第三节　泰勒 (Taylor)公式

- 一、问题的提出
- 二、 P_n 和 R_n 的确定
- 三、泰勒中值定理
- 四、简单应用
- 五、小结　思考题

一、问题的提出

1. 设 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则有

$$f(x) \approx f(x_0) \qquad [f(x) = f(x_0) + \alpha]$$

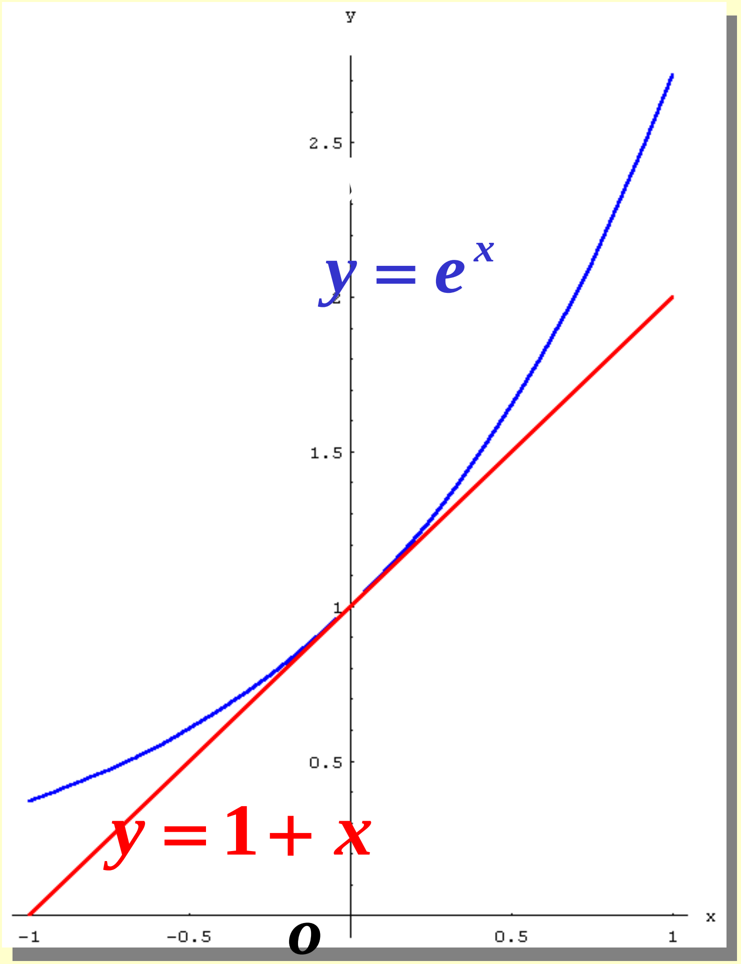
2. 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则有

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

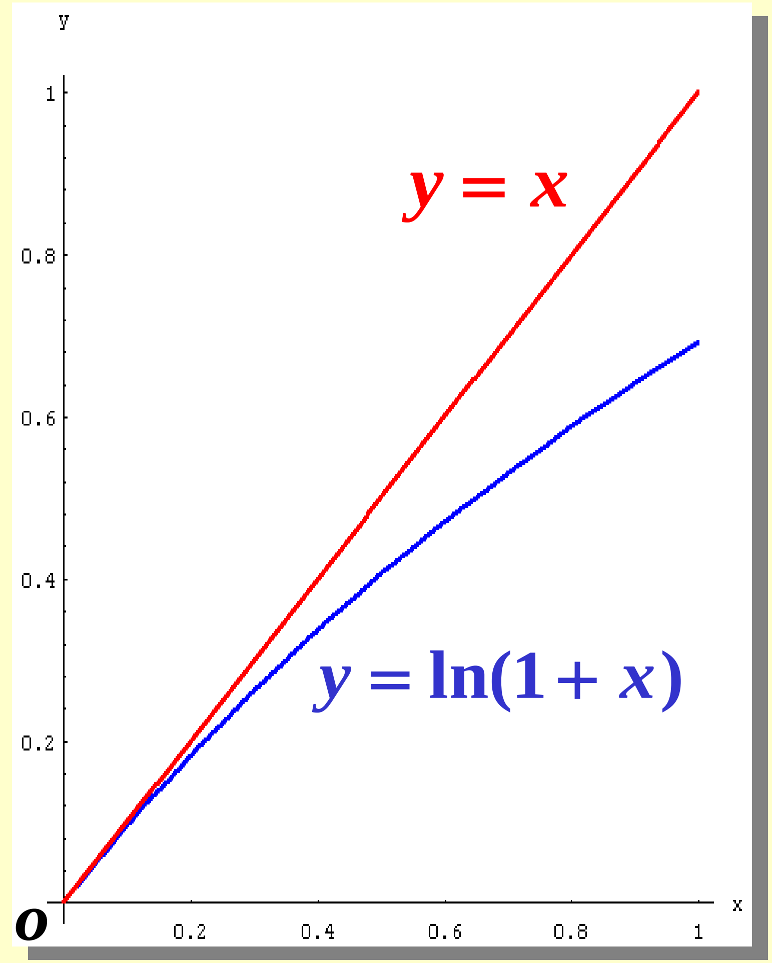
$$[f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)]$$

例如，当 $|x|$ 很小时，$e^x \approx 1 + x$ ，$\ln(1 + x) \approx x$

（如下图）



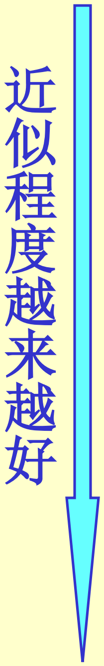
y
2.5
1.5
1
0.5
-1
-0.5
0.5
1
x
$y = e^x$
$y = 1 + x$
o



y
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
1
x
$y = x$
$y = \ln(1 + x)$
o

二、P_n和R_n的确定

分析:



