## 三、应用：欧拉(Euler)公式

对复数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + i v_n)$ ①

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v$, 则称 ① **收敛**，且其和为 $u + i v$.

若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n + i v_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{u_n^2 + v_n^2}$ 收敛，则称 ① **绝对收敛.**

由于 $|u_n| \le \sqrt{u_n^2 + v_n^2}$, $|v_n| \le \sqrt{u_n^2 + v_n^2}$，故知

$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + i v_n)$绝对收敛 $\longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 绝对收敛 $\longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + i v_n)$收敛.

**定义**: 复变量 $z=x+iy$ 的指数函数为

$$e^{z}=1+z+\frac{1}{2!}z^{2}+\cdots+\frac{1}{n!}z^{n}+\cdots \quad (|z|<\infty)$$

易证它在整个复平面上绝对收敛。

当 $y=0$ 时, 它与实指数函数 $e^{x}$ 的幂级数展式一致。

当 $x=0$ 时, $e^{iy}=1+iy+\frac{1}{2!}(iy)^{2}+\frac{1}{3!}(iy)^{3}+\cdots+\frac{1}{n!}(iy)^{n}+\cdots$

$$=\left(1-\frac{1}{2!}y^{2}+\frac{1}{4!}y^{4}-\cdots+\frac{(-1)^{n}}{(2n)!}y^{2n}+\cdots\right)$$

$$+i\left(y-\frac{1}{3!}y^{3}+\frac{1}{5!}y^{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}y^{2n-1}+\cdots\right)=\cos y+i\sin y$$

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

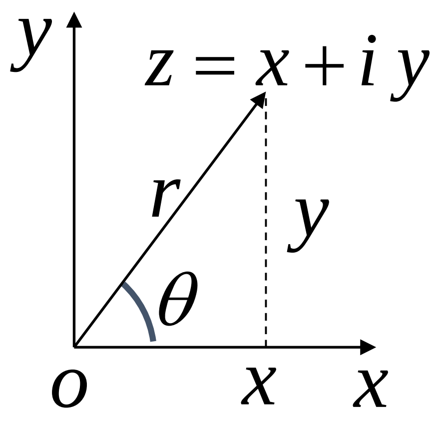
（欧拉公式）

则 $\begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{cases}$ （也称欧拉公式）

利用欧拉公式可得复数的指数形式

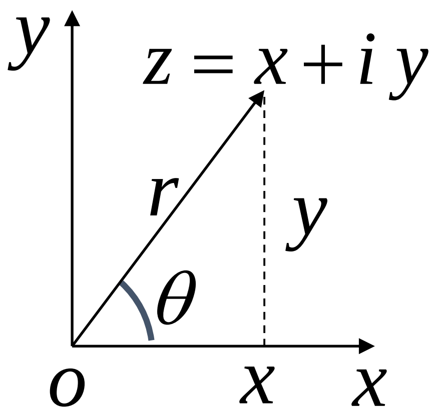
$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= re^{i\theta}$$



据此可得 **(德莫弗公式)**

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$




利用幂级数的乘法, 不难验证

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$$

特别有 $e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y) \quad (x, y \in R)$

