高等数学上册练习题

第一章　函数与极限

一．　填空题

1．设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & -\infty<x<0\\ 2^x, & 0\le x<+\infty\end{cases}$，则 $f(x-1)=$ ________________；

2．$f(x)=\begin{cases}2^x, & x>0\\ -2^{-x}, & x<0\end{cases}$，则 $f(x)$ 是 ________ 函数（填奇函数或偶函数）；

3．已知函数 $x\sin\dfrac{1}{x-1}$，$e^{\frac{1}{1-x}}$，$e^{\frac{1}{x-1}}$，$\ln(x-1)$，则当 $x\to1^+$ 时为无穷小量的是

________；

4．设 $f(x)$，$g(x)$ 分别是当 $x\to0$ 时关于 x 的 n 阶及 m 阶无穷小（$m<\dfrac{n}{2}$），则 $\dfrac{f(x)}{g^2(x)}$ 是当 $x\to0$ 时关于 x 的 ________ 阶无穷小；

5．已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\arctan\dfrac{1}{x}, & x>0\\ \dfrac{3^{\frac{1}{x}}-1}{2+3^{\frac{1}{x}}}, & x<0\end{cases}$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第 ________ 类 ________ 间断点；

6．已知 $\lim\limits_{x\to1}(ax)^{\frac{1}{b\sin(x-1)}}=e^{\frac{1}{2}}$，则 $a=$ ________$,b=$ ________.；

7．$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2\cos\sqrt{\sin x^2+e^x+1}}{x+1}=$ ______________；

8．若 $(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim\cos x-1.(x\to0)$，则 $a=$ _________；

9．若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{2000}}{n^k-(n-1)^k}=A$，则 $A=$ ________$,k=$ ________.；

10．若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(3x-2)^{\alpha}}=\beta(\ne0,\infty)$，则 $\alpha=$ ______$,\beta=$ ______.；

11．$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+a)-\ln a}{x}(a>0)=$ _______________；

12. $\lim\limits_{x\to 0}(x+e)^{\frac{1}{x}}=$ ______________；

13. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}=$ ______________。

14. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\dfrac{f(x)}{\sin 2x})}{3^x-1}=5$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=$ _________

15. $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^{2n-1}+ax^2+bx}{x^{2n}+1}$ 是连续函数 则 $a=$ _________, $b=$ ________.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{f(x)}{4^x-1}\right)^{\frac{1}{\ln\cos x}}=2$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^3}=$ _________

17. 设 $f(x)$ 满足 $af(x)+bf(\dfrac{1}{x})=e^x, |a|\neq|b|$，则 $f(x)=$ ________

二．选择题

1．已知数列 $\{x_n\}=\{[1+(-1)^n]^n\}$，则（　　）

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$　　(C) $\lim\limits_{x\to\infty}x_n\neq\infty$ 但 $\{x_n\}$ 无界

(D) $\{x_n\}$ 发散但有界

2．当 $x\to 0$ 时，比其他三个更高阶的无穷小量是（　　）

(A) x^2　(B) $\sqrt{1-x^2}-1$　(C) $1-\cos x$　(D) $\sin x-\tan x$

3．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2(1-\cos x)}}{\arcsin x}=($　$)$

(A) 2　　(B) -2　　(C) 不存在　　(D) 0

4．设 $\begin{cases}\dfrac{e^{x^{-1}}-2}{e^{x^{-1}}+1}\arctan\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0\end{cases}$ 则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的（　　）

(A) 连续点　　(B) 第一类可去间断点

(C) 第一类跳跃间断点　　(D) 第二类间断点

5．数列 $\{a_n\}$ 单调增，$\{b_n\}$ 单调减，$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$，则数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$（　　）

(A) 都收敛但极限可能不同　　(B) 都收敛且极限可相同

(C) 一个收敛 一个发散 (D) 两个都发散

6．设数列 $\{x_n\}$ $\{y_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$ 则下列断言正确的是（ ）

(A) 若 $\{x_n\}$ 发散， 则 $\{y_n\}$ 必 发散 (B) 若 $\{x_n\}$ 无界则 $\{y_n\}$ 必有界

(C) 若 $\{x_n\}$ 有界，则 $\{y_n\}$ 必为无穷小， (D) 若 $\{\dfrac{1}{x_n}\}$ 为无穷小，则 $\{y_n\}$ 必为无穷小

7．设 $f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2x^n - 3x^{-n}}{x^n + x^{-n}} \cdot \sin\dfrac{1}{x}$ ，则 $f(x)$ 有（ ）

(A) 两个第一类间断点 (B) 三个第一类间断点

(C) 两个第一类间断点，一个第二类间断点

(D) 一个第一类间断点，两个第二类间断点

8．曲线 $y = xe^{\frac{1}{x^2}}$ （ ）

(A) x^2 (B) $\sqrt{1-x^2}-1$ (C) $1-\cos x$ (D) $\sin x - \tan x$

三．求极限

1． $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{n-2}{n+1})^n$

2． $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$

3． $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$

4． $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\tan x - \sin x}{x^3}$

5． $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{(\ln x)(\ln(2x-1))}{1+\cos \pi x}$

6． $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{\sqrt{x^2+x}}}{e^{\sqrt{x^2-1}}}$

7． $\lim\limits_{x\to0}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$

8． $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\dfrac{\pi}{2}x}$

9． $\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}} + \dfrac{x}{|x|})$

10． $\lim\limits_{x\to1}(x-1)\tan\dfrac{\pi}{2}x$

11． $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x(e^{2x}-1)\ln(1+\tan^2 x)}$

12． $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x(x-\arcsin x)}{x(\arcsin x)^2}$

13． $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x})^x$

14． $\lim\limits_{x\to0}(x+e^{2x})^{\frac{1}{\sin x}}$

15. $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+2^x)\ln(1+\frac{3}{x})$

16. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{\sin x}\right)$

17. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{1-\cos x+\sin^2 x}$

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1}$

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot\arctan nx}{\sqrt{n^2+n}}$

20. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{a_1{}^x+a_2{}^x+\cdots+a^x{}_n}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$ $a_i>0(i-1,2,\cdots)$

三．指出下列函数的间断点并判断其类型

1. $f(x)=\frac{1+x}{1+x^3}$

2. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^3-3x+2}$

3. $f(x)=\frac{x^2-x}{|x|(x^2-1)}$

4. $f(x)=\begin{cases}e^{\frac{1}{x-1}} & x>0,\\ \ln(1+x) & -1<x\le 0.\end{cases}$

5. $f(x)=\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}$

6. $y=\frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x^2(x-1)}$

7. $f(x)=\lim\limits_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$

8. $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}\cdot x$

9. $f(x)=\begin{cases}\frac{x(x+2)}{\sin\pi x},x<0\\ \frac{\sin x}{x^2-1},x\ge 0\end{cases}$

四．计算题

1．欲使 $f(x)=\begin{cases}1, & x=-1\\ \ln(b+x+x^2), & x>-1\\ a+x^2, & x<-1\end{cases}$，在 $x=-1$ 处连续，求 $a,b=?$

2．设函数 $f(x)=\begin{cases}a+\arccos x, & -1<x<1\\ b, & x=-1\\ \sqrt{x^2-1}, & -\infty<x<-1\end{cases}$，在 $x=-1$ 处连续，求 $a,b=?$

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{x^4+ax+b}{(x-1)(x+2)}, & x\ne 1,x\ne -2\\ 2, & 2\end{cases}$，$x=1$ 在处连续，求 $a,b=?$

3．确定 a,b 使函数 $f(x)=\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$ 无穷间断点 $x=0$，有可去间断点 $x=1$；

4．设$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\beta$（$\beta$为常数），求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+f(x)}-2}{x}$；

5．试确定c为何值时，$f(x)=\begin{cases} x^2-7, & |x|\le c \\ \dfrac{6}{|x|}, & |x|>c \end{cases}$在$(-\infty,+\infty)$上连续；

6．设$a>0, x_0>0, x_{n+1}=\dfrac{1}{2}(x_n+\dfrac{a}{x_n})$，证明数列$\{x_n\}$收敛，并求其极限；

7．设$x_1=10, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}, (n=1,2,\cdots)$，试证明数列$\{x_n\}$的极限存在，并求其极限；

8．已知$a_n=\dfrac{1}{n^3+1}+\dfrac{4}{n^3+2}+\cdots+\dfrac{n^2}{n^3+n}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$；

9．求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\dfrac{1}{n^2-n+1}+\dfrac{2}{n^2-n+2}+\cdots\dfrac{n}{n^2-n+n})$；

10．设$f(x)$是x的二次函数且$f(0)=1, f(x+1)-f(x)=2x$，求$f(x)$。

11．试讨论$f(x)=\begin{cases} (2x^2+\cos^x)^{x^{-2}}, & x<0 \\ a, & x=0 \\ \dfrac{b^x-1}{x}, & x>0 \end{cases}$，在$(-\infty,+\infty)$内的连续的条件.

