考研数学题库

HZ BOOKS 华章教育

（提高篇）

高等数学习题集

赵达夫　编著

机械工业出版社
China Machine Press

考研数学题库

高等数学习题集

（提高篇）

赵达夫 编著

机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题集(提高篇)/赵达夫编著. －北京：机械工业出版社，2002.4
(考研数学题库)
ISBN 7-111-10199-5

Ⅰ.高… Ⅱ.赵… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-习题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 023541 号

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
责任编辑：谢小梅
北京第二外国语学院印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
2002 年 4 月第 1 版第 1 次印刷
787mm×1092mm 1/16 · 15.5 印张

定 价：23.00 元

出版前言

由机械工业出版社华章教育会同北京大学数学学院等几所高校的名师策划、出版的考试数学系列丛书“考研题库”、“考研历年真题详解与考点分析”、“本科生题库”、“考研复习指导与典型例题分析”等共16本将陆续面世。这是为了帮助在校生和有志于攻读硕士学位的广大考生全面、系统地复习有关课程的内容，了解考研的最新信息而编写的一套题量较大、题型齐全、覆盖面广、难度及认知层次分布合理的系列丛书。本书的总体设计是在北京大学著名的命题专家指导下，根据教育部最新制定的“全国硕士研究生入学考试数学大纲”的有关要求，并结合作者多年来参加有关考试的命题、阅卷及辅导的经验而进行的。

本套丛书作者阵容强大

作者皆为北京大学、中国人民大学、北京理工大学、北方交通大学等多年从事数学基础教学以及参加过全国各地考研辅导的名师，具有丰富的教学经验，多次被评为各级优秀教师。他们所编写的教材、辅导书和讲授的课程在各校及历年参加研究生入学考试的考生中都有相当大的影响。

本套丛书体系明晰、内容精练

在“考研题库”中，包括《高等数学习题集(提高篇)》、《微积分习题集(提高篇)》、《线性代数习题集(提高篇)》、《概率论与数理统计习题集(提高篇)》四本。该系列题型丰富、数量充足、解析精辟，体现了作者们的专业素质，您不妨看看、练练。

在“考研历年真题详解与考点分析”中，也分为高等数学、微积分、线性代数、概率论与数理统计四本。该系列汇集考研的历年真题并有考点分析，使考生看后能紧密结合实战，安排复习详略。特色之处是没有按年代顺序，而是分门别类娓娓道来。

“复习指导与典型例题分析”同样分为四本。该系列注重基本概念、基本技能，是考试大纲的教材而非教学大纲的教材，为考生节省了时间。

“本科生题库”包括《高等数学习题集(基础篇)》、《微积分习题集(基础篇)》、《线性代数习题集(基础篇)》、《概率论与数理统计习题集(基础篇)》。该系列紧密结合教材，是本科生掌握基础知识、提高应用技巧的最佳工具书。

为了使学生通过一定数量题目的练习，便掌握解题方法与精髓，本书所选的题目打破过去习题集的形式，将题目分为填空题、多项选择题、解答题和证明题。

本系列丛书适合文、理科各个专业，特别是参加全国硕士研究生入学考试、自学考试及其他各类考试的需要，也适合各高等院校及成人高等专科教育各个专业教学辅导的需要。

我们相信，本系列丛书的出版，必将有助于广大在校生和有志于攻读硕士学位的考生开拓

思路，更好地理解和掌握有关的基本概念和基本的解题方法，培养逻辑推理能力及运用所学知识分析、解决实际问题的能力，并使得自己在这个过程中不断增强对考试的适应能力和通过考试的自信心，以便考出好成绩。

本系列丛书的出版要感谢为丛书提供资料的名师们，感谢他们付出的辛勤劳动。同时，欢迎广大师生就书中的问题提出不同见解。

机械工业出版社华章教育

2002 年 3 月

目录

第一章 函数、极限与连续

一、本章的重点内容与常见的典型题型

1. 本章的重点内容是极限，既要准确理解极限的概念和极限存在的充要条件，又要能正确求出各种极限.求极限的方法很多，在考试中常用的主要方法有：

(1) 利用极限的四则运算法则及函数的连续性；

(2) 利用两个重要极限，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e},$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1;$$

(3) 利用洛必达法则及泰勒公式求未定式的极限；

(4) 利用等价无穷小代替(常会使运算简化)；

(5) 利用夹逼定理；

(6) 先证明数列的极限存在(通常会用到“单调有界数列必有极限”的准则)，再利用关系式求出极限；

(7) 利用定积分求某些和式的极限；

(8) 利用导数的定义；

(9) 利用级数的收敛性证明数列的极限为零.

这里需要指出的是：题型与方法并不具有确定的关系，一种题型可以有几种计算的方法，一种方法也可能用于几种题型，有时在一个题目中要用到几种方法，所以还要具体问题具体分析，方法要灵活运用.

2. 由于函数的连续性是通过极限定义的，所以判断函数是否连续、判断函数的间断点类型等问题本质上仍是求极限，因此这部分也是重点.

3. 在函数这一部分内，重点是复合函数和分段函数以及函数记号的运算.

通过历年试题归类分析，本章常见的典型题型有：

1. 直接计算函数的极限值或给定函数极限值求函数表示式中的常数；

2. 讨论函数的连续性、判断间断点的类型；

3. 无穷小的比较；

4. 讨论连续函数在给定区间的零点,或讨论方程在给定区间有无实根;
5. 求分段函数的复合函数.

二、习　　题

(一) 填空题

1. 设 $f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)$, $g(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $f[g(x)]=$ ______, $g[f(x)]=$ ______.

2. 已知 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$ 且 $\varphi(x)\geqslant 0$, 则 $\varphi(x)=$ ______的定义域为______.

3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5}{5x+3}\sin\frac{2}{x}=$ ______.

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$, 则 $a=$ ______.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{x^{-2}}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 连续, 则 $a=$ ______.

6. 当 $x\to 0$ 时, 下列无穷小: $\ln(1+x)$, $x-\sin x$, $x\tan x$, $\frac{x^6}{1-\sqrt{\cos x^2}}$, $\frac{1}{\ln|x|}$ 中: ______是 x 的低阶无穷小; ______是 x 的一阶无穷小; ______是 x 的二阶无穷小; ______是 x^2 的高阶无穷小.

7. 设 $\alpha>0$, $\beta\neq 0$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^{2\alpha}+x^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}-x^2]=\beta$, 则 $(\alpha,\beta)=$ ______.

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{n}\right)=$ ______.

9. 在区间 $[0,1]$ 上函数 $f(x)=nx(1-x)^n$ 的最大值记为 $M(n)$. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}M(n)=$ ______.

10. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{x}{2}, & x>0,\\ a, & x=0,\\ \frac{\sin bx}{x}+cx, & x<0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导, 则常数 a,b,c 分别等于 ______, ______, ______.

(二) 选择题

1. 设 $f(x)=x\tan x\,e^{\sin x}$，则 $f(x)$ 是(　　).

(A) 偶函数；　(B) 无界函数；　(C) 周期函数；　(D) 单调函数.

2. 当 $x\to 1$ 时，函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限是(　　).

(A) 2；　(B) 0；

(C) ∞；　(D) 不存在但不为 ∞.

3. 设函数 $f(x)=\int_0^{1-\cos x}\sin(t^2)\mathrm{d}t$，$g(x)=\dfrac{x^5}{5}+\dfrac{x^6}{6}$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的(　　).

(A) 低阶无穷小；　(B) 高阶无穷小；

(C) 等价无穷小；　(D) 同阶但不等价的无穷小.

4. $x\to 0$ 时，$e^x-(ax^2+bx+1)$ 是比 x^2 高阶无穷小，则(　　).

(A) $a=\dfrac{1}{2}, b=1$；　(B) $a=1, b=1$；

(C) $a=-\dfrac{1}{2}, b=1$；　(D) $a=-1, b=1$.

5. 当 $x\to 0$ 时，下列 4 个无穷小阶数最高的是(　　).

(A) $\ln(1+x)-x+\dfrac{1}{2}x^2$；　(B) $\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}$；

(C) $x-\left(\dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{3}\cos x\right)\sin x$；　(D) $e^{x^4-x}-1$.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, & x>0,\\ x^2g(x), & x\leqslant 0,\end{cases}$ 其中 $g(x)$ 是有界函数，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

(A) 极限不存在；　(B) 极限存在，但不连续；

(C) 连续，但不可导；　(D) 可导.

7. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}\ln(1+x^3)\sin\dfrac{1}{x}, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ \dfrac{1}{x}\int_0^x\sin(t^2)\mathrm{d}t, & x>0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

(A) 极限不存在；　(B) 极限存在，但不连续；

(C) 连续，但不可导；　(D) 可导.

8. 设 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\dfrac{1}{|x|}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

(A) 不连续; (B) 连续但不可导;

(C) 可导但 $f'(x)$ 在 $x=0$ 不连续; (D) 可导且 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续.

9. 设常数 $a_i>0\ (i=1,2,3)$, $\lambda_1<\lambda_2<\lambda_3$. 则方程 $\dfrac{a_1}{x-\lambda_1}+\dfrac{a_2}{x-\lambda_2}+\dfrac{a_3}{x-\lambda_3}=0$ (　　).

(A) 没有根; (B) 正好有 1 个根;

(C) 正好有 2 个根; (D) 正好有 3 个根.

10. 设 $g(x)$ 在 $x=0$ 二阶可导, 且 $g(0)=g'(0)=0$. 并设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处(　　).

(A) 不连续; (B) 连续但不可导;

(C) 可导, 但导函数不一定连续; (D) 导函数连续.

(三) 解答题

1. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$;

(2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\dfrac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}$.

2. 求下列极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\sin\left(\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)\right)-\sin\left(\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right)\right]$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{a(\sin x-x)}{x^3}, & x>0,\\ \dfrac{1}{x}\left(2\sin x-\displaystyle\int_0^x\sin(t^2)\mathrm{d}t\right), & x<0,\end{cases}$ 问 a 为何值时 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在.

4. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-\displaystyle\int_0^{x^2}\cos(t^2)\mathrm{d}t}{\sin^{10}x}$.

5. 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x(1+t^2)e^{t^2-x^2}dt$.

6. 确定 a,b,c 的值，使$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\int_b^x\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}dt}=C\ (C\neq 0)$.

7. 设 $x\to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，求常数 a 之值.

8. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$，$x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sqrt{1+\dfrac{i}{n^2}}-1\right)$.

9. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\dfrac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\dfrac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$.

10. 设 $a>0$，数列$\{a_n\}$满足$\begin{cases}a_0>0,\\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{a}{a_n}\right),\end{cases}$ $n=0,1,2,\cdots$. 求 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$.

11. 设 $f(x)$ 是区间$[0,+\infty)$上单调减少且非负的连续函数，$a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)dx$，$(n=1,2,\cdots)$，证明数列$\{a_n\}$的极限存在.

12. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 1,\\ 1-x, & x>1,\end{cases}$ $g(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 2,\\ 2(x-1), & 2<x\leqslant 5,\\ x+3, & x>5.\end{cases}$ 讨论 $y=f(g(x))$ 的连续性，若有间断点并指出类型.

13. 求函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}$ 在区间$(0,2\pi)$内的间断点，并判断其类型.

14. 求极限$\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$，记此极限为 $f(x)$，求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

15. 设 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$连续，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A>0$，求证：

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt=+\infty$；

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f(nx)dx=A$.

16. 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，$f(a)=f(b)$，证明：至少存在 $x_0\in[a,b]$，使

$$f(x_0)=f\left(x_0+\frac{b-a}{2}\right).$$

17. 以$[x]$表示不超过 x 的最大整数，试确定常数 a 的值，使 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}+a[x]\right]$ 存

在,并求出此极限.

18. 设 $G'(x)=e^{-x^2}$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}G(x)=0$,求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_0^x t^2G(t)dt$.

19. (1) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt$;

(2) 证明 $f(x)=xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt$ 在$(-\infty,+\infty)$上有界.

三、习题的解答与分析

(一) 填空题

1. 应填:$f[g(x)]=\begin{cases}e^{-x}, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$ $g[f(x)]=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

分析 由 $g(x)\geqslant 0$,

$$f[g(x)]=\frac{1}{2}[g(x)+|g(x)|]=g(x)=\begin{cases}e^{-x}, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0.\end{cases}$$

由 $f(x)\geqslant 0$,

$$g[f(x)]=f^2(x)=\begin{cases}x^2, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

评注 本题主要考查分段函数的复合.要求两个分段函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 的复合函数 $y=f[\varphi(x)]$,实际上就是将 $u=\varphi(x)$ 代入 $y=f(u)$.而这里的关键是要搞清 $u=\varphi(x)$ 的函数值 $\varphi(x)$ 落在 $y=f(u)$ 的定义域的哪一部分.

2. 应填:$\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$, $x\leqslant 0$.

分析 由 $f(x)=e^{x^2}$ 知,$f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}=1-x$,又 $\varphi(x)\geqslant 0$,则 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$,$x\leqslant 0$.

评注 本题主要考查函数的复合.

3. 应填:$\frac{6}{5}$.

分析 本题在经过倒数变换后,再利用重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 求极限.令 $x=\frac{1}{t}$,则 $x\to\infty$ 时,$t\to 0$,所以

$$原式=\lim_{t\to 0}\frac{3+5t^2}{5+3t}\cdot\frac{\sin 2t}{t}=\frac{6}{5}.$$

本题也可以利用等价无穷小，$\sin\dfrac{2}{x} \sim \dfrac{2}{x}$　$(x \to \infty)$ 求解.

$$原式 = \lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2+5)}{(5x+3)}\cdot\frac{2}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+10}{5x^2+3x} = \frac{6}{5}.$$

4. 应填：ln2.

分析　由重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$ 确定 a.

$$原式 = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{\frac{3ax}{x-a}} = e^{3a} = 8,$$

所以
$$3a = \ln 8 = 3\ln 2,\quad a = \ln 2.$$

5. 应填：$e^{-\frac{1}{2}}$.

分析　由连续性定义知

$$a = f(0) = \lim_{x\to 0}f(x) = \lim_{x\to 0}(\cos x)^{x^{-2}} = \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}\right)$$

$$= \exp\left(\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{(\cos x)2x}\right) = e^{-\frac{1}{2}}.$$

6. 应填：$\dfrac{1}{\ln|x|}$，$\ln(1+x)$，$x\tan x$ 或 $\dfrac{x^6}{1-\sqrt{\cos x^2}}$，$x-\sin x$.

分析　由

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\dfrac{1}{\ln|x|}} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln|x|}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0,$$

知 $\dfrac{1}{\ln|x|}$ 是 x 的低阶无穷小.

由 $\ln(1+x) \sim x$ $(x\to 0)$ 知 $\ln(1+x)$ 是 x 的一阶无穷小.

由

$$1-\sqrt{\cos x^2} = \frac{1-\cos x^2}{1+\sqrt{\cos x^2}} \sim \frac{1}{4}x^4\quad (x\to 0),$$

从而 $\dfrac{x^6}{1-\sqrt{\cos x^2}}$ 是 x 的$(6-4=2)$二阶无穷小.

由

$$x - \sin x = \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)\quad (x\to 0),$$

则 $x-\sin x$ 是 x^2 高阶无穷小.

由 $\tan x \sim x$ 是 x 的一阶无穷小，则 $x\tan x$ 是 x 的二阶无穷小$(x\to 0)$.

7. 应填：$\left(2,\frac{1}{2}\right)$.

分析 通过变量替换化成$\frac{0}{0}$型后用洛必达法则或作适当变形后用泰勒公式求解.

解法一 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left[\left(1+\frac{1}{x^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}-1\right]\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim\limits_{t\to0}\frac{(1+t^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}-1}{t^2}$

$$=\lim_{t\to0}\frac{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{1}{\alpha}t^{\alpha-2}=\frac{1}{\alpha}\lim_{t\to0}t^{\alpha-2}=\begin{cases}0, & \alpha>2,\\ \frac{1}{2}, & \alpha=2,\\ \infty, & \alpha<2.\end{cases}$$

因为 $\alpha>0,\beta\neq0$，所以$(\alpha,\beta)=\left(2,\frac{1}{2}\right)$.

解法二 原式 $=x^2\left[\left(1+\frac{1}{x^\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}-1\right]=x^2\left[1+\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{x^\alpha}+o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)-1\right]$

$$=x^2\left[\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{x^\alpha}+o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)\right]=x^{2-\alpha}\left[\frac{1}{\alpha}+O(1)\right]\quad(x\to+\infty),$$

由此得

$$(\alpha,\beta)=\left(2,\frac{1}{2}\right).$$

8. 应填：e^4.

分析

$$原式=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1+\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right]^n=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right]^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1+\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right]^{\frac{1-\tan\frac{2}{n}}{2\tan\frac{2}{n}}\cdot\frac{2n\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}}=e^4.$$

9. 应填：e^{-1}.

分析 由于

$$f'(x)=n(1-x)^{n-1}[1-(n+1)x],$$

令 $f'(x)=0$，得 $x=\frac{1}{n+1}$. 又因为 $f(0)=f(1)=0$，所以

$$M(n)=f\left(\frac{1}{n+1}\right)=\frac{n}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}M(n)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}=e^{-1}.$$

10. 应填：1, 1, 0.

分析 由 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，可得

$$f(0^{+})=a=\lim_{x\to 0^{+}}f(x)=\lim_{x\to 0^{+}}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}+\frac{x}{2}\right]=1,$$

$$f(0^{-})=\lim_{x\to 0^{-}}\left[\frac{\sin bx}{x}+cx\right]=b.$$

所以 $b=a=1, f(0)=1$.

$$f'_{+}(0)=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{\dfrac{\ln(1+x)}{x}+\dfrac{x}{2}-1}{x}=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{2\ln(1+x)+x^{2}-2x}{2x^{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{2x-x^{2}+o(x^{2})+x^{2}-2x}{2x^{2}}=0.$$

$$f'_{-}(0)=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{\dfrac{\sin x}{x}+cx-1}{x}=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{\sin x+cx^{2}-x}{x^{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{\sin x-x}{x^{2}}+c=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{\cos x-1}{2x}+c=c.$$

所以 $c=0$. 故 $a=1, b=1, c=0$.

(二) 选择题

1. 应选(B).

分析 (排除法) 由于 $f(-x)=x\tan x e^{-\sin x}\neq f(x)$，当 $\sin x\neq 0$ 时，$f(x)$ 不是偶函数. 由于 $f(0)=f(\pi)=0$ 知 $f(x)$ 不是单调函数，又 $f(x)$ 也不是周期函数，因此选(B).

(直接法) 由于 $e^{\sin x}\geqslant e^{-1}$ 及 $x\tan x$ 无界可以推出 $f(x)$ 无界. 因为 $x\tan x$ 无界，则 $\forall M>0$, $\exists x_0\in$ 定义域，$|x_0\tan x_0|>Me$，进而 $|f(x_0)|=|x_0\tan x_0 e^{\sin x_0}|\geqslant Me\cdot e^{-1}=M$.

评注 研究生入学考试数学试卷中的选择题是单项选择题. 所谓单项选择题也就是四个选项中有且仅有一个选项是正确的. 因此，常用的解题方法是两大类：一种是直接验证某个选项正确，则其余选项必定不正确(不必验证). 这种方法叫直接法；另一种方法是验证其中三个选项不正确，则剩下的一个选项必定正确(也不必验证)，这种方法通常称作排除法.

直接法就是直接验证某个选项正确，通常有两种途径，一种是通过直接计算或推演得出某个选项正确，这种方法通常称为推演法；另一种方法是借助几何分析得出正确选项，这种方法叫几何法. 而排除法在使用时通常是举反例.

2. 应选(D).

分析 对这一类题目，一般是考察函数在该点的左、右极限. 因为左、右极限都存在且相等，是函数极限存在的充要条件.

由于

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1^+}2e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1^-}2e^{\frac{1}{x-1}}=0.$$

所以只有(D)是正确的.

评注 本题主要考查函数在一点的左、右极限.这里应特别注意的是 $\lim\limits_{x\to1^+}e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$,而 $\lim\limits_{x\to1^-}e^{\frac{1}{x-1}}=0$.本题的函数由两个因式相乘而得,其中 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$,故因式 $e^{\frac{1}{x-1}}$ 是关键部分.所以解题中要善于抓住关键部分,才能提高效率.

3. 应选(B).

分析 多次利用洛必达法则,并利用 $\sin x\sim x\ (x\to0)$,求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}$.

由于

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{(\sin x)\cdot\sin(1-\cos x)^2}{x^4+x^5}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(1-\cos x)^2}{x^3+x^4}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)^2}{x^3+x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{x^3+x^4}=\frac{1}{4}\lim_{x\to0}\frac{x}{1+x}=0,$$

因此选(B).

评注 以上运算中,考察了求积分上限函数的导数,

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^{\varphi(x)}f(t)dt\right]=(f[\varphi(x)])\varphi'(x).$$

4. 应选(A).

分析 将 e^x 的麦克劳林展开式代入(因原式的 x^2 高阶无穷小,所以展开到二阶即可).

$$e^x-(ax^2+bx+1)=1+x+\frac{1}{2!}x^2+o(x^2)-ax^2-bx-1$$

$$=(1-b)x+\left(\frac{1}{2}-a\right)x^2+o(x^2),\quad x\to0,$$

由于原式是比 x^2 高阶的无穷小,所以 $a=\frac{1}{2}$,$b=1$.

5. 应选(C).

分析 由于

$$\ln(1+x)-x+\frac{1}{2}x^2=\frac{1}{3}x^3+o(x^3),$$

$$\sqrt{1+2x}-\sqrt[3]{1+3x}=1+x+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}(2x)^2+o_1(x^2)$$

$$-\left[1+x+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}(3x)^2+o_2(x^2)\right]$$

$$=\frac{1}{2}x^2+o(x^2),$$

$$x-\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\cos x\right)\sin x=x-\left[\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2!}x^2+o_1(x^2)\right)\right]\cdot\left[x-\frac{1}{6}x^3+o_2(x^3)\right]$$

$$=o(x^3),$$

$$e^{x^4-x}-1\sim x^4-x\sim -x.$$

可见应选(C).

6. 应选(D).

分析 由一元函数性质，若能首先判定 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导，则(A)，(B)，(C) 均被排除.

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x^{3/2}}=0,$$

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2g(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}xg(x)=0,$$

所以 $f'(0)=0$. 选(D).

评注 本题考查了函数极限、连续、可导性等重要知识点.

7. 应选(C).

分析 由

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2}\ln(1+x^3)\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3}{x^2}\sin\frac{1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^-}x\sin\frac{1}{x}=0, \qquad (*)$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\int_0^x\sin t^2\mathrm{d}t=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x^2}{1}=0.$$

因此 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)=0$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续.

又因为

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\sin\frac{1}{x}$$

不存在，由此得出 $f(x)$ 在 $x=0$ 不可导，选(C).

评注 1° 本题考查了分段函数在分段点处极限及导数的求法；函数的可导与连续的关系，即函数在一点连续未必在该点可导；无穷小之间的等价：当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$ 等；无穷小量与有界量的乘积是无穷小量.

2° 注意(＊)式计算时，容易犯的错误是：

$$\lim_{x\to 0^-} x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0^-}x\cdot\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}=0,$$

上式运算不符合极限运算法则.

8. 应选(D).

分析 先考察 $f(x)$ 在 $x=0$ 是否可导.若不可导,再考察在 $x=0$ 处是否连续.若可导,则进一步求 $f'(x)$,考察 $f'(x)$ 在 $x=0$ 是否连续.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\arctan\frac{1}{|x|}=\frac{\pi}{2}.$$

$x>0$ 时,

$$f'(x)=\arctan\frac{1}{x}+x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\arctan\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}.$$

$x<0$ 时,

$$f'(x)=-\arctan\frac{1}{x}+\frac{x}{1+x^2}.$$

所以

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\frac{\pi}{2}=f'(0),$$

即 $f'(x)$ 在 $x=0$ 连续,选(D).

9. 应选(C).

分析 记

$$f(x)=\frac{a_1}{x-\lambda_1}+\frac{a_2}{x-\lambda_2}+\frac{a_3}{x-\lambda_3},$$

易知 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为 $f(x)$ 的三个无穷间断点.除这三个点外均有 $f'(x)<0$.又当 $x<\lambda_1$ 时 $f(x)<0$,故区间 $(-\infty,\lambda_1)$ 内 $f(x)=0$ 没有根.

又因为

$$f(\lambda_1^+)=\lim_{x\to\lambda_1^+}f(x)=+\infty,\quad f(\lambda_2^-)=\lim_{x\to\lambda_2^-}f(x)=-\infty,$$

所以在 (λ_1,λ_2) 内 $f(x)=0$ 有且仅有一个根.类似可知在 (λ_2,λ_3) 内 $f(x)=0$ 也有且仅有一个根,$(\lambda_3,+\infty)$ 内没有根,故选(C).

10. 应选(D).

分析 $$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=g'(0)=0,$$

因为 $f(0)=0$,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(三) 解答题

1. (1) **解** 恒等变形:分子分母同乘 $\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x}$,得

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x(1-\cos x)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x(1-\cos x)} = \frac{1}{2}.$$

(2) **解**　恒等变形：分子、分母同除 $-x$ ($x<0$, $-x=|x|=\sqrt{x^2}$)，得

$$原式 = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}-1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{\sin x}{x^2}}} = \frac{2-1}{1} = 1.$$

(3) **解**　恒等变形：分子分母同除 x，得

$$原式 = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{3\times\frac{\sin x}{x}+x\cos\frac{1}{x}}{\frac{\ln(1+x)}{x}} = \frac{3}{2}.$$

评注　1°　几题均是作简单恒等变形后消去极限为 0 或 ∞ 的因子，或直接相消或等价无穷小取极限后相消.

2°　几题均为$\frac{0}{0}$型或$\frac{\infty}{\infty}$型的极限，有的也可用洛必达法则，但并不简单. 而题(3)不能用洛必达法则，因为 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}\right)'}{(x)'}$ 的极限不存在.

2. (1) **解**　属 $\infty-\infty$ 型，先化成$\frac{0}{0}$型，即

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x}$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} \xlongequal{*} 2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}x^3+o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

评注　第二步我们做等价无穷小因子替换与恒等变形. 最后一步用洛必达法则可求出结果，而这里(*)用了 $\sin x$ 的泰勒展开式：

$$x-\sin x = x-\left(x-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)\right) = \frac{1}{6}x^3+o(x^3),\quad x\to 0.$$

(2) **解**　注意 $\sin t\sim t$, $\ln(1+t)\sim t$ $(t\to 0)$，于是

$$\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)\sim\frac{k}{x},$$

$$\sin\left(\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)\right)\sim\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)\sim\frac{k}{x}\quad(x\to\infty).$$

因此，利用等价无穷小因子替换我们可得：

$$原式 = \lim_{x\to\infty}x\sin\left(\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)\right)-\lim_{x\to\infty}x\sin\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} x \cdot \frac{3}{x} - \lim_{x\to\infty} x \cdot \frac{1}{x} = 2.$$

(3) **分析** 求 $1^\infty, 0^0, \infty^0$ 型的极限 $\lim[f(x)]^{g(x)}$ 均化为求 $\lim g(x)\ln f(x)$, $(0\cdot\infty$ 型$)$ 再化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型. 本题是 1^∞ 型.

解 $$\lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)\right]=\lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(1+\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)\right)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}\xlongequal{t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to0}\frac{\sin 2t}{t}+\lim_{t\to0}\frac{\cos t-1}{t}=2.$$

所以, $$原式 = e^2.$$

小结 几个重要等价无穷小, $x\to0$ 时

$$\sin x\sim x,\quad \ln(1+x)\sim x,\quad \tan x\sim x,\quad \arcsin x\sim x,$$

$$e^x-1\sim x,\quad \arctan x\sim x,\quad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\quad a^x-1\sim x\ln a,$$

$$(1+\beta x)^\alpha-1\sim\alpha\beta x.$$

解题思路

1° 恒等变形;

2° 洛必达法则;

3° 用泰勒公式,若

$$f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0,$$
$$f^{(n)}(a)\neq0,$$

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x-a)^n+o((x-a)^n)$$

$$=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o((x-a)^n),\quad (x\to a).$$

4° 变量替换(等价无穷小)与重要极限.

3. **分析** 分别求左、右极限 $f(0^+)$ 与 $f(0^-)$, 由 $f(0^+)=f(0^-)$ 定出 a 的值.

解 $$f(0^+)=\lim_{x\to0^+}\frac{a(\sin x-x)}{x^3}=\lim_{x\to0^+}\frac{a(\cos x-1)}{3x^2}=-\frac{a}{6},$$

$$f(0^-)=\lim_{x\to0^-}\frac{2\sin x}{x}-\lim_{x\to0^-}\frac{\left[\int_0^x\sin(t^2)\mathrm{d}t\right]'}{(x)'}=2-\lim_{x\to0^-}\sin(x^2)=2.$$

由 $f(0^+)=f(0^-)$, 得 $-\frac{a}{6}=2$, 即 $a=-12$. 因此, 仅当 $a=-12$ 时, $\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在且为 2.

4. **解** 先做变量替换,再用洛必达法则

$$原式\xlongequal{S=x^2}\lim_{S\to 0}\frac{S-\int_0^S\cos(t^2)\mathrm{d}t}{S^5}=\lim_{S\to 0}\frac{1-\cos(S^2)}{5S^4}$$

$$=\lim_{S\to 0}\frac{\frac{1}{2}S^4}{5S^4}=\frac{1}{10}.$$

评注　若 $f(x)$ 连续，又

$$\lim_{x\to 0}\varphi(x)=0,$$

则

$$\lim_{x\to 0}\int_0^{\varphi(x)}f(t)\mathrm{d}t=0.$$

由此容易知道此题中极限属 $\frac{0}{0}$ 型.

5. **分析**　用洛必达法则求解即可，但对于变上限积分，先要把 e^{-x^2} 提出积分号外面再求导.

解

$$原式=\lim_{x\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x(1+t^2)\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\int_0^x(1+t^2)\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{x\mathrm{e}^{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(1+x^2)\mathrm{e}^{x^2}}{(1+2x^2)\mathrm{e}^{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

6. **分析**　当 $x\to 0$ 时，$ax-\sin x\to 0$ 且原式极限存在不为零. 故

$$\lim_{x\to 0}\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t=0. \qquad (*)$$

若 $b>0$，则在 $(0,b]$ 内 $\frac{\ln(1+t^3)}{t}>0$；若 $b<0$，则在 $[b,0)$ 内 $\frac{\ln(1+t^3)}{t}>0$，式 $(*)$ 均不成立，因此 b 必为零. 确定了 b 之后，可再由洛必达法则确定 a,c.

解　由于 $x\to 0$ 时，$ax-\sin x\to 0$，且

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=C\neq 0.$$

故

$$b=0.$$

再由洛必达法则：

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\int_0^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\frac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2},$$

若 $a\neq 1$，则上式为 ∞ 与条件不符，故 $a=1$，从而再用洛必达法则（或等价无穷小代换），得

$C=\frac{1}{2}$.

评注 要看清 $\lim\limits_{x\to0}\int_b^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}dt=0$.因分子趋于0且有非0极限 C,故必是$\frac{0}{0}$型极限.

7. **解** 由于

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}a=1,$$

所以
$$a=-\frac{3}{2}.$$

8. **分析** 利用夹逼法求极限.

解 作恒等变形后再作放大与缩小.

$$x_n=\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{i}{n^2}}+1},$$

注意
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i=\frac{n+1}{2n},$$

于是:
$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\cdot\frac{2n+1}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\leqslant x_n\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\frac{i}{n^2}}{2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{n+1}{n}.$$

又
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\cdot\frac{n+1}{2n}\right)=\frac{1}{4},\quad\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{4},$$

因此
$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\frac{1}{4}.$$

9. **分析** 求解这种类型的题一般有两种方法,一是夹逼定理,二是化成积分和式,但本题是两种方法的结合,先用夹逼定理,而夹逼的左、右两边再化成积分和式.

解 由于

$$\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}<\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}<\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n},$$

所以
$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}<\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n},$$

而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}\right)=\frac{2}{\pi}.$$
于是由夹逼定理推知
$$\text{原式}=\frac{2}{\pi}.$$

10. **解**　(1) 递归方程的极限方程是
$$A=\frac{1}{2}\left(A+\frac{a}{A}\right),$$
解之取正根得 $A=\sqrt{a}$.

(2) 考察 a_n 与$\sqrt{a}$ 的大小，利用算术平均值大于或等于几何平均值公式知：
$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a}{a_n}\right)\geqslant\sqrt{a_n\cdot\frac{a}{a_n}}=\sqrt{a}\quad(n=0,1,2,\cdots).$$
或
$$a_{n+1}-\sqrt{a}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a}{a_n}\right)-\sqrt{a}=\frac{(a_n-\sqrt{a})^2}{2a_n}\geqslant 0\quad(n\geqslant 0).$$

(3) 证明$\{a_n\}$ 单调下降(由(2) 结论，才能自然提出这个问题).
$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{a}{a_n}\right)-a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a_n}-a_n\right)$$
$$=\frac{1}{2a_n}(a-a_n^2)\leqslant 0\quad(n\geqslant 1).$$
故$\{a_n\}$ $(n\geqslant 1)$ 单调下降.

(4) 由(2) 结论，$\{a_n\}$ 有下界，即
$$a_n\geqslant\min\{a_0,\sqrt{a}\},\quad n=0,1,2,\cdots.$$
所以
$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\sqrt{a}.$$

评注　本题的做法中数$\sqrt{a}$ 是至关重要的，它引导你去估计论证 $a_n\geqslant\sqrt{a}$，指引你去考察$\{a_n\}$ 单调下降，并证明它. 所以对递归数列，我们不妨按下列步骤去做：

(1) 将递归数列方程取极限，解这个极限方程式，找一个合适的 A.

(2) 考察 a_n 与 A 的大小关系(通常用归纳法).

(3) 根据 a_n 与 A 的大小关系，考察$\{a_n\}$ 的单调性.

(4) 考察$\{a_n\}$ 的有界性.

上面四步都解决之后，立即得结论 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=A$.

注意　递归数列 $a_{n+1}=f(a_n)$ 的单调性与函数 $f(x)$ 的单调性有关.

11. **分析**　证明一个数列极限存在的常用办法是利用"单调有界数列存在极限" 的准则.

因此,本题应分别证明数列$\{a_n\}$是单调下降和有下界的.

证 由题设得

$$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant f(k) \quad (k = 1,2,\cdots),$$

因此

$$\begin{aligned} a_n &= \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\left[f(k) - \int_k^{k+1} f(x)\mathrm{d}x\right] + f(n) \geqslant 0, \end{aligned}$$

即数列$\{a_n\}$有下界.又

$$a_{n+1} - a_n = f(n+1) - \int_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

即数列$\{a_n\}$单调下降,故由单调有界数列必有极限的准则知数列$\{a_n\}$的极限存在.

评注 本题是1999年数学二试题,其中有66%的考生得零分,仅有7.5%的考生得满分.本题证明中出现的主要问题是部分考生证明了数列$\{a_n\}$单调下降而未能证明$a_n \geqslant 0$.

12. **解法一** 先写出$f[g(x)]$的表达式,考察$g(x)$的值域:

$$g(x) = \begin{cases} \leqslant 1, & x \leqslant 1, \\ > 1, & x > 1, \end{cases} \quad f[g(x)] = \begin{cases} g^2(x), & x \leqslant 1, \\ 1 - g(x), & x > 1. \end{cases}$$

即

$$f[g(x)] = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 1, \\ 1 - x, & 1 < x \leqslant 2, \\ 1 - 2(x-1), & 2 < x \leqslant 5, \\ 1 - (x+3), & x > 5. \end{cases}$$

亦即

$$f[g(x)] = \begin{cases} x^2, & x \leqslant 1, \\ 1 - x, & 1 < x \leqslant 2, \\ 3 - 2x, & 2 < x \leqslant 5, \\ -(x+2), & x > 5. \end{cases}$$

当$x \neq 1,2,5$时,$f[g(x)]$分别在不同的区间与某初等函数相同,故连续.

当$x = 2,5$时,分别由左、右连续得连续.

当$x = 1$时,

$$\lim_{x\to 1^+} f[g(x)] = \lim_{x\to 1^+} (1-x) = 0,$$
$$\lim_{x\to 1^-} f[g(x)] = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1.$$

从而$f[g(x)]$在$x = 1$不连续,且是第一类间断点(跳跃间断点).

解法二 注意

$$u=g(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 2,\\ 2(x-1), & 2<x\leqslant 5,\\ x+3, & x>5.\end{cases}$$

从而 $g(x)$ 处处连续,

$$y=f(u)=\begin{cases}u^2, & u\leqslant 1,\\ 1-u, & u>1.\end{cases}$$

当 $u\neq 1$ 时连续,由复合函数连续性可知,当 $g(x)\neq 1$,即 $x\neq 1$ 时 $f[g(x)]$ 连续.对 $x=1$,有:

$$\lim_{x\to 1^+}f[g(x)]\xlongequal{g(x)=x}\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(1-x)=0,$$

$$\lim_{x\to 1^-}f[g(x)]\xlongequal{g(x)=x}\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}x^2=1.$$

从而 $x=1$ 为 $f[g(x)]$ 的第一类间断点(跳跃间断点).

13. **解**　$f(x)=e^{\frac{x}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\ln(1+x)}$ 是初等函数,在 $(0,2\pi)$ 内 $f(x)$ 有定义处均连续,仅在 $\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 无定义处及 $\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$ 处 $f(x)$ 不连续.

在 $(0,2\pi)$ 内 $\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ 无定义的点是: $x=\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$; $\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$ 的点是: $x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$. 所以 $f(x)$ 的间断点是: $x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$.

为判断间断点类型,考察间断点处的极限:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^+}f(x)=+\infty,\qquad \lim_{x\to\frac{5\pi}{4}^+}f(x)=+\infty,$$

则 $x=\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}$ 是第二类间断点(无穷型).

又 $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to\frac{7\pi}{4}}f(x)=1$,则 $x=\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$ 是第一类间断点(可去型的).

14. **解**

$$f(x)=\lim_{t\to x}\left(\frac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}=\lim_{t\to x}\left(1+\frac{\sin t-\sin x}{\sin x}\right)^{\frac{\sin x}{\sin t-\sin x}\cdot\frac{x}{\sin x}}=e^{\frac{x}{\sin x}}.$$

函数 $\sin x$ 的零点: $x=0,k\pi(k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 即为 $f(x)$ 的间断点.

当 $x=0$ 时,由于

$$\lim_{x\to 0}f(x)=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}}=e,$$

所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类(可去)间断点;

当 $x=k\pi\ (k=\pm1,\pm2,\cdots)$ 时,由于

$$\lim_{x\to 2k\pi^+} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to 2k\pi^-} f(x)=0,$$
$$\lim_{x\to (2k+1)\pi^-} f(x)=+\infty,\quad \lim_{x\to (2k+1)\pi^+} f(x)=0,$$

所以 $x=k\pi\ (k=\pm 1,\pm 2,\cdots)$ 是 $f(x)$ 的第二类(无穷)间断点.

15. **证** (1) 因 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A>\dfrac{A}{2}$, 由极限的不等式性质可知, $\exists X>0$, 当 $x>X$ 时有 $f(x)>\dfrac{A}{2}$, 则 $x>X$ 时, 有

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^X f(t)\mathrm{d}t+\int_X^x f(t)\mathrm{d}t\geqslant\int_0^X f(t)\mathrm{d}t+\frac{A}{2}(x-X),$$

因此
$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=+\infty.$$

(2) 作变量替换:

$$\int_0^1 f(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\int_0^1 f(nx)\mathrm{d}(nx)\xlongequal{nx=t}\frac{1}{n}\int_0^n f(t)\mathrm{d}t,$$

这是$\dfrac{\infty}{\infty}$型数列的极限.所以

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f(nx)\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\int_0^n f(t)\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to+\infty} f(x)=A.$$

16. **分析** 这是一道应用介值定理的典型题.

证法一 令

$$F(x)=f(x)-f\left(x+\frac{b-a}{2}\right),$$

则 $F(x)$ 在$\left[a,\dfrac{b+a}{2}\right]$上连续,且

$$F(a)=f(a)-f\left(\frac{a+b}{2}\right),\quad F\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(b).$$

由 $f(a)=f(b)$ 知,若 $f(a)=f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$,则取 $x_0=a\left(\text{或 } x_0=\dfrac{a+b}{2}\right)$,命题已证.

若 $f(a)=f(b)\neq f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$, 则 $F(a)\cdot F\left(\dfrac{a+b}{2}\right)<0$. 由介值定理, 存在 $x_0\in\left(a,\dfrac{a+b}{2}\right)$,使 $F(x_0)=0$,即

$$f(x_0)=f\left(x_0+\frac{b-a}{2}\right).$$

证法二 设 $F(x)$ 在$\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right]$上无零点,则 $F(x)$ 在此区间上不变号,不妨设 $F(x)>0$,这时取 $x=a$,得

$$F(a)=f(a)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)>0,$$

再取 $x=\dfrac{a+b}{2}$，得

$$F\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(b)>0,$$

由此得：
$$f(a)>f\left(\frac{a+b}{2}\right)>f(b),$$

与已知 $f(a)=f(b)$ 矛盾.所以存在 $x_0\in\left(a,\dfrac{a+b}{2}\right)$，使 $F(x_0)=0$，即

$$f(x_0)=f\left(x_0+\frac{b-a}{2}\right).$$

17. **解**
$$\lim_{x\to0^-}\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}\xlongequal{u=\frac{1}{x}}\lim_{u\to-\infty}\frac{\dfrac{2e^{2u}}{1+e^{2u}}}{\dfrac{e^u}{1+e^u}}=0.$$

又
$$\lim_{x\to0}a[x]=-a,$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+e^{\frac{2}{x}})}{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}=\lim_{u\to+\infty}\frac{2e^u(1+e^u)}{1+e^{2u}}=2,$$

$$\lim_{x\to0^+}a[x]=0,$$

所以，当且仅当 $a=-2$ 时，该极限存在，且极限为 2.

18. **解**

$$\begin{aligned}\int_0^x t^2G(t)dt&=\frac{1}{3}t^3G(t)\Big|_0^x-\frac{1}{3}\int_0^x t^3G'(t)dt\\&=\frac{1}{3}x^3G(x)-\frac{1}{3}\int_0^x t^3e^{-t^2}dt=\frac{1}{3}x^3G(x)-\frac{1}{6}\left[\int_0^x t^2e^{-t^2}d(t^2)\right]\\&=\frac{1}{3}x^3G(x)+\frac{1}{6}[x^2e^{-x^2}+e^{-x^2}-1],\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\int_0^x t^2G(t)dt&=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3}x^3G(x)-\frac{1}{6}=-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{G'(x)}{-3x^4}\\&=-\frac{1}{6}-\frac{1}{9}\lim_{x\to+\infty}x^4e^{-x^2}=-\frac{1}{6}\quad(\text{后一项用洛必达法则}).\end{aligned}$$

19. (1) **分析**　本题属于 $0\cdot\infty$ 型不定式，将它化为 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式，再利用洛必达法则计算.

解 利用洛必达法则：

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt = \lim_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x e^{t^2}dt}{\frac{1}{x}e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{2e^{x^2}-\frac{1}{x^2}e^{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

评注 对于 $0\cdot\infty$ 型不定式要根据具体题目化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型.本题如果化为 $\frac{0}{0}$ 型计算就很复杂.

(2) **分析** 可以证明 $f(x)$ 是偶函数，因此只需证明 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界.要证明连续函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界，关键要找到常数 $A>0$，设法证 $f(x)$ 在 $[A, +\infty)$ 上有界.

证 因为

$$f(-x) = (-x)e^{-x^2}\int_0^{-x} e^{t^2}dt,$$

对于 $\int_0^{-x} e^{t^2}dt$，令 $t=-u$，则有

$$\int_0^{-x} e^{t^2}dt = -\int_0^x e^{u^2}du = -\int_0^x e^{t^2}dt.$$

因此，
$$f(-x) = f(x),$$
所以 $f(x)$ 是偶函数，只需证明 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界.

由(1)得出 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$，因此，对于 $\varepsilon = \frac{1}{2}$，存在 $A>0$，当 $x>A$ 时有，

$$\left|f(x)-\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2},$$

于是当 $x>A$ 时有：

$$0 < f(x) < 1.$$

又因为 $f(x)$ 在 $[0, A]$ 上连续，由闭区间上连续函数性质，$f(x)$ 在 $[0, A]$ 上有界，并注意到在 $[0, +\infty)$ 上 $f(x)\geqslant 0$.因此，$\exists M_1>0$，便得 $\forall x\in[0, A]$，有 $0\leqslant f(x)\leqslant M_1$，取 $M=\max\{1, M_1\}$，则对 $\forall x\in[0, +\infty)$ 有 $0\leqslant f(x)\leqslant M$，即 $\forall x\in(-\infty, +\infty)$ 有 $0\leqslant f(x)\leqslant M$.

评注 证明此题取 $\varepsilon = \frac{1}{2}$ (或取其他一个确定正数)是非常必要的，如果用"$\forall\varepsilon>0$，$\exists A>0$，当 $x>A$ 时有 $\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$"来证明 $f(x)$ 在 $[A, +\infty)$ 上有界，此种解法是错误的，实际上此时的"界"是不确定的.

第二章　一元函数微分学

一、本章的重点内容与常见的典型题型

一元函数微分学在微积分中占有极重要的位置，内容多，影响深远，在后面绝大多数章节都要涉及到它.

本章内容归纳起来，有四大部分.

1. 概念部分：导数和微分的定义，特别要会利用导数定义讨论分段函数在分界点的可导性，高阶导数，可导与连续的关系；

2. 运算部分：基本初等函数的导数、微分公式、导数的四则运算、反函数、复合函数、隐函数和由参数方程确定的函数的求导公式；

3. 理论部分：罗尔中值定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理；

4. 应用部分：利用导数研究函数的性态（包括函数的单调性与极值，函数图形的凹凸性与拐点，渐近线），最值应用题，利用洛必达法则求极限，以及导数在几何、物理等方面的应用.

常见题型有：

1. 求给定函数的导数或微分（包括高阶导数），隐函数和由参数方程确定的函数求导；

2. 利用罗尔中值定理，拉格朗日中值定理，柯西中值定理证明有关命题和不等式. 如“证明在开区间至少存在一点满足 ……”，或讨论方程在给定区间内的根的个数等；

3. 利用洛必达法则求七种未定型的极限；

4. 几何、物理、经济等方面的最大值、最小值应用题. 解这类问题，主要是确定目标函数和约束条件，判定所讨论区间；

5. 利用导数研究函数性态和描绘函数图像，等等.

二、习　　题

（一）填空题

1. 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则

(1) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0-3h)-f(x_0)}{h}=$ ________;

(2) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=$ ________;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(x_0+\dfrac{1}{n}\right)-f\left(x_0-\dfrac{1}{2n}\right)\right]=$ ________;

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{f(x_0)-f(x_0+x)}=$ ________;

(5) 当 $n\to+\infty$ 时,x_n 与 y_n 为等价无穷小,则 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f(x_0+x_n)-f(x_0-y_n)}{x_n}=$ ________.

2. 曲线 $\begin{cases}x=1+t^2,\\ y=t^3\end{cases}$ 在 $t=2$ 处的切线方程为________.

3. 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $e^{2x+y}-\cos(xy)=e-1$ 所确定,则曲线 $y=f(x)$ 在点(0,1)处的法线方程为________.

4. 若 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2tx}$,则 $f'(t)=$ ________.

5. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{2^{f(x)}-1}=1$,则 $f'(0)=$ ________.

6. 当 $x=$ ________时,函数 $y=x2^x$ 取得极小值.

7. 曲线 $y=x\ln\left(e+\dfrac{1}{x}\right)$ $(x>0)$ 的渐近线方程为________.

8. 设 $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$,则 $y''|_{x=0}=$ ________.

9. 设 $\begin{cases}x=f(t)-\pi,\\ y=f(e^{3t}-1),\end{cases}$ 其中 f 可导,且 $f'(0)\neq 0$,则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=0}=$ ________.

(二) 选择题

1. 设 $f(x_0)\neq 0$,$f(x)$ 在 $x=x_0$ 连续,则 $f(x)$ 在 x_0 可导是 $|f(x)|$ 在 x_0 可导的(　　)条件.

(A) 充分非必要;　　(B) 充要;

(C) 必要非充分;　　(D) 非充分非必要.

2. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某个邻域内有定义,则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是(　　).

(A) $\lim\limits_{h\to+\infty}h\left[f\left(a+\dfrac{1}{h}\right)-f(a)\right]$ 存在;　　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在;

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 存在;　　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在.

3. 设 $F(x)=g(x)\varphi(x)$,$\varphi(x)$ 在 $x=a$ 连续,但不可导,又 $g'(a)$ 存在,则 $g(a)=0$

是 $F(x)$ 在 $x=a$ 可导的(　　)条件.

(A) 充要；　　(B) 充分非必要；

(C) 必要非充分；　　(D) 非充分非必要.

4. 函数 $f(x)=(x^2-x-2)|x^3-x|$ 有(　　)个不可导点.

(A) 3；　(B) 2；　(C) 1；　(D) 0.

5. 若 $f(x)=-f(-x)$，在 $(0,+\infty)$ 内 $f'(x)>0, f''(x)>0$，则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内(　　).

(A) $f'(x)<0, f''(x)<0$；　　(B) $f'(x)<0, f''(x)>0$；

(C) $f'(x)>0, f''(x)<0$；　　(D) $f'(x)>0, f''(x)>0$.

6. 设函数 $f(x), g(x)$ 是大于零的可导函数，且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$，则当 $a<x<b$ 时，有(　　).

(A) $f(x)g(b)>f(b)g(x)$；　　(B) $f(x)g(a)>f(a)g(x)$；

(C) $f(x)g(x)>f(b)g(b)$；　　(D) $f(x)g(x)>f(a)g(a)$.

7. 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内连续，且 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在点 $x=0$ 处 $f(x)$(　　).

(A) 不可导；　　(B) 可导，且 $f'(0)\neq 0$；

(C) 取得极大值；　　(D) 取得极小值.

8. 若 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)=0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}$ 为(　　).

(A) 0；　(B) 6；　(C) 36；　(D) ∞.

9. 设 $f(x)$ 有二阶连续导数且 $f'(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$，则(　　)成立.