1.若在 x_0 点相交

$$P_n(x_0)=f(x_0)$$

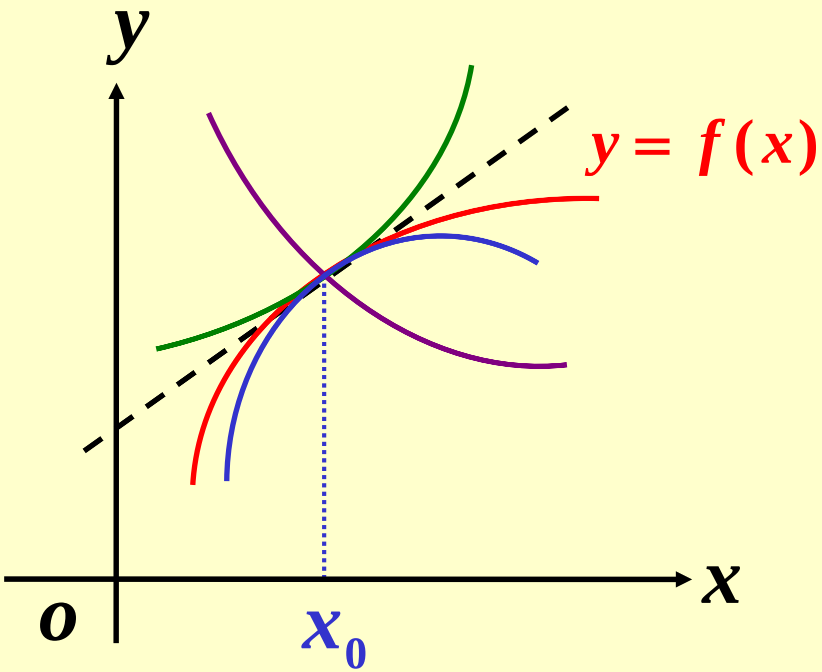
2.若有相同的切线

$$P_n'(x_0)=f'(x_0)$$

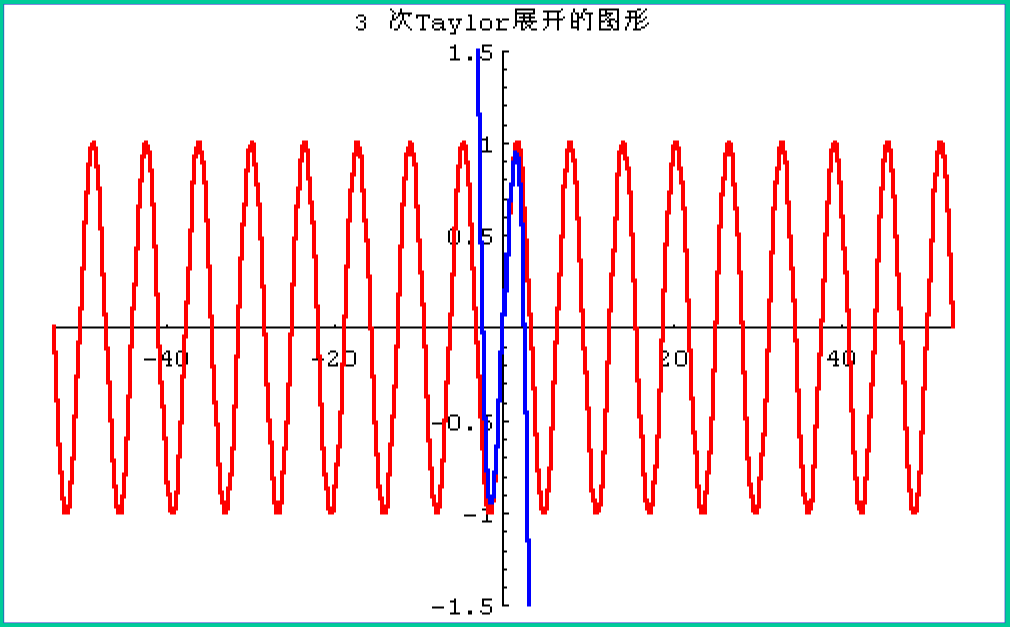
3.若弯曲方向相同

$$P_n''(x_0)=f''(x_0)$$

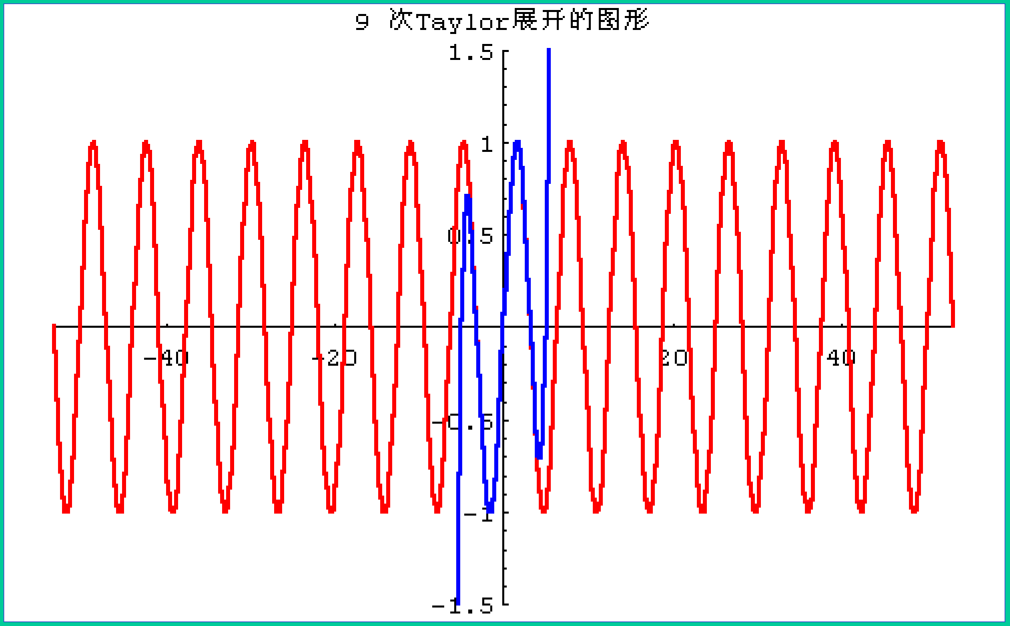
…… ……



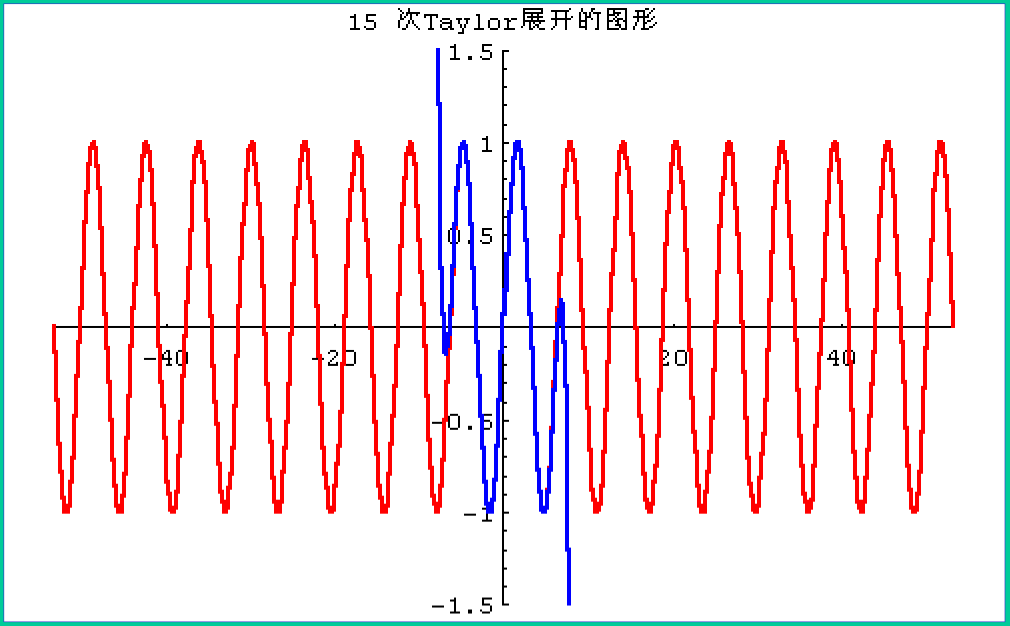
2. Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



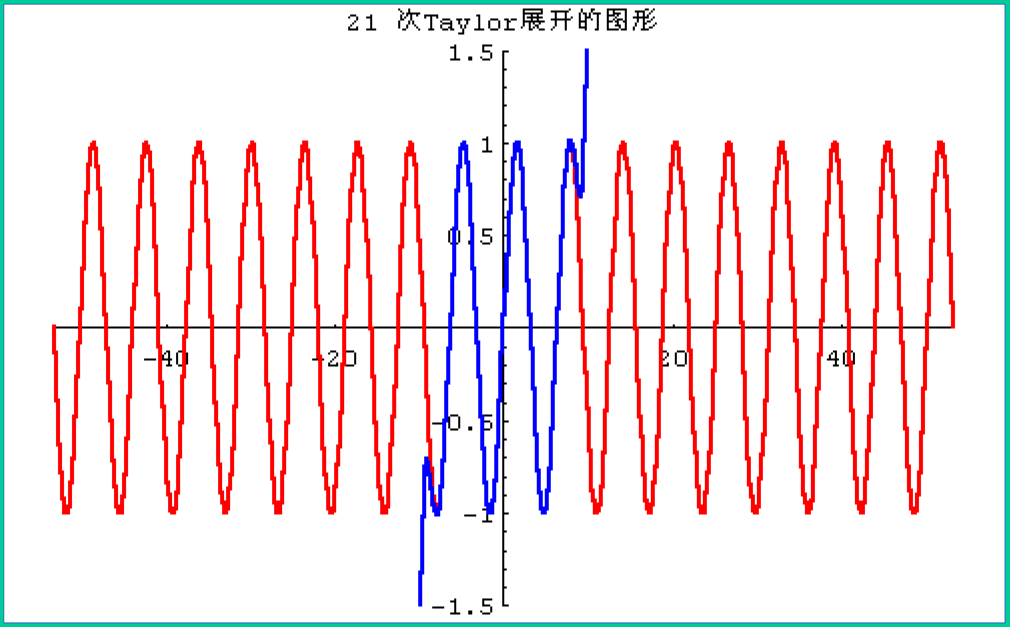
2. Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



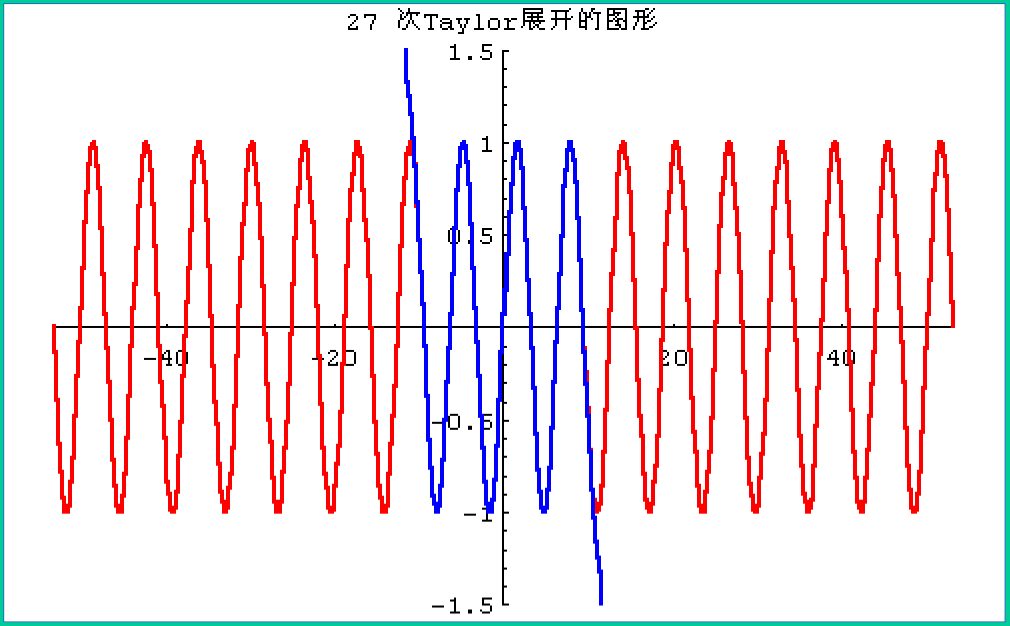
2. Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