12．确定常数a为何值时，使极限$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{3+e^{1/x}}{1+e^{1/x}}+\dfrac{\ln(1+ax)}{x}\right]$存在。

五．证明题

1．证明：实系数三次方程$x^3+ax^2+bx+c=0$必有实根；

2．若$f(x)$满足 $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2), \forall x_1,x_2\in(-\infty,+\infty)$，且$f(x)$在$x=0$处连续且不为零，证明$f(x)$处处连续；

3．设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，$a<c<d<b, k=f(c)+f(d)$，证明在闭区间$[a,b]$上必存在一点ξ使得$k=2f(\xi)$；

4．设函数$f(x)$在闭区间$[0,2a]$上连续，$f(0)=f(2a)$，$[0,a]$证明在闭区间上至少存在一点ξ使得$f(\xi)=f(\xi+a)$；

5．设数列$\{x_n\}$有界，又$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$。

第一章　函数与极限（参考答案）

一．填空题 1． $f(x)=\begin{cases} x, & -\infty<x<1 \\ 2^{x-1}, & 1\le x<+\infty \end{cases}$　2．奇函数　3． $e^{\frac{1}{1-x}}$　4． $-2m$

5. 第一类可去间断点　6． $a=1,b=2$　7．0　8． $a=-\dfrac{3}{2}$　9． $A=\dfrac{1}{2001},k=2001$，

10． $\alpha=5,\beta=3^{-5}$　11． $\dfrac{1}{a}$　12． e^2　13． $e^{-1/2}$　14。$10\ln 3$

15． $a=2,b=-1$　16。$-(\ln 2)^2$　17。$f(x)=\dfrac{ae^x-be^{1/x}}{a^2-b^2}$

二．选择题　1(C)　2(D)　3(C)　4(C)　5(B)　6 (D)　7(C)　　8(D)

三． 1． e^{-3}　2． $\dfrac{1}{2}$　3． x^2　4． $\dfrac{1}{2}$　5． $\dfrac{4}{\pi^2}$　6． $e^{\frac{1}{2}}$　7． $e^{-\frac{\pi}{2}}$　8． $-\dfrac{4}{\pi^2}$ 9．1　10． $-\dfrac{2}{\pi}$

11． $\dfrac{1}{3}$　12。$-\dfrac{1}{6}$　13． e^2　14． e^3　15． $3\ln 2$　16． $\dfrac{1}{2}$　17． $-\dfrac{2}{3}$

18． $\dfrac{2}{3}$　　20． $\max\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$

三．1． $x=-1$为可去间断．点；2 $x=1,x=2$ 均为无穷间断点；

3． $x=0$为跳跃间断点， $x=-1$为无穷间断点， $x=1$为可去间断点；

4． $x=0$为跳跃间断点， $x=1$为无穷间断点。

5． $x=0$是第二类无穷间断点， $x=1$是第一类跳跃间断点。

6． $x=0$是第二类无穷间断点， $x=1$为可去间断点；

7． $x=0$是第一类可去间断点， $x=k\pi\ (k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 是第二类无穷间断点

8． $x=\pm1$ 第一类可去间断点

9．$x=0$第一类为跳跃间断点，$x=-2$第一类可去间断点，$x=-k(\ne 2,k$ 为正整数），

$x=1$是第二类间断点

四．计算 $x=0$为跳跃间断点题 1． $a=0,b=e$ 2． $a=\pi,b=0$，3． $a\ne1,b=e$　4． $\dfrac{\beta}{12}$

5． $c=3$　6． $\sqrt{a}$　7．3　．8 $\dfrac{1}{3}$　9． $\dfrac{1}{2}$　10． $f(x)=x^2-x+1$

11． $a=e,b=e^e$　12． $a=\dfrac{3}{2}$

第二章 导数与微分

一．　填空题

1．设 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + k\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \dfrac{1}{2} f'(x_0)$, 则 $k =$ ________________ ；

2．曲线 $y = 2 + \sqrt[3]{x-1}$ 在点 $M(1,2)$ 的切线方程为 ________________ ；

3．函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 点的左右导数存在是 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 点可导的

________________ 条件；

4． $d(e^{\sin^2 2x}) =$ ______________ $d(\sin 2x) =$ ________________ dx；

5．若 $f(x) = \sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}$, 则 $f^{(27)}(\pi) =$ ____________________ ；

6．设 $f(x)$ 有任意阶导数，且满足 $f'(x) = f^2(x)$，则 $f^{(n)}(x) =$ ____________ 。

7. 设　$y = \ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$, 则 $y''\big|_{x=0} =$ ____________

8．已知曲线 $y = x^n$ 在点 $(1,1)$ 的切线与 x 轴的交点为 $(\xi_n, 0)$，则 $\lim\limits_{n \to \infty} =$ _____________

9．已知 $f'(x_0) = -1$，则 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{f(x_0 - 2x) - f(x_0 - x)} =$ ____________

10． $\lim\limits_{x \to \infty} t\left(\dfrac{x+t}{x-t}\right)^x$，则 $f'(t) =$ _________________

11．已知 $y = f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$， $f'(x) = \arctan x^2$，则 $f'(0) =$ _____________

12．已知曲线 $y = x^3 - 3a^2 x + b$ 与 x 轴相切，则 b^2 可以通过 a 表示为 $b^2 =$ _____________

二．选择题

1．设 $f'(0)$ 存在， $\lim\limits_{x \to 0}\left(1 + \dfrac{1 - \cos f(x)}{\sin x}\right)^{\frac{1}{x}} = e$，则 $f'(0) =$

(A) 0　　　(B) 1　　　(C) $\sqrt{2}$　　　(D) $\sqrt{e}$

2． $f(x)$ 在 $x = x_0$ 可导是 $|f(x)|$ 在 $x = x_0$ 可导的(　　　)

(A) 充分条件　　　(B) 必要条件

(C) 充分条必要条件　　　　　　　　　(D) 无因果关系

3．$f(x)$ 在 $x=0$ 可导，$F(x)=f(x)(1+|x|)$，则 $f(0)=0$ 是 $F(x)$ 在 $x=0$ 可导的（　　　）

(A) 必要但非充分条件　　　　　　　　　(B) 充分但非必要条件

(C) 既非充分条又非必要条件　　　　　　(D) 充分必要条件

4．$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0\\ x^2 g(x), & x\le 0\end{cases}$，其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$（　　　）

(A) 极限不存在　　　(B) 可导　　　(C) 连续不可导　　(D) 极限存在但不连续

5．设 $f(x)$ 对任意 x 均满足 $f(1+x)=af(x)$，且有 $f'(0)=b$，其中 a,b 为非零常数，

则（　　　）

(A) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导且 $f'(1)=a$　　　　(B) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导且 $f'(1)=b$

(C) $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导且 $f'(1)=ab$　　　　(D) $f(x)$ 在 $x=1$ 处不可导

6．设 $f(x)$，$g(x)$ 定义在 $(-1,1)$，且在 $x=0$ 都连续，若

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\ne 0\\ 2, & x=0\end{cases}$，则（　　　）

(A) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$ 且 $g'(0)=0$　　　(B) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=1$ 且 $g'(0)=0$

(C) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$ 且 $g'(0)=1$　　　(D) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$ 且 $g'(0)=2$

7．设 $f(x)=3x^3+x^2|x|$，则使 $f^{(n)}(0)$ 存在的最高阶数 n 为（　　　）

(A) 0　　　(B) 1　　　(C) 2　　　(D) 3

8. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义，$f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是（　　　）

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty} h\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]$ 存在　　　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在　　　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在

9．设 $f(x)=\left|x^3-1\right|\varphi(x)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 处连续，则 $\varphi(1)=0$ 是 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导的(　　　)

(A) 充分必要条件　　　　(B) 必要但非充分条件

(C) 充分但非必要条件　　　　(D) 既非充分条又非必要条件

10．设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，周期为 4，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的切线的斜率为(　　　)

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) 0　　(C) -1　　(D) -2

11. 曲线 $y=x^2+ax+b$ 和 $2y=-1+xy^3$ 在点 $(1,-1)$ 处相切，其中 a,b 为常数，则(　　　)

(A) $a=0,b=-2$　　　　(B) $a=1,b=-3$

(C) $a=-3,b=1$　　　　(D) $a=-1,b=-1$

12．设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导，则(　　　)

(A) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$

(B) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$

(C) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$

(D) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

13．设 $f(x)=(x^2-x-2)\left|x^3-x\right|$ 不可导点的个数是(　　　)（研）

(A) 3　　(B) 2　　(C) 1　　(D) 0

三．求下列函数的导数

1． $y=\tan(e^{2x}+1)$　　　　2. $y=\cos\dfrac{x}{1-x^2}$

3． $y=x^x\sin x$　　　　4. $y=\sqrt{(x\sin x)\sqrt{1-e^{3x}}}$

5． $y=\ln\sqrt{\dfrac{2+\sin^2 x}{1+e^x}}+\arctan\sqrt{2}$　　　　6. $y=(2x)^{\sqrt{x}}\ (x>0)$

7． $y=x^{x^x}$　　　　8． $y=\sqrt{e^{\frac{1}{x}}\sqrt{x\sqrt{\sin x}}}$

9．$y=\left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^x\left(\frac{x}{x}\right)^x$　　10．$f(x)=2^{|x-a|}$

11．$y=\frac{1}{2}\arctan\sqrt{1+x^2}+\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}$，　　12. $y=\left|\ln|x|\right|$

四．求下列函数的微分

1．$y=\arcsin\sqrt{x}+\frac{\ln x}{x}(x>0)$　　2. $y=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

3．$y=\arcsin(\sin x^2)$　　4. $y=\sqrt[3]{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$

五．解答下列各题

1．设$\begin{cases}x=2\ln\cot t\\ y=\tan t\end{cases}$，求$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$，　$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$；

2．若$f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}\left[t\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2tx}\right]$，求$f'(t)$；

3．设$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\sin^2 x & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，求$f'(\frac{\pi}{2}),f'(0)$；

4．讨论函数$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{1-e^{\frac{1}{x}}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$在$x=0$处的可导性；

5．试确定a,b的值，使函数$f(x)=\begin{cases}ae^x+be^{-x} & x\le 0\\ \frac{1}{x}\ln(1+x) & x>0\end{cases}$在$x=0$处可导；

6．设$f(x)=\begin{cases}x^2 & x\le x_0\\ ax+b & x>x_0\end{cases}$，为使$f(x)$在$x=x_0$处可导，应如何选择常数$a,b$？

7．设$F(x)=\begin{cases}e^x\cos x, & x\le 0\\ ax^2+bx+c, & x>0\end{cases}$,试确定$a,b\ c$的值，使函数$F(x)$在$(-\infty,+\infty)$上二阶可导.

8．设$f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x\le 0\\ x^2+ax+b, & x>0\end{cases}$，试确定$a,b$的值，使函数$f(x)$可导.