(A) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点；

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值；

(C) $(0,f(0))$ 是曲线的拐点；

(D) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

10. 设函数 $y=f(x)$ 是微分方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解且 $f(x_0)>0, f'(x_0)=0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 处(　　).

(A) 有极大值；　　(B) 有极小值；

(C) 在某邻域内单调增加；　　(D) 在某邻域内单调减少.

(三) 解答题

1. 已知 $f(x)$ 是周期为 5 的连续函数，它在 $x=0$ 的某个邻域内满足关系式

$$f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)=8x+\alpha(x)$$

其中 $\alpha(x)$ 是当 $x\to 0$ 时比 x 高阶的无穷小，且 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，求曲线 $y=f(x)$ 在

$(6,f(6))$ 处的切线方程.

2. 求下列函数在指定点处的导数

(1) $f(x)=(\arcsin x)\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$,求 $f'(0)$;

(2) 设 $f(x)=\varphi(a+bx)-\varphi(a-bx)$,其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处可导,求 $f'(0)$;

(3) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,且 $f'(0)=\dfrac{1}{3}$,又对任意的 x,有 $f(3+x)=3f(x)$,求 $f'(3)$.

3. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义,且 $f'(0)=a\ (a\neq 0)$,又 $\forall x,y\in(-\infty,+\infty)$ 有 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$,求 $f(x)$.

类似题:设 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有定义,且 $f'(1)=a\ (a\neq 0)$,又对 $\forall x,y\in(0,+\infty)$,有 $f(xy)=f(x)+f(y)$,求 $f(x)$.

4. 求下列函数的导数与微分

(1) 设 $y=e^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\sin\dfrac{1}{x}$,求 dy;

(2) 设 $\begin{cases}x=\cos(t^2),\\ y=t\cos(t^2)-\displaystyle\int_1^{t^2}\frac{1}{2\sqrt{u}}\cos u\,du.\end{cases}$ 求 $\dfrac{dy}{dx},\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 在 $t=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ 的值;

(3) 设 $F(x)=\sin(x^2)\displaystyle\int_0^1 f(t\sin x^2)dt$,求 $\dfrac{dF}{dx}$;

(4) 设 $\sin(x^2+y^2)+e^x-xy^2=0$,求 $\dfrac{dy}{dx}$;

(5) 已知 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$,$f'(x)=\arctan(x^2)$,则 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}=$ ________;

(6) 由方程组 $\begin{cases}x=t^2+2t,\\ t^2-y+a\sin y=1,\end{cases}$ $(0<a<1)$ 确定 y 为 x 的函数,求 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$.

5. 求 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\displaystyle\int_0^x\left(\int_0^{\tan^2 y}\frac{\sin t}{t}dt\right)dy}{x^3}$.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}, & x\neq 0,\\ a, & x=0.\end{cases}$ 其中 $\varphi(x)$ 具有二阶导数,且 $\varphi(0)=1,\varphi'(0)=0$.

(1) 确定 a 的值,使 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续;

(2) 求 $f'(x)$;

(3) 讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

类似题：设 $f(x)$ 连续且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=2,\varphi(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，求 $\varphi'(x)$ 并讨论 $\varphi'(x)$ 的连续性.

7. 证明：当 $x>0$ 时，$(x^2-1)\ln x\geqslant(x-1)^2$.

8. 证明：当 $0<x<1$ 时，$\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}<\dfrac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$.

9. 设 $y=f(x)=\dfrac{(x^2+2x-3)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{(x^2-1)\arctan x}$，求渐近线.

10. 求证：方程 $\ln x=\dfrac{x}{\mathrm{e}}-\int_0^\pi\sqrt{1-\cos2x}\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 内只有两个不同的实根.

11. 设 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0,\int_0^\pi f(x)\cos x\,\mathrm{d}x=0$. 试证明：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

12. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且满足

$$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}x\mathrm{e}^{1-x}f(x)\mathrm{d}x\ \ (k>1),$$

证明：至少存在一点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

13. 设 $y=f(x)$ 在 $(-1,1)$ 内具有二阶连续导数且 $f''(x)\neq0$，试证：

(1) 对于 $(-1,1)$ 内任一 $x\neq0$，存在惟一的 $\theta(x)\in(0,1)$，使

$$f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)$$

成立；

(2) $\lim\limits_{x\to0}\theta(x)=\dfrac{1}{2}$.

14. 设 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ $(a>0)$ 上具有二阶连续导数，$f(0)=0$，

(1) 写出 $f(x)$ 的带拉格朗日余项的一阶麦克劳林公式；

(2) 证明在 $[-a,a]$ 上至少存在一点 η，使

$$a^3f''(\eta)=3\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x.$$

15. 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有二阶导数，且 $f(a)=f(b)=0,f'(a)\cdot f'(b)>0$. 证明存在 $\xi\in(a,b)$ 和 $\eta\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$ 及 $f''(\eta)=0$.

16. 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在二阶导数，并且 $g''(x)\neq0,f(a)=f(b)=g(a)=g(b)=0$，试证：

(1) 在开区间 (a,b) 内 $g(x)\neq0$；

(2) 在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $\dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$.

17. 设 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上连续,试证明存在 $\xi \in (0,1)$,使

$$\int_0^{\xi} f(t)\mathrm{d}t = (1-\xi)f(\xi);$$

若又设 $f(x) > 0$ 且单调减少,则这种 ξ 是惟一的.

18. 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间(a,b)内可导,并设在(a,b)内 $f(x)g'(x) - f'(x) \neq 0$.试证明在(a,b)内至多存在一点 ξ 使 $f(\xi) = 0$.

19. 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,$\int_0^{\frac{2}{\pi}} e^{f(x)}\arctan x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$,$f(1) = 0$.证明至少存在一点 $\xi \in (0,1)$ 使$(1+\xi^2)(\arctan\xi)f'(\xi) = -1$.

20. 设函数 $f(x)$ 在区间$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且 $f(0) = f(1) = 0$, $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$.试证:

(1) 存在 $\eta \in \left(\frac{1}{2},1\right)$,使 $f(\eta) = \eta$;

(2) 对任意实数 λ,必存在 $\xi \in (0,\eta)$,使得 $f'(\xi) - \lambda[f(\xi) - \xi] = 1$.

三、习题的解答与分析

(一) 填空题

1. 应填:(1) $-3f'(x_0)$. (2) $2f'(x_0)$. (3) $\frac{3}{2}f'(x_0)$.

(4) $-\frac{1}{f'(x_0)}$, $(f'(x_0) \neq 0)$. (5) $2f'(x_0)$.

分析 (1) 由导数的定义有:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-3h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0-3h)-f(x_0)}{(-3)h}\cdot(-3) = -3f'(x_0).$$

(2) 同理 $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h} = 2f'(x_0)$.

(3) $$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f\left(x_0-\frac{1}{2n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f\left(x_0-\frac{1}{2n}\right)}{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n}}\cdot\frac{3}{2}$$

$$= \frac{3}{2}f'(x_0).$$

(4) $$\lim_{x\to 0}\frac{x}{f(x_0)-f(x_0+x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{f(x_0)-f(x_0+x)}{x}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\frac{f(x_0 + x) - f(x_0)}{x}}(-1)$$

$$= -\frac{1}{f'(x_0)}, \quad (f'(x_0) \neq 0).$$

(5) 由于 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = 0$, 且 $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{x_n}{y_n} = 1$, 于是:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(x_0 + x_n) - f(x_0 - y_n)}{x_n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{f(x_0 + x_n) - f(x_0 - y_n)}{(x_n + y_n)} \cdot \frac{x_n + y_n}{x_n} = 2f'(x_0).$$

评注　若 $f'(x_0)$ 存在,即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

有如下有用的结论:被减数中对应符号 $f(\quad)$ 内的表达式与减数中对应符号 $f(\quad)$ 内的表达式之差恰好等于极限式的分母,则该极限就等于函数在指定点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$.

2. 应填: $3x - y - 7 = 0$.

分析
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=2} = \left.\frac{y'(t)}{x'(t)}\right|_{t=2} = \left.\frac{3t^2}{2t}\right|_{t=2} = 3,$$

当 $t = 2$ 时, $x = 5$, $y = 8$.

则所求切线方程为 $y - 8 = 3(x - 3)$, 即 $3x - y - 7 = 0$.

评注　本题主要考查导数的几何意义和参数方程求导.

3. 应填: $x - 2y + 2 = 0$.

分析　方程 $e^{2x+y} - \cos(xy) = e - 1$ 两边对 x 求导得

$$(2 + y')e^{2x+y} - \sin(xy)(y + xy') = 0.$$

将 $x = 0, y = 1$ 代入上式得 $y' = -2$.

则 $y = f(x)$ 在 $(0,1)$ 处的法线方程为 $y - 1 = \frac{1}{2}x$, 即 $x - 2y + 2 = 0$.

评注　本题主要考查隐函数求导和导数的几何意义.

4. 应填: $(1 + 2t)e^{2t}$.

分析　由于

$$f(t) = \lim_{x \to \infty} t\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{2t} = te^{2t},$$

则
$$f'(t) = e^{2t}(1 + 2t).$$

评注　本题主要考查基本极限 $\lim\limits_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 及求导法则.

5. 应填: 0.

分析　由题设显然 $f(0) = 0$.

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{2^{f(x)}-1}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{(\ln2)f(x)}=1,$$

所以
$$f(x)\sim\frac{-\frac{1}{2}x^2}{\ln2}\quad(x\to\text{时}),$$

故
$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}-\frac{x^2}{(2\ln2)x}=0.$$

6. 应填：$-\frac{1}{\ln2}$.

分析　$y'=2^x+x2^x\ln2=2^x(1+x\ln2)$. 令 $y'=0$ 得 $x=-\frac{1}{\ln2}$，且当 $x<-\frac{1}{\ln2}$ 时，$y'<0$；当 $x>-\frac{1}{\ln2}$ 时，$y'>0$，则在 $x=-\frac{1}{\ln2}$ 取极小值.

或 $y'=2^x(1+x\ln2)$. 令 $y'=0$，得 $x=-\frac{1}{\ln2}$. 由原题可知极小值是存在的，则只能在 $x=-\frac{1}{\ln2}$ 取得.

评注　本题主要考查函数的极值. 第 2 种解法体现了解客观题时的技巧，应特别注意.

7. 应填：$y=x+\frac{1}{e}$.

分析　由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to\infty}\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)=\ln e=1=a,$$

$$\lim_{x\to+\infty}[y-ax]=\lim_{x\to\infty}\left[x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-x\right]=\lim_{x\to\infty}x\left[\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-1\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left[\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)-\ln e\right]=\lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{xe}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\cdot\frac{1}{xe}=\frac{1}{e},$$

$$\left(\ln\left(1+\frac{1}{xe}\right)\sim\frac{1}{xe},\text{当 } x\to\infty\text{ 时}\right).$$

则渐近线为

$$y=x+\frac{1}{e}.$$

评注　本题主要考查曲线的渐近线.

8. 应填：$-\frac{3}{2}$.

分析　由对数的性质可知

$$y = \frac{1}{2}[\ln(1-x) - \ln(1+x^2)],$$

$$y' = -\frac{1}{2(1-x)} - \frac{x}{1+x^2},\quad y'' = -\frac{1}{2(1-x)^2} - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},$$

于是
$$y''|_{x=0} = -\frac{3}{2}.$$

9. 应填：3.

分析
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3e^{3t}f'(e^{3t}-1)}{f'(t)},$$

于是
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0} = \frac{3f'(0)}{f'(0)} = 3.$$

评注　本题主要考查参数方程求导法和复合函数求导法.

(二) 选择题

1. 应选(B).

分析　由

$$f(x_0) \neq 0 \Rightarrow f(x_0) > 0 \quad 或 \quad f(x_0) < 0,$$

因为 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，则 $f(x)$ 在 x_0 某邻域是保号的，即存在 $\delta > 0$，当 $|x-x_0| < \delta$ 时，

$$f(x)\begin{cases} > 0, & f(x_0) > 0 \text{ 时}, \\ < 0, & f(x_0) < 0 \text{ 时}. \end{cases} \Rightarrow$$

$|x - x_0| < \delta$ 时，

$$f(x) = \begin{cases} |f(x)|, & f(x_0) > 0 \text{ 时}, \\ -|f(x)|, & f(x_0) < 0 \text{ 时}, \end{cases}$$

因此应选(B).

即此时：当 $f(x_0) > 0$ 时，

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

(此时，$|f'(x_0)| = (f'(x_0))$).

当 $f(x_0) < 0$ 时，

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|f(x)|-|f(x_0)|}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0}\frac{-f(x)+f(x_0)}{x-x_0} = -\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

(此时 $f'(x_0) = -|f'(x_0)|$).

类似：设 $f(x_0) = 0$，则 $f'(x_0) = 0$ 是 $|f(x)|$ 在 x_0 可导的充要条件.

2. 应选(D).

分析　因为

$$\lim_{h\to+\infty} h\left[f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f(a)\right]=\lim_{h\to+\infty}\frac{f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f(a)}{\frac{1}{h}}=f'_+(a).$$

所以(A) 不入选.

又因为 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$ 的存在与$f(x)$ 在 $x=a$ 处的值看不出有什么联系，即使在 $x=a$ 不连续，以上极限也可能存在.

例如：

$$f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处不连续，因此 $f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导，但

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cos\frac{1}{h}-\cos\frac{1}{h}}{2h}=0.$$

故(C) 不入选，类似地可说明(B) 也不入选，由排除法可知(D) 入选.

事实上，由

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h},$$

一眼可看出应选(D).

评注 比较填空的第 1 题与此题可知：$f'(x_0)$ 存在，则极限

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}\quad 与\quad \lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-f\left(x_0-\frac{1}{2n}\right)\right]$$

必存在，反之则不然.

3. 应选(A).

分析 (1) 不能对 $g(x)\varphi(x)$ 用乘积的求导法则，因为 $\varphi'(a)$ 不存在；

(2) 当 $g(a)\neq 0$ 时，若 $F(x)$ 在 $x=a$ 可导，可对$\dfrac{F(x)}{g(x)}$ 用商的求导法则.

若 $g(a)=0$，按导数定义：

$$\lim_{x\to a}\frac{F(x)-F(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{g(x)\varphi(x)-g(a)\varphi(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\cdot\varphi(x)$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\cdot\lim_{x\to a}\varphi(x)=g'(a)\varphi(a).$$

即

$$F'(a)=g'(a)\varphi(a).$$

若 $F'(a)$ 存在，则必有 $g(a)=0$.(反证法) 若 $g(a)\neq 0$，则由商的求导法知 $\varphi(x)=\dfrac{F(x)}{g(x)}$ 在 $x=a$ 可导，与假设条件 $\varphi'(a)$ 不存在矛盾. 因此选(A).

评注　由此题可以得到下面的重要结论：设 $g(x)$ 在 $x=a$ 可导，$\varphi(x)$ 在 $x=a$ 连续而不可导，则：

$$g(x)\varphi(x) \text{ 在 } x=a \text{ 处} \begin{cases} \text{不可导}, & \text{若 } g(a)\neq 0, \\ \text{可导且导数为 } g'(a)\varphi(a), & \text{若 } g(a)=0. \end{cases}$$

4. 应选(B).

分析　设

$$g(x)=x^2-x-2,\quad \varphi(x)=|x^3-x|=|x||x-1||x+1|,$$

则

$$f(x)=g(x)\varphi(x).$$

显然 $g(x)$ 处处可导，$\varphi(x)$ 仅在 $x=0,x=1,x=-1$ 不可导且 $\varphi(x)$ 处处连续.因此只须考察 $f(x)$ 在 $x=0,1,-1$ 点是否可导，用上一题结论：

在 $x=0$ 处，$g(0)=-2\neq 0$，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 不可导；

在 $x=1$ 处，$g(1)=-2\neq 0$，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 不可导；

在 $x=-1$ 处，$g(-1)=0$，所以 $f(x)$ 在 $x=-1$ 可导，所以选(B).

评注　此题也可以按导数定义考察 $f(x)$ 在 $x=0,1,-1$ 处的可导性，此时要分别讨论 $f(x)$ 在 $x=0,1,-1$ 处的左、右导数.

5. 应选(C).

分析　当 $x\in(-\infty,0)$ 时，由 $f(x)=-f(-x)$，得

$$f'(x)=f'(-x)>0,\quad f''(x)=-f''(-x)<0,$$

所以选择(C).

或利用函数的导数研究函数性质.由 $f(x)=-f(-x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数，从函数的图形很快得到正确结论.因为当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f''(x)>0$，所以函数单调增加，其图形是凹的.奇函数的图形关于原点对称，所以在 $(-\infty,0)$ 内也是单调增加，但图形却是凸的，即 $f'(x)>0,f''(x)<0$，选(C).

评注　当 $f(x)$ 是偶函数时选(B).

6. 应选(A).

分析　由条件 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$ 可得

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}<0,$$

所以 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 $[a,b]$ 上严格递减，于是

$$\frac{f(a)}{g(a)}>\frac{f(x)}{g(x)}>\frac{f(b)}{g(b)},$$

而 $g(x),g(a),g(b)$ 皆大于零，故有

$$f(a)g(x)>f(x)g(a),\quad f(x)g(b)>f(b)g(x),$$

即只有(A)成立.

7. 应选(D).

分析 题目虽然未给 $f(x)$ 的表达式,但要从给定条件了解函数在 $x=0$ 处的性质.于是来求

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x}=0,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导,且 $f'(0)=0$,所以(A),(B) 排除.

最后,由 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2>0$ 可知,在 $x=0$ 的某去心邻域内

$$f(x)>0\quad(\text{因为 } 1-\cos x>0),$$

即

$$f(x)>f(0),$$

所以 $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.选(D).

8. 应选(C).

分析 由所给的极限式通过运算去求未知的极限是本题的思路.一个方法是写出 $\sin 6x$ 的泰勒公式.

$$\sin 6x=(6x)-\frac{1}{3!}(6x)^3+o(x^3),$$

代入原极限式得

$$\lim_{x\to 0}\frac{6x-36x^3+o(x^3)+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{6+f(x)}{x^2}-36\right)=0.$$

即

$$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=36.$$

选(C).

或者,因

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x-6x+6x+xf(x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 6x-6x}{x^3}+\frac{6+f(x)}{x^2}\right]=0,$$

得到:

$$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{6-6\cos 6x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{36\sin 6x}{6x}=36.$$

评注 解此题最易犯的错误,是不考虑 $f(x)$ 是否满足必要的条件而使用洛必达法则.结果花费了不少时间还未得到正确的结论.其次选(A) 也是错误的,认为

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 6x}{x}+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2},$$

在这里,用 6 替换 $\dfrac{\sin 6x}{x}$ 是错误的.

9. 应选(B).

分析　由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f''(x)}{|x|}=1$ 及极限的不等式性质,可知存在 $\delta>0$,当 $0<|x|<\delta$ 时,

$$\frac{f''(x)}{|x|}>0,$$

即
$$f''(x)>0,$$

则 $f'(x)$ 在 $(-\delta,\delta)$ 单调上升,即

$$f'(x)>f'(0)=0,\quad x\in(0,\delta);$$

又
$$f'(x)<0=f'(0),\quad x\in(-\delta,0),$$

则 $f(x)$ 在 $x=0$ 两侧由下降到上升(从左到右),因此 $x=0$ 是 $f(x)$ 的极小点.故应选(B).

10. 应选(A).

分析　由方程 $y''(x_0)=-4y(x_0)<0$,又 $y'(x_0)=0$,故 $y=f(x)$ 在 x_0 处有极大值.选(A).

(三) 解答题

1. **分析**　$f(x)$ 是以周期 $T=5$ 的函数,所以欲求曲线在点 $(6,f(6))$ 处的切线方程,只需求出 $f(x)$ 在 $x=1$ 处的函数值及导数值.它们都可以由给定的关系式得到,但只能由定义求 $f'(1)$.

解　由

$$\lim_{x\to0}[f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)]=\lim_{x\to0}[8x+\alpha(x)],$$

得
$$f(1)-3f(1)=0,$$

故
$$f(1)=0.$$

又因为,
$$\lim_{x\to0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}=\lim_{x\to0}\left[\frac{8x}{\sin x}+\frac{\alpha(x)}{x}\cdot\frac{x}{\sin x}\right]=8.$$

设 $\sin x=t$,则有

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1+\sin x)-3f(1-\sin x)}{\sin x}$$
$$=\lim_{t\to0}\frac{f(1+t)-f(1)}{t}+3\lim_{t\to0}\frac{f(1-t)-f(1)}{-t}=4f'(1).$$

所以 $f'(1)=2$.

由 $f(x+5)=f(x)$,所以 $f(6)=f(1)=0,f'(6)=f'(1)=2$,故所求切线方程

$$y=2(x-6),\quad 即\quad 2x-y-12=0.$$

评注　本题是个综合题,涉及到函数的周期性、连续性、极限、导数的定义及切线方程,问题的难点在只能用导数的定义求 $f'(1)$,因为题目的条件只是 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导,所以不能用其他的工具.记作几个性质:

(1) 可导奇函数的导数是偶函数;

(2) 可导偶函数的导数是奇函数;

(3) 可导周期函数的导数也是周期函数.

2. **解** (1) $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}}{x}=1$.

(2) 由 $f(x)=\varphi(a+bx)-\varphi(a-bx)$,可知 $f(0)=\varphi(a)-\varphi(a)=0$. 因为只说明 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处可导,没说明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否可导,所以 $f'(0)$ 应该用导数定义来求.

$$\begin{aligned}f'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(a+bx)-\varphi(a-bx)}{x-0}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(a+bx)-\varphi(a-bx)}{2bx}\cdot 2b=2b\varphi'(a).\end{aligned}$$

(因为 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处可导).

(3) 这里也没有给出 $f(x)$ 的具体表达式,又没有说明 $f(x)$ 在 $x=3$ 处可导,所以求 $f'(3)$ 必须用导数定义做:

$$f'(3)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(3+\Delta x)-f(3)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{3f(\Delta x)-3f(0)}{\Delta x}=3f'(0)=3\times\frac{1}{3}=1.$$

3. **解** 在 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$ 中令 $y=0$,得

$$f(x)=\frac{f(x)+f(0)}{1-f(0)f(x)},$$

有 $$f(x)-f(0)f^2(x)=f(x)+f(0),\quad f(0)[1+f^2(x)]=0,$$

所以 $$f(0)=0.$$

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x[1-f(x)f(\Delta x)]}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1+f^2(x)}{1-f(x)f(\Delta x)}\\&=f'(0)(1+f^2(x)).\end{aligned}$$

(因为 $f'(0)$ 存在,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,于是 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\Delta x)=f(0)=0$).

故 $$\frac{\mathrm{d}f(x)}{1+f^2(x)}=f'(0)\mathrm{d}x,\quad \arctan f(x)=f'(0)x+C,$$

令 $x=0$ 得 $\arctan f(0)=C$,所以 $C=0$. 有

$$\arctan f(x)=f'(0)x,$$

即 $$f(x)=\tan(ax).$$

评注 类似题:由 $f(xy)=f(x)+f(y)$ 中,令 $y=1$ 得 $f(x)=f(x)+f(1)$,所以

$$f(1)=0,$$

$$f'(x)=\lim_{y\to 0}\frac{f(x+xy)-f(x)}{xy}=\lim_{y\to 0}\frac{f(x)+f(1+y)-f(x)}{xy}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{f(1+y)}{xy}=\lim_{y\to 0}\frac{f(1+y)-f(1)}{y}\cdot\frac{1}{x}=f'(1)\cdot\frac{1}{x}.$$

即
$$f'(x)=\frac{a}{x},$$
所以
$$f(x)=a\ln x+C,$$
令 $x=1$ 得 $C=0$,所以 $f(x)=a\ln x$.

函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,且 $f'(x_0)$ 存在是必不可少的前提条件,再附加条件,求 $f(x)$ 的题型一般是:先由附加条件求出 $f(x_0)=0$,再由导数定义写出
$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

4. **解**　(1)
$$\mathrm{d}y=\left[\mathrm{e}^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\sec^2\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\sin\frac{1}{x}+\mathrm{e}^{\tan\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right]\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\tan\frac{1}{x}}\left(\tan\frac{1}{x}\cdot\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x.$$

(2)
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{\cos(t^2)-2t^2\sin(t^2)-2t\cdot\frac{1}{2t}\cos(t^2)}{-2t\sin(t^2)}=t,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{x'(t)}=-\frac{1}{2t\sin(t^2)},$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t_0}=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\quad\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t_0}=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad\text{其中 } t_0=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

(3)
$$\int_0^1 f(t\sin x^2)\mathrm{d}t\ \xlongequal[\mathrm{d}u\,=\,\sin x^2\mathrm{d}t]{\text{令}u\,=\,t\sin x^2}\int_0^{\sin x^2}f(u)\cdot\frac{1}{\sin x^2}\mathrm{d}u=\frac{1}{\sin x^2}\int_0^{\sin x^2}f(u)\mathrm{d}u,$$
$$F(x)=\sin x^2\cdot\frac{1}{\sin x^2}\int_0^{\sin x^2}f(u)\mathrm{d}u=\int_0^{\sin x^2}f(u)\mathrm{d}u,$$
所以
$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}=f(\sin^2x)\cdot\cos x^2\cdot 2x=2x\cos x^2f(\sin x^2).$$

(4) 将等式两端对 x 求导,注意 $y=y(x)$ 得,
$$[\cos(x^2+y^2)](2x+2yy')+\mathrm{e}^x-y^2-2xyy'=0,$$
即
$$y'(2y\cos(x^2+y^2)-2xy)=y^2-\mathrm{e}^x-2x\cos(x^2+y^2),$$
故
$$y'=\frac{y^2-\mathrm{e}^x-2x\cos(x^2+y^2)}{2y\cos(x^2+y^2)-2xy}.$$

(5) 这是复合函数求导问题.应注意的是,本题中的 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与 $f'(x)$ 所表示的内容是不同的.

引进变量 $u=\dfrac{3x-2}{3x+2}$，则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=f'(u)\cdot\frac{du}{dx}.$$

由题设知

$$f'(u)=\arctan u^2,$$

所以，
$$\frac{dy}{dx}=\arctan u^2\cdot\frac{12}{(3x+2)^2},$$

故
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=\arctan u^2\Big|_{\substack{u=-1\\(x=0)}}\cdot\left.\frac{12}{(3x+2)^2}\right|_{x=0}=\frac{3\pi}{4}.$$

(6) 由 $t^2-y+a\sin y=1$，两边对 t 求导

$$2t-y'(t)+(a\cos y)y'(t)=0,$$

得
$$y'(t)=\frac{2t}{1-a\cos y}.$$

由 $x=t^2+2t$ 得 $x'(t)=2t+2$，所以

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{t}{(t+1)(1-a\cos y)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{x'(t)}=\frac{(t+1)(1-a\cos y)-t[1-a\cos y+(t+1)(a\sin y)\cdot y'(t)]}{2(t+1)^3(1-a\cos y)^2},$$

所以
$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(t+1)(1-a\cos y)^2-t[(1-a\cos y)^2+2t(t+1)a\sin y]}{2(t+1)^3(1-a\cos y)^3}.$$

5. **分析** 这是求 $\dfrac{0}{0}$ 型的极限. 用洛必达法则就要对变上限积分求导数，这里被积函数 $f(y)=\displaystyle\int_0^{\tan^2 y}\frac{\sin t}{t}dt$ 还是变限积分. 注意这一点就容易求得.

解 $I=\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x f(y)dy}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{\tan^2 x}\frac{\sin t}{t}dt}{3x^2}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin(\tan^2 x)}{\tan^2 x}\cdot2\tan x\sec^2 x\right)\Big/6x$

$=\dfrac{1}{3}.$

6. **解** (1)

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\varphi(x)-\cos x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\varphi'(x)+\sin x}{1}=\varphi'(0).$$

所以当 $a=\varphi'(0)=0$ 时，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

(2) 当 $x\neq0$ 时，

$$f'(x)=\frac{x(\varphi'(x)+\sin x)-(\varphi(x)-\cos x)}{x^2}.$$

当 $x=0$ 时，

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\varphi(x)-\cos x}{x}-\varphi'(0)}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\varphi(x)-\cos x-x\varphi'(0)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\varphi'(x)+\sin x-\varphi'(0)}{2x}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\varphi'(x)-\varphi'(0)}{x}+\frac{\sin x}{2x}\right]=\frac{1}{2}\varphi''(0)+\frac{1}{2}.$$

故
$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\varphi''(0)+\dfrac{1}{2}, & x=0,\\ \dfrac{x(\varphi'(x)+\sin x)-(\varphi(x)-\cos x)}{x^2}, & x\neq0.\end{cases}$$

(3)
$$\lim_{x\to0}f'(x)=\lim_{x\to0}\frac{x(\varphi'(x)+\sin x)-(\varphi(x)-\cos x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\varphi'(x)}{x}+\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}-\lim_{x\to0}\frac{\varphi(x)-\cos x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\varphi'(x)-\varphi'(0)}{x}+1-\lim_{x\to0}\frac{\varphi'(x)+\sin x}{2x}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\varphi''(0).$$

故 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

7. **证** 令

$$f(x)=(x^2-1)\ln x-(x-1)^2,\quad f(1)=0,$$

$$f'(x)=2x\ln x-x-\frac{1}{x}+2,\quad f'(1)=0,$$

$$f''(x)=2\ln x+\frac{1}{x^2}+1,\quad f''(1)=2>0.$$

所以 $x=1$ 时 $f(x)$ 取极小值. 下面证明，当 $x>0$ 时，$f(1)$ 是最小值. 因为

$$f'''(x)=\frac{2(x^2-1)}{x^3},$$

当 $0<x<1$ 时，

$$f'''(x)<0,\quad f''(x)“\searrow”,\quad f''(x)>f''(1)=2>0.$$

得到
$$f'(x)“\nearrow”,\quad f'(x)<f'(1)=0,$$

所以
$$f(x)“\searrow”,$$

进面
$$f(x)>f(1)=0,$$

有 $$(x^2-1)\ln x > (x-1)^2.$$

当 $1 < x < +\infty$ 时,

$$f'''(x) > 0,\quad f''(x)“\nearrow”,\quad f''(x) > f''(1) = 2 > 0.$$

得到 $$f'(x)“\nearrow”,\quad f'(x) > f'(1) = 0,$$

所以 $$f(x)“\nearrow”,$$

进而 $$f(x) > f(1) = 0,$$

有 $$(x^2-1)\ln x > (x-1)^2.$$

当 $x = 1$ 时,

$$(x^2-1)\ln x = (x-1)^2.$$

综上所述,当 $x > 0$ 时,

$$(x^2-1)\ln x \geqslant (x-1)^2.$$

8. **分析** 若令 $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{\arcsin x}-\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$, $f'(x)$的导数很复杂, 因此先作简单变形.

$$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} < \frac{\ln(1+x)}{\arcsin x} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{\arcsin x}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2}\arcsin x < (1+x)\ln(1+x).$$

证 令

$$f(x) = (1+x)\ln(1+x) - \sqrt{1-x^2}\arcsin x,\quad f(0) = 0.$$

因为 $$f'(x) = \ln(1+x) + 1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x - 1$$
$$= \ln(1+x) + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x > 0 \quad (0 < x < 1).$$

所以 $f(x)$ 在 $0 < x < 1$ 时单调递增,故

$$f(x) > f(0) = 0.$$

即 $$(1+x)\ln(1+x) - \sqrt{1-x^2}\arcsin x > 0.$$

亦即 $$\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} < \frac{\ln(1+x)}{\arcsin x}.$$

9. **解** $$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2+2x-3)e^{\frac{1}{x}}}{(x^2-1)\arctan x} = \frac{2}{\pi},\quad \lim_{x\to-\infty}\frac{(x^2+2x-3)e^{\frac{1}{x}}}{(x^2-1)\arctan x} = -\frac{2}{\pi}.$$

所以 $y = \dfrac{2}{\pi}, y = -\dfrac{2}{\pi}$ 为 $f(x)$ 的水平渐近线.

使 $f(x)$ 没有意义的点是 $x=-1, x=0, x=1$.因为,

$$\lim_{x\to-1}\frac{(x^2+2x-3)e^{\frac{1}{x}}}{(x^2-1)\arctan x}=\infty,$$

所以 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的铅直渐近线.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{(x^2+2x-3)e^{\frac{1}{x}}}{(x^2-1)\arctan x}=\infty,$$

所以 $x=0$ 也是 $f(x)$ 的铅直渐近线.

$$\lim_{x\to1}\frac{(x^2+2x-3)e^{\frac{1}{x}}}{(x^2-1)\arctan x}=\frac{8e}{\pi},$$

所以 $x=1$ 不是 $f(x)$ 的渐近线.

评注　若

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=b \quad 或 \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=b,$$

则 $y=b$ 为 $f(x)$ 的水平渐近线.

若
$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\infty \quad 或 \quad \lim_{x\to x_0^-}f(x)=\infty,$$

则 $x=x_0$ 为 $f(x)$ 的铅直渐近线.

若
$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a \quad 且 \quad \lim_{x\to\infty}(f(x)-ax)=b,$$

则 $y=ax+b$ 是 $f(x)$ 的斜渐近线.

10. **分析**　即证

$$f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos2x}\,dx$$

在 $(0,+\infty)$ 只有两个零点,先考虑它的单调性:

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e}=\frac{e-x}{xe}\begin{cases}>0, & 0<x<e,\\ =0, & x=e,\\ <0, & x>e,\end{cases}$$

$$f(e)=\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos2x}\,dx>0.$$

证法一　令

$$f(x)=\ln x-\frac{x}{e}+\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos^2x}\,dx.$$

由于
$$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos2x}\,dx=\sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin x\,dx=2\sqrt{2}.$$

取
$$x_1=e^{-4}\in(0,e),\quad f(x_1)=-4-e^{-5}+2\sqrt{2}<0;$$

取
$$x_2=e^4\in(e,+\infty),\quad f(x_2)=4-e^3+2\sqrt{2}<0.$$

又 $f(\mathrm{e})=\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x>0$，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续，分别在 (x_1,e) 与 (e,x_2) 内 $f(x)$ 各有一个零点.因

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}}=\begin{cases}>0, & x\in(0,\mathrm{e}),\\ <0, & x\in(\mathrm{e},+\infty).\end{cases}$$

$f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 与 $(\mathrm{e},+\infty)$ 分别单调上升与下降，所以在 $(0,\mathrm{e})$ 与 $(\mathrm{e},+\infty)$ 分别只有一个零点，即 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 只有两个零点.

证法二　令

$$f(x)=\ln x-\frac{x}{\mathrm{e}}+\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x.$$

由于 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 连续，$f(\mathrm{e})>0$.又

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\left[x\left(\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)+\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x\right]=-\infty,$$

则 $\exists\, x_1\in(0,\mathrm{e})$，$f(x_1)<0$；$\exists\, x_2\in(\mathrm{e},+\infty)$，$f(x_2)<0$，所以 $f(x)$ 在 (x_1,e) 与 (e,x_2) 分别有零点.同前可证 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 与 $(\mathrm{e},+\infty)$ 分别单调.因此 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 与 $(\mathrm{e},+\infty)$ 分别只有一个零点，即在 $(0,+\infty)$ 只有两个零点.

11. **分析**　令

$$F(x)=\int_0^{x}f(t)\mathrm{d}t,$$

则

$$F(0)=F(\pi)=0.$$

要完成证明，须通过条件 $\int_0^{\pi}f(x)\cos x\,\mathrm{d}x=0$，找到另一点 $\xi\in(0,\pi)$ 使 $F(\xi)=0$，再两次运用罗尔中值定理即可.

证法一　令

$$F(x)=\int_0^{x}f(t)\mathrm{d}t,\quad 0\leqslant x\leqslant\pi,$$

则有

$$F(0)=0,\quad F(\pi)=0.$$

又因为

$$\begin{aligned}0&=\int_0^{\pi}f(x)\cos x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\cos x\,\mathrm{d}F(x)=F(x)\cos x\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}F(x)\sin x\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\pi}F(x)\sin x\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以存在 $\xi\in(0,\pi)$，使 $F(\xi)\sin\xi=0$.因若不然，则在 $(0,\pi)$ 内，$F(x)\sin x$ 恒为正，或恒为负，

均与$\int_0^\pi F(x)\sin x\mathrm{d}x=0$矛盾.但当$\xi\in(0,\pi)$时，$\sin\xi\neq 0$,故$F(\xi)=0$.

由上证得

$$F(0)=F(\xi)=F(\pi)=0\quad(0<\xi<\pi).$$

再对$F(x)$在$[0,\xi],[\xi,\pi]$上分别用罗尔中值定理,知至少存在$\xi_1\in(0,\xi),\xi_2\in(\xi,\pi)$,使

$$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0,$$

即

$$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0.$$

证法二　由$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$,存在$\xi_1\in(0,\pi)$,使$f(\xi_1)=0$.因若不然,则在$(0,\pi)$内,$f(x)$恒为正,或恒为负,均与$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$矛盾.

若在$(0,\pi)$内$f(x)=0$仅有一个实根$x=\xi_1$,则由$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$推知，$f(x)$在$(0,\xi_1)$内与$(\xi_2,\pi)$内异号，不妨设在$(0,\xi_1)$内$f(x)>0$，在$(\xi_1,\pi)$内$f(x)<0$. 于是再由$\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=0$与$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=0$及$\cos x$在$[0,\pi]$上的单调性知:

$$0=\int_0^\pi f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\mathrm{d}x=\int_0^{\xi_1}f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\mathrm{d}x$$
$$+\int_{\xi_1}^\pi f(x)(\cos x-\cos\xi_1)\mathrm{d}x>0\quad 得出矛盾.$$

从而推知,在$(0,\pi)$内除ξ_1外，$f(x)=0$至少还有另一实根ξ_2,故知存在$\xi_1,\xi_2\in(0,\pi)$,$\xi_1\neq\xi_2$使

$$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0.$$

评注　本题是数1—4都用的一道考题(2000年).论证中易发生错误:①有些考生会引进$F(x)$,但只是说$F(x)$为$f(x)$的一个原函数,接下去就推知$F(0)=0,F(\pi)=0$.这是不对的,因为只设$F(x)$为$f(x)$的一个原函数，$F(x)$还是不确定的,之后的事无从谈起.这说明,许多考生不会用变上限积分$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$来表示一个确定的原函数,而只会用不定积分来表示.②有不少考生想到分部积分来处理,但做成

$$\int_0^\pi f(x)\cos x\mathrm{d}x=f(x)\sin x\Big|_0^\pi-\int_0^\pi\sin x\cdot f'(x)\mathrm{d}x.$$

题中未设$f'(x)$存在,这样做显然不合理.事实上做到这一步只要再动一下脑筋,改一个方向就可以得出正确的结果,但没有这么做.

12. **分析**　由欲证的等式可知,需要构造某个辅助函数并对它应用罗尔定理.而这一辅

助函数的求得,可以通过应用积分中值定理将题给的已知等式变形,从而得到启发(证法一);也可利用原函数法求出辅助函数,再在它的启发下对题给已知等式的右端应用积分中值定理(证法二).

证法一 由 $f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)dx$ 及积分中值定理知,至少存在一点 $\xi_1\in\left[0,\frac{1}{k}\right]\subset(0,1)$,使得

$$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}xe^{1-x}f(x)dx=\xi_1e^{1-\xi_1}f(\xi_1).$$

在$[\xi_1,1]$上,令 $\varphi(x)=xe^{1-x}f(x)$,那么 $\varphi(x)$ 在$[\xi_1,1]$上连续,在$(\xi_1,1)$上可导,且

$$\varphi(\xi_1)=f(1)=\varphi(1).$$

由罗尔定理,至少存在一点 $\xi\in(\xi_1,1)\subset(0,1)$,使得

$$\varphi'(\xi)=e^{1-\xi}[f(\xi)-\xi f(\xi)+\xi f'(\xi)]=0,$$

即

$$f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi).$$

证法二 辅助函数也可用原函数法求得,在欲证的等式中改 ξ 为 x 得

$$f'(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)f(x).$$

解此方程,所以

$$f(x)=Ce^{\int\left(1-\frac{1}{x}\right)dx}=Ce^{x-\ln x}=\frac{Ce^x}{x}\quad(x>0),$$

即

$$xe^{-x}f(x)=C.$$

于是得辅助函数

$$g(x)=xe^{-x}f(x)\quad(\text{与证法一 }\varphi(x)\text{ 仅差一个常数因子 e}),$$

$$g(1)=\frac{1}{e}f(1),$$

而题给的已知等式成为

$$f(1)=k\int_0^{\frac{1}{k}}eg(x)dx=k\cdot\frac{1}{k}eg(\xi_1),$$

所以

$$g(\xi_1)=\frac{1}{e}f(1)=g(1)\quad\left(0\leqslant\xi_1\leqslant\frac{1}{k}<1\right).$$

于是得以在区间$[\xi_1,1]$上对 $g(x)$ 应用罗尔定理有

$$g'(\xi)=e^{-\xi}[f(\xi)-\xi f(\xi)+\xi f'(\xi)]=0,$$

即

$$f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi).$$

13. **证法一** (1) 任给非零 $x\in(-1,1)$,由拉格朗日中值定理得:

$$f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)\quad(0<\theta(x)<1).$$

因为 $f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 内连续且 $f''(x)\neq 0$，所以 $f''(x)$ 在 $(-1,1)$ 内不变号，不妨设 $f''(x)>0$，则 $f'(x)$ 在 $(-1,1)$ 内严格单增，故 $\theta(x)$ 惟一.

(2) 由泰勒公式得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2\quad(\xi\text{ 在 }0\text{ 与 }x\text{ 之间}),$$

所以
$$xf'(\theta(x)x)=f(x)-f(0)=f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2,$$

从而
$$\theta(x)\frac{f'(\theta(x)x)-f'(0)}{\theta(x)x}=\frac{1}{2}f''(\xi).$$

由于
$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(\theta(x)x)-f'(0)}{\theta(x)x}=f''(0),$$
$$\lim_{x\to 0}f''(\xi)=\lim_{\xi\to 0}f''(\xi)=f''(0),$$

故
$$\lim_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}.$$

证法二　(1) 同证法一.

(2) 对于非零 $x\in(-1,1)$，由拉格朗日中值定理得

$$f(x)=f(0)+xf'(\theta(x)x)\quad(0<\theta(x)<1),$$

所以
$$\frac{f'(\theta(x)x)-f'(0)}{x}=\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}.$$

由于
$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(\theta(x)x)-f'(0)}{\theta(x)x}=f''(0),$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{2x}=\frac{1}{2}f''(0).$$

故
$$\lim_{x\to 0}\theta(x)=\frac{1}{2}.$$

14. **解**　(1) $f(x)$ 的带拉格朗日余项的麦克劳林公式为：对任意 $x\in[-a,a]$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2=f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2.\qquad(*)$$

(2) 将式(*)两端从 $-a$ 到 a 积分得

$$\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-a}^{a}f'(0)x\mathrm{d}x+\int_{-a}^{a}\frac{x^2}{2}f''(\xi)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}x^2f''(\xi)\mathrm{d}x,\qquad(**)$$

因为 $f''(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续，故对任意的 $x\in[-a,a]$，有 $m\leqslant f''(x)\leqslant M$，其中 M,m 分别为 $f''(x)$ 在 $[-a,a]$ 上的最大，最小值，所以有

$$\frac{m}{3}a^3=m\int_0^a x^2\mathrm{d}x\leqslant\int_{-a}^{a}f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int_{-a}^{a}x^2f''(\xi)\mathrm{d}x\leqslant M\int_0^a x^2\mathrm{d}x=\frac{M}{3}a^3,$$

即
$$m \leqslant \frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x \leqslant M.$$

因而由 $f''(x)$ 的连续性知,至少存在一点 $\eta \in [-a,a]$,使
$$f''(\eta) = \frac{3}{a^3}\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x,$$
即
$$a^3 f''(\eta) = 3\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$

评注 本题若由式(* *)推出
$$\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}f''(\xi)\int_{-a}^{a} x^2\mathrm{d}x = f''(\xi)\int_{0}^{a} x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{3}a^3 f''(\xi). \qquad (* * *)$$
所以存在 $\xi \in (-a,a)$,使得
$$a^3 f''(\xi) = 3\int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x.$$

上述证明是错误的,错在式(* *)中 ξ 不是常数,ξ 介于0与 x 之间,它依赖于 x 而变化,所以式(* * *)中 $f''(\xi)$ 不能从积分号内提到积分号外.

15. **分析** 关键是证明存在 $\xi \in (a,b)$,使 $f(\xi)=0$,因为由 $f(a)=f(\xi)=f(b)$,应用罗尔定理容易证明存在 $\eta \in (a,b)$ 使 $f'(\eta)=0$.下面用两种方法证明第一步.

证法一 因 $f(x)$ 在$[a,b]$上二阶可导,故 $f'(x)$ 在$[a,b]$上连续.不妨设 $f'(a)>0$,$f'(b)>0$,则存在 $\delta_1>0,\delta_2>0$,使得 $f'(x)>0$, $x \in [a,a+\delta_1]$, $x \in [b-\delta_2,b]$.于是 $f(x)$ 在这两个区间上严格增加,因此存在 $x_1 \in (a,a+\delta_1)$,存在 $x_2 \in (b-\delta_2,b)$ 使 $f(x_1) > f(a)=0$, $f(x_2) < f(b)=0$,且 $x_1<x_2$,在区间$[x_1,x_2]$上应用零点定理知,存在 $\xi \in (x_1,x_2) \subset (a,b)$,使得 $f(\xi)=0$.

由于 $f(x)$ 在$[a,b]$上可导,
$$f(a)=f(\xi)=f(b)=0,$$
在$[a,\xi]$和$[\xi,b]$上分别应用罗尔定理,则存在 $\xi_1 \in (a,\xi)$,存在 $\xi_2 \in (\xi,b)$,使 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$,再由 $f'(x)$ 在$[a,b]$上可导,在$[\xi_1,\xi_2]$上应用罗尔定理,则存在 $\eta \in (\xi_1,\xi_2) \subset (a,b)$,使得 $f''(\eta)=0$.

证法二 用反证法.若不存在 $\xi \in (a,b)$ 使 $f(\xi)=0$,则在区间(a,b)内恒有 $f(x)>0$ 或 $f(x)<0$.不妨设 $f(x)>0$(对 $f(x)<0$,类似可证),则
$$f'(b) = \lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b} = \lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{x-b} \leqslant 0,$$
$$f'(a) = \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a} \geqslant 0,$$
从而 $f'(a)f'(b) \leqslant 0$.这与已知矛盾,这即证得在(a,b)内至少存在一点 ξ,使 $f(\xi)=0$.

余下证明同证法一.

16. **证**　(1) 用反证法,若存在点 $c \in (a,b)$,使 $g(c)=0$,则对 $g(x)$ 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上可分别应用罗尔定理,知存在 $\xi_1 \in (a,c)$ 和 $\xi_2 \in (c,b)$ 使

$$g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0.$$

再对 $g'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上应用罗尔定理,知存在 $\xi_3 \in (\xi_1,\xi_2)$,使 $g''(\xi_3)=0$.与题设 $g''(x) \neq 0$ 矛盾,故在 (a,b) 内 $g(x) \neq 0$.

(2) 令 $\varphi(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$.易知 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$,对 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上应用罗尔定理,知存在 $\xi \in (a,b)$,使 $\varphi'(\xi)=0$,即

$$f(\xi)g''(\xi) - f''(\xi)g(\xi) = 0.$$

因
$$g(\xi) \neq 0, \quad g''(\xi) \neq 0,$$

故得
$$\frac{f(\xi)}{g(\xi)} = \frac{f''(\xi)}{g''(\xi)}.$$

17. **分析**　设

$$F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$

则要证明

$$F(\xi) = (1-\xi)F'(\xi).$$

为此将 ξ 换为 x,

$$F(x) = (1-x)F'(x),$$

即
$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{1}{1-x},$$

所以
$$\ln F(x) = -\ln(1-x) + \ln C,$$

所以
$$F(x) = \frac{C}{1-x},$$

即
$$(1-x)F(x) = C.$$

所以设辅助函数

$$\varphi(x) = F(x) - xF(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t.$$

证　取

$$\varphi(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$

有
$$\varphi(0) = \varphi(1) = 0,$$

$\varphi(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足罗尔定理条件,于是知存在 $\xi \in (0,1)$,使

$$\varphi'(\xi) = 0,$$

即
$$f(\xi) - \int_0^\xi f(t)\mathrm{d}t - \xi f(\xi) = 0.$$

从而
$$\int_0^{\xi} f(t)\mathrm{d}t = (1-\xi)f(\xi).$$

为证 ξ 的惟一性,用反证法,设存在 $\xi_1 < \xi_2$, $\xi_1 \in (0,1)$, $\xi_2 \in (0,1)$,使
$$\int_0^{\xi_1} f(t)\mathrm{d}t = (1-\xi_1)f(\xi_1), \quad \int_0^{\xi_2} f(t)\mathrm{d}t = (1-\xi_2)f(\xi_2),$$
两式相减:
$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} f(t)\mathrm{d}t = f(\xi_2) - f(\xi_1) - \xi_2 f(\xi_2) + \xi_1 f(\xi_1)$$
$$= (1-\xi_2)(f(\xi_2) - f(\xi_1)) - (\xi_2 - \xi_1)f(\xi_1).$$
由条件,左边为正,右边为负,矛盾.故结论成立.

18. **证** 作
$$\varphi(x) = f(x)\mathrm{e}^{-g(x)}, \quad \varphi'(x) = \mathrm{e}^{-g(x)}(f'(x) - f(x)g'(x)).$$
若在 (a,b) 内至少存在两个不同的点 ξ_1, ξ_2,使 $f(\xi_1) = f(\xi_2) = 0$.从而 $\varphi(\xi_1) = \varphi(\xi_2) = 0$.则由罗尔定理知,至少存在一点 ξ 介于 ξ_1, ξ_2 之间,使 $\varphi'(\xi) = 0$,于是有 $f'(\xi) - f(\xi)g'(\xi) = 0$.与题设矛盾,即在 (a,b) 内至多存在一点 ξ,使 $f(\xi) = 0$.

