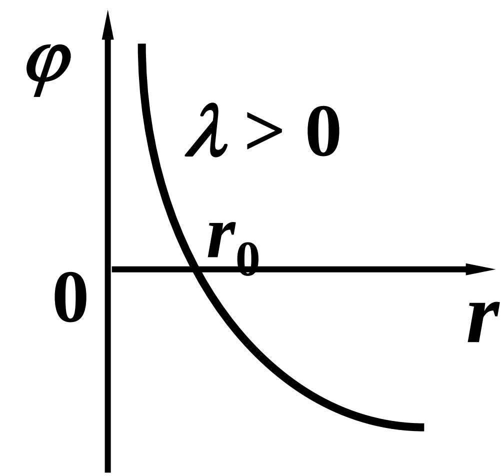
距离棒垂直距离是r处电势



$$\phi_r=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_0}{r}$$

$$\varphi_r-\varphi_{r_0}=\int_P^{P_0}\vec{E}\bullet d\vec{r}=\int_P^{P'}\vec{E}\bullet d\vec{r}+\int_{P'}^{P_0}\vec{E}\bullet d\vec{r}$$

$$=0+\int_r^{r_0}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}dr=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}(\ln r_0-\ln r)$$



3、电势叠加原理

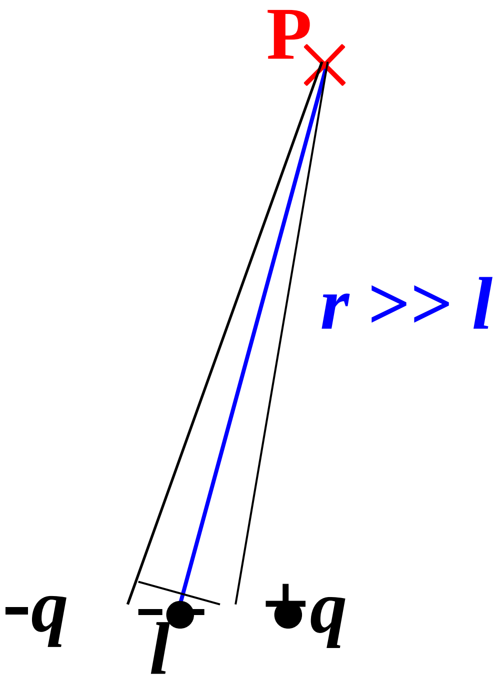
由 $\varphi=\int_{P}^{P_0}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$ 及 $\vec{E}=\sum\limits_i \vec{E}_i$ ，得：

$$\varphi=\int_{P}^{P_0}\left(\sum_i \vec{E}_i\right)\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\sum_i\int_{P}^{P_0}\vec{E}_i\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\sum_i\varphi_i$$

注：**电势零点P_0必须是共同的。**

- 对点电荷系：$\varphi=\sum\dfrac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}$， $\varphi_\infty=0$
- 对连续电荷分布：$\varphi=\int_q\dfrac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$， $\varphi_\infty=0$

例3: 电偶极子的电势分布



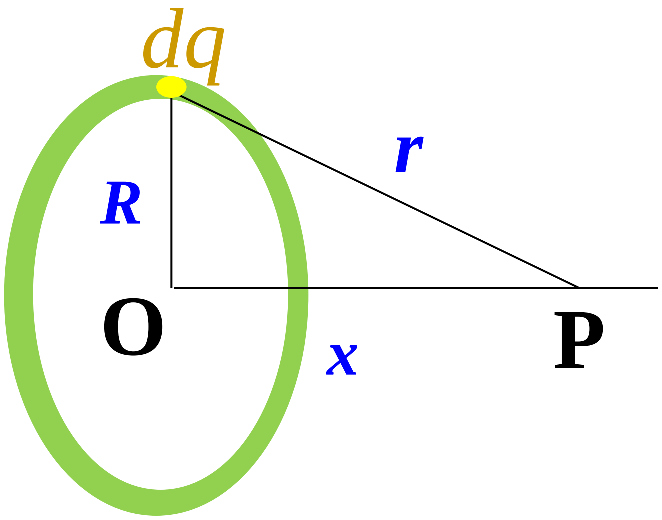
$$\varphi = \sum \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}, \quad \varphi_\infty = 0$$

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_+} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r_-}$$

$$r_+ r_- = r^2; r_- - r_+ = l\cos\theta$$

$$\varphi = \frac{ql\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \bullet \vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

例4: 均匀带电圆环(R,q), 求轴线上电势.