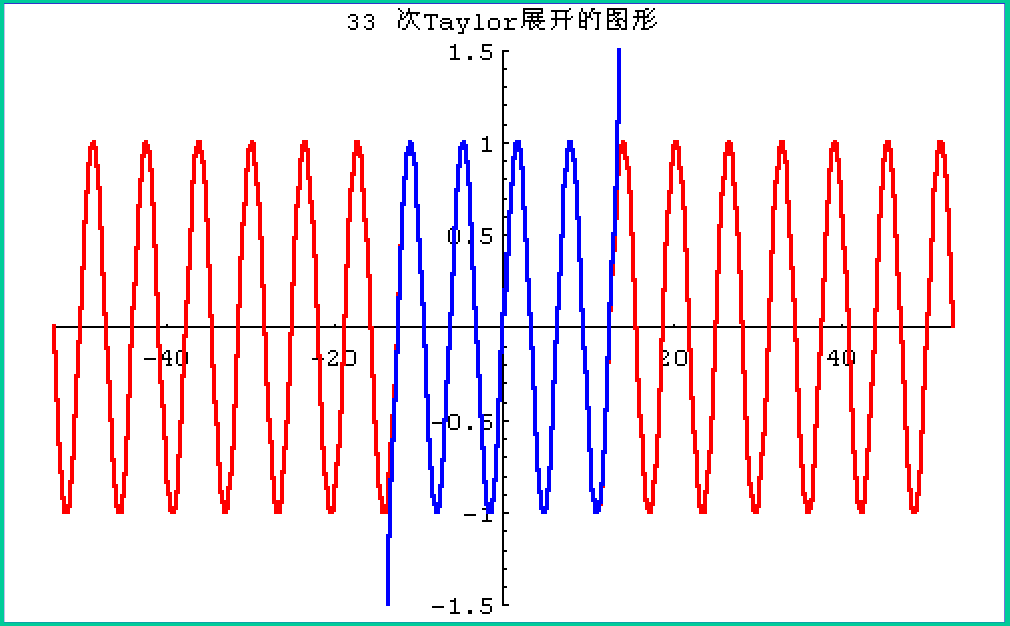
2. Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



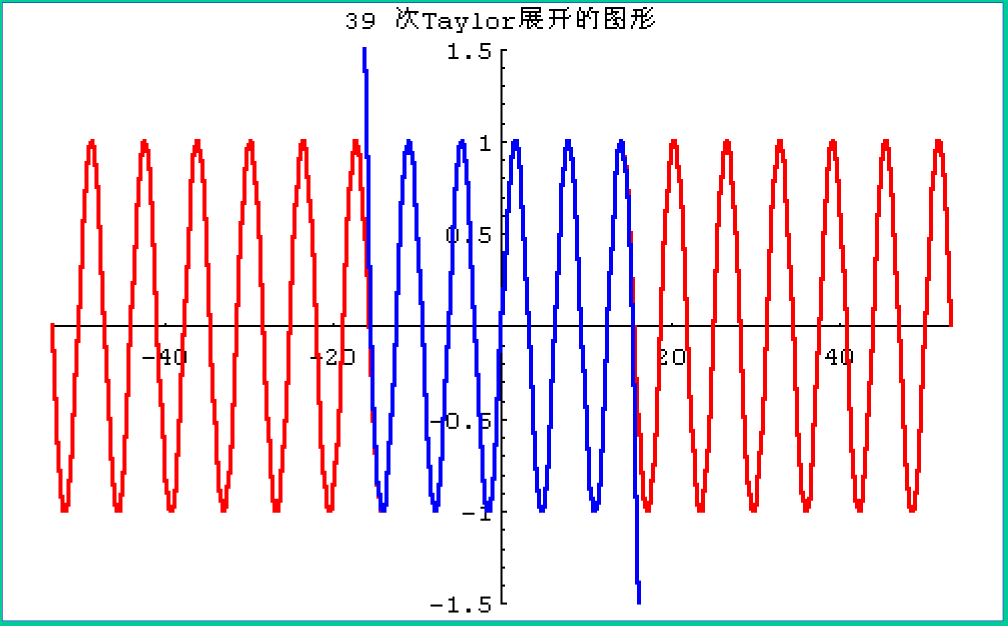
2. Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



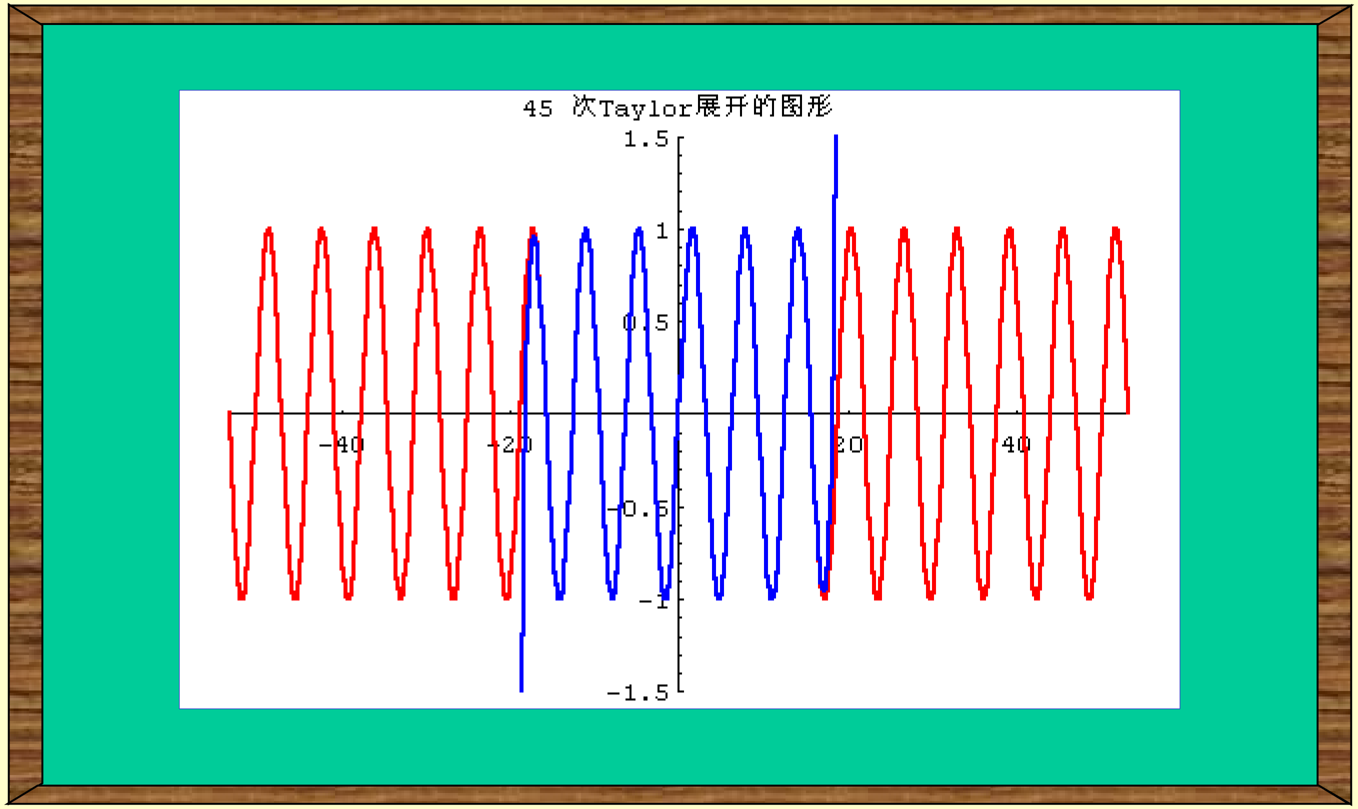
2. Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



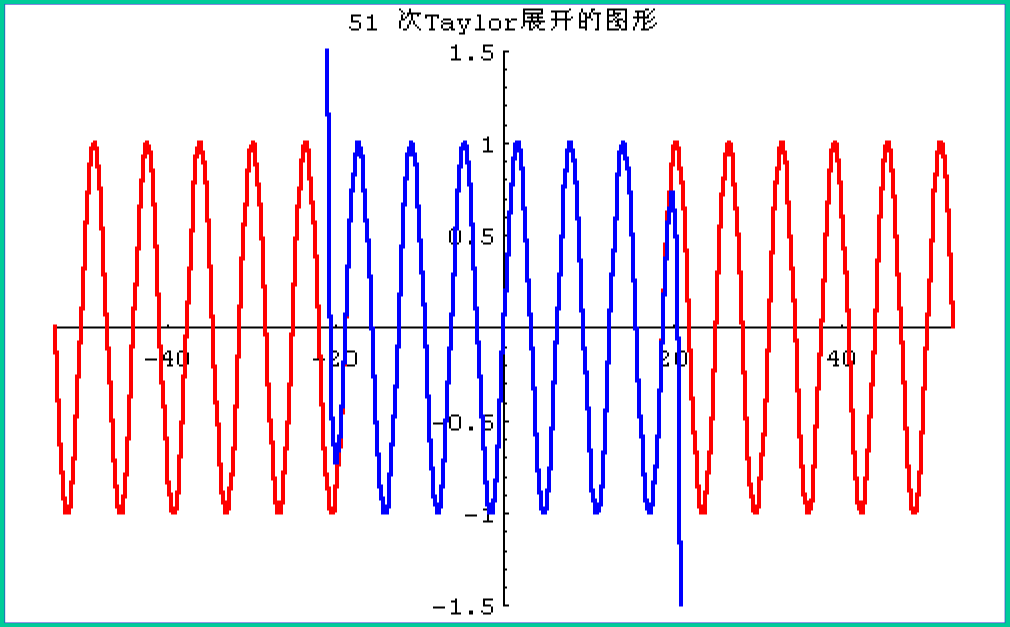
2. Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



