第二节 常数项级数的审敛法

正项级数及其审敛法

1. 定义: 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 中各项均有 $u_n \geq 0$,

这种级数称为正项级数.

2. 正项级数收敛的充要条件: $s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq \cdots$

部分和数列 $\{s_n\}$ 为单调增加数列.

定理

正项级数收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和所成的数列 s_n 有界.

3.比较审敛法　设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$均为正项级数，

且$u_n \le v_n\ (n=1,2,\cdots)$，若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；

反之，若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散.

证明　(1)　设$\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} v_n$　$\because u_n \le v_n$，

且$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n \le v_1 + v_2 + \cdots + v_n \le \sigma$，

即部分和数列有界　　$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛.

(2) 设 $s_n \to \infty \ (n \to \infty)$ 且 $u_n \le v_n$,

则 $\sigma_n \ge s_n \to \infty$ 不是有界数列

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散. 定理证毕.

推论：若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛(发散)

且 $v_n \le k u_n (n \ge N)(k u_n \le v_n)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛(发散).

比较审敛法的不便：须有参考级数.

例 1 讨论 P-级数

$$1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$$ 的收敛性. $(p>0)$

例 2 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 是发散的.

4. 比较审敛法的极限形式:

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都是正项级数,如果$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l$,

则(1) 当$0<l<+\infty$时,二级数有相同的敛散性;

(2) 当$l=0$时，若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛;

(3) 当$l=+\infty$时, 若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散,则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散;

证明 (1) 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l$ 对于 $\varepsilon=\dfrac{l}{2}>0$,

$\exists N$, 当 $n>N$ 时, $l-\dfrac{l}{2}<\dfrac{u_n}{v_n}<l+\dfrac{l}{2}$

即 $\dfrac{l}{2}v_n<u_n<\dfrac{3l}{2}v_n \quad (n>N)$

由比较审敛法的推论, 得证.

5. 极限审敛法：

设$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$为正项级数,

如果$\lim_{n\to\infty} nu_n = l > 0$（或$\lim_{n\to\infty} nu_n = \infty$）,

则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散;

如果有$p > 1$，使得$\lim_{n\to\infty} n^p u_n$存在,

则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛.

例 3 判定下列级数的敛散性:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$;　　(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n-n}$;

6. 比值审敛法(达朗贝尔 D'Alembert 判别法)：

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$是正项级数, 如果$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$ (ρ数或$+\infty$)

则$\rho<1$时级数收敛;$\rho>1$时级数发散; $\rho=1$时失效.

证明 当ρ为有限数时，对$\forall\varepsilon>0$,

$\exists N$，当$n>N$时，有$\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}-\rho\right|<\varepsilon$,

即 $\rho-\varepsilon<\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<\rho+\varepsilon \quad (n>N)$

当$\rho<1$时，取$\varepsilon<1-\rho$，使$r=\varepsilon+\rho<1$,

$u_{N+2}<ru_{N+1}$, $u_{N+3}<ru_{N+2}<r^2u_{N+1}$, $\cdots$,

$u_{N+m}<r^{m-1}u_{N+1}$, 而级数$\sum_{m=1}^{\infty}r^{m-1}u_{N+1}$收敛,

$\therefore \sum_{m=1}^{\infty}u_{N+m}=\sum_{n=N+1}^{\infty}u_u$收敛, 收敛

当$\rho>1$时，取$\varepsilon<\rho-1$，使$r=\rho-\varepsilon>1$,

当$n>N$时，$u_{n+1}>ru_n>u_n$, $\lim_{n\to\infty}u_n\neq 0.$ 发散

比值审敛法的优点：不必找参考级数.

两点注意:

1. 当$\rho = 1$时比值审敛法失效；

例 级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$发散，

级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$收敛，

$\left.\right\} (\rho = 1)$

2. 条件是充分的, 而非必要.

例 $\because u_n = \dfrac{2+(-1)^n}{2^n} \le \dfrac{3}{2^n} = v_n,$

$\therefore$ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$ 收敛,

但 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2+(-1)^{n+1}}{2(2+(-1)^n)} = a_n,\quad \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \dfrac{1}{6},$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1} = \dfrac{3}{2},\quad \therefore \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 不存在.

例 4　判别下列级数的收敛性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$;　　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}$.

7. 根值审敛法（柯西判别法）：

设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，如果 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$

(ρ 为数或 $+\infty$)，则 $\rho < 1$ 时级数收敛；

$\rho > 1$ 时级数发散；$\rho = 1$ 时失效.

例如，设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$，

$\because \sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \frac{1}{n} \to 0 \; (n \to \infty)$ 级数收敛.

第三节 一般项级数

一、交错级数及其审敛法

定义：正、负项相间的级数称为交错级数.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n \text{或} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n \quad (\text{其中} u_n > 0)$$

莱布尼茨定理 如果交错级数满足条件：

（i）$u_n \geq u_{n+1}$ $(n = 1,2,3,\cdots)$；（ii）$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，

则级数收敛, 且其和 $s \leq u_1$, 其余项 r_n 的绝对值 $|r_n| \leq u_{n+1}$.

证明 $\because u_{n-1} - u_n \geq 0,$

$\because s_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2n-1} - u_{2n})$

数列 s_{2n} 是单调增加的,

又 $s_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - \cdots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}$

$\leq u_1$ 数列 s_{2n} 是有界的,

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} s_{2n} = s \leq u_1.$ $\because \lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1} = 0,$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} s_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(s_{2n} + u_{2n+1}) = s,$$

$\therefore$ 级数收敛于和 s, 且$s \le u_1$.

余项 $r_n = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots)$,

$|r_n| = u_{n+1} - u_{n+2} + \cdots$,

满足收敛的两个条件, $\quad \therefore |r_n| \le u_{n+1}$.

定理证毕.

例 5 判别级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n-1}$ 的收敛性.

二、绝对收敛与条件收敛

定义：正项和负项任意出现的级数称为任意项级数.

定理　若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

证明　令 $v_n=\frac{1}{2}(u_n+|u_n|)\quad(n=1,2,\cdots)$,

显然 $v_n\geq 0$,　且 $v_n\leq|u_n|$,　$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛,

又 $\because\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}(2v_n-|u_n|)$,　$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

上定理的作用：

任意项级数 $\Longrightarrow$ 正项级数

定义：若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为绝对收敛；

若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为条件收敛.

例 6　判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ 的收敛性.

思考题

设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，能否推得$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$收敛？反之是否成立？