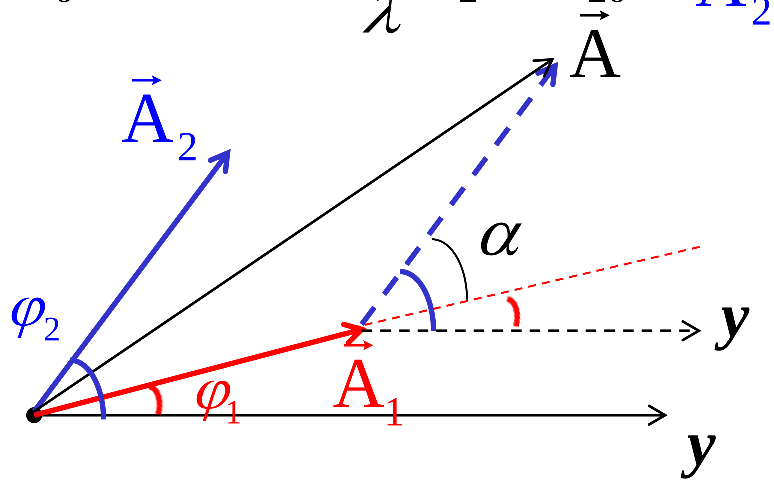
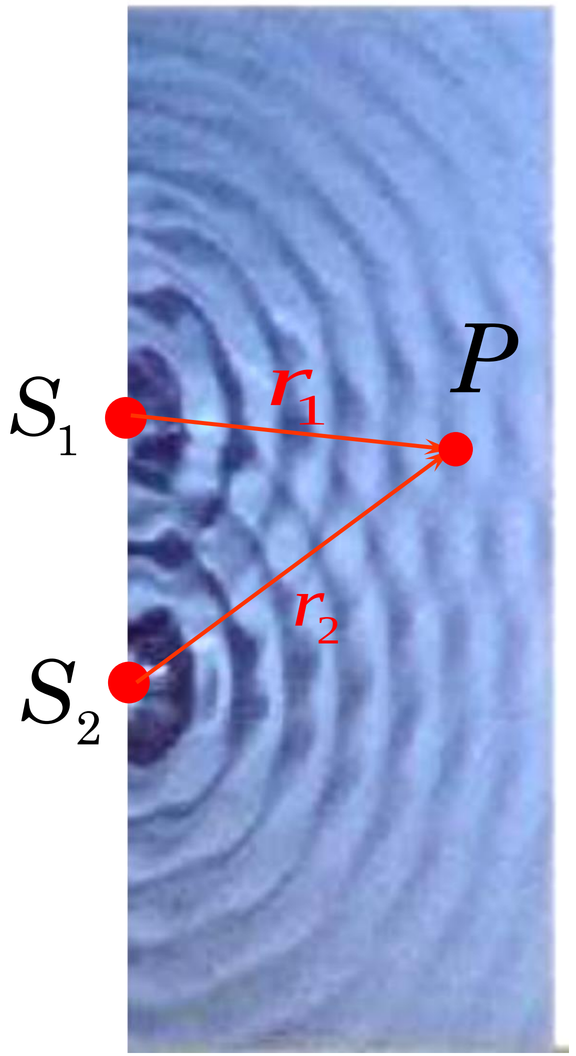
设有两个相干**波源**S_1及S_2，两列波**在P点**引起的**振动表达式**分别为：

$$y_{1P}=A_0\cos(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}r_1+\varphi_{10})\quad \vec{A}_1$$

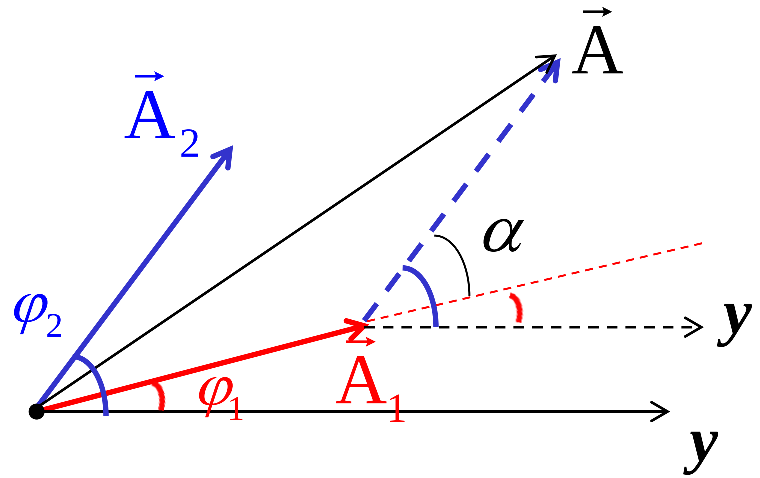
$$y_{2P}=A_0\cos(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}r_2+\varphi_{20})\quad \vec{A}_2$$





在t时刻，$\vec{A}_1$ 和 $\vec{A}_2$与x轴夹角

$$\varphi_1=\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}r_1+\varphi_{10}\qquad \varphi_2=\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}r_2+\varphi_{20}\qquad \alpha=\varphi_2-\varphi_1$$



当此两列波发出的波在空间P点相遇时，为同方向、同频率简谐振动合成。

$$y = y_1 + y_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$$

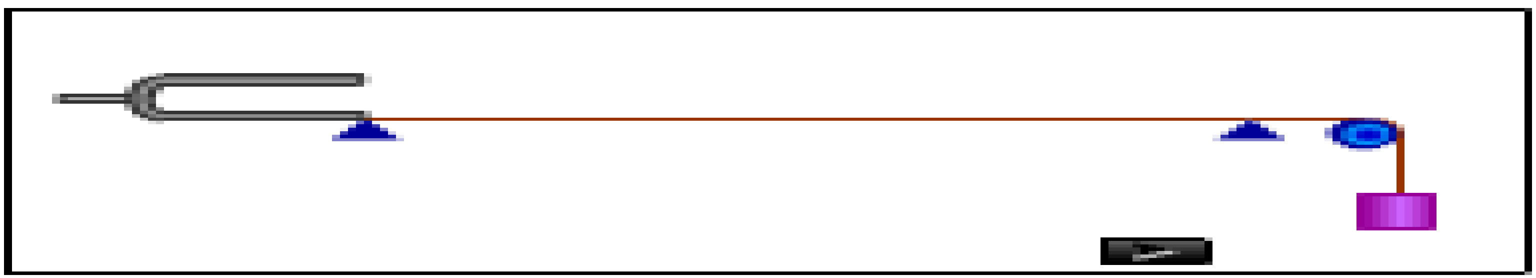
合振幅: $$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_{20} - \varphi_{10} - 2\pi\frac{r_2 - r_1}{\lambda})}$$

合振幅:　$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\boxed{\cos(\varphi_{20}-\varphi_{10}-2\pi\frac{r_2-r_1}{\lambda})}}$

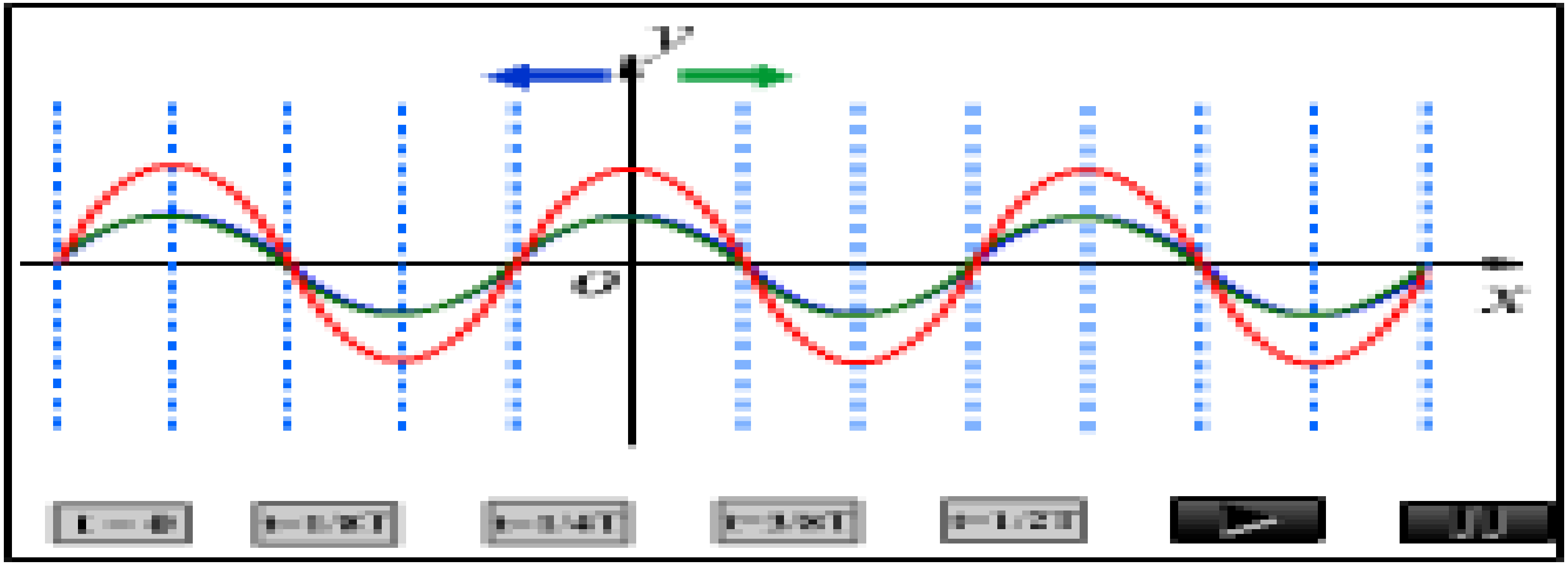
$$\Delta\varphi=\varphi_{20}-\varphi_{10}-\frac{2\pi}{\lambda}(r_2-r_1)=\begin{cases}\pm k2\pi & A=A_1+A_2 \quad \text{干涉相长} \\ & (k=0,1,2\cdots) \\ \pm(2k+1)\pi & A=|A_1-A_2| \quad \text{干涉相消}\end{cases}$$