19. **证** 由条件知,存在 $\eta \in \left[0, \dfrac{2}{\pi}\right]$,使
$$\frac{2}{\pi}\mathrm{e}^{f(\eta)}\arctan\eta = \frac{1}{2},$$
改写成
$$\mathrm{e}^{f(\eta)}\arctan\eta = \frac{\pi}{4} = \mathrm{e}^{f(1)}\arctan 1.$$
另一方面,欲证之式可改写为:
$$f'(\xi)\arctan\xi + \frac{1}{1+\xi^2} = 0,$$
作:
$$\varphi(x) = \mathrm{e}^{f(x)}\arctan x.$$
由条件知 $\varphi(x)$ 在 $[\eta, 1]$ 上连续,$(\eta, 1)$ 内可导,
$$\varphi(\eta) = \varphi(1) = \frac{\pi}{4}.$$
故知存在 $\xi \in (\eta, 1) \subset [0,1]$,使
$$\varphi'(\xi) = 0,$$
即
$$\mathrm{e}^{f(\xi)}\left[f'(\xi)\arctan\xi + \frac{1}{1+\xi^2}\right] = 0.$$
于是
$$f'(\xi)\arctan\xi + \frac{1}{1+\xi^2} = 0,$$
即
$$(1+\xi^2)(\arctan\xi)f'(\xi) = -1.$$

评注 也可以这样求出辅助函数:将原式中 ξ 换成 x,变形有

$$f'(x)=\frac{-1}{(1+x^2)\arctan x},$$

两边积分：
$$f(x)=-\ln\arctan x+\ln C,$$
有
$$C\arctan^{-1}x=e^{f(x)},$$
所以
$$e^{f(x)}\cdot\arctan x=C.$$
令
$$\varphi(x)=e^{f(x)}\arctan x.$$

20. **分析**　(1) 和(2) 都需构造辅助函数.

(1) 所欲证的等式中不含导数，用连续函数的介值定理即可证明，于是欲证 $f(\eta)=\eta$ 即知辅助函数可取为 $\varphi(x)=f(x)-x$.

(2) 欲证的等式可改写成含有导数等于零的等式，因而需对辅助函数 $F(x)$ 应用罗尔定理. $F(x)$ 可用原函数法求得.即：改 ξ 为 x，得
$$f'(x)-\lambda[f(x)-x]=1,$$
即
$$f'(x)-\lambda f(x)=1-\lambda x.$$

由一阶线性非齐次微分方程的通解公式，得
$$f(x)=e^{\int\lambda dx}\left[\int(1-\lambda x)e^{-\int\lambda dx}dx+C\right]=e^{\lambda x}\left[C+\int e^{-\lambda x}(1-\lambda x)dx\right]$$
$$=e^{\lambda x}\left[C+\int e^{-\lambda x}dx-\lambda\int xe^{-\lambda x}dx\right]=e^{\lambda x}[C+xe^{-\lambda x}]=Ce^{\lambda x}+x,$$
即
$$(f(x)-x)e^{-\lambda x}=C.$$
故辅助函数可取为：
$$F(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x].$$

证　(1) 令 $\varphi(x)=f(x)-x$，则 $\varphi(x)$ 在$[0,1]$上连续，又 $\varphi(1)=-1<0$，$\varphi\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}>0$，故由闭区间上连续函数的介值定理知，存在 $\eta\in\left[\frac{1}{2},1\right]$，使得
$$\varphi(\eta)=f(\eta)-\eta=0,$$
即
$$f(\eta)=\eta.$$

(2) 设
$$F(x)=e^{-\lambda x}\varphi(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x],$$
则 $F(x)$ 在$[0,\eta]$上连续，在$(0,\eta)$内可导，且
$$F(0)=0,\quad F(\eta)=e^{-\lambda\eta}\varphi(\eta)=0,$$
即 $F(x)$ 在$[0,\eta]$上满足罗尔定理的条件，故存在 $\xi\in(0,\eta)$，使得

$$F'(\xi)=0,$$

即
$$e^{-\lambda\xi}[f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]-1]=0,$$

从而
$$f'(\xi)-\lambda[f(\xi)-\xi]=1.$$

评注 (2) 中既然涉及到(1) 中的 η,所以在对(2) 构造辅助函数时,也应考虑到与(1) 中的 $\varphi(x)$ 有关,这样对(2) 可以更快地构造出辅助函数.

第三章　一元函数积分学

一、本章的重点内容与常见的典型题型

本章和一元函数微分学一样，重点内容可分为概念部分、运算部分、理论证明部分以及应用部分.

1. 概念部分：原函数的概念，定积分、不定积分的概念，以及反常积分的概念. 考试的重点偏重对定积分概念的理解上；

2. 运算部分：变上限积分及其导数；定积分和不定积分的换元法和分部积分法；

3. 理论部分：变上限定积分及其求导定理，牛顿 - 莱布尼茨公式，积分中值定理；

4. 应用部分：利用定积分求面积、旋转体体积及引力、功等物理量.

常见题型有：

1. 计算题：计算不定积分、定积分及反常积分；

2. 关于变上限积分题目，如求导，求极限等；

3. 关于积分中值定理的证明题；

4. 利用定积分求面积、旋转体体积及引力、功等物理量；

5. 综合性试题.

二、习　　题

(一) 填空题

1. (1) 设$\int xf(x)\mathrm{d}x = \arcsin x + C$，则$\int \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} = $ ________；

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\frac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\cos^2\frac{k\pi}{n} = $ ________.

2. 设 $f(x)$ 为连续函数，且 $f(x) = x + 2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，则 $f(x) = $ ________.

3. $\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(x+7)\sqrt{x-2}} = $ ________.

4. 设 $f(x)$ 是连续函数,且$\int_0^{x^3-1} f(t)\mathrm{d}t = x$,则 $f(7) =$ ________.

5. 设 $f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x \leqslant 0, \\ \mathrm{e}^{-x}, & x > 0, \end{cases}$ 则$\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}x =$ ________.

6. 函数 $F(x) = \int_1^x \left(2 - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t \quad (x > 0)$ 的单调减少区间为________.

7. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \sin(x-t)^2\mathrm{d}t =$ ________.

8. $\int_0^1 \sqrt{2x - x^2}\mathrm{d}x =$ ________.

9. $\int_{-1}^1 x(1 + x^{2001})(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x =$ ________.

10. 由曲线 $y = \ln x$ 与两直线$y = \mathrm{e} + 1 - x$ 及$y = 0$ 围成平面图形的面积 $S =$ ________.

11. 由参数方程$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ (摆线) 及 x 轴围成平面图形的面积 $S =$ ________.

(二) 选择题

1. 下列结果错误的有(　　)个.

(1) $\int_0^\pi \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin^{\frac{3}{2}} x\cos x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}} x\Big|_0^\pi = 0$;

(2) $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^1 = -2$;

(3) $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x = \arctan\frac{1}{x}\Big|_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}$;

(4) 若 $m \leqslant f(x) \leqslant M$,则 $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$.

(A) 1 个;　　(B) 2 个;　　(C) 3 个;　　(D) 4 个.

2. 函数 $F(x) = \int_x^{x+2\pi} \mathrm{e}^{\sin t}\sin t\,\mathrm{d}t$ (　　).

(A) 为正数;　　(B) 为负数;　　(C) 恒为零;　　(D) 不是常数.

3. 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2}\cos^4 x\,\mathrm{d}x$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + \cos^4 x)\mathrm{d}x$, $P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2\sin^3 x - \cos^4 x)\mathrm{d}x$, 则(　　).

(A) $N < P < M$;　　(B) $M < P < N$;

(C) $N < M < P$;　　(D) $P < M < N$.

4. 设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则(　　).

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 必为偶函数；

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必为奇函数；

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 必为周期函数；

(D) 当 $f(x)$ 是单调增加函数时，$F(x)$ 必为单调增函数.

5. (1) 下列可表示双纽线 $(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$ 围成平面区域的面积是(　　)；

(A) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos2\theta\mathrm{d}\theta$；　　(B) $4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos2\theta\mathrm{d}\theta$；

(C) $2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos2\theta}\mathrm{d}\theta$；　　(D) $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2 2\theta\mathrm{d}\theta$；

(2) 由曲线 $y=x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴围成平面图形的面积 $S=$(　　)；

(A) $\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x-\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$；

(B) $-\int_0^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$；

(C) $-\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x+\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$；

(D) $\int_0^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$.

6. 设 $f(x)$ 为已知连续函数，$I=t\int_0^{\frac{S}{t}}f(tx)\mathrm{d}x$，其中 $S>0,t>0$，则 I 的值(　　).

(A) 依赖于 S 和 t；　　(B) 依赖于 S,t,x；

(C) 依赖于 t 和 x，不依赖于 S；　　(D) 依赖于 S，不依赖于 t.

7. 设 $f(x)$ 是连续函数，且 $F(x)=\int_x^{e^{-x}}f(t)\mathrm{d}t$，则 $F'(x)$ 等于(　　).

(A) $-e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$；　　(B) $-e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$；

(C) $e^{-x}f(e^{-x})-f(x)$；　　(D) $e^{-x}f(e^{-x})+f(x)$.

8. 设 $f(x)$ 有连续导数，

$$f(0)=0,\quad f'(0)\neq0,\quad F(x)=\int_0^x(x^2-t^2)f(t)\mathrm{d}t,$$

且当 $x\to0$ 时，$F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 k 等于(　　).

(A) 1；　　(B) 2；　　(C) 3；　　(D) 4.

9. 设在区间 $[a,b]$ 上

$$f(x)>0,\quad f'(x)<0,\quad f''(x)>0.$$

令 $S_1 = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$, $S_2 = f(b)(b-a)$, $S_3 = \frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$,

则(　　).

(A) $S_1 < S_2 < S_3$;　　(B) $S_2 < S_1 < S_3$;

(C) $S_3 < S_1 < S_2$;　　(D) $S_2 < S_3 < S_1$.

10. 设 $I = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)\mathrm{d}x$,则(　　).

(A) $I = \frac{2}{3}$;　　(B) $I = 0$;

(C) $I = -\frac{1}{3}$;　　(D) $I \neq \frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{3}$.

(三) 解答题

1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, $x \in (a,b)$,证明:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_a^x [f(t+h)-f(t)]\right]\mathrm{d}t = f(x)-f(a).$$

2. 设 $f(x) = \begin{cases}\sin 2x, & x \leqslant 0,\\ \ln(2x+1), & x > 0,\end{cases}$ 求 $f(x)$ 的原函数 $F(x)$.

3. 计算 $I = \int_1^3 \sqrt{|x(x-2)|}\mathrm{d}x$.

4. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足 $f(x) = f(x-\pi)+\sin x$,且 $f(x) = x, x\in[0,\pi)$,计算

$$I = \int_{\pi}^{3\pi} f(x)\mathrm{d}x.$$

5. 求 $\int \frac{\arctan e^x}{e^{2x}}\mathrm{d}x$.

6. 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

7. 设 $f(\ln x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$,计算 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

8. 设函数 $S(x) = \int_0^x |\cos t|\mathrm{d}t$,

(1) 当 n 为正整数,且 $n\pi \leqslant x < (n+1)\pi$ 时,证明 $2n \leqslant S(x) < 2(n+1)$;

(2) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x}$.

9. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义,对于任意的 x, y,恒有 $f(x+y) = f(x)+f(y)$,求

$$\int_{-a}^{a} f(x)(1+\cos x)\mathrm{d}x.$$

10. 求$\int_a^b x\sqrt{(x-a)(b-x)}\mathrm{d}x$.

11. 设$f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t}\mathrm{d}t$,求$\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x$.

(类似) 设$f(x)=\int_{x-1}^2 \mathrm{e}^{y^2}\mathrm{d}y$,求$\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

12. 设$f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}$且$f(\varphi(x))=\ln x$,求$\int\varphi(x)\mathrm{d}x$.

13. 求$\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\mathrm{d}x$.

14. 设$f(x),g(x)$在区间$[-a,a]$ $(a>0)$上连续,$g(x)$为偶函数,且$f(x)$满足条件

$$f(x)+f(-x)=A\quad(A\text{ 为常数}).$$

(1) 证明:$\int_{-a}^a f(x)g(x)\mathrm{d}x=A\int_0^a g(x)\mathrm{d}x$;

(2) 利用(1)的结论计算$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\arctan\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

15. 设$f(x)$在$[0,1]$上连续且递减,证明:当$0<\lambda<1$时,$\int_0^{\lambda} f(x)\mathrm{d}x\geqslant\lambda\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

16. 对于$x\geqslant 0$,证明$f(x)=\int_0^x (t-t^2)\sin^{2n}t\,\mathrm{d}t$ (n为自然数)的最大值不超过

$$\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}.$$

17. 设$f(x)$在$[a,b]$有二阶连续导数,$f(a)=f(b)=0$,$M=\max\limits_{[a,b]}|f''(x)|$.证明:

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{(b-a)^3}{12}M.$$

18. 设$f(x)$在$[0,1]$可导,$f(0)=0$,$0<f'(x)\leqslant 1$.试证:

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2\geqslant\int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x.$$

19. 设$f(x)$在$[0,+\infty)$上可导,$f(0)=0$,且其反函数$g(x)$.若$\int_0^{f(x)} g(t)\mathrm{d}t=x^2\mathrm{e}^x$,求$f(x)$.

20. 设$y=f(x)$是区间$[0,1]$上任一非负连续函数.

(1) 试证:存在点$x_0\in(0,1)$,使得在区间$[0,x_0]$上以$f(x_0)$为高的矩形面积,等于在区间$[x_0,1]$上以$y=f(x)$为曲边的曲边梯形面积;

(2) 又设$f(x)$在区间$(0,1)$内可导,且$f'(x)>-\frac{f(x)}{x}$,证明:(1)中的x_0点是惟一的.

21. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续,以 T 为周期.令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,求证:

(1) $F(x)$ 一定能表成:$F(x)=kx+\varphi(x)$,其中 k 为某常数,$\varphi(x)$ 是以 T 为周期的周期函数;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$;

(3) 若又有 $f(x)\geqslant 0\ (x\in(-\infty, +\infty))$,$n$ 为自然数,则 $nT\leqslant x<(n+1)T$ 时,有

$$n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^x f(t)\mathrm{d}t<(n+1)\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

22. 设曲线 L_1: $y=1-x^2(0\leqslant x\leqslant 1)$,$x$ 轴和 y 轴所围区域 D 被曲线 L_2: $y=ax^2$ 分成面积相等的两部分,其中 $a>0$ 是常数.试确定 a 的值.

23. 已知抛物线 $y=px^2+qx$(其中 $p<0, q>0$)在第一象限内与直线 $x+y=5$ 相切,且此抛物线与 x 轴所围成的平面图形的面积为 S,

(1) 问 p 和 q 何值时,S 达最大值?

(2) 求出此最大值.

24. 设 $f(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\frac{xt+1}{xt+2}\right)^{x^3t}$,$g(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.求

(1) $y=g(x)$ 的所有水平渐近线;

(2) 求该曲线与其所有水平渐近线,y 轴围成的图形的面积.

25. (1) 设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续且 $g(x)<f(x)<m$,则由曲线 $y=f(x), y=g(x)$,直线 $x=a, x=b$ 围成的平面图形绕直线 $y=m$ 旋转而成的旋转体体积 $V=(\quad)$.

(A) $\int_a^b \pi[2m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$;

(B) $\int_a^b \pi[2m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$;

(C) $\int_a^b \pi[m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$;

(D) $\int_a^b \pi[m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]\mathrm{d}x$.

(2) 题(1)中的平面图形绕直线 $x=l$ 旋转而成的旋转体的体积 $V=?$,其中 $l>b$.

26. (1) 求由曲线 $x^2+y^2\leqslant 2x$ 与 $y\geqslant x$ 确定的平面图形绕直线 $x=2$ 旋转而成的旋转体体积;

(2) 求由曲线 $y=3-|x^2-1|$ 与 x 轴围成封闭曲线绕直线 $y=3$ 旋转而成的旋转体体积.

27. 设曲线方程 $y=\mathrm{e}^{-x}(x\geqslant 0)$.

(1) 把曲线 $y = e^{-x}$，x 轴，y 轴和直线 $x = \xi\ (\xi > 0)$ 所围平面图形绕 x 轴旋转一周，得一旋转体，求此旋转体体积 $V(\xi)$；求满足 $V(a) = \frac{1}{2}\lim\limits_{\xi\to+\infty} V(\xi)$ 的 a；

(2) 在此曲线上找一点，使过该点的切线与两个坐标轴所夹平面图形的面积最大，并求出该面积.

28. 为清除井底的污泥，用缆绳将抓斗放入井底，抓起污泥后提出井口. 已知井深30 m，抓斗自重 400 N，缆绳每米重 50 N，抓斗抓起的污泥重 2000 N，提升速度 3 m/s，在提升过程中，污泥以 20 N/s 的速率从抓斗缝隙中漏掉. 现将抓起污泥的抓斗提升至井口，问克服重力需作多少焦耳的功?

(说明：① 1 N · 1 m = 1 J；m，N，s，J 分别表示米，牛顿，秒，焦耳. ② 抓斗的高度及位于井口上方的缆绳长度忽略不计).

29. 有一椭圆形板，长半轴为 a，短半轴为 b，薄板垂直于水平，而其短半轴与水平相齐，求水对薄板的侧压力.

30. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有连续的二阶导数，且 $f(a) = f(b) = 0$，当 $x \in (a,b)$ 时，$f(x) \neq 0$，证明：$\int_a^b \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx \geqslant \frac{4}{b-a}$.

三、习题的解答与分析

(一) 填空题

1. 应填：(1) $-\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + C$.　　(2) $\frac{\pi}{2}$.

分析　题设的等式说明

$$(\arcsin x)' = xf(x).$$

所以
$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}},\quad \frac{1}{f(x)} = x\sqrt{1-x^2},$$

$$\int \frac{1}{f(x)}dx = -\frac{1}{2}\int \sqrt{1-x^2}\,d(1-x^2) = -\frac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + C.$$

分析　这是求和式的极限，和式类似于积分和，将它转化成积分和，利用定积分求这个极限.

注意到

$$\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx = \lim_{n\to+\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{k\pi}{n},$$

则有
$$\lim_{n\to+\infty}\sin\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{k\pi}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\cdot\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\cos^2\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{\pi}{n}$$
$$=1\times\int_0^{\pi}\cos^2x\,dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2x\,dx=\frac{\pi}{2}.$$

2. 应填：$x-1$.

分析 定积分是积分和的极限，当被积函数与积分区间确定后，它是一个确定的数. 若记 $\int_0^1 f(t)dt=A$，那么求 $f(x)$ 就是求常数 A，将原式从 0 到 1 积分，则有
$$A=\int_0^1 x\,dx+2A,\quad A=-\frac{1}{2},$$
故
$$f(x)=x-1.$$

3. 应填：$\frac{\pi}{3}$.

分析 在广义积分中，作换元，令 $x-2=t^2$，
$$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{(x+7)\sqrt{x-2}}=\int_0^{+\infty}\frac{2t\,dt}{(9+t^2)t}=2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{9+t^2}=\frac{2}{3}\arctan\frac{t}{3}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{3}.$$

4. 应填：$\frac{1}{12}$.

分析 等式
$$\int_0^{x^3-1}f(t)dt=x,$$
两边对 x 求导，得
$$3x^2f(x^3-1)=1,$$
令 $x=2$，得
$$12f(7)=1,\quad f(7)=\frac{1}{12}.$$

5. 应填：$\frac{7}{3}-\frac{1}{e}$.

分析 解此类问题一般有两种方法，一种是先由 $f(x)$ 的表达式求出 $f(x-2)$ 的表达式，然后再积分 $\int_1^3 f(x-2)dx$；另一种是对积分 $\int_1^3 f(x-2)dx$ 作变量代换 $x-2=t$，把原积分化为 $\int_{-1}^1 f(x)dx$ 再积分.

解法一 由 $f(x)=\begin{cases}1+x^2, & x<0,\\ e^{-x}, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 可知

$$f(x-2)=\begin{cases}1+(x-2)^2, & x-2<0,\\ e^{2-x}, & x\geqslant 2\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1+(x-2)^2, & x<2,\\ e^{2-x}, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

则
$$\int_1^3 f(x-2)\mathrm{d}x=\int_1^2[1+(x-2)^2]\mathrm{d}x+\int_2^3 e^{2-x}\mathrm{d}x=\frac{7}{3}-\frac{1}{e}.$$

解法二　令 $x-2=t$，则

$$原式=\int_{-1}^{1}f(t)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{0}(1+t^2)\mathrm{d}t+\int_0^1 e^{-t}\mathrm{d}t=\frac{7}{3}-\frac{1}{e}.$$

评注　本题主要考查定积分计算，解法二较为方便.

6．应填：$\left(0,\frac{1}{4}\right)$.

分析　$F'(x)=\left(2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\quad(x>0)$．令 $2-\frac{1}{\sqrt{x}}<0$，解得 $0<x<\frac{1}{4}$．则 $F(x)$ 的单调减少区间为 $\left(0,\frac{1}{4}\right)$.

评注　本题主要考查变上限求导和函数单调性的判定.

7．应填：$\sin x^2$.

分析　令 $x-t=u$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x\sin(x-t)^2\mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^0\sin u^2\mathrm{d}u=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x\sin u^2\mathrm{d}u=\sin x^2.$$

评注　本题主要考查定积分变量代换和变上限积分求导.

8．应填：$\frac{\pi}{4}$.

解法一　$原式=\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}x\xlongequal{x-1=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}$.

解法二　由定积分的意义知，积分 $\int_0^1\sqrt{2x-x^2}\mathrm{d}x$ 应等于圆 $x^2+y^2=2x$ 围成面积的 $\frac{1}{4}$，此圆的半径为 1，故得 $\frac{\pi}{4}$.

评注　本题主要考查定积分换元法(解法一)，但显然解法二最好.

9．应填：$\frac{4}{e}$.

分析　因为 $x(e^x-e^{-x})$ 为偶函数，$x^{2002}(e^x-e^{-x})$ 为奇函数，所以

$$原式=2\int_0^1 x(e^x-e^{-x})\mathrm{d}x=2\int_0^1 x\mathrm{d}(e^x+e^{-x})$$

$$= 2\left[x(e^x + e^{-x})\Big|_0^1 - \int_0^1 (e^x + e^{-x})dx\right] = \frac{4}{e}.$$

10．应填：$\frac{3}{2}$.

分析　见图 3-1，解方程组 $\begin{cases} y = \ln x, \\ y = e + 1 - x, \end{cases}$ 得惟一交点 $(e,1)$，所给曲线与直线分别交 x 轴于 $x = 1$ 及 $x = e+1$. 对 y 积分，则所求面积为

$$S = \int_0^1 [e + 1 - y - e^y]dy = \frac{3}{2}.$$

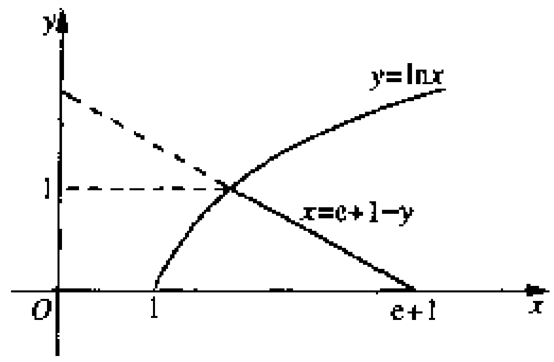


图　3-1

11．应填：$3\pi a^2$.

分析　$t \in [0,2\pi]$，曲线与 x 轴的交点是 $x = 0, 2\pi a$（相应于 $t = 0, 2\pi$）．曲线在 x 轴上方．所以

$$S = \int_0^{2\pi a} y(x)dx \xlongequal{x = a(t - \sin t)} \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)(a(t - \sin t))'dt$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 dt = a^2\int_0^{2\pi}(1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt = 3\pi a^2.$$

(二) 选择题

1．应选(D)．

分析　(1) $\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}} x$ 仅在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 是被积函数的原函数，在 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上的原函数是

$$-\frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}} x.$$

所以，应该分别在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 上应用基本定理(牛顿 - 莱布尼兹公式)．

(2) 错误出在该广义积分在瑕点 $x = 0$ 附近是发散的，因此不能直接应用牛顿 - 莱布尼兹公式．

(3) 错误出在 $\arctan\frac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 不连续，如果分别在 $[-1,0]$ 和 $[0,1]$ 上考虑，得到的是两个收敛的广义积分．即

$$原式 = \arctan\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{0} + \arctan\frac{1}{x}\Big|_0^1 = -\frac{\pi}{2}.$$

(4) 未假定 $b \geqslant a$，因此未必成立，实际上，当 $a > b$ 时，该不等式并不成立．

评注　本题是考察对微积分基本公式的理解．定理是这样叙述的：如果 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

这里强调两点，一是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，二是 $F(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的一个原函数. 上述几个题均不满足这两个条件.

2. 应选(A).

分析与求解　由于被积函数以 2π 为周期，则

$$F(x)=F(0)=\int_0^{2\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt,$$

即 $F(x)$ 为常数，由于被积函数是变号的，为确定定积分值的符号，有下列两种方法：

解法一　通过分部积分，转化为被积函数定号情形.

$$\int_0^{2\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt=-\int_0^{2\pi}e^{\sin t}d\cos t=\int_0^{2\pi}e^{\sin t}\cos^2 t\,dt>0.$$

解法二　通过变量替换比较正、负部分积分值的绝对值.

$$\int_0^{2\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt=\int_0^{\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt+\int_{\pi}^{2\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt,$$

$$\int_{\pi}^{2\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt\xlongequal{S=t-\pi}\int_0^{\pi}e^{\sin(S+\pi)}\sin(S+\pi)dS=-\int_0^{\pi}e^{-\sin t}\sin t\,dt.$$

因此

$$\int_0^{2\pi}e^{\sin t}\sin t\,dt=\int_0^{\pi}(e^{\sin t}-e^{-\sin t})\sin t\,dt>0.$$

$$(\because\ t\in(0,\pi)\text{ 时，}\ e^{\sin t}-e^{-\sin t}>0)$$

选择(A).

3. 应选(D).

解　由奇函数的积分性质，有

$$M=0,\quad N=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,dx>0,\quad P=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 x\,dx<0.$$

因此 $P<M<N$，故应选(D).

4. 应选(A).

分析　$f(x)$ 的原函数可以写成 $F(x)=\int_0^x f(t)dt+C$ 的形式. 则

$$F(-x)=\int_0^{-x}f(t)dt+C\xlongequal{令 u=-t}\int_0^{x}f(-u)d(-u)+C.$$

当 $f(x)$ 是奇函数时，$f(-u)=-f(u)$，从而有

$$F(-x)=\int_0^{x}f(u)du+C=F(x).$$

故(A)为正确选项.

当 $f(x)$ 是偶函数时，

$$F(-x)=-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+C\neq -F(x).\quad (\text{除非 } C=0)$$

故(B)不成立.

下面举例说明(C),(D)不成立,例 $f(x)=1+\cos x$ 为 $T=2\pi$,而原函数 $F(x)=x+\sin x$ 非周期函数;

又如 $y=x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 为单调增加函数,而 $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 非单调增加函数.

评注 本题只有 19% 考生选(A),而选(C)的有 58%.许多考生把可导周期函数的导函数也是周期函数,误理解为周期函数的原函数也是周期函数.

另外考生对用变上限函数表示原函数不清,这些都反映考生对原函数的概念认识不透.除此之外也说明考生举反例的能力也较差.

5.(1)应选(A).(2)应选(C).

分析 (1)双纽线的极坐标方程是:

$$r^4=r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta),$$

即

$$r^2=\cos 2\theta.$$

当 $\theta\in[0,2\pi]$ 时,仅当 $|\theta|\leqslant\dfrac{\pi}{4}$, $|\theta|\geqslant\dfrac{3}{4}\pi$ 时才有 $r\geqslant 0$.

由于曲线关于极轴与 y 轴均对称,只须考虑 $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 部分.由对称性及广义扇形面积计算公式得:

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta.$$

故应选(A).

(2)曲线 $y=x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴的交点是:$x=0,1,2$.

$$0<x<1\text{ 时},y<0,$$

$$1<x<2\text{ 时},y>0.$$

如图 3-2 所示.因此图形的面积

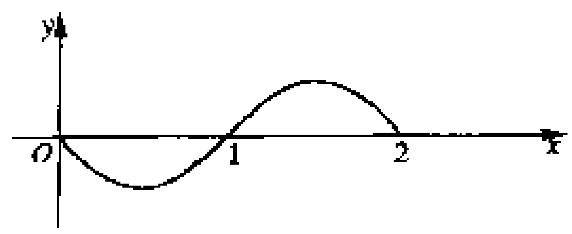


图 3-2

$$S=-\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x+\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x.$$

6. 应选(D).

分析 $$I=t\int_0^{\frac{S}{t}} f(tx)\mathrm{d}x \xlongequal{tx=u} \int_0^S f(u)\mathrm{d}u.$$

由此可见，I 的值只与 S 有关，所以应选(D).

评注　本题主要考查定积分的概念和变量代换.

7. 应选(A).

分析　由 $$F(x)=\int_x^{e^{-x}} f(t)\mathrm{d}t,$$

两边同时对 x 求导得

$$F'(x)=-\mathrm{e}^{-x}f(\mathrm{e}^{-x})-f(x).$$

故应选(A).

8. 应选(C).

分析　$F(x)=x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x t^2f(t)\mathrm{d}t$. 有

$$F'(x)=2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+x^2f(x)-x^2f(x)=2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{F'(x)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{x^{k-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)}{(k-1)x^{k-2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2f'(x)}{(k-1)(k-2)x^{k-3}},$$

由于 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)\neq 0$, 而上式右端极限存在且为非零常数，则 $k=3$，所以应选(C).

或本题只要能确定 $F(x)$ 是 x 的 n 阶无穷小，问题就得到解决. 在

$$F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f(t)\mathrm{d}t$$

的表达式中有一个一般函数 $f(t)$，这样一个一般的 $f(t)$ 它能决定 $F(x)$ 的阶数，那么取一个具体的 $f(t)$，比如取 $f(t)=t$，当然同样也可以决定结果. 将 $f(t)=t$ 代入 $\int_0^x(x^2-t^2)f(t)\mathrm{d}t$，得

$$\int_0^x (x^2-t^2)t\mathrm{d}t=\frac{x^4}{2}-\frac{x^4}{4}=\frac{x^4}{4},$$

显然它是 x 的四阶无穷小，从而 $F'(x)$ 是 x 的三阶无穷小，所以应选(C).

评注　本题主要考查变上限积分求导，洛必达法则及无穷小阶的比较.

9. 应选(B).

分析 由题设条件对 $f(x)$ 的图形进行分析,易知 $f(x)$ 在 x 轴上方,单调下降且向上凹,如图 3-3 所示, S_2 表示长方形 $ABCE$ 的面积, S_3 表示梯形 $ABCD$ 的面积, S_1 等于曲边梯形 $ABCD$ 的面积,从而有 $S_2 < S_1 < S_3$.

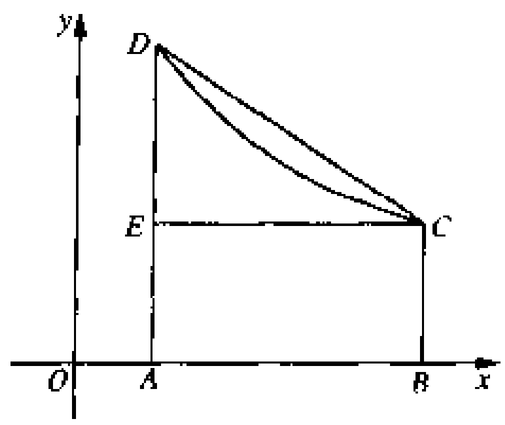


图 3-3

评注 本题主要考查利用函数的导数对函数图形的描述.

10. 应选(A).

分析 $I = \int_{-1}^{0^-} + \int_{0^+}^{1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)\mathrm{d}x$

$$= (1+2^{\frac{1}{x}})\Big|_{-1}^{0^-} + (1+2^{\frac{1}{x}})\Big|_{0^+}^{1} = \frac{2}{3}.$$

所以选择(A).

评注 零是无穷间断点.

(三) 解答题

1. **证** 因为 $f(x) \in C[a,b]$,所以 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 存在,显然 $F(a) = 0$. 由变上限积分的可导性,有

$$F'(x) = f(x).$$

又 $$\int_a^x f(t+h)\mathrm{d}t \xlongequal{令 u = t+h} \int_{a+h}^{x+h} f(u)\mathrm{d}u = \int_a^{x+h} f(u)\mathrm{d}u - \int_a^{a+h} f(u)\mathrm{d}u$$
$$= F(x+h) - F(a+h),$$

故 $$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_a^x [f(t+h) - f(t)]\mathrm{d}t\right] = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(a+h) - F(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x) - [F(a+h) - F(a)]}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{F(a+h) - F(a)}{h} = F'(x) - F'(a)$$
$$= f(x) - f(a).$$

2. **分析** 本题的被积函数是分段定义的连续函数,则 $f(x)$ 存在原函数,相应的原函数也应该分段定义. 而按照原函数的定义,

$$F'(x) = f(x),$$

即 $F(x)$ 必须是可导的,而且导数是 $f(x)$. 这样, $F(x)$ 首先就应该连续,下面就按照这一要求,把分段定义的原函数粘合在一起,构成一个整体的原函数.

解法一 当 $x < 0$ 时,

$$F(x)=\int \sin 2x\,dx=-\frac{1}{2}\cos 2x+C_1;$$

当 $x>0$ 时,

$$F(x)=\int \ln(2x+1)dx=x\ln(2x+1)-\int\frac{2x}{2x+1}dx$$
$$=x\ln(2x+1)-x+\frac{1}{2}\ln(2x+1)+C_2.$$

为了保证 $F(x)$ 在 $x=0$ 点连续,必须 $C_2=-\frac{1}{2}+C_1$,特别取 $C_1=0,C_2=-\frac{1}{2}$,即

$$F(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}\cos 2x, & x\leqslant 0,\\ x\ln(2x+1)-x+\frac{1}{2}\ln(2x+1)-\frac{1}{2}, & x>0,\end{cases}$$

就是 $f(x)$ 的一个原函数.

若 C_1 任意取值,

$$C_2=-\frac{1}{2}+C_1,$$

即
$$\int f(x)dx=\begin{cases}-\frac{1}{2}\cos 2x+C_1, & x\leqslant 0,\\ x\ln(2x+1)-x+\frac{1}{2}\ln(2x+1)-\frac{1}{2}+C_1, & x>0,\end{cases}$$

就是 $f(x)$ 的不定积分.

分析　$f(x)$ 是连续的,一定存在原函数,且对任意常数 a, $\int_a^x f(t)dt$ 均为一个原函数,这里 $x=0$ 是连接点,因此取 $a=0$ 计算方便些.

解法二　求 $\int_0^x f(t)dt$.

当 $x\leqslant 0$ 时,

$$\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x \sin 2t\,dt=-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2};$$

当 $x\geqslant 0$ 时,

$$\Phi(x)=\int_0^x f(t)dt=\int_0^x \ln(2t+1)dt=x\ln(2x+1)-x+\frac{1}{2}\ln(2x+1).$$

因此

$$F(x)=\int f(x)dx=\begin{cases}-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}+C, & x\leqslant 0,\\ x\ln(2x+1)-x+\frac{1}{2}\ln(2x+1)+C, & x>0.\end{cases}$$

3. **分析** 由于被积函数是一个式子绝对值的平方根，$x(x-2)$ 在[1,2]上取负值，在[2,3]上取正值，故要分成两个小区间[1,2]和[2,3]，再分别积分.

解
$$\int_1^3 \sqrt{|x(x-2)|}\mathrm{d}x = \int_1^2 \sqrt{x(2-x)}\mathrm{d}x + \int_2^3 \sqrt{x(x-2)}\mathrm{d}x$$
$$= \int_1^2 \sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}x + \int_2^3 \sqrt{(x-1)^2-1}\mathrm{d}x = I_1 + I_2.$$

令 $x-1=\sin t$，则得
$$I_1 = \int_1^2 \sqrt{1-(x-1)^2}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$

令 $x-1=\sec t$，则得
$$I_2 = \int_2^3 \sqrt{(x-1)^2-1}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 t\cdot\sec t\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{3}}(\sec^3 t-\sec t)\mathrm{d}t$$
$$= \tan t\cdot\sec t\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} - \int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 t\cdot\sec t\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{3}}\sec t\mathrm{d}t,$$

所以
$$I_2 = \frac{1}{2}\left[2\sqrt{3} - \ln(\sec t+\tan t)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}}\right] = \sqrt{3} - \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3}).$$

最后得
$$\int_1^3 \sqrt{|x(x-2)|}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} + \sqrt{3} - \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{3}).$$

4. **分析** 由于只给出了 $f(x)$ 在区间$[0,\pi)$的表达式，所以解此题可以利用换元法把在区间$[\pi,3\pi]$的积分逐步变成$[0,\pi)$上积分，也可以根据 $f(x)=f(x-\pi)+\sin x$，求出 $f(x)$ 在$[\pi,3\pi]$上的表达式，再积分.

解法一
$$\int_\pi^{3\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_\pi^{3\pi}[f(x-\pi)+\sin x]\mathrm{d}x = \int_\pi^{3\pi} f(x-\pi)\mathrm{d}x$$
$$\xlongequal{令 t=x-\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} f(t)\mathrm{d}t + \int_\pi^{2\pi}[f(t-\pi)+\sin t]\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2}\pi^2 - 2 + \int_\pi^{2\pi} f(t-\pi)\mathrm{d}t \xlongequal{令 u=t-\pi} \frac{\pi^2}{2} - 2 + \int_0^{\pi} f(u)\mathrm{d}u = \pi^2 - 2.$$

解法二 当 $x\in[\pi,2\pi)$ 时，$x-\pi\in[0,\pi)$. 由已知
$$f(x) = x \quad (x\in[0,\pi)),$$
得
$$f(x-\pi) = x-\pi.$$
所以，当 $x\in[\pi,2\pi)$ 时
$$f(x) = f(x-\pi)+\sin x = x-\pi+\sin x.$$

当 $x\in[2\pi,3\pi)$ 时，$x-\pi\in[\pi,2\pi)$，故由以上推导知

$$f(x-\pi)=[(x-\pi)-\pi]+\sin(x-\pi)=x-2\pi-\sin x,$$
$$\begin{aligned}f(x)&=f(x-\pi)+\sin x=x-2\pi-\sin x+\sin x\\&=x-2\pi,\quad x\in[2\pi,3\pi).\end{aligned}$$

这样就得到

$$f(x)=\begin{cases}x-\pi+\sin x, & x\in[\pi,2\pi),\\ x-2\pi, & x\in[2\pi,3\pi),\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\int_\pi^{3\pi}f(x)\mathrm{d}x&=\int_\pi^{2\pi}f(x)\mathrm{d}x+\int_{2\pi}^{3\pi}f(x)\mathrm{d}x=\int_\pi^{2\pi}(x-\pi+\sin x)\mathrm{d}x+\int_{2\pi}^{3\pi}(x-2\pi)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}(x-\pi)^2\Big|_\pi^{2\pi}-2+\frac{1}{2}(x-\pi)^2\Big|_{2\pi}^{3\pi}=\pi^2-2.\end{aligned}$$

5. **解**

$$\begin{aligned}\int\frac{\arctan e^x}{e^{2x}}\mathrm{d}x&=-\frac{1}{2}\int\arctan e^x\mathrm{d}(e^{-2x})\\&=-\frac{1}{2}\left[e^{-2x}\arctan e^x-\int\frac{\mathrm{d}e^x}{e^{2x}(1+e^{2x})}\right]\quad(\text{令 } e^x=u)\\&=-\frac{1}{2}\left[e^{-2x}\arctan e^x-\int\frac{1+u^2-u^2}{u^2(1+u^2)}\mathrm{d}u\right]\\&=-\frac{1}{2}\left[e^{-2x}\arctan e^x-\int\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u+\int\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u\right]\\&=-\frac{1}{2}\left[e^{-2x}\arctan e^x+\frac{1}{u}+\arctan u\right]+C\\&=-\frac{1}{2}(e^{-2x}\arctan e^x+e^{-x}+\arctan e^x)+C.\end{aligned}$$

6. **解**

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}&\xlongequal{\text{令 } x=\tan u}\int\frac{\sec^2u\,\mathrm{d}u}{\sec u(2\tan^2u+1)}\\&=\int\frac{\mathrm{d}u}{\cos u(2\tan^2u+1)}=\int\frac{\cos u\,\mathrm{d}u}{2\sin^2u+\cos^2u}=\int\frac{\mathrm{d}\sin u}{1+\sin^2u}\\&=\arctan(\sin u)+C=\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)+C.\end{aligned}$$

7. **分析**　本题的关键是求出 $f(x)$ 的一般表达式，在积分中，若能充分利用凑微分和初等方法可减少不少工作量.

解　设 $\ln x=t$，则 $x=e^t$，$f(t)=\dfrac{\ln(1+e^t)}{e^t}$.所以

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = -\int \ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}\mathrm{e}^{-x}$$

$$= -\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x) + \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$$

$$= -\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x) + \int\left(1 - \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= -\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x) + x - \ln(1+\mathrm{e}^x) + C.$$

8. **分析**　本题(1)是(2)的一个台阶;而(1)的证明,主要是利用被积函数 $|\cos t|$ 的周期性——每个周期上的积分值相等.利用(1)的不等式和夹逼准则可求得(2).

解　(1) 因为 $|\cos x| \geqslant 0$, 且 $n\pi \leqslant x < (n+1)\pi$, 所以

$$\int_0^{n\pi} |\cos x|\,\mathrm{d}x \leqslant S(x) < \int_0^{(n+1)\pi} |\cos x|\,\mathrm{d}x.$$

又因为 $|\cos x|$ 是以 π 为周期的函数,在每个周期上积分值相等,所以

$$\int_0^{n\pi} |\cos x|\,\mathrm{d}x = n\int_0^{\pi} |\cos x|\,\mathrm{d}x = 2n,$$

$$\int_0^{(n+1)\pi} |\cos x|\,\mathrm{d}x = 2(n+1).$$

因此,当 $n\pi \leqslant x < (n+1)\pi$ 时,有

$$2n \leqslant S(x) < 2(n+1).$$

(2) 由(1)知,当 $n\pi \leqslant x < (n+1)\pi$ 时,有

$$\frac{2n}{(n+1)\pi} < \frac{S(x)}{x} < \frac{2(n+1)}{n\pi}.$$

令 $x \to +\infty$,由夹逼准则得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{S(x)}{x} = \frac{2}{\pi}.$$

9. **解**　令 $y = 0$,由题设条件

$$f(x+0) = f(x) + f(0),$$

所以 $f(0) = 0$,又令 $y = -x$,有

$$0 = f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x),$$

即

$$f(-x) = -f(x).$$

所以 $f(x)$ 为奇函数,由于$(1+\cos x)$ 为偶函数,所以$(1+\cos x)f(x)$ 为奇函数,故

$$\int_{-a}^{a} f(x)(1+\cos x)\mathrm{d}x = 0.$$

10. **解**　由于

$$\sqrt{(x-a)(b-x)} = \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 - \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2},$$

故作平移变换 $x-\dfrac{a+b}{2}=t$，则

$$\int_a^b x\sqrt{(x-a)(b-x)}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}}\left(t+\frac{a+b}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-t^2}\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal[\text{积分为0}]{\text{奇函数在对称区间}}0+\frac{a+b}{2}\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}}\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2-t^2}\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal[\text{半圆的面积}]{\text{定积分的几何意义}}\frac{a+b}{2}\cdot\frac{1}{2}\pi\left(\frac{b-a}{2}\right)^2=\frac{\pi}{16}(a+b)(b-a)^2.$$

评注　在求积分时，常用到以下技巧：

1°　奇偶函数在对称区间上积分性质.

2°　计算中注意应用定积分的几何意义.

3°　被积函数的分解与结合；被积函数的分解即分项积分法.

11. **解**

$$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}(x-\pi)=f(x)(x-\pi)\Big|_0^\pi-\int_0^\pi f'(x)(x-\pi)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^\pi \sin x\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^\pi=2.$$

注意　$f(0)=0,\ f'(x)=\dfrac{\sin x}{\pi-x}$.

评注　题中将积分改写成

$$\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x=\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}(x-\pi).$$

使得分部积分后第一项取值为零，给计算带来方便，类似的“小技巧”在分部积分法中是常用的.

本题也可把所求积分看成是一个二重积分的累次积分，通过变换积分次序后求得它们的值.

$$\int_0^\pi \mathrm{d}x\int_0^x\frac{\sin y}{\pi-y}\mathrm{d}y=\iint_D\frac{\sin y}{\pi-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\xlongequal[\text{次序}]{\text{交换积分}}\int_0^\pi\mathrm{d}y\int_y^\pi\frac{\sin y}{\pi-y}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^\pi\frac{\sin y}{\pi-y}(\pi-y)\mathrm{d}y=-\cos y\Big|_0^\pi=2.$$

类似设 $f(x)=\int_{x-1}^2 e^{y^2}\mathrm{d}y$，求$\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x$.

$$I=x\int_{x-1}^2 e^{y^2}\mathrm{d}y\Big|_1^3+\int_1^3 xe^{(x-1)^2}\mathrm{d}x=-\int_0^2 e^{y^2}\mathrm{d}y+\int_1^3 xe^{(x-1)^2}\mathrm{d}x,$$

$$\int_1^3 x e^{(x-1)^2}dx \xlongequal{令 x-1=u} \int_0^2 (u+1)e^{u^2}du = \int_0^2 u e^{u^2}du + \int_0^2 e^{u^2}du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 e^{u^2}d(u^2) + \int_0^2 e^{u^2}du = \frac{1}{2}(e^4-1) + \int_0^2 e^{y^2}dy,$$

故
$$I = -\int_0^2 e^{y^2}dy + \frac{1}{2}(e^4-1) + \int_0^2 e^{y^2}dy = \frac{1}{2}(e^4-1).$$

12. **分析**　题目中函数方程给出了 $\varphi(x)$，要先求出 $\varphi(x)$ 再求积分.

解　由

$$f(x^2-1) = \ln\frac{x^2}{x^2-2} = \ln\frac{(x^2-1)+1}{(x^2-1)-1},$$

得
$$f(\varphi(x)) = \ln\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = \ln x,$$

则
$$\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1} = x,$$

即
$$\varphi(x) = \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}.$$

故
$$\int\varphi(x)dx = \int\left(1+\frac{2}{x-1}\right)dx = x + 2\ln(x-1) + C.$$

13. **解**

$$\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx = \int_0^{+\infty}\frac{xe^x dx}{(1+e^x)^2} = -\int_0^{+\infty}x\,d\left(\frac{1}{1+e^x}\right)$$

$$= -\frac{x}{1+e^x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+e^x} = -\int_0^{+\infty}\frac{de^{-x}}{1+e^{-x}}$$

$$= -\ln(1+e^{-x})\Big|_0^{+\infty} = \ln 2.$$

14. **证**　(1)

$$\int_{-a}^{a}f(x)g(x)dx = \int_{-a}^{0}f(x)g(x)dx + \int_0^a f(x)g(x)dx.$$

对于右端第一个积分，令 $x=-t$，则有

$$\int_{-a}^{a}f(x)g(x)dx = \int_0^a f(-t)g(-t)dt + \int_0^a f(x)g(x)dx$$

$$= \int_0^a f(-x)g(x)dx + \int_0^a f(x)g(x)dx$$

$$= \int_0^a [f(x)+f(-x)]g(x)dx = A\int_0^a g(x)dx.$$

(2) 由于 $|\sin x|$ 是偶函数，为使用(1)的结论，应证明：$\arctan e^x + \arctan e^{-x}$ 为常数. 由于

$$(\arctan e^{x}+\arctan e^{-x})'=\frac{e^{x}}{1+e^{2x}}-\frac{e^{-x}}{1+e^{-2x}}=0,$$

而且，由于

$$\arctan e^{x}+\arctan e^{-x}=\arctan e^{0}+\arctan e^{0}=\frac{\pi}{2},$$

所以
$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\arctan e^{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

15. **分析**

$$\int_{0}^{\lambda}f(x)\mathrm{d}x\geqslant\lambda\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\int_{0}^{\lambda}f(x)\mathrm{d}x-\lambda\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

若令
$$F(x)=\int_{0}^{x}f(t)\mathrm{d}t-x\int_{0}^{1}f(t)\mathrm{d}t,$$

则
$$F'(x)=f(x)-\int_{0}^{1}f(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}t-\int_{0}^{1}f(t)\mathrm{d}t$$
$$=\int_{0}^{1}[f(x)-f(t)]\mathrm{d}t,$$

无法判别其符号!

从另一角度出发，把左边的积分也换成右边的积分上、下限，为此

$$\int_{0}^{\lambda}f(x)\mathrm{d}x\xlongequal{\text{令}x=\lambda t}\int_{0}^{1}f(\lambda t)\lambda\mathrm{d}t=\lambda\int_{0}^{1}f(\lambda t)\mathrm{d}t.$$

于是
$$\int_{0}^{\lambda}f(x)\mathrm{d}x\geqslant\lambda\int_{0}^{1}f(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow\lambda\int_{0}^{1}f(\lambda t)\mathrm{d}t\geqslant\lambda\int_{0}^{1}f(t)\mathrm{d}t$$
$$\Leftrightarrow\lambda\int_{0}^{1}[f(\lambda t)-f(t)]\mathrm{d}t\geqslant 0.$$

令
$$F(x)=\lambda\int_{0}^{x}[f(\lambda t)-f(t)]\mathrm{d}t,$$
$$F'(x)=\lambda[f(\lambda x)-f(x)]\geqslant 0,$$

(因为 $\lambda\in(0,1)$，且 $f(x)$ 单调递减).

证法一　令

$$F(x)=\lambda\int_{0}^{x}[f(\lambda t)-f(t)]\mathrm{d}t,$$
$$F'(x)=\lambda[f(\lambda x)-f(x)],$$

因为 $\lambda\in(0,1)$，所以

$$\lambda\in(0,1),\quad x>\lambda x>0,$$

又 $f(x)$ 单调递减，所以

$$f(\lambda x) \geqslant f(x).$$

于是 $F'(x) \geqslant 0$, $F(x)$“↗”, 又 $F(0) = 0$, 故

$$F(1) \geqslant F(0) = 0,$$

即
$$\lambda\int_0^1 [f(\lambda t) - f(t)]\mathrm{d}t \geqslant 0.$$

亦即
$$\lambda\int_0^1 f(\lambda t)\mathrm{d}t \geqslant \lambda\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x,$$

故
$$\int_0^\lambda f(x)\mathrm{d}x \geqslant \lambda\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

证法二
$$\lambda\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \lambda\int_0^\lambda f(x)\mathrm{d}x + \lambda\int_\lambda^1 f(x)\mathrm{d}x,$$

所以

$$\begin{aligned}\int_0^\lambda f(x)\mathrm{d}x - \lambda\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x &= (1-\lambda)\int_0^\lambda f(x)\mathrm{d}x - \lambda\int_\lambda^1 f(x)\mathrm{d}x \\ &= \lambda(1-\lambda)[f(\xi_1) - f(\xi_2)] \geqslant 0,\end{aligned}$$

其中 $\xi_1 \in [0,\lambda]$, $\xi_2 \in [\lambda,1]$, 故 $\xi_1 \leqslant \xi_2$.

