第二节

函数的求导法则

一、四则运算求导法则

二、反函数的求导法则

三、复合函数求导法则

四、初等函数的求导问题

四、初等函数的求导问题

1. 常数和基本初等函数的导数 (P71-72)

$$(C)' = 0 \qquad (x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(\tan x)' = \sec^2 x \qquad (\cot x)' = -\csc^2 x$$

$$(\sec x)' = \sec x \tan x \qquad (\csc x)' = -\csc x \cot x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a \qquad (e^x)' = e^x$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad (\operatorname{arc}\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

2. 有限次四则运算的求导法则

$$(u \pm v)' = u' \pm v' \qquad (Cu)' = Cu' \quad (\,C\text{为常数}\,)$$

$$(uv)' = u'v + uv' \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$$

3. 复合函数求导法则

$$y = f(u)\,,\, u = \varphi(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f'(u) \cdot \varphi'(x)$$

4. 一般来说，初等函数在定义区间内可导, 且导数仍为初等函数。

说明: 最基本的公式

$$(C)' = 0$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

由定义证，其它公式用求导法则推出.

例1. $y=\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$，求 y'.

解: $\because \quad y=\dfrac{2x-2\sqrt{x^2-1}}{2}=x-\sqrt{x^2-1}$

$$\therefore \quad y'=1-\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot(2x)=1-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

例2 设 $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}\ (a>0)$，求 y'.

解: $y'=a^a x^{a^a-1}+a^{x^a}\ln a\cdot a x^{a-1}$

$$+a^{a^x}\ln a\cdot a^x\ln a$$

内容小结

求导公式及求导法则

注意: 1) $(uv)' \neq u'v'$, $\left(\dfrac{u}{v}\right)' \neq \dfrac{u'}{v'}$

2) 搞清复合函数结构，由外向内逐层求导．

思考与练习

1. $\left(\dfrac{1}{\sqrt{x\sqrt{x}}}\right)' = \left(\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{3}{4}}\right)' \cancel{=} \dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{4}}$ 对吗?

$$= \frac{3}{4}\left(\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{4}} \cdot \frac{-1}{x^2}$$

2. 设 $f(x)=(x-a)\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处连续，在求 $f'(a)$ 时，下列做法是否正确?

因 $f'(x) \cancel{=} \varphi(x)+(x-a)\underline{\varphi'(x)}$

故 $f'(a)=\varphi(a)$

正确解法:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\varphi(x)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\varphi(x)=\varphi(a)$$

3. 求下列函数的导数

$$(1)\quad y=\left(\frac{a}{x}\right)^{b},\qquad (2)\quad y=\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}.$$

解: $(1)\quad y'=b\left(\frac{a}{x}\right)^{b-1}\cdot\left(-\frac{a}{x^{2}}\right)=-\frac{a^{b}b}{x^{b+1}}$

$$(2)\quad y'=\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}\ln\frac{a}{b}\cdot(-x)'=-\left(\frac{b}{a}\right)^{x}\ln\frac{a}{b}$$

或 $\quad y'=\left(\left(\frac{b}{a}\right)^{x}\right)'=\left(\frac{b}{a}\right)^{x}\ln\frac{b}{a}$

4. 设 $f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-99)$, 求 $f'(0)$.

解: 方法1 利用导数定义.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}(x-1)(x-2)\cdots(x-99)=-99!$$

方法2 利用求导公式.

$$f'(x)=(x)'\cdot[(x-1)(x-2)\cdots(x-99)]$$
$$+x\cdot[(x-1)(x-2)\cdots(x-99)]'$$

$$\therefore \quad f'(0)=-99!$$

三、由参数方程所确定的函数的导数

在方程$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$中,

设函数$x = \varphi(t)$具有单调连续的反函数 $t = \varphi^{-1}(x)$,

$$\therefore y = \psi[\varphi^{-1}(x)]$$

再设函数 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$都可导, 且$\varphi(t) \neq 0$,

由复合函数及反函数的求导法则得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

即 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

例6　求摆线$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$在$t = \dfrac{\pi}{2}$处的切线方程．

解　$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a \sin t}{a - a \cos t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t}$$

$$\therefore \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{1 - \cos \frac{\pi}{2}} = 1.$$

当$t = \dfrac{\pi}{2}$时，$x = a(\dfrac{\pi}{2} - 1)$，$y = a.$

所求切线方程为

$$y - a = x - a(\frac{\pi}{2} - 1)$$

即　$y = x + a(2 - \dfrac{\pi}{2})$

四、相关变化率

设 $x = x(t)$ 及 $y = y(t)$ 都是可导函数，而变量 x 与 y 之间存在某种关系，从而它们的变化率 $\frac{dx}{dt}$ 与 $\frac{dy}{dt}$ 之间也存在一定关系，这样两个相互依赖的变化率称为相关变化率.

