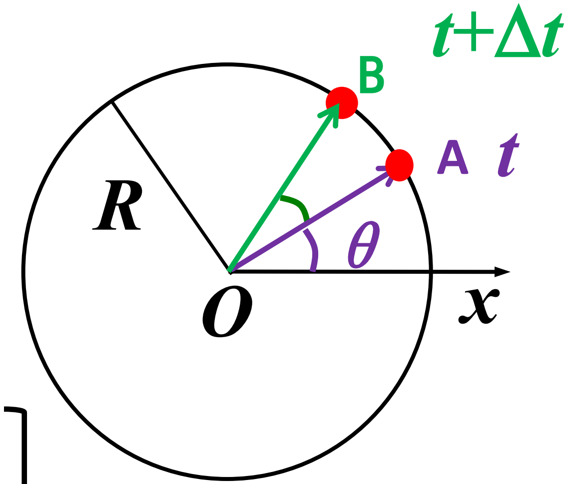
§1.4 曲线运动-圆周运动

圆周运动



时刻	t	$t+\Delta t$	Δt
位矢	$\vec{r}(t)$	$\vec{r}(t+\Delta t)$	
位移			$\Delta\vec{r}$
速度	$\vec{v}(t)$		
加速度	$\vec{a}(t)$		
角度	$\theta(t)$	$\theta(t+\Delta t)$	
角位移			$\Delta\theta$
角速度	ω		
角加速度	α		

线量

角量

一．描述圆周运动的物理量

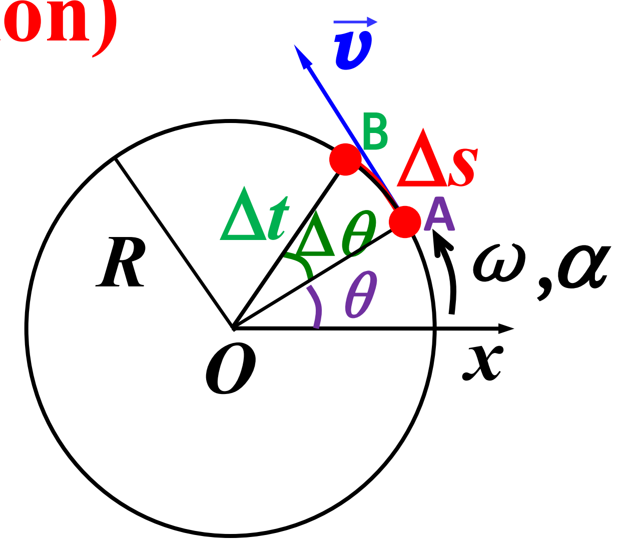
1. 角位移(angular displacement) $\Delta\theta$

2. 角速度(angular velocity)

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}$$

3. 角加速度(angular acceleration)

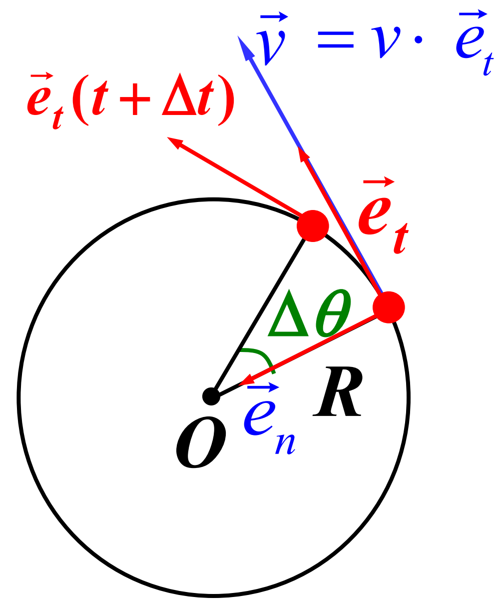
$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \ddot{\theta}$$



4. 线速度(linear velocity)

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{R\,\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = R\omega$$

5. 线加速度(linear acceleration)



$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v \cdot \vec{e}_t) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_t + v\frac{\mathrm{d}\vec{e}_t}{\mathrm{d}t}$$

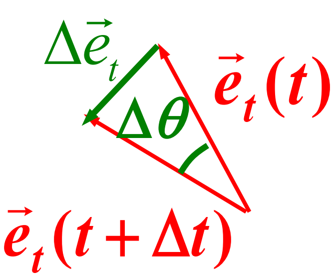
$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_t}{\mathrm{d}t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{e}_t}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_n = \omega\,\vec{e}_n = \frac{v}{R}\vec{e}_n$$