证法三 设

$$F(\lambda) = \int_0^\lambda f(x)\mathrm{d}x - \lambda\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x,$$

则
$$F(1) = F(0) = 0,$$

令
$$F'(\lambda) = f(\lambda) - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

显然由积分中值定理这样的 $\lambda_0 \in (0,1)$ 是存在的, 则当 $\lambda > \lambda_0$ 时,

$$F'(\lambda) = f(\lambda) - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = f(\lambda) - f(\lambda_0) < 0.$$

$\lambda < \lambda_0$ 时,

$$F'(\lambda) = f(\lambda) - f(\lambda_0) > 0,$$

故 λ_0 是 $F(\lambda)$ 的最大值点. $F(\lambda)$ 在$[0,1]$上的最小值为 $F(0) = F(1) = 0$, 即 $F(\lambda) \geqslant 0$, 得证.

16. **分析** 可利用求最值的方法证明, 下面给出此题的两种证法.

证法一 因为 $f'(x) = (x - x^2)\sin^{2n}x$, 所以,

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 在$[0,1]$上单调增;

当 $1 < x < +\infty$ 时, $f'(x) \leqslant 0$, 且仅在 $x = k\pi(k = 1,2,\cdots)$ 点处 $f'(x) = 0$, 故 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调下降;

当 $x = 1$ 时, $f'(x) = 0$. 由上述讨论可得 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取最大值.

因此，当 $x \in [0, +\infty)$ 时

$$f(x) \leqslant f(1) = \int_0^1 (t - t^2)\sin^{2n} t\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 (t - t^2) t^{2n}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}.$$

证法二

$$f(x) = \int_0^x (t - t^2)\sin^{2n} t\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 (t - t^2)\sin^{2n} t\,\mathrm{d}t + \int_1^x (t - t^2)\sin^{2n} t\,\mathrm{d}t.$$

因为当 $t \geqslant 1$ 时，$t - t^2 \leqslant 0$，所以

$$\int_1^x (t - t^2)\sin^{2n} t\,\mathrm{d}t \leqslant 0,$$

因此

$$f(x) \leqslant \int_0^1 (t - t^2)\sin^{2n} t\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 (t - t^2) t^{2n}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+3} = \frac{1}{(2n+2)(2n+3)}.$$

$\left(当 0 < t < 1 时，f(x) \leqslant \int_0^1 (t - t^2)\sin^{2n} t\,\mathrm{d}t 显然成立\right)$.

17. **分析**　用分部积分法导出 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 与 $f''(x)$ 的有关积分的关系．或由泰勒公式导出 $f(a)$（或 $f(b)$），$f(x)$，$f'(x)$ 及其二阶导数的关系，然后再积分．

证法一

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}(x-a) = -\int_a^b f'(x)(x-a)\mathrm{d}(x-b)$$

$$= \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\mathrm{d}x + \int_a^b f'(x)(x-b)\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\mathrm{d}x + \int_a^b (x-b)\mathrm{d}f(x)$$

$$= \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\mathrm{d}x,$$

因此

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{2}M\int_a^b (x-a)(b-x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}M\int_a^b (b-x)\mathrm{d}(x-a)^2$$

$$= \frac{1}{4}M\int_a^b (x-a)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{12}M(b-a)^3.$$

评注 用分部积分法证明积分不等式,实质上是使用分部积分法证明一个等式,然后再给出积分估计.

证法二 $\forall x \in (a,b)$,由泰勒公式得

$$0 = f(a) = f(x) + f'(x)(a-x) + \frac{1}{2}f''(\xi)(a-x)^2,$$

$$0 = f(b) = f(x) + f'(x)(b-x) + \frac{1}{2}f''(\eta)(b-x)^2,$$

其中 ξ,η 分别在 a 与 x 及 b 与 x 之间.两式相加得

$$f(x) = f'(x)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{4}[f''(\xi)(a-x)^2 + f''(\eta)(b-x)^2].$$

两边积分得,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f'(x)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x - \frac{1}{4}\int_a^b [f''(\xi)(a-x)^2 + f''(\eta)(b-x)^2]\mathrm{d}x,$$

其中 $$\int_a^b f'(x)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}f(x) = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

于是 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{8}\int_a^b [f''(\xi)(a-x)^2 + f''(\eta)(b-x)^2]\mathrm{d}x,$$

故 $$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M}{8}\int_a^b [(a-x)^2 + (b-x)^2]\mathrm{d}x = \frac{M}{12}(b-a)^3.$$

18. **分析** 即证

$$\left(\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right)^2 - \int_0^1 f^3(x)\mathrm{d}x \geqslant 0.$$

考察 $$F(x) = \left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2 - \int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t.$$

若能证明 $F(x) \geqslant 0\ (x \in [0,1])$ 即可.这可用微分学的方法.

证 考察

$$F(x) = \left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2 - \int_0^x f^3(t)\mathrm{d}t.$$

易知 $$F(0) = 0, \quad F'(x) = f(x)\left[2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - f^2(x)\right].$$

注意 $f(x) > 0$ (因 $f(0) = 0, f'(x) > 0$).再考察:

$$G(x) = 2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - f^2(x).$$

易知 $$G(0) = 0, \quad G'(x) = 2f(x)[1 - f'(x)] \geqslant 0.$$

则 $$G(x) \geqslant 0 \quad (\forall x \in [0,1]),$$

故 $$F'(x) \geqslant 0 \quad (\forall x \in [0,1]),$$

因此 $$F(x)\geqslant 0\quad(\forall x\in[0,1]),$$
原不等式成立.

评注　这里为证明积分不等式,引进一个辅助函数——相应的变限积分,把问题转化为用微分学的方法证明函数不等式.

19. **解**　因 $f(x)$ 的反函数为 $g(x)$,所以 $y=f(x)$,$x=g(y)$,于是 $g(f(x))=x$,等式 $\int_0^{f(x)}g(t)\mathrm{d}t=x^2\mathrm{e}^x$ 两边对 $x\ (x>0)$ 求导得
$$f'(x)g(f(x))=2x\mathrm{e}^x+x^2\mathrm{e}^x,$$
即 $$f'(x)=\mathrm{e}^x(2+x),$$
积分得
$$f(x)=\int\mathrm{e}^x(2+x)\mathrm{d}x=\int(2+x)\mathrm{d}\mathrm{e}^x=(1+x)\mathrm{e}^x+C.$$

由于 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上可导,所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 右连续,令 $x\to0^+$,得
$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(x+1)\mathrm{e}^x+C=1+C=f(0)=0,$$
故 $C=-1$.于是 $f(x)=(x+1)\mathrm{e}^x-1$.

20. **分析**　由题意,欲证存在 $x_0\in(0,1)$ 使得
$$x_0f(x_0)=\int_{x_0}^1f(x)\mathrm{d}x,$$
作辅助函数 $F(x)$,使得
$$F'(x)=xf(x)-\int_x^1f(t)\mathrm{d}t,$$
为求 $F(x)$,令
$$-\int_x^1f(t)\mathrm{d}t=\varphi(x),$$
则 $$f(x)=\varphi'(x),$$
于是
$$\begin{aligned}F(x)&=\int xf(x)\mathrm{d}x+\int\varphi(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}\varphi(x)+\int\varphi(x)\mathrm{d}x\\&=x\varphi(x)+C\quad(\text{取 }C=0)\\&=-x\int_x^1f(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

证法一　令
$$F(x)=-x\int_x^1f(t)\mathrm{d}t,\quad x\in[0,1].$$
显然 $F(x)$ 在$[0,1]$连续,$(0,1)$可导,$F(0)=F(1)=0$,应用罗尔定理,存在 $x_0\in(0,1)$,使

得

$$F'(x_0)=0.$$

即

$$x_0f(x_0)=\int_{x_0}^{1}f(x)\mathrm{d}x.$$

欲证上述 x_0 是惟一的,我们来证明 $F'(x)$ 在$[0,1]$上严格单调,由于

$$(F'(x))'=F''(x)=f(x)+xf'(x)+f(x)=2f(x)+xf'(x)>0,$$

$$\left(因为\ f'(x)>-\frac{f(x)}{x},\quad f(x)\ 非负连续函数\right).$$

所以 $F'(x)=xf(x)-\int_{x}^{1}f(t)\mathrm{d}t$ 在$[0,1]$上严格增加,故上述 x_0 是惟一的.

证法二 若存在 $x_1\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,使 $f(x)\equiv 0,\ \forall x\in[x_1,1]$,则任取 $x_0\in(x_1,1)$,有

$$x_0f(x_0)=0=\int_{x_0}^{1}f(x)\mathrm{d}x;$$

若上述 x_1 不存在,任取 $C\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,由于 $f(x)$ 在$[C,1]$上连续,由最值定理,存在 $x_2\in[C,1]$,使得 $f(x_2)>0$ 为 $f(x)$ 在$[C,1]$上的最大值.

在区间$[0,x_2]$上,作辅助函数

$$\varphi(x)=\int_{x}^{1}f(t)\mathrm{d}t-xf(x),$$

则 $\varphi(x)$ 连续,且 $\varphi(0)>0$.又

$$\varphi(x_2)=\int_{x_2}^{1}f(t)\mathrm{d}t-x_2f(x_2)\leqslant(1-2x_2)f(x_2)<0,$$

$$\left(因为\ x_2>\frac{1}{2}\right)$$

因而由闭区间上连续函数的零点定理,存在一点 $x_0\in(0,x_2)\subset(0,1)$ 使 $\varphi(x_0)=0$,即

$$\int_{x_0}^{1}f(t)=x_0f(x_0).$$

上述 x_0 的惟一性的证明同方法一,从略.

评注 不少考生在区间$[0,1]$上作函数

$$\varphi(x)=\int_{x}^{1}f(t)\mathrm{d}t-xf(x),$$

然后在$[0.1]$上使用连续函数介值定理.经验算有

$$\varphi(0)=\int_{0}^{1}f(t)\mathrm{d}t\geqslant 0,\quad \varphi(1)=-f(1)\leqslant 0.$$

就断言存在 $x_0\in(0,1)$,使 $\varphi(x_0)=0$.这是不完整的,按此法,至此只能断言存在 $x_0\in[0,1]$

使 $\varphi(x_0)=0$. 为证 $x_0\in(0,1)$, 必须证明 x_0 可以不取端点(像证法二那样)这一步也是较困难的.

由题目: $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负, 无法断言 $\varphi(1)=f(1)$ 一定大于零! 如果将本题条件中"非负"两字改成"正值", 则按本注的做法就行了. 可见有不少考生审题不严或定理使用不当(主要是验证所使用的定理的条件不严格).

21. **分析与证明** (1) 即确定常数 k 使得

$$\varphi(x)=F(x)-kx$$

以 T 为周期. 由于

$$\varphi(x+T)=F(x+T)-k(x+T)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-kx+\int_x^{x+T}f(t)-kT$$

$$=\varphi(x)+\int_0^T f(t)\mathrm{d}t-kT,$$

因此, 取

$$k=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t,\quad \varphi(x)=F(x)-kx,$$

则 $\varphi(x)$ 是以 T 为周期的周期函数

$$F(x)=\left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\right)x+\varphi(x).$$

(2) 不能用洛必达法则, 因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}f(x)\text{ 不存在}.$$

但是 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 可表成:

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{x}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t+\varphi(x).$$

$\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续且以 T 为周期. 于是 $\varphi(x)$ 在 $[0,T]$ 上有界, 在 $(-\infty,+\infty)$ 也有界. 因此:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t+\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\varphi(x)\right)=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

(3) 因 $f(x)\geqslant 0$, 所以 $nT\leqslant x<(n+1)T$ 时

$$n\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=\int_0^{nT}f(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x f(t)\mathrm{d}t<\int_0^{(n+1)T}f(t)\mathrm{d}t$$

$$=(n+1)\int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

22. **分析** 如图 3-4 所示,为了用定积分把两部分的面积 S_1 和 S_2 表示出来,先要求出曲线 L_1 和 L_2 的交点(与 a 有关),再由 $S_1 = S_2$ 确定 a 值.

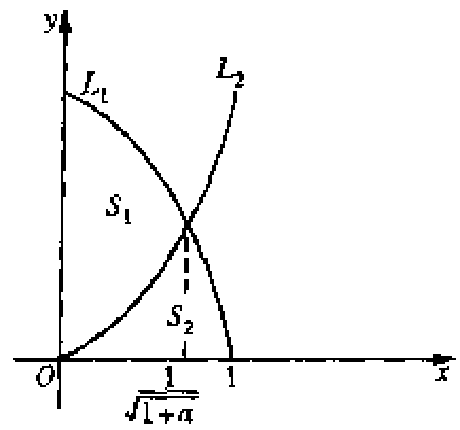


图 3-4

解 解联立方程组 $\begin{cases} y = 1 - x^2, \\ y = ax^2, \end{cases}$ 得

$$x = \frac{1}{\sqrt{1+a}}, \quad y = \frac{a}{1+a},$$

即 L_1 与 L_2 的交点是 $\left(\frac{1}{\sqrt{1+a}}, \frac{a}{1+a}\right)$.

于是

$$S_1 = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}} [(1 - x^2) - ax^2]\mathrm{d}x = \left(x - \frac{1+a}{3}x^3\right)\Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+a}},$$

$$S_2 = \int_0^1 (1 - x^2)\mathrm{d}x - S_1 = \frac{2}{3} - S_1.$$

由 $S_1 = S_2$,得 $S_1 = \frac{2}{3} - S_1$,解得 $S_1 = \frac{1}{3}$,即

$$\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{1+a}} = \frac{1}{3},$$

从而 $a = 3$.

23. **分析** 利用定积分求面积,容易得到所求面积是 p, q 的函数,问题是求 $S(p,q)$ 的最大值.但由于抛物线与固定直线相切,因而 p 与 q 并非独立变化的,利用相切的条件求出它们之间的函数关系,最后将问题归结为一元函数的最值.

解 依题意,如图 3-5 所示,它与 x 轴交点的横坐标为:

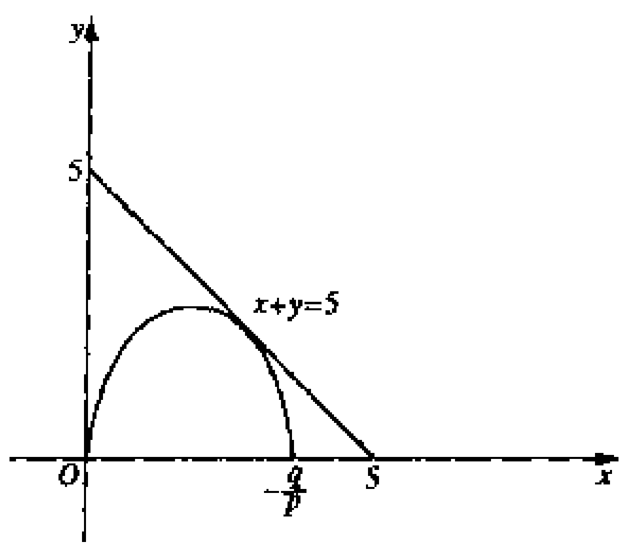


图 3-5

$$x_1 = 0,\quad x_2 = -\frac{p}{q}\quad (\text{由已知 } p < 0, q > 0, x_2 > 0).$$

面积

$$S = \int_0^{-\frac{q}{p}} (px^2 + qx)\mathrm{d}x = \left(\frac{p}{3}x^3 + \frac{q}{2}x^2\right)\Big|_0^{-\frac{q}{p}} = \frac{q^3}{6p^2}. \qquad (*)$$

因直线 $x + y = 5$ 与抛物线 $y = px^2 + qx$ 相切，故它们有惟一公共点．由方程组 $\begin{cases} x + y = 5, \\ y = px^2 + qx, \end{cases}$ 得

$$px^2 + (q+1)x - 5 = 0,$$

其判别式必等于零，即

$$\Delta = (q+1)^2 + 20q = 0,\quad p = -\frac{1}{20}(1+q)^2.$$

代入式(*)得

$$S(q) = \frac{200q^3}{3(q+1)^4},$$

令
$$S'(q) = \frac{200q^2(3-q)}{3(q+1)^5} = 0,$$

得驻点 $q = 3$.

当 $0 < q < 3$ 时，$S'(q) > 0$;

当 $q > 3$ 时，$S'(q) < 0$.

于是 $q = 3$ 时，$S(q)$ 取极大值，即最大值.

此时 $p = -\frac{4}{5}$. 从而最大值 $S = \frac{225}{32}$.

评注　关系式 $p = -\frac{(1+q)^2}{20}$ 也可如下求得.

抛物线 $y = px^2 + qx$ 与直线 $x + y = 5$ 相切，因而它们有公共点(切点)且切线与直线斜率相同，故有方程组

$$\begin{cases} px^2 + qx = 5 - x, \\ 2px + q = -1, \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} 2px^2 + 2qx = 10 - 2x, \\ 2px^2 + qx = -x, \end{cases}$$

也就是
$$\begin{cases} qx = 10 - x, \\ 2px = q + 1. \end{cases}$$

在此方程组中消去 x，即得

$$p = -\frac{(q+1)^2}{20}.$$

24. **解**

$$f(x)=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{xt+1}{xt+2}\right)^{x^3t}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{xt+2}\right)^{-(xt+2)\cdot\frac{-1}{xt+2}\cdot x^3t}=e^{-x^2},\quad x\neq 0.$$

又 $f(0)=1$,故不论 x 为零与否,均有

$$f(x)=e^{-x^2},\quad g(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt,$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\int_0^{-\infty}e^{-t^2}dt=-\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

所以曲线 $y=g(x)$ 有两条水平渐近线,又 $g(x)$ 为奇函数, $y=g(x)$ 如图 3-6 所示,面积

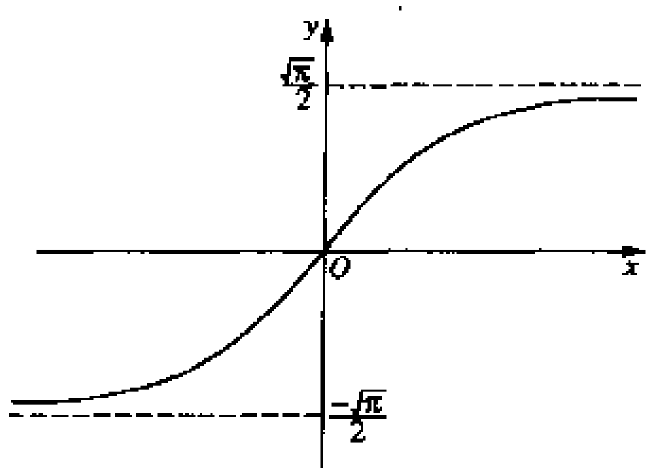


图 3-6

$$S=2\int_0^{+\infty}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_0^x e^{-t^2}dt\right]dx=2\lim_{u\to+\infty}\left[\int_0^u\frac{\sqrt{\pi}}{2}dx-\int_0^u dx\int_0^x e^{-t^2}dt\right].$$

对后一积分采取更换积分次序(或分部积分),有

$$S=2\lim_{u\to+\infty}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}u-u\int_0^u e^{-t^2}dt-\frac{1}{2}(e^{-u^2}-1)\right].$$

但
$$\lim_{u\to+\infty}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}u-u\int_0^u e^{-t^2}dt\right]=\lim_{u\to+\infty}\frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_0^u e^{-t^2}dt}{\frac{1}{u}}=\lim_{u\to+\infty}\frac{-e^{-u^2}}{-\frac{1}{u^2}}=0,$$

所以 $S=1$. $\left(\text{注意: }\lim_{u\to+\infty}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\int_0^u e^{-t^2}dt\right]=0\right)$

25. **分析** 用微元法导出公式,怎样取微元?取 $[a,b]$ 上任意小区间 $[x,x+dx]$(见图

3-7) 相应得到小曲边梯形 A_x，考察 A_x 分别绕 $y=m$ 与 $x=l$ 旋转而成的立体的体积 dV.

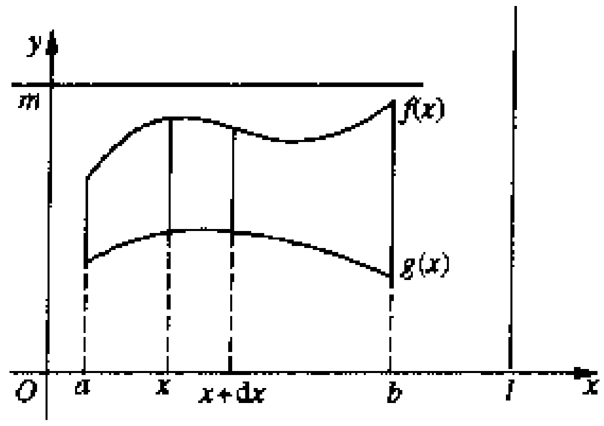


图　3-7

解　(1) A_x 绕 $y=m$ 旋转而成的立体体积

$$dV=\pi[(m-g(x))^2-(m-f(x))^2]dx.$$

(两个圆柱薄片体积之差，半径分别为 $m-g(x)$ 与 $m-f(x)$，高为 dx)，则

$$V=\int_a^b\pi[(m-g(x))^2-(m-f(x))^2]dx$$

$$=\pi\int_a^b(2m-f(x)-g(x))(f(x)-g(x))dx.$$

选(B).

(2) A_x 绕 $x=l$ 旋转而成的立体体积

$$dV=2\pi(l-x)(f(x)-g(x))dx.$$

(以 $l-x$ 为半径，宽为 dx 的圆环面为底而，高为 $f(x)-g(x)$ 的圆柱体的体积)，于是

$$V=2\pi\int_a^b(l-x)[f(x)-g(x)]dx.$$

评注　在题(1)中，若 $m<g(x)$，则

$$V=\int_a^b\pi[(f(x)-m)^2-(g(x)-m)^2]dx.$$

在题(2)中若 $l<a$，则

$$V=2\pi\int_a^b(x-l)(f(x)-g(x))dx.$$

几个公式：$y=f(x)$，$x\in[a,b]$，$f(x)\geqslant 0$ 与 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴所围图形

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

$a>0$ 时，该平面图形

$$V_y=2\pi\int_a^b xf(x)dx,$$

$$y=f(x)\in C^{(1)}[a,b],$$

则 $y=f(x)$ 曲线绕 x 轴旋转一周所得旋转曲面面积：

$$F=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x \quad (f(x)\geqslant 0).$$

26. **解** (1) 对该平面图形,我们可以作垂直分割也可作水平分割

解法一 作水平分割,该平面图形如图 3-8.上半圆方程写成

$$x=1-\sqrt{1-y^2} \quad (0\leqslant y\leqslant 1).$$

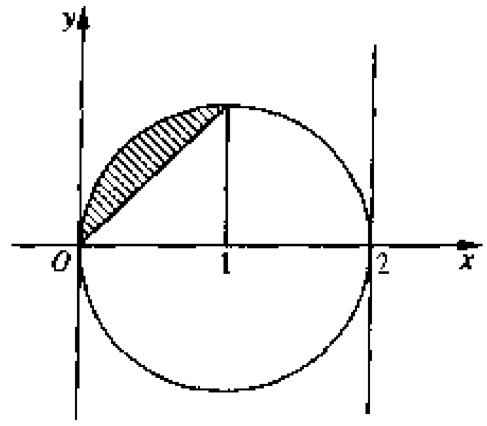


图 3-8

任取 y 轴上[0,1]区间$[y,y+\mathrm{d}y]$,相应的微元绕 $x=2$ 旋转而成的立体体积：

$$\mathrm{d}V=\pi[2-(1-\sqrt{1-y^2})]^2\mathrm{d}y-\pi(2-y)^2\mathrm{d}y,$$

于是

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^1[2-(1-\sqrt{1-y^2})]^2\mathrm{d}y-\pi\int_0^1(2-y)^2\mathrm{d}y\\&=\pi\int_0^1(2-y^2+2\sqrt{1-y^2})\mathrm{d}y-\pi\int_1^2 t^2\mathrm{d}t\\&\xlongequal{\int_0^1\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y=\frac{\pi}{4}}\frac{5}{3}\pi+\frac{\pi^2}{2}-\frac{7}{3}\pi=\frac{1}{2}\pi^2-\frac{2}{3}\pi.\end{aligned}$$

解法二 作垂直分割.任取 x 轴上[0,1]在区间内的小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$,相应的小竖条绕 $x=2$ 旋转而成的立体的体积：

$$\mathrm{d}V=2\pi(2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)\mathrm{d}x.$$

于是

$$\begin{aligned}V&=2\pi\int_0^1(2-x)(\sqrt{2x-x^2}-x)\mathrm{d}x\\&=2\pi\left[\int_0^1(1-x)\sqrt{1-(1-x)^2}\mathrm{d}x+\int_0^1\sqrt{1-(1-x)^2}\mathrm{d}x-\int_0^1(2-x)\mathrm{d}x\right]\\&=2\pi\left[\frac{1}{3}(1-(1-x)^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1+\frac{\pi}{4}-1+\frac{1}{3}\right]=\frac{\pi^2}{2}-\frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

其中$\int_0^1\sqrt{1-(1-x)^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$ 是$\frac{1}{4}$单位圆面积.

(2) 曲线 $y=3-|x^2-1|$ 与 x 轴的交点是$(-2,0),(2,0)$,

曲线 $y=f(x)=3-|x^2-1|$ 与 x 轴围成的图形,如图 3-9.显然作垂直分割方便.任取$[x,x+\mathrm{d}x]\subset[-2,2]$,相应的小竖条绕 $y=3$ 旋转而成的立体体积：

$$\mathrm{d}V=\pi[3^2-(3-f(x))^2]\mathrm{d}x=\pi[9-|x^2-1|^2]\mathrm{d}x,$$

于是

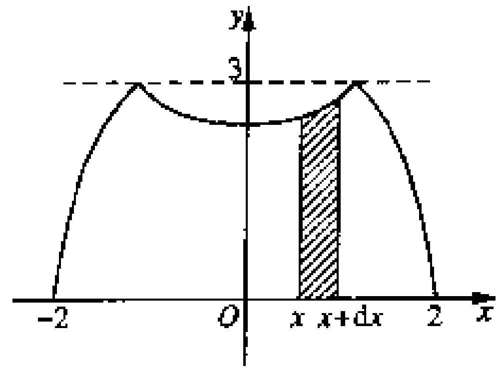


图　3-9

$$V = \pi\int_{-2}^{2}[9-(x^2-1)^2]\mathrm{d}x = 2\pi\int_0^2[9-(x^4-2x^2+1)]\mathrm{d}x$$
$$= 2\pi\left[18-\left(\frac{1}{5}\times 2^5-\frac{2}{3}\times 2^3+2\right)\right] = \frac{448}{15}\pi.$$

27. **分析**　先求出旋转体体积 $V(\xi)$ 及当 $\xi\to+\infty$ 时，$V(\xi)$ 的极限，从而定出 a．问题(2)是用导数求最大值．要先写出切线方程，再写出目标函数．

解　(1)

$$V(\xi) = \pi\int_0^{\xi}y^2\mathrm{d}x = \pi\int_0^{\xi}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-2\xi});$$

同理，
$$V(a) = \frac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-2a}),$$

$$\lim_{\xi\to+\infty}V(\xi) = \lim_{\xi\to+\infty}\frac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-2\xi}) = \frac{\pi}{2}.$$

由 $\frac{\pi}{2}(1-\mathrm{e}^{-2a}) = \frac{\pi}{4}$，解得 $a = \frac{1}{2}\ln 2$．

(2) 设切点为 (x_0,e^{-x_0})，则切线方程为

$$y-\mathrm{e}^{-x_0} = -\mathrm{e}^{-x_0}(x-x_0).$$

写成截矩式为

$$\frac{x}{1+x_0}+\frac{y}{(1+x_0)\mathrm{e}^{-x_0}} = 1.$$

所以，切线与二坐标轴所夹面积

$$S = \frac{1}{2}(1+x_0)^2\mathrm{e}^{-x_0},\quad x_0>0.$$

令
$$S' = (1+x_0)\left[1-\frac{1}{2}(1+x_0)\right]\mathrm{e}^{-x_0} = 0,$$

得 $x_0 = 1$ 及 $x_0 = -1$(舍去)．即 S 在 $x_0>0$ 内只有一个驻点 $x_0 = 1$，又问题本身的确存在最大值，所以 $x_0 = 1$ 即为最大值点，因而切点为 $(1,\mathrm{e}^{-1})$，最大面积为

$$S = 2\mathrm{e}^{-1}.$$

28. **解** 作 x 轴如图 3-10 所示,将抓起污泥的抓斗提升至井口需作功记为 W,当抓斗运动到 x 处时,作用力 $f(x)$ 包括抓斗的自重 400(N),缆绳的重力 $50(30-x)$(N),污泥的重力

$$2000-\frac{x}{3}\cdot 20(\mathrm{N}).$$

即 $f(x)=400+50(30-x)+2000-\dfrac{20}{3}x=3900-\dfrac{170}{3}x.$

将抓斗由 x 处提升到 $x+\mathrm{d}x$ 处,需作功为:

$$\mathrm{d}W=f(x)\mathrm{d}x=\left(3900-\frac{170}{3}x\right)\mathrm{d}x,\quad x\in[0,30].$$

于是

$$W=\int_0^{30}\left(3900-\frac{170}{3}x\right)\mathrm{d}x=\left(3900x-\frac{85}{3}x^2\right)\Big|_0^{30}$$
$$=117\,000-24\,500=91\,500(\mathrm{J}).$$

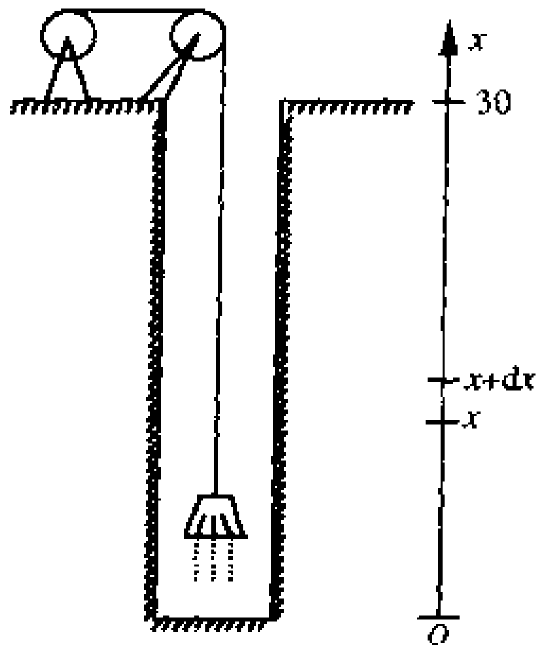


图 3-10

评注 本题另一种解法是:作 x 轴如图所示,将抓起污泥的抓斗提升至井口需作功:

$$W=W_1+W_2+W_3,$$

其中 W_1 是克服抓斗自重所作的功;W_2 是克服缆绳重力所作的功;W_3 为提出污泥所作的功.由题意知:

$$W_1=400\times 30=12\,000.$$

将抓斗由 x 处提升到 $x+\mathrm{d}x$ 处,克服缆绳重力所作的功为

$$\mathrm{d}W_2=50(30-x)\mathrm{d}x.$$

从而
$$W_2=\int_0^{30}50(30-x)\mathrm{d}x=22\,500.$$

在时间间隔 $[t,t+\mathrm{d}t]$ 内提升污泥需作功为:

$$\mathrm{d}W_3=3(2000-20t)\mathrm{d}t.$$

将污泥从井底提升至井口共需时间 $\dfrac{30}{3}=10$,所以

$$W_3=\int_0^{10}3(2000-20t)\mathrm{d}t=57\,000.$$

因此,共需作功

$$W=12\,000+22\,500+57\,000=91\,500(\mathrm{J}).$$

注意 如果将 $\mathrm{d}W_1,\mathrm{d}W_2,\mathrm{d}W_3$ 写在一个式子里,则在做积分时,应统一到一个变量(x 或 t),要注意到变量关系转换问题($x=3t$).不少考生没有注意到这个问题而出现错误.

29. **解**　取坐标系如图 3-11 所示，椭圆方程为

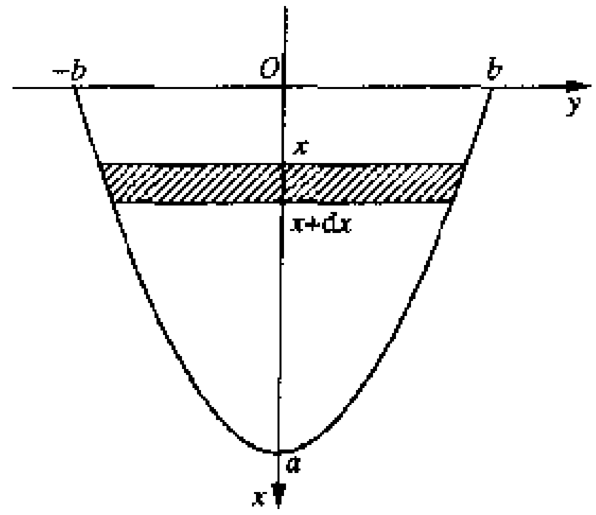


图　3-11

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

解法一　分割区间$[0,a]$，在小区间$[x,x+\mathrm{d}x]$对应的小薄板横条上，水对它的压力：

$$\mathrm{d}P=\text{压强}\times\text{面积}=rx\cdot 2y\mathrm{d}x=rx\cdot\frac{2b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x,$$

其中 r 为水的比重.从 0 到 a 积分便得到椭圆形薄板所受的压力.

$$P=\int_0^a\frac{2br}{a}x\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{br}{a}\frac{2}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a=\frac{2}{3}ra^2b.$$

解法二　分割区间$[-b,b]$，在小区间$[y,y+\mathrm{d}y]$对应的小竖条薄板上，水对它的压力，如图 3-12：

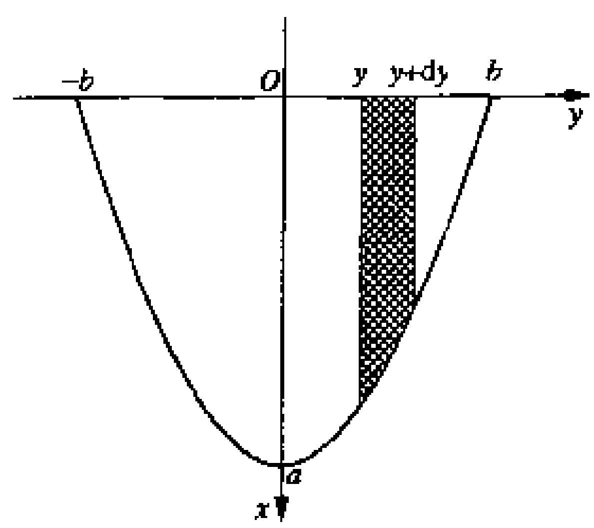


图　3-12

$$\mathrm{d}P=\text{中心处的压强}\times\text{面积}=r\cdot\frac{x}{2}\cdot x\mathrm{d}y=\frac{r}{2}a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}y.$$

从 $-b$ 到 b 积分便得到椭圆形薄板所受的压力

$$P = \int_{-b}^{b} \frac{r}{2} a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = ra^2 \int_0^b \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = ra^2 \left(b - \frac{y^3}{3b^2}\Big|_0^b\right)$$
$$= \frac{2r}{3} a^2 b.$$

评注 在定积分的分割,近似,求和,取极限这四步法中,关键是分割与近似,抓住了这个关键,我们把这个方法简化为微元分析法.作适当分割取微元是为了近似,找到函数改变量的主要部分,从而直接写出所求函数的微分表达式,再积分便得到所求的量.

在第29题的解法一中,作横向分割,任取$[x, x+\Delta x]$对应小横条薄板,把变压强转化为常压强,从而得到压力函数改变量的近似值$\Delta P \approx rx \cdot 2y \cdot \Delta x$, $\Delta x \to 0$时近似转化为等式

$$dP = 2rxy dx.$$

在解法二中,作纵向分割,任取$[y, y+\Delta y]$对应的小竖条薄板,虽然压强是变量,但小竖条的长度转化为常量,即可近似看成矩形,对矩形薄板,它所受的压力我们是知道的,即

$$P = \int_a^b rxc\, dx = \frac{1}{2} rc(b^2 - a^2)$$
$$= r \cdot \frac{b+a}{2}(b-a)c$$
$$= \text{矩形中心处的压强} \times \text{矩形的面积}.$$

因此也是可行的.

30. **证** 由题设不等式的左边应视为广义积分.由于上式左边的广义积分是发散的,不等式显然成立.下而设上式左边广义积分收敛.

由于

$$\int_a^b \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right| dx \geqslant \frac{\int_a^b |f''(x)| dx}{\max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|},$$

故只需证

$$\int_a^b |f''(x)| dx \geqslant \frac{4}{b-a} \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)| = \frac{4}{b-a} |f(x_0)|, \quad x_0 \neq a, b.$$

而 $\quad f(x_0) - f(a) = (x_0 - a) f'(\xi_1), \quad f(b) - f(x_0) = (b - x_0) f'(\xi_2),$

则 $$\int_a^b |f''(x)| dx \geqslant \int_{\xi_1}^{\xi_2} |f''(x)| dx \geqslant \left|\int_{\xi_1}^{\xi_2} f''(x) dx\right| = |f'(\xi_2) - f'(\xi_1)|$$
$$= \left|\frac{-f(x_0)}{b - x_0} - \frac{f(x_0)}{x_0 - a}\right| = |f(x_0)| \frac{b-a}{(b-x_0)(x_0-a)}.$$

容易证明$\varphi(x) = (b-x)(x-a), x \in [a,b]$上在$x_1 = \dfrac{a+b}{2}$处取得最大值$\dfrac{(b-a)^2}{4}$,

即

$$(b - x_0)(x_0 - a) \leqslant \frac{(b-a)^2}{4},$$

因此
$$\int_a^b |f''(x)|\,\mathrm{d}x \geqslant |f(x_0)| \cdot \frac{4}{b-a},$$

即
$$\int_a^b \left|\frac{f''(x)}{f(x)}\right|\mathrm{d}x \geqslant \frac{4}{b-a}.$$

第四章　向量代数和空间解析几何

一、本章的重点内容与常见的典型题型

本章的重点是向量的概念,向量的几种运算：线性运算、数量积、向量积与混合积,平面各种方程,以及直线与直线、平面与平面、直线与平面之间的关系等.

常见题型有：

1. 求向量的数量积、向量积及直线或平面的方程;
2. 与多元函数微分学在几何上的应用相关联的题目.

二、习　　题

(一) 填空题

1. (1) 设$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=2$,则$[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=$ ________;

(2) 设一平面经过原点及点$(6,-3,2)$,且与平面$4x-y+2z=8$垂直,则此平面方程为 ____________;

(3) 过点$(-1,2,3)$,垂直于直线$\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$且平行于平面$7x+8y+9z+10=0$的直线方程是____________.

2. 已知两条直线的方程是

$$L_1:\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{-1},\quad L_2:\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1},$$

则过L_1且平行于L_2的平面方程是________________.

(二) 选择题

1. 设有直线 $l:\begin{cases}x+3y+2z+1=0,\\2x-y-10z+3=0,\end{cases}$ 及平面 π: $4x-2y+z-2=0$, 则直线 l (　　).

(A) 平行于 π;　　(B) 在 π 上;　　(C) 垂直于 π;　　(D) 与 π 斜交.

2. 设有直线 L_1: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z+8}{1}$ 与 L_2: $\begin{cases}x-y=6,\\2y+z=3,\end{cases}$ 则 L_1 与 L_2 的夹角为(　　).

(A) $\frac{\pi}{6}$;　　(B) $\frac{\pi}{4}$;　　(C) $\frac{\pi}{3}$;　　(D) $\frac{\pi}{2}$.

(三) 解答题

1. 设平面 π 是椭球面 $x^2+\frac{1}{2}y^2+z^2=\frac{5}{2}$ 的切平面,它平行于直线 l_1: $x=t,y=1+2t,z=-2+2t$ 及两平面交线 l_2: $\begin{cases}x-2y+4z-8=0,\\2x+y-2z+4=0.\end{cases}$

(1) 求平面 π 的方程;

(2) 求直线 l_1 到平面 π 的距离.

2. 设直线 l: $\begin{cases}x+y+b=0,\\x+ay-z-3=0,\end{cases}$ 在平面 π 上,而平面 π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于点 $(1,-2,5)$, 求 a,b 之值.

3. 设有直线 l_1: $\frac{x-1}{-1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{1}$, l_2: $\frac{x+2}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-2}$.

(1) 证明 l_1 与 l_2 是异面直线;

(2) 求平行于 l_1,l_2 且与它们等距的平面方程.

4. 求直线 l: $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$ 在平面 π: $x-y+2z-1=0$ 上的投影直线 l_0 的方程,并求 l_0 绕 y 轴旋转一周所成曲面的方程.

三、习题的解答与分析

(一) 填空题

1. 应填: (1) 4.　　(2) $2x+2y-3z=0$.　　(3) $\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{1}$.

(1) **分析**　根据叉积有分配律等性质有:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}\quad(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}).$$

再利用点积有分配律性质及混合积的性质,则有:

$$\begin{aligned}\text{原式}&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})\\&=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=4.\end{aligned}$$

评注　向量的运算及其性质要熟练:

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,\quad \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0.$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a}\text{ 且}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{b}\text{ 右手法则,}$$

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta,\quad \boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a},\quad \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b},$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{b}=0.$$

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix},$$

$$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\text{ 共面}\Leftrightarrow(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0.$$

以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为邻边组成平行四边形面积 $S=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为棱组成平行六面体的体积 $V=|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$.

以不在同一平面上的四点 $A_k(x_k,y_k,z_k)$ $k=1,2,3,4$.

求四面体 $A_1A_2A_3A_4$ 的体积

$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3})\cdot\overrightarrow{A_1A_4}|.$$

(2) **分析**　记点 $(6,-3,2)$ 为 P,则 $\overrightarrow{OP}=\{6,-3,2\}$,平面 $4x-y+2z=8$ 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=\{4,-1,2\}$,设所求平面的法向量为 $\boldsymbol{n}$,则 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{OP}$, $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}_1$,所以取:

$$\boldsymbol{n}=\overrightarrow{OP}\times\boldsymbol{n}_1=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\6&-3&2\\4&-1&2\end{vmatrix}=-2\{2,2,-3\},$$

所以所求平面的方程为:

$$2(x-0)+2(y-0)-3(z-0)=0,$$

即

$$2x+2y-3z=0.$$

(3) **分析**　所求直线过点 $(-1,2,3)$,设其方向向量为 $\boldsymbol{l}$,所求直线垂直于 $\frac{x}{4}=\frac{y}{5}=\frac{z}{6}$,即垂直于 $\boldsymbol{l}_1=\{4,5,6\}$.所求直线平行于平面 $7x+8y+9z+10=0$,即垂直于 $\boldsymbol{n}=\{7,8,9\}$.故

$$\boldsymbol{l}=\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}=\{3,-6,3\},$$

从而所求直线方程为

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-3}{1}.$$

评注　求平面方程关键是求平面法向量 $\boldsymbol{n}$；求直线方程关键是求直线方向向量 $\boldsymbol{l}$.

2. 应填：$x-3y+z+2=0$.

分析　平面过直线 L_1，则过 L_1 上的点(1,2,3)；平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 既垂直于 L_1，又垂直于 L_2，则可取

$$\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&0&-1\\2&1&1\end{vmatrix}=\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}.$$

则所求平面为

$$(x-1)-3(y-2)+(z-3)=0,$$

即
$$x-3y+z+2=0.$$

评注　本题主要考查平面和直线方程的基本形式.

(二) 选择题

1. 应选：(1) (C).　　(2) (B).

(1) **分析**　欲求直线与平面的关系，首先讨论直线的方向向量 $\boldsymbol{l}$ 与平面的法向量 $\boldsymbol{n}$ 的关系，

$$\boldsymbol{l}=\{1,3,2\}\times\{2,-1,-10\}=-7\{4,-2,1\},$$
$$\boldsymbol{n}=\{4,-2,1\},$$

显然 $\boldsymbol{l}\parallel\boldsymbol{n}$，所以直线垂直于平面.

选(C).

(2) **分析**　以参数方程形式给出的空间曲线上任一点 t_0 处的方向向量为 $\{\varphi'(t_0),\psi'(t_0),h'(t_0)\}$. 所以本题的方向向量即为 $\{1,-2t_0,3t_0^2\}$. 由题意知：

$$\{1,-2t_0,3t_0^2\}\cdot\{1,2,1\}=0\quad(\text{因为切线}\parallel\text{平面}).$$

即
$$1-4t_0+3t_0^2=0.$$

解得
$$t_{01}=\frac{1}{3},\quad t_{02}=1.$$

即曲线有两条切线平行于给定的平面. 应选(B).

2. 应选(C).

分析　直线 L_1 的方向向量 $\boldsymbol{S}_1=\{1,-2,1\}$，直线 L_2 的方向向量

$$\boldsymbol{S}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&-1&0\\0&2&1\end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}.$$

从而直线 L_1 和 L_2 的夹角 φ 的余弦为

$$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2}{|\boldsymbol{S}_1||\boldsymbol{S}_2|} = \frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}} = \frac{1}{2},$$

因此 $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

(三) 解答题

1. (1) **分析** 本题是确定椭球面上的点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$,使得 P_0 点处的切平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 l_1 的方向向量 $\boldsymbol{l}_1$ 及 l_2 的方向向量 $\boldsymbol{l}_2$ 垂直,即 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2$ 平行,还要求直线 l_1 与 l_2 不在平面 π 上.

解 椭球面上任意点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n} = \{2x_0, y_0, 2z_0\}$. l_1 的方向向量 $\boldsymbol{l}_1 = \{1,2,2\}$, l_2 的方向向量由题目得:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 5(2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}),$$

即
$$\boldsymbol{l}_2 = \{0,2,1\}.$$

$$\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \{-2, -1, 2\}.$$

由 $\boldsymbol{n} \parallel \boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2$,得 $\boldsymbol{n} = \lambda(\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2)$, λ 为某实数,即

$$\{2x_0, y_0, 2z_0\} = \lambda\{-2, -1, 2\},$$

即
$$x_0 = -\lambda, \quad y_0 = -\lambda, \quad z_0 = \lambda.$$

将它代入椭球面方程得

$$(-\lambda)^2 + \frac{1}{2}(-\lambda)^2 + \lambda^2 = \frac{5}{2},$$

即
$$\lambda^2 = 1.$$

解得
$$\lambda = \pm 1,$$

因此得
$$(x_0, y_0, z_0) = \pm(1, 1, -1).$$

过这两点的切平面方程分别为:

$$2(x-1) + (y-1) - 2(z+1) = 0,$$
$$2(x+1) + (y+1) - 2(z-1) = 0.$$

即:
$$2x + y - 2z - 5 = 0, \quad 2x + y - 2z + 5 = 0.$$

显然 l_1 落在平面 $2x + y - 2z - 5 = 0$ 上,因为

$$2t + (1 + 2t) - 2(-2 + 2t) - 5 = 0.$$

易知 l_1, l_2 不在平面 $2x + y - 2z + 5 = 0$ 上.

因此所求平面 π 的方程为:

$$2x+y-2z+5=0.$$

(2) **分析**　因 l_1 与平面 π 平行，直线上任意点与平面 π 等距.

解　由点到平面的距离公式知，l_1 上任意点 $(t, 1+2t, -2+2t)$ 到平面 π: $2x+y-2z+5=0$ 的距离是(取 $t=0$).

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|2\times 0+1\times 1-2\times(-2)+5|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{10}{3}.$$

2. **解法一**　首先求平面 π 的方程. 由于在点 $(1,-2,5)$ 处曲面的法向量

$$\boldsymbol{n}=\{2x,2y,-1\}_{(1,-2,5)}=\{2,-4,-1\},$$

于是切平面方程为：

$$2(x-1)-4(y+2)-(z-5)=0,$$

即

$$2x-4y-z-5=0. \qquad (*)$$

由

$$l:\begin{cases}x+y+b=0,\\ x+ay-z-3=0,\end{cases}$$

得

$$y=-x-b,$$
$$z=x-3+a(-x-b),$$

代入方程(*)，得

$$2x+4x+4b-x+3+ax+ab-5\equiv 0,$$

因而有：

$$5+a=0,\quad 4b+ab-2=0,$$

因此解得：$a=-5,\ b=-2$.

解法二　采用平面束求解，设过直线 l 的平面束方程为：

$$x+ay-z-3+\lambda(x+y+b)=0,$$

其法向量 $\boldsymbol{n}=\{1+\lambda, a+\lambda, -1\}$. 曲面在点 $(1,-2,5)$ 的法向量 $\boldsymbol{n}_1=\{2,-4,-1\}$. 所以有 $\boldsymbol{n}\parallel\boldsymbol{n}_1$，即

$$\frac{1+\lambda}{2}=\frac{a+\lambda}{-4}=\frac{-1}{-1},$$

由此解得：$\lambda=1,\ a=-5$.

又平面束过点 $(1,-2,5)$，所以

$$1+a(-2)-5-3+\lambda(1-2+b)=0,$$

于是

$$1+(-5x-2)-5-3+(1-2+b)=0,$$

故

$$b=-2.$$

3. (1) **分析**　l_1, l_2 分别过点

$$M_1(1,0,-1),\ M_2(-2,1,2),$$

$$\boldsymbol{l}_1=\{-1,2,1\},\quad \boldsymbol{l}_2=\{0,1,-2\},$$

l_1 与 l_2 是异面直线 $\Leftrightarrow \boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2, \quad \overrightarrow{M_1M_2}$ 不共面 $\Leftrightarrow \overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{l}_2)\neq 0$.

证 易计算:

$$\overrightarrow{M_1M_2}\cdot(\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{l}_2)=\begin{vmatrix}-2-1 & 1-0 & 2-(-1)\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3 & 1 & 3\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=10\neq 0.$$

因此 l_1, l_2 是异面的.