取无穷远处为电势零点$\varphi_\infty = 0$

均匀带电圆环，轴线上距离圆心x处的电势

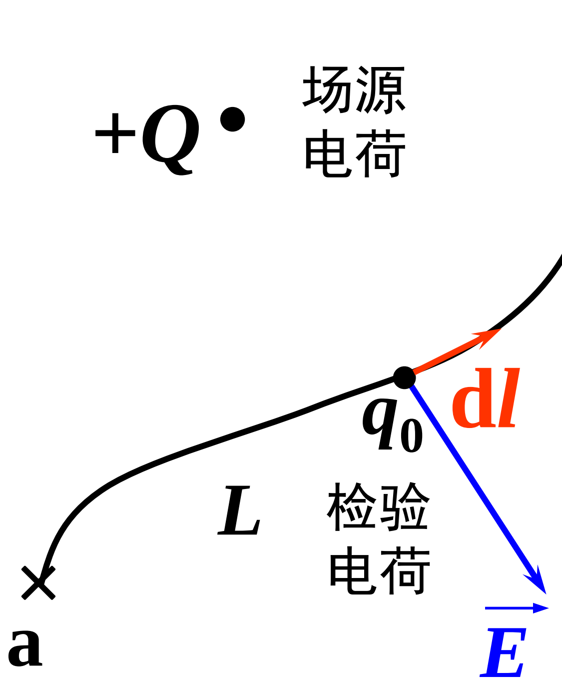
$$\varphi = \int_q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\varphi = \int_q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r}\int \mathrm{d}q = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+x^2}}$$

当x=0时 $\varphi = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

（四）静电力做功

在点电荷Q的电场中，移动 实验点电荷q_o， 电场力作功：

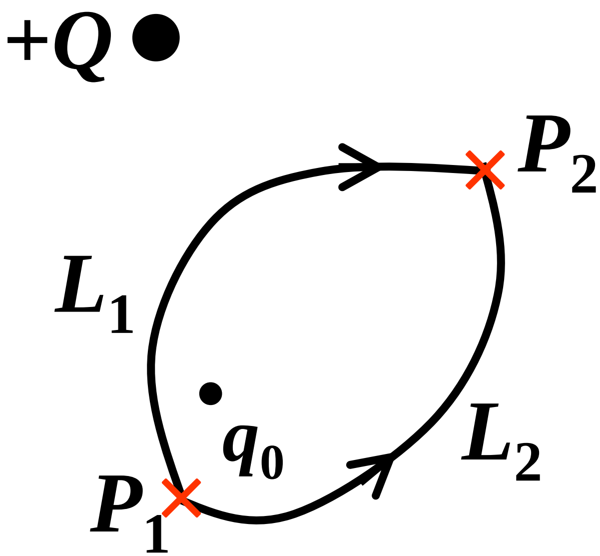


$$A_{ab}=\int_a^b \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_a^b q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=q_0\left(\varphi_a-\varphi_b\right)$$

$$=q_0\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_a}-\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_b}\right)$$

（四）静电力做功

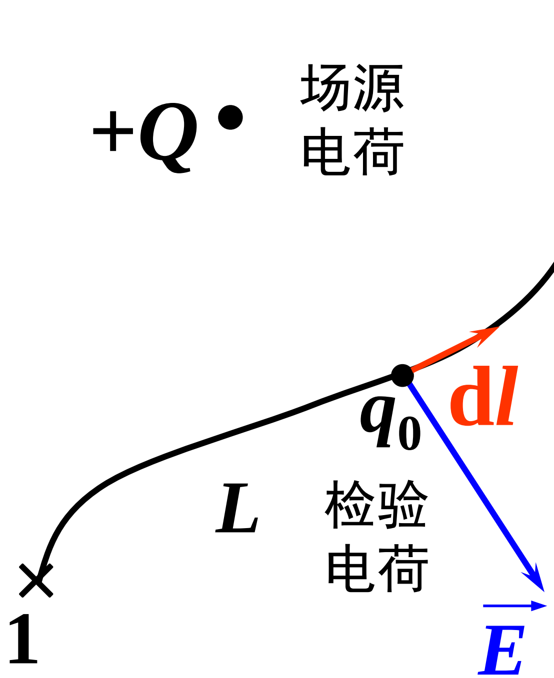


沿着某一闭合路径，电场力做功

$$\oint_L \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = q_0 \oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