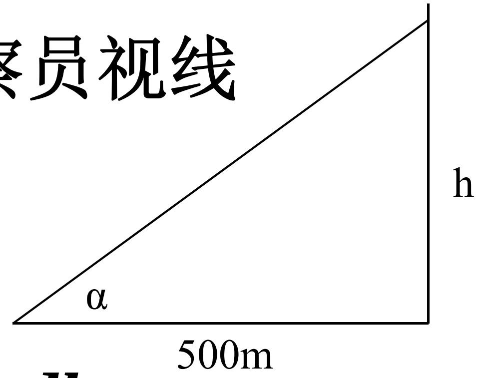
相关变化率问题:

相关变化率问题是研究这两个变化率之间的关系，以便

从其中一个变化率求出另一个变化率. 举例说明

例9 一汽球从离开观察员500米处离地面铅直上升,其速率为140米/秒.当气球高度为500米时,观察员视线的仰角增加率是多少?

解 设气球上升t秒后,其高度为h,观察员视线的仰角为α,则



$$\tan\alpha = \frac{h}{500}$$

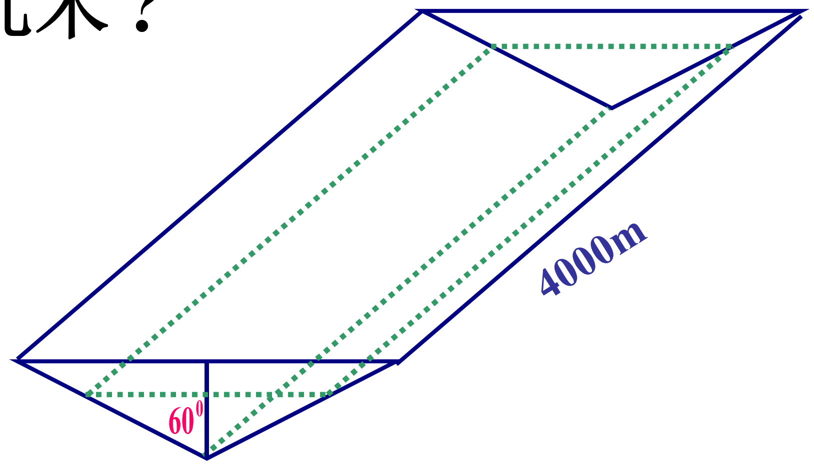
上式两边对t求导得 $\sec^2\alpha \cdot \frac{d\alpha}{dt} = \frac{1}{500} \cdot \frac{dh}{dt}$

$\because \frac{dh}{dt} = 140$米/秒, 当 $h = 500$米时, $\sec^2\alpha = 2$

$\therefore \frac{d\alpha}{dt} = 0.14$(弧度/分)

仰角增加率

例10 河水以8米^3/秒的体流量流入水库中，水库形状是长为4000米，顶角为120^0的水槽，问水深20米时，水面每小时上升几米？



解 设时刻t水深为$h(t)$，
水库内水量为$V(t)$，则

$$V(t)=4000\sqrt{3}h^2$$

上式两边对t求导得

$$\frac{dV}{dt}=8000\sqrt{3}h\cdot\frac{dh}{dt}$$

$\because \frac{dV}{dt}=28800$米^3/小时，　　$\therefore$ 当$h=20$米时，

$\frac{dh}{dt}\approx 0.104$米/小时

水面上升之速率

五、小结

隐函数求导法则: 直接对方程两边求导;

对数求导法: 对方程两边取对数,按隐函数的求导法则求导;

参数方程求导: 实质上是利用复合函数求导法则;

相关变化率: 通过函数关系确定两个相互依赖的变化率; **解法:** 通过建立两者之间的关系, 用链式求导法求解.