(2) **分析** 平面 π 平行于 $l_1, l_2 \Leftrightarrow$ 平面 π 垂直于 $\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{l}_2$,且 l_1, l_2 不在 π 上 $\Leftrightarrow \pi$ 的法向量 $\boldsymbol{n}\parallel\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{l}_2$,且 l_1, l_2 不在 π 上,于是由 $\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{l}_2$ 可确定平面 π 的方程: $Ax+By+Cz+D=0$ 中的 A, B, C,再由 π 与 l_1, l_2 等距定出 D.

解
$$\boldsymbol{l}_1\times\boldsymbol{l}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2\end{vmatrix}=-5\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}=\{-5,-2,-1\},$$

于是平行于 l_1, l_2 的平面 π 的方程为

$$5x+2y+z+D=0,$$

其中 D 为任意常数.

l_1, l_2 平行于 π,它们与 π 的距离分别为点 M_1, M_2 到 π 的距离,由点到平面的距离公式知,π 与 l_1, l_2 等距,即

$$|5\times1+2\times0+1\times(-1)+D|=|5\times(-2)+2\times1+1\times2+D|,$$

即
$$|4+D|=|-6+D|.$$

解得
$$D=1.$$

因此所求平面的方程为

$$5x+2y+z+1=0.$$

4. **分析** 过直线 l 作一垂直于 π 的平面 π_1, π_1 与 π 的交线(即它们的方程联立),即为 l_0 的方程.因此关键就是求 π_1 的方程.求出 π_1 的方程之后,再按求旋转面的方法求旋转面的方程.

解法一 点$(1,0,1)$ 在 l 上,所以该点也在平面 π_1 上,于是 π_1 的方程可设为:

$$\pi_1:\ A(x-1)+B(y-0)+C(z-1)=0.$$

π_1 的法向量与 l 的方向向量垂直,又应与平面 π 的法向量垂直,所以可取

$$\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=\{1,-3,-2\}.$$

于是 π_1 的方程为:

$$x-3y-2z+1=0.$$

从而 l_0 的方程为

$$l_0:\begin{cases}x-y+2z-1=0,\\x-3y-2z+1=0.\end{cases}$$

将 l_0 写成：

$$\begin{cases}x=2y,\\z=-\dfrac{1}{2}(y-1).\end{cases}$$

设 l_0 绕 y 轴旋转一周所成的曲面为 S，点 $P(x_p,y_p,z_p)\in S$，对于固定的 $y_p=y$，于是

$$x_P^2+z_P^2=x^2+z^2=(2y)^2+\left(-\frac{1}{2}(y-1)\right)^2=(2y_p)^2+\left(-\frac{1}{2}(y_P-1)\right)^2$$
$$=\frac{17}{4}y_P^2-\frac{1}{2}y_P+\frac{1}{4}.$$

去掉下角 P，即得 S 的方程为

$$4x^2-17y^2+4z^2+2y-1=0.$$

解法二　用平面束方程，由于 l 的方程可写成

$$\begin{cases}x-y-1=0,\\y+z-1=0,\end{cases}$$

故经过 l 的平面方程可写成

$$x-y-1+\lambda(y+z-1)=0,$$

即
$$x+(\lambda-1)y+\lambda z-(\lambda+1)=0.$$

在其中求出一平面 π_1，使它与 π 垂直，得

$$1-(\lambda-1)+2\lambda=0,$$

解得
$$\lambda=-2,$$

于是
$$\pi_1:\ x-3y-2z+1=0.$$

以下同解法一.

第五章　多元函数微分学

一、本章的重点内容与常见的典型题型

1. 多元函数(主要是二元、三元)的偏导数和全微分概念;
2. 偏导数和全微分的计算,尤其是求复合函数的二阶偏导数及隐函数的偏导数;
3. 方向导数和梯度;
4. 多元函数微分在几何上的应用;
5. 多元函数的极值和条件极值.

常见题型有:

1. 求二元、三元函数的偏导数、全微分.
2. 求复合函数的二阶偏导数;隐函数的一阶、二阶偏导数.
3. 求二元、三元函数的方向导数和梯度.
4. 求空间曲线的切线与法平面方程,求曲面的切平面和法线方程.
5. 多元函数的极值在几何、物理与经济上的应用题.

第4类题型,是多元函数的微分学与前面向量代数与空间解析几何的综合题,应结合起来复习.

极值应用题多要用到其他领域的知识,考生在复习时要引起注意.

二、习　　题

(一) 填空题

1. 由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 所确定的函数 $z=z(x,y)$ 在点$(1,0,-1)$处的全微分 $\mathrm{d}z=$ ________.

2. 曲面 $z-\mathrm{e}^z+2xy=3$ 在点$(1,2,0)$处的切平面方程为________.

3. 由曲线 $\begin{cases}3x^2+2y^2=12,\\ z=0\end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周得到的旋转面在点$(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$处的指向外侧的单位法向量为________.

4. 设 $u=\mathrm{e}^{-x}\sin\dfrac{x}{y}$，则$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 在点$\left(2,\dfrac{1}{\pi}\right)$处的值为______.

5. 设 $z=f\left(xy,\dfrac{x}{y}\right)+g\left(\dfrac{y}{x}\right)$，其中 f,g 均可微，则$\dfrac{\partial z}{\partial x}=$ ______.

6. 设 $z=\dfrac{1}{x}f(xy)+y\varphi(x+y)$，其中 $f,\varphi\in C^{(2)}$. 则$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=$ ______.

7. 函数 $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$ 在点 $A(1,0,1)$ 处沿点 A 指向点 $B(3,-2,2)$ 方向的方向导数为______.

8. 设 $u=f(x,xy,xyz)$，则$\dfrac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}=$ ______.

9. 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,r)\,|_{(1,-2,2)}=$ ______.

10. 曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ 在点$(1,-2,2)$处的法线方程为______.

(二) 选择题

1. 在曲线 $x=t,y=-t^2,z=t^3$ 的所有切线中，与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线(　　).

(A) 只有 1 条；　(B) 只有 2 条；　(C) 至少有 3 条；　(D) 不存在.

2. 已知$\dfrac{(x+ay)\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{(x+y)^2}$为某函数的全微分，则 a 等于(　　).

(A) -1；　(B) 0；　(C) 1；　(D) 2.

3. 设函数 $f(x,y)$ 在点$(0,0)$附近有定义，且 $f_x'(0,0)=3,f_y'(0,0)=1$，则(　　).

(A) $\mathrm{d}z\,|_{(0,0)}=3\mathrm{d}x+\mathrm{d}y$；

(B) 曲面 $z=f(x,y)$ 在点$(0,0,f(0,0))$的法向量为$\{3,1,1\}$；

(C) 曲线$\begin{cases}z=f(x,y),\\ y=0\end{cases}$在点$(0,0,f(0,0))$的切向量为$\{1,0,3\}$；

(D) 曲线$\begin{cases}z=f(x,y),\\ y=0\end{cases}$在点$(0,0,f(0,0))$的切向量为$\{3,0,1\}$.

4. 函数 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点$(0,0)$点处(　　).

(A) 不连续；　(B) 偏导数存在；

(C) 任一方向的方向导数存在；　(D) 可微.

5. 设 $f_x'(0,0)=1,f_y'(0,0)=2$，则(　　).

(A) $f(x,y)$ 在$(0,0)$点连续；

(B) $\mathrm{d}f(x,y)\Big|_{(0,0)}=\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y$；

(C) $\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(0,0)}=\cos\alpha+2\cos\beta$，其中 $\cos\alpha,\cos\beta$ 为 l 的方向余弦；

(D) $f(x,y)$ 在$(0,0)$点沿 x 轴负方向的方向导数为 -1.

6. 函数 $f(x,y)=x^2y^3$ 在点$(2,1)$沿方向 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ 的方向导数为(　　).

(A) 16;　　(B) $\dfrac{16}{\sqrt{2}}$;　　(C) 28;　　(D) $\dfrac{28}{\sqrt{2}}$.

7. 函数 $f(x,y)=\sqrt[3]{x^2y}$ 在点$(0,0)$处(　　).

(A) 不连续;

(B) 连续,但偏导数 $f_x'(0,0)$ 和 $f_y'(0,0)$ 不存在;

(C) 连续且偏导数 $f_x'(0,0)$ 和 $f_y'(0,0)$ 都存在,但不可微;

(D) 可微.

8. 设 $f(x,y)=x^3-4x^2+2xy-y^2$,则下面结论正确的是(　　).

(A) 点$(2,2)$是 $f(x,y)$ 的驻点,且为极大值点;

(B) 点$(0,0)$是 $f(x,y)$ 的驻点,但不是极值点;

(C) 点$(2,2)$是极小值点;

(D) 点$(0,0)$是极大值点.

(三) 解答题

1. 设 $z(x,y)$ 满足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\sin y+\dfrac{1}{1-xy},\\ z(1,y)=\sin y,\end{cases}\quad 求\ z(x,y).$$

2. 设 $z=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$

(1) 求 $\mathrm{d}z$;

(2) 在$(0,0)$点,函数是否连续?是否偏导数存在?是否可微?一阶偏导是否连续?

3. 设 $z=f(x,y)=\mathrm{e}^{xy}\sin \pi y+(x-1)\arctan\sqrt{\dfrac{x}{y}}$,求 $f_x'(1,1)$ 及 $f_y'(1,1)$.

4. 设 $u=f(x,y,z)$ 有连续的一阶偏导数,又函数 $y=y(x)$ 及 $z=z(x)$ 分别由下列两式确定:$\mathrm{e}^{xy}-xy=2$ 和 $\mathrm{e}^x=\displaystyle\int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$,求$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

5. 设函数 $f(u)$ 一阶可导,$w(x,y)=\displaystyle\int_0^y \mathrm{e}^{-y}f(x+t)\mathrm{d}t$,求$\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$.

6. 设函数 F 具有一阶连续偏导数,$z=z(x,y)$,由方程 $F\left(x+\dfrac{z}{y},y+\dfrac{z}{x}\right)=0$ 所确定,$xy\neq 0$,$yF_2'+xF_1'\neq 0$.求 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

7. 设 $z = f\left(xy, \frac{x}{y}\right) + g\left(\frac{y}{x}\right)$，其中 $f, g \in C^{(2)}$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

8. 设 $y = y(x), z = z(x)$ 是由方程 $z = xf(x+y)$ 和 $F(x,y,z) = 0$ 所确定的函数，其中 $f, F \in C^{(1)}$. 求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

9. 设 $f(u) \in C^{(2)}$. 而 $z = f(\mathrm{e}^x \sin y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \mathrm{e}^{2x} z$，求 $f(u)$.

10. 设 $u = f(x,y,z), \varphi(x^2, \mathrm{e}^y, z) = 0, y = \sin x$，其中 $f, \varphi \in C^{(1)}$，且 $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$，求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

11. 设函数 $z = f(x,y)$ 在点$(1,1)$处可微，且 $f(1,1) = 1, \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,1)} = 2, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,1)} = 3$，$\varphi(x) = f(x, f(x,x))$，求 $\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\right|_{x=1}$.

12. 设 $z = f(u,x,y), u = x\mathrm{e}^y, f \in C^{(2)}$，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

13. 设 $x^2 + z^2 = y\varphi\left(\frac{z}{y}\right)$，其中 φ 为可微函数，求 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

14. 设 $\begin{cases} u = x - 2y, \\ v = x + ay, \end{cases}$ 把方程 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 化简为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$，求常数 a.

15. 证明：(1) 若 $f(x), f(y)$ 当 $x > 0, y > 0$ 时可微，且 $f(xy) = f(x) + f(y)$. 则 $f(x) = a\ln x$，其中 a 为实数.

(2) 若 $f(x), f(y)$ 对任意 x, y 可微，且 $f(x+y) = f(x)f(y)$，当 $f(x) \neq 0, f(y) \neq 0$ 时，则 $f(x) = \mathrm{e}^{ax}$，其中 a 为实数.

16. 若函数 $f(x,y,z)$ 对任意 $t > 0$ 满足关系式 $f(tx,ty,tz) = t^k f(x,y,z)$. 则称 $f(x,y,z)$ 为 k 次齐次函数. 设 $f(x,y,z)$ 是可微函数，证明 $f(x,y,z)$ 为 k 次齐次函数 $\Leftrightarrow x f_x' + y f_y' + z f_z' = k f(x,y,z)$.

17. 求 $x > 0, y > 0, z > 0$ 时，函数 $\ln x + 2\ln y + 3\ln z$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 6r^2$ 上的极大值，并证明：对于任意正实数 a, b, c 成立不等式

$$ab^2c^3 \leqslant 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6.$$

18. 在第一卦限内作椭球面：$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的切平面，使切平面与三个坐标面所围四面体的体积最小，求切点坐标.

19. 设 $u(x,y) = \int_0^1 f(t)\,|xy - t|\,\mathrm{d}t$，其中 $f(t)$ 在$[0,1]$上连续函数，$0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$. 求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

三、习题的解答与分析

(一) 填空题

1. 应填：$dx-\sqrt{2}dy$.

分析 $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$，由隐函数求导法求出

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{yz\sqrt{x^2+y^2+z^2}+x}{xy\sqrt{x^2+y^2+z^2}+z},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xz\sqrt{x^2+y^2+z^2}+y}{xy\sqrt{x^2+y^2+z^2}+z},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,0,-1)}=1,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,0,-1)}=-\sqrt{2},$$

所以

$$dz=dx-\sqrt{2}dy.$$

或由方程 $xyz+\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{2}$ 两边求微分得

$$yzdx+xzdy+xydz+\frac{xdx+ydy+zdz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=0,$$

将 $x=1,y=0,z=-1$ 代入上式得

$$-dy+\frac{dx-dz}{\sqrt{2}}=0,$$

故

$$dz=dx-\sqrt{2}dy.$$

2. 应填：$2x+y-4=0$.

分析 令

$$F(x,y,z)=z-e^z+2xy-3,$$

则

$$F_x'=2y,\quad F_z'=1-e^z,\quad F_y'=2x,$$

而曲面 $z-e^z+2xy=3$ 在点$(1,2,0)$处的法向量为 $\boldsymbol{n}=\{4,2,0\}$，故所求切平面方程为

$$4(x-1)+2(y-2)=0,\quad 即\quad 2x+y-4=0.$$

3. 应填：$\left\{0,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}},\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right\}$.

分析 旋转面方程为 $3(x^2+z^2)+2y^2=12$. 令

$$F(x,y,z)=3(x^2+z^2)+2y^2-12,$$

则

$$F_x'=6x,\quad F_y'=4y,\quad F_z'=6z.$$

从而所得曲面在点$(0,\sqrt{3},\sqrt{2})$处向外侧的法向量为$\{0,4\sqrt{3},6\sqrt{2}\}$. 将其单位化得$\left\{0,\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}},\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right\}$.

4. 应填：$\left(\frac{\pi}{e}\right)^2$.

分析
$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\mathrm{e}^{-x}\sin\frac{x}{y}+\frac{\mathrm{e}^{-x}}{y}\cos\frac{x}{y},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{y^2}\cos\frac{x}{y}-\frac{\mathrm{e}^{-x}}{y^2}\cos\frac{x}{y}+\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{y^3}\sin\frac{x}{y},$$
所以
$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|_{\left(2,\frac{1}{\pi}\right)}=\left(\frac{\pi}{\mathrm{e}}\right)^2.$$

评注　本题主要考查复合函数求导法.

5. 应填：$yf_1'+\frac{1}{y}f_2'-\frac{y}{x^2}g'$.

分析　$$\frac{\partial z}{\partial x}=f_1'\cdot y+f_2'\cdot\frac{1}{y}+g'\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=yf_1'+\frac{1}{y}f_2'-\frac{y}{x^2}g'.$$

评注　令
$$u=xy,\quad v=\frac{x}{y},\quad w=\frac{y}{x},\quad f_1'=\frac{\partial f}{\partial u},\quad f_2'=\frac{\partial f}{\partial v},\quad g'=\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}w}.$$

6. 应填：$yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)$.

分析
$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}f(xy)+\frac{y}{x}f'(xy)+y\varphi'(x+y),$$
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}&=-\frac{1}{x}f'(xy)+\frac{1}{x}f'(xy)+yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y)\\&=yf''(xy)+\varphi'(x+y)+y\varphi''(x+y).\end{aligned}$$

评注　本题中，f 与 φ 中的中间变量均为一元，因此本题实质上是一元复合函数的求导，只要注意对 x 求导时，y 视为常数；对 y 求导时，x 视为常数就可以了.注意，若此题解答中出现 f_x'，f_y' 等记号是错误的.其原因是误认为 f，φ 中的中间变量是两个，从而出现 f_x' 与 f_y'.

7. 应填：$\frac{1}{2}$.

分析　$l=\overrightarrow{AB}=\{2,-2,1\}$，　$\cos\alpha=\frac{2}{3}$，　$\cos\beta=-\frac{2}{3}$，　$\cos\gamma=\frac{1}{3}$，
$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A=\left.\frac{1}{x+\sqrt{y^2+z^2}}\right|_{A(1,0,1)}=\frac{1}{2},$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A=\left.\frac{y}{x\sqrt{y^2+z^2}+y^2+z^2}\right|_A=0,\quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A=\left.\frac{z}{x\sqrt{y^2+z^2}+y^2+z^2}\right|_A=\frac{1}{2},$$
所以
$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma=\frac{1}{2}.$$

8. 应填：$xf_3'+x^2yf_{32}''+x^2yzf_{33}''$.

分析
$$\frac{\partial u}{\partial z}=xyf_3',$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y} = xf_3' + xy(f_{32}''\cdot x + f_{33}''\cdot xz) = xf_3' + x^2yf_{32}'' + x^2yzf_{33}''.$$

9. 应填：$\frac{2}{3}$.

分析

$$\text{grad}r = \left\{\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right\},$$

$$\text{div}(\text{grad}r) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right), \qquad (*)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}.$$

同理

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r}\right) = \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r}\right) = \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3},$$

代入(*)式得

$$\text{div}(\text{grad}r) = \frac{2}{r},$$

所以

$$\text{div}(\text{grad}r)\Big|_{(1,-2,2)} = \frac{2}{3}.$$

10. 应填：$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-2}{6}$.

分析 令

$$F(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21,$$

则

$$F_x'(1,-2,2) = 1, \quad F_y'(1,-2,2) = -4, \quad F_z'(1,-2,2) = 6,$$

故所求法线方程为$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-2}{6}$.

(二) 选择题

1. 应选(B).

分析 曲线 $x = t, y = -t^2, z = t^3$ 的切线向量为 $\boldsymbol{\tau} = \{1,-2t,3t^2\}$，而平面 $x + 2y + z = 4$ 的法线向量为 $\boldsymbol{n} = \{1,2,1\}$. 由题设知 $\boldsymbol{\tau}\perp\boldsymbol{n}$，则 $\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n} = 1 - 4t + 3t^2 = 0$，此方程只有两个实根，所以所求切线只有两条.

2. 应选(D).

分析 令 $P = \frac{x+ay}{(x+y)^2}, Q = \frac{y}{(x+y)^2}$. 由于 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 为某个函数的全微分，则$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$，即 $-2y = (a-2)x - ay, (a-2)x = (a-2)y$，仅当 $a = 2$ 时，上式恒成立.

评注 本题主要考查 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 为某函数全微分的充要条件.

3. 应选(C).

分析　曲线$\begin{cases} z = f(x,y), \\ y = 0 \end{cases}$的参数方程为$\begin{cases} x = x, \\ y = 0, \\ z = f(x,0), \end{cases}$则该曲线在$(0,0,f(0,0))$的切向量为$\{1,0,f_x'(0,0)\} = \{1,0,3\}$.

评注　本题主要考查偏导数存在与全微分存在的关系,偏导数存在与曲面在该点有法线向量之间的关系,及空间曲线切线的向量的求法.本题很容易错选为(A).事实上本题只假设$f(x,y)$在$(0,0)$点两个偏导数存在,而函数$z = f(x,y)$在$(0,0)$点偏导存在不能确保$z = f(x,y)$在$(0,0)$点可微,所以不能选(A).

4. 应选(C).

分析　显然$z = \sqrt{x^2+y^2}$在$(0,0)$点连续,排除(A).

又在$(0,0)$点$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{z(x,0)-z(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$不存在,所以$z = \sqrt{x^2+y^2}$在$(0,0)$点偏导数不存在,自然也不可微,排除(B),(D).由排除法选择(C).

5. 应选(D).

分析　$f(x,y)$在$(0,0)$点偏导数存在保证不了在$(0,0)$点连续和可微,所以排除(A),(B).同时$f(x,y)$在$(0,0)$点偏导数存在只能说明沿着x轴,y轴正方向和负方向的方向导数存在,不能说明沿着任何方向的方向导数存在,所以选择(D).

6. 应选(B).

分析　方向$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$的方向余弦为$\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,所以

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(2,1)} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\frac{\pi}{4} + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{16}{\sqrt{2}}.$$

7. 应选(C).

分析　本题考查二元函数在某点处的连续性,偏导数的存在性以及可微性等概念.因为

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x^2}\cdot\lim_{y\to 0}\sqrt[3]{y} = 0 = f(0,0),$$

所以$f(x,y)$在$(0,0)$处连续,故(A)排除.

又因为$f(x,0) = f(0,y) = 0$,所以$f_x'(x,0) = f_y'(0,y) = 0$,特别:在$(0,0)$处有$f_x'(0,0) = f_y'(0,0) = 0$. 可见(B)也不正确.

函数$f(x,y)$在$(0,0)$处可微的$\Leftrightarrow$是:

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y) - f(0,0) - f_x'(0,0)\Delta x - f_y'(0,0)\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} \neq 0,$$

即

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2(\Delta y)}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} \neq 0. \qquad (*)$$

不难发现,当 $\Delta y = \Delta x > 0$ 时,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y=\Delta x}} \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^3}}{\sqrt{2(\Delta x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

表明(*)式极限不是零,即(C)正确,(D)不正确.

8. 应选(D).

分析 由于

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 8x + 2y = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x - 2y = 0 \end{cases}$$ 的解为(0,0),(2,2).

又因为 $$A = f''_{xx} = 6x - 8,\quad B = f''_{xy} = 2,\quad C = f''_{yy} = -2,$$

在点(2,2)处,$A = 4$,$AC - B^2 < 0$,所以点(2,2)不是极值点;在点(0,0)处,$A = -8$,$AC - B^2 > 0$,且 $A < 0$,所以点(0,0)是极大值点,选(D).

(三)解答题

1. **解** 把 y 看成任意给定常数,原式两边对 x 求积分得:

$$z(x,y) = -x\sin y - \frac{1}{y}\ln|1 - xy| + \varphi(y),$$

由 $z(1,y) = \sin y$,得

$$-\sin y - \frac{1}{y}\ln|1 - y| + \varphi(y) = \sin y,$$

则 $$\varphi(y) = 2\sin y + \frac{1}{y}\ln|1 - y|,$$

所以 $z(x,y) = (2 - x)\sin y + \dfrac{1}{y}\ln\left|\dfrac{1-y}{1-xy}\right|$.

2. **解** (1) 当 $(x,y) \neq (0,0)$ 时

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2xy^4 - x^3y^2}{(x^2+y^2)^{5/2}},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2yx^4 - y^3x^2}{(x^2+y^2)^{5/2}},$$

所以 $$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

当 $(x,y) = (0,0)$ 时,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,0)} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{z(0+\Delta x,0) - z(0,0)}{\Delta x} = 0,$$

同理 $$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,0)} = 0.$$

又因为 $$\lim_{\rho\to 0} \frac{\Delta z - [z'_x(0,0)\Delta x + z'_y(0,0)\Delta y]}{\rho} = \lim_{\rho\to 0} \frac{(\Delta x)^2(\Delta y)^2}{[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^2}, \qquad (*)$$

其中
$$\rho = [(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

因为 $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y = k\Delta x \to 0}} \dfrac{(\Delta x)^2(k\Delta x)^2}{[(\Delta x)^2 + (k\Delta x)^2]^2} = \dfrac{k^2}{(1+k^2)^2}$ 随 k 变，所以（$*$）不存在，自然不等于 0，所以 $z(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不可微.

(2) $$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z(x,y) \xlongequal[y = r\sin\theta]{令 x = r\cos\theta} \lim_{r\to 0}\frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^3}$$
$$= \lim_{r\to 0} r\cdot(\cos^2\theta\cdot\sin^2\theta) = 0 = z(0,0),$$

所以 $z(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续.

由(1)知道 $z(x,y)$ 在 $(0,0)$ 偏导数存在，但不可微，自然 $z(x,y)$ 的一阶偏导数在 $(0,0)$ 处不连续.

3. **解法一**

$$f'_x(1,1) = \lim_{x\to 1}\frac{f(x,1)-f(1,1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\arctan\sqrt{x}}{x-1} = \frac{\pi}{4},$$

$$f'_y(1,1) = \lim_{y\to 1}\frac{f(1,y)-f(1,1)}{y-1} = \lim_{y\to 1}\frac{e^y\sin\pi y}{y-1}$$
$$= \lim_{y\to 1} e^y\cdot\lim_{y\to 1}\frac{\sin\pi y}{y-1} = e\lim_{y\to 1}\frac{\pi\cos\pi y}{1} = -\pi e.$$

解法二　先求出 $f'_x(x,y), f'_y(x,y)$，再代入 $x=1, y=1$ 的值.

4. **解**　本题求的是 $u = f(x, y(x), z(x))$ 的全导数，这可以利用复合函数求导公式求得.其中所要用到的 $y'(x), z'(x)$ 可以通过隐函数求导法则得到

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}. \qquad (*)$$

由 $e^{xy} - xy = 2$，两边对 x 求导，得

$$e^{xy}\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) - \left(y + x\frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

即
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

又由 $e^x = \int_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}dt$ 两边对 x 求导，得

$$e^x = \frac{\sin(x-z)}{x-z}\cdot\left(1 - \frac{dz}{dx}\right),$$

即
$$\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)},$$

代入（$*$）式，得 $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{y}{x}\dfrac{\partial f}{\partial y} + \left[1 - \dfrac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)}\right]\dfrac{\partial f}{\partial z}.$

5. **解**

$$w(x,y) \xlongequal{\text{令 } x+t=u} \int_x^{x+y} e^{-y} f(u)\,du = e^{-y}\int_x^{x+y} f(u)\,du.$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = e^{-y} f(x+y) - e^{-y} f(x),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -e^{-y} f(x+y) + e^{-y} f'(x+y) + e^{-y} f(x).$$

6. **解** 将 $F\left(x+\frac{z}{y}, y+\frac{z}{x}\right)=0$ 两边对 x, y 分别求导，z 视为 x, y 的函数，有

$$F_1' \cdot \left(1+\frac{1}{y}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right) + F_2' \cdot \left(-\frac{z}{x^2}+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0,$$

$$F_1' \cdot \left(-\frac{z}{y^2}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}\right) + F_2' \cdot \left(1+\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

分别解出$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$，可得

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy.$$

注 由

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}$$

也可以求出.

7. **解**

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yf_1' + \frac{1}{y}f_2' - \frac{y}{x^2}g',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_1' + y\left(xf_{11}'' - \frac{x}{y^2}f_{12}''\right) - \frac{1}{y^2}f_2' + \frac{1}{y}\left(xf_{21}'' - \frac{x}{y^2}f_{22}''\right) - \frac{1}{x^2}g' - \frac{y}{x^3}g''$$

$$= f_1' - \frac{1}{y^2}f_2' + xyf_{11}'' - \frac{x}{y^3}f_{22}'' - \frac{1}{x^2}g' - \frac{y}{x^3}g''.$$

注 $$f_1' = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad f_2' = \frac{\partial f}{\partial v}, \quad u = xy, \quad v = \frac{x}{y},$$

$$f_{11}'' = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}, \quad f_{22}'' = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}, \quad f_{12}'' = \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v}, \quad f_{21}'' = \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial u},$$

当 $f \in C^{(2)}$ 时 $$f_{12}'' = f_{21}'', \quad g' = \frac{dg}{dw},$$

其中 $w = \frac{y}{x}$.

8. **解** 由

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dx} = f + x\left(1 + \dfrac{dy}{dx}\right)f', \\ F_x + F_y\dfrac{dy}{dx} + F_z\dfrac{dz}{dx} = 0,\end{cases}$$

化简得
$$\begin{cases}-xf'\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{dz}{dx} = f + xf', \\ F_y\dfrac{dy}{dx} + F_z\dfrac{dz}{dx} = -F_x.\end{cases}$$

解得
$$\frac{dz}{dx} = \frac{(f + xf')F_y - xf'F_x}{F_y + xf'F_z},$$

其中 $F_y + xf'F_z \neq 0$.

9. **解**

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(u)e^x\sin y,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(u)e^x\cos y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''(u)e^{2x}\sin^2 y + f'(u)e^x\sin y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''(u)e^{2x}\cos^2 y - f'(u)e^x\sin y,$$

代入原方程,得

$$f'(u)e^{2x} = e^{2x}z,$$

即
$$f''(u) - f(u) = 0.$$

解得
$$f(u) = C_1e^u + C_2e^{-u},$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

10. **解**

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dx}, \qquad (*)$$

由于
$$y = \sin x, \quad \frac{dy}{dx} = \cos x,$$

$z = z(x)$ 由 $\varphi(x^2, e^{\sin x}; z) = 0$ 确定,所以

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{\varphi_3'}(2x\varphi_1' + \cos x e^{\sin x}\varphi_2'),$$

代入(*)式

$$\frac{du}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\cos x - \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{1}{\varphi_3'}(2x\varphi_1' + \cos x e^{\sin x}\varphi_2').$$

11. **解**

$$\varphi(1)=f(1,f(1,1))=f(1,1)=1,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi^3(x)\Big|_{x=1}=\left[3\varphi^2(x)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right]\Big|_{x=1}$$

$$=3\varphi^2(x)[f_1'(x,f(x,x))+f_2'(x,f(x,x))(f_1'(x,x)+f_2'(x,x))]$$

$$=3\cdot1\cdot[2+3(2+3)]=51.$$

12. **解**

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial x}\cdot1=\mathrm{e}^y f_1'+f_2',$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\mathrm{e}^y f_1'+\mathrm{e}^y[f_{11}''x\mathrm{e}^y+f_{13}''\cdot1]+f_{21}''x\mathrm{e}^y+f_{23}''\cdot1.$$

13. **解法一** 令

$$F(x,y,z)=x^2+z^2-y\varphi\left(\frac{z}{y}\right),$$

则

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'},\tag{*}$$

$$F_y'=-\varphi\left(\frac{z}{y}\right)+\frac{z}{y}\varphi'\left(\frac{z}{y}\right),$$

$$F_z'=2z-\varphi'\left(\frac{z}{y}\right).$$

代入(*)式

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y\varphi\left(\frac{z}{y}\right)-z\varphi'\left(\frac{z}{y}\right)}{2yz-y\varphi'\left(\frac{z}{y}\right)}.$$

解法二 原等式两边同时对 y 求偏导.

$$2z\frac{\partial z}{\partial y}=\varphi\left(\frac{z}{y}\right)+y\varphi'\left(\frac{z}{y}\right)\cdot\frac{y\frac{\partial z}{\partial y}-z}{y^2},$$

解出

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y\varphi\left(\frac{z}{y}\right)-z\varphi'\left(\frac{z}{y}\right)}{2yz-y\varphi'\left(\frac{z}{y}\right)}.$$

14. **解** 应用多元复合函数求偏导数法则得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial v},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-2\frac{\partial z}{\partial u}+a\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(a-2)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-4a\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+a^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

将上述结果代入原方程，整理后得

$$(10+5a)\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+(6+a-a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=0,$$

所以 $6+a-a^2=0$，且 $10+5a\neq 0$. 解之得：$a=3$.

15. **解**　(1) 两端分别对 x,y 求偏导，得

$$yf'(xy)=f'(x),\quad xf'(xy)=f'(y),$$

所以

$$f'(xy)=\frac{1}{y}f'(x)=\frac{1}{x}f'(y),$$

即

$$x\cdot f'(x)=yf'(y)=a\quad(\text{实数}),$$

$$f'(x)=\frac{a}{x},$$

积分

$$f(x)=a\ln x+C.$$

令 $x=1, f(1)=C$. 而 $f(x\cdot 1)=f(x)+f(1)$，所以 $f(1)=0, C=0$，有

$$f(x)=a\ln x,\quad \text{其中 } a \text{ 为实数}.$$

(2) 类似

$$f'(x+y)=f'(x)f(y),\quad f'(x+y)=f'(y)f(x).$$

因为

$$f(x)\neq 0,\quad f(y)\neq 0,$$

有

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{f'(y)}{f(y)}=a\quad(\text{实数}).$$

积分

$$\ln f(x)=ax+C.$$

因为

$$f(x)=f(x+0)=f(x)\cdot f(0),$$

所以

$$f(0)=1,\quad C=0,$$

于是

$$\ln f(x)=ax,$$

即

$$f(x)=e^{ax}.$$

16. **分析**　由 $f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,z)$ 两边对 t 求导，可导出所要证明的结果.

充分性，即要证明 $\dfrac{f(tx,ty,tz)}{t^k}$ 对 $t>0$ 为常数，即证 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\dfrac{f(tx,ty,tz)}{t^k}\right]=0$. 其中关键是应用复合函数求导法则.

证　"$\Rightarrow$" 设 $f(x,y,z)$ 是 k 次齐次函数，按定义，得

$$f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,z)\quad(\forall t>0).$$

将上式两端对 t 可导,得

$$xf_1'(tx,ty,tz)+yf_2'(tx,ty,tz)+zf_3'(tx,ty,tz)$$
$$=kt^{k-1}f(x,y,z)\quad(\forall\, t>0).$$

令 $t=1$,则

$$xf_x'(x,y,z)+yf_y'(x,y,z)+zf_z'(x,y,z)=kf(x,y,z).$$

"$\Leftarrow$" 若 $xf_x'+yf_y'+zf_z'=kf(x,y,z)$ 成立.

将上式中 x,y,z 分别换成 tx,ty,tz,有

$$txf_{tx}'(tx,ty,tz)+tyf_{ty}'(tx,ty,tz)+tzf_{tz}'(tx,ty,tz)$$
$$=kf(tx,ty,tz),$$

即

$$txf_{tx}'+tyf_{ty}'+tzf_{tz}'-kf(tx,ty,tz)=0.$$

设

$$\varphi(t)=\frac{f(tx,ty,tz)}{t^k}\quad(\forall\, t>0),$$

由复合函数求导法则,可得

$$\varphi'(t)=\frac{1}{t^k}[xf_{tx}'+yf_{ty}'+zf_{tz}']-\frac{k}{t^{k+1}}f(tx,ty,tz)$$
$$=\frac{1}{t^{k+1}}[txf_{tx}'+tyf_{ty}'+tzf_{tz}'-kf(tx,ty,tz)]=0,$$

所以 $\varphi(t)$ 为常数,

$$\varphi(t)=\varphi(1)=f(x,y,z),$$

即

$$f(tx,ty,tz)=t^kf(x,y,z).$$

17. **解**　构造函数

$$L=\ln x+2\ln y+3\ln z+\lambda(x^2+y^2+z^2-6r^2),$$

令

$$\begin{cases}L_x=\dfrac{1}{x}+2\lambda x=0,\\ L_y=\dfrac{2}{y}+2\lambda y=0,\\ L_z=\dfrac{3}{z}+2\lambda z=0,\\ x^2+y^2+z^2=6r^2,\end{cases}$$

解此方程组

$$x=r,\quad y=\sqrt{2}r,\quad z=\sqrt{3}r,$$

所以函数 $\ln x+2\ln y+3\ln z$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=6r^2$ 上的极大值是

$$\ln r+2\ln\sqrt{2}r+3\ln\sqrt{3}r=\ln(6\sqrt{3}r^6).$$

又因为 xy^2z^3 在同样约束条件下与函数 $\ln x + 2\ln y + 3\ln z = \ln xy^2z^3$ 有相同的极值点，所以函数 xy^2z^3 在 $x^2+y^2+z^2=6r^2$ 条件下极大值是 $6\sqrt{3}r^6$，即有

$$xy^2z^3 \leqslant 6\sqrt{3}\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{6}\right)^3,$$

即 $x=\sqrt{a}, y=\sqrt{b}, z=\sqrt{c}$，则有

$$\sqrt{a}b(\sqrt{c})^3 \leqslant 6\sqrt{3}\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^3,$$

两端平方，得

$$ab^2c^3 \leqslant 108\left(\frac{a+b+c}{6}\right)^6.$$

18. **解**　设点 $P(x,y,z)$，则椭球面在 P 点处的切平面方程为

$$\frac{x}{a^2}(X-x)+\frac{y}{b^2}(Y-y)+\frac{z}{c^2}(Z-z)=0,$$

即

$$\frac{x}{a^2}X+\frac{y}{b^2}Y+\frac{z}{c^2}Z=1. \tag{*}$$

(*)在三个坐标轴的截距为

$$\frac{a^2}{x},\quad \frac{b^2}{y},\quad \frac{c^2}{z},$$

从而四面体之体积 $V=\frac{1}{6}\cdot\frac{a^2b^2c^2}{xyz}$ 在条件 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 下的条件极值：

作辅助函数

$$F(x,y,z)=xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right),$$

令

$$\begin{cases} F_x = yz+\dfrac{2\lambda x}{a^2}=0, \\ F_y = xz+\dfrac{2\lambda y}{b^2}=0, \\ F_z = xy+\dfrac{2\lambda z}{c^2}=0, \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \end{cases}$$

解之

$$x=\frac{a}{\sqrt{3}},\quad y=\frac{b}{\sqrt{3}},\quad z=\frac{c}{\sqrt{3}},$$

所以切点坐标 $\left(\frac{a}{\sqrt{3}},\frac{b}{\sqrt{3}},\frac{c}{\sqrt{3}}\right)$.

19. **解**

$$u(x,y)=\int_0^{xy}f(t)(xy-t)\mathrm{d}t+\int_{xy}^1 f(t)(t-xy)\mathrm{d}t$$

$$=xy\int_0^{xy}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{xy}tf(t)\mathrm{d}t+\int_{xy}^1 tf(t)\mathrm{d}t-xy\int_{xy}^1 f(t)\mathrm{d}t,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y\int_0^{xy}f(t)\mathrm{d}t+xy^2f(x,y)-xy^2f(xy)$$

$$-xy^2f(xy)-y\int_{xy}^1 f(t)\mathrm{d}t+xy^2f(xy)$$

$$=y\int_0^{xy}f(t)\mathrm{d}t+y\int_1^{xy}f(t)\mathrm{d}t,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y^2f(xy)+y^2f(xy)=2y^2f(xy).$$

由对偶性

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2x^2f(xy).$$

第六章　多元函数积分学

一、本章的重点内容与常见的典型题型

多元函数积分学包括二重、三重积分，曲线积分与曲面积分．其重点内容是：

1．它们的概念和简单性质．

2．二重积分对直角坐标与极坐标的计算，即化为二次积分．三重积分对直角坐标、柱面坐标、球面坐标的计算，即化为三次积分．画出积分区域简图，选择适当的积分次序，以及曲线积分和曲面积计算．

3．格林公式以及平面上曲线积分与路径无关的充要条件，并会利用它们计算曲线积分．

4．高斯公式与斯托克斯公式．

5．散度与旋度的概念及计算．

6．重积分与曲线，曲面积分在几何与物理上的应用．

常见题型有：

1．对各种坐标计算二重、三重积分．

2．二重、三重积分在几何和物理中的应用，如求面积、体积、质量、质心坐标、引力等．

3．对弧长和对坐标的曲线积分的计算，格林公式及其应用．

4．对面积和对坐标的曲面积分的计算，高斯公式及其应用．

5．梯度、散度、旋度的综合计算．

6．曲线、曲面积分在几何和物理中的应用，如质心坐标，作功等．

二、习　　题

(一) 填空题

1．交换积分次序

$$\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f(x,y)dy + \int_1^3 dx \int_0^{\frac{1}{2}(3-x)} f(x,y)dy = \underline{\qquad\qquad}.$$

2. $\int_0^1 x\mathrm{d}x\int_1^{x^2}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=$ ______.

3. 将极坐标系中的累次积分转换成直角坐标系中的累次积分.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r=\_\_\_\_\_\_.$$

4. 将直角坐标系中的累次积分转换成极坐标系中的累次积分并计算.

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}R}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\int_0^{y}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}R}^{R}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\_\_\_\_\_\_.$$

5. 交换极坐标的积分次序

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r=\_\_\_\_\_\_.$$

6. (1) 设 L 为椭圆$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$,其周长为 a,则

$$\oint_L(2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}S=\_\_\_\_\_\_.$$

(2) 设 L 是圆周$x^2+y^2=a^2$,则$\oint_L(x^2+y^3)\mathrm{d}S=$ ______.

7. 设曲线积分:

$$\int_C\frac{-2xf(x)}{1+x^2}y\mathrm{d}x+f(x)\mathrm{d}y$$

与路径无关,其中 $f'(x)$ 连续且 $f(0)=1$,则 $f(x)=$ ______.

8. 设 Ω: $x^2+y^2+z^2\leqslant 1,z\geqslant 0$,则

$$\iiint_\Omega(2x^2+3y^2+5z^2)\mathrm{d}V=\_\_\_\_\_\_.$$

9. 设 L: $x^2+(y+1)^2=2$ 取正向闭曲线,则

$$\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+(y+1)^2}=\_\_\_\_\_\_.$$

10. 已知 Σ 是介于两平面 $z=0,z=H(H>0)$ 之间圆柱面 $x^2+y^2=R^2$,则

$$\iint_\Sigma\frac{\mathrm{d}S}{x^2+y^2+z^2}=\_\_\_\_\_\_.$$

11. 设 S 是平面$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ 在第一卦限上的部分,则

$$I=\iint_S\left(2x+\frac{4}{3}y+z\right)\mathrm{d}S=\_\_\_\_\_\_.$$

12. $I = \oiint\limits_S z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ ________，其中 S 为：$x^2+y^2+z^2=R^2$ 外侧.

(二) 选择题

1. 二次积分$\int_0^2 \mathrm{d}x\int_0^{x^2} f(x,y)\mathrm{d}y$ 的另一种积分次序是(　　).

(A) $\int_0^4 \mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)\mathrm{d}x$；　(B) $\int_0^4 \mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\mathrm{d}x$；

(C) $\int_0^4 \mathrm{d}y\int_{x^2}^2 f(x,y)\mathrm{d}x$；　(D) $\int_0^4 \mathrm{d}y\int_2^{\sqrt{y}} f(x,y)\mathrm{d}x$.

2. 设区域 D：$1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2$，$f$ 是区域D 上的连续函数，则$\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等于(　　).

(A) $2\pi\int_1^2 rf(r^2)\mathrm{d}r$；　(B) $2\pi\left[\int_0^2 rf(r)\mathrm{d}r-\int_0^1 rf(r)\mathrm{d}r\right]$；

(C) $2\pi\int_1^2 rf(r)\mathrm{d}r$；　(D) $2\pi\left[\int_0^2 rf(r^2)\mathrm{d}r-\int_0^1 rf(r^2)\mathrm{d}r\right]$.

3. 设区域 Ω：$z\geqslant\sqrt{3(x^2+y^2)}$，$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$，则 $\iiint\limits_\Omega z^2\mathrm{d}V$ 等于(　　).

(A) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\varphi\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r$；　(B) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin\varphi\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r$；

(C) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\mathrm{d}r$；　(D) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\mathrm{d}r$.

4. 设 D 是 Oxy 平面上以点$(1,1)$，$(-1,1)$ 和$(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域，D_1 是 D 在第一象限的部分，则 $I=\iint\limits_D (xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 等于(　　).

(A) $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；　(B) $2\iint\limits_{D_1} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

(C) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；　(D) 0.

5. 设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $y=0$，$y=x^2$ 和 $x=1$ 所围成区域，则 $f(x,y)$ 等于(　　).

(A) xy；　(B) $2xy$；　(C) $xy+\frac{1}{8}$；　(D) $xy+1$.

6. 设空间区域 Ω_1：$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$，$z\geqslant 0$；Ω_2：$x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$，$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，z

$\geqslant 0$,则下述等式成立的是(　　).

(A) $\iiint\limits_{\Omega_1} x\mathrm{d}V = 4\iiint\limits_{\Omega_2} x\mathrm{d}V$;　　(B) $\iiint\limits_{\Omega_1} y\mathrm{d}V = 4\iiint\limits_{\Omega_2} y\mathrm{d}V$;

(C) $\iiint\limits_{\Omega_1} z\mathrm{d}V = 4\iiint\limits_{\Omega_2} x\mathrm{d}V$;　　(D) $\iiint\limits_{\Omega_1} xyz\mathrm{d}V = 4\iiint\limits_{\Omega_2} xyz\mathrm{d}V$.

7. 曲线积分 $I = \int_{\widehat{AB}}(2x\cos y + y\sin x)\mathrm{d}x - (x^2\sin y + \cos x)\mathrm{d}y$,其中 $\widehat{AB}$ 为位于第一象限中的圆弧 $x^2 + y^2 = 1$: $A(1,0), B(0,1)$,则 I 等于(　　).

(A) 0;　　(B) -1;　　(C) -2;　　(D) 2.

8. 曲线积分 $I = \oint_L \dfrac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{4x^2 + y^2}$,其中 L 为椭圆 $4x^2 + y^2 = 1$,并取正向,则 I 的值等于(　　).

(A) -2π;　　(B) 2π;　　(C) 0;　　(D) π.

9. 设 Σ 是 Oyz 平面上的圆域 $y^2 + z^2 \leqslant 1$,则 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}S$ 等于(　　).

(A) 0;　　(B) π;　　(C) $\dfrac{1}{4}\pi$;　　(D) $\dfrac{1}{2}\pi$.

10. 设 Σ 为柱面 $x^2 + y^2 = a^2 (0 \leqslant z \leqslant 3)$,其向外的单位法向量为 $\boldsymbol{n}_0 = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$,则 $\iint\limits_{\Sigma}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\mathrm{d}S =$ ________.

(A) $6\pi a^2$;　　(B) $9\pi a^2$;　　(C) $\iint\limits_{\Sigma} z\cos\gamma\mathrm{d}S$;　　(D) 0.

11. 设 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的上半部分的上侧,则下列式子错误的是(　　).

(A) $\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$;　　(B) $\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$;

(C) $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$;　　(D) $\iint\limits_{\Sigma} y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$.

(三) 解答题

1. 计算 $I = \iint\limits_{D} |\cos(x + y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D: $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}, 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

2. 计算 $I = \iint\limits_{D} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由直线 $x = -2, y = 0, y = 2$ 及曲线 $x = -\sqrt{2y - y^2}$ 所围成的平面区域.

3. 求 $I = \iint\limits_{D} \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}}$,其中 D: 由曲线 $y = -a + \sqrt{a^2 - x^2}\ (a > 0)$ 和直线 $y = -x$ 围成的区域.

4. 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant x\}$，求 $I=\iint\limits_D \sqrt{x}\,dxdy$.

5. 设 $f(t)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且满足方程：

$$f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy,$$

求 $f(t)$.

6. 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续且恒大于 0. 证明：

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx\geqslant (b-a)^2.$$

7. 求证 $\iint\limits_D f(x\cdot y)dxdy=\ln 2\int_1^2 f(u)du$. 其中 D 是由曲线 $xy=1, xy=2, y=x, y=4x\ (x>0, y>0)$ 所围成区域.

8. 设 $f(x)$ 为连续函数，区域 D 由 $|y|\leqslant|x|\leqslant 1$ 确定. 证明：

$$I=\iint\limits_D f(\sqrt{x^2+y^2})dxdy=\pi\int_0^1 xf(x)dx+\int_1^{\sqrt{2}}\left(\pi-4\arccos\frac{1}{x}\right)xf(x)dx.$$

9. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，并设 $\int_0^1 f(x)dx=A$. 求 $I=\int_0^1 dx\int_x^1 f(x)f(y)dy$.

10. 设立体曲面 $z=3x^2+y^2$ 与 $z=1-x^2$ 围成，求该立体的体积.

11. 计算 $I=\int_0^1 x^2 f(x)dx$，其中 $f(x)=\int_{x^3}^{x} e^{-y^2}dy$.

12. 设 $f(x,y)$ 是定义在区域 $0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1$ 上的二元连续函数，$f(0,0)=-1$，求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}dt\int_x^{\sqrt{t}} f(t,u)du}{1-e^{-x^3}}$.

13. 设 $f(x,y)$ 在单位圆 $x^2+y^2\leqslant 1$ 上有连续的偏导数，且在边界上取值为零，$f(0,0)=2002$，试求极限

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\varepsilon^2\leqslant x^2+y^2\leqslant 1}\frac{xf_x'+yf_y'}{x^2+y^2}dxdy.$$

14. 计算 $I=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}dz\int_0^{1-x-z}(1-y)e^{-(1-y-z)^2}dy$.

15. 计算 $I=\iiint\limits_\Omega (x^2+y^2+z)dV$，其中 Ω 是由曲线 $\begin{cases}y^2=2z,\\ x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转一周而成的旋转面与平面 $z=4$ 所围成的立体.

16. 计算 $I=\iiint\limits_\Omega (a_0z^4+a_1z^3+a_2z^2+a_3z+a_4)dV$，其中 Ω 是 $x^2+y^2+z^2\leqslant 1$，a_i

为常数($i=0,1,2,3,4$).

17. 设有一半径为 R 的球体,P_0 是此球的表面上的一个定点,球体上任一点的密度与该点到 P_0 距离的平方成正比(比例系数 $k>0$).求球体的重心位置.

18. 设 $f(u)$ 可导,且 $f(0)=0$,求极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^4}\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

19. 计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}V$,其中 Ω 域是由在 Oyz 平面内 $z=0,z=2$ 及 $y^2-(z-1)^2=1$ 所围成平面绕 z 轴旋转而成的空间域.

20. 计算三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}V$,其中

Ω: $x^2+y^2+z^2\geqslant a^2,\quad 0\leqslant z\leqslant\sqrt{4a^2-x^2-y^2},\quad x^2+y^2+(z-a)^2\geqslant a^2.$

21. 计算 $I=\oint_C|y|\mathrm{d}S$,其中 C 为双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)\ (a>0)$.

22. 设均匀物质曲线 C 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 在第一卦限部分的边界曲线,曲线的线密度 $\mu=1$,求 C 的重心.