讨论：

$\vec{e}_t$ $\vec{e}_n$：切向和法向单位矢量

(1) $\Delta\vec{e}_t$ 的大小：

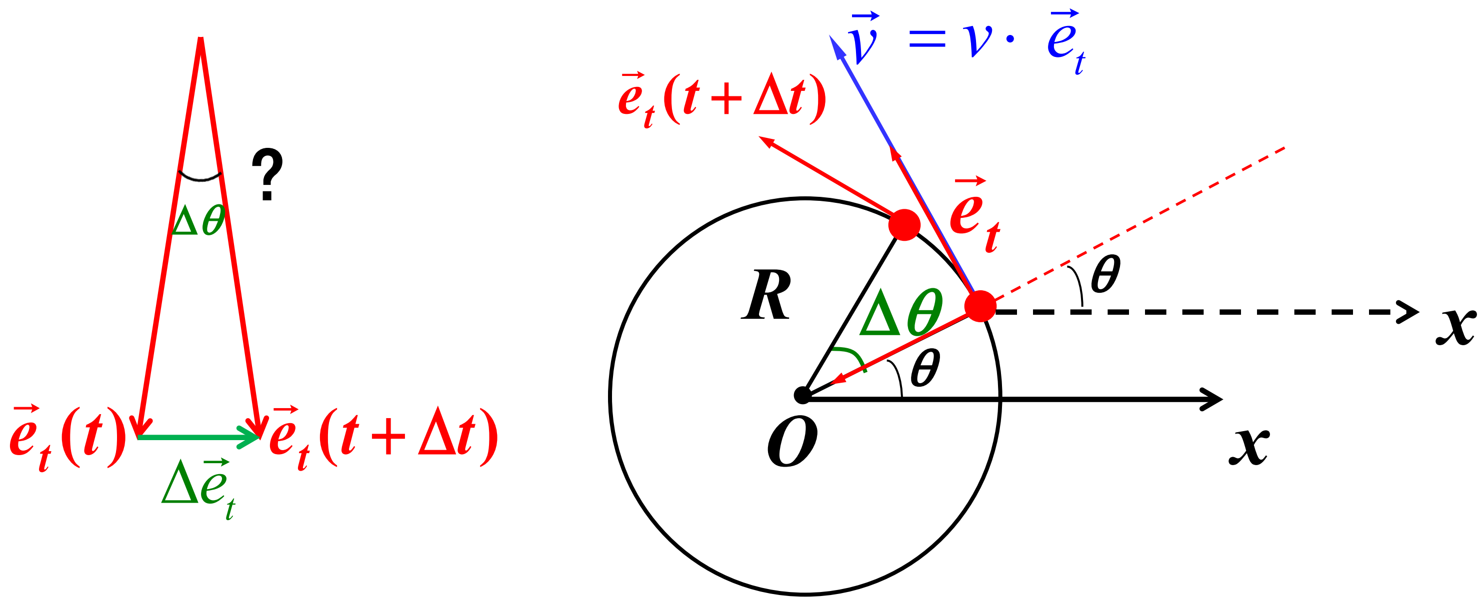
当$\Delta t \to 0$时，$\Delta\theta \to 0$，有$\left|\Delta\vec{e}_t\right| = \Delta\theta \cdot \left|\vec{e}_t\right| = \Delta\theta$



(2) $\Delta\vec{e}_t$ 的方向：

$$\Delta\vec{e}_t \perp \vec{e}_t \to \Delta\vec{e}_t \,//\, \vec{e}_n$$

$$\boxed{\Delta\vec{e}_t = \Delta\theta \cdot \vec{e}_n}$$



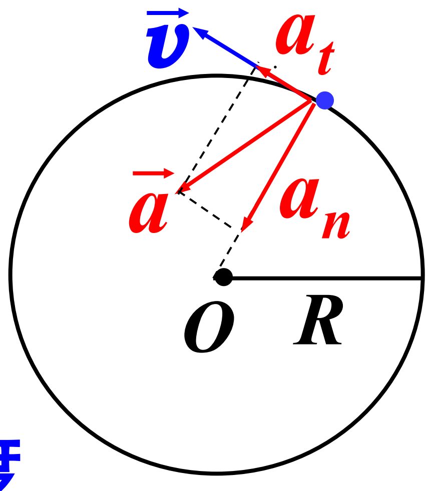
$\vec{e}_t$ 和x轴夹角：θ(t)+90°

$\vec{e}_t(t+\Delta t)$ 和x轴夹角：θ(t+Δt)+90°

$$\boxed{a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}}$$ — 切向加速度

(tangential acceleration)

