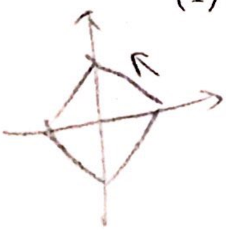
3. 利用格林公式计算下列曲线积分:

(1) $\oint_L \frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{|x|+|y|}$, 其中$L$为$|x|+|y|=1$逆时针一周.



$P=\frac{-y}{|x|+|y|}=y$ $Q=\frac{x}{|x|+|y|}=x$

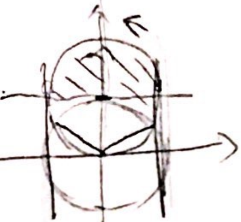
原式$=\iint_L (1+1)dxdy = 2\int_{-1}^{0}dx\int_{-x-1}^{x+1}2dy$

$=2\int_{-1}^{0}4(x+1)dx$

$=8\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-1}^{0}=4$

$1\ 2y^2=2\ 2x^2$

(2) $\oint_L x^3y\mathrm{d}x+x^2y^2\mathrm{d}y$, 其中$L$为不等式$x^2+y^2\geq 1$及$x^2+y^2\leq 2y$所确定 $1-\sqrt{1-x^2}$ 的区域D的正向边界. $P=x^3y$, $Q=x^2y^2$



原式$=\iint_L(2xy^2-x^3)dxdy = \iint_L(2y^2-x^2)x\,dxdy=\iint_L x(2-3x^2)dxdy$

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}d\theta\int_1^{2\sin\theta}(2r\cos\theta-3r^3\cos^3\theta)rdr$

$=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}d\theta\int_1^{2\sin\theta}r^2(2\cos\theta)-3r^4\cos^3\theta\,dr=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}}\frac{8\sin^3\theta\cos\theta}{3}-\frac{32\sin^5\theta\cos^3\theta}{15}$

$=0$

(3) $\oint_L e^x(1-\cos y)\mathrm{d}x-e^x(y-\sin y)\mathrm{d}y$, L由$y=\sin x, 0\leq x\leq\pi$与x轴围成,沿逆时针方向. $P=e^x(1-\cos y)$ $Q=-e^x(y-\sin y)$

$\frac{2\sin^4\theta}{3}-\frac{4\sin^3 2\theta\sin}{15}$

原式$=\iint_L[-e^x(y-\sin y)-e^x\sin y]dxdy$

$=\iint_L[-e^xy]dxdy$

$=\int_0^\pi dx\int_0^{\sin x}(-e^xy)dxdy$

$=\int_0^\pi -e^x\frac{y^2}{2}\Big|_0^{\sin x}dx$

$\frac{e^x\sin^2x}{2}-\frac{2e^x\cos x\sin x}{2}$

$-e^x$

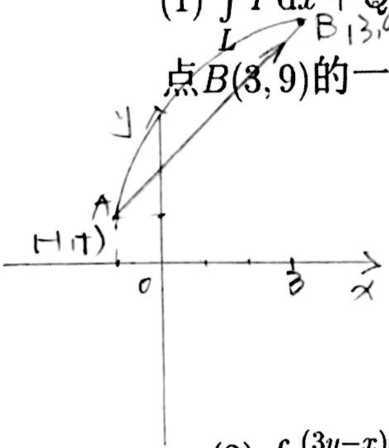
$=\int_0^\pi -\frac{e^x\sin^2x}{2}dx$

$=\int_0^\pi -\frac{e^x}{2}\left(1-\frac{\cos2x}{2}\right)dx = -\frac{e^\pi}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_0^\pi e^x\cos2x\,dx$

$=\frac{1-e^\pi}{5}$

4. 计算积分:

(1) $\int\limits_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$, 其中$P(x,y)=x$, $Q(x,y)=y$, L为连接点$A(-1,1)$和点$B(3,9)$的一曲线弧.



