1. 4参数方程所确定的函数的导数

变量y与x之间的函数关系由参数方程 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ 确定的，其中t 称为参数。由参数方程所确定的函数$y=f(x)$,可利用参数方程直接求得y对x的导数。

设 $x=\varphi(t), y=\psi(t)$ 均可导， 且 $x=\varphi(t)$ 具有单值连续的反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$， 则参数方程确定的函数可看成 $y=\psi(t)$ 与 $t=\varphi^{-1}(x)$ 复合而成的函数，根据求导法则有：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\psi'(t)\cdot\frac{1}{\varphi'(t)}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

——参数方程所确定函数的求导公式

例9　　求曲线 $\begin{cases} x=t^2-1 \\ y=t-t^3 \end{cases}$ 在t =1处函数y=f(x)的导数

解：　曲线y=f(x)在t =1处的导数

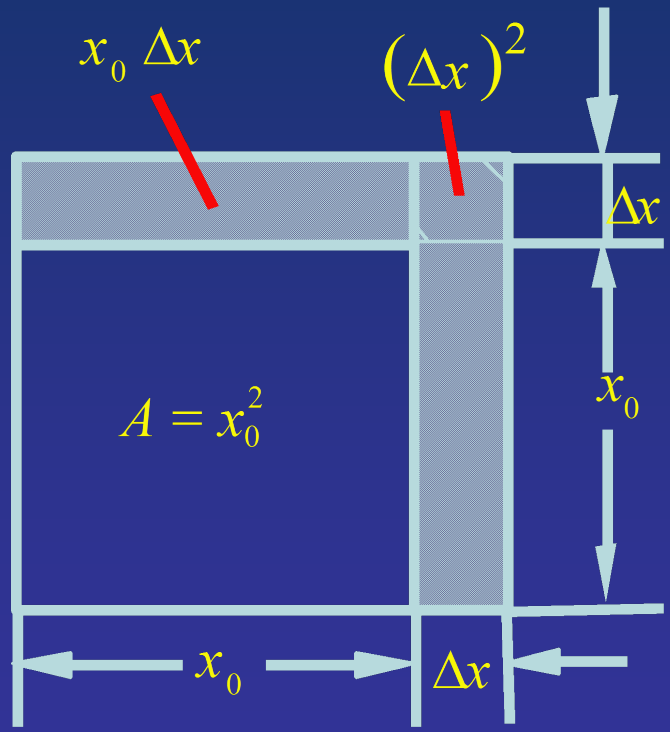
$$k=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = \left.\frac{1-3t^2}{2t}\right|_{t=1}$$

$$=\frac{-2}{2}=1$$

1.5 微分

1.5.1 微分的概念

例1 设有一个边长为x_0的正方形金属片，受热后它的边长伸长了Δx，问其面积增加了多少？



解：正方形金属片的面积 A 与边长 x 的函数关系：

$$A = x^2,$$

受热后当边长由x_0伸长到$x_0+\Delta x$时, 面积A相应的增量为

$$\Delta A = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$$

从上式可以看出，ΔA分成两部分：

第一部分是Δx的线性函数$2x_0\Delta x$

是当$\Delta x\to 0$时与Δx同阶的无穷小；

第二部分$(\Delta x)^2$

是当$\Delta x\to 0$时比Δx高阶的无穷小。

这表明$|\Delta x|$很小时，可用其线性函数作为ΔA的近似值：

$$\Delta A\approx 2x_0\Delta x.$$

这部分就是面积 ΔA 的增量的主要部分（线性主部）

因为$A'(x_0)=(x^2)'\big|_{x=x_0}=2x_0$,

所以上式可写成 $\boxed{\Delta A\approx A'(x_0)\Delta x.}$

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，

如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的增量

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

可以表示为

$$\Delta y = B\cdot\Delta x + o(\Delta x)$$

其中B是与 Δx 无关的常数，$o(\Delta x)$ 是当 $\Delta x \to 0$ 时，

比 Δx 高阶的无穷小量，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微，

$\mathrm{B}\cdot\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的微分，记为

$$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}，\quad 即\ \ \mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=\mathrm{B}\cdot\Delta x.$$

于是，正方形面积的增量式可写成 $\Delta A \approx dA\Big|_{x=x_0}$

前页 后页 结束

由微分定义，函数$f(x)$在点x_0处可微与可导等价，且$B = f'(x_0)$，

因而 $f(x)$ 在点 x_0 处的微分可写成

$$\mathrm{d}y\Big|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x$$

通常把Δx记为$\mathrm{d}x$，称自变量的微分，于是函数$f(x)$在点x_0处的微分又可写成：

$$\mathrm{d}y\Big|_{x=x_0} = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$$

可微函数：如果函数在区间(a, b)内每一点都可微，则称该函数在(a, b)内可微。

$f(x)$ 在(a,b)内任一点x处的微分记为 $\boxed{\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x}$

上式两端同除以自变量的微分，得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$

因此导数也称为微商.

