第一节 中值定理

一、罗尔(Rolle)定理

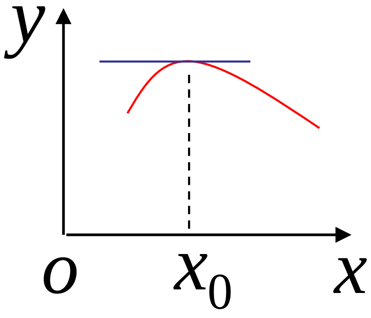
二、拉格朗日中值定理

三、柯西(Cauchy)中值定理

一、罗尔(Rolle)定理

费马(fermat)引理

$$\left.\begin{array}{l} y=f(x)\text{ 在}\bigcup(x_0)\text{有定义,} \\ \text{且 } f(x)\le f(x_0),\ f'(x_0)\text{ 存在} \\ \qquad (\text{或}\ge) \end{array}\right\} \Longrightarrow f'(x_0)=0$$



罗尔（Rolle）定理

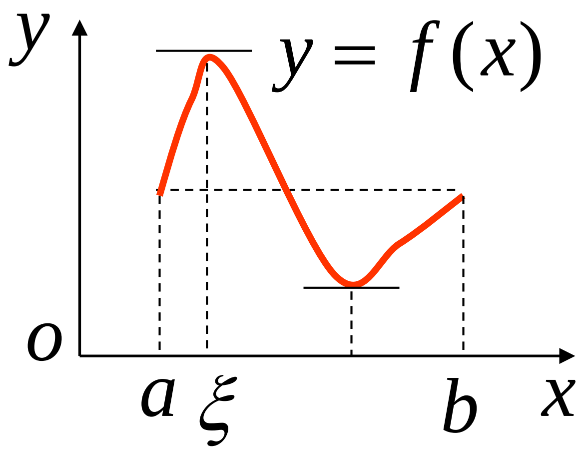
$y = f(x)$ 满足:

(1) 在区间 $[a\,,b]$ 上连续

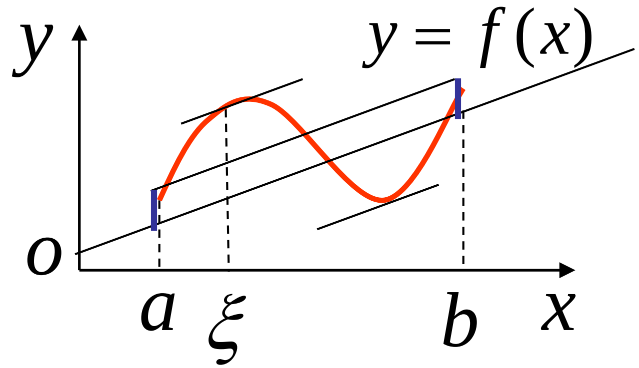
(2) 在区间 $(a\,,b)$ 内可导

(3) $f(a) = f(b)$

$\Longrightarrow$ 在$(a\,,b)$内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi) = 0.$



二、拉格朗日中值定理



$y=f(x)$ 满足:

(1) 在区间 $[\,a\,,b\,]$ 上连续

(2) 在区间 $(\,a\,,b\,)$ 内可导

$\Longrightarrow$ 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

证: 问题转化为证 $f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$

作辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$

显然, $\varphi(x)$ 在 $[\,a\,,b\,]$ 上连续, 在 $(\,a\,,b\,)$ 内可导, 且

$\varphi(a)=\dfrac{b\,f(a)-a\,f(b)}{b-a}=\varphi(b)$, 由罗尔定理知至少存在一点

$\xi\in(a,b)$, 使 $\varphi'(\xi)=0$, 即定理结论成立 . 证毕

例2. 设 $f(x)$在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$内可导, 且 $f(1)=0$, 证明至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使

$$f'(\xi) = -\frac{2f(\xi)}{\xi}$$

证: 问题转化为证 $\xi f'(\xi) + 2f(\xi) = 0.$

设辅助函数 $\varphi(x) = x^2 f(x)$

显然 $\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理条件, 故至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使