电荷在静电力作用下沿闭合路径移动一周回到起点，静电力做功等于零。

（四）静电力做功



点电荷的电势能：$\boxed{W = q\varphi}$

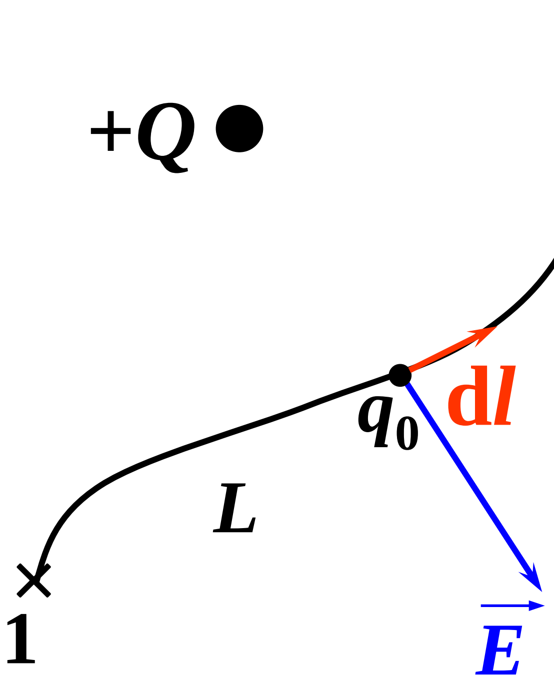
$$A_{12} = q_0\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) = W_1 - W_2$$

一个电荷在外电场中的电势能是一种相互作用能，属于电荷与产生电场的电荷系所共有！

电势能的单位：J

常用单位：eV　　1eV=1.6x10^{-19}J

（四）静电力做功



距离点电荷r处，检验电荷q_0的**电势能**

$$W_1 = W_1 - W_0 = A_{10} = \frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$$

取无穷远处是电势能零点，$W_0 = 0$

在点电荷Q的电场中，移动 实验点电荷q_0，电场力作功：

$$A_{10} = \int_1^{\infty} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_1^{\infty} q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= q_0\left(\varphi_1 - \varphi_\infty\right) = \frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0 r_1}$$

三、电场强度和电势的关系

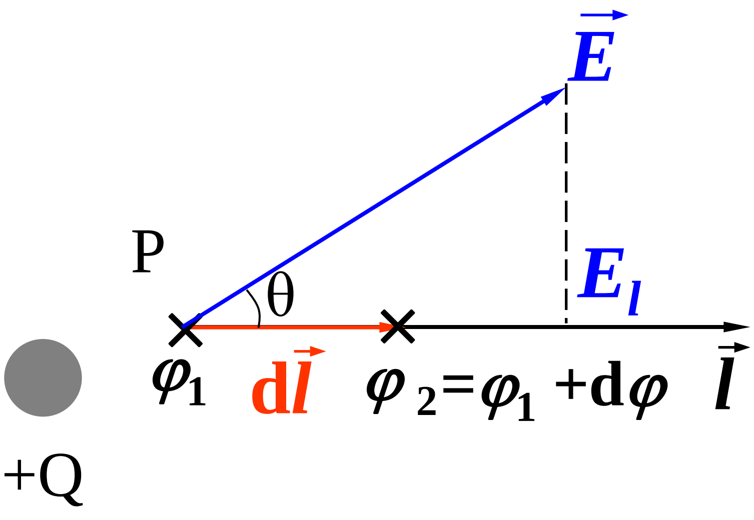
在电场中某点场强沿某方向的分量等于电势沿此方向的空间变化率的负值。

$$\boxed{E\cos\theta = E_l} = -\boxed{\frac{d\varphi}{dl}}$$

场强与电势的微分关系

电场沿着*l*方向的分量

电势对空间的变化率
（φ的方向导数)



