第二节

第二型曲线积分

一、第二型曲线积分的概念 与性质

二、第二型曲线积分的计算法

三、两类曲线积分之间的联系

二、第二型曲线积分的计算法

定理： 设 $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在有向光滑弧 L 上有定义且连续, L 的参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ $t:\alpha\to\beta$, 则曲线积分存在, 且有

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_\alpha^\beta\left\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\phi(t),\psi(t)]\psi'(t)\right\}\mathrm{d}t$$

特别是, 如果 L 的方程为 $y=\psi(x),\ x:a\to b$,则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b\{P[x,\psi(x)]+Q[x,\psi(x)]\,\psi'(x)\}\mathrm{d}x$$

对空间光滑曲线弧 Γ: $\begin{cases} x=\phi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\omega(t) \end{cases}\quad t:\alpha\to\beta$, 类似有

$$\int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\,\varphi'(t)$$

$$+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\,\psi'(t)$$

$$+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\,\omega'(t)\}\mathrm{d}t$$

例1. 已知 Γ 为折线 $ABCOA$(如图), 计算

$$I=\oint_{\Gamma}\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}z$$

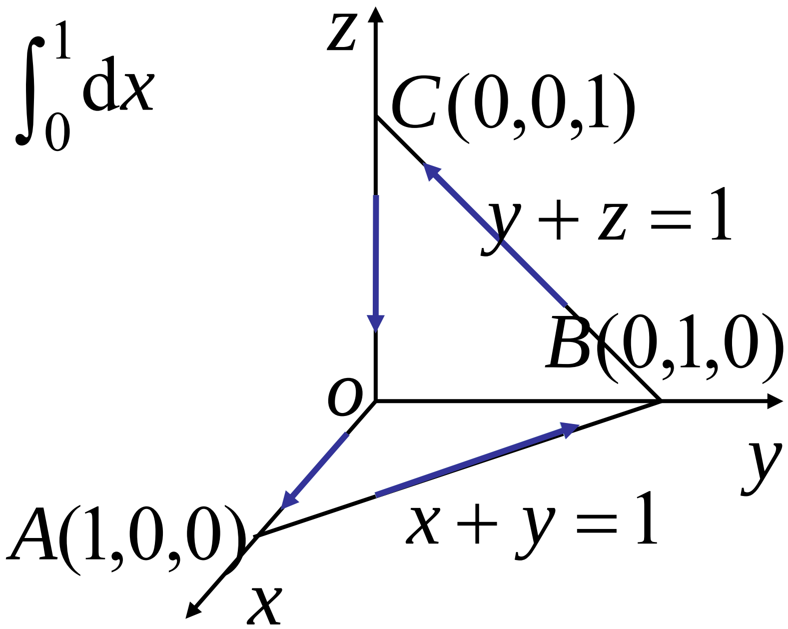
提示:

$$I=\int_{\overrightarrow{AB}}\mathrm{d}x-\mathrm{d}y+\int_{\overrightarrow{BC}}-\mathrm{d}y+y\,\mathrm{d}z+0+\int_{\overrightarrow{OA}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^0 2\mathrm{d}x-\int_1^0(1+y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x$$

$$=-2+(1+\frac{1}{2})+1$$

$$=\frac{1}{2}$$



例 2　计算 $\int_\Gamma x^3dx + 3zy^2dy - x^2ydz$，其中 Γ 是从点 $A(3,2,1)$ 到点 $B(0,0,0)$ 的直线段 AB.

解　AB 所在直线的方向向量 $\vec{s} = \overrightarrow{BA} = \{3,2,1\}$.

直线方程：$\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{1} \overset{\text{令}}{=} t$

参数方程：$\begin{cases} x = 3t, \\ y = 2t, \\ z = t. \end{cases}$　$t: 1 \to 0.$　$(x: 3 \to 0)$　又 $\begin{cases} x' = 3, \\ y' = 2, \\ z' = 1. \end{cases}$

$$\int_\Gamma x^3dx + 3zy^2dy - x^2ydz$$

$$= \int_1^0 [(3t)^3 \cdot 3 + 3t(2t)^2 \cdot 2 - (3t)^2(2t) \cdot 1]\,dt$$

$$= 87\int_1^0 t^3\,dt = -\frac{87}{4}.$$

例3. 求$I=\int_{\Gamma}(z-y)\,\mathrm{d}x+(x-z)\,\mathrm{d}y+(x-y)\,\mathrm{d}z$, 其中

$\Gamma\begin{cases}x^2+y^2=1\\ x-y+z=2\end{cases}$, 从 z 轴正向看为顺时针方向.