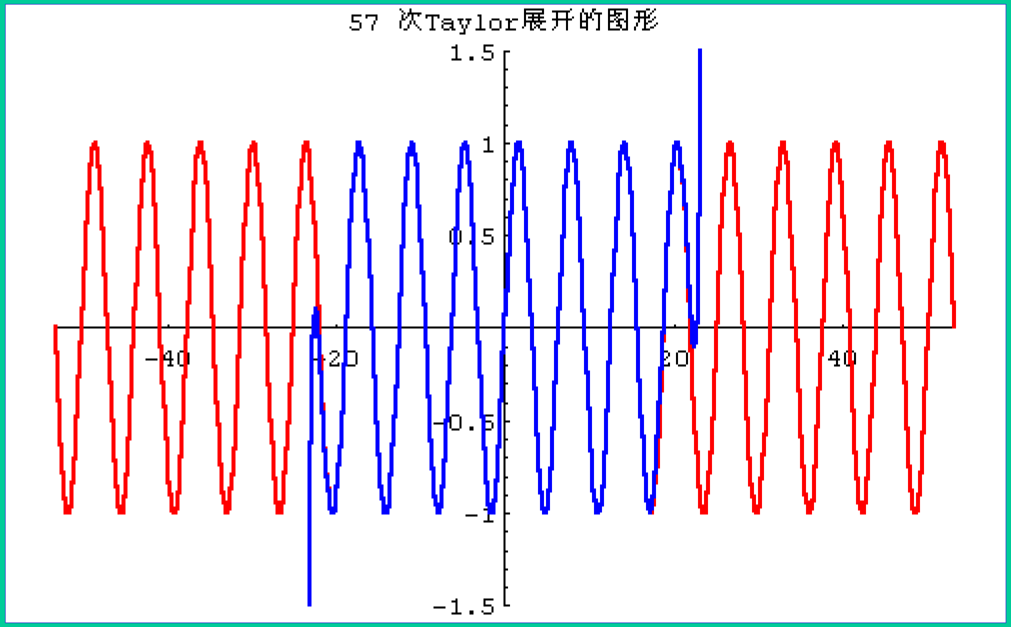
2. Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



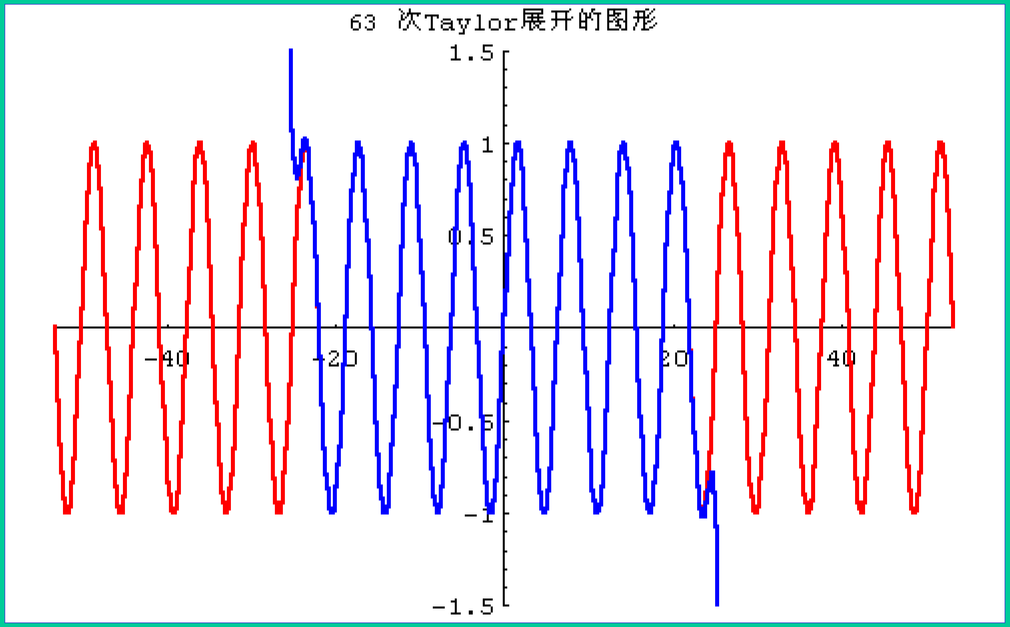
2. Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



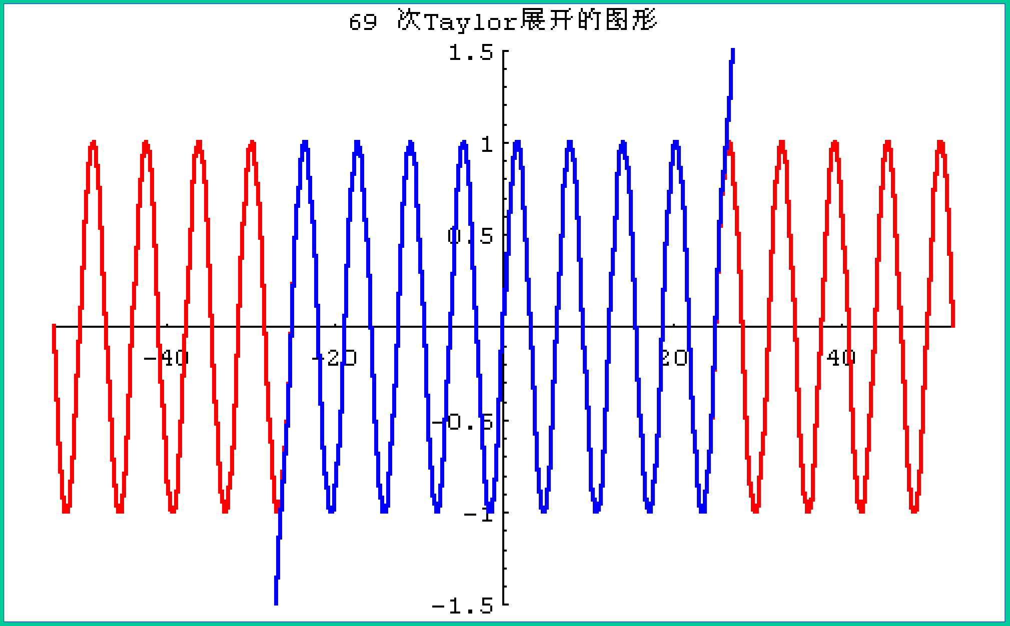
2. Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



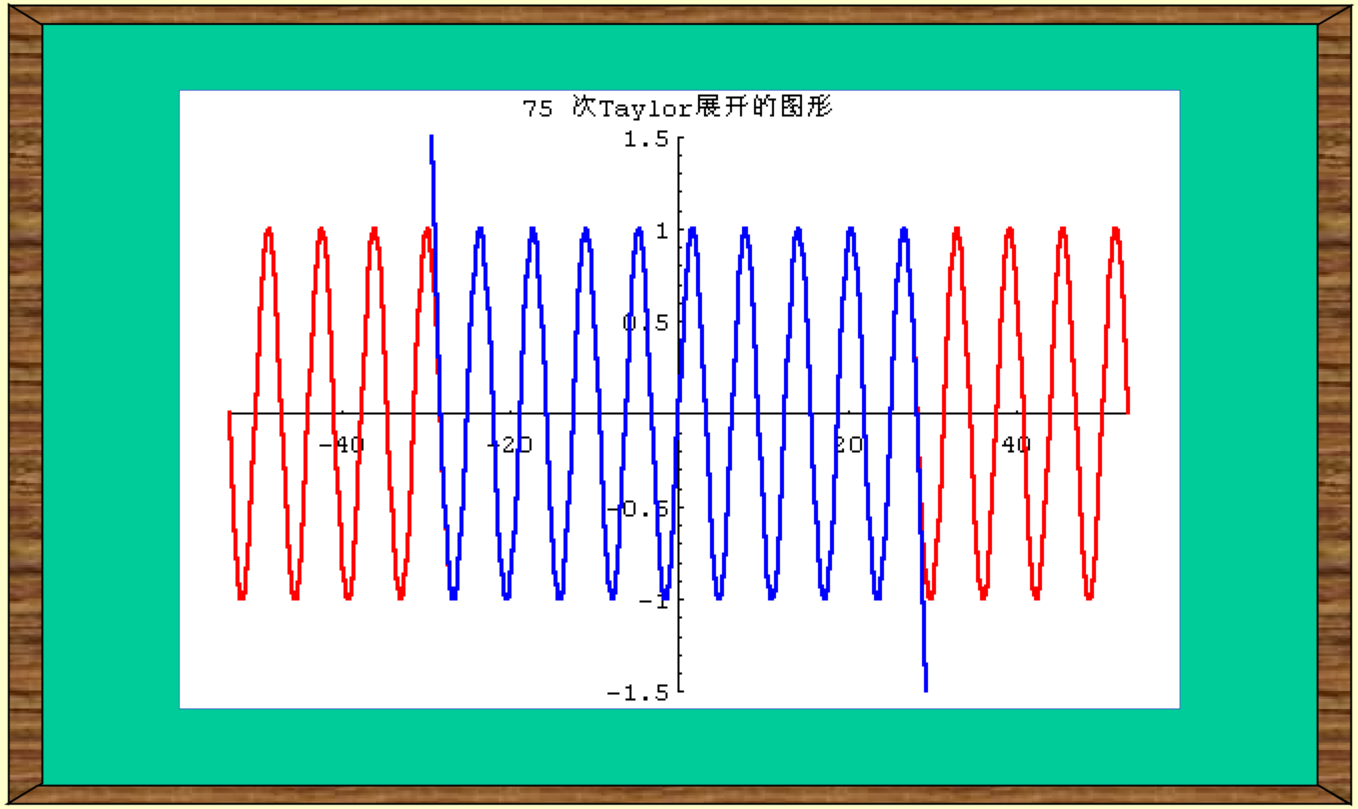
2. Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