a_t 是引起速度大小改变的加速度。

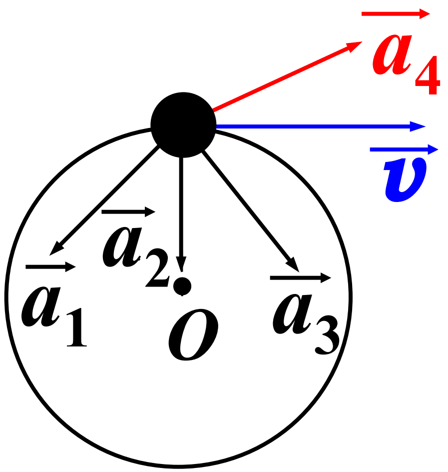


$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{R}}$$ — 法向加速度/向心加速度

(normal/centripetal acceleration)

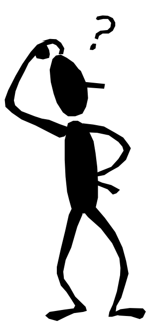
a_n 是引起速度方向改变的加速度。

思考题：



左图中，加速度$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$、$\vec{a}_3$分别是什么情形？

$\vec{a}_4$情形是否存在？



角量与线量的关系

线量

$$\boxed{\begin{aligned} v \\ a_t \\ a_n \end{aligned}}$$

$$v = R\boxed{\omega}$$

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = R\boxed{\alpha}$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\boxed{\omega^2}$$

角量

例5：一质点作半径为0.1m的圆周运动，角位移$\theta=2+4t^2$，求：

（1）t=2s时其法向加速度大小a_n 和切向加速度大小a_τ；

（2）半径与加速度方向夹角是45度的时刻t_1，并求从计时零点到t_1时刻的角位移。（角度单位rad）

解：根据角位移$\theta=2+4t^2$

角速度$\omega=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=8t$

角加速度 $\alpha=\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=8$ **（rad/s²）**

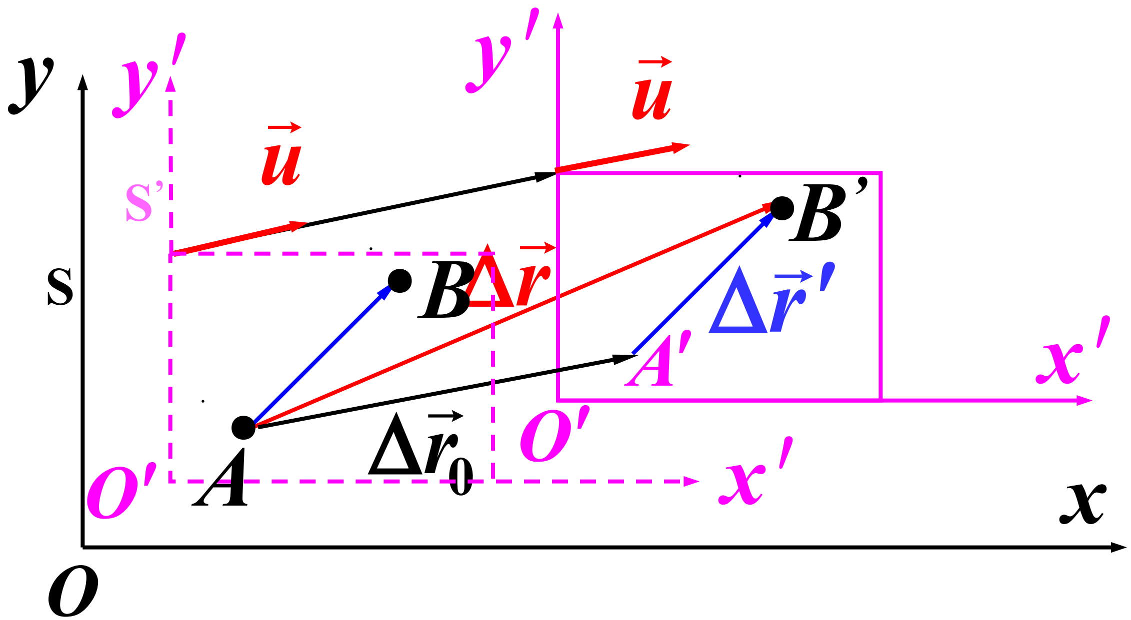
切向加速度大小 $a_\tau=r\alpha=0.8\mathrm{m/s^2}$