9．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$,其中 $g(x)$ 有二阶连续导数,且 $g(0)=1, g'(0)=-1$

(1)求 $f'(x)$ (2) 函数 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性(研)

10．设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}(1-\cos x), & x<0\\ 1, & x=0\\ \dfrac{1}{x}\int_0^x \cos t^2 dt, & x>0\end{cases}$,在 $x=0$ 处的连续性和可导性(研)

11．给定曲线 $y=\dfrac{1}{x^2}$ (1)求曲线在横坐标为 x_0 的点处的切线方程

(2) 求曲线的切线被两坐标轴所截线段的最短长度(研)

12．已知函数 $\phi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$f(x)=|x-2|\phi(x)$，试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性和可导性；

13．设 $y=y(x)$ 由方程 $x^{y^2}+y^2\ln x+4=0$ 确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$；

14．设 $y=y(x)$ 由方程 $e^{xy}+\tan(xy)=y$ 确定，求 $f'(0)$；

15．设 $\begin{cases}x=f'(t)\\ y=f(t^2)\end{cases}$，其中 $f(t)$ 有三阶导数，且 $f''(t)\neq 0$，求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$；

16．设 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(x)}=e^y$ 所确定,其中 $f(x)$ 有二阶导数,且 $f'\neq 1$ 求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$；

17．设 $y=y(x)$ 由方程 $\begin{cases}x=\arctan t\\ 2y-ty^2+e^t=5\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$；

18．设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x^x+tx-t^2=0\\ \arctan(ty)=\ln(1+t^2y^2)\end{cases}$ 所确定，求 $\dfrac{dy}{dx}$；

19．设 $\begin{cases}x=\cos(t^2)\\ y=t\cos(t^2)-\int_1^{t^2}\dfrac{\cos u}{2\sqrt{u}}du\end{cases}$，求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 在 $t=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ 处的值

20．设 $\begin{cases}x=\int_1^t u\ln u du\\ y=\int_1^{t^2}u^2\ln u du\end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$

21．设 $f(x)$ 在 $x=0$ 某个邻域内可导，且当 $x\neq 0$ 时 $f(x)\neq 0$，已知 $f(0)=0$，

$f'(0)=2$，求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+2f(x))^{\frac{1}{\sin x}}$；

22．设 $f(x)=\begin{cases} x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，确定 n 的值，$f(x)$ 在 $x=0$（１）连续；

（２）可导，并 $f'(x)$（３）$f'(x)$ 连续；

23．求对数螺线 $\rho=e^{\theta}$ 在 $(\rho,\theta)=(e^{\frac{\pi}{2}},\dfrac{\pi}{2})$ 处的切线的直角坐标方程；

24．求函数 $y=\dfrac{\ln x}{x}(x>0)$ 的 n 阶导数.

25．设 $y=\ln(1+ax)$,求 $y^{(n)}$

26．设 $y=\arctan x$,求 $y^{(n)}(0)$

27．设 $y=\arcsin x$,求 $y^{(n)}(0)$

28．设 $f(x)=\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\dfrac{a}{x}(a>0)$，求 $f'(\pm 2a)$

29．设 $T=\cos n\theta,\theta=\arccos x$，求 $\lim\limits_{x\to 1-}\dfrac{dT}{dx}$

30．已知 $f(x)=\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-n)}{(x+1)(x+2)(x+3)\cdots(x+n)}$，求 $f'(1)$

六．证明题：

1．已知函数 $f(x)$ 在域 $U(0,\delta_1)(\delta_1>0)$ 内可导，且 $f(x)$ 为偶函数，试证：$f'(0)=0$。

2．设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，证明：$x\to x_0$，$f(x)$—$g(x)$ 是 $x-x_0$ 的高阶无穷小的充分必要条件是两曲线 $y_1=f(x)$ 和 $y_2=g(x)$ 在 $x=x_0$ 处相交且相切。

3．证明下列有关结论：

（1）设函数 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，又 $f(x)=\cos\varphi(x), f'(x)=\sin\varphi(x)$

证明：对满足 $\varphi(x)\neq n\pi$ 的一切 x，有 $\varphi'(x)=-1$

（2）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，且对于任意 $x,y\in(-\infty,+\infty)$ 恒有

$f(x+y)=f(x)f(y)$，$f(x)=1+xg(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to 0}=1$，

证明：$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处可导。

4．证明：表达式$\frac{y'''}{y'}-\frac{3}{2}\left(\frac{y''}{y'}\right)^2$，在变换$u=\frac{1}{y}$下保持不变

第二章　　导数与微分（参考答案）

一． 1．$k=\frac{1}{2}$ 2．$x=1$3．必要非充分 4．$2e^{\sin^2 2x}\sin 2x$，$2e^{\sin^2 2x}\sin 4x$

5．0　　6．$n\,!\,f^{(n+1)}(x)$　7．$-\frac{3}{2}$　　8．$\frac{1}{e}$　　9．1　　10．$(1+2t)e^{2t}$

11．$\frac{3}{4}\pi$　12．$b^2=4a^6$

二．1 (C)　　2．(D) 3．(D) 4．(B)　　5．(C)　6．(D)　　7．(B)

8．(D) 9．(A)　　10．(D)　11. (D)　12. (D)　13．(B)

三．1．$2e^{2x}\sec^2(e^{2x}+1)$　2．$\frac{(x^2-1)\sin x+2x\cos x}{(1-x^2)^2}$　3．$x^x\sin(\ln x+1+\cot x)$　4．$\frac{1}{2}\sqrt{x\sin x\sqrt{1-e^{3x}}}\left[\frac{1}{x}+\cot x-\frac{3e^{3x}}{2(1-e^{3x})}\right]$　　5．$\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2x}{2+\sin^2 x}-\frac{e^x}{1+e^x}\right)$

6．$x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}(\ln x+2)$　7。$x^{(x^x+x)-1}(x\ln^2 x+x\ln x+1)/\ln x$　8．$\frac{1}{8}(\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}+\cos x)y$

9．$y\left[\ln\frac{a}{b}-\frac{a-b}{x}\right]$　10．$\begin{cases}2^{x-a}\ln 2, & x>a\\ -2^{a-x}\ln 2, & x<a\end{cases}$　11．$\frac{-1}{(2x+x^3)\sqrt{1+x^2}}$　12．$\begin{cases}\frac{1}{x}, & |x|>1\\ \frac{-1}{x}, & 0<|x|<1\end{cases}$

四．1．$\left(\frac{\sqrt{x-x^2}}{2(x-x^2)}+\frac{1-\ln x}{x^2}\right)dx$　　2．$\frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}dx$

3．$\frac{\sin 2x}{\sqrt{1-\sin^4 x}}dx$　　4．$\frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{1-x^3}{1+x^2}\right)^2}\frac{2x+3x^2+x^4}{(1-x^3)^2}dx$

五．1．$-\frac{1}{2},\frac{1}{4}$　2．$(1+2t)e^{2t}$　3．$-\frac{4}{\pi^2}$，1，4．不可导　5．$a=\frac{1}{4},b=\frac{3}{4}$

6．$a=2x_0,b=-x_0^2$　7. $a=0,b=1,c=1$　8.　　9. 连续且可导

10. 连续且可导　11. $(1)y-\frac{1}{{x_0}^2}=-\frac{2}{{x_0}^3}(x-x_0),(2)l=\frac{3\sqrt{3}}{2}$　12．连续，不可导

13. $-\dfrac{y}{2x\ln x}$ 14. 2 15. $\dfrac{f''(2f'+2tf'')-2tff'''}{(f'')^2}$ 16. $y''=-\dfrac{(1-f'(y))^2-f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3}$

17. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(y^2-e^t)(1+t^2)}{2(1-ty)}$ 18. $y'=\dfrac{y[\ln x(t-x)+t-x+1]}{x-2t}$ 19. $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$

20. $4t^2,\dfrac{16t^2}{\ln t}$ 21. e^4 22. $(1)n>0,(2)n>1,(3)n>2$ 23. $x+y=e^{\frac{\pi}{2}}$

24. $\dfrac{(-1)^{n-1}n!}{x^{n+1}}(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln x)$ 25. $y^{(n)}=(-1)^{n-1}a^n\dfrac{(n-1)!}{(1+ax)^n}$

26. $\begin{cases}0, & n=2k\\(-1)^k(2k)!, & n=2k+1\end{cases}$ 27. $\begin{cases}0, & n=2k\\[(2k-1)!!]^2, & n=2k+1\end{cases}$ 29. n^2 30. $\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$

第三章参考答案或提示

一. 1. $\dfrac{3}{4}\ln 2$ ；2. $e^{-1/3}$；3. 2 ；4. e^2；5. $a=1,b=-\dfrac{25}{2}$ 6. π 7.（1） $y=x+\dfrac{1}{e}$

（2） $y=x-1$ 8. $-10<a<100$

二. 1. (B)； 2. (B)；3. (D) 4．(A) 5．(B) 6．(A) 7．(B)

8．(C) 9. (B) 10. (C) 11. (C) 12。(A)

三. 1. $1/2e$ 2. $(ab)^{9/2}$ 3. 38 4. －1 5．$\dfrac{2}{3}$ 6．e^2 $e^{2t}(-3+2t),y=0$ 。

7．$\dfrac{4^4}{3^3e}$ 8．$\dfrac{\ln a}{6}$ 9．（1）$-\dfrac{1}{12}$（2）$\dfrac{1}{3}$（3）$-\dfrac{1}{6}$（4）$-\dfrac{1}{12}$

10. －4 11. －2，0，$\dfrac{2}{3}$ 12. m 为偶数，$y(0)=0$ 是极小值；n 为奇数，

$y(1)=0$ 是极大值； m，n 无论为奇为偶，$y\left(\dfrac{m}{n+m}\right)=\dfrac{m^m\cdot n^n}{(m+n)^{m+n}}$ 都是极大值.