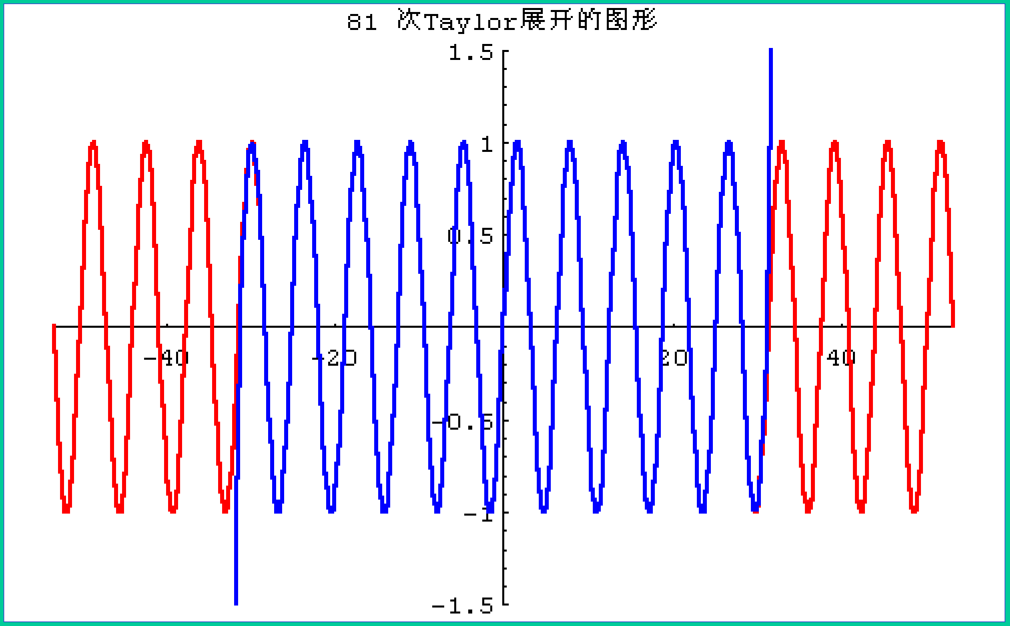
2. Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



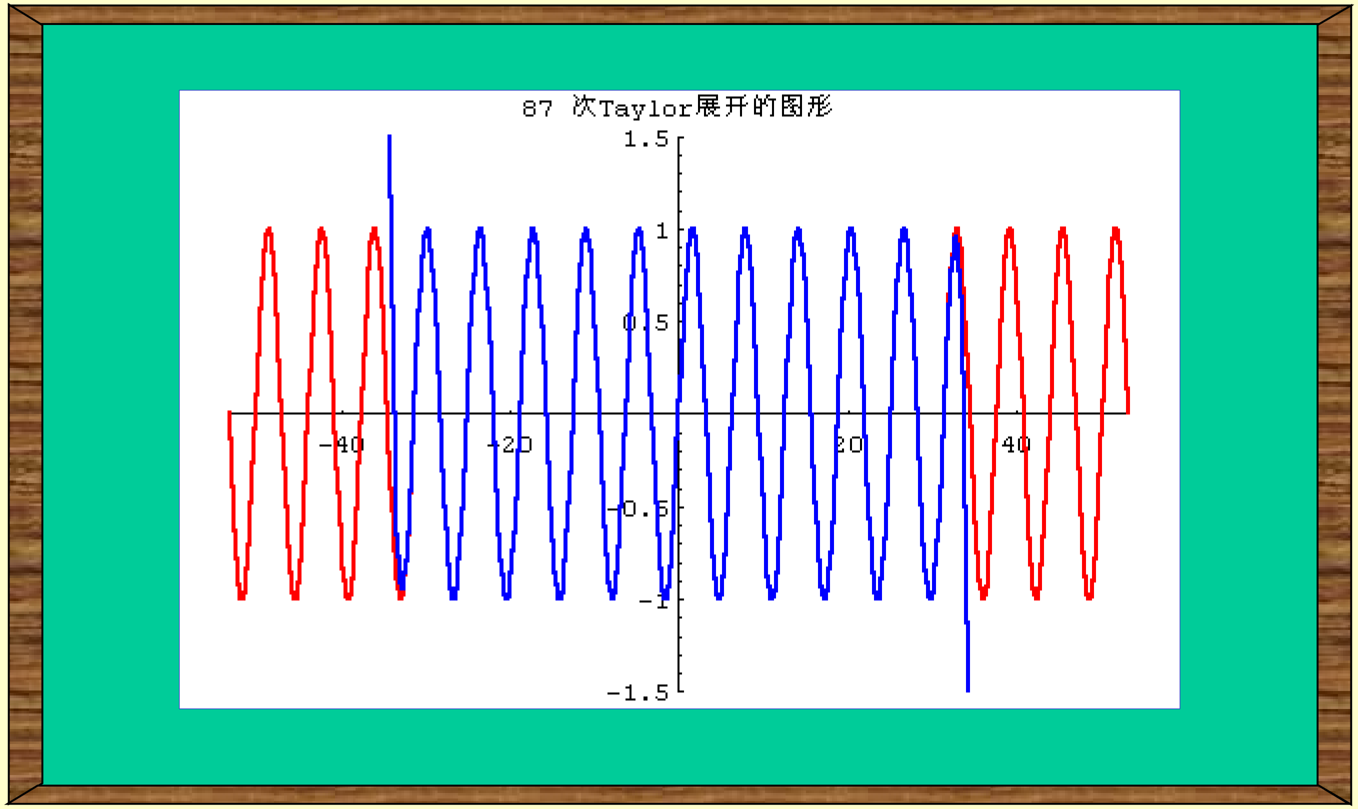
2. Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



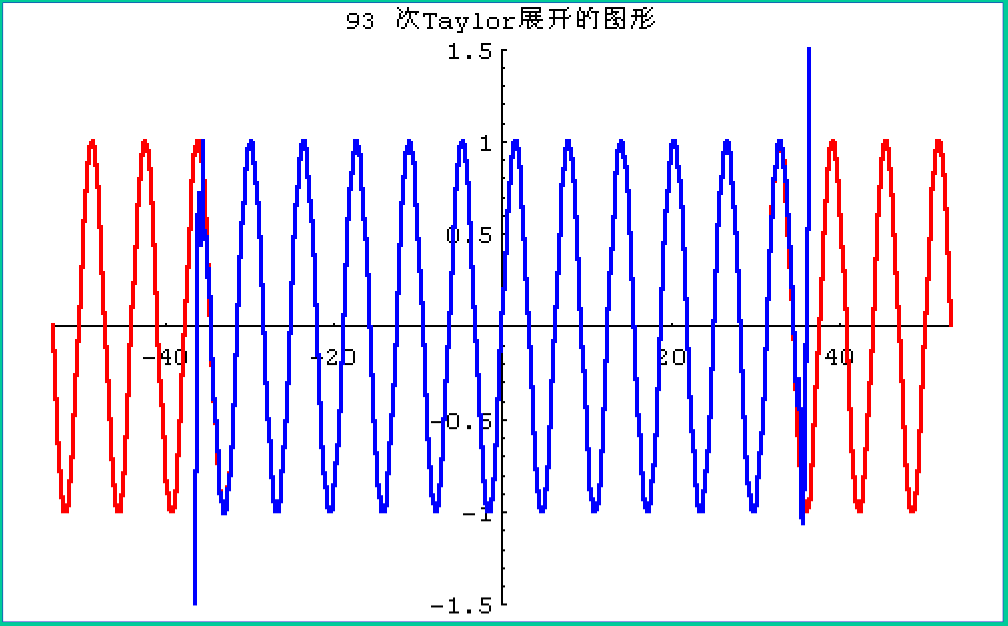
2. Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



2. Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



2. Taylor 公式的数学思想---局部逼近.



假设 $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad k = 1,2,\cdots,n$

$$a_0 = f(x_0), \quad 1\cdot a_1 = f'(x_0), \quad 2!\cdot a_2 = f''(x_0)$$

$$\cdots \quad \cdots, \; n!\cdot a_n = f^{(n)}(x_0)$$

得 $a_k = \dfrac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) \qquad (k = 0,1,2,\cdots,n)$

代入$P_n(x)$中得

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots$$
$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

三、泰勒(Taylor)中值定理

泰勒(Taylor)中值定理　如果函数$f(x)$在含有x_0的某个开区间(a,b)内具有直到$(n+1)$阶的导数，则当x在(a,b)内时，$f(x)$可以表示为$(x-x_0)$的一个n次多项式与一个余项$R_n(x)$之和:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$($\xi$在$x_0$与$x$之间).

