高等数学下册知识点

第八章　空间解析几何与向量代数

（一）向量及其线性运算

1、 向量，向量相等，单位向量，零向量，向量平行、共线、共面；

2、 线性运算：加减法、数乘；

3、 空间直角坐标系：坐标轴、坐标面、卦限，向量的坐标分解式；

4、 利用坐标做向量的运算：设$\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$，

则 $\vec{a}\pm\vec{b}=(a_x\pm b_x,a_y\pm b_y,a_z\pm b_z)$，$\lambda\vec{a}=(\lambda a_x,\lambda a_y,\lambda a_z)$；

5、 向量的模、方向角、投影：

1） 向量的模：$\left|\vec{r}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$；

2） 两点间的距离公式：$\left|AB\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

3） 方向角：非零向量与三个坐标轴的正向的夹角α,β,γ

4） 方向余弦：$\cos\alpha=\dfrac{x}{\left|\vec{r}\right|}$，$\cos\beta=\dfrac{y}{\left|\vec{r}\right|}$，$\cos\gamma=\dfrac{z}{\left|\vec{r}\right|}$

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

5） 投影：$\Pr j_{\vec{u}}\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cos\varphi$，其中$\varphi$为向量$\vec{a}$与$\vec{u}$的夹角。

（二）数量积，向量积

1、 数量积：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta$

1） $\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2$

2） $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

2、 向量积：$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

大小：$|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$，方向：$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 符合右手规则

1）$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

2）$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

运算律：反交换律 $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$

（三）曲面及其方程

1、 曲面方程的概念：$S : f(x, y, z) = 0$

2、 旋转曲面：

yoz 面上曲线 $C : f(y, z) = 0$，

绕 y 轴旋转一周：$f(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0$

绕 z 轴旋转一周：$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$

3、 柱面：

$F(x, y) = 0$ 表示母线平行于 z 轴，准线为 $\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 的柱面

4、 二次曲面

1） 椭圆锥面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$

2） 椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

旋转椭球面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

3） 单叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

4） 双叶双曲面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

5） 椭圆抛物面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$

6） 双曲抛物面（马鞍面）：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$

7） 椭圆柱面：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

8） 双曲柱面：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

9） 抛物柱面：$x^2=ay$

（四）空间曲线及其方程

1、 一般方程：$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

2、 **参数方程**：$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$，**如螺旋线**：$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases}$

3、 **空间曲线在坐标面上的投影**

$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$，**消去** z ，**得到曲线在面** xoy **上的投影** $\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$

（五）平面及其方程

1、 **点法式方程**：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

法向量：$\vec{n}=(A,B,C)$，**过点** (x_0,y_0,z_0)

2、 **一般式方程**：$Ax+By+Cz+D=0$

截距式方程：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

3、 **两平面的夹角**：$\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$，$\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$，

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

$$\Pi_1\perp\Pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$$

$$\Pi_1 // \Pi_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

4、 **点** $P_0(x_0,y_0,z_0)$ **到平面** $Ax+By+Cz+D=0$ **的距离**：

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

（六）空间直线及其方程

1、 **一般式方程：** $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

2、 **对称式（点向式）方程：** $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$

方向向量： $\vec{s} = (m,n,p)$，**过点** (x_0, y_0, z_0)

3、 **参数式方程：** $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$

4、 **两直线的夹角：** $\vec{s}_1 = (m_1,n_1,p_1)$，$\vec{s}_2 = (m_2,n_2,p_2)$，

$$\cos\varphi = \frac{\left|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2\right|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \quad m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$$

$$L_1 // L_2 \Leftrightarrow \quad \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

5、 **直线与平面的夹角：直线与它在平面上的投影的夹角，**

$$\sin\varphi = \frac{\left|Am + Bn + Cp\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\cdot\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

$$L // \Pi \Leftrightarrow \quad Am + Bn + Cp = 0$$

$$L \perp \Pi \Leftrightarrow \quad \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