例2 求函数 $y=x^2$ 在 $x=1$，$\Delta x=0.01$ 时的改变量和微分。

解：$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=1.01^2-1^2=0.0201$$

在点 $x=1$ 处，$\mathrm{d}\,y=(x^2)'\Delta x=2x\Delta x$

于是 $$\mathrm{d}\,y\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.01}}=2x\Delta x\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.01}}=0.02$$

例3 半径为r 的圆的面积 $s=\pi r^2$当半径增大 Δr时，求面积的增量与微分.

解：面积的增量

$$\Delta s=\pi(r+\Delta r)^2-\pi r^2=2\pi r\Delta r+\pi(\Delta r)^2.$$

面积的微分为 $$\mathrm{d}\,s=s'_r\Delta r=2\pi r\Delta r.$$

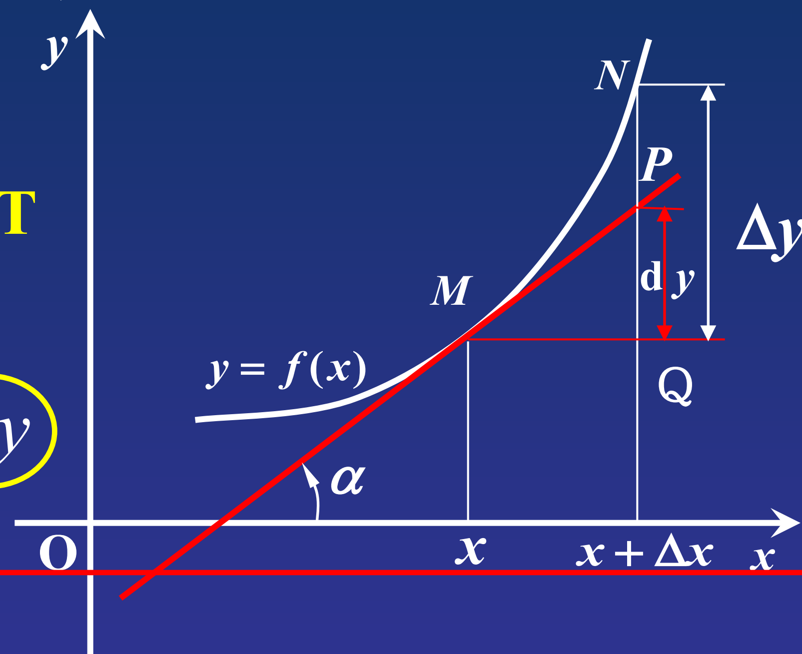
1.5.2 微分的几何意义

设函数 $y=f(x)$的图形如图所示。过曲线 $y=f(x)$上一点 $M(x,y)$处作切线MT,设MT的倾角为 α，则切线的斜率

$$\tan\alpha = f'(x)$$

当自变量 x有增量 Δx 时，切线MT的纵坐标相应地有增量

$$QP = \tan\alpha \cdot \Delta x = f'(x)\Delta x = \mathrm{d}\,y$$



微分的$\mathrm{d}\,y = f'(x)\Delta x$ **几何意义：**

当x有增量 Δx 时，曲线 $y=f(x)$在对应点 $M(x,y)$处的切线的纵坐标的增量, 就是函数$f(x)$在$M(x,\ y)$点的微分。

用$\mathrm{d}\,y$ 近似代替Δy，就是用QP近似QN，并且 $|\Delta y - \mathrm{d}\,y| = PN$

1.5.3 微分的运算法则

1. 微分的基本公式:

(1) $\mathrm{d}C = 0 \quad (C\text{为常数})$

(2) $\mathrm{d}x^a = ax^{a-1}\mathrm{d}x \quad (a\text{为常数})$

(3) $\mathrm{d}a^x = a^x \ln a \,\mathrm{d}x \quad (a > 0, a \neq 1)$

(4) $\mathrm{d}\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$

(5) $\mathrm{d}\log_a x = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\ln a}\mathrm{d}x \quad (a > 0, a \neq 1)$

(6) $\mathrm{d}\ln x = \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$

(7) $\mathrm{d}\sin x = \cos x \mathrm{d}x$

(8) $\mathrm{d}\cos x = -\sin x \mathrm{d}x$

$$(9)\quad \mathrm{d}\tan x = \sec^2 x\,\mathrm{d}x \qquad (10)\quad \mathrm{d}\cot x = -\csc^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$(11)\quad \mathrm{d}\sec x = \sec x \tan x\,\mathrm{d}x \qquad (12)\quad \mathrm{d}\csc x = -\csc x \cot x\,\mathrm{d}x$$

$$(13)\quad \mathrm{d}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \qquad (14)\quad \mathrm{d}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$(15)\quad \mathrm{d}\arctan x = \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \qquad (16)\quad \mathrm{d}\,\mathrm{arccot}\,x = -\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