13. $e^{2t}(-3+2t),y=0$ 14. $a=2,b=1,c=-\dfrac{1}{2}$ 15. $a=1,b=\dfrac{1}{5},c=\dfrac{1}{5}$

16. $\dfrac{10}{3}$ 17. $9\sqrt{3}$. 18. 极大值 $f(\dfrac{1}{2})=-\dfrac{4}{15}$， 极大值 $f(-\dfrac{1}{2})=\dfrac{4}{15}$

19. $a=e^e,1-\dfrac{1}{e}$ 20. $p(x)=\dfrac{x^3}{2}-\dfrac{x^2}{4}+x$ 21. $(-\dfrac{1}{2}\ln 2,\dfrac{1}{\sqrt{2}}),\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$

22. $x=0,\pm1$ 极小值 $f(x)=0$， $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 极大值 $f(x)=\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$

23．$k<4$ 无根，　$k=4$ 有唯一一个根，　　$k>4$ 有两个根

27．$q^2+\dfrac{4p^2}{27}>0$ 时有一个根　　$q^2+\dfrac{4p^2}{27}<0$ 时有三个根，

29.（1）$b<0$ 有且有一个根（2）$b>e\ln a$ 有两个根，$b=e\ln a$ 又且有一个根
$0<b<e\ln a$ 无根，（3）$b=0$ 无根

第三章　微分中值定理与导数的应用

一．　选择与填空

1．设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-2a}\right)^x=8$，则 $a=$ ____________；

2．$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{\arctan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=$ ______________________；

3．$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2\sin x}{|x|}+\dfrac{4+2^{\frac{1}{x}}}{1+2^{\frac{2}{x}}}\right)=$ ________________；

4．$\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n})=$ ______________________；

5. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=12$,则 $a=$ _____ $b=$ _____

6．极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+e^n+\pi^n+100)^{\frac{1}{n}}=$ _____________________；

7．(1)曲线 $y=x\ln(e+\dfrac{1}{x})$，$(x>0)$ 的渐近线方程为 _________________

(2) $y=xe^{-\frac{1}{x-1}}$ 的渐近线方程为 _________________

8.方程 $x^3-6x^2-15x+a=0$ 恰有三个实根,a 则的取值范围 _________________

二．选择题

1．设 $f(x)$ 对一切 x 满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2=1-e^{-x}$，

若 $f'(x_0)=0$，其中 $x_0\neq 0$，则(　　　)

$(A) f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值，　(B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值，

$(C)(x_0,f(x_0))$ 是拐点，　　　$(D)x_0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(x_0,f(x_0))$ 也不是拐点；

12．若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^{1-\cos\frac{1}{n}}-1}{\tan(n^{-k}\pi)}=a\neq 0$，则________；

$(A)k=2,a=\dfrac{1}{2\pi}$；$(B)\ k=-2,a=\dfrac{1}{2\pi}$；$(C)k=2,a=-\dfrac{1}{2\pi}$；$(D)k=-2,a=-\dfrac{1}{2\pi}$

2．若 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 内的奇函数，在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0$，且 $f''(x)<0$，则

在 $(0,+\infty)$ 内有（　　）

$(A)f'(x)>0,f''(x)<0$　　　$(B)f'(x)>0,f''(x)>0$

$(C)f'(x)<0,f''(x)<0$　　　$(D)f'(x)<0,f''(x)>0$

3． $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2,(a^2+b^2\neq 0)$，则（　　）

$(A)\ b=4d$　　$(B)\ \ b=-4d$　　$(C)\ a=4c$　　$(D)\ a=-4c$

4． $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(a-x)^2}=-1$，则点 $x=a$（　　）

(A) 是 $f(x)$ 的极大值点　　　(B) 是 $f(x)$ 的极小值点

(C) 是 $f(x)$ 的驻点，但不是极值点　　　(D) 不是 $f(x)$ 的驻点

5．设 $f(x)$ 二阶可导，并且处处满足方程 $f''(x)+3(f'(x))^2+2e^x f(x)=0$，若 x_0 是 $f(x)$

的一个驻点且 $f(x_0)<0$ $f(x)$ 在点 x_0（　　）

(A) 取极大值　　　(B) 取极小值

(C) 不取极值　　　(D) 不能确定

6．下列各式正确的是（　　）

$(A)\ \lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=1$　　　$(B)\ \ \lim\limits_{x\to 0}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

$(C)\ \lim\limits_{x\to -\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=-e$　　　$(D)\ \lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=e$

7．曲线 $y=e^{\frac{1}{x^2}}\arctan\dfrac{x^2+x-1}{(x+1)(x-2)}$（　　）

(A) 1 条　　(B) 2 条　　(C) 3 条　　(D) 4 条

8．下列各式中，对一切 $x>1$ 均成立的是(　　)

(A) $e^x>(e+1)x$　　(B) $e^x<(e-1)x$　　(C) $e^x>ex$　　(D) $e^x<ex$

9．已知 $f(x)$ 当 $x>0$ 满足方程 $f''(x)+3(f'(x))^2=x\ln x$，且 $f'(1)=0$ 则(　　)

(A) $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极大值　　(B) $(1,f(1))$ 是曲线 $f(x)$ 的拐点

(C) $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极小值　(D) $f(1)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(1,f(1))$ 也不是曲线 $f(x)$ 的拐点

10．在 $(-\infty,+\infty)$ 内，方程 $|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x=0$，则(　　)

(A) 无实根　　(B) 有且仅有一个实根

(C) 有且仅有两个实根　　(D) 有无穷多个实根

11．设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内连续，且为其 $f(a)$ 极大值，则存在 $\delta>0$，当 $x\in(a-\delta,a+\delta)$ 时，必有(　　)

(A) $(x-a)[f(x)-f(a)]\ge 0$　　(B) $(x-a)[f(x)-f(a)]\le 0$

(C) $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\ge 0(x\ne a)$　　(D) $\lim\limits_{t\to a}\dfrac{f(t)-f(x)}{(t-x)^2}\le 0(x\ne a)$

三．计算　1．$\lim\limits_{x\to\infty}x^2\left(e^{-\cos\frac{1}{x}}-e^{-1}\right)$；　2．设 $a>0,b>0$，计算 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{9}{x}}$；

3．已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x-\tan xf(x)}{x^3}=0$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6-f(x)}{x^2}$　　4．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-\sin x}{1-\sqrt{1+x^2}}$

5．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{1-\cos\sqrt{x(1-\cos x)}}$　　6．$\lim\limits_{x\to 0^+}(e^x-1-x)^{\frac{1}{\ln x}}$

7．$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{4^x-3^x}{x}\right)^{\frac{1}{x-1}}$　　8．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-a^{\sin x}}{x\sin^2 x}$

9．利用泰勒公式求极限　(1). $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$　　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$　　(4) $\lim\limits_{x\to 0}x^4(\cos\dfrac{1}{x}-e^{-\frac{1}{2x^2}})$

10．设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+x^x-3}{x-1}=-3$,证明 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,并求

$f'(1)$

11． 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内二阶可导,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x+xf(x)}{x^2}=0$，求 $f(0)$ $f'(0)$

和 $f''(0)$ 的值

12．求函数 $y=x^m(1-x^n)$ $(m,n\in N)$ 的极值

13．若 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}[(t-2)(1+\dfrac{1}{x})^{2tx}]$，讨论 $f'(t)$ 的单调性、极值及渐近性；

14．已知常数 $a>0,bc\neq 0$，使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^a\ln\left(1+\dfrac{b}{x}\right)-x\right]=c$，求 a,b,c

15．求 a,b,c $(c>0)$，使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^5+x^4+1)^c-ax-b]=0$

16．对于给定的 x 值，设 $f(x)=\min\{2x+1,x+2,6-2x\}$ 求 $f(x)$ 的最大值

17．设 $y^2=6x$ 试从其所有与法线重合的弦中，找出一条最短的弦的长度

18．设函数 $f(x)$ 满足 $f(x)+4f\left(-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}$，求 $f(x)$ 极大值和极小值

19．设 $a>1$， $f(t)=a^t-at$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的柱点为 $t(a)$，问 a 为何值时， $t(a)$ 最小？并求出最小值

20．设计一个多项式函数 $y=p(x)$ 使其通过 $(0,0)$ 和 $(1,1)$ 且在 $(0,0)$ 点与 $y=\ln(1+x)$ 有相同的切线、曲率、凹向

21．曲线上曲率最大的点称为此曲线的顶点，试求曲线 $y=e^x$ 的顶点，并求在该点处的曲率半径

22． $y=\left|x(x^2-1)\right|$ 的极值

23．讨论曲线 $y=4\ln x+k$ 与 $y=4x+\ln^4 x$ 的交点个数

24．设 $f''(x)$ 连续， $f(0)=0$，记 $F(x)=\begin{cases} f(x)/x, & x\neq 0\\ f'(0), & x=0\end{cases}$

计算 $F'(x)$，并讨论其连续性；

25．设 $f(x)=\dfrac{x^3}{(x+2)^2}+4$，求函数的单调区间, 极值, 凹凸区间, 拐点, 渐近线并作图

26．在半径为 R 的半圆内做一个内接矩形，求边长为多大时，矩形面积最大？

27．在什条件下，方程 $x^3+px+q=0$ 有（1）一个实根（2）三个实根

28．设常数 $k>0$，试证：函数 $f(x)=\ln x-\dfrac{x}{e}+k$ 在 $(0,+\infty)$ 内恰有两个根

29．讨论 $a^x=bx(a>1)$ 的根

三.证明题：

1．设 $k>1, f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且满足 $f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)dx=0$

证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$；

2．设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有三阶连续导数, 且 $f(-1)=0, f(1)=1, f'(0)=0$, 求证:

存在 $\xi\in(-1,1)$ 使得 $f'''(\xi)=3$.

