（5）二元函数的定义

设D是平面上的一个点集，如果对于每个点$P(x,y)\in D$，变量z按照一定的法则总有确定的值和它对应，则称z是变量x,y的二元函数，记为$z=f(x,y)$（或记为$z=f(P)$）.

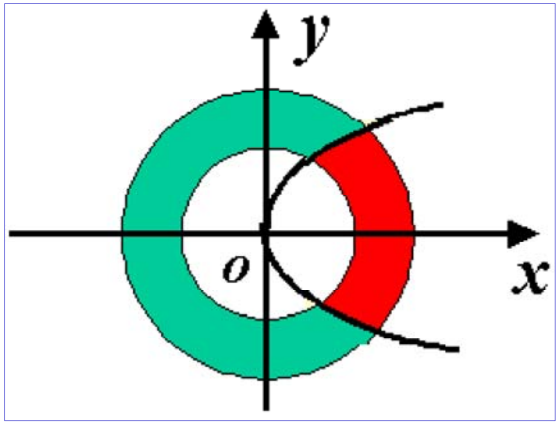
类似地可定义三元及三元以上函数.

当$n\geq 2$时，n元函数统称为多元函数.

多元函数中同样有定义域、值域、自变量、因变量等概念.

例1 求 $f(x,y)=\dfrac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$ 的定义域.

解 $\begin{cases} |3-x^2-y^2|\le 1 \\ x-y^2>0 \end{cases}$



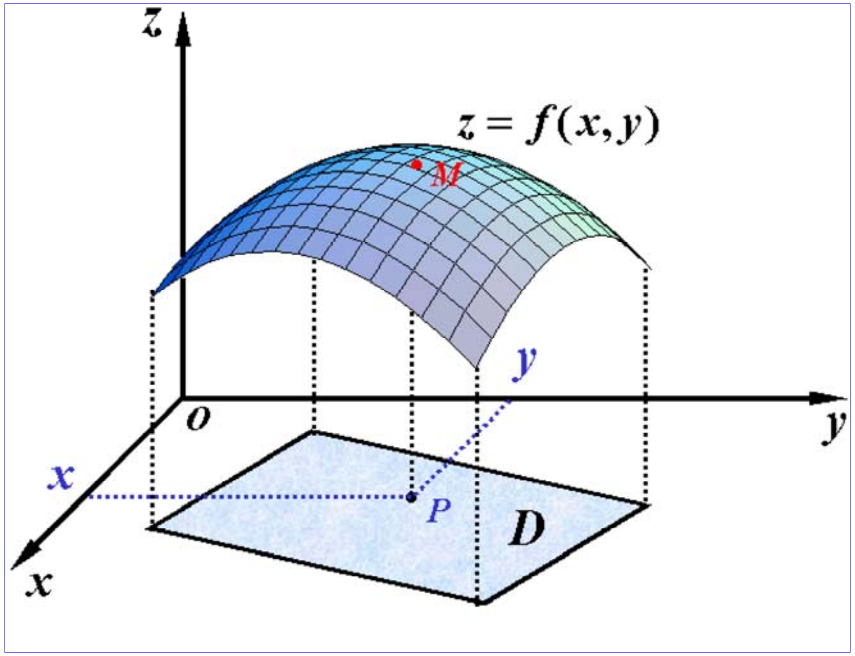
$\Rightarrow \begin{cases} 2\le x^2+y^2\le 4 \\ x>y^2 \end{cases}$

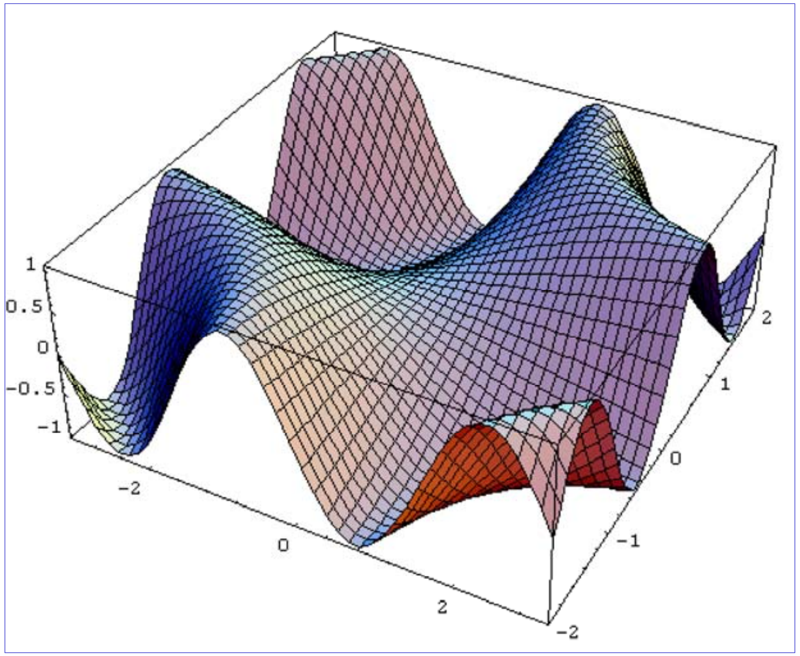
所求定义域为 $D=\{(x,y)\,|\,2\le x^2+y^2\le 4,\ x>y^2\}$.