解: 取 Γ 的参数方程

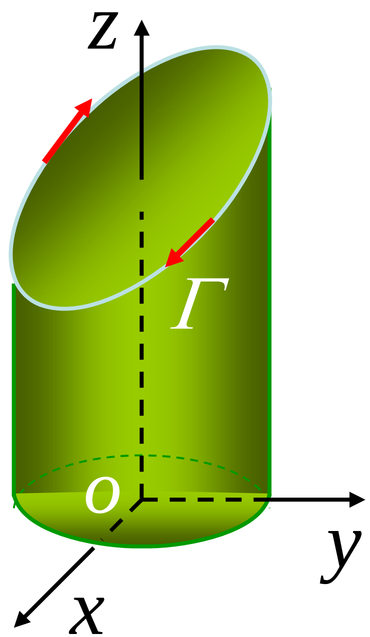
$$x=\cos t,\ y=\sin t,\ z=2-\cos t+\sin t\quad (t:2\pi\to 0)$$

$$\therefore\quad I=-\int_0^{2\pi}[\,(2-\cos t)(-\sin t)$$

$$+(-2+2\cos t-\sin t)\cos t$$

$$+(\cos t-\sin t)(\cos t+\sin t)\,]\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}(1-4\cos^2 t)\,\mathrm{d}t=-2\pi$$



三、两类曲线积分之间的联系

设有向光滑弧 L 以弧长为参数 的参数方程为

$$x = x(s),\ y = y(s) \quad (0 \le s \le l)$$

已知L切向量的方向余弦为 $\cos\alpha = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}$, $\cos\beta = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$

则两类曲线积分有如下联系

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}\,x + Q(x,y)\,\mathrm{d}\,y$$

$$= \int_0^l \left\{ P[x(s),y(s)]\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + Q[x(s),y(s)]\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} \right\}\mathrm{d}s$$

$$= \int_0^l \{P[x(s),y(s)]\cos\alpha + Q[x(s),y(s)]\cos\beta\}\mathrm{d}s$$

$$= \int_L \{P(x,y)\cos\alpha + Q(x,y)\cos\beta\}\mathrm{d}s$$

类似地, 在空间曲线 Γ 上的两类曲线积分的联系是

$$\int_\Gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

$$= \int_\Gamma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}s$$

令 $\overrightarrow{A} = (P, Q, R), \overrightarrow{\mathrm{d}s} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)$

$\overrightarrow{t} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

$$\int_\Gamma \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s} = \int_\Gamma \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{t}\,\mathrm{d}s$$

记 $\overrightarrow{A}$ 在 $\overrightarrow{t}$ 上的投影为 A_t

$$\int_\Gamma \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s} = \int_\Gamma A_t\,\mathrm{d}s$$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{d}s} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z) = \mathrm{d}s\ (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)}$$

例4. 设 $M=\max\sqrt{P^2+Q^2}$, $P(x,y)$, $Q(x,y)$ 在L上连续, 曲线段 L 的长度为s, 证明

$$\left|\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y\right|\le M\,s$$

证: $\left|\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y\right|=\left|\int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta)\mathrm{d}s\right|$

$$\le\int_L\left|P\cos\alpha+Q\cos\beta\right|\mathrm{d}s$$

设 $\vec{A}=(P,Q)$, $\vec{t}=(\cos\alpha,\cos\beta)$

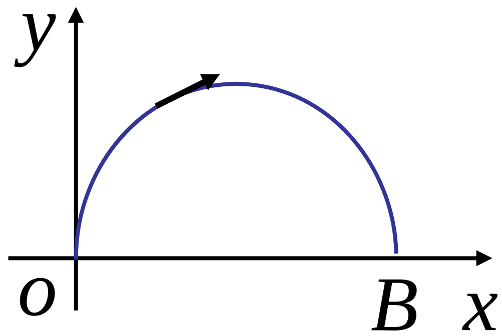
二者夹角为 θ

$$=\int_L\left|\vec{A}\cdot\vec{t}\right|\mathrm{d}s=\int_L\left|\vec{A}\right|\left|\cos\theta\right|\mathrm{d}s\le M\,s$$

说明: 上述证法可推广到三维的第二类曲线积分.