$$\left| e^{x+iy} \right| = \left| e^x(\cos y + i\sin y) \right| = e^x$$

# 第十二章　微分方程

已知 $y' = f(x)$, 求 $y$ —— **积分问题**

↓ 推广

已知含 $y$ 及其若干阶导数的方程, 求 $y$

—— **微分方程问题**

$y'' = F(x, y, y')$ 常微分

$F(y'', x, y, y') = 0$

$u(x=0)=0$

$u(x=L)=1$ 偏微分

$u_t + k u_{xx} = 0$

初值

边值

$u_{tt} + c^2 u_{xx} = 0$

$u = f(x+ct) + g(x-ct)$

$\int y\,dx + y''y = 0$ 积分-微分方程

阶，定解条件

$u(x+h, t) - u(x, t) = u_t$ 差分微分方程

通解，特解

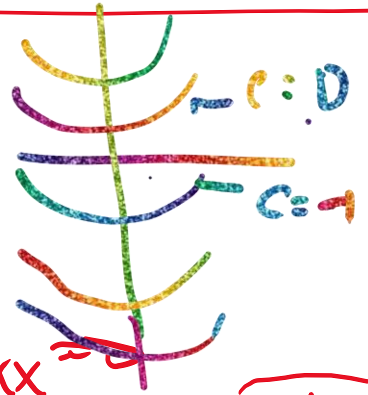
线性与非线性

$y^{(1)} = k_1 x + k_2 y + k_3 y'$

$y = x^2$

非线性

$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$




$\boxed{y^{(1)} = x}$

$y = \frac{1}{2}x^2 + C$

$y(0) = 1 \Rightarrow C = 1$

# 第一节 微分方程的基本概念

## 微分方程的基本概念

含未知函数及其导数的方程叫做**微分方程**。

$$\text{分类}\begin{cases}\text{常微分方程 (本章内容)}\\ \text{偏微分方程}\end{cases}$$

方程中所含未知函数导数的最高阶数叫做微分方程的**阶**。

一般地，$n$ 阶常微分方程的形式是 $F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$

或 $y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$ ( $n$ 阶显式微分方程)

微分方程的**解** — 使方程成为恒等式的函数。

**通解** — 解中所含独立的任意常数的个数与方程的阶数相同。

**特解** — 不含任意常数的解, 其图形称为**积分曲线。**

**定解条件** — 确定通解中任意常数的条件。

$n$ 阶方程的**初始条件(或初值条件)**:

$$y(x_0)=y_0\,,\ y'(x_0)=y'_0\,,\cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0{}^{(n-1)}$$

# 第十二章　微分方程

一、 微分方程的概念　阶，通解，特解，定解问题

二、一阶微分方程：　$y' = \boxed{f(x,y)}$

$$\begin{cases} h(x)\,g(y) \\ h\left(\dfrac{y}{x}\right) \\ h\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c}\right) \\ p(x)\,y+q(x) \end{cases}$$

可分离变量型、齐次型、可化为齐次型、

一阶线性、全微分方程、伯努利 ( Bernoulli )方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

$$dy = f(x,y)\,dx$$

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

三、高阶微分方程：

线性方程解的性质、

可降阶、二阶常系数线性齐次

$$y'' + c_1 y' + c_2 y = 0$$

# 第二节 一阶微分方程

一、可分离变量方程

二、齐次型微分方程

三、可化为齐次型的微分方程

四、一阶线性微分方程

五、全微分方程

# 一、可分离变量微分方程

$\boxed{g(y)=0}$

$$y' = f(x)g(y)$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

$(g(y)\neq 0)$ $$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

两边积分 $$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

通解： $$G(y) = F(x) + C$$

$$y = G^{-1}(F(x)+C)$$

$$y = \phi(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\phi}{dx} = f(x)g(\phi(x))$$

$$\int \frac{\phi' dx}{g(\phi(x))} = \int f(x)dx$$

两边对 $x$ 积分

$$\int \frac{d\phi}{g(\phi)} = \int f(x)dx$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

# 一、可分离变量微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f_1(x)\, f_2(y)$$

$$M_1(x)M_2(y)\,\mathrm{d}x + N_1(x)\; N_2(y)\,\mathrm{d}y = 0$$

$$\Big\downarrow \text{转化}$$

$$g(y)\,\mathrm{d}y = f(x)\,\mathrm{d}x$$

**解法**:

$$\Big\downarrow \text{两边积分, 得}$$

$$\underbrace{\int g(y)\,\mathrm{d}y}_{G(y)} = \underbrace{\int f(x)\,\mathrm{d}x}_{F(x)} \xrightarrow[\text{则有}]{} G(y) = F(x) + C$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f_1(x)\, f_2(y) \qquad ①$$

$$G(y) = F(x) + C \qquad ②$$

当 $G(y)$ 与$F(x)$ 可微且 $G'(y) = g(y) \neq 0$ 时，上述过程可逆，

说明由②确定的隐函数 $y = \Phi(x)$ 是①的解。

同样，当$F'(x) = f(x) \neq 0$ 时，

由②确定的隐函数 $x = \psi(y)$ 也是①的解。

称②为方程①的隐式通解，或通积分。

**例.** 求微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3x^2y$ 的通解。

$$\frac{dy}{y} = 3x^2 dx \qquad (y \neq 0)$$

$\boxed{y=0 \text{ 也是该方程的解.}}$

对两边积分 $\int \frac{dy}{y} = \int 3x^2 dx$

$$\ln|y| = x^3 + C_1$$

$$|y| = e^{x^3+C_1}$$

$$y = \pm e^{x^3} \cdot e^{C_1} = Ce^{x^3} \qquad \cancel{(C = \pm e^{C_1})}$$

当 $C=0$ 时 $y=0$

**例**. 求微分方程 $\frac{dy}{dx} = 3x^2 y$ 的通解。

**解:** 分离变量得 $\frac{dy}{y} = 3x^2\,dx$

两边积分 $\int \frac{dy}{y} = \int 3x^2\,dx$

或

得 $\ln|y| = x^3 + C_1$

$$\ln|y| = x^3 + \ln|C|$$

即 $y = \pm e^{x^3 + C_1} = \pm e^{C_1} e^{x^3}$

令 $C = \pm e^{C_1}$

$y = C e^{x^3}$

( $C$ 为任意常数 )