3． 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 a, b 同号, 试证：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{b(f(a)-af(b)}{a-b}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$$

4． 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $\left[a,b\right]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=1$，

证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $(f'(\eta)+f(\eta))e^{\eta-\xi}=1$；

5．设函数 $f(x)$ 在闭区间 $\left[a,b\right]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(x)\neq 0$，

证明：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得 $(b-a)f'(\xi)=(e^b-e^a)f'(\eta)e^{-\eta}$

6. 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可微，且 $g'(x)\neq 0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$

使得 $\dfrac{f(a)-f(\xi)}{g(\xi)-g(b)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

7．设函数 $f(x)$ 在闭区间 $\left[0,1\right]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 内可导，$f(1)=0$, 证明: 至少存在 $\xi\in(0,1)$,

使 $(2\xi+1)f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$

8. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $\left[a,b\right]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $0<a<b$ 证明：存在

$\xi,\eta,\zeta\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)=\dfrac{a^2+ab+b^2}{3\zeta^2}f'(\zeta)$

9. 设 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 且 $g''(x)\neq 0$，$f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$

试证: (1) 在 (a,b) 内 $g(x)\neq 0$ (2) 至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

10. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 可导, $0\le a\le b\le \dfrac{\pi}{2}$, 证明:在 (a,b) 内至少存在两点 ξ_1,ξ_2, 使得 $f'(\xi_2)\tan\dfrac{a+b}{2}=f'(\xi_1)\dfrac{\sin\xi_2}{\cos\xi_1}$

11. (1) 设 $x>0$，证明不等式 $\ln(1+x)>\dfrac{\arctan x}{1+x}$

(2) 当 $x>1$ 时，证明不等式 $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}>\dfrac{x}{1+x}$

12.设 $x\in(0,1)$，证明：(1) $(1+x)\ln^2(1+x)<x^2$； (2) $\dfrac{1}{\ln 2}-1<\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{2}$；

13. 证明：当 $0<x<\pi$ 时，有 $\sin\dfrac{x}{2}>\dfrac{x}{\pi}$

14. 设 $b>a>0$, 证明 $\ln\dfrac{b}{a}>\dfrac{2(b-a)}{a+b}$

15. $f''(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $|f''(x)|\le A, f(0)=f(1)$, 求证: $\left|f'\left(\dfrac{1}{2}\right)\right|\le\dfrac{A}{4}$.

16. 设 $f(x)$ 在[0,1]上具有二阶导数,且满足条件 $|f(x)|\le a,|f''(x)|\le b$ ，其中 a,b 都是非负数, c 是 $(0,1)$ 内任意一点, 证明 $|f'(c)|\le 2a+\dfrac{b}{2}$

17. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 二阶可导,若 $f'(a)=f'(b)=0$ 证明:至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $|f(b)-f(a)|\le\dfrac{(b-a)^2}{4}|f''(\xi)|$

18. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上有 $|f''(x)|\le M$,且开区间在 $(0,1)$ 内取得极大值,

证明: $|f'(0)|+|f'(1)|\le M$

19. 设 $x>0$,常数 $a>e$,证明 $(a+x)^a<a^{a+x}$

20. 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=0$ $f(1)=1$，证明：对于任意给定的正数 a,b, 在 $(0,1)$ 存在不同的 ξ,η 使得 $\dfrac{a}{f'(\xi)}+\dfrac{b}{f'(\mu)}=a+b$.

21．证明：$f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内单调增加.

22．作函数 $y=(x+6)e^{\frac{1}{x}}$ 的图（研）

23．若 $0\le x\le 1, p>1$，证明：$2^{1-p}\le x^{p}+(1-x)^{p}\le 1$

24．证明：当 $|x|\le 2$ 时，$|3x-x^{3}|\le 2$

第四章　　不定积分

一．　选择与填空

1．$\int\frac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}dx=$ ________；2. $\int(\sin x+\cos x)e^{x}dx=$ ________；

3．$\int e^{-x^{3}+2\ln x}dx=$ ________；4. $\int\frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}dx=$ ________；

5．$\int\sqrt{\frac{2-3x}{2+3x}}dx=$ ________；6. $\int\frac{dx}{1+e^{x}}dx=$ ________；

7．$\int\frac{2^{x}}{1-4^{x}}dx=$ ________；8. $\int\frac{\sin x+x\cos x}{1+x\sin x}dx=$ ________；

9．$\int xe^{-\frac{1}{2}x}dx=$ ________；10. $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx=$ ________；

11．$\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx=$ ________；12. $\int\cot^{2}xdx=$ ________；

13．设 $\int xf(x)dx=\arcsin x+c$，则 $\int\frac{1}{f(x)}dx=$ ________；

14．已知 $f(\ln x)=\frac{1}{x}\ln(1+x)$，则 $\int f(x)=$ ________；

15． $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 上是奇函数 $(a>0)$，且在 $(-a,a)$ 上存在原函数 $F(x)$，则

$F(x)$ 在 $(-a,a)$ 上（　　）

A. 是偶函数，　　B. 是奇函数，
C. 可能是奇、也可能是偶函数，D. 非奇、非偶函数；

16．设 $f(x)=e^{-|x|}$，则它在 $(-\infty,+\infty)$ 上的不定积分是（　　）

A. $\int e^{-|x|}dx=\begin{cases}-e^{x}+c_1 & x\ge 0\\ e^{x}+c_2 & x<0\end{cases}$，　　B. $\int e^{-|x|}dx=-e^{-x}+c$

C. $\int e^{-|x|}dx=e^{x}+c$，　D. $\int e^{-|x|}dx=\begin{cases}-e^{x}+2+c\\ e^{x}+c\end{cases}$（其中是$c$任意常数）；

17．已知$\int f(x)dx=xe^{x}-e^{x}+C$，则$\int f'(x)=$（　　）

A. $xe^{x}-e^{x}+C$　，B. $xe^{x}+C$，　C. $xe^{x}+e^{x}+C$，D.　$xe^{x}-2e^{x}+C$；

18．设$f'(\ln x)=1+x$，　$x>0$，则$f(x)=$（　　）

A. $\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$，　　　　B. $x+\frac{x^2}{2}+C$

C. $x+e^{x}+C$　　　　　　　　D. $\frac{1}{2}e^{2x}+e^{x}+C$；

二．比较下列几组不定积分解法

1．$\int\sin xdx$，　$\int\sin^2 xdx$，$\int\sin^3 xdx,\cdots,$　$\int\sin^n xdx$；

2．$\int\frac{1}{\sin x}dx$，　$\int\frac{1}{\sin^2 x}dx$，　$\int\frac{1}{\sin^3 x}dx$；

3．$\int\sqrt{x^2-a^2}dx$，　$\int x\sqrt{x^2-a^2}dx$，　$\int x^2\sqrt{x^2-a^2}dx$　$(x>a>0)$；

4．$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$，　$\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-a^2}}$，　$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$　$(x>a>0)$；

5．$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$，　$\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}}$，　$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$；

6．$\int\frac{dx}{x^2+ax+b}$，　$\int\frac{xdx}{x^2+ax+b}$，　$\int\frac{x^2dx}{x^2+ax+b}$；

三．计算题

1．$\int\frac{dx}{\sqrt{1+12x-9x^2}}$　　　　2．$\int\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sin x}dx$

3．$\int\frac{\cot x}{\ln\sin x}dx$　　　　4．$\int\frac{\sqrt{\arctan\frac{1}{x}}}{1+x^2}dx$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+\tan^2 x}}$

6. $\int \frac{\cos x - \sin x}{1+\sin x \cos x} dx$

7. $\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)} dx$

8. $\int \frac{1}{\sin x - \sin a} dx$

9. $\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1+x}} dx$

10. $\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} dx$

11. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} dx (a>0)$

12. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$

13. $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$

14. $\int e^{\sqrt[3]{x}} dx$

15. $\int \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}} dx$

16. $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} dx$

17. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} \cdot \frac{1+x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

18. $\int (\arcsin x)^2 dx$

19. $\int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}} dx$

20. $\int e^{-\frac{x}{2}} \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt{\sin x}} dx$

21. $\int \frac{e^{\arctan x}}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} dx$

22. $\int \frac{\cos^2 x - \sin x}{\cos x(1+e^{\sin x}\cos x)} dx$

23. $\int \sin(\ln x) dx$

24. $\int \frac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} dx$

25. $\int \frac{1}{x\sqrt{1+2\ln x}} dx$

26. $\int \frac{dx}{x(1+x^4)}$

27. $\int \frac{x^3}{\sqrt[3]{(1+x^2)^3}} dx$

28. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{1}{x} dx$

29. $\int \frac{dx}{1+\sin x}$

30. $\int \frac{\arctan e^x}{e^x} dx$

31. $\int \frac{dx}{e^x+1}$

32. $\int \frac{\arctan \frac{1}{x}}{1+x^2} dx$

四．设 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}$，且 $f[\phi(x)]=\ln x$，求 $\int \phi(x) dx$ 。

五．设 $f'(e^x)=a\sin x+b\cos x$，（a,b 是不同时为零的常数）。

六．求 $\int xf'(2x)dx$，其中 $f(x)$ 的原函数为 $\dfrac{\sin x}{x}$。

七．设 $f(x)=\begin{cases}-\sin x, & x\ge 0\\ x, & x<0\end{cases}$，求 $\int f(x)dx$。

八．设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，且当 $x\ge 0$ 时，$f(x)F(x)=\dfrac{xe^x}{2(1+x)^2}$，已知，

$F(0)=1,\ F(x)>0$，试求 $f(x)$。

九．设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，且 $f(x)=\dfrac{xF(x)}{1+x^2}$，试求 $f(x)$。

第五章　　定积分

一．选择与填空

1．设 $f(x)\in C[0,1]$，且 $\int_0^1 f(x)dx=3$，且 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^2 x)\sin 2xdx=$ ________；

2．$\int_{\frac{1}{4}}^{4}\dfrac{|\ln x|}{\sqrt{x}}dx=$ ________；

3．设 $f(x)$ 为连续奇函数，且 $\int_0^1 f(t)dt=a$，则 $\int_0^1\dfrac{f(-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx=$ ________；

4．$\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{x\sqrt{x-1}}=$ ________；

5．$\int_\alpha^{\alpha+\pi}\sin^2 2x(\cot x+1)dx=$ ________；

6．$\dfrac{d}{dx}\int_0^x \sin(x-t)^2dt=$ ________

7．设函数 $f(x)$ 连续, $\varphi(x)=\int_0^1 f(x^2+t)dt$, 则 $\varphi'(x)=$ ________

8．$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(|x|+x)\cos xdx=$ ________