例5.将积分 $\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y$ 化为对弧长的积分, 其中L 沿上半圆周 $x^2+y^2-2x=0$ 从 $O(0,0)$ 到$B(2,0)$.

解： $y=\sqrt{2x-x^2}$, $\mathrm{d}y=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x$



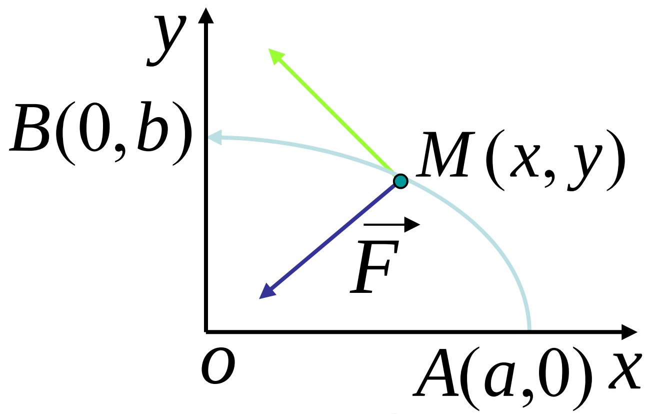
$$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x$$

$$\cos\alpha=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\sqrt{2x-x^2},\quad \cos\beta=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=1-x$$

$$\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\,\mathrm{d}y=$$

$$\int_L\left[P(x,y)\sqrt{2x-x^2}+Q(x,y)(1-x)\right]\mathrm{d}s$$

思考与练习



1. 设一个质点在 $M(x,y)$ 处受力 $\vec{F}$ 的作用, $\vec{F}$ 的大小与 M 到原原点 O 的距离成正比, $\vec{F}$ 的方向恒指向原点, 此质点由点 $A(a,0)$ 沿椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 沿逆时针移动到 $B(0,b)$, 求力 $\vec{F}$ 所作的功.

提示: $\overrightarrow{OM}=(x,y), \vec{F}=-k(x,y)$

$$W=\int_{\overset{\frown}{AB}} -kx\,\mathrm{d}x-ky\,\mathrm{d}y$$

$$\overset{\frown}{AB}:\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases} \quad t:0\to\frac{\pi}{2}$$