切向加速度大小 $a_n=\omega^2r=r(8t)^2$

§ 1.5 运动的相对性

相对运动是指**不同**参考系中观察**同一**物体的运动。

仅讨论一参考系 S′ 相对另一参考系 S 以速度 $\vec{u}$ 平动时的情形：



位移关系：

$$\boxed{\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}\,' + \Delta\vec{r}_0}$$

速度关系：

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{u}}$$

$\vec{v}$: 绝对速度 (absolute velocity) $\vec{v}\,'$: 相对速度 (relative velocity)

$\vec{u}$: 牵连速度 (connected velocity)

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}}$$ 称为伽利略速度变换

（Galilean velocity transformation）

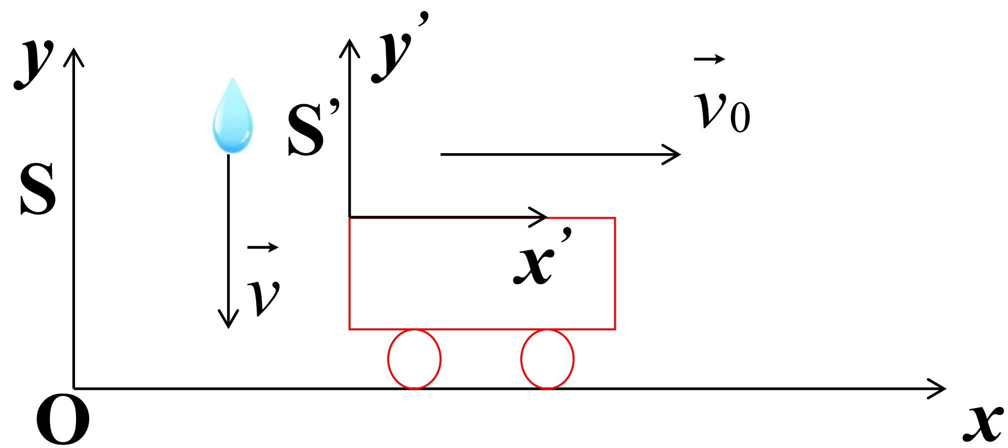
加速度关系：在 S' 相对于 S 平动的条件下

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0}$$

若 $\vec{u} = \text{const}$. 则 $\vec{a}_0 = \dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = 0$, 有 $\vec{a} = \vec{a}'$