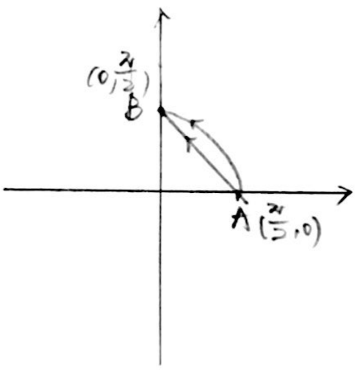
由题意 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ 即曲线积分与路径无关. 设L为有向线段 $\overrightarrow{AB}$

且 $l_{AB}: y=2x+3 \quad (-1\le x\le 3)$

$\therefore \int_L x\,dx + y\,dy = \int_{-1}^{3} x\,dx + (2x+3)\cdot 2\,dx = \int_{-1}^{3}(5x+6)\,dx$

$= \frac{5}{2}x^2+6x\Big|_{-1}^{3} = 44$

(2) $\int\limits_L \frac{(3y-x)\mathrm{d}x+(y-3x)\mathrm{d}y}{(x+y)^3}$, 其中$L$是由点 $A(\frac{\pi}{2},0)$ 沿曲线 $y=\frac{\pi}{2}\cos x$ 到点 $B(0,\frac{\pi}{2})$ 的弧段.



$P: \frac{3y-x}{(x+y)^3} \quad Q=\frac{y-3x}{(x+y)^3}$

$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{3(x+y)^3-3(3y-x)(x+y)^2}{(x+y)^3}$

$= \frac{6(x-y)}{(x+y)^4} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

即曲线积分与路径无关. 设L为有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 且 $l_{AB}: y=\frac{\pi}{2}-x \quad (0\le x\le\frac{\pi}{2})$

$\therefore \int_L \frac{(3y-x)dx+(y-3x)dy}{(x+y)^3}$

$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{(\frac{3}{2}\pi-4x)dx+(\frac{\pi}{2}-4x)\cdot(-dx)}{(\frac{\pi}{2})^3}$

$= \frac{1}{(\frac{\pi}{2})^3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\pi\,dx$

$= -\frac{4}{\pi}$

5. 验证 $e^x[e^y(x-y+2)+y]\mathrm{d}x+e^x[e^y(x-y)+1]\mathrm{d}y$ 是某函数 $u(x,y)$ 的全微分,并求出这样的一个 $u(x,y)$.

$P=e^x[e^y(x-y+2)+y]. \quad Q=e^x[e^y(x-y)+1]$

$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x[e^y(x-y+1)+1] = \frac{\partial Q}{\partial x}$

即 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. 故原式为某$u(x,y)$的全微分

$u(x,y)=\int_{(0,0)}^{(x,y)} P\,dx+Q\,dy + C = \int_0^x P(x,0)\,dx + \int_0^y Q(x,y)\,dy + C$

$= \int_0^x e^x(x+2)\,dx + \int_0^y e^x[e^y(x-y)+1]\,dy$

$= (x-y+1)e^{x+y}+ye^x-1$

$4\pi R^2$

6. 计算下列对面积的曲面积分:

(1) $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$.

原式 $=\iint\limits_{\Sigma} 4 dS = 64\pi$

$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$

(2) $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+2y^2+3z^2)\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$, $a>0$.

$z'_x=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, $z_y=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

原式 $=\iint\limits_{\Sigma xy}(x^2+2y^2+3a^2-3x^2-3y^2)ds=\iint\limits_{\Sigma}(3a^2-2x^2-y^2)ds$

$=2\iint\limits_{\Sigma_1}(3a^2-2x^2-y^2)\sqrt{1+\frac{a^2}{a^2-x^2-y^2}}\,dxdy=2\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^a(3a^2-r^2-r^2\cos^2\theta)\frac{a}{\sqrt{a^2-r^2}}\cdot r\,dr$

$=2\cdot 4\pi a^4=8\pi a^4$

(3) $\iint\limits_{\Sigma}(ax+by+cz+d)^2\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$.

