第三节 三重积分计算

1. 直角坐标系

2. 极标系

3. 球标系

小结: 三重积分的计算方法

方法1. "先一后二"

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \iint_{D} \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

方法2. "先二后一"

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \int_{a}^{b} \mathrm{d}z \iint_{D_Z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

方法3. "三次积分"

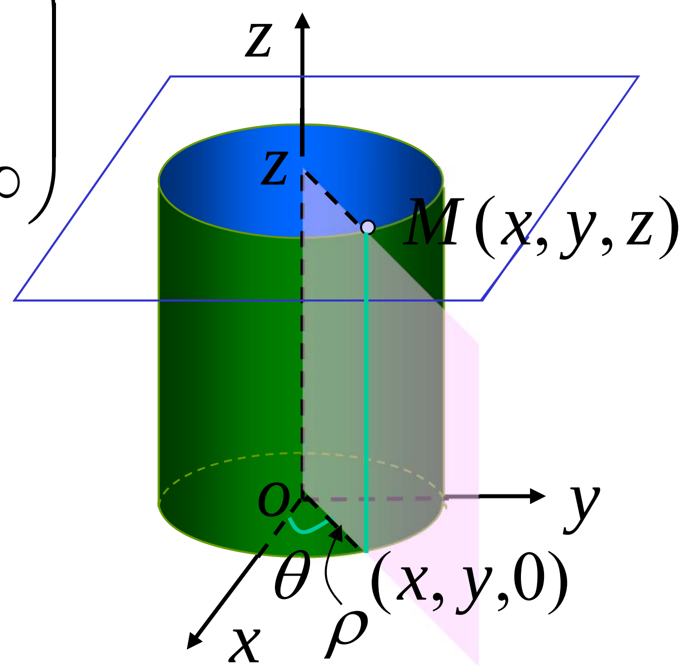
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \int_{a}^{b} \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

三种方法(包含12种形式)各有特点, 具体计算时应根据被积函数及积分域的特点灵活选择.

2. 利用柱坐标计算三重积分

设 $M(x,y,z)\in \mathrm{R}^3$, 将 x, y 用极坐标 ρ, θ 代替, 则 (ρ, θ, z) 就称为点 M 的柱坐标. 直角坐标与柱面坐标的关系:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0 \le \rho < +\infty \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ -\infty < z < +\infty \end{pmatrix}$$



坐标面分别为

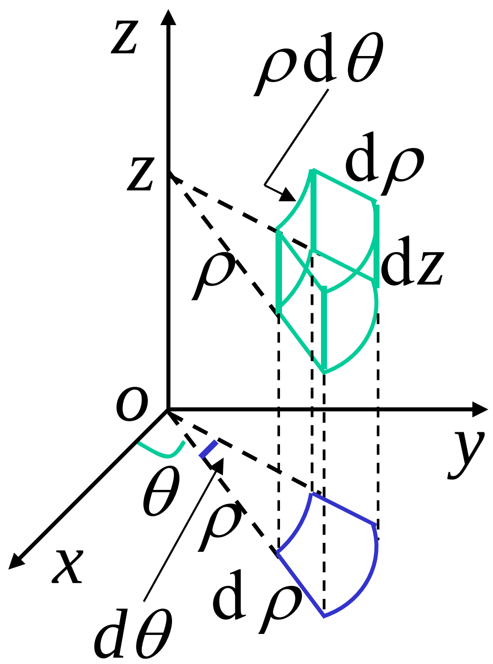
$\rho =$ 常数 ⟶ 圆柱面

$\theta =$ 常数 ⟶ 半平面

$z =$ 常数 ⟶ 平面

如图所示, 在柱面坐标系中体积元素为

$$\mathrm{d}v = \rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z$$



因此 $$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{\Omega} F(\rho,\theta,z)\rho \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}z$$

其中 $$F(\rho,\theta,z) = f(\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta,\ z)$$