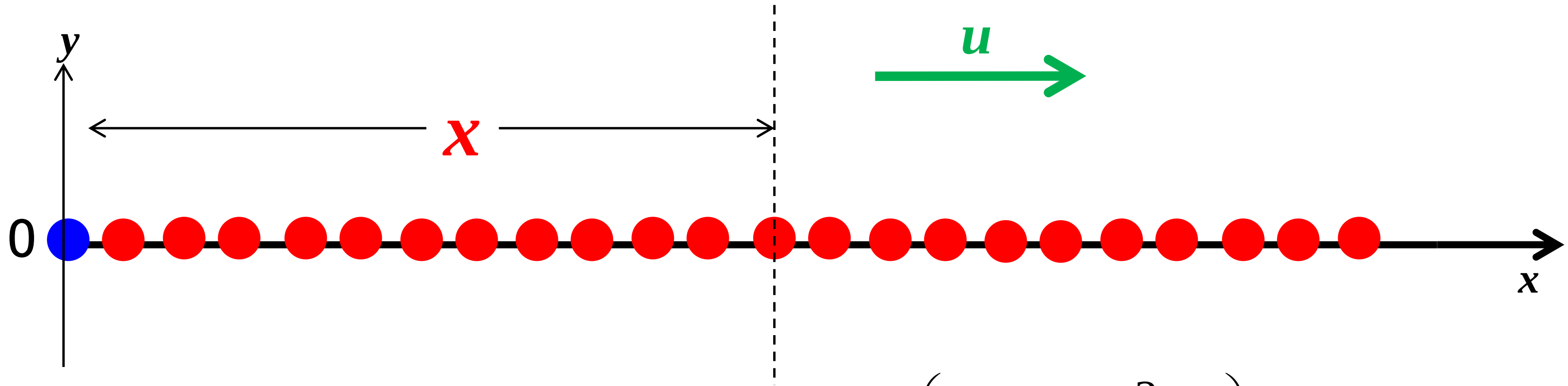
三. 驻波

两列**相干的行波**沿相反方向传播而叠加时，就形成**驻波**，它是一种常见的重要干涉现象。



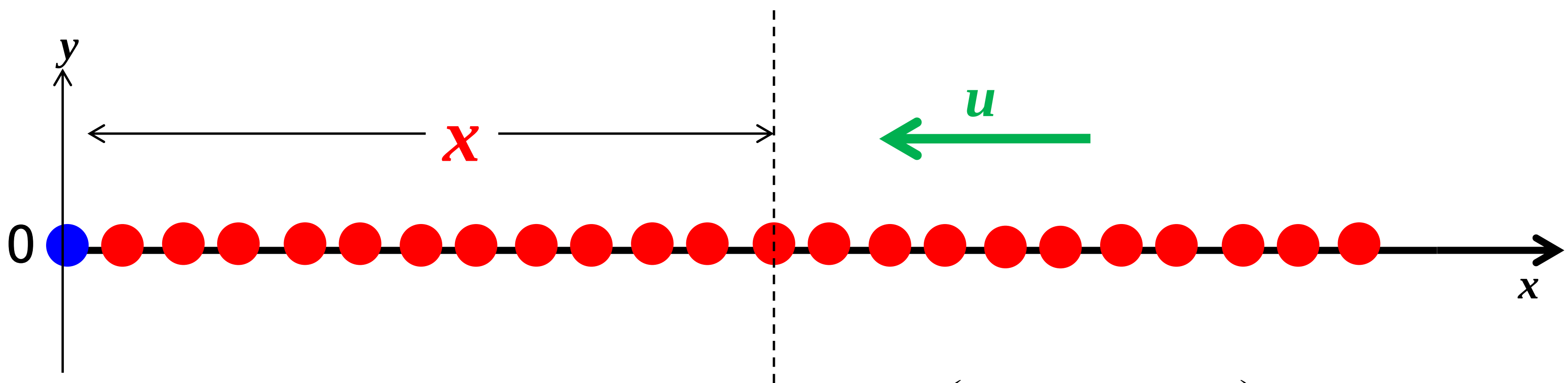
驻波的形成





$$y_{1,0} = A\cos\left(\omega t + \varphi_{01}\right)$$

$$y_1 = A\cos\left(\omega t + \varphi_{01} - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$



$$y_{2,0} = A\cos\left(\omega t + \varphi_{02}\right)$$

$$y_2 = A\cos\left(\omega t + \varphi_{02} + \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

1. 驻波的描述

设两列行波分别沿 x 轴的正向和反向传播，在 $x=0$ 处两波的初相均为 0：

$$\rightarrow x: \quad y_1 = A\cos\left(\omega t - \frac{x}{\lambda}2\pi\right)$$