23. 确定常数 λ,使在右半平面 $x>0$ 上的向量 $\boldsymbol{A}(x,y)=2xy(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{i}-x^2(x^4+y^2)^{\lambda}\boldsymbol{j}$ 为某二元函数 $u(x,y)$ 的梯度,并求 $u(x,y)$.

24. 求 $I=\int_L(\mathrm{e}^x\sin y-b(x+y))\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-ax)\mathrm{d}y$,其中 a,b 为正常数,L 为从点 $A(2a,0)$ 沿曲线 $y=\sqrt{2ax-x^2}$ 到点 $O(0,0)$ 的弧.

25. 计算曲线积分

$$I=\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2},$$

其中 L 是以点 $(1,0)$ 为中心,R 为半径的圆周($R>1$),取逆时针方向.

26. 设函数 $Q(x,y)$ 具有一阶连续偏导数,曲线积分 $\int_L 2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关,且对任意 t 恒有 $\int_{(0,0)}^{(t,1)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_{(0,0)}^{(1,t)}2xy\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$,求 $Q(x,y)$.

27. 在变力 $\boldsymbol{F}=yz\boldsymbol{i}+zx\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$ 的作用下,质点由原点沿直线运动到椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上第一卦限的点 (ξ,η,ζ),问当 (ξ,η,ζ) 取何值时,力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功 W 最大,并求出 W 的最大值.

28. 计算 $I=\oint_L(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$,其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线,从 z 轴正向看去,L 为逆时针方向.

29. 计算 $I=\int_{\widehat{AmB}}[\varphi(y)\cos x-\pi y]\mathrm{d}x+[\varphi'(y)\sin x-\pi]\mathrm{d}y$，其中 $A(\pi,2)$，$B(3\pi,4)$，$\varphi(y)\in C^{(1)}$，$\widehat{AmB}$ 为联结 A,B 两点的线段 $\overline{AB}$ 下方任意路线，且与 $\overline{AB}$ 围成的面积为 2.

30. 计算曲线积分

$$I=\int_L\frac{(12xy+\mathrm{e}^y)\mathrm{d}x-(\cos y-x\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2},$$

其中，L 为自 $A(0,-1)$ 沿曲线 $x=-\sqrt{1-y^2}$ 到点 $B(0,1)$ 的曲线段.

31. 计算曲线积分

$$I=\int_L\frac{(x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2},$$

其中 L 为点 $A(-a,0)$ 到点 $B(a,0)$ 的上半椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (y\geqslant 0)$.

32. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$，其中 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的上侧，$a>0$ 常数.

33. 设 S 为椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分(即 $z\geqslant 0$)，点 $P(x,y,z)\in S$，π 为 S 在点 P 处的切平面，$\rho(x,y,z)$ 为点 $(0,0,0)$ 到平面 π 的距离，求 $I=\iint\limits_S\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$.

34. 设对于 $x>0$ 内任意的光滑有向闭曲面 S 都有 $\oiint\limits_S xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，其中函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内具有连续一阶导数且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$. 求 $f(x)$.

35. 设 Σ 是球面

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2ay-2az+a^2=0\ (a>0),$$

证明：$I=\oiint\limits_{\Sigma}(x+y+z-\sqrt{3}a)\mathrm{d}S\leqslant 12\pi a^3$.

36. 计算 $I=\oiint\limits_{\Sigma}xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为：由球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和 $x^2+y^2+z^2=4a^2$，锥面 $x^2+y^2-z^2=0$ 以及 $z\geqslant 0$ 所围立体外侧.

37. 计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{S_1+S_2}xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 S_1 为圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上 $x\geqslant 0$ 及 $0\leqslant z\leqslant 1$ 的部分，并取前侧，S_2 为 Oxy 平面上的半圆域 $x^2+y^2\leqslant a^2,x\geqslant 0$，取下侧.

38. 设函数 $f(u)$ 具有连续导数，计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}\left[\frac{1}{y+2}f\left(\frac{x+1}{y+2}\right)+3xy^2+e^z\right]dydz+\left[\frac{1}{x+1}f\left(\frac{x+1}{y+2}\right)+3x^2y-y\right]dzdx$$
$$+(z-x^2-y^2)dxdy,$$

其中 Σ 是 $z=1+\sqrt{x^2+y^2}\ (1\leqslant z\leqslant 2)$ 表面外侧.

39. 计算曲面积分

$$I=\iint_{S}\frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{|\boldsymbol{r}|^2}dS,$$

其中 $\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$, S 是球面

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2\quad(a^2+b^2+c^2\neq R^2>0)$$

的外侧, $\boldsymbol{n}$ 是 S 的外侧的单位法向量.

40. 设有一高度为 $h(t)$(t 为时间)的雪堆在融化过程中,其侧面满足方程 $z=h(t)-\dfrac{2(x^2+y^2)}{h(t)}$(设长度单位为厘米,时间单位为小时),已知体积减少的速率与侧面积成正比(比例系数为0.9),问高度为130厘米的雪堆全部融化需多少小时?

三、习题的解答与分析

(一) 填空题

1. 应填: $\int_0^1 dy\int_{\sqrt{y}}^{3-2y}f(x,y)dx$.

分析 画出积分区域草图.

2. 应填: $\frac{1}{2}(\cos 1-1)$.

分析 原式 $=-\int_0^1\frac{\sin t}{t}dt\int_0^{\sqrt{t}}xdx=-\frac{1}{2}\int_0^1\sin t\,dt=\frac{1}{2}(\cos 1-1)$.

3. 应填: $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}}f(x,y)dy$.

4. 应填: $\frac{\pi}{8}(1-e^{-R^2})$.

分析 画出积分区域草图.

$$\text{原式}=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^R e^{-r^2}\cdot r\,dr=\frac{\pi}{8}(1-e^{-R^2}).$$

5. 应填：

$$\int_0^{\sqrt{2}a}\mathrm{d}r\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\arccos\frac{r}{2a}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}\theta+\int_{\sqrt{2}a}^{2a}\mathrm{d}r\int_{-\arccos\frac{r}{2a}}^{\arccos\frac{r}{2a}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}\theta.$$

分析 画出积分区域草图.

6. 应填：(1) $12a$； (2) πa^3.

分析 (1) 原式 $=\oint_L 2xy\mathrm{d}S+12\oint_L\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}\right)\mathrm{d}S=0+12\oint_L\mathrm{d}S=12a$；

(2) 原式 $=\oint_L x^2\mathrm{d}S=\frac{1}{2}\int_L(x^2+y^2)\mathrm{d}S=\frac{1}{2}a^2\oint_L\mathrm{d}S=\pi a^3$.

评注 (1) L 关于 x 轴对称，$2xy$ 关于 y 是奇函数，所以 $\oint_L 2xy\mathrm{d}S=0$.

同理(2) 中 $\oint_L y^3\mathrm{d}S=0$.

(2) 由轮换对称性

$$\oint_L x^2\mathrm{d}S=\oint_L y^2\mathrm{d}S=\frac{1}{2}\oint_L(x^2+y^2)\mathrm{d}S.$$

7. 应填：$\frac{1}{1+x^2}$.

分析 利用线积分与路径无关的充要条件 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$，有

$$\begin{cases}\frac{-2xf(x)}{1+x^2}=f'(x),\\ f(0)=0,\end{cases}$$

即

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{-2x}{1+x^2},$$

所以

$$\ln f(x)=-\ln(1+x^2)+\ln e,$$

因为 $f(0)=1$，所以 $C=1$. 所以 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

8. 应填：$\frac{4\pi}{3}$.

分析 原式 $=\frac{1}{2}\iiint\limits_{\Omega_0}(2x^2+3y^2+5z^2)\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\cdot(2+3+5)\cdot\frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega_0}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$

$$=\frac{5}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{3},$$

其中 Ω_0：$x^2+y^2+z^2\leqslant 1$.

9. 应填：2π.

分析 $$\text{原式} = \frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\iint_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi.$$

10. 应填：$2\pi\arctan\dfrac{H}{R}$.

分析 原式 $= \iint_\Sigma (R^2+z^2)^{-1}\mathrm{d}S =$ 密度 ρ 为 $(R^2+z^2)^{-1}$ 的曲面 Σ 的质量.

由一元函数微元法，原式 $= \int_{z=0}^{z=H}\mathrm{d}M$，其中

$$\mathrm{d}M = [z, z+\mathrm{d}z]\text{ 中的质量} = (R^2+z^2)^{-1}\mathrm{d}S = (R^2+z^2)^{-1}\cdot 2\pi R\mathrm{d}z,$$

所以 $$\text{原式} = \int_0^H (R^2+z^2)^{-1}\cdot 2\pi R\mathrm{d}z = 2\pi\arctan\frac{H}{R}.$$

11. 应填：$4\sqrt{61}$.

分析 $$\text{原式} = 4\iint_S\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}\right)\mathrm{d}S = 4\iint_S 1\mathrm{d}S = 4\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 4\iint_{D_{xy}}\frac{\sqrt{61}}{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\sqrt{61},$$

其中 D_{xy} 为在 Oxy 平面上由 x 轴，y 轴和直线 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ 所围平面区域.

12. 应填：0.

分析 由高斯公式

$$\text{原式} = \iiint_\Omega 2z\mathrm{d}V = 0.$$

评注 以下作法是错误的：

$$\text{原式} = \oiint_{S_{外}} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_{S_1(上)} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 S_1 为 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 上半球面上侧.

(二) 选择题

1. 应选(A).
2. 应选(C).
3. 应选(B).
4. 应选(A).

分析 考虑被积函数的奇偶性和积分区域的对称性.

5. 应选(C).

分析 令

$$A = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

则
$$A = \int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^{x^2} y\mathrm{d}y + A\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_0^1 x^5\mathrm{d}x + A\int_0^1 x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{12} + \frac{A}{3},$$

所以 $A = \frac{1}{8}$，$f(x,y) = xy + \frac{1}{8}$.

6. 应选(C).

分析　显然 Ω_1 关于 Oxz 平面，Oyz 平面对称. 而(A)，(B)，(D) 左端被积函数分别关于 x, y 是奇函数，所以(A)，(B)，(D) 右端应为零. 由于 z 关于 x, y 均为偶函数，Ω_1 关于 Oxz，Oyz 平面对称，所以

$$\iiint_{\Omega_1} z\mathrm{d}V = 4\iiint_{\Omega_2} z\mathrm{d}V = 4\iiint_{\Omega_2} x\mathrm{d}V.$$

注
$$\iiint_{\Omega_2}(x+y+z)\mathrm{d}V = 3\iiint_{\Omega_2} x\mathrm{d}V = 3\iiint_{\Omega_2} y\mathrm{d}V = 3\iiint_{\Omega_2} z\mathrm{d}V,$$

所以 $\iiint_{\Omega_2} z\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega_2} x\mathrm{d}V$. 并且还有

$$\iiint_{\Omega_1} z\mathrm{d}V = \frac{4}{3}\iiint_{\Omega_2}(x+y+z)\mathrm{d}V.$$

7. 应选(C).

分析　因为 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = -2x\sin y + \sin x$，所以曲线积分与路径无关.

$$I = \int_{\overline{AO}} + \int_{\overline{OB}}(2x\cos y + y\sin x)\mathrm{d}x - (x^2\sin y + \cos x)\mathrm{d}y = -2.$$

8. 应选(D).

分析
$$I = \oint_L -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = 2\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\times\pi\times\frac{1}{2}\times 1 = \pi.$$

9. 应选(D).

分析
$$\text{原式} = \iint_{D_{yz}}(y^2+z^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r = \frac{1}{2}\pi,$$

其中
$$D_{yz}: \begin{cases} y^2 + z^2 \leqslant 1, \\ x = 0. \end{cases}$$

10. 应选(A).

分析　柱面 Σ 上任意一点 (x, y, z) 的法向量为：

$$\boldsymbol{n} = \pm\{F_x, F_y, F_z\} = \pm\{2x, 2y, 0\},$$

所以向外的单位法向量为：

$$n_0=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\{x,y,0\}=\frac{1}{a}\{x,y,0\},$$

故
$$\cos\alpha=\frac{x}{a},\quad \cos\beta=\frac{y}{a},\quad \cos\gamma=0,$$

则
$$\text{原式}=\iint_{\Sigma}\{x,y,z\}\cdot\left\{\frac{x}{a},\frac{y}{a},0\right\}\mathrm{d}S=\frac{1}{a}\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}S$$
$$=\frac{1}{a}\iint_{\Sigma}a^2\mathrm{d}S=a\iint_{\Sigma}\mathrm{d}S=a\times(2\pi a)\times 3=6\pi a^2.$$

11. 应选(C).

分析 利用第二类型曲面积分的奇偶对称性：如果曲面 S(包括侧)关于 $x=0$ 平面对称，被积函数 $f(x,y,z)$ 关于 x 是偶(或奇)函数，则

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\quad\left(\text{或}=2\iint_{S_*}f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right),$$

其中
$$S_*=S\cap x\geqslant 0\quad(\text{或 }S\cap x\leqslant 0).$$

评注 1° 二型积分的奇偶对称性与重积分和一型积分的奇偶对称性正好相反.

2° 二型积分的奇偶性只能一项一项地用，即 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 项用关于 $x=0$ 对称，$\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ 项用关于 $y=0$ 对称，$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 项用 $z=0$ 对称，不能同时对三项一起用. 而且 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 项只能用关于 $x=0$ 对称，不能用关于 $y=0$ 或 $z=0$ 对称.

(三) 解答题

1. **解** 用直线 $x+y=\frac{\pi}{2}$ 将 D 分 D_1,D_2(如图 6-1).

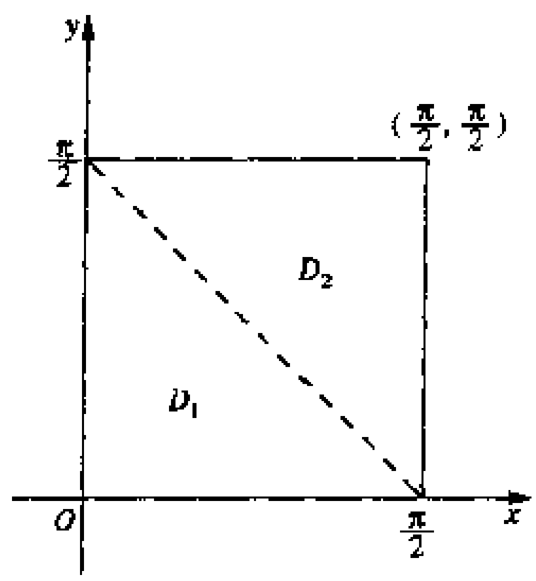


图 6-1

$$D_1:\ 0\leqslant x+y\leqslant\frac{\pi}{2},\quad x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0,$$

$$D_2:\ \frac{\pi}{2}\leqslant x+y\leqslant\pi,\quad x\geqslant 0,\quad y\geqslant 0,$$

所以 $$I=\iint\limits_{D_1}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_2}\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{\pi}{2}-x}\cos(x+y)\mathrm{d}y-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_{\frac{\pi}{2}-x}^{\frac{\pi}{2}}\cos(x+y)\mathrm{d}y=\pi-2.$$

2. **解法一**　如图 6-2，有

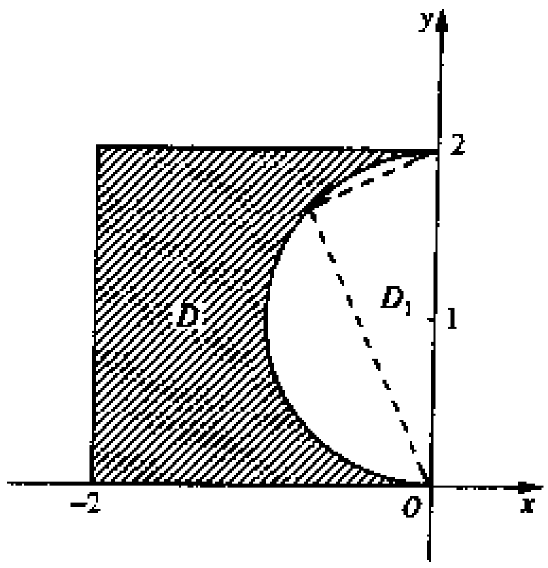


图　6-2

$$I=\iint\limits_{D_1+D}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-2}^{0}\mathrm{d}x\int_0^2 y\mathrm{d}y-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r^2\sin\theta\mathrm{d}r$$

$$=4-\frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sin^4\theta\mathrm{d}\theta\xlongequal{令 t=\theta-\frac{\pi}{2}}4-\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4t\mathrm{d}t$$

$$=4-\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=4-\frac{\pi}{2}.$$

解法二　$$I=\int_0^2 y\mathrm{d}y\int_{-2}^{\sqrt{2y-y^2}}1\mathrm{d}x=2\int_0^2 y\mathrm{d}y-\int_0^2 y\sqrt{2y-y^2}\mathrm{d}y$$

$$=4-\int_0^2 y\sqrt{1-(y-1)^2}\mathrm{d}y\xlongequal{令 y-1=\sin t}4-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\sin t)\cos^2t\mathrm{d}t$$

$$=4-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2t\mathrm{d}t=4-2\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}=4-\frac{\pi}{2}.$$

解法三　利用区域 D 的形心(重心) y 的坐标为 $\bar{y}=1$，即

$$\bar{y}=\frac{\iint\limits_{D}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y}=1,$$

得到 $$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y = D\text{ 的面积 } = 4 - \frac{\pi}{2}.$$

3. **解** 画出草图 6-3:

$$D = \left\{(r,\theta)\,\middle|\, -\frac{\pi}{4} \leqslant \theta \leqslant 0, 0 \leqslant r \leqslant -2a\sin\theta\right\},$$

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{-2a\sin\theta}\frac{r\cdot r}{\sqrt{4a^2-r^2}}\mathrm{d}r \xlongequal{\text{令 } r = 2a\sin t} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\mathrm{d}\theta\int_{0}^{-\theta}2a^2(1-\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$= 2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0}\left(-\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\mathrm{d}\theta = a^2\left(\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\right).$$

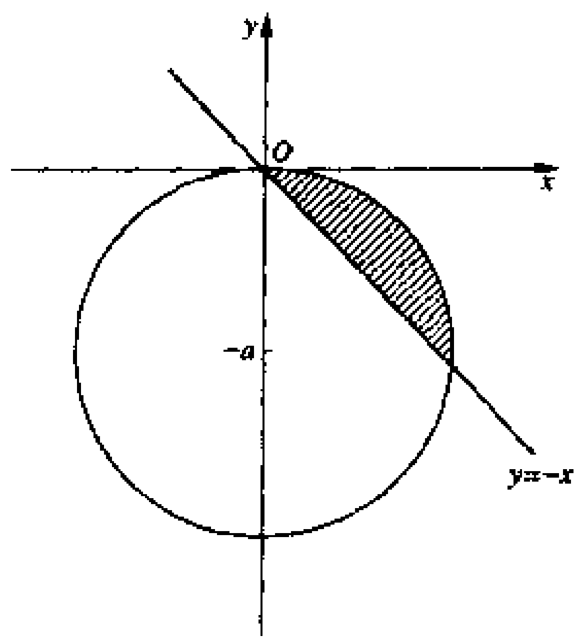


图 6-3

4. **解法一** 画出草图 6-4

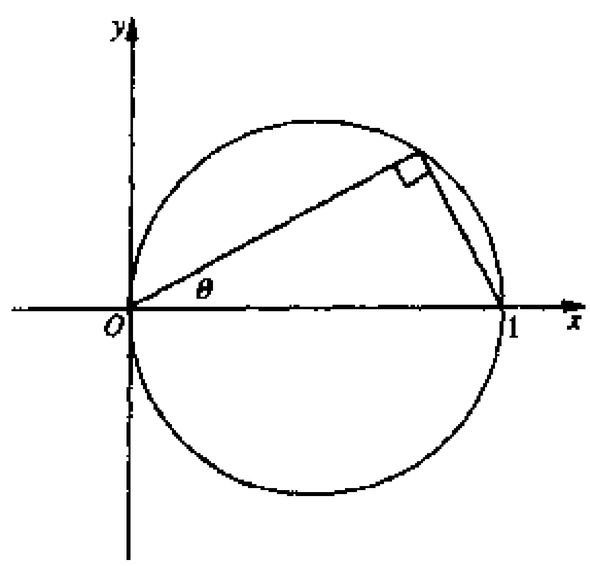


图 6-4

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}\sqrt{r\cos\theta}\cdot r\mathrm{d}r=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{1}{2}}\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta}r^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}r=\frac{4}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta=\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{8}{15}.$$

解法二　$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,\ -\sqrt{x-x^2}\leqslant y\leqslant\sqrt{x-x^2}\}$,

$$I=\int_0^1\sqrt{x}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}}1\mathrm{d}y=2\int_0^1 x\sqrt{1-x}\mathrm{d}x\xlongequal{t=\sqrt{1-x}}4\int_0^1 t^2(1-t^2)\mathrm{d}t=\frac{8}{15}.$$

5. **解**　显然 $f(0)=1$. 由于

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2}f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2t}f\left(\frac{1}{2}r\right)r\mathrm{d}r=2\pi\int_0^{2t}rf\left(\frac{1}{2}r\right)\mathrm{d}r,$$

于是
$$f(t)=\mathrm{e}^{4\pi t^2}+2\pi\int_0^{2t}rf\left(\frac{1}{2}r\right)\mathrm{d}r,$$

所以
$$f'(t)=8\pi t\mathrm{e}^{4\pi t^2}+8\pi tf(t).$$

解上述关于 $f(t)$ 的一阶方程:

$$f(t)=\mathrm{e}^{4\pi t^2}(4\pi t^2+C),$$

代入 $f(0)=1$, 得 $C=1$, 因此

$$f(t)=\mathrm{e}^{4\pi t^2}(4\pi t^2+1).$$

6. **证**　用二重积分证明:

设区域 D 为:

$$a\leqslant x\leqslant b,\quad a\leqslant y\leqslant b,$$

则
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\iint\limits_D\frac{f(x)}{f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\frac{f(y)}{f(x)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

所以
$$2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\iint\limits_D\frac{f^2(x)+f^2(y)}{f(x)f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\iint\limits_D\frac{2f(x)f(y)}{f(x)f(y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=2(b-a)^2,$$

故
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x\geqslant(b-a)^2.$$

7. **证**　令 $u=xy,1\leqslant u\leqslant 2;v=\dfrac{y}{x},1\leqslant v\leqslant 4$.

则区域 D 变成矩形域 D': $1\leqslant u\leqslant 2,1\leqslant v\leqslant 4$, 且

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right)^{-1}=\frac{1}{\begin{vmatrix}y & x\\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x}\end{vmatrix}}=\frac{1}{2v}>0,$$

所以
$$\iint_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'} f(u)\cdot\frac{1}{2v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_1^4\frac{1}{2v}\mathrm{d}v\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u$$
$$=\frac{1}{2}\ln v\Big|_1^4\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u=\ln 2\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u.$$

8. **证** 设 D_1 为 D 在第一象限的部分,则由对称性可知:
$$I=4\iint_{D_1} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=4\left[\iint_{D_{11}} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_{12}} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$
$$=4I_1+4I_2. \qquad (*)$$

如图6-5:D_{11} 上先对 r 后对 θ 积分,D_{12} 上先对 θ 后对 r 积分.

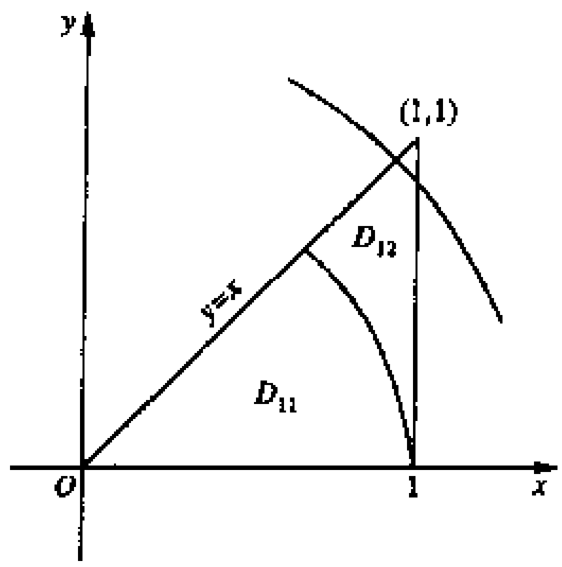


图 6-5

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r)r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}\int_0^1 rf(r)\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x,$$
$$I_2=\int_1^{\sqrt{2}}\mathrm{d}r\int_{\arccos\frac{1}{r}}^{\frac{\pi}{4}} f(r)r\mathrm{d}\theta=\int_1^{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{r}\right)rf(r)\mathrm{d}r$$
$$=\int_1^{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{4}-\arccos\frac{1}{x}\right)xf(x)\mathrm{d}x.$$

将 I_1,I_2 代入(*)有
$$I=\pi\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x+\int_1^{\sqrt{2}}\left(\pi-4\arccos\frac{1}{x}\right)xf(x)\mathrm{d}x.$$

9. **解法一** 更换积分次序,可得
$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y f(x)f(y)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(y)f(x)\mathrm{d}y,$$

所以
$$2I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x f(x)f(y)\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x)f(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 f(y)\mathrm{d}y$$
$$=\left[\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]^2,$$

所以
$$I=\frac{1}{2}A^2.$$

解法二　记 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,则
$$F(0)=0,\quad F(1)=A,\quad \mathrm{d}F=f(x)\mathrm{d}x,$$
于是
$$\begin{aligned}I&=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_x^1\mathrm{d}F(y)=\int_0^1 f(x)[F(1)-F(x)]\mathrm{d}x\\&=\int_0^1[f(x)A-f(x)F(x)]\mathrm{d}x=A^2-\int_0^1 F(x)\mathrm{d}F(x)\\&=A^2-\frac{1}{2}F^2(x)\Big|_0^1=A^2-\frac{1}{2}A^2=\frac{1}{2}A^2.\end{aligned}$$

10. **解法一**　二重积分求体积:

立体 Ω 在 Oxy 坐标面投影曲线为:
$$\begin{cases}3x^2+y^2=1-x^2,\\ z=0,\end{cases}\quad D_{xy}:\begin{cases}4x^2+y^2\leqslant 1,\\ z=0.\end{cases}$$
设 D_1 为 D_{xy} 在第一象限部分,则
$$\begin{aligned}V&=\iint\limits_{D_{xy}}[1-x^2-(3x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint\limits_{D_1}[(1-4x^2)-y^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=4\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-4x^2}}[(1-4x^2)-y^2]\mathrm{d}y=4\int_0^{\frac{1}{2}}\Big[(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big]\mathrm{d}x\\&=\frac{8}{3}\int_0^{\frac{1}{2}}(1-4x^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\xlongequal{\text{令 }2x=\sin t}\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

解法二　作广义极坐标变换:
$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}\quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}x'(r)&x'(\theta)\\ y'(r)&y'(\theta)\end{vmatrix}=\frac{r}{2},$$
于是
$$\begin{aligned}V&=\iint\limits_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}}(1-r^2)\cdot\frac{1}{2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(r-r^3)\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

11. **分析**　交换积分次序.

解
$$I=\int_0^1 x^2\left(\int_{x^3}^{x}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_{x^3}^{x}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{3\sqrt{y}}x^2\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^1 (y - y^3)e^{-y^2}dy = -\frac{1}{6}\left[(1-y^2)e^{-y^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-y^2}d(-y^2)\right] = \frac{1}{6e}.$$

12. **解**

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^{x^2}dt\int_x^{\sqrt{t}}f(t,u)du}{1-e^{-x^3}} = \lim_{x\to0^+}\frac{f(\xi,\eta)\int_0^{x^2}dt\int_x^{\sqrt{t}}1du}{x^3} = \lim_{x\to0^+}\frac{f(\xi,\eta)\int_0^{x^2}(\sqrt{t}-x)dt}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{-f(\xi,\eta)\frac{1}{3}x^3}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

注意　$x\to0^+$ 时,$(\xi,\eta)\to(0,0)$.

13. **分析**　设 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$,则 $r\frac{\partial f}{\partial r} = xf_x' + yf_y'$.

解　化为极坐标系下的二重积分.

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\varepsilon^2\leqslant x^2+y^2\leqslant1}\frac{xf_x'+yf_y'}{x^2+y^2}dxdy = \lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}d\theta\int_\varepsilon^1\frac{r\frac{\partial f}{\partial r}}{r^2}\cdot rdr$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[f(\cos\theta,\sin\theta) - f(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)]d\theta$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0^+}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} - f(\varepsilon\cos\theta,\varepsilon\sin\theta)d\theta$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0^+}(-f(\varepsilon\cos\tau,\varepsilon\sin\tau)) = -f(0,0) = -2002,$$

其中　$$0\leqslant\tau\leqslant2\pi.$$

14. **解**　积分区域 Ω:是由 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所围成四面体(如图 6-6).

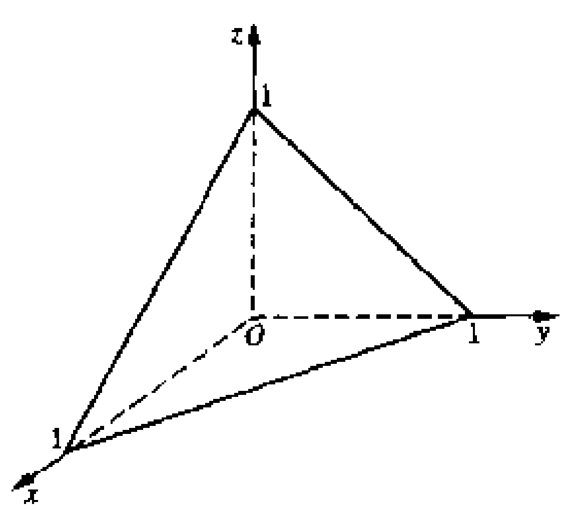


图　6-6

$$I = \iiint\limits_{\Omega} (1-y)e^{-(1-y-z)^2}dV = \iint\limits_{D_{yz}} dydz\int_0^{1-y-z}(1-y)e^{-(1-y-z)^2}dx$$

$$= \iint\limits_{D_{yz}}(1-y)(1-y-z)e^{-(1-y-z)^2}dydz = \int_0^1(1-y)dy\int_0^{1-y}(1-y-z)e^{-(1-y-z)^2}dz$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1(1-y)\left[e^{-(1-y-z)^2}\Big|_{z=0}^{z=1-y}\right]dy = \frac{1}{2}\int_0^1(1-y)[1-e^{-(1-y)^2}]dy = \frac{1}{4e}.$$

15. **解法一** "先二后一法".

旋转面的方程为

$$x^2+y^2=2z,$$

$$I = \int_0^4 dz\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 2z}(x^2+y^2+z)dxdy = \int_0^4 dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{2z}}(r^2+z)rdr$$

$$= 4\pi\int_0^4 z^2dz = \frac{256}{3}\pi.$$

解法二 如图 6-7，Ω 在 Oxy 平面投影曲线为

$$\begin{cases} x^2+y^2=2z, \\ z=4, \end{cases}$$

消去 z：$\begin{cases} x^2+y^2=8, \\ z=0, \end{cases}$ 所以 D_{xy}：$\begin{cases} x^2+y^2\leqslant 8, \\ z=0. \end{cases}$

用柱面坐标：

$$I = \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{8}}rdr\int_{\frac{r^2}{2}}^4(r^2+z)dz$$

$$= 2\pi\int_0^{2\sqrt{2}}\left(4r^3+8r-\frac{5}{8}r^5\right)dr = \frac{256\pi}{3}.$$

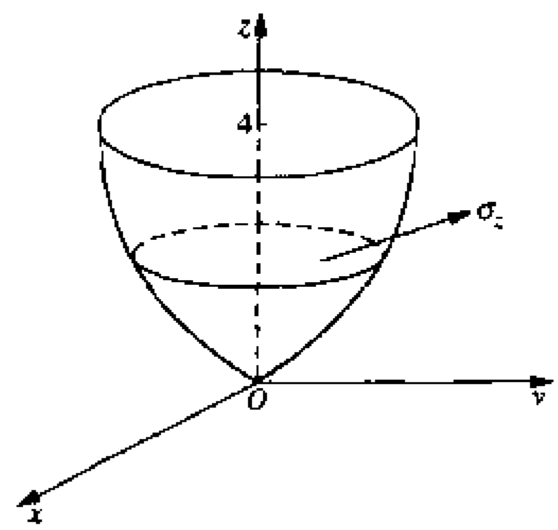


图 6-7

16. **解** 由对称性

$$\iiint\limits_{\Omega}(a_1z^3+a_3z)dV = 0.$$

又

$$\iiint\limits_{\Omega}a_4dV = \frac{4}{3}\pi a_4,$$

$$\iiint\limits_{\Omega}a_2z^2dV = \frac{1}{3}a_2\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)dV = \frac{a_2}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^1 r^4\sin\varphi\, dr = \frac{4\pi}{15}a_2,$$

$$\iiint\limits_{\Omega}a_0z^4dV = 2a_0\int_0^1 z^4dz\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1-z^2}1dxdy = 2a_0\pi\int_0^1 z^4(1-z^2)dz = \frac{4\pi}{35}a_0,$$

故
$$I = \frac{4\pi}{35}a_0 + \frac{4\pi}{15}a_2 + \frac{4\pi}{3}a_4.$$

17. **分析** 本题关键是适当选取坐标系,再根据被积函数的奇偶性和积分区域的对称性来解.

解法一 以 Ω 的球心为原点,射线 OP_0 为正 x 轴建立坐标系,则 $P_0(R,0,0)$,如图 6-8. 球面方程为:

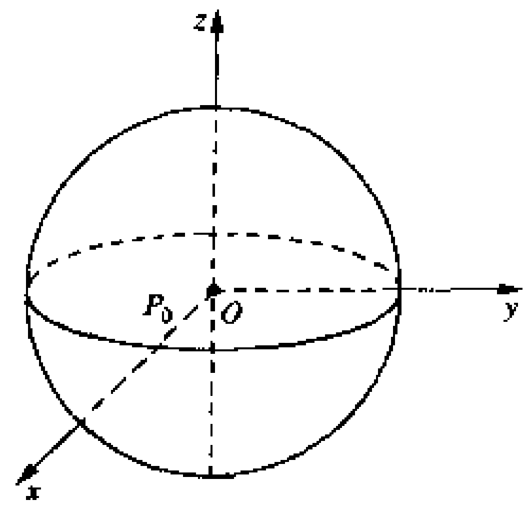


图 6-8

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

设 Ω 的重心 $M(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$.

$$\bar{x} = \frac{\iiint\limits_{\Omega} xk[(x-R)^2 + y^2 + z^2]\mathrm{d}V}{\iiint\limits_{\Omega} k[(x-R)^2 + y^2 + z^2]\mathrm{d}V}.$$

由对称性:

$$\bar{y} = \bar{z} = 0,$$

$$\iiint\limits_{\Omega} x[(x-R)^2 + y^2 + z^2]\mathrm{d}V = -2R\iiint\limits_{\Omega} x^2\mathrm{d}V = -\frac{2}{3}R\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V$$

$$= -\frac{2}{3}R\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^4\mathrm{d}r = -\frac{8}{15}\pi R^6,$$

$$\iiint\limits_{\Omega}[(x-R)^2 + y^2 + z^2]\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V - 2R\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}V + \iiint\limits_{\Omega}R^2\mathrm{d}V$$

$$= I_1 - 2RI_2 + R^2I_3,$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^4\mathrm{d}r = \frac{4}{5}\pi R^5,$$

$$I_2 = 0, \quad I_3 = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

代入上式得

$$\iiint\limits_{\Omega}[(x-R)^2 + y^2 + z^2]\mathrm{d}V = \frac{32}{15}\pi R^5.$$

所以
$$\bar{x} = -\frac{R}{4},$$

所以重心为$\left(-\frac{R}{4},0,0\right)$.

解法二　以定点 P_0 为坐标原点，球心 $\tilde{O}(0,0,R)$ 建立坐标系，如图 6-9.

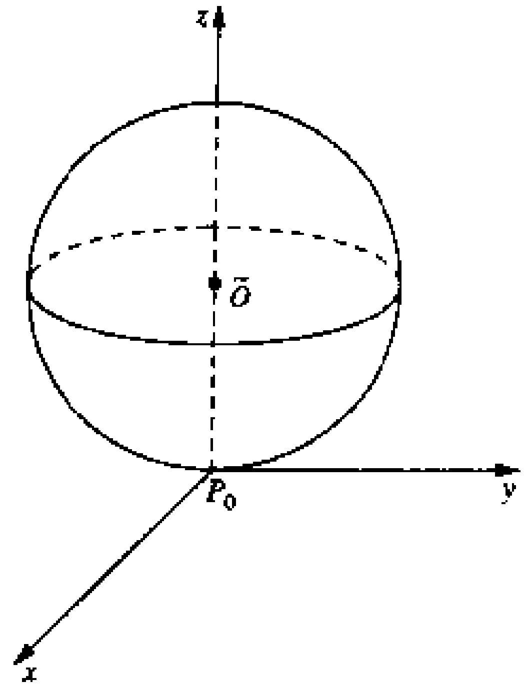


图　6-9

此时球面方程为

$$x^2+y^2+z^2=2Rz.$$

设重心坐标 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$. 由对称性

$$\bar{x}=\bar{y}=0,$$

$$\bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega} kz(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V}{\iiint\limits_{\Omega} k(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V},$$

此时　　$\Omega:\ x^2+y^2+(z-R)^2\leqslant R^2,$

$$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^4\mathrm{d}r=\frac{32}{15}\pi R^5,$$

$$\iiint\limits_{\Omega}z(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{2R\cos\varphi}r^5\cos\varphi\,\mathrm{d}r=\frac{8}{3}\pi R^6,$$

故

$$\bar{z}=\frac{5}{4}R,$$

所以重心 $\left(0,0,\frac{5}{4}R\right)$.

18. **解**　作球坐标变换：

$$x=r\sin\varphi\cos\theta,\quad y=r\sin\varphi\sin\theta,\quad z=r\cos\varphi,$$

$$\iiint\limits_{\Omega}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{t}r^2f(r)\mathrm{d}r=2\pi\cdot 2\int_0^t r^2f(r)\mathrm{d}r$$

$$=4\pi\int_0^t r^2f(r)\mathrm{d}r,$$

所以

$$\lim_{t\to0}\frac{1}{t^4}\iiint\limits_{\Omega}f(\sqrt{x^2+y^2+z^2})\mathrm{d}V=\lim_{t\to0}\frac{4\pi\int_0^t r^2f(r)\mathrm{d}r}{t^4}=\lim_{t\to0}\frac{4\pi t^2f(t)}{4t^3}$$

$$=\pi\lim_{t\to0}\frac{f(t)}{t}=\pi\lim_{t\to0}\frac{f(t)-f(0)}{t-0}=\pi f'(0).$$

19. **解法一**　(先二重后一法)

$$I=\int_0^2\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{1+(z-1)^2}}r^3\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^2[1+(z-1)^2]^2\mathrm{d}z = \frac{\pi}{2}\int_0^2[1+2(z-1)^2+(z-1)^4]\mathrm{d}(z-1) = \frac{28}{15}\pi.$$

解法二 （用柱面坐标）

$$I = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r\int_0^2\mathrm{d}z + \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^{\sqrt{2}} r^3\mathrm{d}r\int_{1+\sqrt{r^2-1}}^2\mathrm{d}z + \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^{\sqrt{2}} r^3\mathrm{d}r\int_0^{1-\sqrt{r^2-1}}\mathrm{d}z$$

$$= \pi + 2\pi\int_1^{\sqrt{2}} r^3(1-\sqrt{r^2-1})\mathrm{d}r + 2\pi\int_1^{\sqrt{2}} r^3(1-\sqrt{r^2-1})\mathrm{d}r$$

$$= 4\pi - 2\pi\int_1^{\sqrt{2}} r^2(1-\sqrt{r^2-1})\mathrm{d}r^2 \quad (\text{设}\sqrt{r^2-1}=t)$$

$$= 4\pi - 4\pi\int_0^1(t^4+t^2)\mathrm{d}t = \frac{28}{15}\pi.$$

20. **解法一** （用球面坐标）

$$I = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_{2a\cos\varphi}^{2a} r^3\mathrm{d}r + \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_a^{2a} r^3\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}16a^4(1-\cos^4\varphi)\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi + \frac{\pi}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}15a^4\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= -8\pi a^4\int_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos\varphi-\cos^5\varphi)\mathrm{d}\cos\varphi - \frac{15}{4}\pi a^4\cos^2\varphi\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{21}{8}\pi a^4.$$

解法二 （先二重后一方法）

$$I = \int_0^{\frac{a}{2}} z\mathrm{d}z\iint_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\frac{a}{2}}^{a} z\mathrm{d}z\iint_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中

$$D_1:\ a^2-z^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4a^2-z^2, \quad D_2:\ a^2-(z-a)^2 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 4a^2-z^2,$$

于是

$$I = \int_0^{\frac{a}{2}}\pi[(4a^2-z^2)-(a^2-z^2)]z\mathrm{d}z + \int_{\frac{a}{2}}^{a}\pi[(4a^2-z^2)-(a^2-(z-a)^2)]z\mathrm{d}z$$

$$= \frac{21}{8}\pi a^4.$$

21. **解**

$$C:\ r^2 = a^2\cos2\theta, \qquad (*)$$

因为

$$\mathrm{d}S = \sqrt{r^2+r'^2}\mathrm{d}\theta,$$

(*) 式两边对 θ 求导

$$2rr' = -2a^2\sin 2\theta, \quad r' = -\frac{a^2\sin 2\theta}{r},$$

所以

$$dS = \frac{a^2}{r}d\theta.$$

由对称性，只要计算 C 在第一象限一段$\left(0 \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right)$上的积分，故

$$I = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} r\sin\theta \cdot \frac{a^2}{r}d\theta = 4a^2(-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 4a^2\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

22. **解**　如图 6-10，设

$$L = L_1 + L_2 + L_3,$$

则

$$m = \int_L dS = 3\int_{L_1} dS = 3 \times \frac{2\pi R}{4} = \frac{3}{2}\pi R.$$

设曲线重心$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$，则

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\int_L x dS = \frac{1}{m}\left[\int_{L_1} x dS + \int_{L_2} x dS + \int_{L_3} x dS\right]$$

$$= \frac{1}{m}\left[\int_{L_1} x dS + \int_{L_2} 0 dS + \int_{L_3} x dS\right] = \frac{2}{m}\int_{L_1} x dS$$

$$= \frac{2}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(R\cos\theta)Rd\theta = \frac{4R}{3\pi}.$$

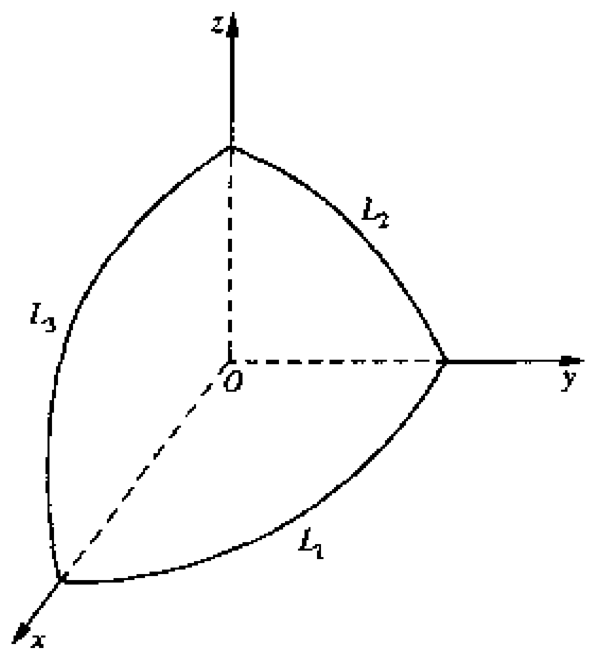


图　6-10

由对称性 $\bar{y} = \bar{z} = \bar{x}$，故重心为：$\left(\frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi}, \frac{4R}{3\pi}\right)$.

23. **解**　记

$$P(x, y) = 2xy(x^4 + y^2)^\lambda, \quad Q(x, y) = -x^2(x^4 + y^2)^\lambda.$$

由于

$$\boldsymbol{A} = P(x, y)\boldsymbol{i} + Q(x, y)\boldsymbol{j} = \mathrm{grad}u \text{ 的} \Leftrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

而

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2x(x^4 + y^2)^\lambda - 4\lambda x^5(x^4 + y^2)^{\lambda-1},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x(x^4 + y^2)^\lambda + 4\lambda y^2(x^4 + y^2)^{\lambda-1},$$

所以

$$4x(x^2 + y^2)^\lambda(\lambda + 1) = 0.$$

因为 $x > 0$，所以 $\lambda = -1$.

取点$(1,0)$作积分路径的起点，则

$$u(x, y) = \int_{(1,0)}^{(x,y)} \frac{2xy dx - x^2 dy}{(x^4 + y^2)} + C$$

$$= \int_1^x \frac{2x \cdot 0}{x^4 + 0^2}dx - \int_0^y \frac{x^2}{x^4 + y^2}dy + C = -\arctan\frac{y}{x^2} + C.$$

24. **解法一** 如图 6-11，添加从 O 到 A 有向线段 L_1.

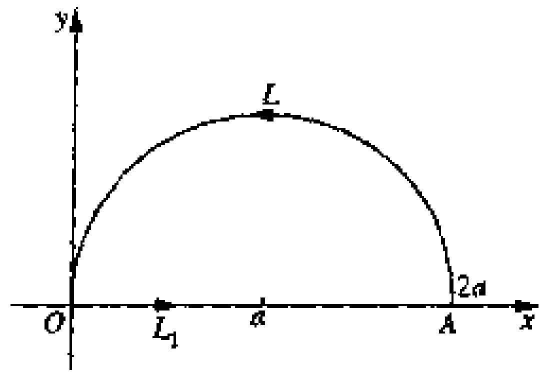


图 6-11

$$I = \oint_{L+L_1}(e^x\sin y - b(x+y))dx + (e^x\cos y - ax)dy$$
$$- \int_{L_1}(e^x\sin y - b(x+y))dx + (e^x\cos y - ax)dy$$
$$= I_1 - I_2,$$

$$I_1 = \iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \iint_D(b-a)dxdy = \frac{\pi}{2}a^2(b-a),$$

$$I_2 = \int_0^{2a}(-bx)dx = -2a^2b,$$

从而
$$I = \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)a^2b - \frac{\pi}{2}a^3.$$

解法二 将原积分项拆项：

$$I = \int_L e^x\sin y dx + e^x\cos y dy - \int_L b(x+y)dx + axdy = I_1 - I_2,$$

$$I_1 = \int_{\overline{AO}} e^x\sin y dx + e^x\cos y dy = \int_{2a}^0 0dx = 0.$$

(I_1 与路径无关).

对 I_2，取 L 的参数方程：

$$\begin{cases} x = a + a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases}$$

t 从 0 到 π，得

$$I_2 = \int_0^{\pi}(-a^2b\sin t - a^2b\sin t\cos t - a^2b\sin^2 t + a^3\cos t + a^3\cos^2 t)dt$$
$$= -2a^2b - \frac{1}{2}\pi a^2b + \frac{1}{2}\pi a^3,$$

从而
$$I = \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)a^2b - \frac{\pi}{2}a^3.$$

25. **分析** (0,0) 点是不连续点.

解
$$P = \frac{-y}{4x^2 + y^2}, \quad Q = \frac{x}{4x^2 + y^2},$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - 4x^2}{(4x^2 + y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad (x, y) \neq (0,0).$$

作足够小椭圆 C(如图 6-12):

$$\begin{cases} x = \dfrac{k}{2}\cos\theta, \\ y = k\sin\theta, \end{cases}$$

C 取逆时针方向,$\theta \in [0,2\pi]$.

于是由格林公式:

$$\oint_{L+C^-} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2} = 0,$$

从而$\oint_L \dfrac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2} = \oint_C \dfrac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} \dfrac{\frac{1}{2}k^2}{k^2}\mathrm{d}\theta = \pi.$

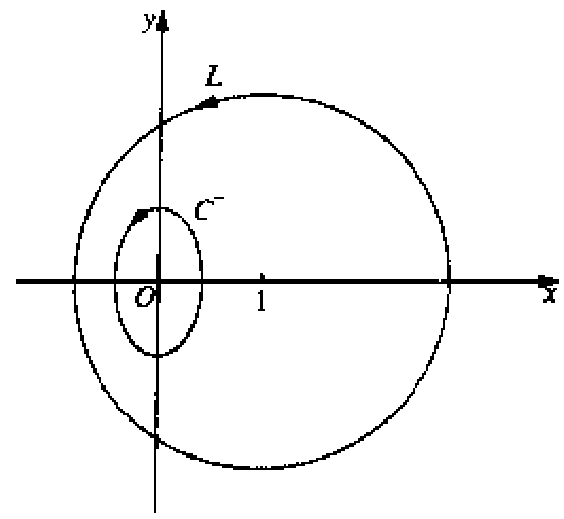


图　6-12

评注　此题可推广:

$$I = \oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2},$$

其中 L 是不经过原点的任一光滑的简单闭曲线正向:

(1) 当 L 所围区域不含原点时,

$$I = 0.$$

(2) 当 L 所围区域含原点时,

$$I = \pi.$$

26. **解**　如图 6-13,图 6-14,由已知得

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial(2xy)}{\partial y} = 2x,$$

于是
$$Q(x,y) = x^2 + C(y).$$

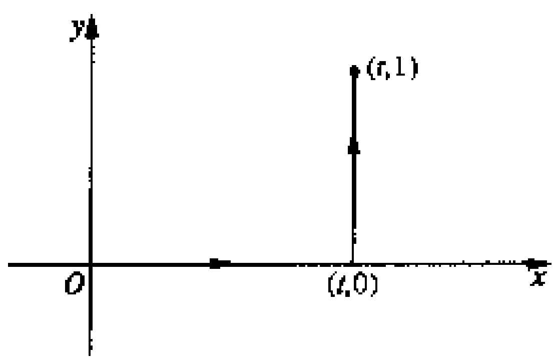


图　6-13

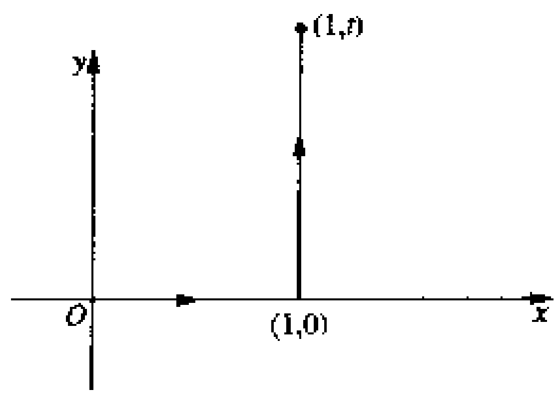


图　6-14

又因为

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 [t^2 + C(y)]\mathrm{d}y = t^2 + \int_0^1 C(y)\mathrm{d}y,$$

$$\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^t [1^2 + C(y)]\mathrm{d}y = t + \int_0^t C(y)\mathrm{d}y.$$

由题设 $$t^2+\int_0^1 C(y)\mathrm{d}y = t+\int_0^t C(y)\mathrm{d}y,$$

对 t 求导 $$2t = 1 + C(t),$$

所以 $$C(t) = 2t-1,\quad Q(x,y) = x^2+2y-1.$$

27. **解** 记 $P(\xi,\eta,\zeta)$,

$$\text{线段 } \overline{OP}:\ x = t\xi,\quad y = t\eta,\quad z = t\zeta,\quad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

则 $$W = \int_{\overline{OP}} yz\mathrm{d}x + zx\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z = \int_0^1 3t^2\xi\eta\zeta\mathrm{d}t = \xi\eta\zeta.$$

问题变成：在约束条件

$$\Phi(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1 = 0\quad (x>0, y>0, z>0)$$

下，求 $f(x,y,z) = xyz$ 的最大值. 令

$$F(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right),$$

$$\begin{cases} F'_x = yz + \dfrac{2\lambda x}{a^2} = 0,\\ F'_y = xz + \dfrac{2\lambda y}{b^2} = 0,\\ F'_z = xy + \dfrac{2\lambda z}{c^2} = 0,\\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2} = 1,\end{cases}$$

解之 $$x = \frac{a}{\sqrt{3}},\quad y = \frac{b}{\sqrt{3}},\quad z = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

由实际意义, W 有最大值, 可知 $(\xi,\eta,\zeta) = \left(\dfrac{a}{\sqrt{3}},\dfrac{b}{\sqrt{3}},\dfrac{c}{\sqrt{3}}\right)$ 时 W 取最大值 $\dfrac{\sqrt{3}}{9}abc$.