( 此式含分离变量时丢失的解 $y = 0$ )

**说明:** 在求解过程中每一步不一定是同解变形，因此可能增、减解。

**例**. 解初值问题 $\begin{cases} xy\,\mathrm{d}x + (x^2+1)\,\mathrm{d}y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

**解:** 分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y} = -\dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

两边积分得 $\ln|y| = \ln\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \ln|C|$

即 $y\sqrt{x^2+1} = C$ （$C$ 为任意常数）

由初始条件得 $C = 1$，故所求特解为

$$y\sqrt{x^2+1} = 1$$

## 二、齐次方程

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\boxed{u_{(x)} = \frac{y}{x}} \qquad y = ux, \qquad , \boxed{y' = xu' + u}$$

$$xu' + u = f(u) \qquad , \qquad u' = \frac{1}{x}\left(f(u) - u\right)$$

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{1}{x}dx$$ ，两边积分 $$\int \frac{du}{f(u)-u} = \ln|cx|$$

$$G(u) = \ln|cx|, \quad G\left(\frac{y}{x}\right) = \cdots$$

$\cdots\cdots$

## 二、齐次方程: 形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(\dfrac{y}{x})$ 的方程

**解法:** 令 $u=\dfrac{y}{x}$, 则 $y=ux$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$,

代入原方程得 $u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\varphi(u)$

分离变量: $\dfrac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$

两边积分, 得 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$

积分后再用 $\dfrac{y}{x}$ 代替 $\boldsymbol{u}$, 便得原方程的通解。

**例**. 解微分方程 $y' = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x}$.

**解:** 令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y' = u + xu'$,

代入原方程得 $u + xu' = u + \tan u$

分离变量 $\frac{\cos u}{\sin u}\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}x}{x}$

两边积分 $\int\frac{\cos u}{\sin u}\mathrm{d}u = \int\frac{\mathrm{d}x}{x}$

得 $\ln|\sin u| = \ln|x| + \ln|C|$, 即 $\sin u = Cx$

故原方程的通解为 $\sin\frac{y}{x} = Cx$ ($C$ 为任意常数)

## 三、可化为齐次方程的方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\quad(c^2+c_1^2\neq 0)$

$$a(x+h)+b(y+k)$$

$$a_1(x+h)+b_1(y+k)$$

$$=\frac{a+b\frac{y}{x}}{a_1+b_1\frac{y}{x}}$$

$$\begin{cases} ah+bk+c=0, \\ a_1h+b_1k+c_1=0 \end{cases}$$

$$X=x-h$$

$$Y=y-k$$

$$\frac{dY}{dX}=\boxed{\frac{aX+bY}{a_1X+b_1Y}}=\frac{a+b\frac{Y}{X}}{a_1+b_1\frac{Y}{X}}$$

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\neq 0$$

$$\begin{cases} x=X+h \\ y=Y+k \end{cases}$$

$$u=\frac{Y}{X},\quad Y=uX$$

$$u'x+u=\frac{a+bu}{a_1+b_1u}$$

if $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$ .

$$y' = \frac{\boxed{ax+by}+c_1}{k\boxed{(ax+by)}+c_2}$$

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = k.$$

$$\boxed{u = ax+by,}$$

$$u' = a + by'$$

$$\frac{u'-a}{b} = \frac{u+c_1}{ku+c_2}$$

$$u' = a + b\frac{u+c_1}{ku+c_2} = h(u)$$

$$\boxed{\frac{du}{h(u)} = dx} \Rightarrow \int \frac{du}{h(u)} = x + C$$

## 三、可化为齐次方程的方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\quad (c^2+c_1^2\neq 0)$$

1. 当 $\frac{a_1}{a}\neq\frac{b_1}{b}$ 时, 作变换 $x=X+h,\ y=Y+k$

( $h, k$ 为待定常数), 则 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}X,\ \mathrm{d}y=\mathrm{d}Y,$

原方程化为 $$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{aX+bY+ah+bk+c}{a_1X+b_1Y+a_1h+b_1k+c_1}$$