思考: 若题中 $\vec{F}$ 的方向改为与 $\overrightarrow{OM}$ 垂直且与 y 轴夹锐角,则

$\vec{F}=$ $\underline{k(-y,x)}$

$$W=\frac{k}{2}\left(a^2-b^2\right)$$

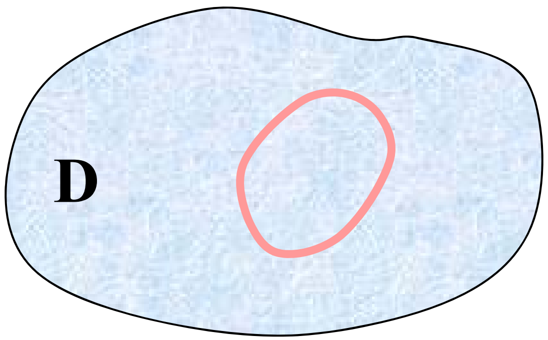
第三节
格林公式及其应用

一、格林公式

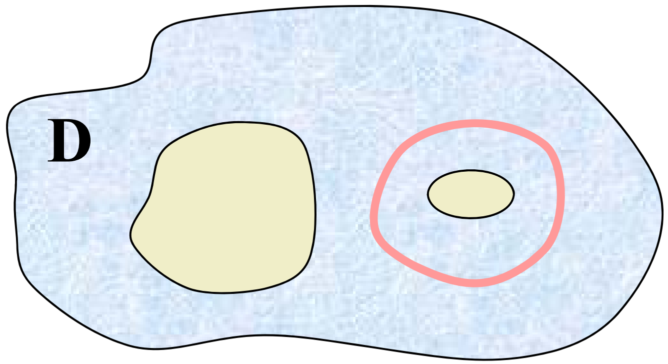
二、平面上曲线积分与路径无关的
等价条件

一、区域连通性的分类

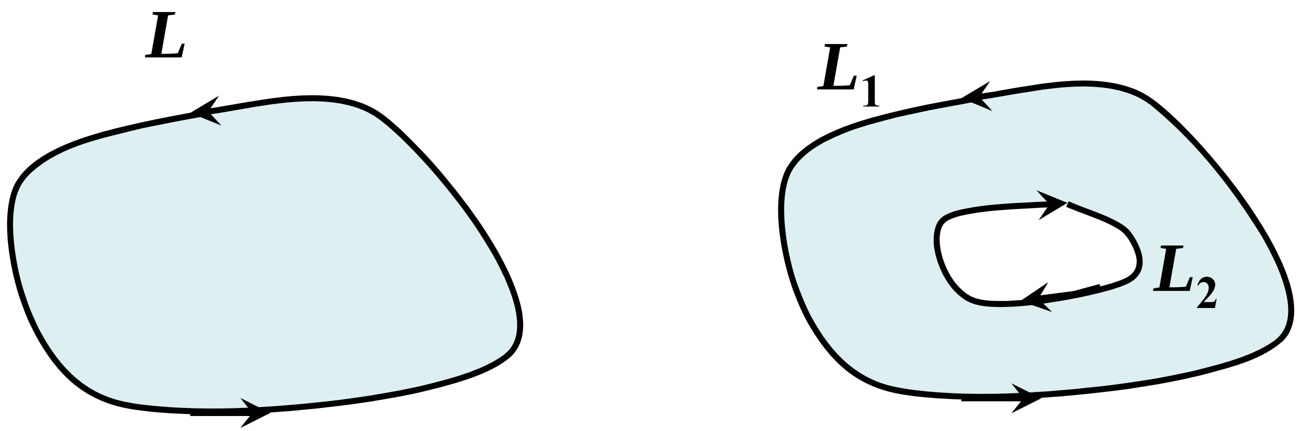
设D为平面区域，如果D内任一闭曲线所围成的部分都属于D，则称D为平面单连通区域，否则称为复连通区域.



单连通区域



复连通区域

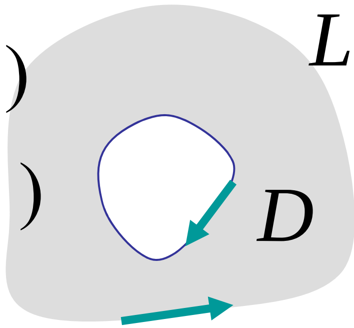


边界曲线L的正向：当观察者沿边界行走时, 区域

D 总在他的左边.

一、 格林公式

区域 D 分类 $\begin{cases} \text{单连通区域（无“洞”区域）} \\ \text{多连通区域（有“洞”区域）} \end{cases}$



域 D 边界L 的**正向**: **域的内部靠左**

定理1. 设区域 D 是由分段光滑正向曲线 L 围成, 函数 $P(x,y),\ Q(x,y)$在 D 上具有连续一阶偏导数, 则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

（格林公式）

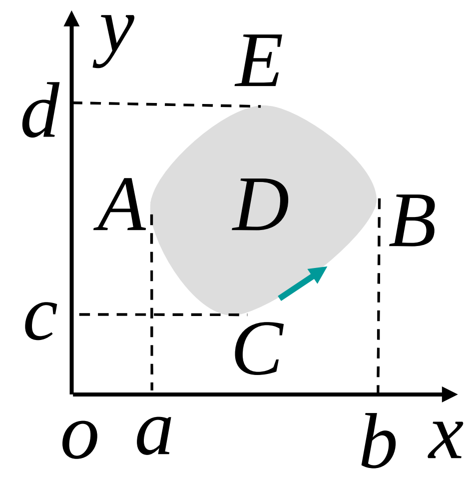
或

$$\iint_D \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

证明: 1) 若D 既是 X - 型区域 , 又是 Y - 型区域 , 且

$$D:\begin{cases}\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\\ a\le x\le b\end{cases}$$

$$D:\begin{cases}\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\\ c\le y\le d\end{cases}$$



则 $$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}\frac{\partial Q}{\partial x}\mathrm{d}x$$

$$=\int_c^d Q(\psi_2(y),\,y)\,\mathrm{d}y-\int_c^d Q(\psi_1(y),\,y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\overset{\frown}{CBE}} Q(x,y)\mathrm{d}y-\int_{\overset{\frown}{CAE}} Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\overset{\frown}{CBE}} Q(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\overset{\frown}{EAC}} Q(x,y)\mathrm{d}y$$

即 $$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_L Q(x,y)\mathrm{d}y \qquad ①$$