第九章 多元函数微分法及其应用

（一）基本概念

1、 距离，邻域，内点，外点，边界点，聚点，开集，闭集，连通集，区域，闭区域，有界集，无界集。

2、 多元函数：$z=f(x,y)$**，图形：**

3、 极限：$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$

4、 连续：$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$

5、 偏导数：

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

6、 方向导数：

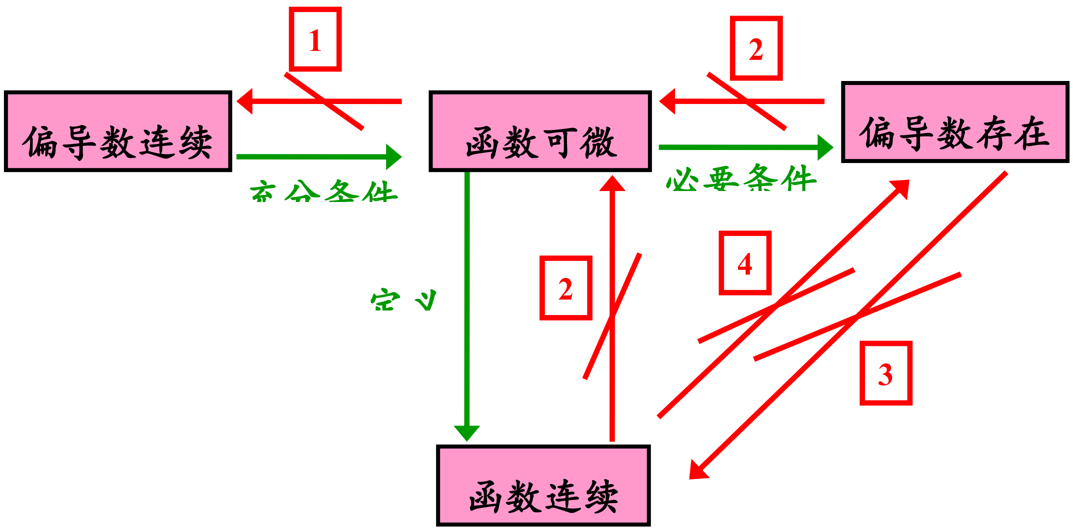
$\dfrac{\partial f}{\partial l}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\beta$ **其中** α,β **为** l **的方向角。**

7、 梯度：$z=f(x,y)$**，则** $gradf(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\vec{i}+f_y(x_0,y_0)\vec{j}$**。**

8、 全微分：设 $z=f(x,y)$**，则** $\mathrm{d}z=\dfrac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$

（二）性质

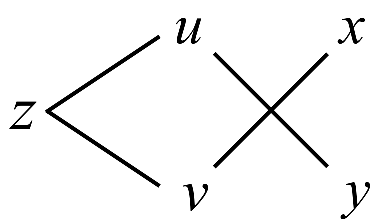
1、 函数可微，偏导连续，偏导存在，函数连续等概念之间的关系：



2、 闭区域上连续函数的性质（有界性定理，最大最小值定理，介值定理）

3、 微分法

1） 定义：



2） 复合函数求导：链式法则

若 $z=f(u,v),u=u(x,y),v=v(x,y)$，则

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}，\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}$$

3） 隐函数求导：两边求偏导，然后解方程（组）

（三）应用

1、 极值

1） 无条件极值：求函数 $z=f(x,y)$ 的极值

解方程组 $\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases}$ 求出所有驻点，对于每一个驻点 (x_0,y_0)，令

$A=f_{xx}(x_0,y_0)$， $B=f_{xy}(x_0,y_0)$， $C=f_{yy}(x_0,y_0)$，

① 若 $AC-B^2>0$， $A>0$，函数有极小值，

若 $AC-B^2>0$， $A<0$，函数有极大值；

② 若 $AC-B^2<0$，函数没有极值；

③ 若 $AC-B^2=0$，不定。

2） 条件极值：求函数 $z=f(x,y)$ 在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的极值

令：$L(x,y)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$ ——— Lagrange 函数

解方程组 $\begin{cases} L_x=0 \\ L_y=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$