令 $\begin{cases} ah+bk+c=0 \\ a_1h+b_1k+c_1=0 \end{cases}$, 解出 $h, k$

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X}=\frac{aX+bY}{a_1X+b_1Y}$$ (齐次方程)

求出其解后, 将 $X = x - h, Y = y - k$ 代入, 即得原方程的解。

2.当 $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$ 时, 原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by) + c_1} \qquad (b \neq 0)$$

令 $v = ax + by$, 则 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = a + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = a + b\frac{v + c}{\lambda v + c_1}$$ (可分离变量方程)

**注:** 上述方法可适用于下述更一般的方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right) \quad (c^2 + c_1^2 \neq 0)$$

**例**. 求解 $\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{x+y+4}{x-y-6} \\ y\big|_{x=2} = -5 \end{cases}$

**解:** 令 $\begin{cases} h+k+4=0 \\ h-k-6=0 \end{cases}$ 得 $h=1, k=-5$

令 $x = X+1, y = Y-5$, 得 $\dfrac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \dfrac{X+Y}{X-Y}$

再令 $Y = Xu$, 得 $\dfrac{1-u}{1+u^2}\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}X}{X}$

积分得 $\arctan u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln|CX|$

代回原变量, 得原方程的通解:

$$\arctan\frac{y+5}{x-1}-\frac{1}{2}\ln\left[1+\left(\frac{y+5}{x-1}\right)^2\right]=\ln\left|C(x-1)\right|$$

利用 $y\big|_{x=2}=-5$ 得 $C=1$，故所求特解为

$$\arctan\frac{y+5}{x-1}=\frac{1}{2}\ln\left[(x-1)^2+(y+5)^2\right]$$

**思考:** 若方程改为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x+y+4}{x+y-6}$，如何求解?

**提示:** 令 $v=x+y$. $y+x-5\ln(y+x-1)=2x+c$

## 四、一阶线性微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

令 $Q(x)=0$. 则 $\dfrac{dy}{dx}=-P(x)y \Rightarrow \dfrac{dy}{y}=-P(x)dx$

$$\ln|y| = e^{-\int p(x)dx}+C_1$$

$$y = Ce^{-\int p(x)dx}$$

当 $Q(x)\neq 0$. $C \to C(x)$ $\boxed{\text{常数变易法}}$ $y=C(x)e^{-\int p(x)dx}$

$$C'(x)e^{-}+\cancel{C(x)(-p(x))e^{-}}+\cancel{pCe^{-}}=Q(x) \Rightarrow C'(x)=Q(x)e^{\int p(x)dx}$$

$$C(x)=\int Q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C$$

# 四、一阶线性微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

若 $Q(x)\equiv 0$，称为**齐次方程**；　若 $Q(x)\not\equiv 0$，称为**非齐次方程**。

1. 解齐次方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=0$

分离变量 $\frac{\mathrm{d}y}{y}=-P(x)\mathrm{d}x$

两边积分得 $\ln|y|=-\int P(x)\mathrm{d}x+\ln|C|$

故通解为 $y=C\,e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$

2. 解非齐次方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

用**常数变易法**: 作变换 $y(x)=u(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$，则

$$u'e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\cancel{-P(x)ue^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}\cancel{+P(x)ue^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}=Q(x)$$

即 $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$$

两边积分得 $$u=\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C$$

故原方程的通解 $$\boxed{y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]}$$

即 $$y=\underbrace{Ce^{-\int P(x)\mathrm{d}x}}_{\text{齐次方程通解}}+\underbrace{e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}_{\text{非齐次方程特解}}$$

## 内容小结

1. 一阶线性方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$

方法1　先解齐次方程，再用常数变易法。

方法2　用通解公式 $y=e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x+C\right]$

2. 伯努利方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^{n}\quad(n\neq 0,1)$

令 $u=y^{1-n}$，化为线性方程求解。

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1-n)P(x)z=(1-n)Q(x)$$

# 五、全微分方程

若存在 $u(x,y)$ 使 $\mathrm{d}u(x,y)=P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$

则称 $P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=0$ ① 为全微分方程 ( 又叫做恰当方程 ) 。

判别: $P, Q$ 在某单连通域$D$内有连续一阶偏导数, 则

① 为全微分方程 $\Longleftrightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x},\ (x,y)\in D$

求解步骤: 1. 求原函数 $u\,(x,y)$

方法1 凑微分法;

方法2 利用积分与路径无关的条件。

2. 由 $\mathrm{d}\,u=0$ 知通解为 $u\,(x,y)=C$。