教育4班 10184500426 孟婷宜.

例. 证明数列 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 与 $\{(1+\frac{1}{n})^{n+1}\}$ 都收敛且极限相同.

(利用伯努力不等式)用数学归纳法).

$(1+x)^n \geq 1+nx$, $x>-1$, $n=1,2,3\cdots$

证明: 1° $n=1$ 时, $1+x \geq 1+x$ 成立.

2° 假设 $n=k\,(k\in N^*)$ 时. 有 $(1+x)^k \geq 1+kx$

则当 $n=k+1$ 时.
$$\begin{aligned}(1+x)^{k+1} &= (1+x)(1+x)^k \\ &\geq (1+x)(1+kx) \\ &= 1+(k+1)x+kx^2 \\ &\geq 1+(k+1)x.\end{aligned}$$

即当 $n=k+1$ 时, 也成立.

由1°和2°得 $(1+x)^n \geq 1+nx\,(x>-1)$. $n=1,2,3\cdots$

证明: 令 $x_n=(1+\frac{1}{n})^n$, $y_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}$.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n}=\frac{[n(n+2)]^n(n+2)}{(n+1)^{2n}(n+1)}=\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n\cdot\frac{n+2}{n+1}$$
$$\geq\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right)\cdot\frac{n+2}{n+1}=\frac{n^3+3n^2+3n+2}{(n+1)^3}=\frac{(n+1)^3+1}{(n+1)^3}>1.$$

$\therefore \{x_n\}$ 单调递增. 有下界 $x_1=2$.

又
$$\frac{y_n}{y_{n+1}}=\frac{(1+\frac{1}{n})^{n+1}}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+2}}=\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2}\geq\left(1+\frac{n+1}{n(n+2)}\right)\cdot\frac{n+1}{n+2}$$
$$=\frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n}>1.$$

$\therefore \{y_n\}$ 单调递减. 有上界 $y_1=4$.

又 $2\leq x_n=\frac{y_n}{(1+\frac{1}{n})}<y_n\leq 4$

$\therefore \{x_n\}, \{y_n\}$ 均单调有界 即为收敛数列.

设 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=e$.

则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_n}{1+\frac{1}{n}}=\frac{e}{1}=e$.

$\therefore \{x_n\}, \{y_n\}$ 极限相同.

教育4班　10184500426　盛婷宜

书P31页课后作业：

5. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$

$=e^{2}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n}$

解：原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{-1}$

$=e\cdot 1$

$=e$

6. 设 $x_1=2$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)\ (n=1,2,\cdots)$ 证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限.

证明：$\because x_1=2$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)$

$\therefore x_n>0$.

$\therefore x_{n+1}\geq\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x_n\cdot\frac{1}{x_n}}=1\ (n=1,2,3\cdots)$ 又加上 $x_1=2$

可得 $x_n\geq 1$.

$\therefore x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_n}-x_n\right)\leq 0$

$\therefore\{x_n\}$ 单调递减.

且存在上界2，下界1. 是单调递减的有界数列.

$\therefore$ 得证 $\{x_n\}$ 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

$a=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$ 得 $a=1$

$\therefore$ 综上，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

7. 证明定理2.1.4

证明：$\because\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$.

$\therefore\forall\varepsilon$ $\exists N_1$，当 $n>N_1$ 时. $|x_n-a|<\varepsilon$

$\therefore a-\varepsilon<x_n$

又 $\exists N_2$，当 $n>N_2$ 时. $|y_n-a|<\varepsilon$

$\therefore a+\varepsilon>y_n$

令 $N=\max\{N_1,N_2\}$ 当 $n>N$ 时.

$a-\varepsilon<x_n\leq z_n\leq y_n<a+\varepsilon$.

$\therefore |z_n-a|<\varepsilon$.

$\therefore$ 得证 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$.