$$\leftarrow x: \quad y_2 = A\cos\left(\omega t + \frac{x}{\lambda}2\pi\right)$$

$$y = y_1 + y_2$$

$$y = 2A\cos\frac{x}{\lambda}2\pi \cdot \cos\omega t$$

$$y = 2A\cos\frac{x}{\lambda}2\pi \cdot \cos\omega t$$

其绝对值为振幅　　相位中无 x

驻波的振幅与位置有关　　各质点都在作同频率的简谐运动

$$y = 2A\cos\frac{x}{\lambda}2\pi \cdot \cos\omega t$$ —— 不具备传播的特征

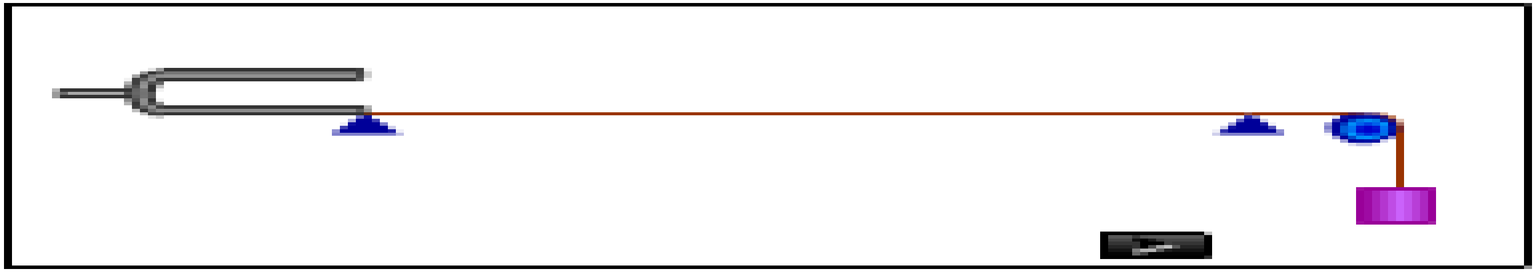
各点都做简谐振动，振幅随位置不同而不同。

2. 驻波的特点：

（1）振幅：

各处振幅不等大；

有**波腹**（振幅最大处）和**波节**（振幅最小处）。



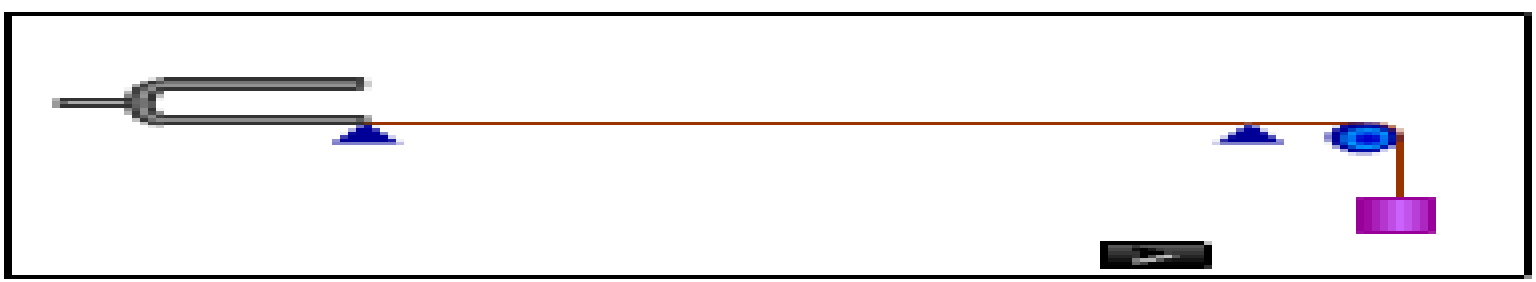
（2）相位：

$$y = 2A\cos\frac{x}{\lambda}2\pi\cdot\cos\boxed{\omega\ t}$$

相位中没有x坐标，故没有了相位的传播。

同一段振动相位相同；相邻段振动相位相反。

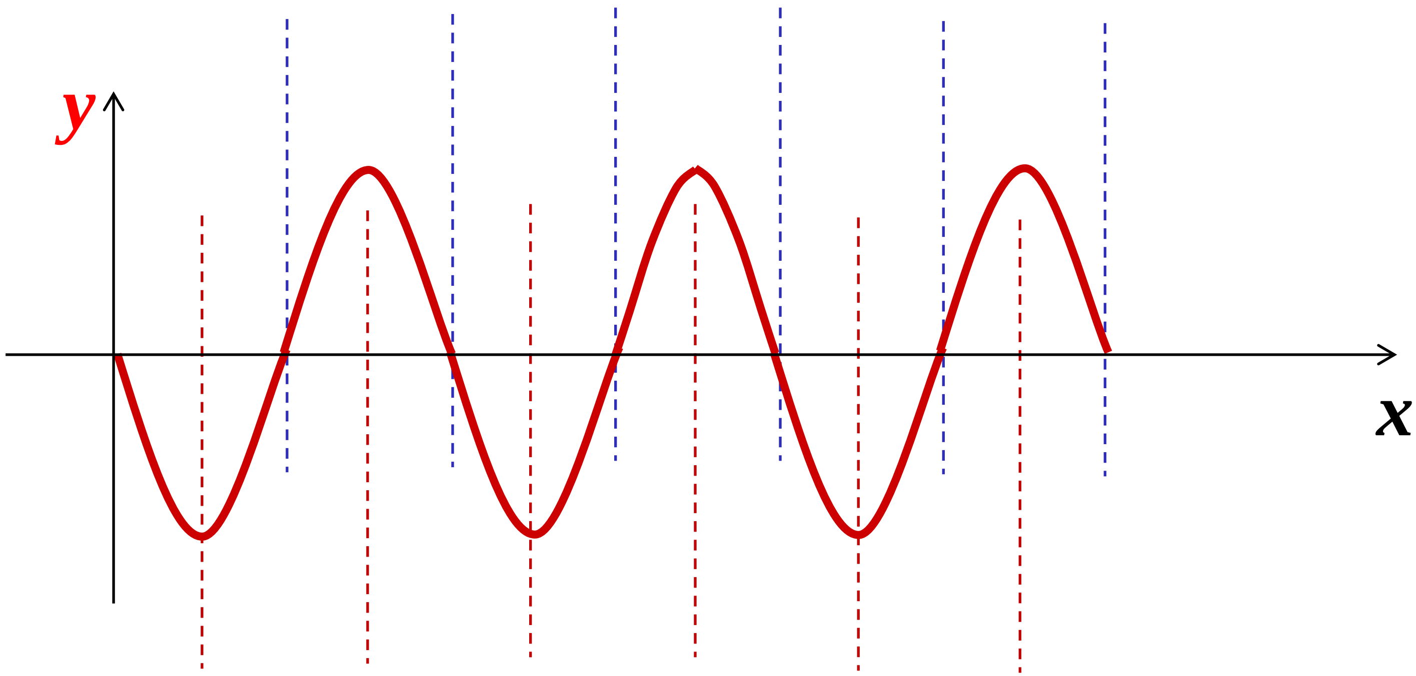
驻波不是波，是一种特殊的振动。驻波是分段振动。



3）振幅

$$y = \boxed{2A\cos\frac{x}{\lambda}2\pi}\cos\omega t$$

$\left|2A\cos 2\pi\dfrac{x}{\lambda}\right|$ 随 x 而异，与时间无关.

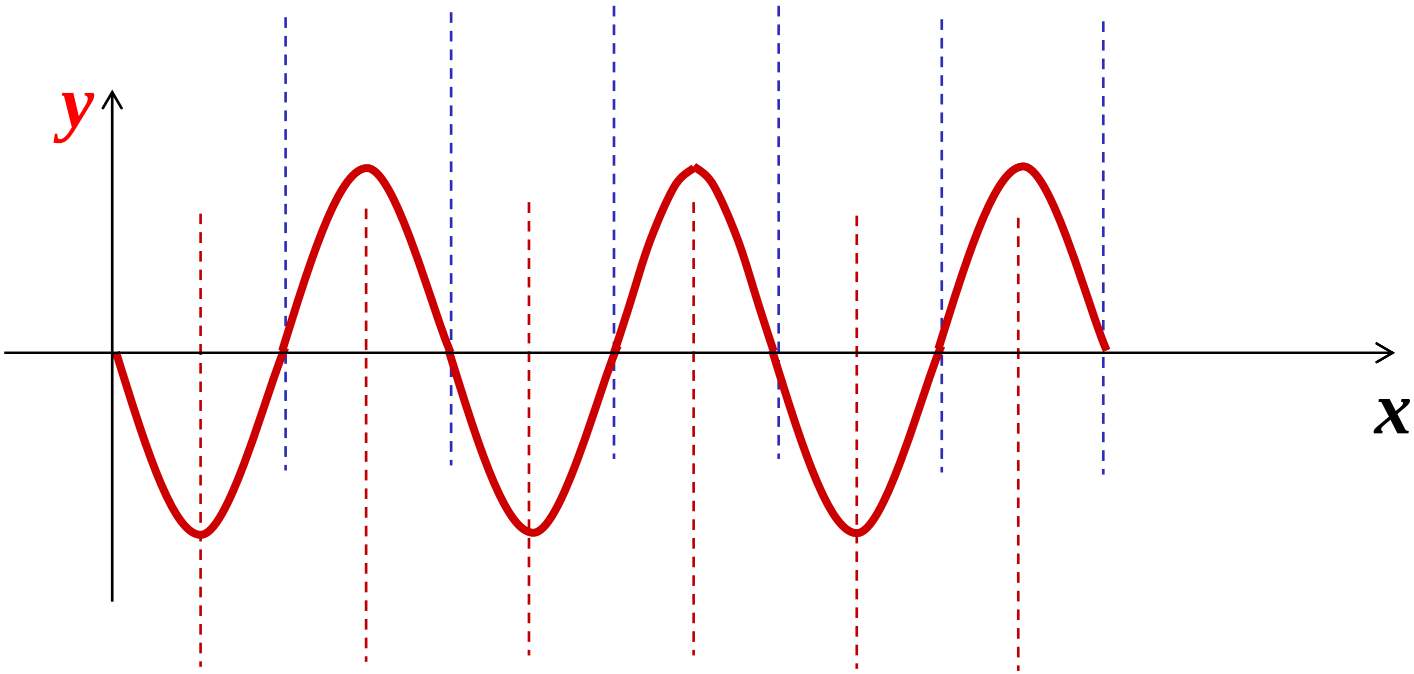


$$\left|\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\right| = \begin{cases} 1 & 2\pi\dfrac{x}{\lambda} = \pm k\pi \quad k = 0,1,2,\cdots \\ 0 & 2\pi\dfrac{x}{\lambda} = \pm\dfrac{(2k+1)}{2}\pi \quad k = 0,1,2,\cdots \end{cases}$$

波腹

波节

3）振幅



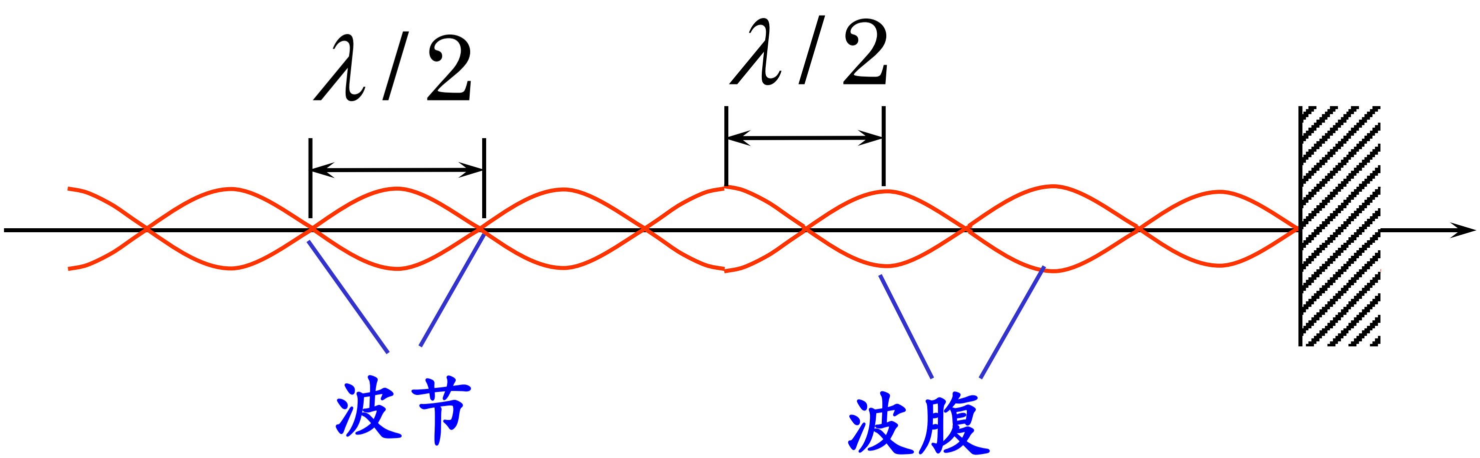
$$x=\begin{cases}\pm k\dfrac{\lambda}{2} & k=0,1,\cdots \quad A_{max}=2A \quad \boxed{\text{波腹}} \\ \pm\dfrac{(2k+1)}{2}\dfrac{\lambda}{2} & k=0,1,\cdots \quad A_{max}=0 \quad \boxed{\text{波节}}\end{cases}$$

相邻波节距离

$$x_{k+1}-x_k=\frac{2(k+1)+1}{2}\frac{\lambda}{2}-\frac{2k+1}{2}\frac{\lambda}{2}=\frac{\lambda}{2}=\frac{\lambda}{2}$$