2、 几何应用

1） 曲线的切线与法平面

曲线$\Gamma:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$，则$\Gamma$上一点$M(x_0,y_0,z_0)$（对应参数为$t_0$）处的

切线方程为：$\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(t_0)}$

法平面方程为：$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$

2） 曲面的切平面与法线

曲面$\Sigma:F(x,y,z)=0$，则Σ上一点$M(x_0,y_0,z_0)$处的切平面方程为：

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

法线方程为：$\dfrac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$

第十章 重积分

（一）二重积分

1、 定义：$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k$

2、 性质：（6 条）

3、 几何意义：曲顶柱体的体积。

4、 计算：

1） 直角坐标

$$D=\left\{(x,y)\left|\begin{array}{c}\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\\ a\le x\le b\end{array}\right.\right\},$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

$$D=\left\{(x,y)\left|\begin{array}{c}\phi_1(y)\le x\le\phi_2(y)\\ c\le y\le d\end{array}\right.\right\},$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\varphi_1(y)}^{\varphi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

2） 极坐标

$$D=\left\{(\rho,\theta)\left|\begin{array}{c}\rho_1(\theta)\le\rho\le\rho_2(\theta)\\ \alpha\le\theta\le\beta\end{array}\right.\right\}$$

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta d\theta\int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,\rho\,\mathrm{d}\rho$$

（二）三重积分

1、 定义： $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k$

2、 性质：

3、 计算：

1） 直角坐标

$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$ ------------- **“先一后二”**

$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v=\int_a^b \mathrm{d}z\iint_{D_Z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ------------- **“先二后一”**

2） 柱面坐标

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}, \quad \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \iiint_{\Omega} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

3） 球面坐标

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = \iiint_{\Omega} f(r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi) r^2\sin\phi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$$

（三）应用

曲面$S: z = f(x,y)$，$(x,y)\in D$的面积：

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

第十一章　曲线积分与曲面积分

（一）对弧长的曲线积分

1、 定义： $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta s_i$

2、 性质：

1） $\int_L [\alpha f(x,y) + \beta(x,y)]\mathrm{d}s = \alpha\int_L f(x,y)\mathrm{d}s + \beta\int_L g(x,y)\mathrm{d}s.$

2） $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s + \int_{L_2} f(x,y)\mathrm{d}s. \qquad (L = L_1 + L_2).$

3）在L上，若$f(x,y)\le g(x,y)$，则$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s \le \int_L g(x,y)\mathrm{d}s.$

4） $\int_L \mathrm{d}s = l$ （ *l* 为曲线弧 *L* 的长度）

3、 计算：

设 $f(x,y)$ 在曲线弧 L 上有定义且连续，L 的参数方程为 $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$，其中 $\varphi(t),\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有一阶连续导数，且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[\phi(t),\psi(t)]\sqrt{\phi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t \quad , \quad (\alpha<\beta)$$

（二）对坐标的曲线积分

1、 定义：设 *L* 为 xoy 面内从 *A* 到 *B* 的一条有向光滑弧，函数 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在 *L* 上有界，定义 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} P(\xi_k,\eta_k)\Delta x_k$，

$$\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} Q(\xi_k,\eta_k)\Delta y_k .$$

向量形式：$\int_L \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}r} = \int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$

2、 性质：

用 L^- 表示 L 的反向弧 ， 则 $\int_{L^-} \vec{F}(x,y)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}r} = -\int_L \vec{F}(x,y)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}r}$

3、 计算：

设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在有向光滑弧 L 上有定义且连续， L 的参数方程为

$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad (t:\alpha\to\beta)$，其中 $\varphi(t),\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有一阶连续导数，且 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\neq 0$，则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta \{P[\phi(t),\psi(t)]\phi'(t) + Q[\phi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t$$

4、 两类曲线积分之间的关系：

设平面有向曲线弧为 L：$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$，$L$ 上点 (x,y) 处的切向量的方向角为：

α,β，$\cos\alpha=\dfrac{\varphi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}$，$\cos\beta=\dfrac{\psi'(t)}{\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}}$，

则 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta)\mathrm{d}s$.