$(ax+by+cz+d)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+d^2+2abxy+2acxz+2bycz+2byd+2czd$

Σ 对称.(对于三个平面 xoy, yoz, zox 都对称)

原式 $=\iint\limits_{\Sigma}(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+d^2)ds$

$=\iint\limits_{\Sigma}(a^2x^2+b^2y^2+c^2(R^2-x^2-y^2)+d^2)ds$

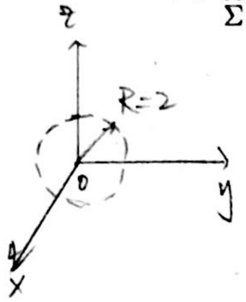
$=\iint\limits_{\Sigma}[(a^2-c^2)x^2+(b^2-c^2)y^2+c^2R^2+d^2)dS$

$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R[(a^2-c^2)r^2\cos^2\theta+(b^2-c^2)r^2\sin^2\theta+c^2R^2+d^2]\frac{R}{\sqrt{R^2-r^2}}r\,dr$

$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{2}{3}R^4(a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta-c^2)+R^2(c^2R^2+d^2)\right]d\theta$

$=\frac{4}{3}\pi R^4(a^2+b^2+c^2)+4\pi R^2d^2$

(4) $\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$, 其中$\Sigma$是$x^2+y^2+z^2=4$.



将曲面Σ沿xOY平面分为上下两块Σ_1和Σ_2.

在xOY平面上投影均为D: $x^2+y^2=4$.

且Σ_1与Σ_2关于xOY平面对称

即原式$=2\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\,dS$. 且$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$　$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

$\therefore$原式$=2\iint_D(x^2+y^2)\cdot\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$

$=2\iint_D(x^2+y^2)\cdot\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dxdy$

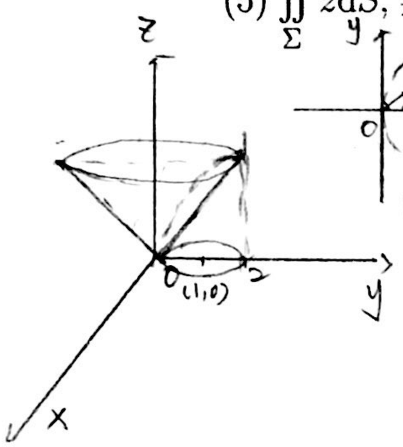
$=4\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2\frac{r^3}{\sqrt{4-r^2}}\,dr$

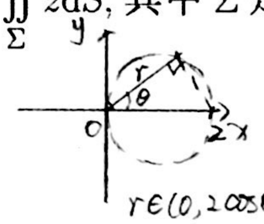
令$\sqrt{4-r^2}=u\rightarrow rdr=-udu$　$u:2\rightarrow 0$

即原式$=8\pi\int_0^2\frac{4-u^2}{u}\,udu$

$=\frac{128}{3}\pi$

(5) $\iint_{\Sigma} z\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在柱体 $x^2+y^2\le 2x$ 内的部分.





原式$=\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$. $\left(\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$

$=\sqrt{2}\iint_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$

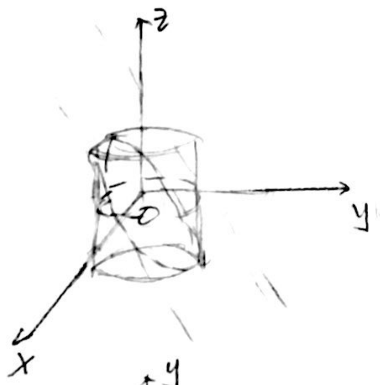
利用极坐标. 由图得Σ在xOY平面上的投影得 $\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ $r\in(0,2\cos\theta)$

即原式$=\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}r^2dr=\frac{16}{3}\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,d\theta$

$=\frac{32}{9}\sqrt{2}$

(6) $\iint_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S$, 其中 Σ 为平面 $y+z=5$ 被柱面 $x^2+y^2=25$ 所截下的部分.

原式$=\iint_D(x+y+5-y)\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy$　$(z_x'=0\quad z_y'=-1)$



$=\sqrt{2}\iint_D(x+5)\,dxdy$

由图得D关于y轴对称　$\therefore$得原式$=5\sqrt{2}\iint_D dxdy$

即原式关于x为奇函数

由图得投影面积$D=\pi\times5^2=25\pi$　即原式$=5\sqrt{2}\times25\pi=125\sqrt{2}\pi$