证明: 由假设, $R_n(x)$在(a,b)内具有直到$(n+1)$阶导数, 且

$$R_n(x_0) = R_n'(x_0) = R_n''(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0$$

两函数$R_n(x)$及$(x-x_0)^{n+1}$在以x_0 及x 为端点的区间上满足柯西中值定理的条件, 得

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-0}$$

$$= \frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n} \qquad (\xi\text{在}x_0\text{与}x\text{之间})$$

两函数$R_n'(x)$及$(n+1)(x-x_0)^n$在以x_0及ξ_1为端点的区间上满足柯西中值定理的条件, 得

$$\frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}=\frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n-0}$$

$$=\frac{R_n''(\xi_2)}{n(n+1)(\xi_2-x_0)^{n-1}}\qquad(\xi_2\text{在}x_0\text{与}\xi_1\text{之间})$$

如此下去, 经过$(n+1)$次后, 得

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

(ξ在x_0与ξ_n之间, 也在x_0与x之间)

$\because \quad P_n^{(n+1)}(x) = 0, \qquad \therefore \quad R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$

则由上式得

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \quad (\xi\text{在}x_0\text{与}x\text{之间})$$

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

称为 $f(x)$ 按 $(x - x_0)$ 的幂展开的 n 次近似多项式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x)$$

称为 $f(x)$ 按 $(x - x_0)$ 的幂展开的 n 阶泰勒公式

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\quad(\xi\text{在}x_0\text{与}x\text{之间})$$

拉格朗日形式的余项

$$|R_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right|\le\frac{M}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

及 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$

即 $R_n(x)=o[(x-x_0)^n]$. 皮亚诺形式的余项

$$\therefore\ f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o[(x-x_0)^n]$$

注意:

1. 当$n=0$时, 泰勒公式变成拉氏中值公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)\quad (\xi\text{在}x_0\text{与}x\text{之间})$$

2. 取$x_0=0$,

ξ在0与x之间, 令$\xi=\theta x\quad(0<\theta<1)$

则余项 $\quad R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$

麦克劳林(Maclaurin)公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (0 < \theta < 1)$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + O(x^n)$$

四、简单的应用

例 1　求 $f(x)=e^x$ 的 n 阶麦克劳林公式.

解　$\because \quad f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x,$

$\therefore \quad f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1$

注意到 $f^{(n+1)}(\theta x)=e^{\theta x}$　代入公式,得

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0<\theta<1).$$

由公式可知 $$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

估计误差 (设 $x > 0$)

$$\left|R_n(x)\right| = \left|\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}\right| < \frac{e^x}{(n+1)!} x^{n+1} (0 < \theta < 1).$$

取$x = 1$, $$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

其误差 $$\left|R_n\right| < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

(2) $f(x)=\sin x$

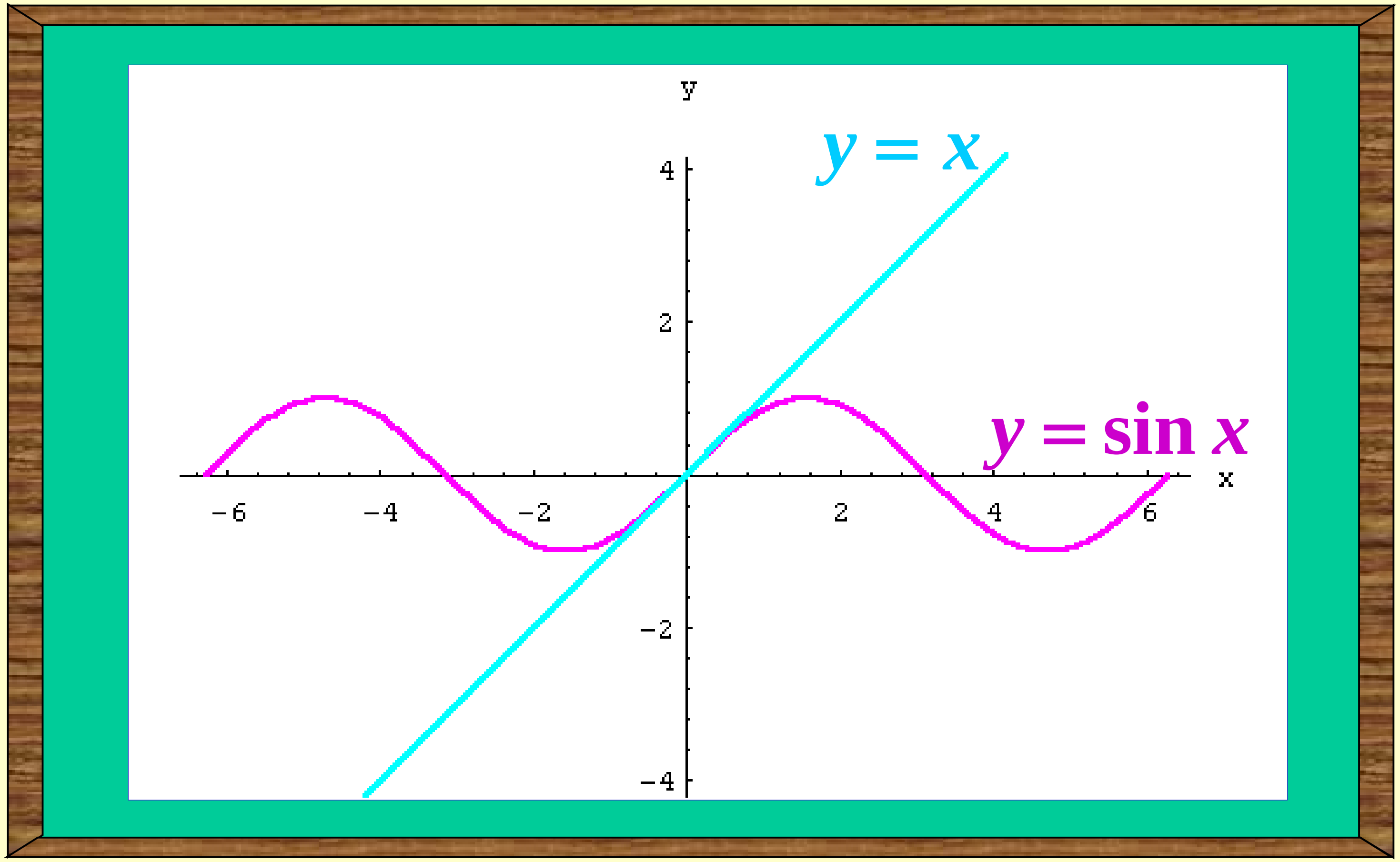
$$\because \quad f^{(k)}(x)=\sin(x+k\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$f^{(k)}(0)=\sin k\frac{\pi}{2}=\begin{cases}0, & k=2m \\ (-1)^{m-1}, & k=2m-1\end{cases} \quad (m=1,2,\cdots)$$

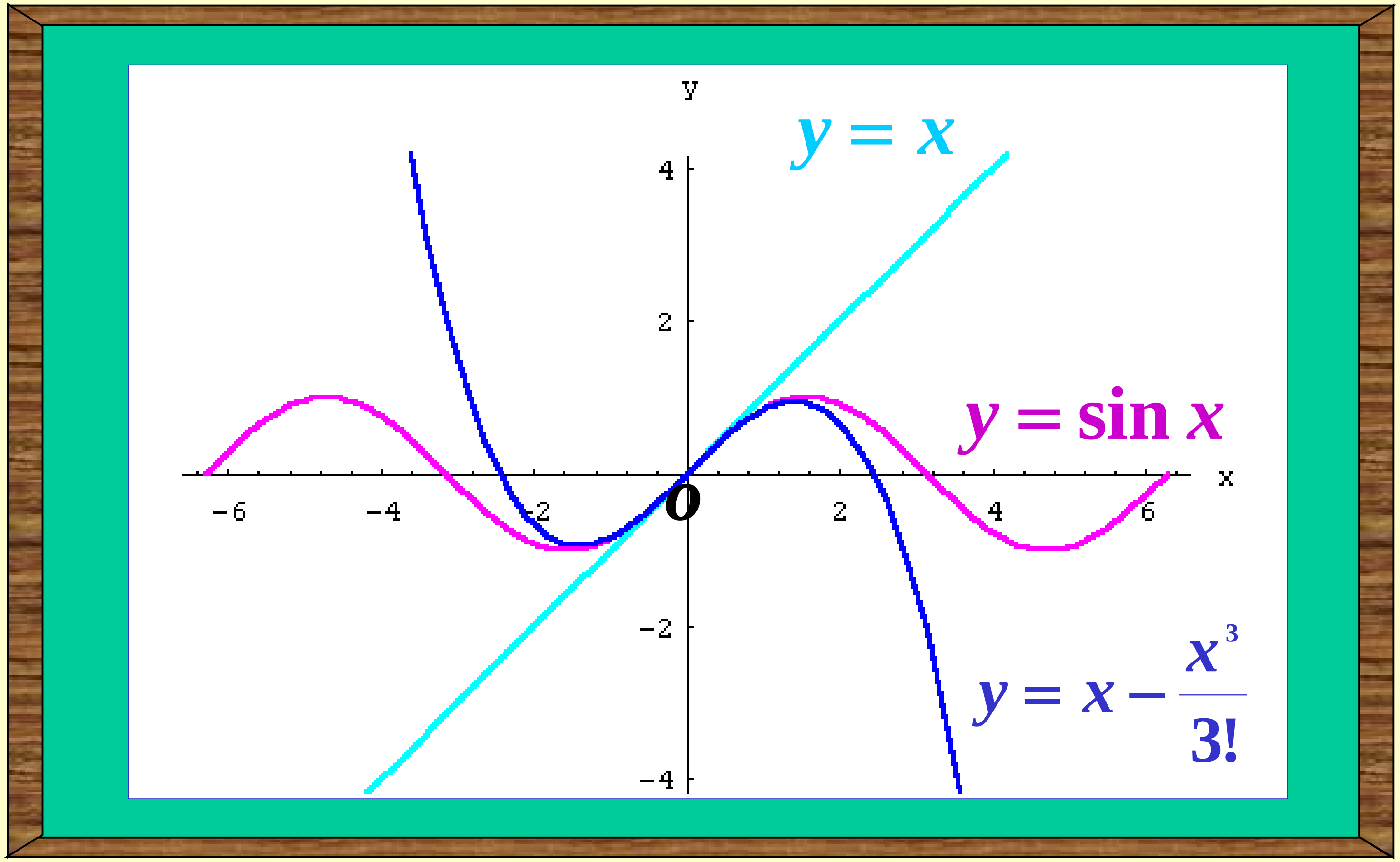
$$\therefore \quad \sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+R_{2m}(x)$$