相邻波腹距离

$$x_{k+1}-x_k=(k+1)\frac{\lambda}{2}-k\frac{\lambda}{2}=\frac{\lambda}{2}$$

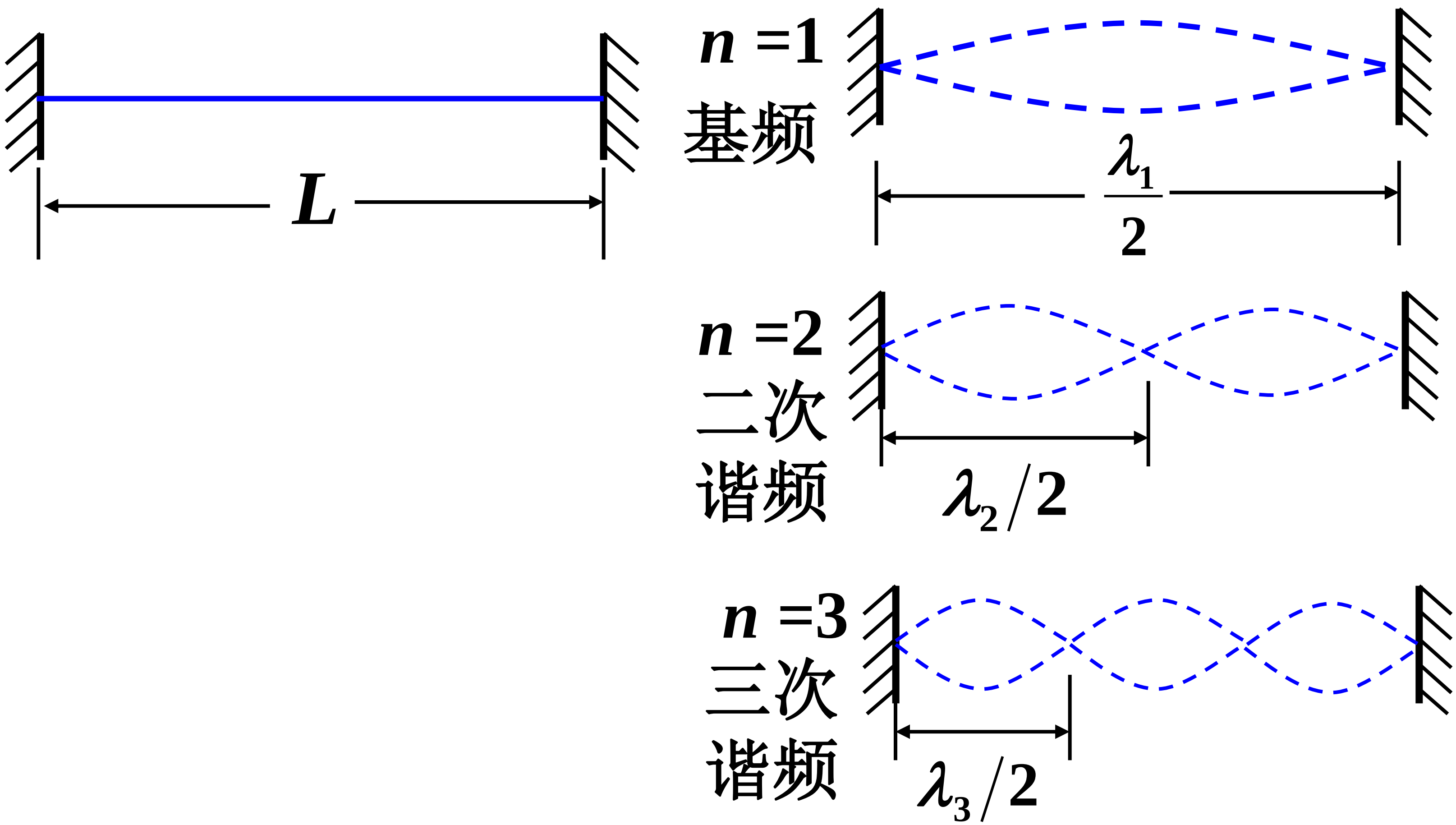


3. 简正模式 （normal mode）

波在一定边界内传播时就会形成各种驻波。

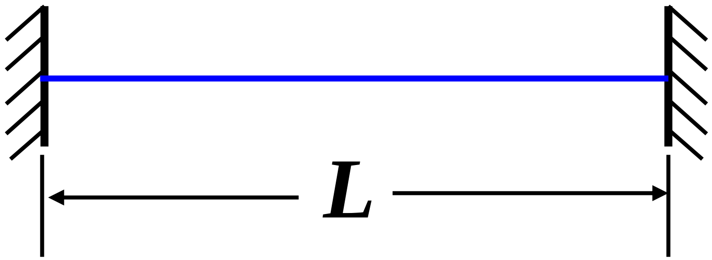
如两端固定的弦， 形成驻波

用电动音叉在绳上产生驻波



L
n =1
基频
λ1/2
n =2
二次
谐频
λ2/2
n =3
三次
谐频
λ3/2

每种可能的稳定振动方式称作系统的一个简正模式。



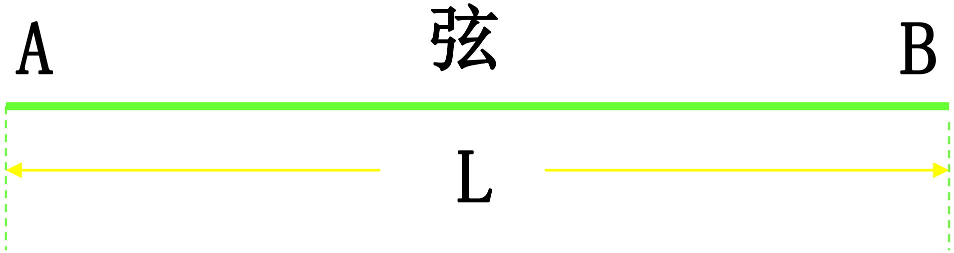
$$n\frac{\lambda_n}{2}=L,\quad n=1,2,3\cdots$$

$$\nu_n=\frac{u}{\lambda_n}=n\frac{u}{2L}\qquad n=1,\ 2,\ 3,\ldots..$$

——系统的固有频率

波长或频率是不连续的，或者“量子化”的。

弦上的驻波



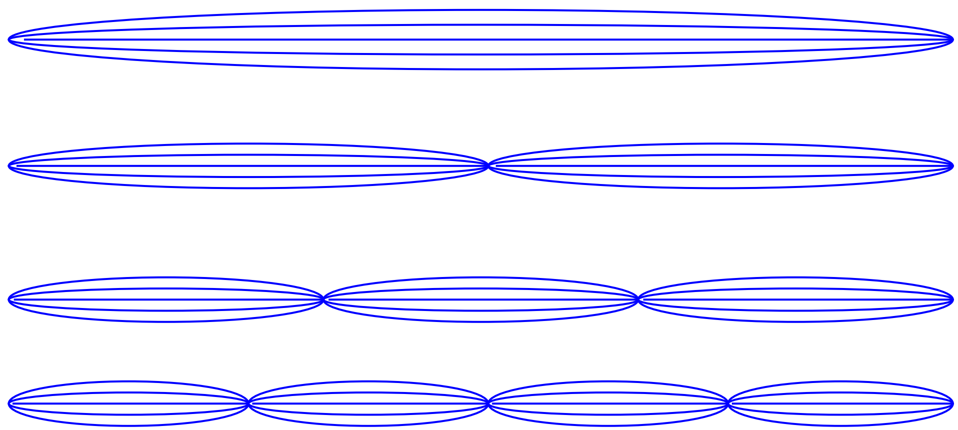
$$L = n\frac{\lambda_n}{2}$$

n=1

n=2

n=3

n=4



$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$$\nu_n = \frac{u}{\lambda_n} = n\frac{u}{2L}$$