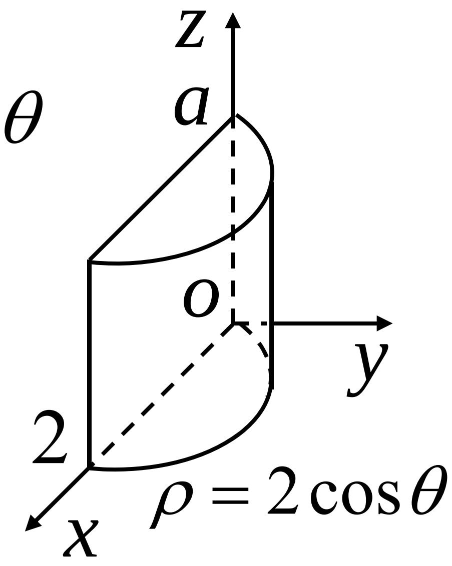
适用范围:

1) **积分域**表面用柱面坐标表示时**方程简单**;

2) **被积函数**用柱面坐标表示时**变量互相分离**.

例1. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 其中Ω为由柱面 $x^2+y^2=2x$ 及平面 $z=0,\ z=a\ (a>0),\ y=0$ 所围成半圆柱体.

解: 在柱面坐标系下 $\Omega:\begin{cases} 0\le z\le a \\ 0\le \rho\le 2\cos\theta \\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$



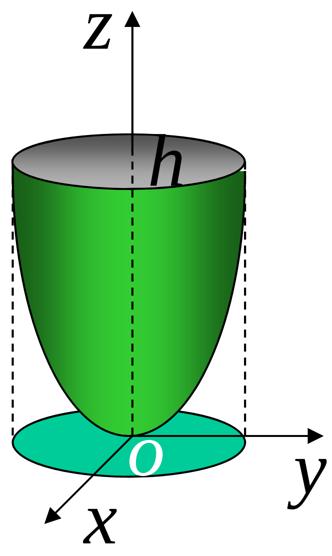
$$\text{原式}=\iiint_{\Omega} z\,\rho^2\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}\rho^2\,\mathrm{d}\rho\int_0^a z\mathrm{d}z$$

$$=\frac{4a^2}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{8}{9}a^3$$

$\boxed{\mathrm{d}v=\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z}$

例2. 计算三重积分 $\iiint_\Omega \dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{1+x^2+y^2}$，其中Ω由抛物面 $x^2+y^2=4z$ 与平面 $z=h\ (h>0)$ 所围成 .



解: 在柱面坐标系下 $\Omega:\begin{cases}\dfrac{\rho^2}{4}\le z\le h\\ 0\le\rho\le 2\sqrt{h}\\ 0\le\theta\le 2\pi\end{cases}$

$$\text{原式}=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sqrt{h}}\frac{\rho}{1+\rho^2}\mathrm{d}\rho\int_{\frac{\rho^2}{4}}^{h}\mathrm{d}z$$

$$\boxed{\mathrm{d}v=\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z}$$

$$=2\pi\int_0^{2\sqrt{h}}\frac{\rho}{1+\rho^2}\left(h-\frac{\rho^2}{4}\right)d\rho$$

$$=\frac{\pi}{4}[(1+4h)\ln(1+4h)-4h]$$

例3. 计算$\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz$，其中$\Omega$：$x^2+y^2+z^2 \le 1$, 且$z \ge 0$.

解： Ω是上半球体,它在xy面上的投影区域是单位圆$x^2+y^2 \leqq 1$.