28. **解** 记 S 为平面 $x+y+z=2$ 上 L 所围成部分的上侧, D 为 S 在 Oxy 坐标面上的投影, 如图 6-15. 由 Stokes 公式有

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_S (-2y-4z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (-2z-6x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (-2x-2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \qquad (*)\end{aligned}$$

因为 S 的法向量的方向余弦为

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

所以 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \mathrm{d}z\mathrm{d}x = \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{d}S$,

代入(*)

$$I = -\frac{2}{\sqrt{3}}\iint_S (4x + 2y + 3z)\mathrm{d}S,$$

$$z = 2 - x - y,\quad \mathrm{d}S = \sqrt{3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

所以 $I = -2\iint_{D_{xy}} (x - y + 6)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -12\iint_{D_{xy}} 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= (-12)\cdot(\sqrt{2})^2 = -24,$$

$$D_{xy}: |x| + |y| \leqslant 1,\quad z = 0,$$

$$\left(\iint_{D_{xy}} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} y\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0\right).$$

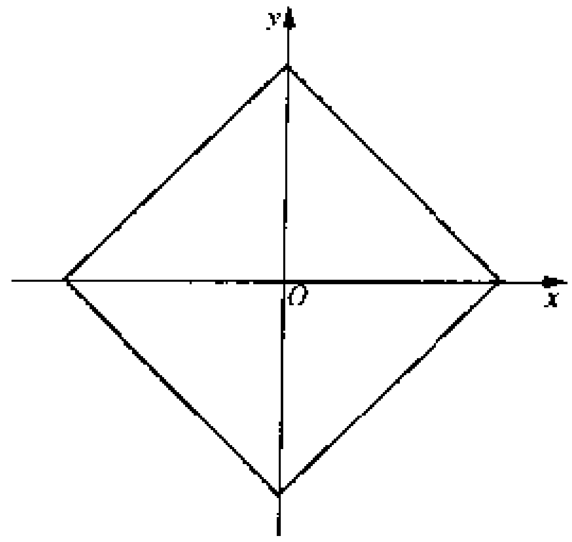


图 6-15

29. **解** 如图 6-16.

$P(x,y) = \varphi(y)\cos x - \pi y,\quad Q(x,y) = \varphi'(y)\sin x - \pi,$

则 $$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \pi.$$

设 D 表示 $\overset{\frown}{AmB}$ 和 $\overline{BA}$ 所围区域,则

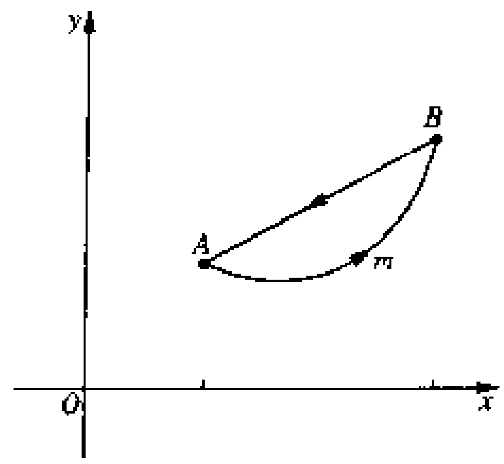


图 6-16

$$I = \oint_{\overset{\frown}{AmB}+\overline{BA}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + \int_{\overline{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D \pi\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{\overline{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 2\pi + I_1,$$

$$I_1 = \int_{\overline{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_2^4 [\pi\varphi(y)\cos\pi(y-1) - \pi^2 y + \varphi'(y)\sin\pi(y-1) - \pi]\mathrm{d}y$$

$$= -\pi\int_2^4 \mathrm{d}y - \pi^2\int_2^4 y\mathrm{d}y + \int_2^4 [\varphi(y)\sin\pi(y-1)]'\mathrm{d}y$$

$$= -2\pi - 6\pi^2 + [\varphi(y)\sin\pi(y-1)]\Big|_2^4 = -2\pi(1 + 3\pi),$$

所以 $$I = 2\pi - 2\pi(1 + 3\pi) = -6\pi^2.$$

30. **解** 因为在 L 上

$$x^2 + y^2 = (-\sqrt{1 - y^2})^2 + y^2 = 1,$$

所以原式

$$I = \oint_{L+\overline{BA}} (12xy + e^y)\mathrm{d}x - (\cos y - xe^y)\mathrm{d}y + \int_{\overline{AB}} (12xy + e^y)\mathrm{d}x - (\cos y - xe^y)\mathrm{d}y$$

$$= -\iint_D [e^y - e^y - 12x]\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int_{-1}^{1}(-\cos y)\mathrm{d}y$$

$$= 12\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cos\theta\mathrm{d}r - 2\sin 1 = -8 - 2\sin 1,$$

其中 $\overline{BA}$ 是联结 $B(0,1)$ 和 $A(0,-1)$ 两点有向线段.或

$$I = \int_L \mathrm{d}(e^y x - \sin y) + \int_L 12xy\mathrm{d}x = I_1 + I_2,$$

$$I_1 = [e^y x - \sin y]_{A(0,-1)}^{B(0,1)} = -2\sin 1,$$

$$I_2 = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 12\cdot\cos t\cdot\sin t\mathrm{d}\cos t = 12\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}\sin t = -8,$$

所以
$$I = -8 - 2\sin 1.$$

31. **解**
$$P(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2},\quad Q(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2},$$

所以
$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2-2xy-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

所以曲线积分与路径无关

$$I = \int_L \frac{(x-y)\mathrm{d}x + (x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2} = \int_{L_0}\frac{(x-y)\mathrm{d}x + (x+y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$$

$$= \frac{1}{a^2}\int_{L_0}(x-y)\mathrm{d}x + (x+y)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{a^2}\int_{\pi}^{0}[(a\cos t - a\sin t)(-a\sin t) + (a\cos t + a\sin t)(a\cos t)]\mathrm{d}t$$

$$= \int_{\pi}^{0}[-\sin t\cos t + \sin^2 t + \cos^2 t + \sin t\cos t]\mathrm{d}t = -\pi,$$

其中 L_0: 为从点 $A(-a,0)$ 到点 $B(a,0)$ 的上半圆

$$x^2 + y^2 = a^2\quad (y \geqslant 0).$$

32. **解**

$$I = \frac{1}{a}\iint_{\Sigma} ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{a}\left[\oiint_{\Sigma+S_0^-} ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{S_0^-} ax\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z+a)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

$$= \frac{1}{a}\left[-\iiint_{\Omega}(a + 2z + 2a)\mathrm{d}V + \iint_{D_{xy}} a^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]$$

$$= \frac{1}{a}[-I_1 + I_2], \tag{*}$$

其中 Ω 为 $\Sigma + S_0^-$ 所围区域(如图 6-17).

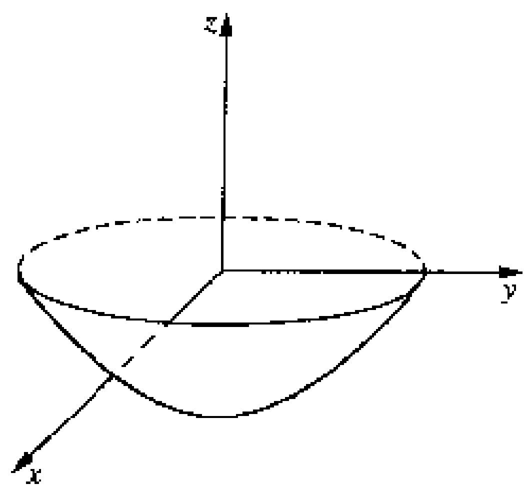


图 6-17

$$S_0^-: \begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant a^2, \\ z = 0 \end{cases} \text{取下侧},$$

$$D_{xy} \text{为}: \begin{cases} x^2 + y^2 \leqslant a^2, \\ z = 0 \end{cases} \text{所围区域},$$

$$I_1 = \iiint\limits_{\Omega} (3a + 2z)\mathrm{d}V = (3a)\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{4}{3}\pi a^3 + 2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r\int_{-\sqrt{a^2-r^2}}^0 z\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi a^4 - \frac{1}{2}\pi a^4 = \frac{3}{2}\pi a^4,$$

$$I_2 = \iint\limits_D a^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi a^4,$$

代入(*)式

$$I = \frac{1}{a}\left[-\frac{3}{2}\pi a^4 + \pi a^4\right] = -\frac{\pi a^3}{2}.$$

33. **解** 设(X, Y, Z)为 π 上任意一点,则 π 的方程为:

$$x(X - x) + y(Y - y) + 2z(Z - z) = 0. \tag{*}$$

因为 $$P(x, y, z) = S,$$

所以(*)可化简:

$$\frac{x}{2}X + \frac{y}{2}Y + zZ = 1,$$

则 $$\rho(x, y, z) = \frac{1}{\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + z^2\right]^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + z^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

由 $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}$，有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}},$$

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}\sigma=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}}}\mathrm{d}\sigma,$$

所以
$$\iint_S\frac{z\mathrm{d}S}{\rho(x,y,z)}=\frac{1}{4}\iint_D(4-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(4-r^2)r\mathrm{d}r=\frac{3}{2}\pi,$$

其中
$$D:\begin{cases}\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\leqslant 1,\\ z=0.\end{cases}$$

34. **分析**　这是一道涉及多个知识点的综合题.

解　由高斯公式，

$$\oiint_S xf(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-xyf(x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{2x}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\pm\iiint_\Omega(xf'(x)+f(x)-xf(x)-\mathrm{e}^{2x})\mathrm{d}V=0.$$

由 S 的任意性

$$xf'(x)+f(x)-xf(x)-\mathrm{e}^{2x}=0,\quad x>0,$$

即
$$f'(x)+\left(\frac{1}{x}-1\right)f(x)=\frac{1}{x}\mathrm{e}^{2x},$$

所以　$f(x)=\mathrm{e}^{\int\left(1-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}\left[\int\frac{1}{x}\mathrm{e}^{2x}\cdot\mathrm{e}^{\int\left(\frac{1}{x}-1\right)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\frac{\mathrm{e}^x}{x}\left[\int\frac{1}{x}\mathrm{e}^{2x}\cdot x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x+C\right]$

$$=\frac{\mathrm{e}^x}{x}(\mathrm{e}^x+C)\quad(x>0).$$

由于
$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{2x}+C\mathrm{e}^x}{x}=1,$$

故有
$$\lim_{x\to0^+}(\mathrm{e}^{2x}+C\mathrm{e}^x)=0,$$

即
$$1+C=0,\quad C=-1,$$

于是
$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}(\mathrm{e}^x-1).$$

35. **证** Σ 为

$$(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=2a^2.$$

由轮换对称性知

$$\oiint_{\Sigma}(x+y+z)\mathrm{d}S=3\oiint_{\Sigma}z\mathrm{d}S.$$

由于 Σ 的形心即球面的球心(a,a,a),所以

$$\bar{z}=\frac{\oiint_{\Sigma}z\mathrm{d}S}{\oiint_{\Sigma}\mathrm{d}S}=\frac{\oiint_{\Sigma}z\mathrm{d}S}{8\pi a^2}=a,$$

故

$$\oiint_{\Sigma}z\mathrm{d}S=8\pi a^3,$$

所以

$$\begin{aligned}I&=\oiint_{\Sigma}(x+y+z-\sqrt{3}a)\mathrm{d}S=3\oiint_{\Sigma}z\mathrm{d}S-\sqrt{3}a\oiint_{\Sigma}\mathrm{d}S\\&=24\pi a^3-\sqrt{3}a\cdot 8\pi a^2=8(3-\sqrt{3})\pi a^3\\&=\frac{4\times 12\pi a^3}{3+\sqrt{3}}\leqslant 12\pi a^3.\end{aligned}$$

36. **解** 因为

$$\frac{\partial P}{\partial x}=z,\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=z,\quad \frac{\partial R}{\partial z}=\sqrt{x^2+y^2},$$

由高斯公式

$$\begin{aligned}I&=\iiint_{\Omega}(2z+\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_a^{2a}(2r\cos\varphi+r\sin\varphi)r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\\&=\frac{15}{16}\pi a^4(\pi+2).\end{aligned}$$

注 Ω 在Oxy 平面投影区域:

$$\begin{cases}a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant(2a)^2,\\ z=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\ x^2+y^2-z^2=a^2,\end{cases}\text{交线}$$

所以

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\quad \begin{cases}x^2+y^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2,\\ z=\frac{\sqrt{2}}{2}a,\end{cases}$$

所以 $$0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{4}.$$

37. **分析** 应用高斯公式.

解 补加平面

$$S_3:\ x=0\ (-a\leqslant y\leqslant a,0\leqslant z\leqslant 1);$$
$$S_4:\ z=1\ (x^2+y^2\leqslant a^2,x\geqslant 0),$$

构成封闭曲面 S,并取外侧,则

$$\iint\limits_{S_1+S_2}xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}(x+1)\mathrm{d}V-\iint\limits_{S_3+S_4}xy\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a(r\cos\theta+1)r\mathrm{d}r\int_0^1\mathrm{d}z-0-\iint\limits_{D}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\frac{2}{3}a^3+\frac{\pi}{2}a^2-\pi a^2=\frac{2}{3}a^3-\frac{\pi}{2}a^2,$$

其中 $D:\begin{cases}x^2+y^2\leqslant a^2,x\geqslant 0,\\ z=0,\end{cases}$ Ω 为由 S 所围区域.

38. **解** 补加平面 $\Sigma_1:\ z=2(x^2+y^2\leqslant 1)$,构成封闭曲面 S,并取外侧,则

$$I=\iiint\limits_{\Omega}3(x^2+y^2)\mathrm{d}V-\iint\limits_{D}(2-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1r^3\mathrm{d}r\int_{1+r}^2\mathrm{d}z-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(2-r^2)r\mathrm{d}r$$
$$=\frac{3}{10}\pi-2\pi+\frac{\pi}{2}=-\frac{6}{5}\pi,$$

其中: Ω 为封闭曲面 S 所围区域.

$$D:\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 1,\\ z=0.\end{cases}$$

39. **解** 因为

$$|\boldsymbol{n}|=1,\quad \boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}\mathrm{d}S=\{\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\},$$

所以 $$\iint\limits_{S}\frac{\cos\langle\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\rangle}{|\boldsymbol{r}|^2}\mathrm{d}S=\iint\limits_{S}\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S}{|\boldsymbol{r}|^3|\boldsymbol{n}|}=\iint\limits_{S}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

因此当 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\neq 0$ 时

$$P_x'+Q_y'+R_z'=\left(\frac{x}{r^3}\right)_x'+\left(\frac{y}{r^3}\right)_y'+\left(\frac{z}{r^3}\right)_z'=0.$$

易见当 $a^2+b^2+c^2>R^2$(即原点不在 S 所围的区域内)时,因为在 S 所围的闭区域 Ω 内 $r\neq$

0, 所以

$$\text{原式} \xlongequal{\text{高斯}} \iiint\limits_{\Omega} (P_x' + Q_y' + R_z')\mathrm{d}v = \iiint\limits_{\Omega} 0\mathrm{d}v = 0.$$

而当 $a^2 + b^2 + c^2 < R^2$(即原点在 S 所围区域内)时, 在 S 内做一个小球面 S_1: $x^2 + y^2 + z^2 = \varepsilon^2$(内侧), 则在 $S + S_1$ 所围区域 Ω_1 内 $r \neq 0$. 故而

$$\text{原式} = \iint\limits_{S} = \iint\limits_{S+S_1} - \iint\limits_{S_1} \xlongequal{\text{高斯}} \iiint\limits_{\Omega_1} (P_x' + Q_y' + R_z')\mathrm{d}v - \iint\limits_{S_1} = 0 - \iint\limits_{S_1}$$

$$= -\iint\limits_{S_1} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

注意在 S_1 上 $x^2 + y^2 + z^2 = \varepsilon^2$, 且 S_1 是内侧,

$$\Omega_\varepsilon = x^2 + y^2 + z^2 \leqslant \varepsilon^2,$$

所以

$$\text{原式} = -\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{S_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{高斯}} -\frac{1}{\varepsilon^3}(-1)\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon} (x_x' + y_y' + z_z')\mathrm{d}v = \frac{1}{\varepsilon^3}3 \cdot \frac{4}{3}\pi\varepsilon^3 = 4\pi.$$

总之: $a^2 + b^2 + c^2 > R^2$ 时, 原式 $= 0$; $a^2 + b^2 + c^2 < R^2$ 时, 原式 $= 4\pi$.

40. **解**　设 V 为雪堆体积, S 为雪堆的侧面积, 则

$$V = \int_0^{h(t)} \mathrm{d}z \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant \frac{1}{2}[h^2(t) - h(t)z]} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{h(t)} \frac{1}{2}\pi[h^2(t) - h(t)z]\mathrm{d}z = \frac{\pi}{4}h^3(t),$$

$$S = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant \frac{h^2(t)}{2}} \sqrt{1 + (z_x')^2 + (z_y')^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant \frac{h^2(t)}{2}} \sqrt{1 + \frac{16(x^2 + y^2)}{h^2(t)}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{2\pi}{h(t)}\int_0^{\frac{h(t)}{\sqrt{2}}} [h^2(t) + 16r^2]^{\frac{1}{2}} r\mathrm{d}r = \frac{13\pi h^2(t)}{12}.$$

由题意知: $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -0.9S$, 所以

$$\frac{\mathrm{d}h(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{13}{10}.$$

因此 $h(t) = -\dfrac{13}{10}t + C$, 由 $h(0) = 130$ 得 $h(t) = -\dfrac{13}{10}t + 130$. 令 $h(t) \to 0$ 得

$$t = 100(\text{小时}).$$

因此高度为 130 厘米的雪堆全部融化所需时间为 100 小时.

第七章　无穷级数

一、本章的重点内容与常见的典型题型

级数无论在数学理论本身，还是在其他科学技术的研究中都是极为有效的工具，它是一个函数或一个数的另一种表达形式.本章包括常数项级数和函数项级数两部分内容，其中常数项级数又包括正项级数，交错级数和任意项级数，函数项级数主要讨论了幂级数和傅里叶级数，其重点内容是：

1. 数项级数的判敛及求幂级数的收敛域；
2. 将函数展开为幂级数；
3. 求某些数项级数的和或某些幂级数的和函数；
4. 将函数展开为傅里叶级数，收敛定理.

常见题型有：

1. 收敛、发散、条件收敛、绝对收敛的判定；
2. 幂级数的收敛半径、收敛区间、收敛域以及和函数的求法；
3. 将函数展开成幂级数(包括写出收敛域)；
4. 求函数的傅里叶系数与傅里叶级数，写出傅里叶级数的和；
5. 求某些数项级数的和；
6. 综合证明题.

二、习　　题

(一) 填空题

1. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{\ln\frac{1}{n}}(a>0)$，当______时级数收敛，当______时级数发散.

2. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+1)^n}{n}$ 的收敛域为______.

3. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(x-\frac{1}{2}\right)^n$，若由 $x=2$ 点发散，在 $x=-1$ 点收敛，便可知幂级数的收敛半径，那么幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 的收敛域是________.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=$ ________.

5. 设 $f(x)=\pi x-x^2, 0<x<\pi$. 又设 $S(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 内的以 2π 为周期的正弦级数展开式的和函数，则 $x\in(\pi,2\pi)$ 时 $S(x)=$ ________.

6. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 3，则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n(x-1)^{n+1}$ 的收敛区间为________.

7. 设

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0<x\leqslant 1, \\ 1-x, & 1<x\leqslant 2, \end{cases} \qquad S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{2}x$$

是 $f(x)$ 的傅里叶级数，则 $S(7)=$ ________.

7. 将函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x^2}$ 展成 $\left(x-\frac{1}{2}\right)$ 的幂级数是________.

(二) 选择题

1. 设 $a_n=\dfrac{1}{n^p}\sin\dfrac{\pi}{n}$，要使级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 绝对收敛，常数 p 应当(　　).

(A) $p>-1$;　　(B) $p>0$;　　(C) $p\geqslant 0$;　　(D) $p\geqslant -1$.

2. 下列论述正确的是(　　).

(A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 条件收敛；

(B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n\ (u_n>0)$ 条件收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；

(C) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(D) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

3. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{n}$(　　).

(A) 绝对收敛；　　(B) 条件收敛；

(C) 发散；　　(D) 可能收敛也可能发散.

4. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 条件收敛，则(　　).

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 必收敛；　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 必发散；

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 - a_{n+1}^2)$ 必收敛；　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 均收敛.

5. 设 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ 条件收敛，则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径(　　).

(A) 大于 1；　　(B) 等于 1；

(C) 小于 1；　　(D) 以上三种都可能.

6. 设常数 $k>0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{k+n}{n^2}$(　　).

(A) 绝对收敛；　　(B) 条件收敛；

(C) 发散；　　(D) 敛散性与 k 取值有关.

7. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛，则级数在 $x=2$ 处(　　).

(A) 绝对收敛；　　(B) 条件收敛；

(C) 发散；　　(D) 敛散性不能确定.

8. 设 λ 为常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin(n\lambda)}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$(　　).

(A) 绝对收敛；　　(B) 条件收敛；

(C) 发散；　　(D) 收敛性与 λ 取值有关.

9. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{\lambda}{n}\right)$　(常数 $\lambda>0$)(　　).

(A) 绝对收敛；　　(B) 条件收敛；

(C) 发散；　　(D) 收敛性与 λ 取值有关.

10. 设常数 $\lambda>0$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$(　　).

(A) 绝对收敛；　　(B) 条件收敛；

(C) 发散；　　(D) 收敛性与 λ 有关.

11. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则必收敛的级数为(　　).

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{u_n}{n}$；　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$；

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1} - u_{2n})$；　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + u_{n+1})$.

12. 设 $u_n = (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$，则级数(　　).

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都收敛；　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 都发散；

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 发散；　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 收敛.

13. 设 $a_n > 0\ (n = 1,2,\cdots)$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，常数 $\lambda \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(n\tan\frac{\lambda}{n}\right)a_{2n}(\quad).$$

(A) 绝对收敛；　　(B) 条件收敛；

(C) 发散；　　(D) 敛散性与 λ 有关.

14. 设函数 $f(x) = x^2, 0 \leqslant x \leqslant 1$，而

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x, \quad -\infty < x < +\infty,$$

其中

$$b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx, \quad n = 1,2,\cdots,$$

则 $S\left(\frac{7}{2}\right)$ 等于(　　).

(A) 4；　　(B) -4；　　(C) $\frac{1}{4}$；　　(D) $-\frac{1}{4}$.

15. 设

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ 2-2x, & \frac{1}{2} < x < 1, \end{cases}$$

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x, \quad -\infty < x < +\infty,$$

其中

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,dx \quad (n = 0,1,2,\cdots),$$

则 $S\left(-\frac{5}{2}\right)$ 等于(　　).

(A) $\frac{1}{2}$；　　(B) $-\frac{1}{2}$；　　(C) $\frac{3}{4}$；　　(D) $-\frac{3}{4}$.

16. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\cos x}{x^2}, & x \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \end{cases}$ 则关于 $f(x)$ 在 $x = 0$ 点6阶导数 $f^{(6)}(0)$ 是(　　).

(A) 不存在；　　(B) $-\frac{1}{6}$；　　(C) $-\frac{1}{56}$；　　(D) $\frac{1}{56}$.

(二) 解答题

1. 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^n n!}{n^n}$ 的敛散性.

2. 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin\left(n\pi+\dfrac{1}{\ln n}\right)$ 是绝对收敛,条件收敛,还是发散.

3. 判断下列级数的收敛性

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{x_n}{x_{n+1}}\right)$,其中 $\{x_n\}$ 是递增的有界的正数列;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x$.

4. 设 $a_1=1,a_2=1,a_{n+2}=a_{n+1}+a_n(n=1,2,\cdots)$, $|x_0|<\dfrac{1}{2}$,讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n x_0^n$ 的敛散性.

5. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $|x_{n+1}-x_n|\leqslant k|x_n-x_{n-1}|$, $n=2,3,\cdots,0<k<1$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

6. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{\ln n}}{n}x^n$ 的收敛域.

7. 设 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos x\mathrm{d}x$, $n=0,1,2,\cdots$,求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}I_n$.

8. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{na^n}$ $(a>0)$ 的敛散性.

9. 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^2\left(1+\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}\right)$ 的敛散性.

10. 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{\pi^n}\sin\dfrac{\pi}{n+1}$ 敛散性,如收敛,是条件收敛还是绝对收敛?

11. (1) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,试证: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{n^2}a_n$ 绝对收敛;

(2) 设 $a_n>0$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln a_n}{\ln(1/n)}=A$,试证:当 $0<A<1$ 时, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散;当 $A>1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

12. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足条件:

(1) $\sum\limits_{n\to\infty}u_n=0$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，求证：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

13. 设 $|a_n|\leqslant 1\ (n=1,2,3,\cdots)$，$|a_n-a_{n-1}|\leqslant\frac{1}{4}|a_{n-1}^2-a_{n-2}^2|\ (n=3,4,5,\cdots)$，证明：

(1) 级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛；

(2) 数列 $\{a_n\}$ 收敛.

14. 设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$，

(1) 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$ 的值；

(2) 试证：$\forall\lambda>0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛.

15. 设正项数列 $\{a_n\}\searrow$ 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，试问级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 是否收敛？并说明理由.

16. 设 $a_1=2, a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)\ (n=1,2,\cdots)$

证明：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛.

17. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^{x^2}(2+t^2)e^{t^2}dt}{x^2}, & x\neq 0,\\ A, & x=0,\end{cases}$ 确定 A 使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内任意次可导，并求 $f^{(8)}(0)$ 与 $f^{(9)}(0)$.

18. 设 $a_1=1, a_2=2$，当 $n\geqslant 3$ 时，有 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，

(1) 证明不等式 $0<\frac{3}{2}a_{n-1}\leqslant a_n\leqslant 2a_{n-1}$；

(2) 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 敛散性.

19. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，试证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

20. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{x^n}{n}$ 的收敛区间,并讨论区间端点处的收敛性.

21. 求下列函数项级数的收敛域:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{n4^n}$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n^2+2n+3)^x}$.

22. 设两条抛物线 $y=nx^2+\frac{1}{n}$ 和 $y=(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}$,记其交点的横坐标的绝对值为 a_n.

(1) 求这两条抛物线所围成面积 S_n;

(2) 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{S_n}{a_n}$ 的和.

23. 已知 $f_n(x)$ 满足 $f_n'(x)=f_n(x)+x^{n-1}e^x$($n$ 为正整数),且 $f_n(1)=\frac{e}{n}$,求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 之和.

24. 设有级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{n+1}$.试求:

(1) 收敛区间;

(2) 和函数;

(3) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n!}2^n$ 的和.

25. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{(1+r)^n}$ 的和,其中常数 $r>0$.

26. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2-n+1}{2^n}$ 的和.

27. 将函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{x}\arctan x, & x\neq 0,\\ 1, & x=0,\end{cases}$ 试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数,并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和.

28. 将 $f(x)=\frac{1}{x(x-1)}$ 展开成 $x-3$ 的幂级数.

29. 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x-1}{x}\right), & x\neq 0,\\ \frac{1}{2}, & x=0,\end{cases}$ 将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数,并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$ 的和.

30. 求证：和函数 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}x^2e^{-nx}$ 定义于$[0,+\infty)$且有界.

31. 将 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}\leqslant x<\pi\end{cases}$ 在$[0,\pi]$上展开成余弦级数,并写出它的和函数.

32. 设 $p>0$,讨论下列级数何时发散,何时绝对收敛,何时条件收敛.

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}a_n$,其中 $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n^p}-\dfrac{1}{n^{2p}}+o\left(\dfrac{1}{n^{2p}}\right)\ (n\to\infty)$,$p>0$ 为常数;

(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}$,其中 $p>0$ 为常数.

33. (1) 求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$ 的和 S;

(2) 设 $f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$二阶连续可导,$f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$,$a_n$ 是$f(x)$的傅氏系数,求证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

34. 设 $u_{2n-1}=\dfrac{1}{n}$,$u_{2n}=\displaystyle\int_n^{n+1}\dfrac{1}{x}dx\ (n=1,2,\cdots)$,判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 的收敛性.

35. 设数列$\{na_n\}$收敛,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$ 收敛,证明：级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

36. (1) 证明：若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和 S_n 有界,数列$\{b_n\}$单调下降且趋于零,则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛;

(2) 利用上一小题结果,证明：当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}$ 也收敛.

三、习题的解答与分析

(一) 填空题

1. 应填：当 $a>e$ 时级数收敛,当 $0<a\leqslant e$ 时级数发散.

分析　因为 $a^{\ln\frac{1}{n}}=a^{-\ln n}=n^{-\ln a}=\dfrac{1}{n^{\ln a}}$,所以 $a>e$ 时级数收敛,$0<a\leqslant e$ 时级数发

散.

2. 应填: $(-2,0]$.

分析 显然幂级数收敛半径 $R=1$,收敛区间为$(-2,0)$,当 $x=0$ 时级数收敛,$x=-2$ 时级数发散,所以级数收敛域为$(-2,0]$.

3. 应填: $\left[-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right)$.

分析 由已知条件,$R\leqslant\left|2-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}$,$R\geqslant\left|-1-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}$,故 $R=\frac{3}{2}$.又因为原级数在 $x=-1$ 点收敛,$x=2$ 点发散,所以级数收敛域为 $-\frac{3}{2}\leqslant x-1<\frac{3}{2}$,即

$$-\frac{1}{2}\leqslant x<\frac{5}{2}.$$

4. 应填: 4.

分析 设

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1},\quad x\in(-1,1),$$

所以
$$S(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n}\right)'=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},\quad S\left(\frac{1}{2}\right)=4.$$

5. 应填: $2\pi^2-3\pi x+x^2$.

分析
$$S(x)=\begin{cases}\pi x-x^2, & x\in(0,\pi),\\ \pi x+x^2, & x\in(-\pi,0).\end{cases}$$

令 $t=x+2\pi$,所以 $x\in(-\pi,0)$ 时,$t\in(\pi,2\pi)$,故

$$S(t)=S(x)=S(t-2\pi)=\pi(t-2\pi)+(t-2\pi)^2=2\pi^2-3\pi t+t^2.$$

6. 应填: $(-2,4)$.

分析 由于

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},$$

而幂级数逐项求导后收敛半径不变,则 $\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ 收敛半径为 3,从而 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n-1}$ 的收敛半径为 3.又

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}=(x-1)^2\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n-1},$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$ 收敛半径为 3,其收敛区间为$(-2,4)$.

7. 应填: $\frac{1}{2}$.

分析　$S(x)$ 为周期 4 的偶函数，

$$S(7)=S(-1)=S(1),$$

而
$$S(1)=\frac{1}{2}[f(1-0)+f(1+0)]=\frac{1}{2}.$$

8. 应填：$-1+\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right)2^n\left(x-\frac{1}{2}\right)^n, x\in(0,1)$.

分析
$$\frac{x^2}{1-x^2}=-1+\frac{\frac{1}{2}}{1-x}+\frac{\frac{1}{2}}{1+x}$$

$$=-1+\frac{1}{1-2\left(x-\frac{1}{2}\right)}+\frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=-1+\sum_{n=0}^{\infty}2^n\left(x-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(x-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$=-1+\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}\right)2^n\left(x-\frac{1}{2}\right)^n,\quad x\in(0,1).$$

（二）选择题

1. 应选(B).

分析　因为 $|(-1)^n a_n|=a_n=\frac{1}{n^p}\sin\frac{\pi}{n}$，所以 $n\to\infty$ 时，$a_n\sim\frac{\pi}{n^{p+1}}$；而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{p+1}}$ 当 $p>0$ 时收敛，所以 $p>0$ 时级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 绝对收敛.

2. 应选(B).

分析　用反证法，若 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则因为 $u_n>0$，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}|(-1)^{n-1}u_n|=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，说明 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 绝对收敛，与题设矛盾，故 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 必发散，应选(B).

3. 应选(A).

分析　因为

$$\left(|u_n|-\frac{1}{n}\right)^n\geqslant 0,\qquad |u_n|^2+\frac{1}{n^2}\geqslant\frac{2|u_n|}{n},$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(|u_n|^2+\frac{1}{n^2}\right)$ 收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|u_n|}{n}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$ 绝对收敛，选(A).

4. 应选(C).

分析　(C) 的前 n 项部分和

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 - a_{k+1}^2) = a_1^2 - a_{n+1}^2.$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，所以 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$，所以 $\lim_{n\to\infty} S_n = a_1^2$，故(C)成立.

5. 应选(B).

分析 幂级数在收敛区间内必绝对收敛，由于 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ 条件收敛，即 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = -1$ 处条件收敛，故收敛半径 $r \leqslant 1$. 但若 $r < 1$，则 $x = -1$ 处该幂级数发散，所以 $r = 1$. 选(B).

6. 应选(B).

分析 由于

$$(-1)^n \frac{k+n}{n^2} = \frac{(-1)^n k}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n},$$

又因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n k}{n^2}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 都收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{k+n}{n^2}$ 收敛，而

$$\left|(-1)^n \frac{k+n}{n^2}\right| = \frac{k+n}{n^2} = \frac{k}{n^2} + \frac{1}{n},$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{n^2}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k+n}{n^2}$ 发散.

故原级数条件收敛.

评注 本题主要考查常数项级数敛散性判定及绝对收敛和条件收敛的概念.

7. 应选(A).

分析 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x = -1$ 处收敛，则当 $|x-1| < |-1-1| = 2$ 时，原幂级数绝对收敛，而 $|2-1| = 1 < 2$，则原幂级数在 $x = 2$ 处绝对收敛.

评注 本题主要考查阿贝尔引理，即

(1) 若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ 在 $x = x_1 (x_1 \neq x_0)$ 处收敛，则当 $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ 时，该幂级数绝对收敛.

(2) 若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ 在 $x = x_1 (x_1 \neq x_0)$ 处发散，则当 $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$ 时，该幂级数发散.

8. 应选(C).

分析 由于 $\left|\frac{\sin(n\lambda)}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\lambda)}{n^2}$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散，则

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin(n\lambda)}{n^2}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$发散.

评注 本题主要考查常数项级数敛散性判定方法和级数性质.本题用到一个经常要用到的结论：若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$发散.

9. 应选(A).

分析 由于

$$\left|(-1)^n\left(1-\cos\frac{\lambda}{n}\right)\right|=1-\cos\frac{\lambda}{n},$$

当$n\to\infty$时，$1-\cos\dfrac{\lambda}{n}\sim\dfrac{1}{2}\dfrac{\lambda^2}{n^2}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\lambda^2}{n^2}$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{\lambda}{n}\right)$收敛，故原级数绝对收敛.

评注 本题主要考查常数项级数敛散性的判别方法.本题用到一个常用的结论：

若正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$满足$a_n\sim b_n(n\to\infty)$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$同敛散.

10. 应选(A).

分析 由不等式$|ab|\leqslant\dfrac{1}{2}(a^2+b^2)$可知

$$\left|(-1)^n\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}\right|\leqslant\frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2+\lambda}\right),$$

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+\lambda}$均收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$绝对收敛.

11. 应选(D).

分析 直接法.由原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛知，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n+1}$也收敛.而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$是这两个收敛级数的和，因此必收敛.

排除法.(1) 取$u_n=\dfrac{(-1)^n}{\ln n}$，由交错级数莱布尼兹准则可知$\sum\limits_{n=2}^{\infty}u_n$收敛，而$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{u_n}{n}$
$=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$发散，则(A)不正确.

(2) 若取$u_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$，显然$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2n-1}}+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right).$$

又
$$\frac{1}{\sqrt{2n-1}}+\frac{1}{\sqrt{2n}}>\frac{1}{\sqrt{2n}}+\frac{1}{\sqrt{2n}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}},$$

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$发散,从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$发散,所以(B),(C)也不正确,故应选(D).

12. 应选(C).

分析 由于$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$是交错级数,且$\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$单调减趋于零,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.而

$$u_n^2=\ln^2\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sim\frac{1}{n}\quad(n\to\infty),$$

由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$发散,故应选(C).

13. 应选(A).

分析 $$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^n\left(n\tan\frac{\lambda}{n}\right)a_{2n}\right|}{a_{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{\lambda}{n}\right)=\lambda\quad\left(0<\lambda<\frac{\pi}{2}\right),$$

则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^n\left(n\tan\frac{\lambda}{n}\right)a_{2n}\right|$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$同敛散.由原题设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,则其偶数项构成的级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$也收敛,故原级数绝对收敛.

评注 本题主要考查正项级数的比较判别法的极限形式.

14. 应选(D).

分析 $S(x)$为以2为周期的奇函数,

$$S\left(\frac{7}{2}\right)=S\left(-\frac{1}{2}\right)=-S\left(\frac{1}{2}\right)=-\left(\frac{1}{2}\right)^2=-\frac{1}{4}.$$

15. 应选(C).

分析 $f(x)$是定义在$[0,1]$上的分段连续函数,$S(x)$是$f(x)$作偶延拓后得到的傅里叶级数余弦展开式,且$S(x)$定义在$(-\infty,+\infty)$上以2为周期,由狄里克雷收敛定理知

$$S\left(-\frac{5}{2}\right)=S\left(-\frac{1}{2}\right)=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{1}{2}+0\right)+f\left(\frac{1}{2}-0\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}.$$

评注 本题主要考查狄里克雷定理.

16. 应选(C).

分析 $$f(x)=\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1-1+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^4}{4!}+\frac{x^6}{6!}-\cdots}{x^2},$$

所以 $$f(x)=\frac{1}{2!}-\frac{1}{4!}x^2+\frac{1}{6!}x^6-\frac{1}{8!}x^6+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

又因为 $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

令 $n=6$，由函数展开式的惟一性：

$$\frac{f^{(6)}(0)}{6!}=-\frac{1}{8!},$$

所以

$$f^{(6)}(0)=-\frac{6!}{8!}=-\frac{1}{56}.$$

评注 上式用到了

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

(三) 解答题

1. **解** 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=1,$$

所以比值法失效.但因为

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}>1,$$

所以

$$u_{n+1}>u_n.$$

而 $u_1=\mathrm{e}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，所以原级数发散.

2. **解**

$$u_n=\sin\left(n\pi+\frac{1}{\ln n}\right)=\sin n\pi\cos\frac{1}{\ln n}+\cos n\pi\sin\frac{1}{\ln n}$$
$$=(-1)^n\sin\frac{1}{\ln n}.$$

$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{\ln n}$ 是交错级数.

显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{1}{\ln n}=0$.

$\sin x$ 在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\nearrow$，又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0$，所以 $\sin\frac{1}{\ln n}\searrow$.所以原级数收敛.

又因为 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin\frac{1}{\ln n}$ 发散，

$$\left(\text{因为 }\sin\frac{1}{\ln n}\sim\frac{1}{\ln n},\text{而}\frac{1}{n}<\frac{1}{\ln n},n>2\right)$$

所以原级数条件收敛.

3. **解** (1) 因为 $\{x_n\}$ 是递增有界的数列，所以 $\{x_n\}$ 收敛.又因为

$$0<u_n=1-\frac{[illegible]}{x_n}=\frac{x_{n+1}-x_n}{x_{n+1}}\leqslant\frac{x_{n+1}-x_n}{x_1}=v_n,$$

对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$，因为

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{x_{n+1} - x_n}{x_1} = \frac{1}{x_1}\sum_{n=1}^{N}(x_{n+1} - x_n) = \frac{1}{x_1}(N_{N+1} - x_1),$$

所以 $\lim\limits_{N\to\infty} S_n$ 存在，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛.所以级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x_n}{x_{n+1}}\right)\text{收敛.}$$

(2) 因为 $u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\frac{1}{n}} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n^{3/2}}$,

又因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x}\mathrm{d}x$ 收敛.

4. **解** 记 $u_n = a_n |x_0|^n$，有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a_{n+1}|x_0|^{n+1}}{a_n|x_0|^n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n}|x_0| < 2|x_0|,$$

于是推知

$$u_{n+1} < 2|x_0|u_n \quad (n = 1,2,\cdots).$$

由数学归纳法：

$$u_{n+1} < (2|x_0|)^n u_1.$$

由 $|x_0| < \frac{1}{2}$，所以 $2|x_0| < 1$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2|x_0|)^n$ 收敛.

所以原级数绝对收敛.

5. **分析** 将 x_n 化为某级数的部分和，然后证明该级数收敛，从而推出 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

证 因为

$$x_n = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots + (x_2 - x_1) + x_1,$$

命

$$u_n = x_n - x_{n-1},$$

从而

$$x_n - x_1 = \sum_{i=2}^{n} u_i,$$

即 $x_n - x_1$ 为级数 $\sum\limits_{i=2}^{\infty} u_i$ 前$(n-1)$项部分和.由条件

$$|u_{n+1}| \leqslant k|u_n| \quad (0 < k < 1), \qquad (*)$$

由第4题知 $\sum\limits_{i=2}^{\infty}|u_n|$ 收敛.从而 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n$ 收敛.

所以其部分和 $x_n - x_1$ 存在极限.即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

事实上,由(*)式有

$$|u_{n+1}| \leqslant k^{n-1}|u_2|, \quad 0 < k < 1,$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty} k^n \text{ 收敛},$$

所以

$$\sum_{n=2}^{\infty} |u_n| \text{ 收敛}.$$

6. **解** $\rho = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}2^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 1$,所以 $R = 1$.

当 $x = 1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{\ln n}}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1-\ln 2}}$ 发散(因为 $1-\ln 2 < 1$).

当 $x = -1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^{\ln n}}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^{1-\ln 2}}$ 为交错级数,因为 $1-\ln 2 > 0$,满足莱布尼兹的条件,故级数条件收敛.幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^{\ln n}}{n}x^n$ 的收敛域为 $[-1,1)$.

7. **解** $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\,d(\sin x) = \frac{1}{n+1}(\sin x)^{n+1}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}.$$

令 $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}$ 收敛半径 $R = 1$,$\forall x \in (-1,1)$ 有

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

所以

$$S(x) - S(0) = \int_0^x S'(t)\,dt = \int_0^x \frac{dt}{1-t} = -\ln|1-x|,$$

所以

$$S\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\ln\left|1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \ln(2+\sqrt{2}),$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n = \ln(2+\sqrt{2}) \quad (\text{注}\quad S(0) = 0).$$

8. **解** 当 $a > 1$ 时,

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{na^n}{(n+1)a^{n+1}} = \frac{1}{a} < 1,$$

故级数绝对收敛.

当 $0 < a < 1$ 时

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{na^n} \neq 0,$$

故级数发散.

当 $a=1$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 满足 Leibniz 定理的条件,故级数条件收敛.

9. **解** $$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln^2\left(1+\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\right)}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\right)^2}{\frac{1}{n^2}}=1,$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln^2\left(1+\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\right)$ 收敛.

10. $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi^n}\sin\frac{\pi}{n+1}=0,\quad \frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\pi^n\sin\frac{\pi}{n+2}}{\pi^{n+1}\sin\frac{\pi}{n+1}}<\frac{1}{\pi}\cdot 1<1,$$

所以 $u_n>u_{n+1}$. 根据 Leibniz 判别法原级数收敛. 又 $\frac{1}{\pi^n}\sin\frac{\pi}{n+1}<\left(\frac{1}{\pi}\right)^n$,因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\pi}\right)^n$ 收敛,所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi^n}\sin\frac{\pi}{n+1}$ 收敛,故原级数绝对收敛.

11. **证** (1) $0<\frac{n^2+1}{n^2}\leqslant 2$, $\left|\frac{n^2+1}{n^2}\right||a_n|\leqslant 2|a_n|$, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}2|a_n|$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^2}a_n$ 也绝对收敛.

(2) 当 $n\geqslant 2$ 时, $\ln\frac{1}{n}<0$.

当 $0<A<1$ 时, $\exists\, 0<\varepsilon_1<1-A$, $\exists N_1$, $\forall n>N_1$ 有
$$\frac{\ln a_n}{\ln\frac{1}{n}}<A+\varepsilon_1<1,$$
即
$$\ln a_n>(A+\varepsilon_1)\ln\frac{1}{n}=\ln\left(\frac{1}{n}\right)^{A+\varepsilon_1},$$
所以 $a_n>\frac{1}{n^{A+\varepsilon_1}}$, 因为 $A+\varepsilon_1<1$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{A+\varepsilon_1}}$ 发散, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

当 $A>1$ 时, $\exists\, 0<\varepsilon_2<A-1$, $\exists N_2$, $\forall n>N_2$ 有
$$\frac{\ln a_n}{\ln\frac{1}{n}}>A-\varepsilon_2,$$
即
$$\ln a_n<(A-\varepsilon_2)\ln\frac{1}{n}=\ln\left(\frac{1}{n}\right)^{A-\varepsilon_2},$$
所以 $a_n<\frac{1}{n^{A-\varepsilon_2}}$, 因 $A-\varepsilon_2>1$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{A-\varepsilon_2}}$ 收敛, 故 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

12. **证** 令
$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_k, \quad \sigma_n = \sum_{k=1}^{\infty} (u_{2k-1} + u_{2k}),$$
$$\sigma_n = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \cdots + u_{2n-1} + u_{2n} = S_{2n},$$
由条件(2)知，
$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma,$$
所以
$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \sigma;$$
由条件(1)知，
$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty}(S_{2n} + u_{2n+1}) = \sigma.$$
由于数列$\{S_n\}$的奇偶两个子数列的极限存在且相等，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sigma$，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

13. **证** (1) 因为
$$|a_n - a_{n-1}| \leqslant \frac{1}{4}|a_{n-1} - a_{n-2}| \cdot |a_{n-1} + a_{n-2}| \leqslant \frac{1}{2}|a_{n-1} - a_{n-2}|,$$
所以
$$|a_n - a_{n-1}| \leqslant \frac{1}{2}|a_{n-1} - a_{n-2}| \leqslant \frac{1}{2^2}|a_{n-2} - a_{n-3}| \leqslant \cdots$$
$$\leqslant \frac{1}{2^{n-2}}|a_2 - a_1| \leqslant \frac{1}{2^{n-3}},$$
即
$$|a_n - a_{n-1}| \leqslant \frac{1}{2^{n-3}},$$
由于$\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{1}{2^{n-3}}$ 收敛，由比较法，$\sum\limits_{n=2}^{\infty} |a_n - a_{n-1}|$ 收敛，所以$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$绝对收敛.

(2) 因为
$$a_n = a_n - a_{n-1} + a_{n-1} - a_{n-2} + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 = \sum_{k=2}^{n}(a_k - a_{k-1}) + a_1,$$
由于级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$收敛，设 $S = \sum\limits_{k=2}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = S + a_1$，所以$\{a_n\}$ 收敛.

14. **解** (1)
$$\frac{1}{n}(a_n + a_{n+2}) = \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x(1 + \tan^2 x)\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \sec^2 x \,\mathrm{d}x$$
$$\xlongequal{\tan x = t} \frac{1}{n}\int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \frac{1}{n(n+1)},$$
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}(a_k + a_{k+2}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1},$$

所以 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=\lim_{n\to\infty}S_n=1.$$

(2) $$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,\mathrm{d}x\xlongequal{\tan x=t}\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}\mathrm{d}t<\int_0^1 t^n\mathrm{d}t=\frac{1}{n+1},$$

所以 $$\frac{a_n}{n^{\lambda}}<\frac{1}{n^{\lambda}(n+1)}<\frac{1}{n^{\lambda+1}}.$$

因为 $\lambda+1>1$,知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\lambda}}$ 收敛.从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\lambda}}$ 收敛.

15. **分析** 因为 $\{a_n\}\searrow$ 且 $a_n>0$,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a\geqslant 0$,且 $a_n\geqslant a$,于是
$$\frac{1}{a_n+1}\leqslant\frac{1}{a+1}.$$
若能证明 $a>0$,由比较判别法可推知所给级数收敛.

解 因为 $\{a_n\}\searrow$ 且 $a_n>0$,设
$$\lim_{n\to\infty}a_n=a,$$
知 $a\geqslant 0$ 且 $a_n\geqslant a$,从而
$$\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n\leqslant\left(\frac{1}{a+1}\right)^n\quad(n=1,2,\cdots).$$

另一方面,已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散,故
$$a>0.$$
因若 $a=0$,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛.此时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a+1}\right)^n$ 的公比 $0<\frac{1}{a+1}<1$.