$$\nu_1 = \frac{u}{2L}$$ （基频）

$$\nu_2 = \frac{u}{L} \qquad \nu_3 = \frac{3u}{2L}$$

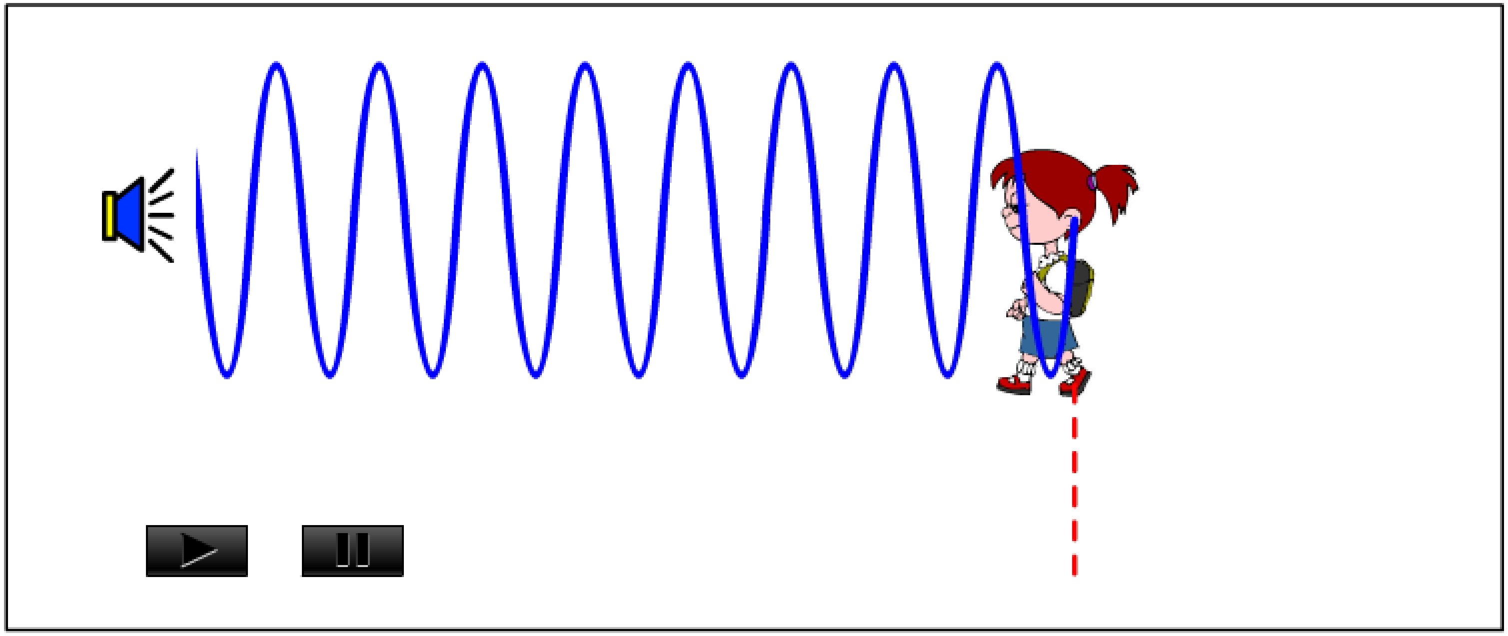
§5.9 多普勒效应

多普勒效应： 由于波源和观察者的运动，而使观测的频率不同于波源频率的现象。

水波的多普勒效应（波源向左运动）

一. 机械波的多普勒效应

（1） 波源不动，即$V_S = 0$，观察者以$V_R=V_0$的速度向波源运动

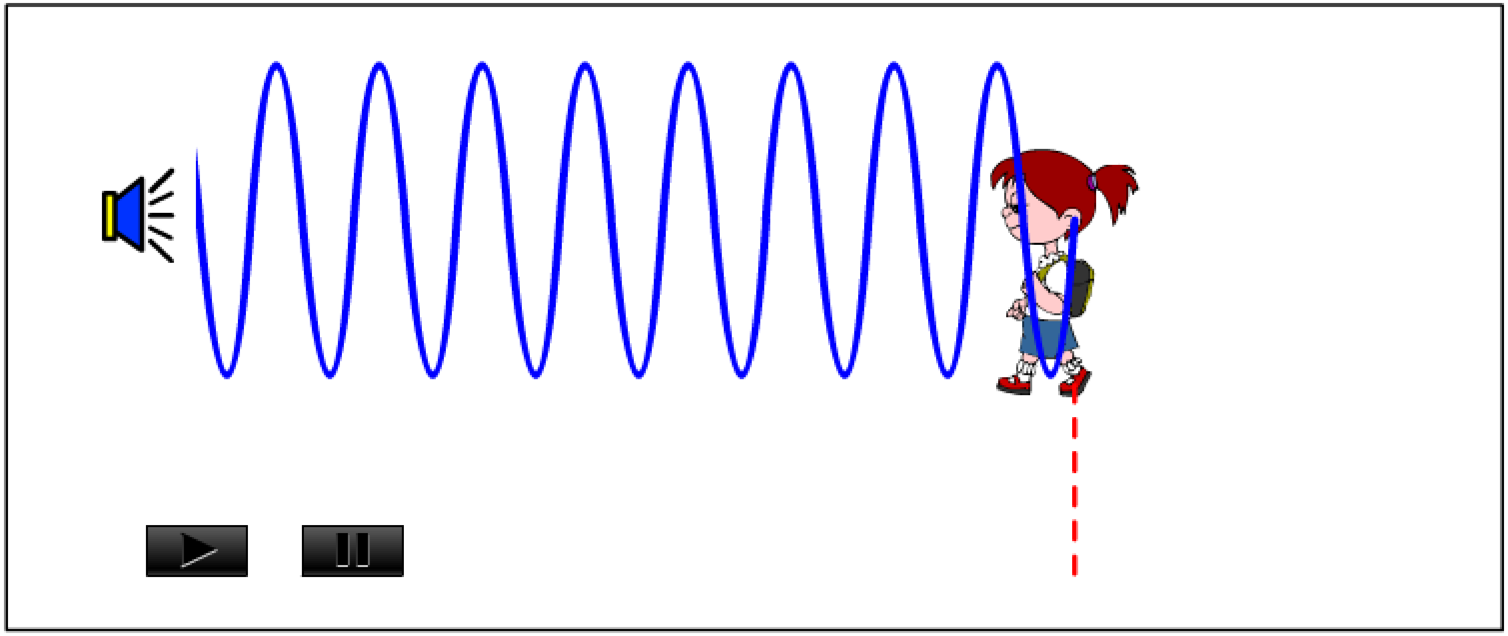


单位时间内，观察者接收到波的数目（频率）

$$\upsilon_R = \frac{u+V_0}{\lambda} = \frac{u+V_0}{uT} = \frac{u+V_0}{u}\upsilon_s$$

