华东师范大学期末试卷（A）

2010—2011 学年第 二 学期

课程名称： 高等数学 A

学生姓名：______________ 学　　号：______________

专　　业：______________ 年级/班级：2010 级

课程性质：公共必修.

一	二	三	四	五	总分	阅卷人签名

一、填空题：共 24 分，每小题 4 分。

1. 设 $\vec{A}=(x^2+y^2)\vec{i}+(y^2+z^2)\vec{j}+(z^2+x^2)\vec{k}$，则 $\operatorname{div}\vec{A}=$ $2x+2y+2z$.

2. 函数 $z=f(x,y)$ 由方程 $z=e^{xyz}$ 确定，则 $dz=$ $\dfrac{yze^{xyz}}{1-xye^{xyz}}dx+\dfrac{xze^{xyz}}{1-xye^{xyz}}dy$.

3. 空间曲线 $x=t^2-1, y=t^3, z=\sqrt{3+t^2}$ 在 $P_0(0,1,2)$ 处的切线方程为

$\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-2}{\frac{1}{2}}$.

4. 设 $\vec{A}=4xz\,\vec{i}+x^2y\,\vec{j}+2y^2z\,\vec{k}$，则 $\operatorname{rot}\vec{A}=$ $4yz\vec{i}+4z\vec{j}+2xy\vec{k}$

5. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\ln(1+n)}{n+1}x^{n-1}$ 的收敛域为 $(-1,1]$.

6. 设有方程 $y''+y=2x\sin x$，则可设方程的特解为 $y=x(ax+b)\cos x+x(cx+d)\sin x$

二、解答题：共 76 分。解答题要有解题过程。

1.（6 分）设函数 $z=f(u,v)$ 有二阶连续偏导数，$u=xy$，$v=x^2+y^2$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解. $z=f(xy,\ x^2+y^2)$. $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1\cdot y+f_2\cdot 2x=y\cdot f_1+2x\cdot f_2$ 2分

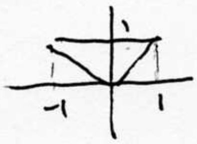
$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial y}(yf_1+2xf_2)=f_1+y(f_{11}\cdot x+f_{12}\cdot 2y)$

$+2x(f_{21}\cdot x+f_{22}\cdot 2y)$ 3分

$=f_1+\cancel{(xy+2x^2)f_{12}}\,xyf_{11}+(2x^2+2y^2)f_{12}+4xyf_{22}$ 1分

2.（6分）设D由$y=x, y=-x, y=1$围成，求二重积分$\iint_D x^2\cdot\sqrt{y}\,d\sigma$.

解 如图. $D:\begin{cases}-y\le x\le y\\ 0\le y\le 1\end{cases}$ 2分



$\therefore \iint\limits_D x^2\sqrt{y}\,d\sigma = \int_0^1\sqrt{y}\,dy\int_{-y}^{y}x^2\,dx = \int_0^1\frac{1}{3}\sqrt{y}\cdot x^3\Big|_{-y}^{y}dy$ 2分

$= \frac{2}{3}\int_0^1 y^{\frac{7}{2}}dy = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{9}y^{\frac{9}{2}}\Big|_0^1 = \frac{4}{27}$. 2分

3.（6分）计算$\oint\limits_L 2xy\,dx + x^3\,dy + (x^2-z^2)dz$，其中$L$是$x^2+y^2+z^2=4$与$z=0$的交线，

从z正向往负向看时L为逆时针方向.

解: L为xOy平面上的曲线 $x^2+y^2=4$. 故第三个变为0

原式 $=\oint 2xy\,dx + x^3\,dy$. 用格林公式 $D:\begin{cases}0\le\theta\le 2\pi\\ 0\le r\le 2\end{cases}$ 2分

$= \iint\limits_D(3x^2-2x)\,d\sigma = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2(3r^2\cos^2\theta - 2r\cos\theta)\,r\,dr$ 2分

$= \int_0^{2\pi}3\cos^2\theta\cdot\frac{1}{4}r^4\Big|_0^2 d\theta - \int_0^{2\pi}2\cos\theta\cdot\frac{1}{3}r^3\Big|_0^2 d\theta = 12\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta = 12\pi$ 2分

4.（6分）将函数$f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$展开为$x$的幂级数，并指出收敛域.

解. $\because f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$ 2分

而 $\frac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$

漏$f(0)$扣1分

$\therefore f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^{2n}\,dx + \underline{\underline{f(0)}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \frac{\pi}{4}$ 3分

（在$x=1$处，级数收敛，但$f(x)$无定义） $-1\le x<1$ 1分

5.（6分）求$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的和函数.

解. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+2)x^n - \sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n = 2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n - \frac{1}{1-x}$ 2分.

$= 2\sum(x^{n+1})' - \frac{1}{1-x} = 2\left(\sum x^{n+1}\right)' - \frac{1}{1-x}$ 2分

$= 2\left(\frac{x}{1-x}\right)' - \frac{1}{1-x} = \frac{x}{(1-x)^2}$ $(-1<x<1)$ 2分

6.（6 分）设 $f(x)=x^2+x$，$(0\le x\le 2)$，$S(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(-2,2]$ 上余弦级数展开式 $a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{2}$ 的和函数，求当 $x\in(2,4]$ 时，$S(x)$ 表达式.