（6） 二元函数 $z = f(x, y)$的图形

设函数$z = f(x, y)$的定义域为D，对于任意取定的$P(x, y) \in D$，对应的函数值为$z = f(x, y)$，这样，以x为横坐标、y为纵坐标、z为竖坐标在空间就确定一点$M(x, y, z)$，当x取遍D上一切点时，得一个空间点集$\{(x, y, z) \mid z = f(x, y), (x, y) \in D\}$，这个点集称为二元函数的图形.

（如下页图）





二元函数的图形

通常是一张曲面.

$$z = \sin xy$$

二、多元函数的极限

定义 1 设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$是其聚点，如果对于任意给定的正数ε，总存在正数δ，使得对于适合不等式 $0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 的一切点，都有$|f(x,y)-A|<\varepsilon$成立，则称 A 为函数 $z=f(x,y)$当$x\to x_0$，$y\to y_0$时的极限，

记为 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$

（或$f(x,y)\to A \quad (\rho\to 0)$这里$\rho=|PP_0|$）.

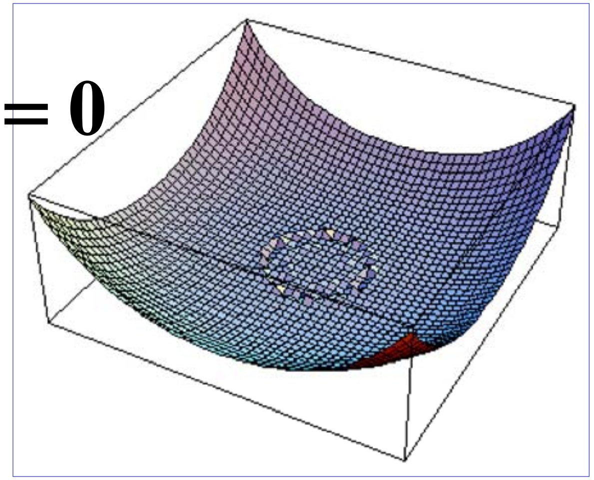
说明：

（1）定义中 $P \to P_0$ 的方式是任意的；

（2）二元函数的极限也叫二重极限 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$；

（3）二元函数的极限运算法则与一元函数类似.

例2 求证$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$



证 $\left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-0\right|$

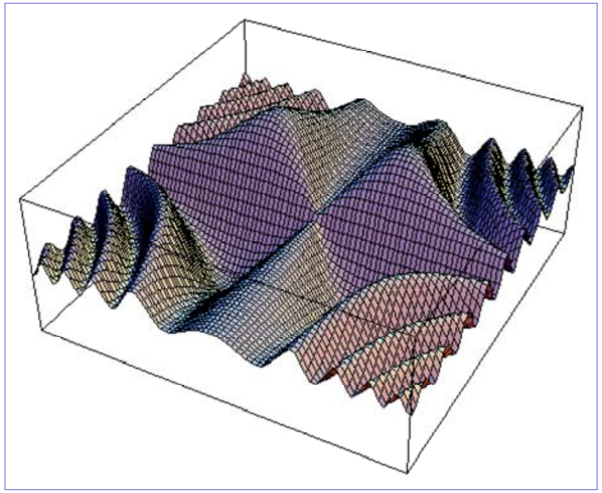
$$=\left|x^2+y^2\right|\cdot\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\le x^2+y^2$$

$\forall\,\varepsilon>0,\quad \exists\,\delta=\sqrt{\varepsilon},$

当 $0<\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}<\delta$时，

$\left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-0\right|<\varepsilon$ 原结论成立.

例3 求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$.