例6：

一客车在水平马路上以20m/s的速度向东行驶，而雨滴在空中以10m/s的速度竖直下落．求雨滴相对于车厢的速度的大小和方向．



（1）以地面为参考系S

小车的速度 $\vec{v}_0 = +20\vec{i}$

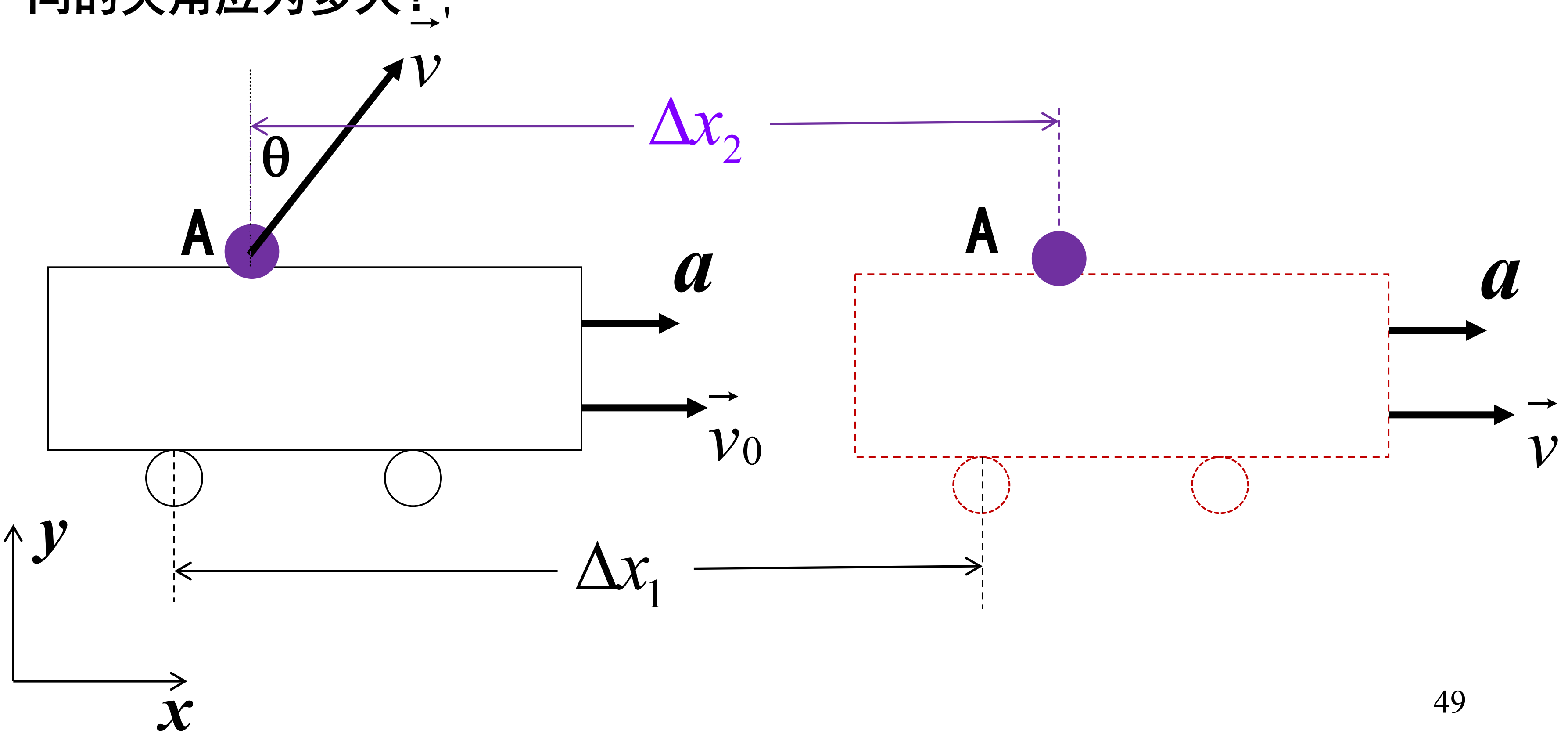
雨滴的速度 $\vec{v} = -10\vec{j}$

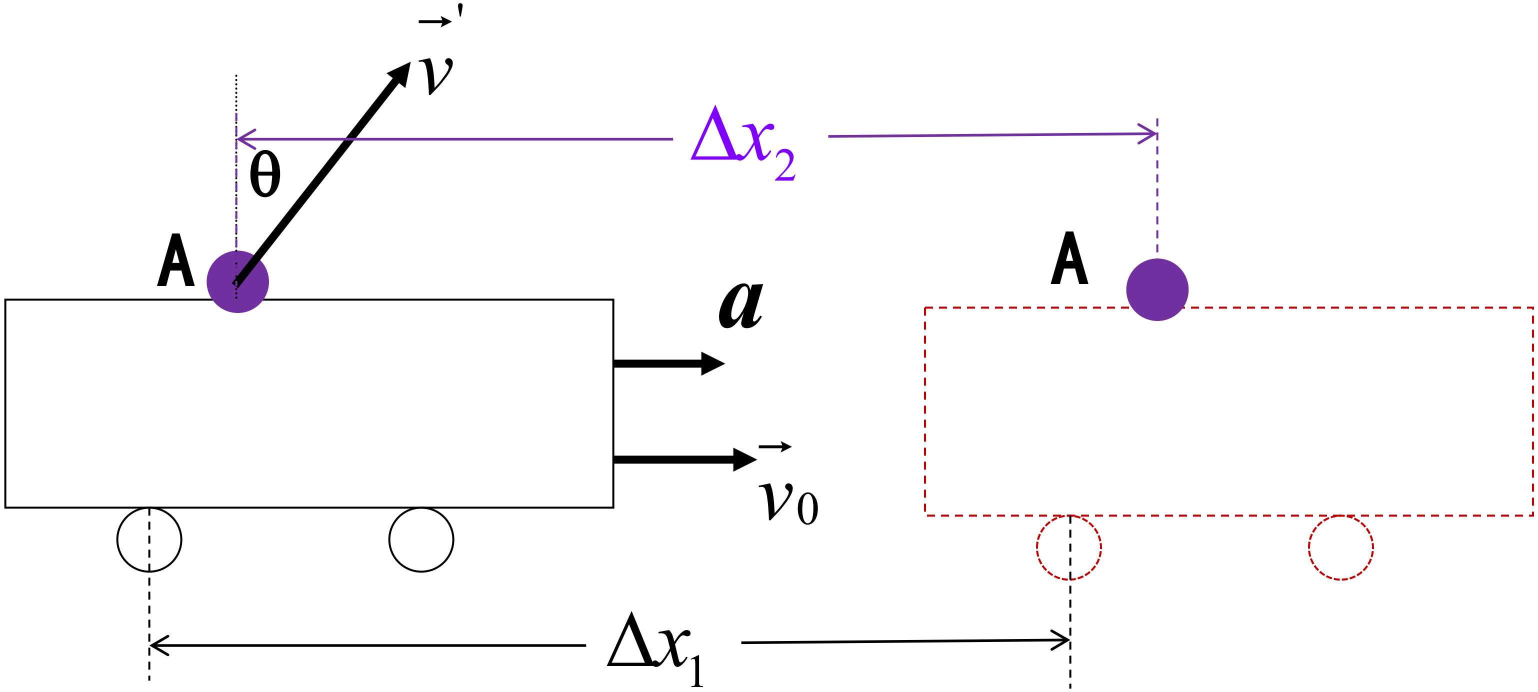
（2）以小车为参考系S'