9．$\int_{-1}^{1}(|x|+x)e^{-|x|}dx=$ ________

10．　设 $f(x)$ 是有一阶导数, $y=\int_0^{x^2}xf(t)dt$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ $=$ ________

11． $\int_{-1}^{1}(1+x)\sqrt{1-x^2}dx=$

$(A)\ \pi$　　$(B)\ \frac{\pi}{2}$　　$(C)\ 2\pi$　　$(D)\ \frac{\pi}{4}$；

12．设 $f(x)=\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}dt,\quad \phi(x)=\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}dt$，当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $\phi(x)$（　）

(A) 高阶无穷小　　(B) 低阶无穷小

(C) 同阶但不等价无穷小　　(D) 等价无穷小；

13．　设正定涵数 $f(x)\in[a,b]$，$F(x)=\int_a^x f(t)dt+\int_b^x\frac{1}{f(t)}dt$，则 $F(x)=0$ 在 (a,b) 内根的个数为（　）

$(A)\ 0$　　$(B)\ 1$　　$(C)\ 2$　　$(D)\ 3$；

二． 计算题

1． $\int_{-2}^{2}(|x|+e)e^{-|x|}dx$　　2．（1）$\int_{-2}^{2}\min\{\frac{1}{|x|},x^2\}dx$（2）$\int_{-2}^{2}\max\{1,x^2\}dx$

3． $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}dx$　　4． $\int_0^1\sin(\ln x)dx$，

5．估计 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx$ 的值　　6． $\int_1^{16}\arctan\sqrt{\sqrt{x}-1}dx$

7． $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$　　8．（1）$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}dx$，（2）$\int_{\frac{1}{2}}^{2}(1+x+-\frac{1}{x})e^{x+\frac{1}{x}}dx$

9． $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\tan^3 x}dx$　　10．设 $\int_0^1\frac{e^x}{1+x}dx=a$，求 $\int_0^1\frac{e^x}{(1+x)^2}dx$

11．求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx$，其中 $f(x)=\int_0^x\frac{\cos t}{\pi-2t}dt$，12． $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3+\sin^2 x)\cos^2 xdx$

13． $\int_0^1(x-1)^2f(x)dx$ 其中 $f(x)=\int_0^x e^{-y^2+2y}dy$　　14． $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{e^x\sin^4 x}{1+e^x}dx$

15． $\int_0^a x|x-a|dx(0<a<1)$　　16． $\int_0^{\pi}\sqrt{1-\sin x}dx$

17． $\int_0^1 x^2f(x)dx$ 其中 $f(x)=\int_1^x\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt$

18．设 $f(x)=x^2-x\int_0^2 f(x)dx+2\int_0^1 f(x)dx$，求 $f(x)$

19．设 $f'(x)\int_0^2 f(x)dx=50$ 且 $f(0)=0, f(x)\geq 0$，求 $\int_0^2 f(x)dx$ 及 $f(x)$

20． a,b,c 取何值才能使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sin x-ax}\int_b^x\dfrac{t^2}{\sqrt{1+t^2}}dt=c$ 成立

21．设 $f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|dt$ (1)证 $f(x+\pi)=f(x)$，求 $f(x)$ 的最大值和最小值

22．求 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$ 的最大值和最小值

23．设 $\lim\limits_{x\to 0}\int_0^x\dfrac{t^2}{(bx-\sin x)\sqrt{a+t^2}}dt=1$，求 a,b 的值

24． $f(x)$ $f'(x)$ 满足关系式 $f(x)=x+\int_0^x tf'(x-t)dt$，求 $f(x)$

25．求 $f(x)$，使它满足 $f(x)-4\int_0^x(x-t)f(t)dt=e^x$

26．设 $f(x)$ 在 $x>0$ 时满足 $f(1)=3$，且 $\int_1^{xy}f(t)dt=x\int_1^y f(t)dt+y\int_1^x f(t)dt$

$(x>0, y>0)$，求 $f(x)$

27．设 $F(x)=\int_0^{x^2}e^{-t^2}dt$，试求(1) $F(x)$ 的极值 (2)曲线 $y=F(x)$ 的拐点的横坐标

(3)求 $\int_{-2}^3 x^2F''(x)dx$ 之值

28. $f(x)=\int_0^x\dfrac{1-2t}{\sqrt{t^2+1}}dt$ 在区间____________内单调增加，曲线 $y=f(x)$ 在区间

____________内向上凹

29．求 $\int_{e^{-2n\pi}}^1\left|\left[\cos(\ln\dfrac{1}{x})\right]'\right|dx$（$n$ 为正整数），

30．已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x=\int_a^{+\infty}4x^2e^{-2x}dx$，求 a，

31．设 $g(x)$ 是可导函数 $f(x)$ 的反函数，其中 $x>0$，且 $\int_1^{f(x)}g(t)dt=x-1$，求 $f(x)$，

32．求极限（1） $\lim\limits_{a\to 0}\int_{-a}^a\dfrac{1}{a}\left(1-\dfrac{|x|}{a}\right)\cos(\dfrac{\pi}{3}-x)dx$，（$a>0$）

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}dt}{e^{x^2}-1}$　　　（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}t^{\frac{3}{2}}dt}{\int_0^{x}t(t-\sin t)dt}$

（4）设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，在 $x=0$ 处可导，$\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{1}{4a^2}\int_{-a}^{a}[f(t+a)-f(t-a)]dt$

（5）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}te^t\sin tdt}{e^x\ x^6}$　　　（6）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{\sin^2 x}\ln(1+t)dt}{\sqrt{1+x^4}-1}$

33. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且满足 $f(x)=e^x+x\int_0^1 f(\sqrt{x})dx$，求 $f(x)$，并求 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大值和最小值，

34．设 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x<0\\ e^{-x}, & x\ge 0\end{cases}$，求 $\int_1^3 f(x-2)dx$，

35．设 $f(x)$ 在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上连续，且 $f(x)=x^2\cos x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)dt$，求 $f(x)$，

36．设 $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & -1\le x<0\\ e^x-1, & 0\le x<1\end{cases}$，求 $F(x)=\int_{-1}^{x}f(t)dt$，

37. 设 $f(x)$ 连续，$\phi(x)=\int_0^1 f(xt)dt$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$（$A$ 为常数），求 $\phi'(x)$，并讨论 $\phi'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

38 设 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)dx$，求 $\int_0^1 f(x)dx$

39．设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的原函数，且 $F(1)=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$，若当 $x>0$ 时，$f(x)F(x)=\dfrac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)}$

求 $f(x)$

三．证明题

1．设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\le 0$，记

$F(x)=\dfrac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$，证明在 (a,b) 内，$F'(x)\le 0$；

2．设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可微，且满足 $f(1)-2\int_0^{\frac{1}{2}}f(x)dx=0$，证明至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，　使得 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$；

3．设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导数，证明：

$$\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]-\frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)f''(x)dx；$$

4． 设单调递减函数 $f(x)\in C[0,1]$，证明：$\forall\lambda\in(0,1)$ 有 $\int_0^{\lambda} f(x)dx>\lambda\int_0^1 f(x)dx$；

5．设 $f(x)>0$，$f'(x)\le 0$，对 $\forall x\in[a,b]$ 成立，试证 $f(x)\le\dfrac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx$；

6．设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$F(x)=\int_0^x t^2 f(t)dt, F(1)=f(1)$，证明：至少存在一点

$\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=-\dfrac{2f(\xi)}{\xi}$；

7．设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=f(1)=0$，且在 $[0,1]$ 上 $|f'(x)|\le M$，求证：

$$\int_0^1 |f(x)|dx\le\frac{M}{4}；$$

8．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且单调增加，证明：$\int_a^b xf(x)dx\ge\dfrac{a+b}{2}\int_a^b f(x)dx$。

9．证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sin x}{1+x^2}dx\le\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{1+x^2}dx$

10．设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，$f(0)=f(1)=0$，证明：

$$\int_0^1 f^2(x)dx\le\frac{1}{4}\int_0^1 f'^2(x)dx$$

11．设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上可导，$f(0)=0$，$0<f'(x)\le 1$ 试证

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2\ge\int_0^1 f^3(x)dx：$$

12．设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有连续导数，证明：对于 $x\in[0,1]$，有

$$|f(x)|\le\int_0^1(|f(t)|+|f'(t)|)dt$$

13．设函数 $f(x)$ 在 [2, 4] 上有连续导数, 且 $f(2)=f(4)=0$, 试证明

$$\left|\int_2^4 f(x)dx\right|\le\max_{2\le x\le 4}|f'(x)|$$

14．设函数 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续，在 $(0,2)$ 内可导． $f(0)=f(2)=1$, 且 $|f'(x)|\le 1$, 证明:

$$1\le\int_0^2 f(x)dx\le 3$$

15．设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上的正值函数，$f''(x)\ge 0, a>0$，证明: $\int_0^a f(x)dx\ge af(\dfrac{a}{2})$

16．3. 设 $f(x)$ 在闭区间[0,1]上连续,且 $\int_0^1 f(x)dx=0,\quad \int_0^1 xf(x)dx=1$,求证：

$\exists c, 0\le c\le 1$, 使 $|f(c)|\ge 4$

17．设函数 $f(x)$ $[a,b]$ 在上有连续的二阶导数，且 $f'(a)=f'(b)=0$，证明：在 (a,b) 内存在一点 ξ 使 $\int_a^b f(x)dx=(b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2}+\dfrac{1}{6}(b-a)^3 f''(\xi)$

18．设函数 $f(x)$ $[a,b]$ 在上有连续的二阶导数，证明：在 (a,b) 内存在一点 ξ 使

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi)$$

19．设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续且单调增加，试证明：对于任何 $b>a>0$ 皆有

$$\int_a^b xf(x)dx\ge\frac{1}{2}[b\int_a^b f(x)dx-a\int_a^b f(x)dx]$$

20. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(x)>0$ ，证明：

$$\ln\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\right]\ge\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx$$

第五章参考答案或提示：

一. 1. 3，2. $6\ln 2-2$　3. $-2a$　4. π　5. $\dfrac{\pi}{2}$　6. $\sin x^2$　7. $2x[f(x^2+1)-f(x^2)]$

8.