2. 微分的四则运算法则

设$u=u(x)$，$v=v(x)$均可微，则

$$\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v;$$

$$\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u \pm u\mathrm{d}v;$$

$\mathrm{d}(Cu) = C\,\mathrm{d}\,u$ （C 为常数）；

$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,\mathrm{d}\,u - u\,\mathrm{d}\,v}{v^2} \qquad (v \neq 0).$$

3．复合函数的微分法则

设函数 $y = f(u)$，$u = \varphi(x)$ 都是可导函数，则复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的微分

$$\mathrm{d}y = \left\{ f\left[\varphi(x)\right]\right\}'_x \mathrm{d}x = f'(u)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

而 $\mathrm{d}u = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x$，于是 $\mathrm{d}y = f'(u)\mathrm{d}u$

若$y=f(u)$可微，不论u是自变量还是中间变量，总有

$$\mathrm{d}y = f'(u)\,\mathrm{d}u$$

这就是一阶微分形式不变性.

利用微分形式不变性，可以计算复合函数和隐函数的微分.

例3 设$y=\sqrt{2+3x^2}$,求$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$与$\mathrm{d}y$.

解: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(\sqrt{2+3x^2})'=\dfrac{1}{2\sqrt{2+3x^2}}(2+3x^2)'=\dfrac{6x}{\sqrt{2+3x^2}}$

$$\mathrm{d}y=\frac{6x}{\sqrt{2+3x^2}}\mathrm{d}x.$$

例4 求由方程$x^2+2xy-2y^2=1$所确定的隐函数 $y=f(x)$

的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与微分 $\mathrm{d}y$

解：对方程两边求导，得 $2x+2y+2xy'-4yy'=0$

即导数为 $y'=\dfrac{x+y}{y-x}$

微分为 $\mathrm{d}y=\dfrac{x+y}{y-x}\mathrm{d}x$

由以上讨论可以看出，微分与导数虽是两个不同的概念，但却紧密相关，求出了导数便立即可得微分，求出了微分亦可得导数，因此，通常把函数的导数与微分的运算统称为微分法.

在高等数学中，把研究导数和微分的有关内容称为微分学.

1.5.4 微分在近似计算中的应用

由微分的定义可知，当函数 $y=f(x)$ 在 $\boldsymbol{x_0}$ 点的导数 $f'(x_0)\neq 0$，且 $|\Delta x|$ 很小时，我们有近似公式

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx \mathrm{d}y = f'(x_0)\Delta x$$

或写成 $\boldsymbol{f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x.}$ （1）

上式中令 $x_0+\Delta x = 0$ ，则

$$\boldsymbol{f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0).} \qquad (2)$$

特别地, 当x_0=0，$|x|$ 很小时, 有

$$\boldsymbol{f(x)\approx f(0)+f'(0)x} \qquad (3)$$

公式(1) (2) (3)可用来求函数*f(x)*的近似值。

注： 在求 $f(x)$ 的近似值时，要选择适当的 x_0，使 $f(x_0)$ $f'(x_0)$ 容易求得，且 $|x-x_0|$ 较小.

应用（3）式可以推得一些常用的近似公式, 当 $|x|$ 很小时, 有

(1) $\sin x \approx x$（ x 用弧度作单位）

(2) $\tan x \approx x$(x 用弧度作单位）

(3) $e^x \approx 1+x$

(4) $\ln(1+x) \approx x$

(5) $\sqrt[n]{1+x} \approx 1+\frac{1}{n}x$

例5　计算$\sin 46^\circ$的近似值.

解：设 $f(x)=\sin x$, 取 $x=46^\circ$，$x_0=45^\circ=\dfrac{\pi}{4}$

则 $x-x_0=1^\circ=\dfrac{\pi}{180}$

于是由（2）式得

$$\sin x \approx \sin x_0 + \cos x_0 \cdot (x-x_0).$$

即 $\sin 46^\circ \approx \sin\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{\pi}{4}\cdot\dfrac{\pi}{180}$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}\approx 0.719$$

第二章 不定积分与定积分

2.1 不定积分

2.1.1 原函数

1. 原函数

设$f(x)$是定义在某区间的已知函数，若存在函数$F(x)$，使得 $F'(x)=f(x)$ 或 $dF(x)=f(x)dx$，则称 $F(x)$是$f(x)$的一个原函数。

