第五节 函数的幂级数展开式（续）

一、近似计算

$\because \quad A = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots,$

$\therefore \quad A \approx a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$

误差 $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots.$

两类问题:

1.给定项数,求近似值并估计精度;

2.给出精度,确定项数.

关键: 通过估计余项,确定精度或项数.

常用方法:

1.若余项是交错级数,则可用余和的首项来解决;

2.若不是交错级数,则放大余和中的各项,使之成为等比级数或其它易求和的级数,从而求出其和.

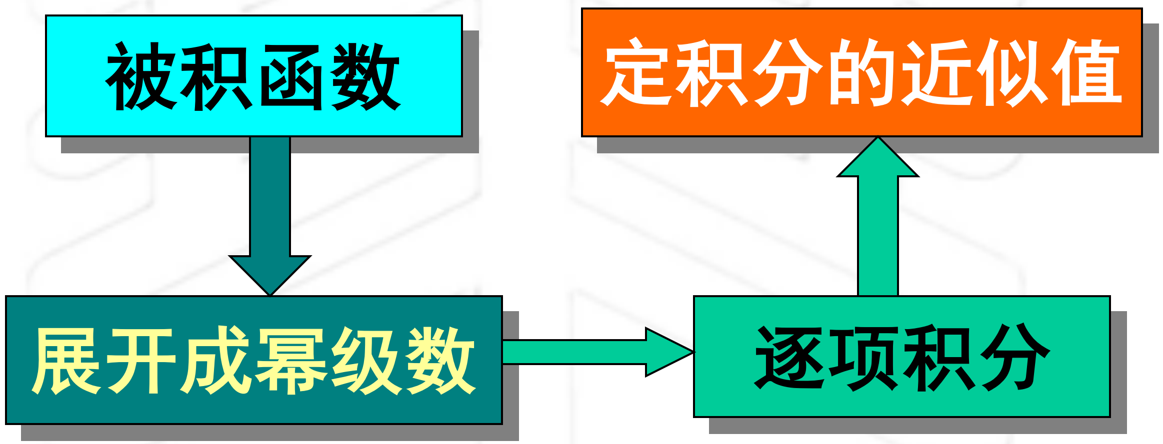
例1 计算e的近似值,使其误差不超过10^{-5}.

例2 利用$\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{3!}$计算$\sin 9^0$的近似值,并估计误差.

二、计算定积分

例如函数 $e^{-x^2}, \dfrac{\sin x}{x}, \dfrac{1}{\ln x}$, 原函数不能用初等函数表示，难以计算其定积分.

解法



例3 计算 $\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx$ 的近似值, 精确到10^{-4}.

三、求数项级数的和

1. 利用级数和的定义求和:

(1)直接法;　(2)拆项法;　(3)递推法.

例4 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{2n^2}$ 的和.

2. 阿贝尔法(构造幂级数法)：

$$\because \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\quad \text{求得} s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x\to 1^-} s(x).$$

(逐项积分、逐项求导)

例5 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$ 的和.

例6 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!2^n}$ 的和.

四、欧拉公式

复数项级数:

$$(u_1+iv_1)+(u_2+iv_2)+\cdots+(u_n+iv_n)+\cdots$$

其中$u_n, v_n (n=1,2,3,\cdots)$为实常数或实函数.

若$u=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, $v=\sum_{n=1}^{\infty}v_n$,

则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+iv_n)$收敛，且其和为 $u+iv$.

复数项级数绝对收敛的概念

若 $\sqrt{u_1^2+v_1^2}+\sqrt{u_2^2+v_2^2}+\cdots+\sqrt{u_n^2+v_n^2}+\cdots$ 收敛,

则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 绝对收敛, 称复数项级数绝对收敛.

三个基本展开式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\qquad(-\infty<x<+\infty)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots,(-\infty<x<+\infty)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,\quad(-\infty<x<+\infty)$$

由e^x的幂级数展开式

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(ix)^n + \cdots$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right)}_{\cos x}$$

$$+ i\underbrace{\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right)}_{\sin x}$$

$$= \cos x + i \sin x$$

$$\because e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

$$又\because e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

$$\therefore \begin{cases} \cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \end{cases}$$

欧拉公式

$$e^{x+iy} = e^{x}(\cos y + i\sin y)$$

揭示了三角函数和复变数指数函数之间的一种关系.

思考题

利用幂级数展开式, 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$.