解. 首先将 $f(x)$ 作偶延拓 $\tilde{f}(x)=\begin{cases} x^2-x, & -2\le x<0 \\ x^2+x, & 0\le x\le 2 \end{cases}$，并周期为4，

2分

当 $x\in(2,4]$ 时，$x-4\in(-2,0]$. 1分

$\therefore S(x)=S(x-4)=\tilde{f}(x-4)=(x-4)^2-(x-4)$

$=x^2-9x+20$. $x\in(2,4]$. 3分

7.（6 分）求微分方程 $(x-2)dy+[y+(x-2)^2]dx=0$ 的通解

解：$P(x,y)=y+(x-2)^2$，$Q(x,y)=(x-2)$ $\therefore \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=1$ 2分

是全微分方程，又

$(x-2)dy+[y+(x-2)^2]dx=xdy+ydx-2dy+(x-2)^2dx$ 2分

$=d(xy)-d(2y)+d(\frac{1}{3}(x-2)^3)=0$ $\therefore$ 通解为

$xy-2y+\frac{1}{3}(x-2)^3=C$. 2分

8.（8 分）求方程 $y'=\frac{xy}{x^2-y^2}$ 的通解.

解. 用 xy 除右边的分子分母，得 $y'=\frac{1}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}$，$\therefore$ 是齐次型方程. 2分

令 $u=\frac{y}{x}$，得 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，代入得 $u+x\frac{du}{dx}=\frac{1}{\frac{1}{u}-u}=\frac{u}{1-u^2}$ 2分

$x\frac{du}{dx}=\frac{u}{1-u^2}-u=\frac{u^3}{1-u^2}$，分离变量 $(\frac{1}{u^3}-\frac{1}{u})du=\frac{dx}{x}$. 2分

$-\frac{1}{2u^2}-\ln u=\ln x+C$ $-\frac{1}{2u^2}=\ln xu+C$，即 $\ln y+\frac{x^2}{2y^2}=C$. 2分

9.（8 分）设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}}{n^p}$ 收敛，求 p 的取值范围.

解：设 $u_n=\frac{\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2-n}}{n^p}=\frac{2n}{n^p(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2-n})}=\frac{1}{n^p}\cdot\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}$ 2分

令 $v_n=\frac{1}{n^p}$，$\sum v_n$ 当 $p>1$ 时收敛，$p\le 1$ 时发散. 而 3分

$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}=1$，即 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 有相同敛散性，

2分

故原级数当 $p>1$ 时收敛，$p\le 1$ 时发散.

1分

10.（9 分）求 $xy''+2y'=0$ 的通解，并求满足 $y(1)=0, y'(1)=1$ 的特解。 2分

解. 这是 $y''=f(x,y')$ 型方程. 令 $y'=z$, 代入原方程得

$xz'+2z=0$. 分离变量 $\frac{dz}{z}=-2\frac{dx}{x}$ 积分

$\ln z=\ln x^{-2}+c_1'$, $z=\frac{c_1}{x^2}$, $y'=\frac{c_1}{x^2}$ 3分

以 $y'(1)=1$ 代入, 得 $c_1=1$. 即 $y'=\frac{1}{x^2}$ 2分

再积分, 得 $y=-\frac{1}{x}+C_2$. 以 $y(1)=0$ 代入, 得 $C_2=1$, 所求特解为 $y=-\frac{1}{x}+1$ 2分

11.（9 分）设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上收敛，其和函数 $y(x)$ 满足方程 $y''-2xy'-4y=0, y(0)=0, y'(0)=1.$

（1）证明 $a_{n+2}=\frac{2}{n+1}a_n,\ n=1,2,\cdots$;（2）求出和函数 $y(x)$.

解. (1) 设 $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. 由 $y(0)=0$ 知 $a_0=0$, $y'(0)=1$ 知

$a_1=1$ ∴ $y(x)=x+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n$,

$y'=1+\sum_{n=2}^{\infty}a_n n x^{n-1}$ $\qquad y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$ 2分

代入原方程

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\left(2x+\sum_{n=2}^{\infty}2na_nx^n\right)-\left(4x+4\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n\right)=0$$

整理后, 得 $2a_2+(6a_3-6)x+\sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}-(2n+4)a_n\right]x^n=0$

所以 $a_2=0$, $a_3=1$, $a_{n+2}=\frac{2n+4}{(n+2)(n+1)}a_n=\frac{2}{n+1}a_n$. 2分

$a_1=1$, $a_3=\frac{2}{1+1}a_1$ ∴ $a_{n+2}=\frac{2}{n+1}a_n\ (n=1,2,\cdots)$. 1分

(2) 由(1)知 $a_{2m}=0$. $a_{2m+1}=\frac{2}{2m}a_{2m-1}=\frac{1}{m}a_{2m-1}=\frac{1}{m(m-1)}a_{2m-3}$

$=\cdots=\frac{1}{m!}\ (m=1,2,\cdots)$ 2分

∴ $y(x)=x+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m!}x^{2m+1}=x\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(x^2)^m\right)=xe^{x^2}$ 1分