dt时间内，观察者接收到波的数目 $n = \dfrac{udt+V_0 dt}{\lambda}$

（1） 波源不动，即$V_S = 0$，观察者以$V_R=V_0$的速度运动



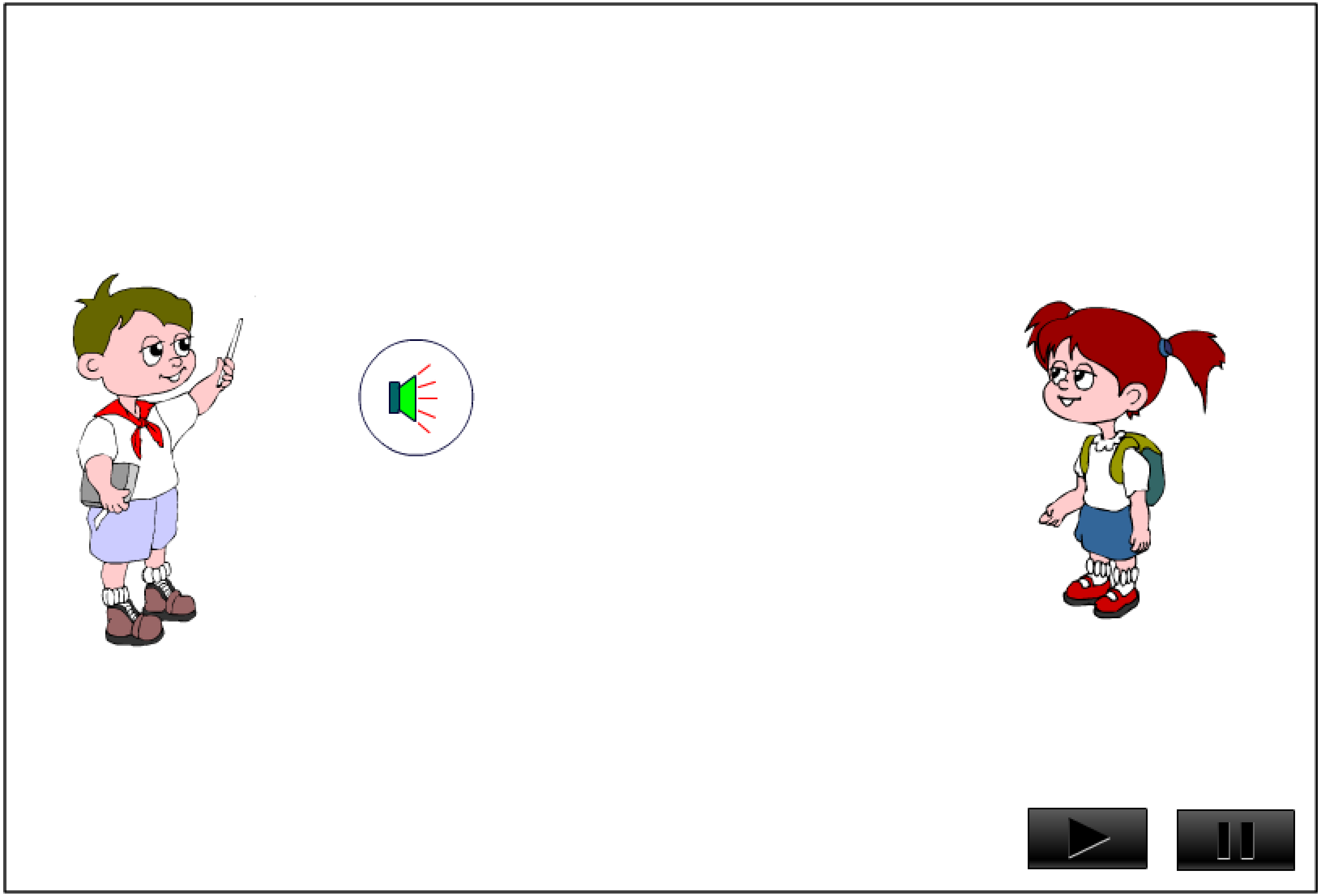
观察者接收到的频率

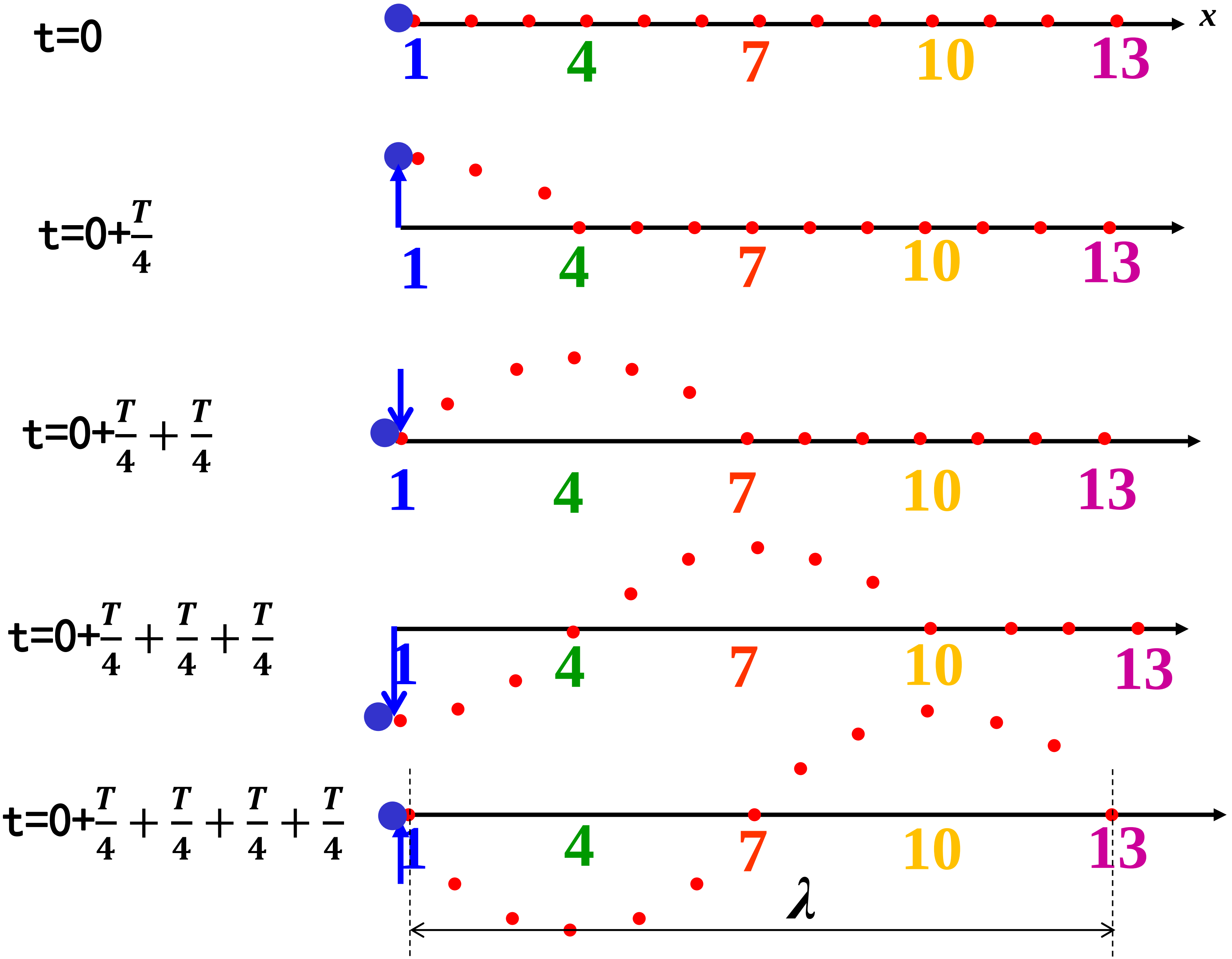
$$\upsilon_R = \frac{u + V_0}{u}\upsilon_s$$ 观察者向波源运动

$$\upsilon_R = \frac{u - V_0}{u}\upsilon_s$$ 观察者远离波源

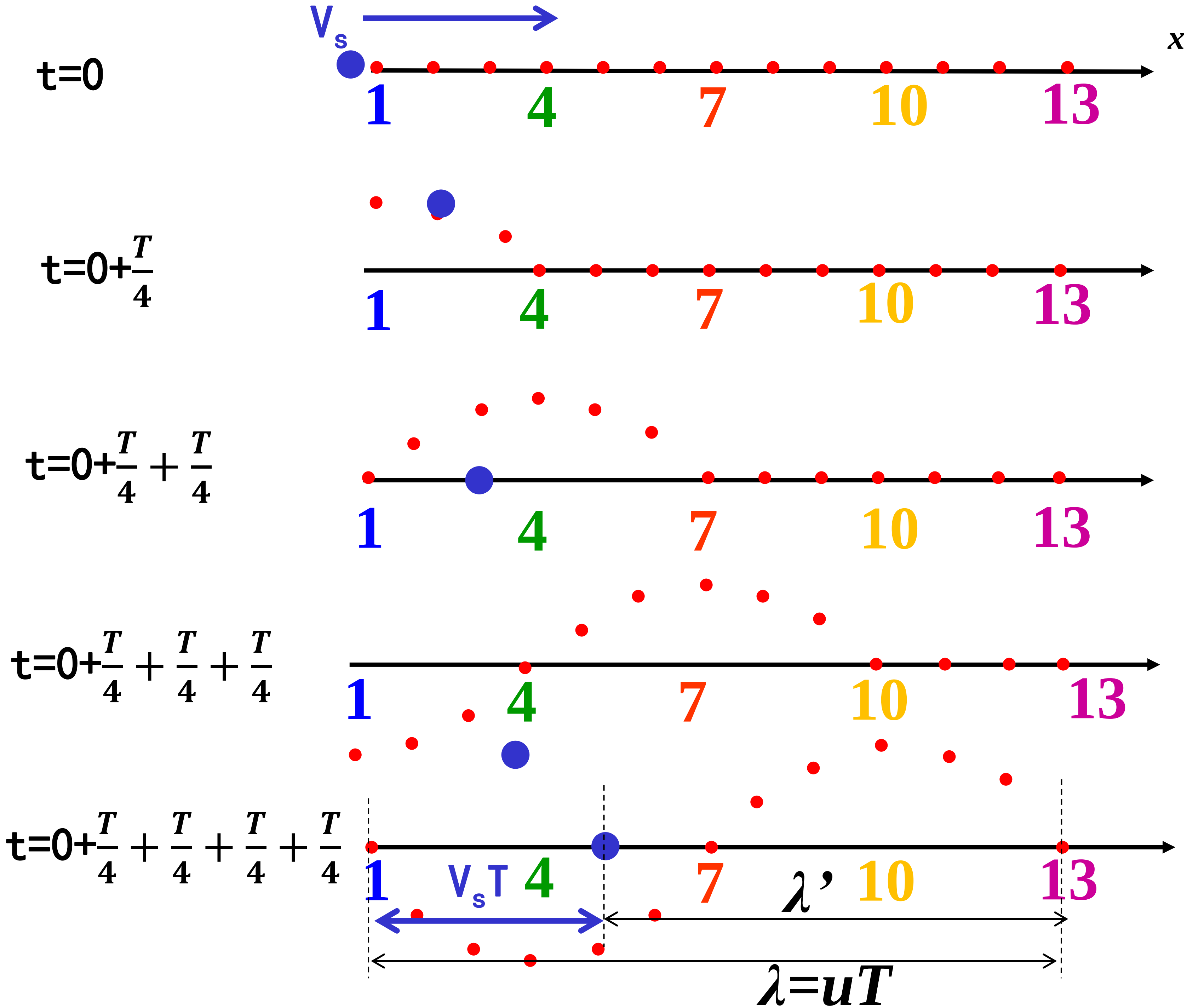
一. 机械波的多普勒效应

（1） 波源向观察者运动，即$V_S \neq 0$，观察者速度$V_R=0$



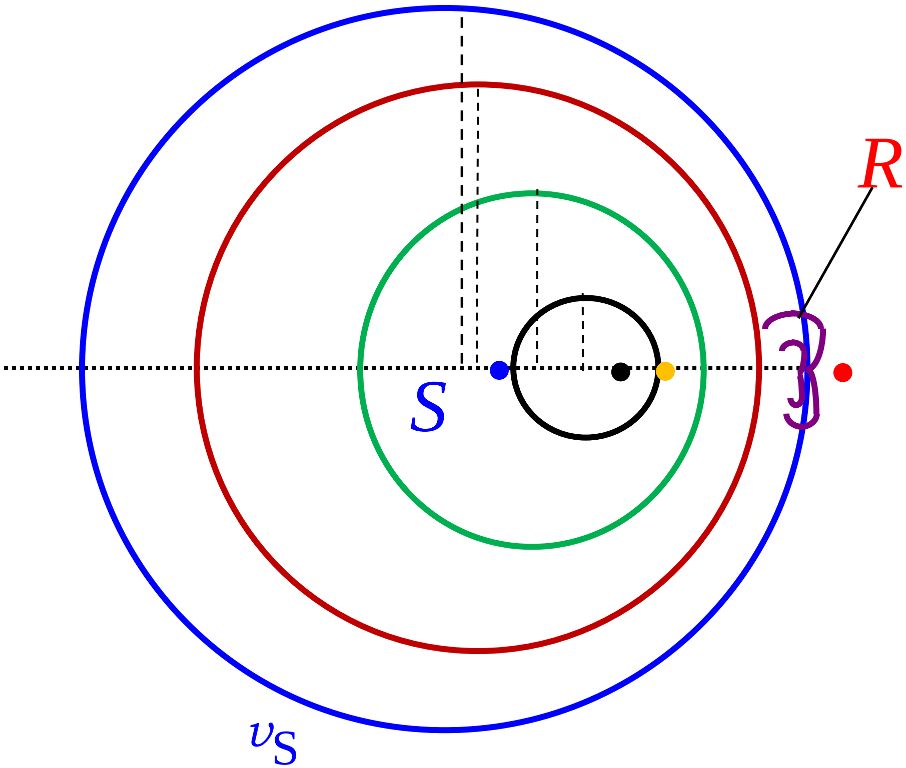


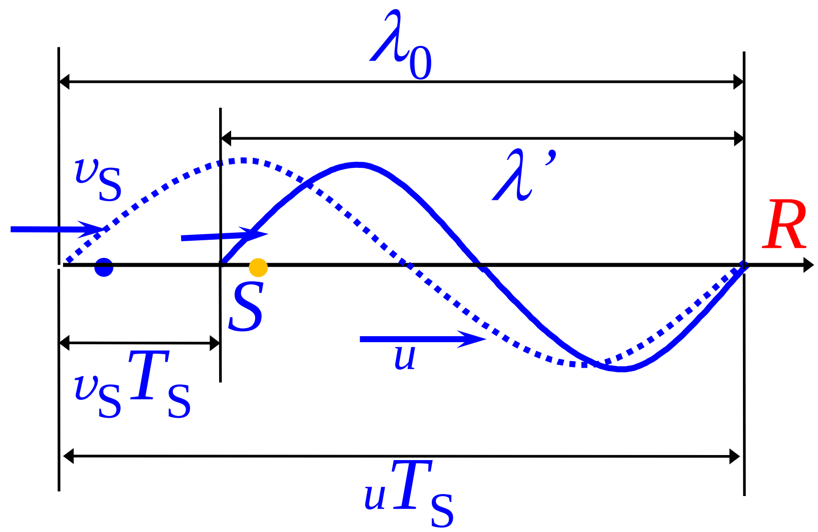
t=0
x
1
4
7
10
13
$t=0+\frac{T}{4}$
$t=0+\frac{T}{4}+\frac{T}{4}$
$t=0+\frac{T}{4}+\frac{T}{4}+\frac{T}{4}$
$t=0+\frac{T}{4}+\frac{T}{4}+\frac{T}{4}+\frac{T}{4}$
λ