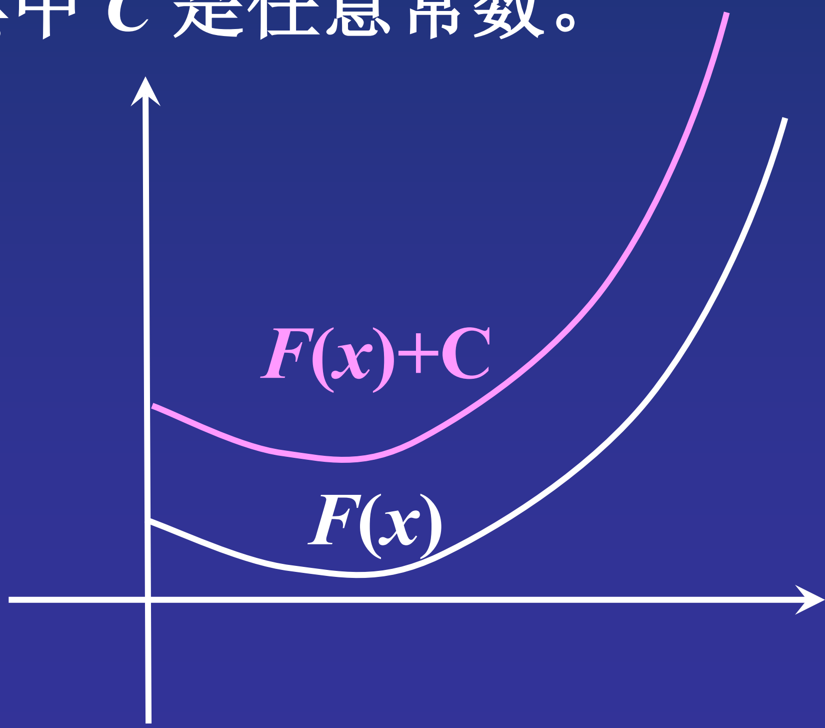
如：$\because (\sin x)' = \cos x$

$\therefore \sin x$ 是$\cos x$的一个原函数.

2. 原函数存在定理

定理1 若函数 $f(x)$ 在某区间上连续,则在该区间上的原函数一定存在.

定理2 若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $F(x)+C$ 是 $f(x)$ 的全部原函数，其中 C 是任意常数。



例1 下列函数中，（ B ）是函数 e^{-2x} 的原函数。

A. $y=-2e^{-2x}$

B. $y=-\frac{1}{2}e^{-2x}$

C. $y=e^{-2x}$

D. $y=2e^{-2x}$

分析： $\because(-\frac{1}{2}e^{-2x})'=-\frac{1}{2}\cdot e^{-2x}\cdot(-2x)'=e^{-2x}$

故选B

2.1.2 不定积分

1. 不定积分的概念

函数 $f(x)$ 的全体原函数 $F(x)+C$ 叫做 $f(x)$ 的不定积分. 记为

$$\int f(x)dx = F(x)+C \quad \text{其中} \quad F'(x)=f(x)$$

说明： x ：称为积分变量，

$f(x)$：称为被积函数，

$f(x)dx$：称为被积表达式.

C：称为积分常数，

“$\int$”：称为积分号，

例2 若 $f(x)$ 的导函数为 $\sin x$ ，则 $f(x)$ 的一个原函数是（ B ）

A. $1+\sin x$ B. $1-\sin x$

C. $1+\cos x$ D. $1-\cos x$

分析： $\because f'(x)=\sin x$ $\therefore f(x)=-\cos x+C_1$

$\therefore \int f(x)dx=\int(-\cos x+C_1)dx=-\sin x+C_1x+C_2$

令 $C_1=0, C_2=1$ 故选B

2、不定积分几何意义

积分曲线：

设 $f(x)$ 的一个原函数为 $F(x)$，则曲线

$y=F(x)$称为函数 $f(x)$ 的一条积分曲线.

不定积分的几何意义：

$f(x)$ 的全部积分曲线所组成的积分曲线族，

其方程是 $y=F(x)+C$

说明：曲线族里的所有积分曲线在横坐标 x 相同的点处的切线彼此平行，即这些切线有相同的斜率 $f(x)$ 。

例3 已知曲线 $y=f(x)$ 在任意一点 x 处的切线斜率为 $3x^2$ 且曲线经过 $(1,2)$ 点,求此曲线的方程。

解: 设所求曲线的方程为:$y=f(x)$

由题意知:$y=\int 3x^2dx=x^3+C$

又 $\because$ 积分曲线族过 $(1,2)$ 点

$\therefore \quad 2=1+C$

即 $C=1$

故所求曲线的方程为 $y=x^3+1$

3、基本积分公式

1、$\int 0dx = C$

2、$\int x^{\alpha} dx = \dfrac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C$