令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta, z=z$,则平面 $z=0$ 和球面 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$的柱面坐标方程分别为 $z=0$和$z=\sqrt{1-r^2}$,

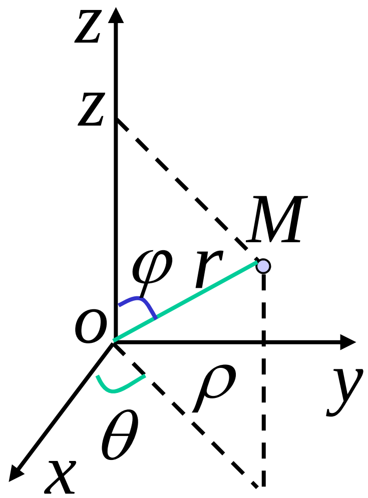
即$0 \le z \le \sqrt{1-r^2}$. 且$0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$,

$$\iiint\limits_{\Omega} zdxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_0^{\sqrt{1-r^2}} z \cdot r dz$$

$$= 2\pi \int_0^1 \frac{1}{2} r(1-r^2) dr = \frac{\pi}{4}.$$

3. 利用球面坐标计算三重积分.

设 $M(x,y,z)\in \mathrm{R}^3$, 其柱坐标为(ρ,θ,z), 令 $|\overrightarrow{OM}|=r$, $\angle ZOM=\varphi$, 则(r,θ,φ)就称为点M 的球坐标.



直角坐标与球面坐标的关系

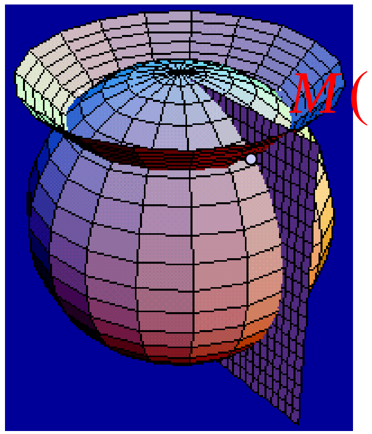
$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 0\le r<+\infty \\ 0\le\theta\le 2\pi \\ 0\le\varphi\le\pi \end{pmatrix}$$

坐标面分别为

$r=$ 常数 ⟶ 球面

$\theta=$ 常数 ⟶ 半平面

$\varphi=$ 常数 ⟶ 锥面



$M(r,\theta,\varphi)$

$$\rho = r\sin\varphi$$
$$z = r\cos\varphi$$

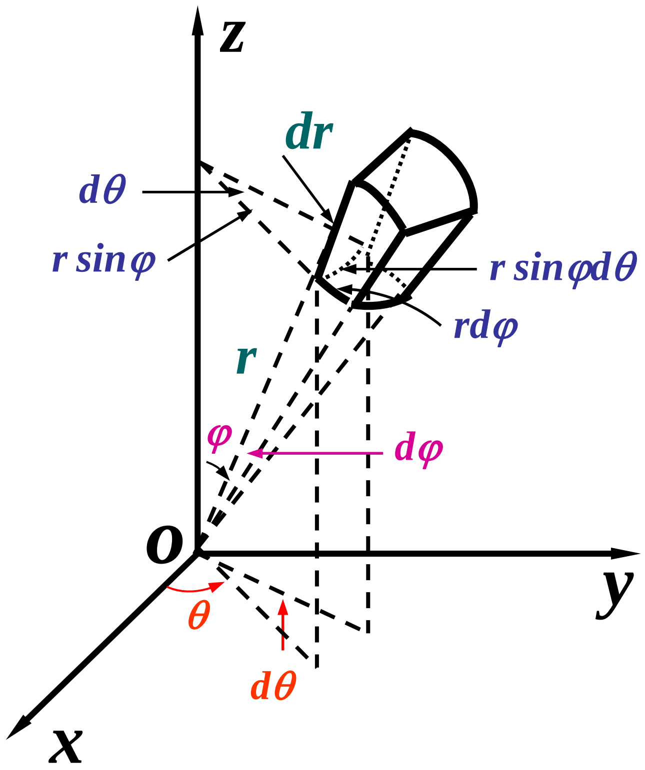
用球面坐标,可将$x^2+y^2+z^2=a^2$化为 $r=a(a>0)$，

将圆锥面$a(x^2+y^2)= z^2$化为$\varphi=$常数,

将$y=kx$化为$\theta =$常数.