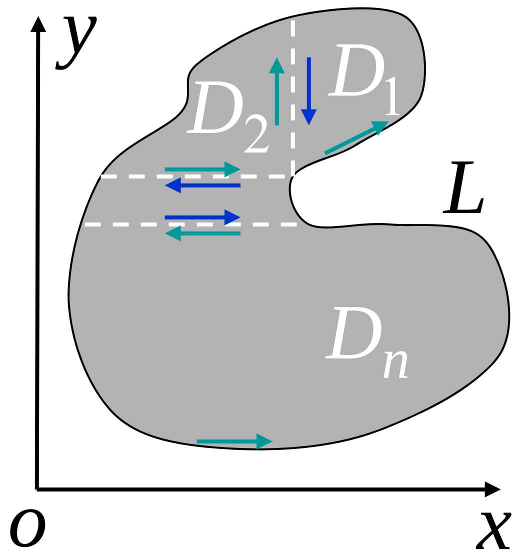
同理可证

$$-\iint_D \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_L P(x,y)\mathrm{d}x \qquad ②$$

①、②两式相加得:

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

2) 若D不满足以上条件，则可通过加辅助线将其分割为有限个上述形式的区域，如图



$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\iint_{D_k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

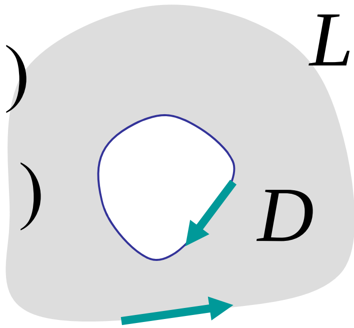
$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{\partial D_k} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y \qquad (\partial D_k\text{表示}D_k\text{的正向边界})$$

$$=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

证毕

一、 格林公式

区域 D 分类 $\begin{cases} \text{单连通区域 (无“洞”区域)} \\ \text{多连通区域 (有“洞”区域)} \end{cases}$



域 D 边界L 的**正向**: **域的内部靠左**

定理1. 设区域 D 是由分段光滑正向曲线 L 围成, 函数 $P(x, y), Q(x, y)$在 D 上具有连续一阶偏导数, 则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y \quad \text{（格林公式）}$$

或

$$\iint_D \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

格林公式 $\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint\limits_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$

推论: 正向闭曲线 *L* 所围区域 *D* 的面积

$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x$$

例如, 椭圆 $L:\begin{cases}x=a\cos\theta\\ y=b\sin\theta\end{cases},\ 0\le\theta\le 2\pi$ 所围面积

$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\,\mathrm{d}y-y\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(ab\cos^2\theta+ab\sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta=\pi\,ab$$

例1. 设 L 是一条分段光滑的闭曲线, 证明

$$\oint_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = 0$$

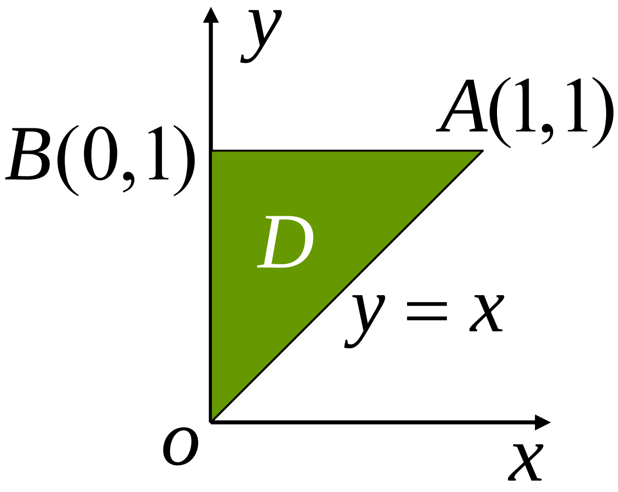
证: 令 $P = 2xy,\ Q = x^2$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 2x = 0$$

利用格林公式, 得

$$\oint_L 2xy\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y = \iint_D 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$$

例2. 计算 $\iint_D e^{-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D$ 是以 $O(0,0)$, $A(1,1)$, $B(0,1)$ 为顶点的三角形闭域 .



解: 令$P=0,\ Q=xe^{-y^2}$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=e^{-y^2}$$

利用格林公式 , 有

$$\iint_D e^{-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\partial D} x e^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\overline{OA}} x e^{-y^2}\,\mathrm{d}y=\int_0^1 y e^{-y^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$$