其中 $R_{2m}(x)=\dfrac{(-1)^m\cos(\theta x)}{(2m+1)!}x^{2m+1} \quad (0<\theta<1)$

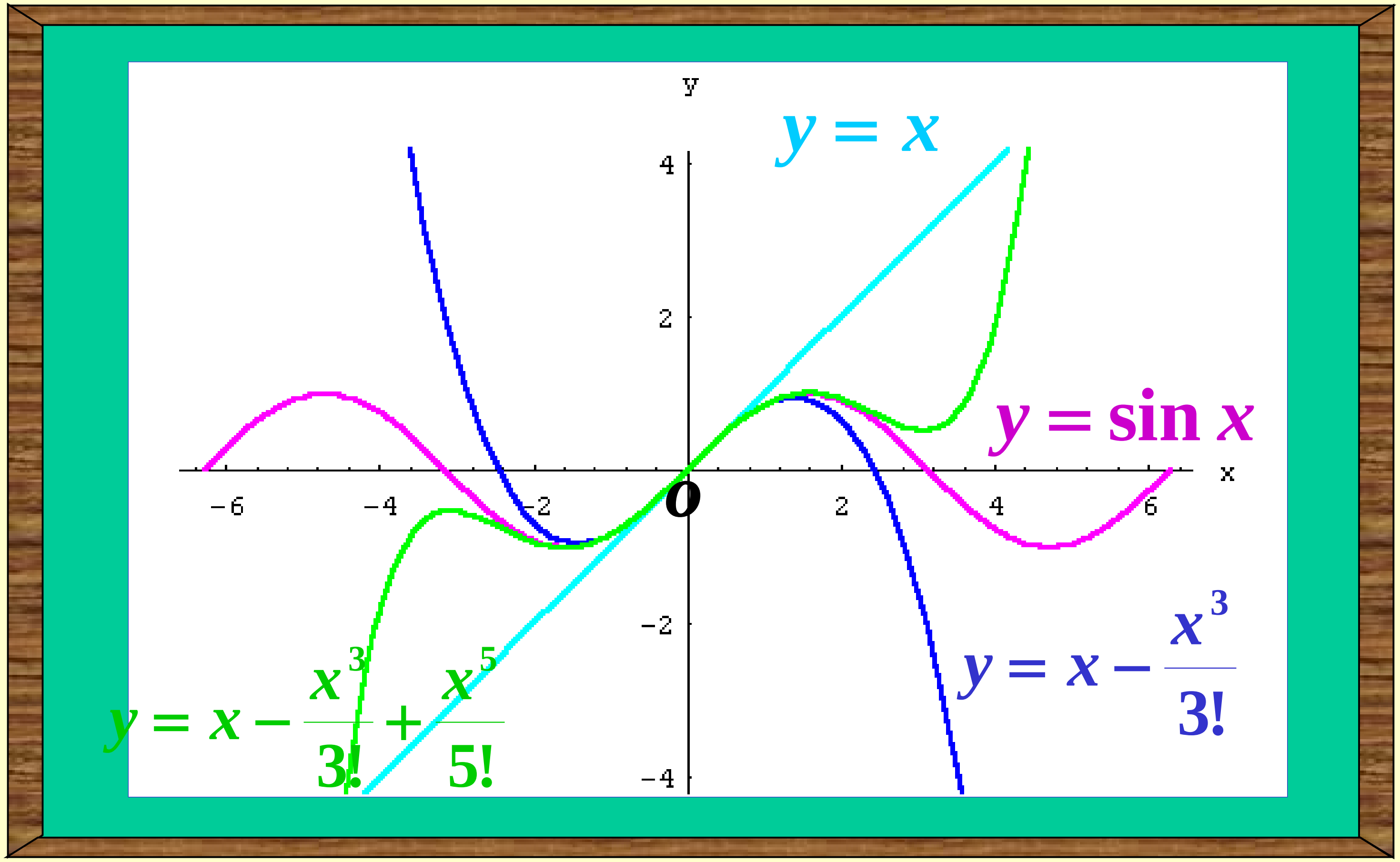
1. Taylor 公式在近似计算中的应用;



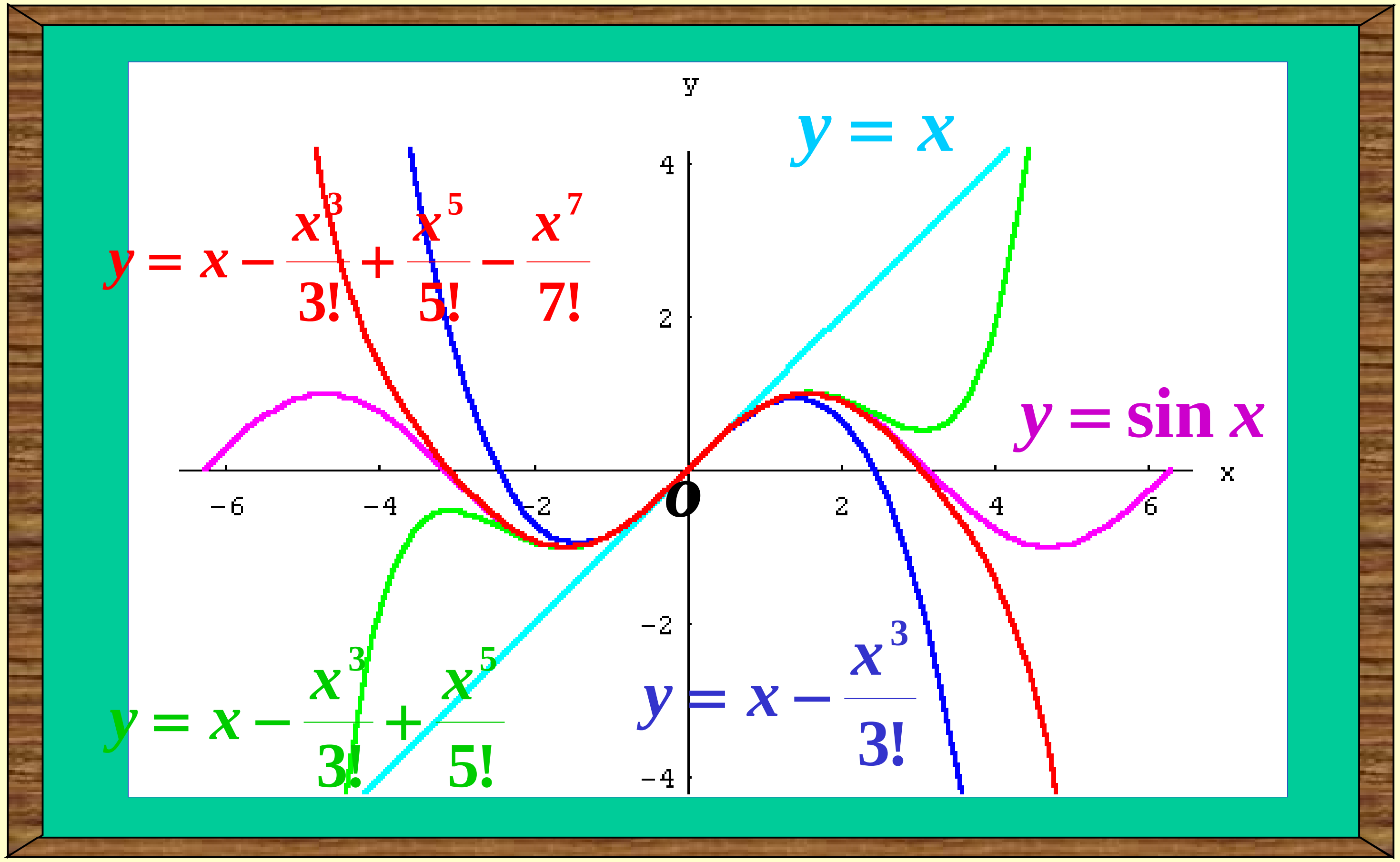
1. Taylor 公式在近似计算中的应用;