即$r=$常数,$\varphi=$常数,$\theta=$常数分别表示球面, 圆锥面,
过 z轴的半平面.

如图，球面坐标系中的体积元素为



$$dv = r^2 \sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta,$$

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\,dxdydz =$$

$$\iiint_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi) r^2 \sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta.$$

然后把它化成对 r,θ,φ 的三次积分

具体计算时需要将Ω 用球坐标系下的不等式组表示

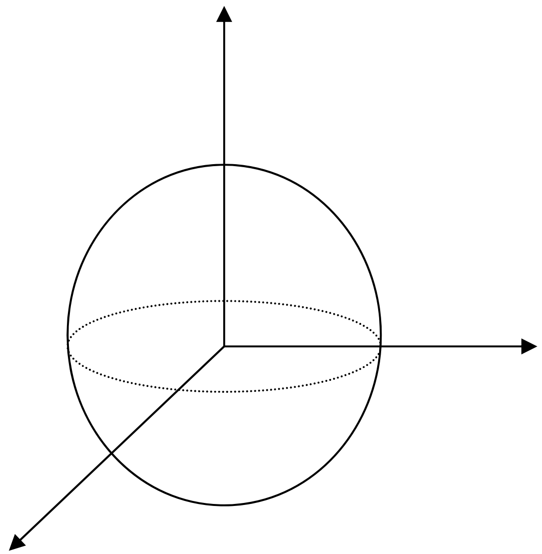
积分次序通常是 先r次φ后θ

例4 计算$\iiint\limits_{\Omega} z^2 dv$ 其中 Ω由 $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ 围成.

解：$\Omega: 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \varphi \le \pi, 0 \le r \le R,$

$$\iiint\limits_{\Omega} z^2 dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\phi \int_0^{R} r^2 \cos^2 \phi r^2 \sin \phi dr$$

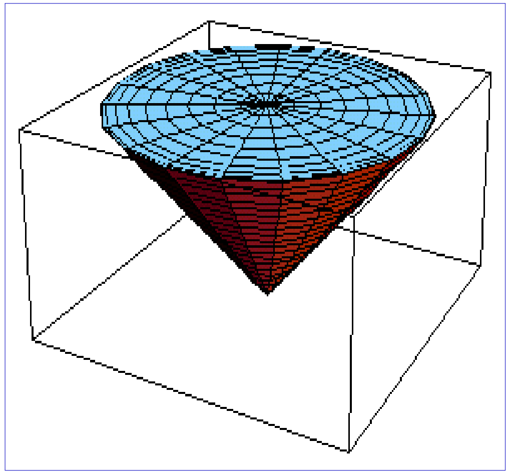
$$= \frac{R^5}{5} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi$$



$$= \frac{4}{15} \pi R^5$$

例 5　计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz$，其中$\Omega$是锥面 $x^2+y^2=z^2$，　与平面$z=a$　$(a>0)$所围的立体.

解　　用球坐标



$\because\ z=a \quad \Rightarrow r=\dfrac{a}{\cos\varphi},$

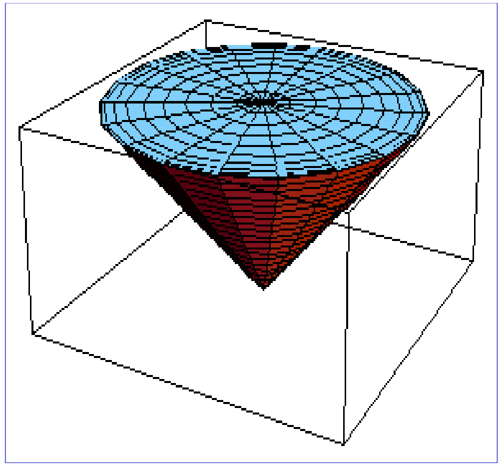
$x^2+y^2=z^2 \Rightarrow \varphi=\dfrac{\pi}{4},$

$$\therefore \Omega:\ 0\le r\le\frac{a}{\cos\varphi},\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\quad 0\le\theta\le 2\pi,$$