3、$\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

4、$\int a^{x} dx = \dfrac{1}{\ln a} a^{x} + C$

5、$\int e^{x} dx = e^{x} + C$

6、$\int \sin x dx = -\cos x + C$

7、$\int \cos x dx = \sin x + C$

8、$\int \sec^{2} x dx = \tan x + C$

9、$\int \csc^{2} x dx = -\cot x + C$

例4 若 $\int f(x)dx = F(x)+C$，则 $\int e^{-x} f(e^{-x})dx = (\ C\ )$

A. $F(e^{x})+C$ **B.** $F(e^{-x})+C$

C. $-F(e^{-x})+C$ **D.** $\frac{1}{x}F(e^{-x})+C$

分析： $\int e^{-x} f(e^{-x})dx = -\int f(e^{-x})d(e^{-x})$

$$= -F(e^{-x})+C$$

故选C

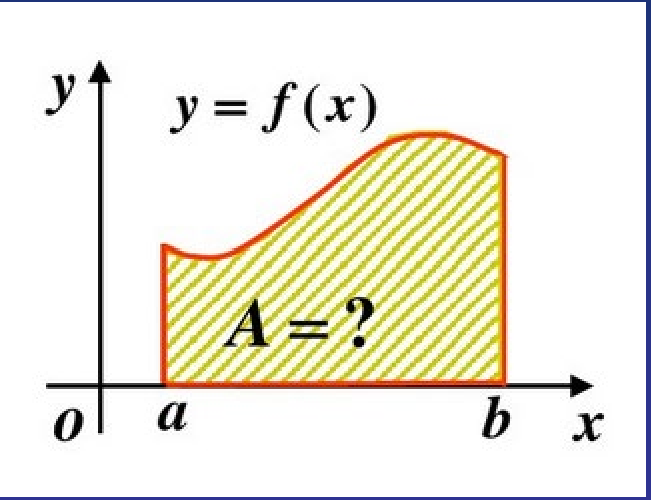
$$(e^{-x})' = (e^{-x})\cdot(-x)' = -e^{-x}$$

2.2　定积分

2.2.1定积分的概念与性质

1、定积分问题举例

例.　曲边梯形的面积



设曲边梯形是由连续曲线

$$y = f(x) \quad (f(x) \geq 0)$$

及x轴以及两直线 $x = a, x = b$ 所围成 ，求其面积 A .

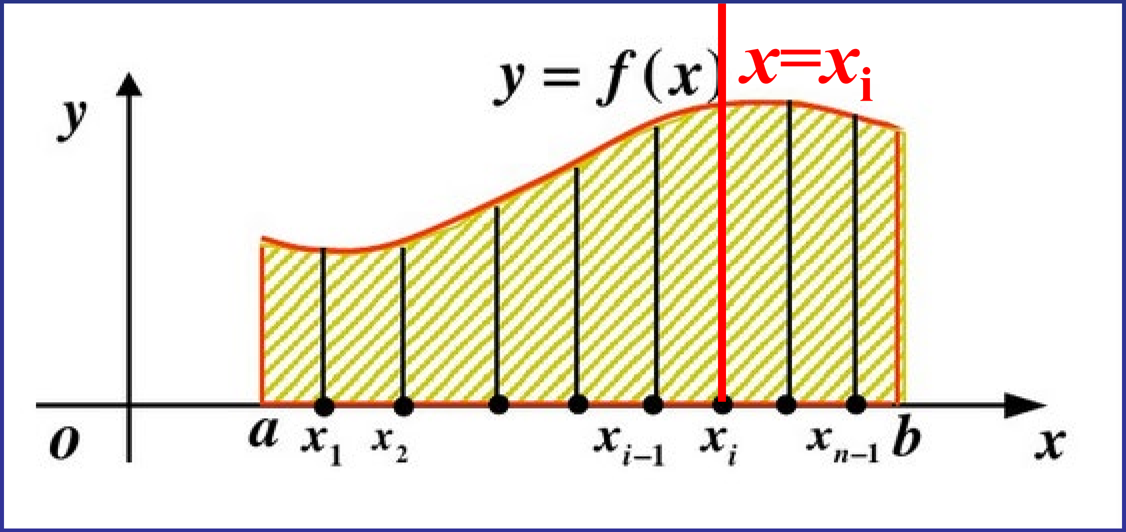
解决步骤:

1) 分割　2) 取近似　3) 求和　4) 取极限

1) 分割 在区间 $[a, b]$ 中任意插入 $n-1$ 个分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