（三）格林公式

1、格林公式：设区域 *D* 是由分段光滑正向曲线 *L* 围成，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 *D* 上具有连续一阶偏导数，则有 $\iint\limits_D\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint\limits_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

2、G 为一个单连通区域，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在 G 上具有连续一阶偏导数，则

$\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ $\Leftrightarrow$ **曲线积分** $\int\limits_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ **在 G 内与路径无关**

$\Leftrightarrow$ **曲线积分** $\oint\limits_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$

$\Leftrightarrow$ $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ **在 G 内为某一个函数 $u(x,y)$ 的全微分**

（四）对面积的曲面积分

1、 定义：

设 Σ 为光滑曲面，函数 $f(x,y,z)$ 是定义在 Σ 上的一个有界函数，

定义 $\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$

2、 计算：——— “一单二投三代入”

$\Sigma: z=z(x,y)$，$(x,y)\in D_{xy}$，**则**

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x{}^2(x,y)+z_y{}^2(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

（五）对坐标的曲面积分

1、 预备知识：曲面的侧，曲面在平面上的投影，流量

2、 定义：

设Σ为有向光滑曲面，函数$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$是定义在$\Sigma$上的有界函数，

定义 $\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$

同理，$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}$

$$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{zx}$$

3、 性质：

1）$\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$，则

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_{\Sigma_1} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{\Sigma_2} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

2）Σ^-表示与Σ取相反侧的有向曲面， 则$\iint_{\Sigma^-} R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{\Sigma} R\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

4、 计算：——“一投二代三定号”

$\Sigma: z=z(x,y)$，$(x,y)\in D_{xy}$， $z=z(x,y)$在D_{xy}上具有一阶连续偏导数，$R(x,y,z)$在Σ上连续，则$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$为上侧取“ + ”，$\Sigma$为下侧取“ - ”.

5、 两类曲面积分之间的关系：

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}\left(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

其中α,β,γ为有向曲面Σ在点(x,y,z)处的法向量的方向角。

（六）高斯公式

1、 高斯公式：设空间闭区域Ω由分片光滑的闭曲面Σ所围成，Σ的方向取外侧，函数P,Q,R在Ω上有连续的一阶偏导数， 则有

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma}P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

或$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma}\left(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma\right)\mathrm{d}S$$

2、 通量与散度

通量：向量场$\vec{A}=(P,Q,R)$通过曲面Σ指定侧的通量为：$\Phi=\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

散度：$div\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$

（七）斯托克斯公式

1、 斯托克斯公式：设光滑曲面Σ的边界Γ是分段光滑曲线，Σ的侧与Γ的正向符合右手法则，$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在包含$\Sigma$在内的一个空间域内具有连续一阶偏导数， 则有

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\oint_{\Gamma}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$

为便于记忆，斯托克斯公式还可写作：

$$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\oint_{\Gamma}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$

2、 环流量与旋度

环流量：向量场 $\vec{A}=(P,Q,R)$ **沿着有向闭曲线Γ的环流量为** $\oint_{\Gamma} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$

旋度： $rot\ \vec{A}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x},\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)$

第十二章　无穷级数

（一）常数项级数

1、　定义：

1）无穷级数： $\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$

部分和： $S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$，

正项级数： $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$**，** $u_n\geq 0$

交错级数： $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$**，** $u_n\geq 0$

2）级数收敛：若 $\lim_{n\to\infty}S_n=S$ **存在，则称级数** $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ **收敛，否则称级数** $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ **发散**

3）条件收敛： $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ **收敛，而** $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ **发散；**

绝对收敛： $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ **收敛。**

2、　性质：

1）　改变有限项不影响级数的收敛性；

2）　级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$**，** $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ **收敛，则** $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ **收敛；**

3） 级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则任意加括号后仍然收敛；

4） 必要条件：级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0$.（注意：不是充分条件！）

3、 审敛法

正项级数：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$u_n \geq 0$

1） 定义：$\lim_{n\to\infty} S_n = S$ 存在；

2） $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛$\Longleftrightarrow \{S_n\}$有界；

3） 比较审敛法：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$为正项级数，且$u_n \leq v_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$

若$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散.