雨滴的速度 $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{v}_0 = -10\vec{j}\text{-}20\vec{i}$

例7:

一男孩乘坐一铁路平板车，在平直铁路上匀加速行驶，其加速度为$\vec{a}$，他沿车前进的斜上方抛出一球，设抛球时对车的加速度的影响可以忽略，如果使他不必移动他在车中的位置就能接住球，则抛出的方向与竖直方向的夹角应为多大？

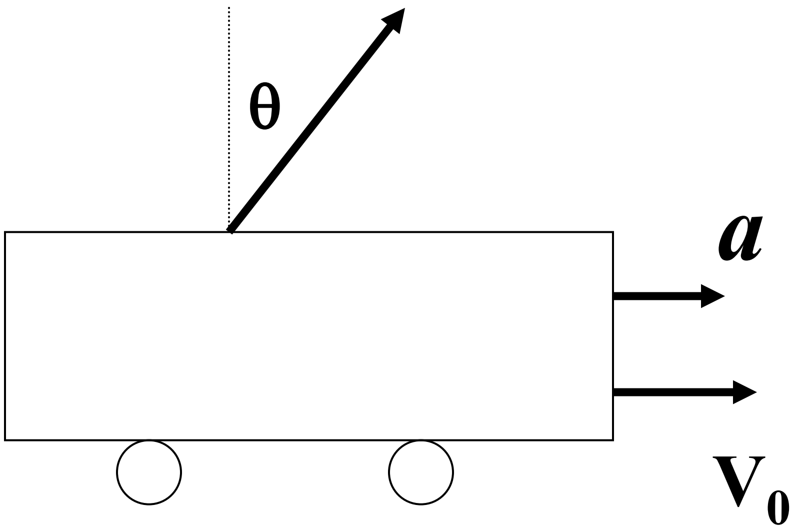




以地面为参考系

在抛出球的瞬间，
- 小车+小孩
  - 加速度 $\vec{a}_1 = a\vec{i}$
  - 初速度 $\vec{v}_0$
- 小球
  - 加速度 $\vec{a}_2 = -g\vec{j}$
  - 初速度 $\vec{v}_0 + \vec{v}\,'$

例3：一男孩乘坐一铁路平板车，在平直铁路上匀加速行驶，其加速度为a，他沿车前进的斜上方抛出一球，设抛球时对车的加速度的影响可以忽略，如果使他不必移动他在车中的位置就能接住球，则抛出的方向与竖直方向的夹角应为多大？



解：抛出后车的位移：

$$\Delta x_1 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

球的位移：

$$\Delta x_2 = (v_0 + v_0' \sin\theta) t$$

$$\Delta y_2 = (v_0' \cos\theta) t - \frac{1}{2} g t^2$$

小孩接住球的条件为：$\Delta x_1 = \Delta x_2$

$\Delta y = 0$

$$\frac{1}{2} a t^2 = v_0'(\sin\theta) t$$

$$\frac{1}{2} g t^2 = v_0'(\cos\theta) t$$

两式相比得：

$$\frac{a}{g} = \mathrm{tg}\,\theta$$

$$\theta = \mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{a}{g}\right)$$