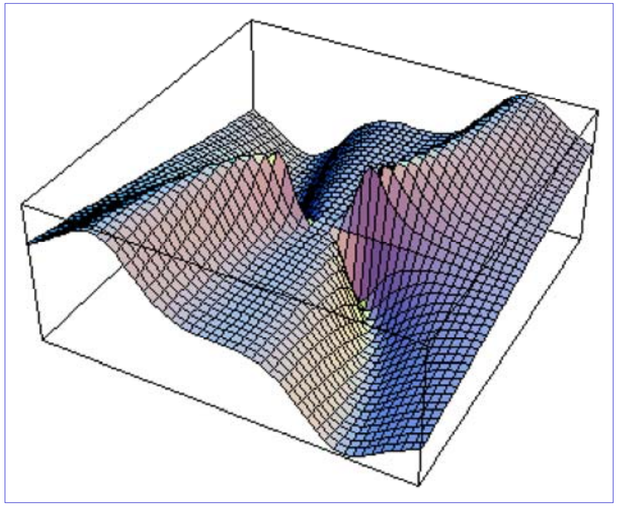
解 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}$

$$=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^2y)}{x^2y}\cdot\frac{x^2y}{x^2+y^2},$$

其中 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\sin(x^2y)}{x^2y}\ \overset{u=x^2y}{=\!=\!=\!=}\ \lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1,$

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\le\frac{1}{2}|x|\xrightarrow{x\to 0}0,\quad \therefore \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin(x^2y)}{x^2+y^2}=0.$$

例4 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3 y}{x^6+y^2}$ 不存在.



证 取 $y=kx^3$,

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^3 y}{x^6+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx^3}} \frac{x^3\cdot kx^3}{x^6+k^2x^6} = \frac{k}{1+k^2},$$

其值随k的不同而变化,

故极限不存在.

二、典型例题

例1　求极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解　令　$x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,\quad (\rho>0)$

则 $(x,y)\to(0,0)$ 等价于 $\rho\to 0$.

$$0\le\left|\frac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\frac{\rho^2\left|(\sin\theta-\cos\theta)\cos\theta\right|}{\rho}$$

$$=\rho\left|(\sin\theta-\cos\theta)\cos\theta\right|\le 2\rho,$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{(y-x)x}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$

确定极限不存在的方法：

（1）令$P(x,y)$沿$y=kx$趋向于$P_0(x_0,y_0)$，若极限值与k有关，则可断言极限不存在；

（2）找两种不同趋近方式，使$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$存在，但两者不相等，此时也可断言$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处极限不存在.

利用点函数的形式有n元函数的极限

定义 2 设n元函数$f(P)$的定义域为点集D，P_0是其聚点，如果对于任意给定的正数ε，总存在正数δ，使得对于适合不等式$0<|PP_0|<\delta$的一切点$P\in D$，都有$|f(P)-A|<\varepsilon$成立，则称 A 为n元函数$f(P)$当$P\to P_0$时的极限，记为

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A.$$

三、多元函数的连续性

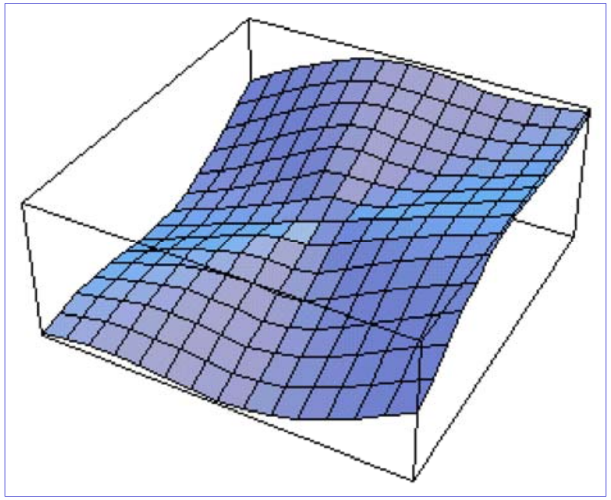
定义3 设n元函数$f(P)$的定义域为点集D，P_0是其聚点且$P_0 \in D$，如果$\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$

则称n元函数$f(P)$在点P_0处连续.

设P_0是函数$f(P)$的定义域的聚点，如果$f(P)$在点P_0处不连续，则称P_0是函数$f(P)$的间断点.

例5 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

在(0,0)处的连续性.



解 取 $x=\rho\cos\theta,$

$y=\rho\sin\theta$

$\left|f(x,y)-f(0,0)\right|$

$=\left|\rho(\sin^3\theta+\cos^3\theta)\right|<2\rho$

$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, 当 $0 < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ 时

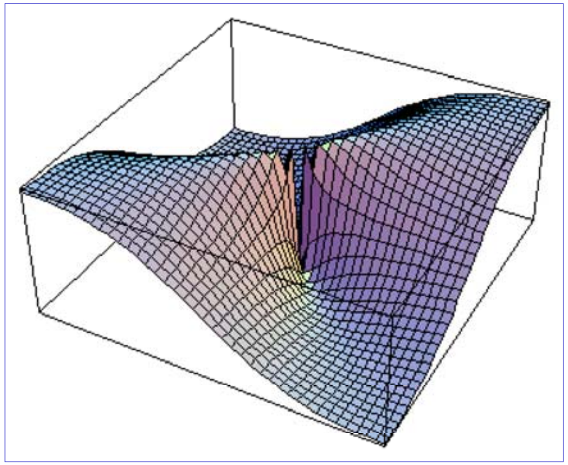
$$\left| f(x,y) - f(0,0) \right| < 2\rho < \varepsilon$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0),$$

故函数在(0,0)处连续.