4） 比较法的推论：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$为正项级数，若存在正整数m，当$n > m$时，$u_n \leq kv_n$，而$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；若存在正整数m，当$n > m$时，$u_n \geq kv_n$，而$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散.

5） 比较法的极限形式：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$为正项级数，若$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = l \quad (0 \leq l < +\infty)$，而$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；若$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} > 0$或$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n} = +\infty$，而$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散.

6） 比值法：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$为正项级数，设$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = l$，则当$l < 1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；则当$l > 1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散；当$l = 1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$可能收敛也可能发散.

7） 根值法：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，设 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$，则当 $l<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；则当 $l>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；当 $l=1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 可能收敛也可能发散.

8） 极限审敛法：$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，若 $\lim_{n\to\infty} n\cdot u_n>0$ 或 $\lim_{n\to\infty} n\cdot u_n=+\infty$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；若存在 $p>1$，使得 $\lim_{n\to\infty} n^p\cdot u_n=l \quad (0\le l<+\infty)$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

交错级数：

莱布尼茨审敛法：交错级数：$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$，$u_n\ge 0$ 满足：$u_{n+1}\le u_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$，且 $\lim_{n\to\infty} u_n=0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛。

任意项级数：

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

常见典型级数：几何级数：$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \begin{cases}\text{收敛}, & |q|<1\\ \text{发散}, & |q|\ge 1\end{cases}$

p -级数：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p} \begin{cases}\text{收敛}, & p>1\\ \text{发散}, & \mathrm{p}\le 1\end{cases}$

（二）函数项级数

1、 定义：函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，收敛域，收敛半径，和函数；

2、 幂级数：$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

收敛半径的求法： $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$ **，则收敛半径** $R=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}, & 0<\rho<+\infty\\ 0, & \rho=+\infty\\ +\infty, & \rho=0\end{cases}$

3、 泰勒级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}R_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0$$

展开步骤：（直接展开法）

1） **求出** $f^{(n)}(x),\quad n=1,2,3,\cdots$ **；**

2） **求出** $f^{(n)}(x_0),\quad n=0,1,2,\cdots$ **；**

3） **写出** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ **；**

4） **验证** $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=0$ **是否成立。**

间接展开法：（利用已知函数的展开式）

1） $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}x^n,\quad x\in(-\infty,+\infty)$ **；**

2） $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1},\quad x\in(-\infty,+\infty)$ **；**

3） $\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{(2n)!}x^{2n},\quad x\in(-\infty,+\infty)$ **；**

4） $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n,\quad x\in(-1,\ 1)$ **；**

5） $\dfrac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,\quad x\in(-1,\ 1)$

6） $\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1},\quad x\in(-1,\ 1]$

7） $\dfrac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\quad x\in(-1,\ 1)$

8） $(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n,\quad x\in(-1,\ 1)$

4、 傅里叶级数

1） 定义：

正交系：$1,\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x,\cdots,\sin nx,\cos nx\cdots$ 函数系中任何不同的两个函数的乘积在区间$[-\pi,\ \pi]$上积分为零。

傅里叶级数：$f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

系数：$\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n=1,\ 2,\ 3,\cdots) \end{cases}$

2） 收敛定理：(展开定理)

设 *f* (*x*) 是周期为 2π的周期函数， 并满足狄利克雷(Dirichlet)条件：

1) 在一个周期内连续或只有有限个第一类间断点；

2) 在一个周期内只有有限个极值点，

则 *f* (*x*) 的傅里叶级数收敛 ，且有

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)=\begin{cases} f(x), & x\text{为连续点} \\ \dfrac{f(x^+)+f(x^-)}{2}, & x\text{为间断点} \end{cases}$$

3） 傅里叶展开：

①求出系数： $\begin{cases} a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots) \\ b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \quad (n=1,\ 2,\ 3,\cdots) \end{cases}$ **；**

②写出傅里叶级数 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ **；**

③根据收敛定理判定收敛性。