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdydz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\frac{a}{\cos\varphi}}r^4\sin^3\varphi dr$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\varphi\cdot\frac{1}{5}\left(\frac{a^5}{\cos^5\varphi}-0\right)d\varphi=\frac{\pi}{10}a^5.$$

用柱面坐标



$$\because x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow z = \rho,\ D: \quad x^2 + y^2 \le a^2,$$

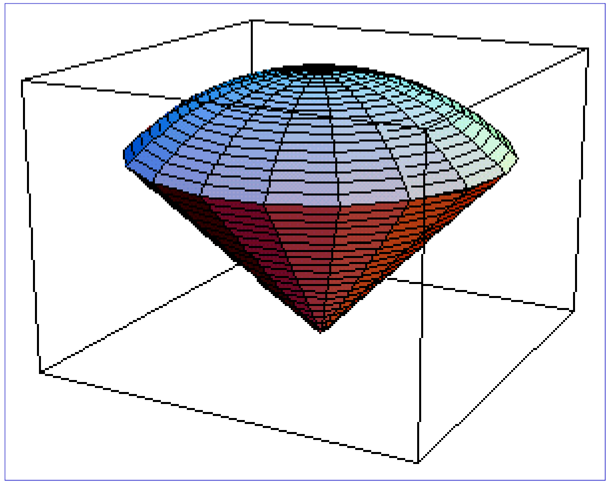
$$\therefore I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \rho d\rho \int_\rho^a \rho^2 dz$$

$$= 2\pi \int_0^a \rho^3 (a - \rho) d\rho = \frac{\pi}{10} a^5.$$

$$\text{或 } I = \int_0^a dz \iint\limits_{D_z: x^2 + y^2 \le z^2} (x^2 + y^2) dxdy$$

$$= \int_0^a dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^z \rho^2\ \rho d\rho = \int_0^a\ 2\pi \cdot \frac{1}{4} \rho^4 \Big|_0^z dz = \frac{\pi}{10} a^5.$$

例 6 求曲面 $x^2+y^2+z^2\le 2a^2$ 与 $z\ge\sqrt{x^2+y^2}$ 所围 成的立体体积.



解 Ω 由锥面和球面围成,

采用球面坐标,

由 $x^2+y^2+z^2=2a^2 \Rightarrow r=\sqrt{2}a$,

$$z=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \varphi=\frac{\pi}{4},$$

$$\Omega:\quad 0\le r\le\sqrt{2}a,\quad 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4},\quad 0\le\theta\le 2\pi,$$

由三重积分的性质知 $V=\iiint\limits_{\Omega}dxdydz$,

$$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\sqrt{2}a}r^2\sin\varphi dr$$

$$=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\cdot\frac{(\sqrt{2}a)^3}{3}d\varphi \quad =\frac{4}{3}\pi(\sqrt{2}-1)a^3.$$

注:

若积分区域为球体、球壳或其一部分

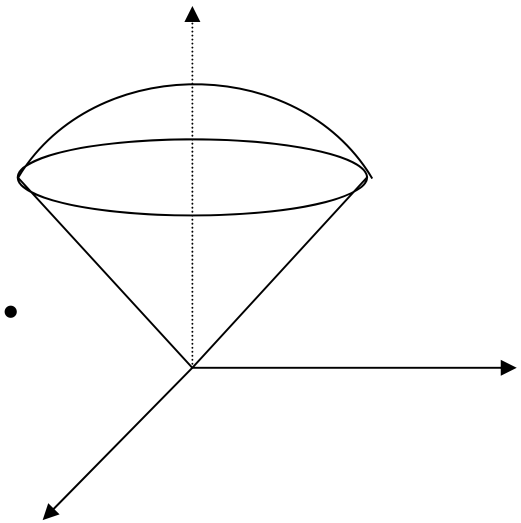
被积函数呈 $x^2+y^2+z^2$

而用球坐标后积分区域的球坐标方程比较简单

通常采用球坐标。

例7 计算 $\iiint\limits_{\Omega} x^2 dv$ 其中 Ω由

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 围成.