$$\varphi'(\xi) = 2\xi f(\xi) + \xi^2 f'(\xi) = 0$$

即有 $$f'(\xi) = -\frac{2f(\xi)}{\xi}$$

例2. 设$\varphi(x)$在 $[a,b]$上连续, 在 (a,b)内可导, 且

证明至少存在一点 $\xi \in (0,1)$, 使

$$\varphi'(\xi) = \frac{\varphi(\xi) - \varphi(a)}{b-\xi}$$

例3. 证明不等式$\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x \quad (x>0)$.

证: 设 $f(t)=\ln(1+t)$, 则$f(t)$在$[0,x]$上满足拉格朗日中值定理条件, 因此应有

$$f(x)-f(0)=f'(\xi)(x-0),\quad 0<\xi<x$$

即 $$\ln(1+x)=\frac{x}{1+\xi},\qquad 0<\xi<x$$

因为 $$\frac{x}{1+x}<\frac{x}{1+\xi}<x$$

故 $$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x \qquad (x>0)$$

三、柯西(Cauchy)中值定理

$f(x)$ 及 $g(x)$ 满足：

(1) 在闭区间 $[a, b]$ 上连续

(2) 在开区间 (a, b) 内可导

(3) 在开区间 (a, b) 内 $g'(x) \neq 0$

$\Longrightarrow$ 至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

分析: $g(b)-g(a) = g'(\eta)(b-a) \neq 0 \qquad a<\eta<b$

要证 $\boxed{\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g'(\xi) - f'(\xi)} = 0 \qquad \varphi'(\xi)$

$$\Longrightarrow \quad \phi(x) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g(x) - f(x)$$

证: 作辅助函数 $\phi(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)-f(x)$

则$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导, 且

$$\phi(a)=\frac{f(b)g(a)-f(a)g(b)}{g(b)-g(a)}=\phi(b)$$

由罗尔定理知, 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使 $\varphi'(\xi)=0$,即

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

思考: 柯西定理的下述证法对吗？

$$\because\ f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),\ \xi\in(a,b)$$

$$g(b)-g(a)=g'(\xi)(b-a),\ \xi\in(a,b)$$

两个 ξ 不一定相同

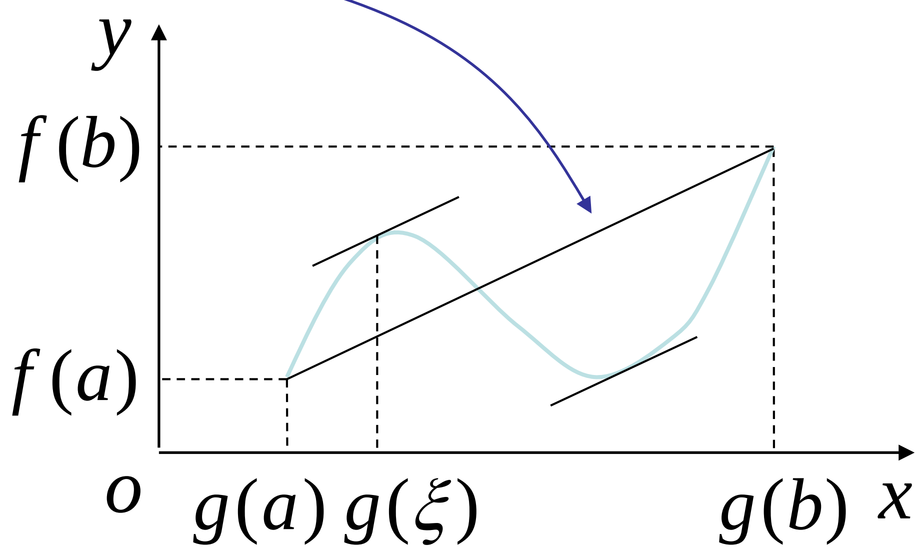
上面两式相比即得结论. **错!**

柯西定理的几何意义:

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}}=\boxed{\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}}$$

弦的斜率　　切线斜率

$$\begin{cases} x = g(t) \\ y = f(t) \end{cases}$$



注意: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{f'(t)}{g'(t)}$

例4. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导, 证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$, 使 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

证: 结论可变形为

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}=\left.\frac{f'(x)}{(x^2)'}\right|_{x=\xi}$$

设 $g(x)=x^2$, 则 $f(x), g(x)$ 在 $[0, 1]$ 上满足柯西中值定理条件, 因此在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ, 使

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}$$

即 $$f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$$

例5. 试证至少存在一点 $\xi \in (1,e)$ 使 $\sin 1 = \cos \ln \xi$.

证: 法1 用柯西中值定理 . 令

$$f(x) = \sin \ln x, \quad g(x) = \ln x$$

则 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[\,1\,,\,e\,]$ 上满足柯西中值定理条件,

因此 $$\frac{f(e)-f(1)}{g(e)-g(1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \xi \in (1,e)$$

即 $$\sin 1 = \frac{\frac{1}{\xi}\cos \ln \xi}{\frac{1}{\xi}} = \cos \ln \xi$$

分析:

$$\sin 1 = \cos \ln \xi \iff \frac{\sin \ln e - \sin \ln 1}{\ln e - \ln 1} = \frac{\frac{1}{\xi}\cos \ln \xi}{\frac{1}{\xi}}$$

例5. 试证至少存在一点 $\xi \in (1, e)$ 使 $\sin 1 = \cos \ln \xi$.

法2 令 $f(x) = \sin \ln x - \sin 1 \cdot \ln x$

则 $f(x)$ 在 $[\,1\,, e\,]$ 上满足罗尔中值定理条件,

因此存在 $\xi \in (1, e)$，使

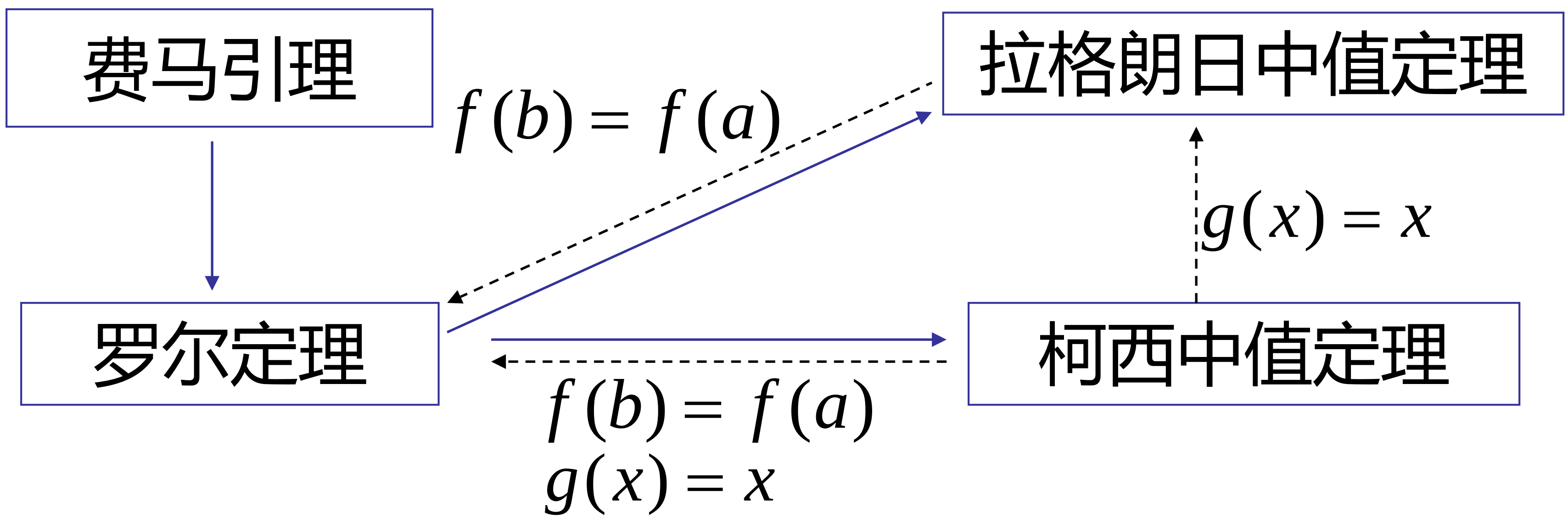
$$f'(\xi) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \cos \ln x - \sin 1 \cdot \frac{1}{x}$$