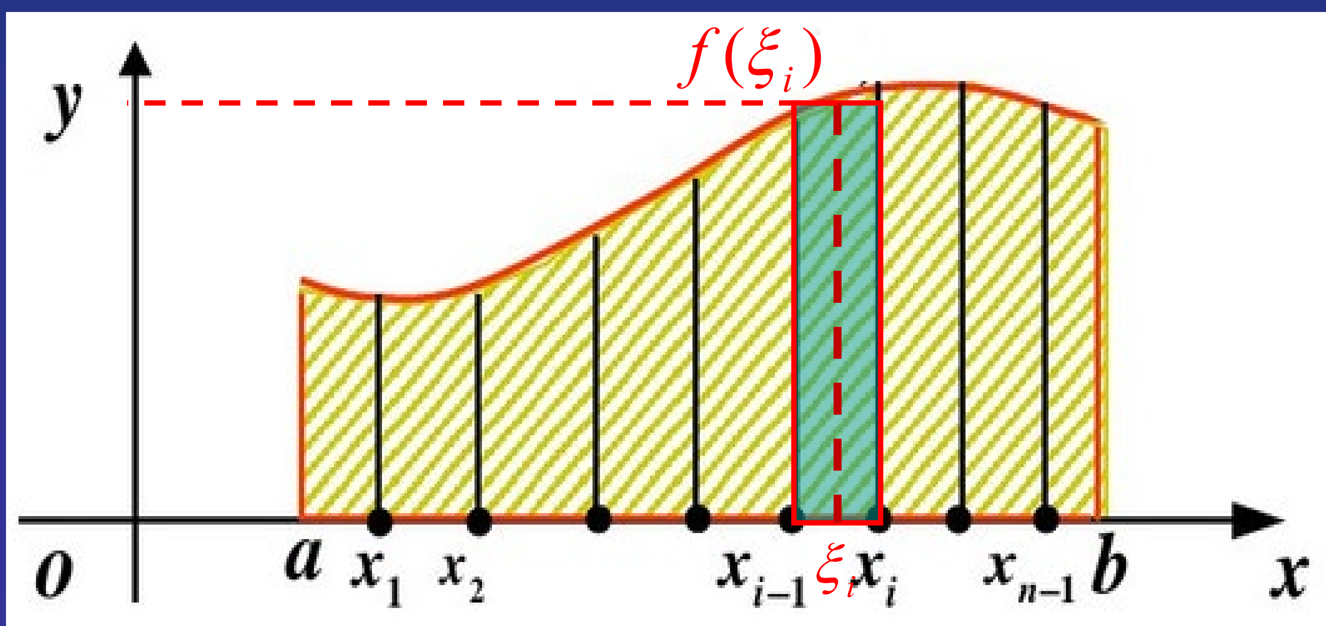
用直线 $x = x_i$ 将曲边梯形分成 n 个小曲边梯形;

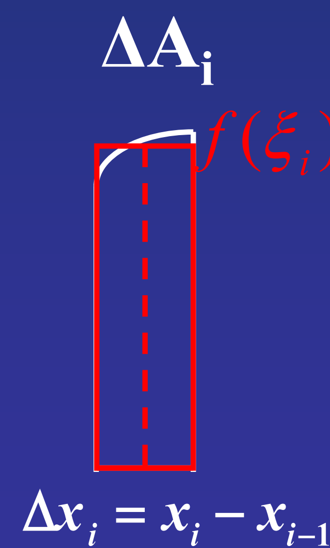


2) 取近似 在第i个窄曲边梯形上任取 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$

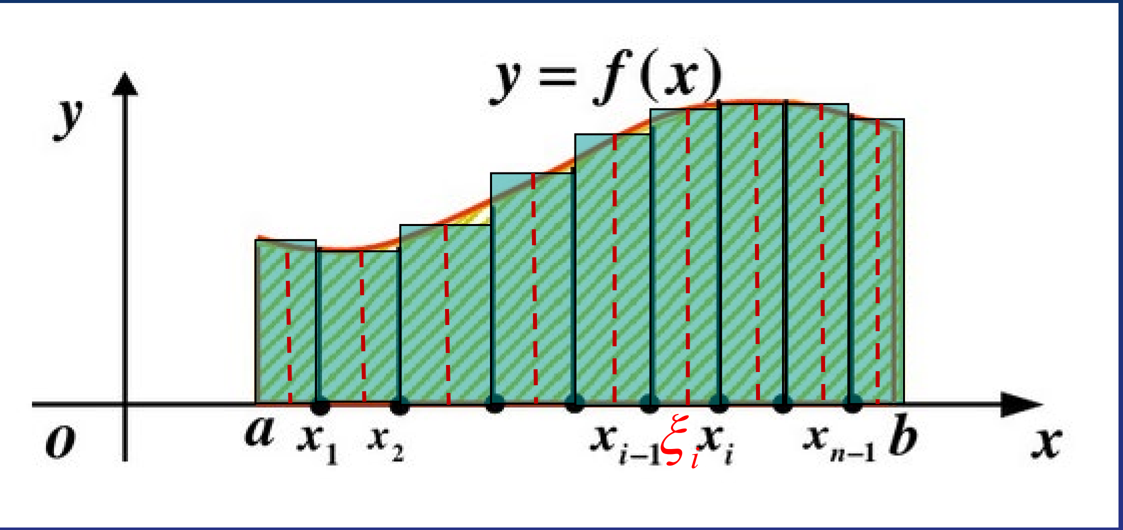
作以 $[x_{i-1}, x_i]$ 为底， $f(\xi_i)$ 为高的小矩形,并以此小矩形面积近似代替相应窄曲边梯形面积 ΔA_i，得