$$\Omega: 0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{4}, 0\le r\le R,$$

$$\iiint\limits_{\Omega} x^2 dv = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^R r^2\cos^2\theta\sin^2\varphi r^2 \sin\varphi dr$$

$$=\frac{1}{5}\pi R^5\left(\frac{2}{3}-\frac{5\sqrt{2}}{12}\right)$$

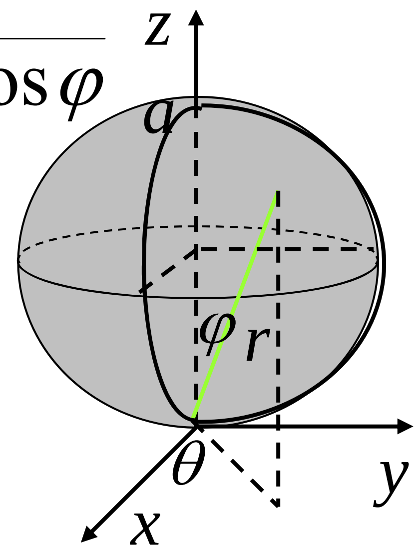
例8.求曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2=a^3z\ (a>0)$所围立体体积.

解: 由曲面方程可知, 立体位于xoy面上部, 且关于 xoz yoz面对称, 并与xoy面相切, 故在球坐标系下所围立体为

$$\Omega: 0\le r\le a\sqrt[3]{\cos\varphi},\ 0\le\varphi\le\pi/2,\ 0\le\theta\le 2\pi$$

利用对称性, 所求立体体积为

$$r=a\sqrt[3]{\cos\varphi}$$



$$V=\iiint_\Omega \mathrm{d}v$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{a\sqrt[3]{\cos\varphi}}r^2\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2}{3}\pi a^3\int_0^{\pi/2}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi=\frac{1}{3}\pi\,a^3$$

$$\boxed{\mathrm{d}v=r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta}$$

内容小结

坐标系	体积元素	适用情况
直角坐标系	$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$	积分区域多由坐标面围成； 被积函数形式简洁, 或变量可分离.
柱面坐标系	$\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$	
球面坐标系	$r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$	

* **说明**:

三重积分也有类似二重积分的**换元积分公式:**

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega^*}F(u,v,w)\,|J|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

对应雅可比行列式为 $J=\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$

注:选择合适的坐标系是计算三重积分的关键

一般的:

(1). 区域由平面围成, 常选择直角坐标系;

(2). 区域由圆柱面围成, 被积函数形如 $f(x^2+y^2)$ 常选择柱面坐标系;

(3). 区域由球面锥面围成, 被积函数形如 $f(x^2+y^2+z^2)$ 常选择球面坐标系.

思考与练习

1. 将$I=\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v$用三次积分表示, 其中Ω由六个平面 $x=0,\ x=2,\ y=1,\ x+2y=4,\ z=x,\ z=2$ 所围成，$f(x,y,z)\in C(\Omega)$.

提示:

$$\Omega:\begin{cases} x\le z\le 2 \\ 1\le y\le 2-\frac{1}{2}x \\ 0\le x\le 2 \end{cases}$$

$$I=\int_0^2 \mathrm{d}x\int_1^{2-\frac{1}{2}x}\mathrm{d}y\int_x^2 f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

2. 设 $\Omega: x^2+y^2+z^2 \le 1$, 计算

$$\iiint_{\Omega} \frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\,\mathrm{d}v$$

提示: 利用对称性

$$\text{原式} = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \frac{z\ln(x^2+y^2+z^2+1)}{x^2+y^2+z^2+1}\,\mathrm{d}z$$

$$= 0$$

$\boxed{\text{奇函数}}$