11. B　12. C　13. B

二. 1. $2+2e-\dfrac{2}{e}-\dfrac{6}{e}$　2. $\dfrac{2}{3}+\ln 2$　3. $\dfrac{4}{3}$　4. $-\dfrac{1}{2}$　5. $[\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2}]$

6. $\dfrac{16\pi}{3}-2\sqrt{3}$　7. $\dfrac{\pi}{2}\ln 2$　8.（1）$\dfrac{\pi}{8}-\dfrac{1}{4}$　（2）$\dfrac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}$　9. $\dfrac{\pi}{4}$　10. $a+1-\dfrac{e}{2}$　11. $\dfrac{1}{2}$

12. $\dfrac{\pi}{8}$　13. $\dfrac{1}{6}(e-2)$　14 $\dfrac{3}{16}\pi$　15. $\dfrac{1}{3}a^3-\dfrac{1}{2}a+\dfrac{1}{3}$　16. $4(\sqrt{2-1})$

17. $\dfrac{1}{6}(1-\sqrt{2})$　18. $f(x)=x^2-\dfrac{4}{3}x+\dfrac{2}{3}$　19. 50，$5x$　20. $a=1,b=0,c=-2$ 或 $a\ne -1,b=0,c=0$　21. $f_{\max}=\sqrt{2}, f_{\min}=2-\sqrt{2}$　22. 最大值 $1+e^{-2}$，最小值 0

23. $a=4,b=1$　24. $f(x)=e^x-1$　25. $f(x)=e^{2x}+\dfrac{1}{3}e^{-2x}-\dfrac{1}{3}e^x$

26．$f(x)=3\ln x+3$　　27.（1）极小值 $F(0)=0$（2）$\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$（3）$\frac{e^{-16}-e^{81}}{2}$

28．$(-\infty,\frac{1}{2}],(-\infty,-2]$　　29．$4n$　　30．0 或-1　31．$\ln x+1$　32.（1）$\frac{1}{2}$

(2) 1　(3) 12　(4) $f'(0)$　(5) $\frac{1}{3}$　(6)1

33．$f(x)=e^x+6x$．$\max f(1)=e+6,\min f(0)=1$　34．$\frac{7}{3}-\frac{1}{e}$

35．$f(x)=x^2\cos x+\frac{\pi^2-8}{2(2-\pi)}$

36．$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x^3+x+\frac{4}{3},-1\le x<0\\ \frac{1}{3}+e^x-x,0\le x\le 1\end{cases}$；

37．$\phi'(x)=\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)du}{x^2}(x\ne 0)$　$\phi'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

38．$\frac{\pi}{\pi-4}$　　39．$\frac{1}{\sqrt{2x}(1+x)}$

第六章　定积分的应用

一．已知 $y=f(x)$ 与 $y=\int_0^{\arctan x}e^{-t^2}dt$ 在点 $(0,0)$ 有公切线，求

（1）此切线方程，　（2）求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}xf(\frac{2}{x})$。

二．1．求抛物线 $y=-x^2+4x-3$ 及其在点 $(0,-3)$ 和 $(3,0)$ 处的切线所围的面积；

2．已知 $f(x)=\int_{-1}^{x}(1-|t|)dt(x\ge -1)$，求曲线 $y=f(x)$ 与 x 轴所围成平面图形的面积；

3．求由曲线 $y=x+\frac{1}{x}$，$x=2$ 及 $y=2$ 所围图形的面积；

4．求抛物线 $y^2=2px$ 及其在点 $(\frac{p}{2},p)$ 处的法线所围成的图形的面积，

5．求下列各曲线所围图形的公共部分的面积

（1）$r=3\cos\theta$ 及 $r=1+\cos\theta$　　（2）$r=\sqrt{2}\sin\theta$ 及 $r^2=\cos 2\theta$

6．设 xoy 平面上有正方形 $D=\{(x,y)|0\le x\le 1,0\le y\le 1\}$ 及直线 $l:x+y=t,(t\ge 0)$，

若$s(t)$表示正方形D位于直线l左下方部分的面积，求$\int_0^x s(t)dt$；

7．设曲线$y=\cos x$，$(0\le x\le \frac{\pi}{2})$与$x$轴，$y$轴被曲线$y=a\sin x$，$y=b\sin x$，$(a>b>0)$三等分，试确定$a,b$值；

8． 在$[0,1]$上给定$y=e^x$，对$\forall t\in[0,1]$，记A_1为$x=0$，$y=e^x$及$y=e^t$围成的面积，A_2为$x=1$，$y=e^x$及$y=e^t$围成的面积，令$A(t)=A_1+A_2$，求$A(t)$的最大值与最小值。

9．设$x\in[2,4]$时，有不等式$ax+b\ge \ln x$，其中a,b为常数，试求使得积分$\int_2^4(ax+b-\ln x)dx$取得最小值的a,b

三．1．求抛物线$y=x^2$，$y^2=x$围成的区域绕x轴旋转一周生成的旋转体体积；

2．求曲线$y=3-|x^2-1|$与x轴所围成的封闭图形绕y=3旋转所得旋转体体积；

3．设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内恒为正，并满足$xf'(x)=f(x)+\frac{3a}{2}x^2$（$a$为常数），又由曲线$y=f(x)$与$x=1$，$y=0$所围成的图形$s$的面积$A=2$，求$y=f(x)$，并问$a$为何值时，图形$s$绕$x$轴旋转一周所生成的旋转体体积最小；

4．（1）求由摆线$x=a(t-\sin t),y-a(1-\cos t)$的一拱$(0\le t\le 2\pi)$与横轴所围成的图形的面积；

（2）计算由摆线$x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)$的一拱，直线$y=0$，所围成的图形分别绕$x$轴，$y$轴，$y=2a$旋转而成的旋转体的体积；

（3）计算摆线$x=a(t-\sin t),y=a(1-\cos t)$的一拱$(0\le t\le 2\pi)$的长度；

5．计算曲线$y=\sin x(0\le x\le \pi)$与x轴所围成的图形分别绕x轴，y轴旋转而成的旋转体的体积。

6．设$y^2=2x$与该曲线上点$(\frac{1}{2},1)$处的法线所围的图形为D，求D的面积.

7．求由$y=x^3$与$x=2$及x轴所围的平面图形分别绕x轴和y轴旋转所得的旋转体的体积

8．试在曲线段$y=x^2(0<x<8)$上求一点M的坐标，使得由曲线在点M的切线与直线$x=8,y=0$所围的三角形的面积最大。

9．设曲线$y=ax^2(a>0,x\ge 0)$与$y=1-x^2$交于点A，过坐标原点O和A的直线与

$y=ax^2$ 围成的平面图形，问 a 为何值时，该图形绕 x 轴旋转所得的旋转体的体积最大？最大体积是多少？（研）

10． 设直线 $y=ax$ 与抛物线 $y=x^2$ 所围成图形的面积为 S_1，它们与直线 $x=1$ 所围成图形的面积为 S_2，且 $a<1$（1）确定 a 的值使得 S_1+S_2 达到最小，并求出最小值

（2）并该最小值所对应的平面图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体的体积

11．设曲线 $y=e^{-x}\ (x\ge 0)$（1）把曲线 $y=e^{-x}$，x 轴，y 轴和直线 $x=\xi(\xi>0)$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周，求所得的旋转体的体积 $V(\xi)$，再求满足

$V(a)=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{\xi\to+\infty}V(\xi)$ 的 a（2）在此曲线上找一点，使过该点的切线与两个坐标轴所围成的平面图形的面积最大，并求出该面积

12． 已知抛物线 $y=px^2+qx$（其中 $p>0,q>0$）在第一象限内与直线 $x+y=5$ 相切，且此抛物线与 x 轴所围成的平面图形的面积为 S,(1)问 p 和 q 为何值时，S 达到最大值?

（2）并求出最大值

四．1．求曲线 $y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}\,dt$ 的弧长；　　2．求心形线 $\rho=a(1+\cos\theta)$ 的全长；

3．计算星形线 $x=a\cos^3 t, y=a\sin^3 t$ 的全长。

第六章参考答案或提示：

一．1． $y=x$　　2．2

二．1． $\dfrac{9}{4}$　2．$1+\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$　3．$\ln 2-\dfrac{1}{2}$　4．$\dfrac{16}{3}p^2$　5．（1）$\dfrac{5}{4}\pi$　（2）$\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$

6． $\begin{cases}\dfrac{1}{6}x^3, & 0\le x\le 1\\ -\dfrac{1}{6}x^3+x^2-x+\dfrac{1}{3}, & 1<x\le 2\\ x-1, & x>2\end{cases}$　　7． $a=\dfrac{4}{3},b=\dfrac{5}{12}$

8． $\max A(t)=1$，$\min A(t)=e-2\sqrt{e}+1$　　9． $a=\dfrac{1}{3},b=\ln 3-1$

三．1． $\dfrac{3\pi}{10}$　2． $\dfrac{448\pi}{15}$　3． $a=-5$　4． (1) $3\pi a^2$　(2) $5\pi^2a^3$，$6\pi^3a^3$，$7\pi^2a^3$

(3) $8a$　5． $2\pi^2$　6． $\dfrac{128}{7}\pi,\dfrac{64}{5}\pi$ $9\sqrt{3}$　　8． $M(\dfrac{16}{3},\dfrac{256}{9})$

9．$a=4\ V=\dfrac{32\sqrt{5}}{1875}\pi$　　10．$S(\dfrac{1}{\sqrt{2}})=\dfrac{2-\sqrt{2}}{6}$　　$(2)\dfrac{\sqrt{2}+1}{30}$

11．$(1)V(\xi)=\dfrac{\pi}{2}(1-e^{-2\xi}),a=\dfrac{1}{2}\ln 2$，　　$(2)(1,e^{-1}),S(1)=2e^{-1}$

12．$p=-\dfrac{4}{5},q=3$，$S_{\max}=\dfrac{225}{32}$

四．1．4　　2．$8a$　　3．$6a$

第七章　空间解析几何与向量代数

一. 填空题

1. 若$|\vec{a}|=13,|\vec{b}|=19,|\vec{a}+\vec{b}|=24,$则$|\vec{a}-\vec{b}|=$______.