$$\Delta A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i \quad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1}，\ i = 1, 2, \cdots, n)$$





3) **求和** $A=\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$



显然,小矩形越多,矩形总面积越接近曲边梯形面积.

4) **取极限** $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}$，则曲边梯形面积

$$A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Delta A_i=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

取极限：当$\lambda\to 0$时, 若极限$\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 存在(这个极限值与区间 $[a, b]$ 的分法及点 ξ_i 的取法无关)，则称函数 $f(x)$ 在$[a, b]$ 上可积, 并称这个极限为函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上的定积分，记作$\int_a^b f(x)dx$, 即

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

2.2.2定积分的概念

定义　设函数 $f(x)$在区间$[a,b]$上有定义,

分割: 任取分点 $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$

把区间 $[a,b]$ 分割成 n个小区间 $[x_{i-1}, x_i]$, 第i个

小区间的长度为　$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} (i = 1, \cdots, n)$,

记 $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \{\Delta x_i\}$,

近似: 在每个小区间$[x_{i-1}, x_i]$上任取一点 $\xi_i (i=1, 2 \ldots n)$

求和: 作和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i$

积分上限

$[a, b]$ 称为积分区间

$$\int_a^b \boxed{f(x)\,\mathrm{d}x} = \lim_{\lambda \to 0} \boxed{\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i}$$

积分下限

被积函数

被积表达式

积分变量

积分和

2.2.3微积分基本公式(牛顿—莱布尼兹公式)

定理 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $F(x)$是 $f(x)$ 原函数, 则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

在计算定积分时, 我们只要先求出被积函数的一个原函数 , 再求这个原函数在积分上、下限的函数值之差即可.

例5 计算 $\int_1^4 \sqrt{x}\mathrm{d}x$

例6 计算 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

例7 计算 $\int_{-1}^3 |2-x|\mathrm{d}x$

例8 设 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1, \\ 2-x, & 1<x\le 2. \end{cases}$ 求 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$

例9 计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos 2x}\mathrm{d}x$

例5 计算 $\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

解：$\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^4 = \frac{2}{3}(4^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{14}{3}$

例6 计算 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

解：$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x\Big|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$

例7 计算 $\int_{-1}^{3}|2-x|\mathrm{d}x$

解: $\int_{-1}^{3}|2-x|\mathrm{d}x$

$$=\int_{-1}^{2}|2-x|\,\mathrm{d}x+\int_{2}^{3}|2-x|\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}(2-x)\mathrm{d}x+\int_{2}^{3}(x-2)\mathrm{d}x$$

$$=\left.(2x-\frac{1}{2}x^2)\right|_{-1}^{2}+\left.(\frac{1}{2}x^2-2x)\right|_{2}^{3}$$

$$=\frac{9}{2}+\frac{1}{2}=5$$

例8 设 $f(x)=\begin{cases} x, & 0\le x\le 1, \\ 2-x, & 1<x\le 2. \end{cases}$ 求 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$

解： $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x dx+\int_1^2 (2-x)dx$

$$=\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^1+[2x-\frac{x^2}{2}]\Bigg|_1^2=\frac{1}{2}+[(4-2)-(2-\frac{1}{2})]=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

例9 计算 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$

解: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\,\mathrm{d}x$

$=\sqrt{2}[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(-\sin x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x]$

$=\sqrt{2}[\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}+\sqrt{2}[-\cos x]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=2\sqrt{2}$