$$\sin 1 = \cos \ln \xi$$

内容小结

1. 微分中值定理的条件、结论及关系



2. 微分中值定理的应用

(1) 证明恒等式

(2) 证明不等式

(3) 证明有关中值问题的结论

关键:
利用逆向思维
设辅助函数

思考与练习

1. 填空题

1) 函数 $f(x)=x^4$ 在区间 [1, 2] 上满足拉格朗日定理条件, 则中值 $\xi=\underline{\sqrt[3]{\frac{15}{4}}}$.

$$\boxed{\frac{2^4-1^4}{2-1}=4\xi^3}$$

2) 设 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$, 方程 $f'(x)=0$ 有 $\underline{\ 3\ }$ 个根, 它们分别在区间 $\underline{(1,2),\ (2,3),\ (3,4)}$ 上.

分段函数求导问题

例 5 设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln x, & x \geqslant 1,\\ -x^2+3x-2, & x<1,\end{cases}$ 求 $f'(x)$.

解 当 $x>1$ 时，$f'(x)=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$；

当 $x<1$ 时，$f'(x)=\left(-x^2+3x-2\right)'=-2x+3$.

$$f'_{+}(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\ln x-\ln 1}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\ln(1+(x-1))}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{x-1}{x-1}=1,$$

$$f'_{-}(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{-x^3+3x-2}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{-(x-1)(x-2)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1^-}(2-x)=1=f'_{+}(1).$$

所以 $f'(1)=1$. 综上所得：

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\geqslant 1,\\ -2x+3, & x<1.\end{cases}$$

分段点的导数还可用下面定理来求.

定理 设 $f(x)$ 在 x_0 的某空心邻域内可导, 在 x_0 处连续. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x)$ 存在, 则 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f'(x) = f'_+(x_0)$; 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x)$ 存在, 则 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f'(x) = f'_-(x_0)$.

利用此定理, 例 5 中 $x=1$ 处的左、右导数可这样求得. 易见 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 且

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x} = 1.$$

所以 $f'_+(1) = 1$.

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} (-2x+3).$$

所以 $f'_-(1) = 1$.

例 6 求函数 $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 的导数.

解 当 $x\neq 0$ 时,

$$f'(x)=\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)'=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x},$$

而

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

故

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$$

此函数在 $x=0$ 处导数为零, 当然在 $x=0$ 处左、右导数也为零. 但易见 $\lim\limits_{x\to 0^+}f'(x)$ 及 $\lim\limits_{x\to 0^-}f'(x)$ 都不存在.

另外利用此定理, 验证 $f(x)$ 在 x_0 处的连续性也是重要的一环.

例 7　设 $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\geqslant 1, \\ 2x, & x<1, \end{cases}$ 求 $f'(x)$.

解　当 $x>1$ 时, $f'(x)=\left(x^2\right)'=2x$.

当 $x<1$ 时, $f'(x)=(2x)'=2$.

但 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x^2=1$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 2x=2\neq 1$, 故 $f(x)$ 在 $x=1$ 处不连续, 因此在 $x=1$ 处不可导.

注意到对于这函数 $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} 2x=2$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 2=2$, 而由此得出 $f'(1)=2$, 那就显然错了.