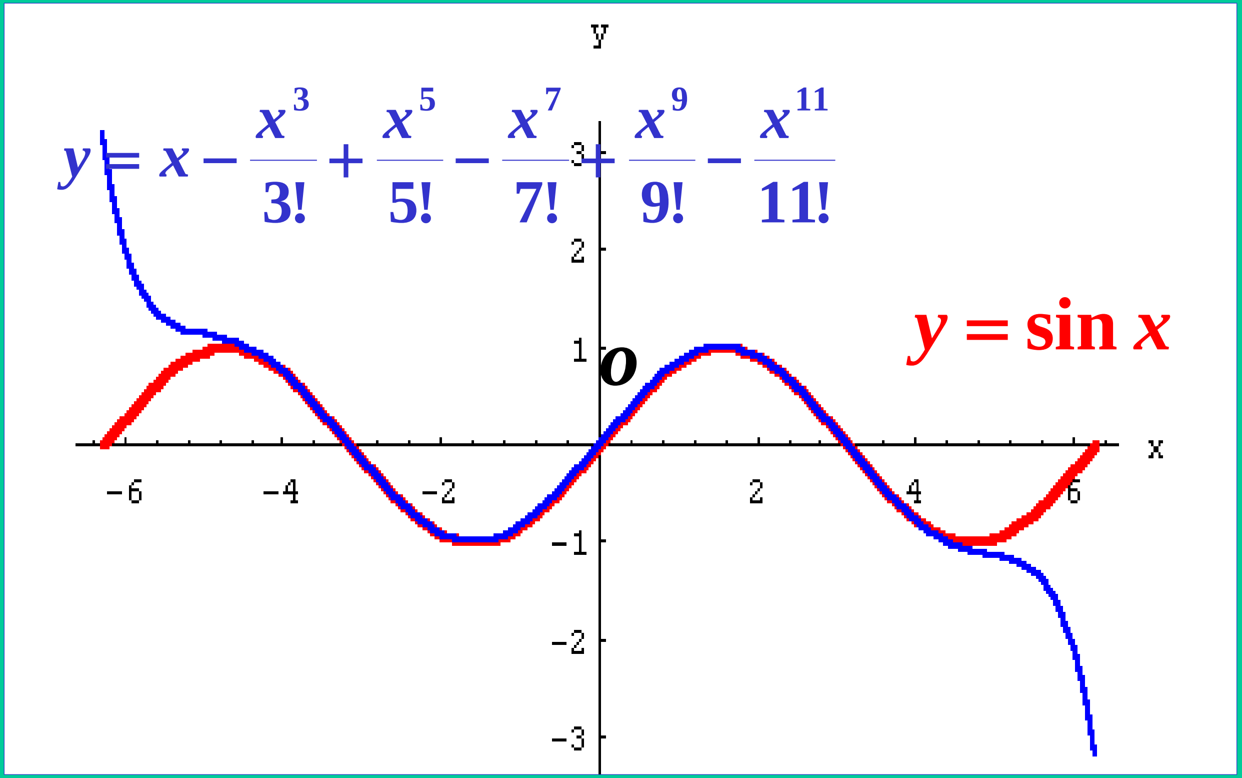
1. Taylor 公式在近似计算中的应用;



1. Taylor 公式在近似计算中的应用;



1. Taylor 公式在近似计算中的应用;



(3) $f(x)=\cos x$

类似可得

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+R_{2m+1}(x)$$

其中

$$R_{2m+1}(x)=\frac{(-1)^{m+1}\cos(\theta x)}{(2m+2)!}\,x^{2m+2}\quad(0<\theta<1)$$

(4) $f(x)=(1+x)^{\alpha} \quad (x>-1)$

$$\because \quad f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$$

$$f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1) \qquad (k=1,2,\cdots)$$

$$\therefore \quad (1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}$

$$(0<\theta<1)$$

$$(5)\quad f(x)=\ln(1+x)\qquad (x>-1)$$

已知 $f^{(k)}(x)=(-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k}\quad (k=1,2,\cdots)$

类似可得

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x)$$

其中

$$R_n(x)=\frac{(-1)^n}{n+1}\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}}\qquad (0<\theta<1)$$

常用函数的麦克劳林公式

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

2. 利用泰勒公式求极限

例1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3x+4}+\sqrt{4-3x}-4}{x^2}$. 可用洛必达法则

解: 用泰勒公式将分子展到 x^2 项, 由于

$$\sqrt{3x+4}=2(1+\frac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}$$

$$=2\left[\,1+\frac{1}{2}\cdot(\frac{3}{4}x)+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\,(\frac{3}{4}x)^2+o(x^2)\,\right]$$

$$=2+\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)$$

$$\sqrt{4-3x}=2(1-\frac{3}{4}x)^{\frac{1}{2}}=2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)$$

$$\therefore\ \text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{16}x^2+o(x^2)}{x^2}=-\frac{9}{32}$$

例 2　计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}$.

解　$\because$　$e^{x^2}=1+x^2+\dfrac{1}{2!}x^4+o(x^4)$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^5)$$

$\therefore$　$e^{x^2}+2\cos x-3=(\dfrac{1}{2!}+2\cdot\dfrac{1}{4!})x^4+o(x^4)$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{7}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{7}{12}$$

3. 利用泰勒公式证明不等式

例6. 证明 $\sqrt{1+x} > 1+\dfrac{x}{2}-\dfrac{x^2}{8} \quad (x>0).$

证: $\because \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$

$$= 1+\frac{x}{2} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)x^2$$

$$+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right)(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}x^3$$

$$= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{1}{16}(1+\theta x)^{-\frac{5}{2}}x^3 \qquad (0<\theta<1)$$

$$\therefore \quad \sqrt{1+x} > 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} \quad (x>0)$$

例5，设函数$f(x)$满足$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=C, \lim\limits_{x\to\infty} f'''(x)=0$,

证明:$\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0, \lim\limits_{x\to\infty} f''(x)=0.$

证明：用泰勒公式

$$f(x+1)= f(x)+ f'(x)+\frac{f''(x)}{2!}+\frac{f'''(\xi_1)}{3!},$$

$$f(x-1)= f(x)- f'(x)+\frac{f''(x)}{2!}-\frac{f'''(\xi_2)}{3!},$$

两式分别相加减，得

$$f''(x)=f(x+1)+ f(x-1)-2f(x)+\frac{1}{6}f'''(\xi_1)-\frac{1}{6}f'''(\xi_2)$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(f(x+1)- f(x-1)\right)-\frac{1}{6}f'''(\xi_1)-\frac{1}{6}f'''(\xi_2)$$

$$\lim_{x\to\infty} f''(x)=C+C-2C+0=0, \lim_{x\to\infty} f'(x)=\frac{1}{2}(C-C)=0.$$

练习题 1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上具有三阶连续导数，且 $f(0)=1$，$f(1)=2$，$f'(\frac{1}{2})=0$，**证明**$(0,1)$**内至少存在**一点 ξ，使 $|f'''(\xi)|\geq 24$.

证: 由题设对 $x\in[0,1]$，有

$$f(x)=f(\tfrac{1}{2})+f'(\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{1}{2})+\frac{1}{2!}f''(\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{1}{2})^2+\frac{1}{3!}f'''(\zeta)(x-\tfrac{1}{2})^3$$

$$=f(\tfrac{1}{2})+\frac{1}{2!}f''(\tfrac{1}{2})(x-\tfrac{1}{2})^2+\frac{1}{3!}f'''(\zeta)(x-\tfrac{1}{2})^3$$

(其中 ζ 在 x 与 $\frac{1}{2}$ 之间)

分别令 $x=0,1$，得

$$1 = f(0) = f(\tfrac{1}{2}) + \frac{f''(\frac{1}{2})}{2!}(-\tfrac{1}{2})^2 + \frac{f'''(\zeta_1)}{3!}(-\tfrac{1}{2})^3 \quad (\zeta_1 \in (0, \tfrac{1}{2}))$$

$$2 = f(1) = f(\tfrac{1}{2}) + \frac{f''(\frac{1}{2})}{2!}(\tfrac{1}{2})^2 + \frac{f'''(\zeta_2)}{3!}(\tfrac{1}{2})^3 \quad (\zeta_2 \in (\tfrac{1}{2}, 1))$$

下式减上式，得

$$1 = \frac{1}{48}\left[f'''(\zeta_2) - f'''(\zeta_1) \right] \le \frac{1}{48}\left[\left| f'''(\zeta_2) \right| + \left| f'''(\zeta_1) \right| \right]$$

令

$$\left| f'''(\xi) \right| = \max\left(\left| f'''(\zeta_2) \right|, \left| f'''(\zeta_1) \right| \right)$$

$$\le \frac{1}{24}\left| f'''(\xi) \right| \quad (0 < \xi < 1)$$

$$\Longrightarrow \quad \left| f'''(\xi) \right| \ge 24$$