V_s
x
t=0
1
4
7
10
13
$t=0+\frac{T}{4}$
$t=0+\frac{T}{4}+\frac{T}{4}$
$t=0+\frac{T}{4}+\frac{T}{4}+\frac{T}{4}$
$t=0+\frac{T}{4}+\frac{T}{4}+\frac{T}{4}+\frac{T}{4}$
V_sT
λ'
$\lambda=uT$

（2） 波源向观察者运动，即$V_S \neq 0$，观察者速度$V_R=0$





S 运动的前方波长缩短

$$\nu_R = \nu = \frac{u}{\lambda'} = \frac{u}{(u - V_S)T_S} = \frac{u}{u - V_S}\nu_S$$

（1） 波源不动，即$V_S = 0$，观察者以$V_R=V_0$的速度运动

$$\upsilon_R = \frac{u+V_0}{u}\upsilon_s$$ 观察者向波源运动

$$\upsilon_R = \frac{u-V_0}{u}\upsilon_s$$ 观察者远离波源

R 动S不动 $\xrightarrow{\lambda = \lambda_0}$ 波对R速度不是u

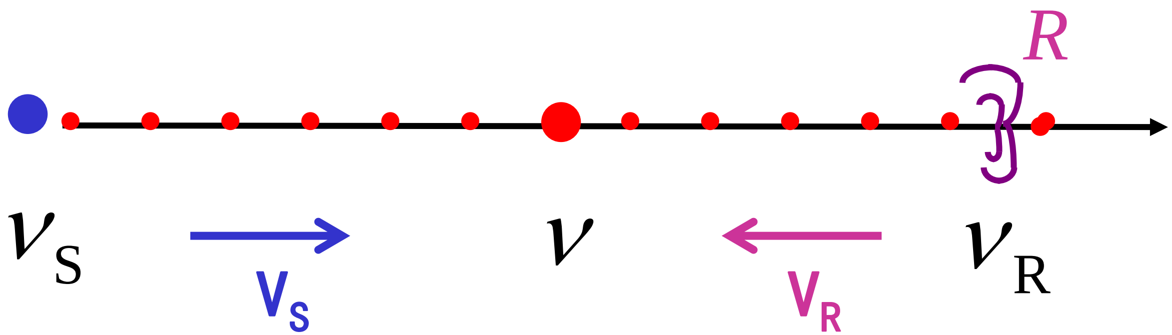
（2） 波源运动，即$V_S \neq 0$，观察者不动，即其速度$V_R=0$

$$\upsilon_R = \frac{u}{u-V_S}\upsilon_S$$ 波源向观察者运动

$$\upsilon_R = \frac{u}{u+V_S}\upsilon_S$$ 波源远离观察者运动

S 动R不动 $\longrightarrow$ $\lambda \neq \lambda_0$

(3) $V_R \neq 0$， $V_S \neq 0$， 此时，$\nu_S \neq \nu \neq \nu_R$

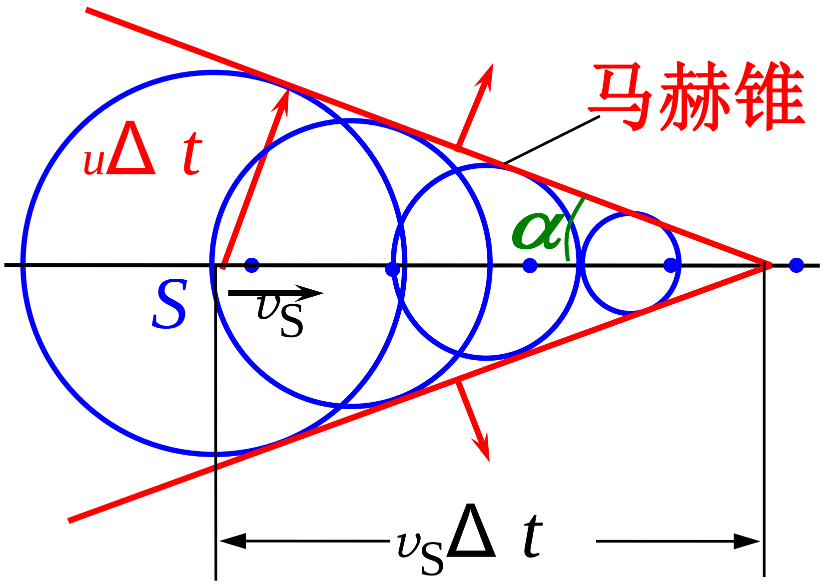


$$\left.\begin{array}{l} \nu_R = \dfrac{u + V_R}{u}\nu \\ \\ \nu = \dfrac{u}{u - V_S}\nu_S \end{array}\right\} \nu_R = \frac{u + V_R}{u - V_S}\nu_S$$

二. 冲击波

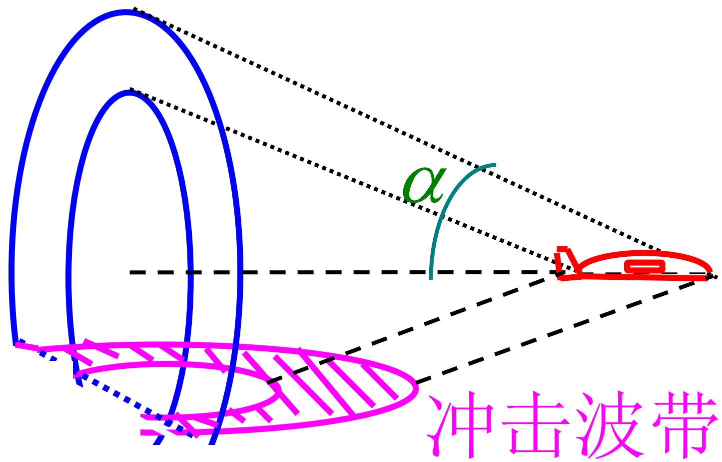
$$\boldsymbol{V}_{\mathrm{R}}=0\ ,\ \boldsymbol{V}_{\mathrm{s}}\neq 0,\qquad \nu_R=\frac{u}{u-\mathrm{V_S}}\nu_{\mathrm{S}}$$

$\mathrm{V_S}>u$ 时，有 $\nu_{\mathrm{R}}<0$，后发出的波面将超越先发出的波面，形成锥形波阵面 ——冲击波



$$\sin\alpha=\frac{u}{v_{\mathrm{S}}}$$

$\dfrac{v_{\mathrm{S}}}{u}$ —— 马赫数



$$\frac{v_S}{u}$$ —— 马赫数（Mach number）

对超音速飞机的最小飞行高度要有一定限制。

飞机冲破声障时将发出巨大声响，造成噪声污染！

超音速的子弹在空气中形成的冲击波

（马赫数为2 ）

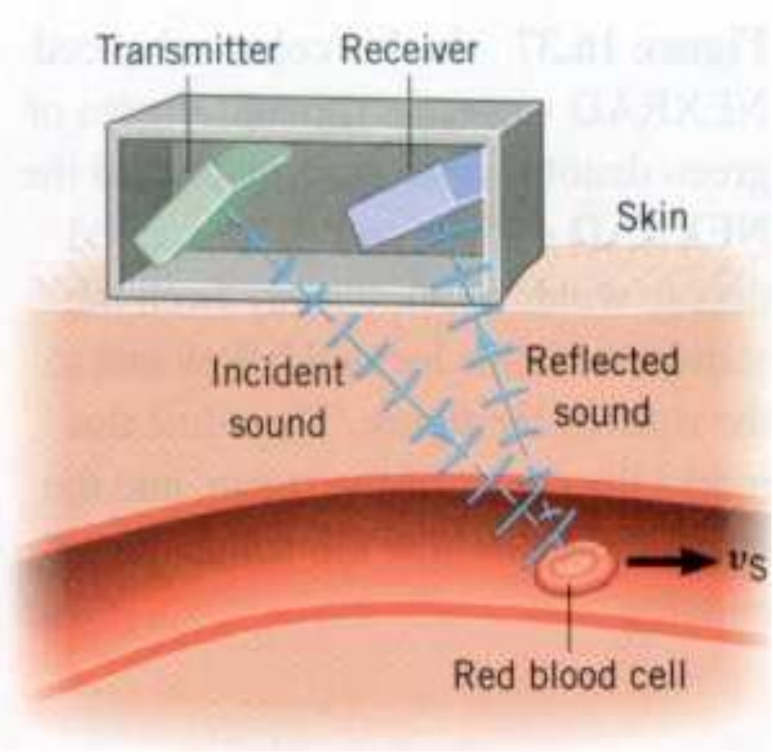
三. 多普勒效应的应用：

测速（固、液、气）

多普勒红移（“大爆炸”宇宙论）

卫星跟踪

警察用多普勒测速仪测速



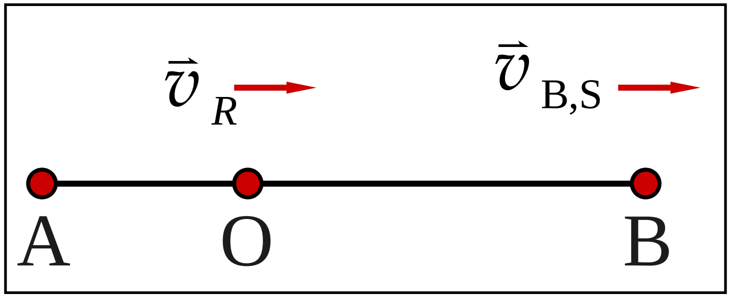
超声多普勒效应测血流速

例1: A、B 为两个汽笛，其频率皆为50Hz，A 静止，B 以60m/s 的速率向右运动. 在两个汽笛之间有一观察者O，以30m/s 的速度也向右运动. 已知空气中的声速为330m/s，求：