$$\varphi_1-\varphi_2 = \vec{E}\cdot d\vec{l} = -d\varphi$$

$$E\,dl\cos\theta = E_l\,dl = -d\varphi$$

数学上，若沿着某一方向某一标量函数有最大变化率（方向导数最大），则定义该方向上的导数为该标量函数的梯度 (gradient) 。

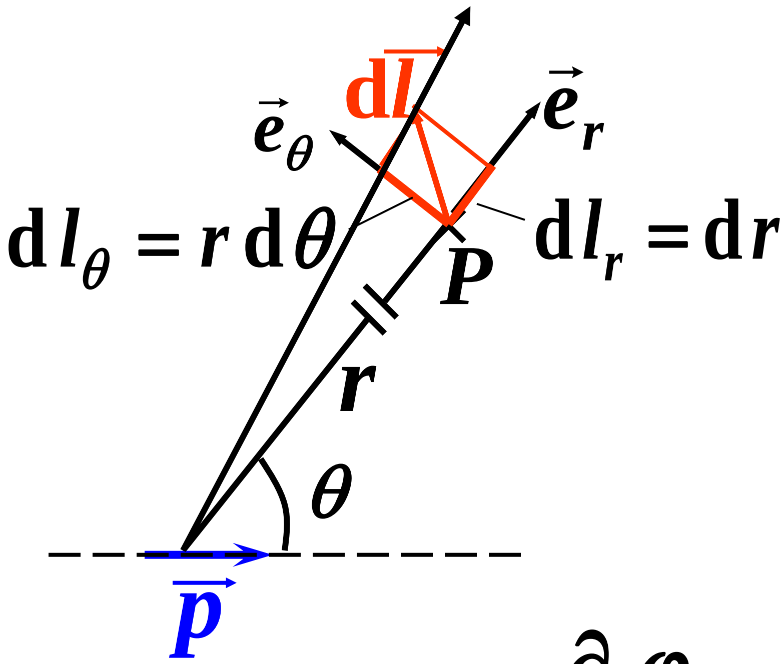
电势梯度： $\mathbf{grad}\,\varphi = \dfrac{\partial \varphi}{\partial n}\vec{e}_n$

$$\vec{E} = -\mathbf{grad}\,\varphi \equiv -\nabla\varphi$$

在直角坐标中： $\nabla \equiv \vec{i}\dfrac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\dfrac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\dfrac{\partial}{\partial z}$

$$\mathbf{grad}\,\varphi = \nabla\varphi \quad = \vec{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

例1： 根据电偶极子的电势求场强分布。



$$\varphi(\theta, r) = \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial l_r} = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{2p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = E_{//}$$

$$E_\theta = -\frac{\partial\varphi}{\partial l_\theta} = -\frac{\partial\varphi}{r\partial\theta} = \frac{p\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = E_\perp$$

例2： 电偶极矩为p=ql的电偶极子在均匀外电场E中的电势能。

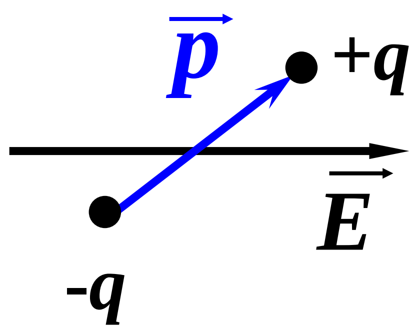
$$\boxed{W_+ = q\varphi_+} \qquad \boxed{W_- = -q\varphi_-}$$

电偶极子的电势能：

$$W = W_+ + W_- = q(\varphi_+ - \varphi_-) \qquad E_l = E\cos\theta = -\frac{d\varphi}{dl}$$

$$W = -qlE\cos\theta$$

$$\boxed{W = -\vec{p}\cdot\vec{E}}$$



$\vec{p} \parallel \vec{E}$ 时电势能最低。