2. 已知$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2,$则$[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})=$_______。

3. 设一平面经过原点及点$(6,-3,2)$，且与平面$4x-y+2z=9$垂直，则此平面方程为

________________________。

4. 直线$l_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$与$l_2\begin{cases}x-y=6\\2y-z=3\end{cases}$的夹角$(l_1,l_2)=$______。

5. 过点$(-3,5,-9)$且与两条直线$l_1:\begin{cases}y=3x+5\\z=2x-3\end{cases},l_2:\begin{cases}y=4x-7\\z=5x+10\end{cases}$都相交的直线方程是

__________________。

6. 经过点$\mathrm{M}(0,-3,-2)$，且与两条直线$L_1:\begin{cases}x=-1+2t\\y=5-4t\\z=2+3t\end{cases}$ $L_2:\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-2}{2}=z-1$都垂直的直线方程是 ____________________ 。

7. 点$(-1,2,0)$在平面$x+2y-z+1=0$上的投影点坐标是 __________ ，关于该平面的对称点是 __________ 。

8. 由曲线$\begin{cases}3\mathrm{x}^2+2\mathrm{y}^2=12\\ \mathrm{z}=0\end{cases}$ 绕y轴旋转一周得到的旋转面在点$(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$处的指向外则的单位法向量 __________________ 。

9. 曲线$\begin{cases}z=x^2+2y^2\\z=2-x^2\end{cases}$关于$xoy$平面的投影柱面方程是 ____________________

投影曲线方程是 ____________________ 。

二. 解答题

1.（1）求点$\mathrm{P}(-2,3,1)$关于直线$x=y=z$对称点坐标。

（2）求点$\mathrm{P}(3,-1,2)$在平面$3x-y+2z-2=0$上投影点的坐标。

2. 设$\vec{a}=\{2,-1,-2\},\vec{b}=\{1,1,z\}$, 问$z$为何值时，$(\vec{a},\vec{b})$最小，并求此最小值。

3. 求平行于直线$L_1:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{1}$，且通过直线$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{0}=\dfrac{z-3}{1}$的平面方程。

4. 求经过点$(1,2,3)$与z轴相交，且垂直于直线$\dfrac{\mathrm{x}}{3}=\dfrac{\mathrm{y}}{2}=\dfrac{\mathrm{z}}{1}$的直线方程。

5. 求点$P(3,-1,2)$到直线$\begin{cases}x+y-z+1=0\\2x-y+z-4=0\end{cases}$的距离。

6. 设$l_1:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1},l_2:\dfrac{x+2}{-2}=\dfrac{y-1}{0}=\dfrac{z}{1}$是两条异面直线：（1）求$l_1$与$l_2$的公垂线方程，（2）求$l_1$与$l_2$的距离。

7. 求直线 $L:\begin{cases}x=3-t\\ y=-1+2t\\ z=5+8t\end{cases}$，在平面 $\pi: x-y+3z+8=0$ 上的投影方程。

8. 设直线 $\begin{cases}x+y+b=0\\ x+ay-z-3=0\end{cases}$. 在平面 π 上，而 π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点 $(1,-2,5)$，求 a,b 的值。

9. 试求以直线 $x=y=z$ 为对称轴，与三个坐标平面相切的圆锥面方程。

10. 就 p,q 的各种情况说明二次曲面 $z=x^2+py^2+qz^2$ 的类型。

附参考答案：一. 1. 22，2. 4，3. $2x+2y-3z=0$，4. $\arccos\frac{1}{6}$，5. $\begin{cases}2x-z-3=0\\ 34x-y-6z+53=0\end{cases}$

6. $\frac{x}{10}=\frac{y+3}{-7}=\frac{z+2}{-16}$，7. $\left(-\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$，$\left(-\frac{7}{3},-\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$，8. $\frac{1}{\sqrt{5}}\left(0,\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$，9. $x^2+y^2=1,\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}$。

二. 1.（1）. $\left(\frac{14}{3},-\frac{5}{3},\frac{1}{3}\right)$，（2）. $\left(\frac{3}{7},-\frac{1}{7},\frac{2}{7}\right)$ 2. $\frac{\pi}{4}$，3. $x-y+z=0$，4. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-7}$，5. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$，

6. （1） $\begin{cases}11x-2y-7z=0\\ 3x+10y+6z-16=0\end{cases}$ （2）. $\frac{5}{\sqrt{29}}$，7. $\begin{cases}14x+11y-x-26=0\\ x-y+3z+8=0\end{cases}$ 8. $a=-5,b=-2$，

9. $(x+y+z)^2=2\left(x^2+y^2+z^2\right)$，10. 略。

第四章　　不定积分（参考答案）

一．1．$\cos x-\sin x+C$　　2．$\int (e^x\sin x)'dx=e^x\sin x+C$

3．$-\frac{1}{3}e^{-x^2}+C$　　4．$(\arctan\sqrt{x})^2+C$

5．$\frac{2}{3}\arcsin\frac{2}{3}x+\sqrt{4-9x^2}+C$　　6．$x-\ln(1+e^x)+C$

7．$\frac{1}{2\ln 2}\ln\left|\frac{1+2^x}{1-2^x}\right|+C$　　8．$\ln(1+x\sin x)+C$

9．$-2\left[xe^{-\frac{1}{2}x}+2e^{-\frac{1}{2}x}\right]+C$　　10．$(\arcsin\sqrt{x})^2+C$ 11．$\frac{2}{3}(1+\ln x)^{\frac{3}{2}}+C$

12．$-\cos^2 t\cdot\cot t-\frac{1}{2}\sin 2t-t+C$　　13．$-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C$

14. $x-(1+e^{-x})\ln(1+e^{x})+C$ 15. A 16. D 17. B 18. C

三. 1. $-\frac{1}{3}\arcsin\frac{2-3x}{\sqrt{5}}+C$ 2. $\sqrt{2}\ln\left|\csc\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}\right|+C$ 3. $\ln\left|\ln\sin x\right|+C$

4. $-\frac{2}{3}(\arctan x)^{\frac{3}{2}}+C$ 5. $\arcsin\frac{\sin x}{\sqrt{2}}+C$ 6. $2\arctan(\cos x+\sin x)+C$

7. $\ln\left|\frac{xe^{x}}{1+xe^{x}}\right|+C$ 8. $\frac{1}{\cos a}\left[\ln\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|-\ln\left|\cos\frac{x+a}{2}\right|\right]+C$

9. $2\ln(\sqrt{x}+\sqrt{1+x})+C$ 10. $x+2\ln x-4\sqrt{1+x}-2\ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$

11. $\frac{a^{2}}{2}\arcsin\frac{x}{a}-\frac{x}{2}\sqrt{a^{2}-x^{2}}+C$ 12. $-\frac{\sqrt{(1+x^{2})^{3}}}{3x^{3}}+\frac{\sqrt{1+x^{2}}}{x}+C$

13. $\ln\left|1-\sqrt{1-x^{2}}\right|-\ln|x|+\arcsin x+C$ 14. $3e^{\sqrt[3]{x}}(x^{\frac{2}{3}}-2x^{\frac{1}{3}}+2)+C$

15. $2(1+x)\ln(1+x)-4\sqrt{1+x}+C$

16. $-\frac{1}{x}\arctan x+\ln|x|-\frac{1}{2}(\arctan x)^{2}+C$

17. $-\frac{\sqrt{1-x^{2}}}{x}\arcsin x+\ln|x|+\frac{1}{2}(\arcsin x)^{2}+C$

18. $x(\arcsin x)^{2}+2(1-x^{2})^{\frac{1}{2}}\arcsin x-2x+C$

19. $2x\sqrt{e^{x}-1}-4\sqrt{e^{x}-1}+4\arctan\sqrt{e^{x}-1}+C$

20. $2e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}+C$ 21. $\frac{1+x}{2\sqrt{1+x^{2}}}e^{\arctan x}+C$ 22. $\ln\left|\frac{e^{\sin x}\cos x}{1+e^{\sin x}\cos x}\right|+C$

23. $\frac{3}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)+C$ 24. $2[\sqrt{x}\ln(1+x)-2\sqrt{x}+2\arctan\sqrt{x}]+C$

25. $\sqrt{1+2\ln x}+C$ 26. $\ln\frac{|x|}{\sqrt[4]{1+x^{4}}}+C$ 27. $\frac{x^{4}+3x^{2}+2}{(x^{2}+1)\sqrt{x^{2}+1}}+C$

28. $\ln\left|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}-1\right|-\ln\left|\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+1\right|+\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}+1\right|+C$

29. $\tan x-\csc x+C$ 30. $-e^{-x}\arctan e^{x}+x-\frac{1}{2}\ln(1+e^{2x})+C$

31． $\ln(1-\dfrac{1}{e^{x}+1})+C$　　32． $-\dfrac{1}{2}(\arctan\dfrac{1}{x})^{2}+C$

四． $\int\phi(x)dx=\int\dfrac{x+1}{x-1}dx=2\ln|x-1|+x+C$

五． $f(x)=\dfrac{x}{2}\left[(a+b)\sin(\ln x)+(b-a)\cos(\ln x)\right]+C$

六． $\int xf'(x)dx=\dfrac{x\cos 2x-\sin 2x}{4x}+C$

七． $\int f(x)dx=\begin{cases}\cos x+C & x\geq 0\\ \dfrac{x^{2}}{2}+1+C & x<0\end{cases}$

八． $f(x)=\dfrac{xe^{\frac{x}{2}}}{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}$