(1) 观察者听到来自A 的频率

(2) 观察者听到来自B 的频率

(3) 观察者听到的拍频



解：(1) A源不动，观察者远离A源

$$\nu_{R,A}=\frac{u-V_R}{u}\nu_s=\frac{330-30}{330}\times 500\text{Hz}=454.5\,\text{Hz}$$

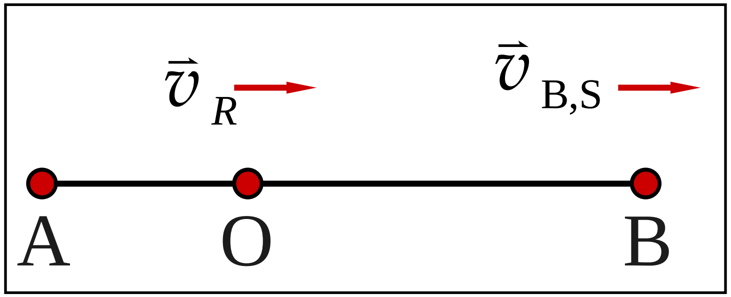
$$u=330\ \text{m/s},\ V_{\text{R}}=30\ \text{m/s}$$

例1: A、B 为两个汽笛，其频率皆为50Hz，A 静止，B 以60m/s 的速率向右运动. 在两个汽笛之间有一观察者O，以30m/s 的速度也向右运动. 已知空气中的声速为330m/s，求：

(1) 观察者听到来自A 的频率

(2) 观察者听到来自B 的频率

(3) 观察者听到的拍频



（2）观察者向源运动，源远离观察者

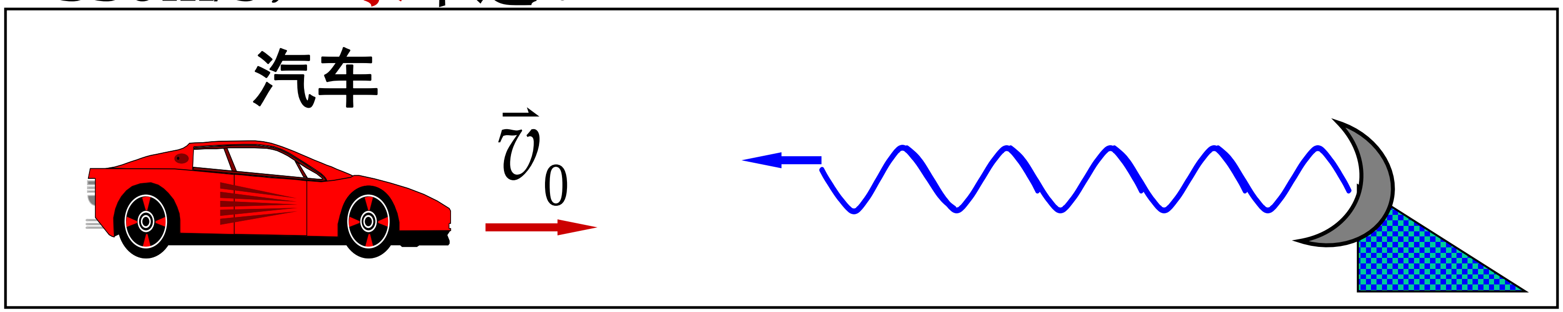
$$\nu_{R,B} = \frac{u + V_R}{u + V_S} = \frac{330 + 30}{330 + 60} \times 500\text{Hz} = 461.5\,\text{Hz}$$

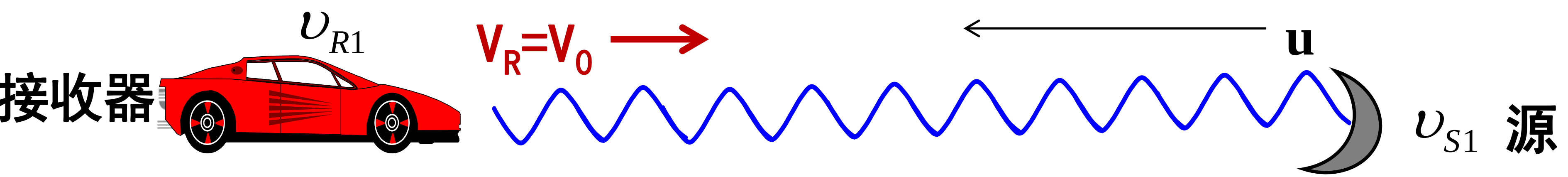
（3）观察者听到的拍频

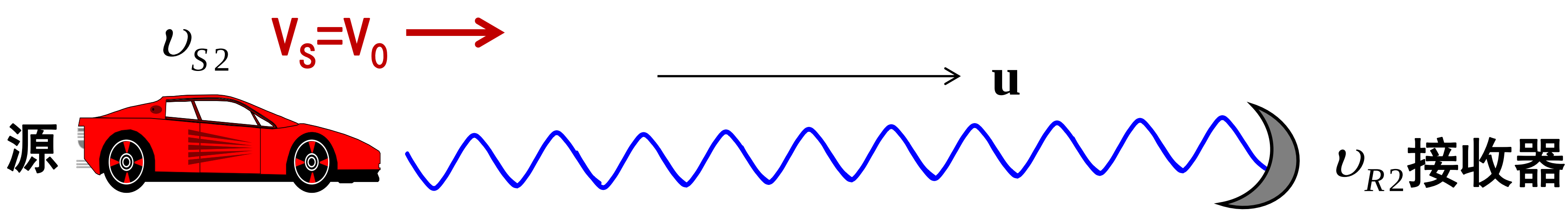
$$\Delta\nu = \left|\nu' - \nu''\right| = 7\,\text{Hz}$$

例2:

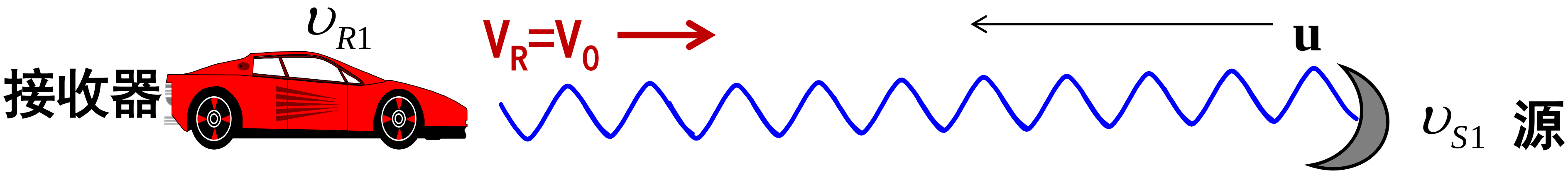
利用多普勒效应监测车速，固定波源发出频率为 $\nu=100\text{kHz}$ 的超声波，当汽车向波源行驶时，与波源安装在一起的接收器接收到从汽车反射回来的波的频率为 $\nu''=110\text{kHz}$. 已知空气中的声速为 $u=330\text{m/s}$， 求车速 .



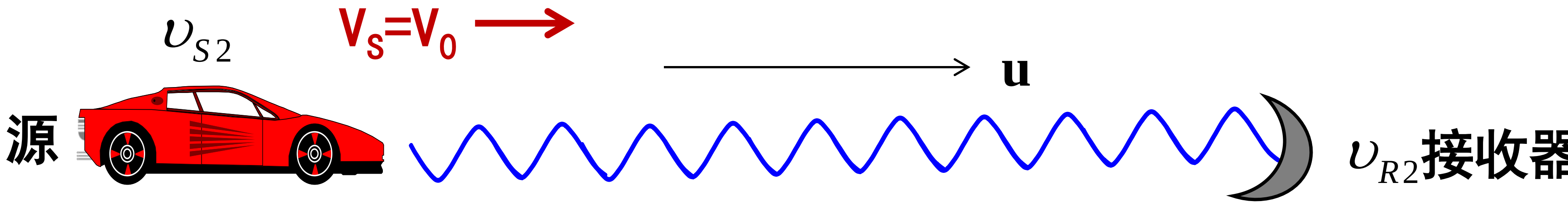




解：



车为接收器：源不动，接收器V_0向波源运动 $\nu'=\dfrac{u+v_0}{u}\nu$



车为波源：源以V_0向观察者运动，接收器不动 $\nu''=\dfrac{u}{u-v_s}\nu'$

车速 $v_0=\dfrac{\nu''-\nu}{\nu''+\nu}u=56.8\ \mathrm{km\cdot h^{-1}}$