例6 讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$



在(0,0)的连续性.

解　取 $y=kx$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}$$

其值随k的不同而变化，极限不存在.

故函数在(0,0)处不连续.

闭域上多元连续函数有与一元函数类似的如下性质:

定理：若 $f(P)$ 在有界闭域 D 上连续, 则

(1) $\exists\, K>0$, 使 $|f(P)|\le K$, $P\in D$; (有界性定理)

(2) $f(P)$ 在 D 上可取得最大值 M 及最小值 m ;

(最值定理)

(3) 对任意 $\mu\in[m,M]$, $\exists\, Q\in D$, 使 $f(Q)=\mu$;

(介值定理)

* (4) $f(\mathrm{P})$ 必在D 上一致连续 . (一致连续性定理)

(证明略)

一般地，求 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)$ 时，如果 $f(P)$ 是初等函数，且 P_0 是 $f(P)$ 的定义域的内点，则 $f(P)$ 在点 P_0 处连续，于是 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$.

例7 求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

解 原式 $=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy+1-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1}{\sqrt{xy+1}+1}$

$=\dfrac{1}{2}$.

备用题

1. 设 $f(xy, \frac{y^2}{x}) = x^2 + y^2$， 求 $f(\frac{y^2}{x}, xy)$.

解法1 令 $\begin{cases} xy = u \\ \dfrac{y^2}{x} = v \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = \sqrt[3]{uv} \\ x = \dfrac{u}{\sqrt[3]{uv}} \end{cases}$

$$\Longrightarrow f(u, v) = \frac{u^2}{(uv)^{2/3}} + (uv)^{2/3}$$

$$\Big\downarrow \quad u = \frac{y^2}{x},\ v = xy$$

$$f(\frac{y^2}{x}, xy) = \frac{(\frac{y^2}{x})^2}{y^2} + y^2 = \frac{y^2}{x^2} + y^2$$

1． 设 $f(xy, \frac{y^2}{x}) = x^2 + y^2$，求 $f(\frac{y^2}{x}, xy)$.

$$\boxed{f(\frac{v^2}{u}, uv)}$$

解法2 令 $\begin{cases} xy = \dfrac{v^2}{u} \\ \dfrac{y^2}{x} = uv \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = v \\ x = \dfrac{v}{u} \end{cases}$

$$\Longrightarrow f(\frac{v^2}{u}, uv) = f(xy, \frac{y^2}{x}) = (\frac{v}{u})^2 + v^2$$

即 $$f(\frac{y^2}{x}, xy) = \frac{y^2}{x^2} + y^2$$

2. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\dfrac{\ln(1+xy)}{x+y}$ 是否存在?

解: 利用 $\ln(1+xy)\sim xy$, 取 $y=x^{\alpha}-x$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\frac{\ln(1+xy)}{x+y}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x\to 0}}\frac{x^2y}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\alpha+2}-x^3}{x^{\alpha}}$$

$$=\lim_{x\to 0}(x^2-x^{3-\alpha})=\begin{cases}-1, & \alpha=3\\ 0, & \alpha<3\\ \infty, & \alpha>3\end{cases}$$

所以极限不存在.

一、 偏导数定义及其计算法

定义1. 设函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内

极限 $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称此极限为函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 对 x

的偏导数，记为 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$； $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$； $\left.z_x\right|_{(x_0,y_0)}$；

$f_x(x_0,y_0)$；$f_1'(x_0,y_0)$.

注意: $$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x,y_0)\right|_{x=x_0}$$

同样可定义对 y 的偏导数

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} f(x_0, y)\Big|_{y=y_0}$$

若函数 $z = f(x, y)$ 在域 D 内每一点 (x, y) 处对 x 或 y 偏导数存在，则该偏导数称为偏导函数，也简称为**偏导数**，记为

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial x},\ z_x,\ f_x(x, y),\ f_1'(x, y)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial f}{\partial y},\ z_y,\ f_y(x, y),\ f_2'(x, y)$$

偏导数的概念可以推广到二元以上的函数．

例如, 三元函数 $u = f(x, y, z)$ 在点 (x, y, z) 处对 x 的偏导数定义为

$$f_x(x,y,z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$f_y(x,y,z) = ?$$

(请自己写出)

$$f_z(x,y,z) = ?$$