一、直接积分法

例如：求下列定积分

$$(1)\int_0^2 e^x dx = e^x\Big|_0^2 = e^2 - 1$$

$$(2)\int_1^2 (2x+1)dx = (x^2+x)\Big|_1^2 = 4$$

$$(3)\int_0^\pi (\sin x)dx = (-\cos x)\Big|_0^\pi = 2$$

二、凑微分法

例如：求下列定积分

$$(1)\int_0^2 e^{2x}dx=\frac{1}{2}\int_0^2 e^{2x}d(2x)=\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^2=e^4-1$$

$$(2)\int_0^2 \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int_0^2 \frac{d(1+x^2)}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{1}{2\left(1+x^2\right)^2}\Bigg|_0^2=\frac{4}{5}$$

$$(3)\int_0^{\pi/2}\cos^3 x\sin x dx=-\int_0^{\pi/2}\cos^3 x d(\cos x)$$

三、定积分的换元积分法

定理 设函数 $f(x)$ 在[a, b]上连续，作变换$x=g(t)$

(1)当t=α时，x=x(α)=a，当t=β时， x=x(β)=b

(2)当t在[α, β]区间时，x在[a, b]上

(3)x’(t)在[α, β]上连续

则有换元积分公式：

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)dt$$

例如：求下列定积分

$$(1)\int_0^2 e^{2x+1}dx$$

$$(2)\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx$$

$$(3)\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$$

$$(1)\int_0^2 e^{2x+1}dx$$

（1）令**2*x*+1=*u***， 则 $dx=\frac{1}{2}du$

当$x=0$时， $u=1$

当$x=2$时， $u=5$

$$\int_0^2 e^{2x+1}dx=\frac{1}{2}\int_1^5 e^u du=\frac{1}{2}e^u\Big|_1^5$$

注意：定积分的换元法一定要换积分上下限。

$$(2)\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx$$

令$\sqrt{2x+1}=u$，则$dx=udu$

当$x=0,\quad u=1$；当$x=4,\quad u=3$

$$\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx=\int_1^3 \frac{\frac{u^2-1}{2}+2}{u}udu=\frac{1}{2}\int_1^3\left(u^2+3\right)du$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}u^3+3u\right)\Bigg|_1^3=\frac{22}{3}$$

$$(3)\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$$

令 $x=\sin t$ ，则 $dx=\cos t\,dt$

当 $x=0,\quad t=0$；当 $x=1,\quad t=\dfrac{\pi}{2}$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(1+\cos 2t\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2}$$

课后作业：

(1) 已知 $y=\arcsin(\sin^2\frac{1}{x})$, 求 $\mathrm{d}\,y$.

(2) $y=e^{1-3x}\cos x$, 求 dy

(3) $y=\ln(1+e^{x^2})$, 求 dy

（4）求椭圆 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 在点 $\left(2,\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ 处的切线方程。

（5）设 $y=x^2$, 求 $dy, dy\big|_{x=1}, dy\big|_{x=0}$

（6）求 $\sqrt[5]{0.99}$ 的近似值

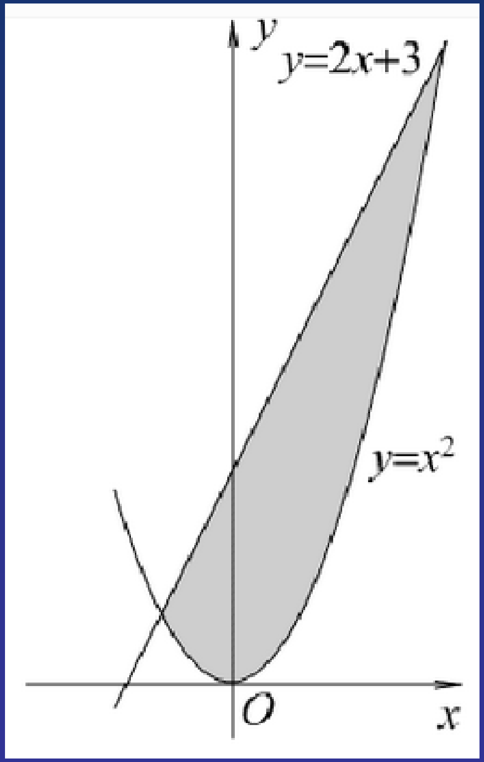
(7) 求 $\sin 29^\circ$ 的近似值.

(8) 有一批半径为1cm 的球， 为了提高球面的光洁度,要镀上一层铜，厚度定为 0.01cm，估计一下，每只球需用铜多少克 .(铜的密度8.9g/cm^3)

(9) $\int_0^2 (e^x + x - 1)\mathrm{d}x.$

(10) $\int_{-1}^3 |x-1|\mathrm{d}x$

(11) $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le 1 \\ 5 & 1 < x \le 2 \end{cases}$，求 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$



(12)求曲线 $y=x^2$ 和 $y=2x+3$ 所围成图形的面积。

$$(13)\int_0^1 e^{2x+5}dx$$

$$(14)\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^4}dx$$

$$(15)\int_0^e \frac{1+\ln x}{x}dx$$

$$(16)\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+x\right)}dx$$