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a+1}\right)^n$ 收敛.由比较法,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 收敛.

16. **证** (1) 因为
$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant\sqrt{a_n\cdot\frac{1}{a_n}}=1,$$
$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)-a_n=\frac{1-a_n^2}{2a_n}\leqslant 0,$$
所以 $\{a_n\}\searrow$ 且有下界,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

(2) 由(1)知
$$0\leqslant\frac{a_n}{a_{n+1}}-1=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}}\leqslant a_n-a_{n+1},$$
记 $$S_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=a_1-a_{n+1}.$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}$ 存在,所以 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ 存在,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收敛,由比较法

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\text{收敛}.$$

17. **分析** 由 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续就可把 A 确定下来,题目的意思是,只要确定 A 使 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续,就可证 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 任意次可导,我们所熟悉的是幂级数在它的收敛区间内任意次可导,并可逐项积分,收敛半径不变.我们将确定 A 使 $f(x)$ 与一个收敛区间为 $(-\infty,+\infty)$ 的幂级数相等.

为此,先将 $g(t)=(2+t^2)e^{t^2}$ 展成幂级数.由

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad x\in(-\infty,+\infty),\quad(0!=1),$$

有
$$g(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2t^{2n}}{n!}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2(n+1)}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2t^{2n}}{n!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^{2n}}{(n-1)!}$$
$$=2+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n!}+\frac{1}{(n-1)!}\right)t^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{n!}t^{2n},\quad t\in(-\infty,+\infty).$$

逐项积分得

$$\int_0^{x^2}g(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{n!}\cdot\frac{1}{2n+1}x^{2(2n+1)}=x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{n!}\cdot\frac{1}{2n+1}x^{4n},$$

所以,$x\neq0$ 时,

$$f(x)=\frac{\int_0^{x^2}g(t)dt}{x^2}=2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n!}\cdot\frac{1}{2n+1}x^{4n},$$

$$\lim_{x\to0}f(x)=2+\lim_{x\to0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n!}\cdot\frac{1}{2n+1}x^{4n}=2+0=2.$$

得到 $A=2$ 时 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续.因此

$$f(x)=2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n!}\cdot\frac{1}{2n+1}x^{4n},\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

由幂级数的性质知,$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内任意次可导,注意 x^8 项的系数是 $\frac{2+2}{2!}\cdot\frac{1}{2\times2+1}=\frac{2}{5}$,于是

$$f^{(8)}(0)=8!\cdot\frac{2}{5}.$$

x^9 项的系数为 0,得到 $f^{(9)}(0)=0$.

18. **证** (1) $a_n>0$,因为 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$,所以 $\{a_n\}$ 单调增加,

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} < 2a_{n-1},$$

当 $n = 2$ 时，$a_2 = 2a_1$，所以 $a_n \leqslant 2a_{n-1}$. 又 $a_{n-1} > \frac{a_n}{2}$，所以 $a_{n-2} > \frac{a_{n-1}}{2}$，故

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} > \frac{3}{2}a_{n-1}.$$

当 $n = 3$ 时，$\frac{3}{2}a_2 = a_3$，所以 $a_n \geqslant \frac{3}{2}a_{n-1}$，故

$$0 < \frac{3}{2}a_{n-1} \leqslant a_n \leqslant 2a_{n-1}.$$

(2) 因为 $a_n > \frac{3}{2}a_{n-1}$，所以

$$0 < \frac{1}{a_n} < \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{a_{n-1}} < \left(\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{a_{n-2}} < \cdots < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{a_1} = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

因为 $q = \frac{2}{3} < 1$，根据比较判别法，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 必收敛.

19. **证**

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0, \quad f(0) = 0, \quad f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0,$$

所以 $f'(0) = 0$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ 比较，

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{\sqrt{n} f\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^{3/2}}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{\left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right|}{\frac{1}{n^2}}.$$

设 $x = \frac{1}{n}$，则

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{f'(x)}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{f''(x)}{2} = \frac{1}{2} f''(0),$$

所以

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n} f\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \frac{1}{2} f''(0).$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

20. **解** $R = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{[3^{n+1} + (-2)^{n+1}]}{[3^n + (-2)^n]} \cdot \frac{(n+1)}{n}$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{3\left[1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]}{\left[1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]} \frac{n+1}{n} = 3,$$

所以收敛区间$(-3,3)$.

当 $x=3$ 时

$$\frac{3^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}>\frac{1}{2n},$$

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$发散,所以原级数在 $x=3$ 处发散.

当 $x=-3$ 时,由于

$$\frac{(-3)^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}=(-1)^n\cdot\frac{1}{n}-\frac{2^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n},$$

且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n}$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}$都收敛,所以原级数在 $x=-3$ 处收敛.

评注 在讨论 $x=-3$ 处收敛性时,许多考生应用交错级数的莱布尼兹定理:$u_n\geqslant u_{n+1}$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$,本题不满足 $u_n\geqslant u_{n+1}$,所以是错误的.

注意 莱布尼兹判断交错级数收敛只是给出一个充分条件,但不是必要的.

21. (1) **解法一**
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{n4^n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2(n-1)}}{n4^n},$$

令 $t=x^2$,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{t^{n-1}}{n4^n}$的收敛半径:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n4^n}}{\frac{1}{(n+1)4^{n+1}}}=4,$$

所以 $|x^2|<4$, $-2<x<2$ 为原级数收敛区间.

当 $x=\pm2$ 时,原级数为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\pm2)^{2n-1}}{n4^n}=\pm\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\text{ 发散},$$

所以收敛域为 $-2<x<2$.

解法二 直接采用达朗贝尔判别法:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\frac{|x|^2}{4},$$

即 $|x|<2$ 时级数收敛. $|x|>2$ 时,由 $|u_{n+1}(x)|>|u_n(x)|$,有

$$\lim_{n\to\infty}|u_n|\neq0\quad\text{即}\quad\lim_{n\to\infty}u_n(x)\neq0,$$

所以原级数发散,所以 $R=2$,端点讨论同解法一.所以收敛域为 $-2<x<2$.

(2) 将 x 看成 p,即是熟知 p- 级数形式,比值法失效.用比较法:

$x\leqslant0$ 时,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n^2+2n+3)^x}\neq 0,$$

原级数发散.

$x>0$ 时,

$$u_n=\frac{1}{n^{2x}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)^x} \text{ 与 } \frac{1}{n^{2x}} \text{ 是同阶无穷小} \quad (n\to\infty \text{ 时}).$$

当 $2x>1$ 时,即 $x>\frac{1}{2}$ 时,原级数绝对收敛.

当 $0<x\leqslant\frac{1}{2}$ 时,原级数条件收敛.

(因为 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n(x)=0$,且 $u_{n+1}(x)<u_n(x)$).

22. **解** 由

$$\begin{cases} y=nx^2+\dfrac{1}{n}, \\ y=(n+1)x^2+\dfrac{1}{n+1}, \end{cases}$$

得

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.$$

如图 7-1,因为图形关于 y 轴对称,所以

$$S_n=2\int_0^{a_n}\left[nx^2+\frac{1}{n}-(n+1)x^n-\frac{1}{n+1}\right]dx$$

$$=2\int_0^{a_n}\left[\frac{1}{n(n+1)}-x^2\right]dx$$

$$=\frac{4}{3}\,\frac{1}{n(n+1)\sqrt{n(n+1)}}.$$

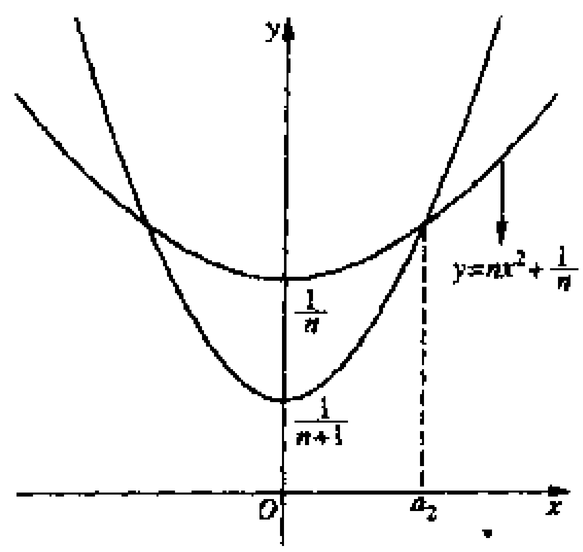


图 7-1

(2) $\dfrac{S_n}{a_n}=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)$,

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{S_n}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{S_k}{a_k}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{4}{3}\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right)\right]=\dfrac{4}{3}$.

23. **解** 由已知条件可见,

$$f_n'(x)-f_n(x)=x^{n-1}e^x,$$

其通解为:

$$f_n(x)=e^{\int dx}\left(\int x^{n-1}e^xe^{-\int dx}dx+C\right)=e^x\left(\frac{x^n}{n}+C\right).$$

由条件 $f_n(1)=\frac{e}{n}$,得 $C=0$,故

$$f_n(x)=\frac{x^n e^x}{n},$$

从而
$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n e^x}{n}=e^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$

记 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$,收敛域为$[-1,1)$,当 $x\in(-1,1)$ 时,有

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},$$

故
$$S(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x).$$

当 $x=-1$ 时

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(1)=-e^{-1}\ln 2,$$

于是,当 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 时,有

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)=-e^x\ln(1-x).$$

24. **解** (1) 设

$$a_n=\frac{n}{n!}=\frac{1}{(n-1)!},$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=+\infty,\quad R=+\infty,$$

所以原级数收敛区间为$(-\infty,+\infty)$.

(2) 记

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{n+1}=x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}$$
$$=x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=x^2e^x,\quad x\in(-\infty,+\infty).$$

(3)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n!}\cdot 2^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}2^n-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}2^n$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n!}\cdot 2^{n+1}-\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}2^n-1\right)$$
$$=\frac{1}{2}S(2)-(e^2-1)=e^2+1.$$

25. **解** 设 $x=\frac{2}{r+1}$,则

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n=x\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^{n-1}=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n\right)'$$

$$=x\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}\right)''=x\left(\frac{1}{1-x}-1-x\right)''=\frac{2x}{(1-x)^3},$$

故
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{(1+r)^n}=S\left(\frac{1}{1+r}\right)=\frac{2(1+r)^2}{r^3}.$$

26. **解** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2-n+1}{2^n}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n(n-1)}{2^n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2^n}$

$$=S_1\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3},$$

其中
$$S_1(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^n,$$

$$S_1(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^n=x^2\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=x^2\left(\sum_{n=2}^{\infty}nx^{n-1}\right)'$$

$$=x^2\left(\sum_{n=2}^{\infty}x^n\right)''=x^2\left(\frac{1}{1-x}-1-x\right)''=\frac{2x^2}{(1-x)^3},$$

所以
$$S_1\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{4}{27},$$

因此
$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2-n+1}{2^n}=\frac{4}{27}-\frac{1}{3}=\frac{-5}{27}.$$

27. **解** 因

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n},\quad x\in(-1,1),$$

幂级数在收敛区间内可逐项积分得

$$\arctan x=\int_0^x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\quad x\in[-1,1],$$

于是
$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+2}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n2}{1-4n^2}x^{2n}\right),\quad x\in[-1,1],$$

因此
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4x^2}=\frac{1}{2}[f(1)-1]=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.\quad (令\ x=1)$$

28. **解**

$$f(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}=\frac{1}{2+(x-3)}-\frac{1}{3+(x-3)}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-3}{2}}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-3}{3}}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-3}{2}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-3}{3}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x-3)^n,\quad 1<x<5.$$

注 由

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-3}{2}\right)^n,\quad R_1=2,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-3}{3}\right)^n,\quad R_2=3,$$

所以 $R=\min\{R_1,R_2\}=2$，由 $-2<x-3<2$ 有 $1<x<5$.

29. **解** 因为

$$\frac{e^x-1}{x}=\frac{1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots-1}{x}=1+\frac{1}{2!}x+\frac{1}{3!}x^2+\frac{1}{4!}x^3+\cdots,$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}x+\frac{3}{4!}x^2+\cdots,\qquad (*)$$

$$x\in(-\infty,+\infty).$$

令 $x=1$，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)\bigg|_{x=1}=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}\bigg|_{x=1}=1.$$

由(*)式有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)\bigg|_{x=1}=1.$$

30. **分析** 用正项级数收敛性判别法确定和函数 $S(x)$ 的定义域，即确定使级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}x^2e^{-nx}$ 收敛的 x 值的集合是 $[0,+\infty)$. 为证明和函数 $S(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 有界，自然的想法是给出级数一般项的估计

$$0\leqslant\sqrt{n}x^ne^{-nx}\leqslant M_n.$$

只要 $\sum_{n=1}^{\infty}M_n$ 收敛就得结论.

证 $x=0$ 时级数显然收敛；$x\neq0$ 时，

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n+1}\,x^2e^{-(n+1)x}}{\sqrt{n}\,x^2e^{-nx}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}e^{-nx}=\begin{cases}0, & x>0,\\ +\infty, & x<0.\end{cases}$$

因此，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}x^2e^{-nx}$ 当 $x\geqslant 0$ 时收敛，当 $x<0$ 时发散，即和函数 $S(x)$ 的定义域是 $[0,+\infty)$.

为了在 $[0,+\infty)$ 上估计 $\sqrt{n}x^2e^{-nx}$，我们求 $f(x)=x^2e^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 上的最大值：

$$f'(x)=e^{-nx}(2x-nx^2)=xe^{-nx}(2-nx)\begin{cases}>0, & 0<x<\dfrac{2}{n},\\ 0, & x=\dfrac{2}{n},\\ <0, & x>\dfrac{2}{n},\end{cases}$$

所以 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{2}{n}$ 取 $[0,+\infty)$ 上的最大值，即

$$f(x)=x^2e^{-nx}\leqslant\frac{4}{n^2}e^{-2},\quad x\in[0,+\infty),$$

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}x^2e^{-nx}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\cdot\frac{4}{n^2}e^{-2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4e^{-2}}{n^{3/2}},\quad x\in[0,+\infty),$$

因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4e^{-2}}{n^{3/2}}$ 收敛，所以 $S(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 有界.

31. **解**

$$b_0=0\quad(n=1,2,\cdots),\quad a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=1,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos nx\,dx=\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\quad(n=1,2,\cdots),$$

所以
$$f(x)\sim\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}\cos nx.$$

其和函数，
$$S(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & \dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\pi,\\ \dfrac{1}{2}, & x=\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

32. **解** (1) 记

$$b_n=\frac{(-1)^n}{n^p},\quad c_n=-\frac{1}{n^{2p}}+o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)\quad(n\to\infty),$$

则
$$a_n=b_n+c_n.$$

显然 $p>1$ 时 $\sum b_n$ 绝对收敛，$0<p\leqslant 1$ 时 $\sum b_n$ 条件收敛.

又因为 $\dfrac{c_n}{\frac{1}{n^{2p}}}\to -1$，所以 $\sum c_n$ 与 $\sum \dfrac{1}{n^{2p}}$ 同敛散.

即 $p>\dfrac{1}{2}$ 时 $\sum c_n$ 收敛且绝对收敛，$0<p\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时 $\sum c_n$ 发散.

因此可知 $\sum a_n=\sum(b_n+c_n)$. 当 $0<p\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时发散，当 $\dfrac{1}{2}<p\leqslant 1$ 时条件收敛.

当 $p>1$ 时绝对收敛.

(2) 因为

$$u_n=\frac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}=\frac{(-1)^n}{n^p}\left(1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right)^{-1}$$

$$=\frac{(-1)^n}{n^p}\left[1-\frac{(-1)^n}{n^p}+o\left(\frac{(-1)^n}{n^p}\right)\right]=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{1}{n^{2p}}+o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right),$$

所以 $\sum u_n$ 的收敛性同(1).

33. **解**　(1) 引进幂级数，把数值级数求和转化为幂级数求和. 令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)}x^{2n},$$

通过求导容易求和：

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1},\quad f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(x^2)^{n-1},$$

有

$$f''(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

注意 $f'(0)=0, f(0)=0$，又有

$$f'(x)=\arctan x,$$

$$f(x)=\int_0^x\arctan t\,dt=x\arctan x-\int_0^x\frac{t}{1+t^2}dt$$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

令 $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，得

$$S=2f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=2\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{6}-\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-2\ln 2+\ln 3.$$

证　(2)

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,$$

所以 $a_n=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}\sin nx=-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\mathrm{d}\cos nx$

$$=\frac{(-1)^n}{n^2\pi}[f'(\pi)-f'(-\pi)]-\frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f''(x)\cos nx\,\mathrm{d}x.$$

注意 $|\cos nx|\leqslant 1$，$f''(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 有界，所以存在常数 M 使得 $|a_n|\leqslant\frac{M}{n^2}$，又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{n^2}$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛.

34. **解** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 是交错级数.

当 $n\to\infty$ 时，$u_{2n-1}=\frac{1}{n}\to 0$ 及 $u_{2n}=\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\to 0$，所以有 $\lim_{n\to\infty}u_n=0$，剩下只要证 u_n 递减，即

$$u_{2n-1}>u_{2n}>u_{2n+1}=\frac{1}{n+1},$$

只要证

$$\frac{1}{n}>\int_n^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x>\frac{1}{n+1},$$

即

$$\frac{1}{n}>\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>\frac{1}{n+1},$$

左边不等式只要证 $x>\ln(1+x)(x>0)$，而右边不等式只要证 $\ln(1+x)>\frac{x}{1+x}\ (x>0)$. 而这些都是容易证得. 可分别令

$$F(x)=x-\ln(1+x),\quad G(x)=\ln(1+x)-\frac{x}{1+x},$$

则 $F(0)=0, G(x)=0$，而 $F'(x)>0, G'(x)>0$，从而得证.

35. **证** 题设数列 $\{na_n\}$ 收敛，知存在常数 A，使 $\lim_{n\to\infty}na_n=A$；

又因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})$ 收敛，所以

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n-1})=\lim_{m\to\infty}[a_1+2(a_2-a_1)+3(a_3-a_2)+\cdots+m(a_m-a_{m-1})]$$

$$=\lim_{m\to\infty}(-a_1-a_2-\cdots-a_{m-1}+ma_m)$$

$$=-\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m-1}a_n+\lim_{m\to\infty}ma_m=S,$$

故有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m-1}a_n=A-S.$$

即原级数收敛，其和为 $A-S$.

36. **证** (1) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 的部分和序列：

$$\begin{aligned}T_n &= \sum_{k=1}^{n}a_kb_k = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_nb_n\\&= S_1b_1+(S_2-S_1)b_2+(S_3-S_2)b_3+\cdots+(S_n-S_{n-1})b\\&= S_1(b_1-b_2)+S_2(b_2-b_3)+\cdots+S_{n-1}(b_{n-1}-b_n)+S_nb_n.\end{aligned}$$

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ 的部分和 S_n 有界，记其界为 M，即

$$|S_n|\leqslant M \quad (n=1,2,\cdots),$$

则
$$|S_n(b_n-b_{n+1})|\leqslant M|b_n-b_{n+1}| \quad (n=1,2,\cdots),$$

由于 $\{b_n\}$ 单调下降趋于零，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|b_n-b_{n+1}|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(b_n-b_{n+1})$ 收敛于 b_1.

由比较判别法知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}S_n(b_n-b_{n+1})$ 绝对收敛，从而部分和数列 $\{T_n\}$ 的极限存在，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n \text{ 为收敛级数.}$$

(2) 取 $b_n=\dfrac{1}{n}$，由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，知级数的部分和 S_n 有界，由(1)知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}$ 收敛.

第八章　微 分 方 程

一、本章的重点内容与常见的典型题型

本章主要有两个问题，一是根据实际问题和所给条件建立有自变量、未知函数及未知函数的导数的方程及相应的初值条件．二是求解方程，包括方程的通解和满足初值条件的特解．本章的主要内容是求解一阶、二阶微分方程以及微分方程在实际中的应用，对于一阶微分方程，重点是：

1．掌握变量可分离的方程及一阶线性微分方程的解法．

2．掌握齐次微分方程，伯努利微分方程，全微分方程，高阶微分方程中可降价微分方程的类型及其解法．

3．会用简单的变量代换解某些微分方程．

对于二阶微分方程，重点是：

1．掌握二阶常系数齐次线性微分方程的解法．

2．掌握自由项为多项式、指数函数、正弦函数、余弦函数以及它们的和与积的二阶常系数非齐次线性微分方程的求解．

3．理解高阶线性齐次、非齐次微分方程解的结构．

4．二阶微分方程的应用．

常见题型有：

1．求典型类型的一阶、二阶微分方程的通解或特解；

2．根据实际问题或给定条件建立微分方程并求解；

3．所给的微分方程虽不是属于所讨论的几种典型类型，但经过适当的变量变换可以转化成这些类型进而求解．

二、习　　题

(一) 填空题

1．已知 $y = y(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y = \dfrac{y\Delta x}{1 + x^2} + \alpha$，其中 α 是 Δx 的高阶无穷小（Δx

$\to 0$ 时), $y(0)=\pi$, 则 $y(1)=$ ______.

2. 微分方程 $y'+y\tan x=\cos x$ 的通解 $y=$ ______.

3. 微分方程 $xy''+3y'=0$ 的通解 $y=$ ______.

4. 微分方程 $y''-2y'+2y=e^x$ 的通解为______.

5. 微分方程 $y''+4y=\cos 2x$ 的通解为______.

6. 设 $y=e^x(C_1\sin x+C_2\cos x)$($C_1,C_2$ 为任意常数)为某二阶常系数线性齐次微分方程的通解,则该方程为______.

7. 设 $x>0$, 微分方程 $x^2y''-2xy'+2y=x+2$ 的通解为______.

(二) 选择题

1. 具有特解 $y_1=e^{-x}, y_2=2xe^{-x}, y_3=3e^x$ 的三阶常系数齐次线性微分方程是(　　).

(A) $y'''-y''-y'+y=0$; (B) $y'''+y''-y'-y=0$;

(C) $y'''-6y''+11y'-6y=0$; (D) $y'''-2y''-y'+2y=0$.

2. 设线性无关的函数 y_1,y_2,y_3 都是二阶非齐次线性方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ 的解, C_1,C_2 是任意常数,则该非齐次方程的通解是(　　).

(A) $C_1y_1+C_2y_2+y_3$; (B) $C_1y_1+C_2y_2-(C_1+C_2)y_3$;

(C) $C_1y_1+C_2y_2-(1-C_1-C_2)y_3$; (D) $C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3$.

3. 若连续函数 $f(x)$ 满足关系式 $f(x)=\int_0^{2x}f\left(\frac{t}{2}\right)dt+\ln 2$, 则 $f(x)$ 等于(　　).

(A) $e^x\ln 2$; (B) $e^{2x}\ln 2$; (C) $e^x+\ln 2$; (D) $e^{2x}+\ln 2$.

4. 设曲线积分 $\int_L[f(x)-e^x]\sin y\,dx-f(x)\cos y\,dy$ 与路径无关,其中 $f(x)$ 具有一阶连续导数,且 $f(0)=0$, 则 $f(x)$ 等于(　　).

(A) $\frac{e^{-x}-e^x}{2}$; (B) $\frac{e^x-e^{-x}}{2}$; (C) $\frac{e^x+e^{-x}}{2}-1$; (D) $1-\frac{e^x+e^{-x}}{2}$.

5. 对于微分方程 $y''+2y'+y=0$, $y=Cxe^{-x}$(其中 C 任意常数),则(　　).

(A) 是方程的通解;

(B) 是方程的特解;

(C) 不是方程的解;

(D) 是不包含在(A)(B)(C)三个选项中的情况.

(三) 解答题

1. 求初值问题

$$\begin{cases}(y+\sqrt{x^2+y^2})dx-x\,dy=0, & (x>0)\\ y(1)=0\end{cases}$$

的解.

2. 求方程$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2+1}{y^4-2xy}$的通解.

3. 设微分方程 $y'-2y=\varphi(x)$,其中

$$\varphi(x)=\begin{cases}2, & 若 x<1,\\ 0, & 若 x>1,\end{cases}$$

试求在$(-\infty,+\infty)$内的连续函数 $y(x)$,使之在$(-\infty,1)$和$(1,+\infty)$内部满足所给方程,且满足条件 $y(0)=0$.

4. 求方程 $y''-2y'-e^{2x}=0$ 满足 $y(0)=1, y'(0)=1$ 的解.

5. 设函数 $y(x)$ $(x\geqslant 0)$ 二阶可导且 $y'(x)>0, y(0)=1$.过曲线 $y=y(x)$ 上任意一点 $P(x,y)$ 作该曲线的切线及 x 轴的垂线,上述两直线与 x 轴所围三角形的面积记为S_1,区间$[0,x]$上以 $y=y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2,并设 $2S_1-S_2$ 恒为 1,求此曲线 $y=y(x)$ 的方程.

6. 从船上向海中沉放某种探测仪器,按要求,需确定仪器的下沉深度 y(从海平面算起)与下沉速度 v 之间的函数关系,设仪器在重力作用下,从海平面由静止开始铅直下沉,在下沉过程中还受到阻力和浮力的作用.设仪器的质量为 m,体积为 B,海水比重为 ρ,仪器所受的阻力与下沉速度成正比,比例系数为 $k(k>0)$.试建立 y 和 v 所满足的微分方程,并求出函数关系式 $y=y(v)$.

7. 设函数 $f(x)$ 可微,且对任何实数 a,b 满足

$$f(a+b)=e^a f(b)+e^b f(a) \tag{*}$$

且 $f'(0)=e$,求 $f(x)$.

8. 设(1) $y=f(x)$ $(0\leqslant x<+\infty)$ 满足条件 $f(0)=0$ 和 $0\leqslant f(x)\leqslant e^x-1$.

(2) 平行于 y 轴和动直线MN 与曲线$y=f(x)$ 和 $y=e^x-1$ 分别交于 P_2 和 P_1.

(3) 曲线 $f(x)$,直线 MN 和 x 轴所围图形的面积S 恒等于线段P_1P_2 的长度.

求函数 $y=f(x)$ 的表达式.

9. 写出微分方程 $y''-2y'+\lambda y=xe^{ax}$ 的通解形式,其中 λ, a 是任意实数.

10. 已知 $y_1=3, y_2=3+x^2, y_3=3+e^x$ 是二阶线性非齐次方程的解,求方程的通解及方程.

11. 已知函数 $y=e^{2x}+(x+1)e^x$ 是二阶常系数线性非齐次方程$y''+ay'+by=ce^x$ 的一个特解.试确定 a,b,c 及该方程的通解.

12. 已知 $y''+(x+e^{2y})(y')^3=0$,若把 x 看成因变量,y 看成自变量,则方程化为什么形式?并求此方程的通解.

13. 设 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)dt$,其中 $f(x)$ 是连续函数,求 $f(x)$.

14. 设 $f(x)\in C^{(2)}, f(0)=0, f'(0)=1$ 且$[xy(x+y)-f(x)y]dx+[f'(x)+x^2y]dy$

$=0$ 为一全微分方程. 求 $f(x)$ 及此全微分方程的通解.

15. 设 $f(x)$ 为连续函数

(1) 求初值问题 $\begin{cases} y' + ay = f(x), \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 的解, 其中 $a > 0$ 常数;

(2) 若 $|f(x)| \leqslant k$ (k 为常数). 证明: $x \geqslant 0$ 时, $|y(x)| \leqslant \dfrac{k}{a}(1 - e^{-ax})$.

16. 设有级数 $2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}$,

(1) 求此级数的收敛域;

(2) 证明此级数满足微分方程 $y'' - y = -1$;

(3) 求此级数的和函数.

17. 证明方程 $y'' + y = f(x)$ (其中 $f(x)$ 连续) 的通解为

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \int_0^x f(t)\sin(x - t)\mathrm{d}t,$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

18. 设 $u = u(\sqrt{x^2 + y^2}) \in C^{(2)}$ 且满足方程: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{1}{x}\dfrac{\partial u}{\partial x} + u = x^2 + y^2$, 求 u.

19. 设 $f(x) \in C[1, +\infty)$, 若由曲线 $y = f(x)$, 直线 $x = 1, x = t$ ($t > 1$) 与 x 轴所围成平面图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积为:

$$x(t) = \frac{\pi}{3}[t^2 f(t) - f(1)].$$

试求: $y = f(x)$ 满足的微分方程, 并求该方程满足条件 $y|_{x=2} = \dfrac{2}{9}$ 的解.

20. 设曲线 l 的极坐标方程为 $r = r(\theta)$, $M(r, \theta)$ 为 l 上任一点, $M_0(2, 0)$ 为 l 上一定点. 若极径 OM_0, OM 与曲线 l 所围成的曲边扇形的面积等于 l 上 M_0, M 两点间弧长值的一半, 求曲线 l 的方程.

21. 设 $\varphi(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数, $\int_0^{2\pi}\varphi(x)\mathrm{d}x = a$,

(1) 求微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y\sin x = \varphi(x)e^{\cos x}$ 的通解;

(2) 以上这些解中, 有没有以 2π 为周期的解? 若有, 求出之, 若无, 说明理由.

22. 设 Oxy 平面第一象限中有曲线 Γ: $y = y(x)$, 过点 $A(0, \sqrt{2} - 1)$, $y'(x) > 0$. $M(x, y)$ 为 Γ 上任意一点, 满足: 弧段 $\overset{\frown}{AM}$ 的长度与点 M 处 Γ 的切线在 x 轴上的截距之差为 $\sqrt{2} - 1$, 求此曲线.

23. 设 $u(x, y)$, $v(x, y)$ 在第一象限有二阶连续的偏导数, 且

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

又 $u=f(\sqrt{x^2+y^2})$，求 $u(x,y)$ 与 $v(x,y)$.

三、习题的解答与分析

(一) 填空题

1. 应填：$\pi e^{\frac{\pi}{4}}$.

分析　因为$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{y}{1+x^2}+\dfrac{\alpha}{\Delta x}$，令 $\Delta x\to 0$ 有：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{1+x^2},$$

所以

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{1+x^2},$$

两边积分有

$$\ln y=\arctan x+\ln C,$$

故

$$y=Ce^{\arctan x}. \qquad (*)$$

因为 $y(0)=\pi$，所以 $C=\pi$. 由$(*)$式 $y(1)=\pi e^{\frac{\pi}{4}}$.

2. 应填：$(x+C)\cos x$.

分析　本题所给方程是一个一阶线性方程.

由线性方程通解公式得

$$y=e^{-\int\tan x dx}\left[\int\cos x\cdot e^{\int\tan x dx}dx+C\right]=(x+C)\cos x.$$

3. 应填：$y=C_1+\dfrac{C_2}{x^2}$.

分析　这是一个不显含 y 的可降阶方程. 令 $y'=P$，则 $y''=P'$. 代入原方程得

$$P'+\frac{3}{x}P=0,$$

解之

$$P=\frac{C}{x^3}.$$

因此

$$y=\int\frac{C}{x^3}dx=C_1-\frac{C}{2}x^{-2}=C_1+\frac{C_2}{x^2},\quad\left(C_2=-\frac{C}{2}\right).$$

4. 应填：$y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x+1)$.

分析　特征方程为 $r^2-2r+2=0$，解得 $r_{1,2}=1\pm i$，则齐次方程通解为

$$Y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x).$$

易观察出 $y=e^x$ 是非齐次方程的一个特解，则原方程通解为

$$y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x+1).$$

5. 应填：$\frac{x}{4}\sin 2x+C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$.

分析　对应齐次方程的特征方程是 $r^2+4=0$. 它的两个特征根为 $r_{1,2}=\pm 2i$. 因此对应齐次方程的通解为 $Y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$. 又因为 $\lambda\pm\omega i=\pm 2i$ 是特征方程的根，所以，设非齐次方程的特解为

$$y^*=x(A\cos 2x+B\sin 2x),$$

代入方程 $y''+4y=\cos 2x$ 中，得 $A=0, B=\frac{1}{4}$. 所以所求方程通解为

$$y=\frac{x}{4}\sin 2x+C_1\cos 2x+C_2\sin 2x.$$

评注　这是一个二阶常系数线性非齐次方程的求解问题，对于本题考生容易犯的错误是将非齐次方程的特解设为 $y^*=xA\cos 2x$，注意，形如 $y''+4y=p\cos 2x$, $y''+4y=q\sin 2x$, $y''+4y=p\cos 2x+q\sin 2x$（其中 p,q 是不等于零的常数），其特解都应设为 $y^*=x(A\cos 2x+B\sin 2x)$.

6. 应填：$y''-2y'+2y=0$.

分析　所求方程的特征根为 $r_{1,2}=1\pm i$. 则其特征方程为 $r^2-2r+2=0$，故所求方程为 $y''-2y'+2y=0$.

7. 应填：$y=C_1x+C_2x^2+1-x\ln x$，其中 C_1 和 C_2 为任意常数.

分析　所给方程为欧拉方程，因 $x>0$，设 $x=e^t$，于是

$$x^2y''=\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt},\quad xy'=\frac{dy}{dt},$$

代入原方程得

$$\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+2y=e^t+2.$$

它对应的特征方程 $r^2-3r+2=0$，特征根 $r_1=1, r_2=2$，于是它对应的齐次方程的通解为 $y=C_1e^t+C_2e^{2t}=C_1x+C_2x^2$，其中 C_1 和 C_2 是两个任意常数；非齐次方程的特解可设为 $y^*=Ate^t+B$，代入方程可求得 $A=-1, B=1$，即

$$y^*=1-te^t=1-x\ln x.$$

于是，所给欧拉方程的通解为

$$y=C_1x+C_2x^2+1-x\ln x.$$

（二）选择题

1. 应选(B).

分析　特征方程的特征根为 $r_1=r_2=-1, r_3=1$. 所以特征方程为

$$(r+1)^2(r-1)=r^3+r^2-r-1=0.$$

对应的微分方程为

$$y'''+y''-y'-y=0.$$

2. 应选(D).

分析　由于(D)中的

$$y=C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3=C_1(y_1-y_3)+C_2(y_2-y_3)+y_3,$$

其中 y_1-y_3 和 y_2-y_3 是对应的齐次方程的两个解,且 y_1-y_3 与 y_2-y_3 线性无关.事实上,若令

$$A(y_1-y_3)+B(y_2-y_3)=0,$$

即

$$Ay_1+By_2-(A+B)y_3=0.$$

由于 y_1,y_2,y_3 线性无关,则 $A=0,B=0,-(A+B)=0$,因此 y_1-y_3 与 y_2-y_3 线性无关,故

$$y=C_1y_1+C_2y_2+(1-C_1-C_2)y_3\text{ 是原方程通解}.$$

3. 应选(B).

分析　这是一个带变上限积分的积分方程.一般是通过等式两端求导化为微分方程求解.

等式 $f(x)=\int_0^{2x}f\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t+\ln 2$ 两边求导得 $f'(x)=2f(x)$.解此方程得 $f(x)=C\mathrm{e}^{2x}$.由原方程可知 $f(0)=\ln 2$,代入 $f(x)=C\mathrm{e}^{2x}$ 得 $C=\ln 2$.故 $f(x)=\mathrm{e}^{2x}\ln 2$.

4. 应选(B).

分析　由

$$\frac{\partial}{\partial x}(-f(x)\cos y)=\frac{\partial}{\partial y}[f(x)-\mathrm{e}^x]\sin y,$$

得

$$f'(x)+f(x)=\mathrm{e}^x,$$

解此方程得

$$f(x)=\mathrm{e}^{-x}\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+C\right).$$

由 $f(0)=0$ 得,$C=\frac{-1}{2}$,故 $f(x)=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$.

5. 应选(D).

分析　因为二阶方程的通解需含两个任意常数,所以不是通解;又因为特解不含任意常数,所以不是特解;最后因为 $y=Cx\mathrm{e}^{-x}$ 代入方程成为关于 x 的恒等式,所以 $y=Cx\mathrm{e}^{-x}$ 是方程的解,所以(C)不入选,应选(D).

(三) 解答题

1. **分析**　这是齐次微分方程.

解 原方程即

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}\quad(x>0).$$

令 $\frac{y}{x}=u, y=xu$. 所以

$$u+x\frac{du}{dx}=u+\sqrt{1+u^2},$$

即

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{dx}{x},$$

积分得 $\ln(u+\sqrt{1+u^2})=\ln x+\ln C$ 或 $u+\sqrt{1+u^2}=Cx$.

即

$$\frac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=Cx,$$

亦即

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2.$$

由 $y(1)=0$, 得 $C=1$. 所以所求特解

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=x^2\quad 或\quad y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}.$$

2. **解** 原方程即

$$\frac{dx}{dy}=\frac{y^4-2xy}{y^2+1},$$

所以

$$\frac{dx}{dy}+\frac{2y}{y^2+1}x=\frac{y^4}{y^2+1}.$$

这是关于 x 的一阶线性方程. 求解

$$x=e^{-\int\frac{2y}{y^2+1}dy}\left[\int\frac{y^4}{1+y^2}e^{\int\frac{2y}{1+y^2}dy}dy+C\right]$$

$$=\frac{1}{1+y^2}\left[\int y^4dy+C\right]=\frac{y^5+5C}{5(1+y^2)},$$

其中 C 为任意常数.

3. **解** 当 $x<1$ 时, 有 $y'-2y=2$. 其通解为

$$y=e^{\int 2dx}\left[\int 2e^{-\int 2dy}dy+C_1\right]=e^{2x}\left[\int 2e^{-2x}dx+C_1\right]$$

$$=C_1e^{2x}-1.$$

由 $y(0)=0$, 得 $C_1=1$, 所以

$$y=e^{2x}-1\quad(x<1).$$

当 $x>1$ 时, 有 $y'-2y=0$, 其通解

$$y=C_2e^{\int 2dx}=C_2e^{2x}.$$

由
$$\lim_{x\to 1^+} C_2 e^{2x} = \lim_{x\to 1^-}(e^{2x}-1) = e^2-1,$$
得
$$C_2 e^2 = e^2 - 1,$$
即
$$C_2 = 1 - e^{-2},$$
所以
$$y = (1-e^{-2})e^{2x} \quad (x>1).$$
若补充定义 $y(1) = e^2-1$,则得在$(-\infty, +\infty)$上的连续函数
$$y(x) = \begin{cases} e^{2x}-1, & x \leqslant 1, \\ (1-e^{-2})e^{2x}, & x > 1. \end{cases}$$

4. **解**　原方程对应齐次方程为
$$y'' - 2y' = 0,$$
其特征方程为
$$r^2 - 2r = 0, \quad r_1 = 0, \quad r_2 = 2,$$
所以
$$Y(x) = C_1 + C_2 e^{2x}.$$
设非齐次方程特解为 $y^*(x) = Axe^{2x}$,代入原方程 $A = \frac{1}{2}$.所以所求方程通解为
$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}xe^{2x}.$$
将 $y(0) = 1, y'(0) = 1$ 代入通解
$$C_1 = \frac{3}{4}, \quad C_2 = \frac{1}{4},$$
所以所求解
$$y = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}(3+2x)e^{2x}.$$

5. **解**　如图8-1,设曲线 $y = y(x)$ 上点 $P(x,y)$ 处的切线方程为
$$Y - y = y'(x)(X - x).$$
它与 x 轴交点为$\left(x - \frac{y}{y'}, 0\right)$.
因为
$$y'(x) > 0, \quad y(0) = 1,$$
从而
$$y(x) > 0 \quad (x \geqslant 0),$$
于是
$$S_1 = \frac{1}{2}y\left|x - \left(x - \frac{y}{y'}\right)\right| = \frac{y^2}{2y'}.$$
由条件 $2S_1 - S_2 = 1$ 知
$$\frac{y^2}{y'} - \int_0^x y(t)\,dt = 1. \qquad (*)$$

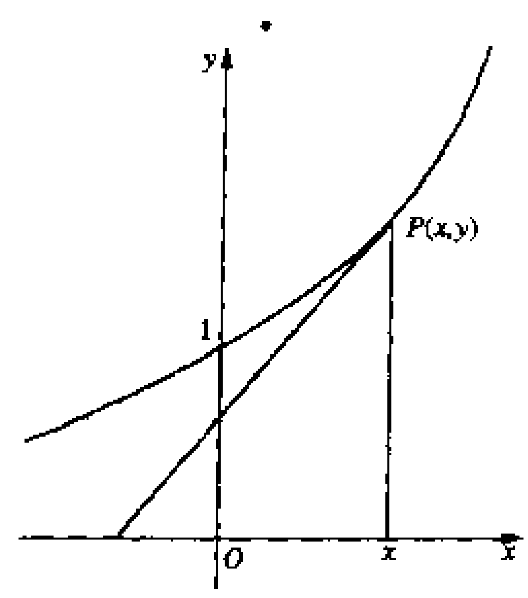


图　8-1

对$(*)$两边对 x 求导并化简得 $yy'' = (y')^2$.令 $P = y'$,有 $yP\frac{dP}{dy} = P^2$,从而$\frac{dP}{P} = \frac{dy}{y}$,积分

$P = C_1 y$，即$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = C_1 y$，所以 $y = \mathrm{e}^{C_1 x + C_2}$.

由 $y(0) = 1$，并由(*)式 $y'(0) = 1$. 由此得 $C_1 = 1, C_2 = 0$，所以所求曲线是 $y = \mathrm{e}^x$.

6. **解**　取沉放点为原点 O，y 轴正向铅直向下(如图 8-2)，由牛顿第二定理得

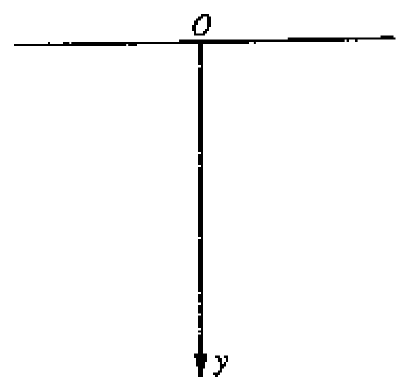


图　8-2

$$ma = mg - B\rho - kv,$$

即
$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = mg - B\rho - kv,$$

其中
$$v = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

这是可降阶方程
$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}.$$

原方程可化为
$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = mg - B\rho - kv,$$

分离变量
$$\mathrm{d}y = \frac{mv}{mg - B\rho - kv}\mathrm{d}v,$$

积分
$$y = -\frac{m}{k}v - \frac{m(mg - B\rho)}{k^2}\ln(mg - B\rho - kv) + C.$$

由初始条件 $v(y = 0) = 0$，求出
$$C = \frac{m(mg - B\rho)}{k^2}\ln(mg - B\rho).$$

回代所求函数关系
$$y = -\frac{m}{k}v - \frac{m(mg - B\rho)}{k^2}\ln\frac{mg - B\rho - kv}{mg - B\rho}.$$

7. **解**　在(*)中令 $a = b = 0$，则得 $f(0) = 0$. 令 $a = x, b = \Delta x$，得
$$f(x + \Delta x) = \mathrm{e}^x f(\Delta x) + \mathrm{e}^{\Delta x} f(x),$$

所以
$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{\mathrm{e}^x f(\Delta x) + (\mathrm{e}^{\Delta x} - 1)f(x)}{\Delta x}$$
$$= \mathrm{e}^x\frac{[f(\Delta x) - f(0)]}{\Delta x} + \frac{(\mathrm{e}^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}f(x).$$

令 $\Delta x \to 0$，得
$$f'(x) = \mathrm{e}^x f'(0) + f(x) = \mathrm{e}^{x+1} + f(x),$$

即
$$f'(x) - f(x) = \mathrm{e}^{x+1}.$$

解此方程
$$f(x) = x\mathrm{e}^{x+1} + C\mathrm{e}^x.$$

将 $f(0)=0$ 代入得 $C=0$，所以 $f(x)=xe^{x+1}$.

8. **分析** 按题意画出草图 8-3，列出方程并求解.

解 由题意

$$S=|P_1P_2|=y_1-y_2,$$

即
$$\int_0^x f(x)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x-1-f(x).$$

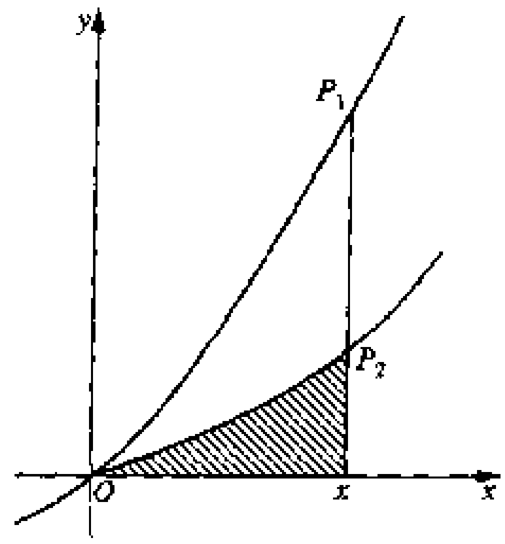


图 8-3

两边求导

$$f(x)=\mathrm{e}^x-f'(x),$$

即
$$f'(x)+f(x)=\mathrm{e}^x.$$

解此方程

$$f(x)=C\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{2}\mathrm{e}^x.$$

由 $f(0)=0$，得 $C=-\frac{1}{2}$，故所求函数为

$$y=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}).$$

9. **解** 对应齐次方程的特征方程是

$$r^2-2r+\lambda=0.$$

特征根为

$$r_1=1+\sqrt{1-\lambda},\quad r_2=1-\sqrt{1-\lambda}.$$

(i) 若 $\lambda=1$，则 $r_1=r_2=1$. 若 $a=1$，则通解形式为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2x\mathrm{e}^x+x^2(Ax+B)\mathrm{e}^x;$$

若 $a\neq1$，则通解形式为

$$y=C_1\mathrm{e}^x+C_2x\mathrm{e}^x+(Ax+B)\mathrm{e}^{ax}.$$

(ii) 若 $\lambda<1$. 则 $r_1\neq r_2$(实数)；

若 $a=1+\sqrt{1-\lambda}$ 或 $a=1-\sqrt{1-\lambda}$，则通解形式是

$$y=C_1\mathrm{e}^{(1+\sqrt{1-\lambda})x}+C_2\mathrm{e}^{(1-\sqrt{1-\lambda})x}+x(Ax+B)\mathrm{e}^{ax};$$

若 $a\neq1+\sqrt{1-\lambda}$ 且 $a\neq1-\sqrt{1-\lambda}$，则通解形式为

$$y=C_1\mathrm{e}^{(1+\sqrt{1-\lambda})x}+C_2\mathrm{e}^{(1-\sqrt{1-\lambda})x}+(Ax+B)\mathrm{e}^{ax}.$$

(iii) 若 $\lambda>1$，则特征根是复数.

$$r_{1,2}=1\pm\sqrt{\lambda-1}\,i,$$

因为 a 是实数，所以通解形式

$$y=\mathrm{e}^x(C_1\cos\sqrt{\lambda-1}x+C_2\sin\sqrt{\lambda-1}x)+(Ax+B)\mathrm{e}^{ax}.$$

10. **解** $y_2 - y_1 = x^2, y_3 - y_1 = e^x$ 是对应齐次方程的解，且 e^x 与 x^2 线性无关. $y_1 = 3$ 是原方程一个特解. 所以原方程通解为

$$y = C_1x^2 + C_2e^x + 3.$$

对 y 求一阶，二阶导数，并从 y, y', y'' 中消去 C_1, C_2

$$\begin{cases} y = C_1x^2 + C_2e^x + 3, \\ y' = 2C_1x + C_2e^x, \\ y'' = 2C_1 + C_2e^x, \end{cases}$$

得
$$\frac{y'' - y'}{2 - 2x} = C_1 = \frac{y' - y + 3}{2x - x^2},$$

于是所求方程

$$(2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + 2(1 - x)y = 6(1 - x).$$

注 这是线性非齐次二阶(非常系数)方程.

11. **解法一** 已知方程特解改写为

$$y = e^{2x} + e^x + xe^x.$$

因为对应齐次方程的解是 e^{rx} 型，故 e^{2x} 是对应齐次方程的解.

xe^x 或 $(x + 1)e^x$ 是原非齐次方程的解，故 e^x 也是对应齐次方程的解，所以特征根为 $r_1 = 2, r_2 = 1$，特征方程为

$$(r - 2)(r - 1) = r^2 - 3r + 2 = 0,$$

于是
$$a = -3, \quad b = 2.$$

将 $y^* = xe^x$ 代入

$$y'' - 3y' + 2y = Ce^x,$$

得
$$(x + 2)e^x - 3(x + 1)e^x + 2xe^x = Ce^x.$$

解得 $C = -1$. 所以原方程为

$$y'' - 3y' + 2y = -e^x,$$

其通解为
$$y = C_1e^{2x} + C_2e^x + xe^x.$$

解法二 将 $y = e^{2x} + (x + 1)e^x$ 代入原方程得

$$(4 + 2a + b)e^{2x} + (3 + 2a + b)e^x + (1 + a + b)xe^x = Ce^x,$$

$$\begin{cases} 4 + 2a + b = 0, \\ 3 + 2a + b = c, \\ 1 + a + b = 0, \end{cases} \tag{*}$$

解(*)得
$$a = -3, \quad b = 2, \quad c = -1.$$

于是原方程

$$y'' - 3y' + 2y = -e^x,$$

其通解为
$$y = C_1e^{2x} + C_2e^x + xe^x.$$

12. **解** 因为
$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)}. \qquad (*)$$
对(*)两边对 x 求导,得
$$y''(x) = \frac{-(x'(y))'_x}{[x'(y)]^2} = \frac{-x''(y)\cdot y'(x)}{(x'(y))^2} = -\frac{x''(y)}{(x'(y))^3},$$
代入原方程
$$-\frac{x''(y)}{(x'(y))^3} + (x + e^{2y})\frac{1}{(x'(y))^3} = 0,$$
即
$$x''(y) - x = e^{2y}.$$
这是二阶线性常系数非齐次方程,其通解为
$$x = C_1e^y + C_2e^{-y} + \frac{1}{3}e^{2y}.$$

13. **解** 由
$$f(x) = \sin x - \int_0^x (x - t)f(t)\mathrm{d}t$$
$$= \sin x - x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t + \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t. \qquad (*)$$
对(*)两边取导
$$f'(x) = \cos x - \int_0^x f(t)\mathrm{d}t. \qquad (**)$$
对(**)两边再求导
$$f''(x) + f(x) = -\sin x. \qquad (***)$$
由(*),(**)可知,有 $f(0) = 0, f'(0) = 1$.(***)相应齐次方程通解是
$$Y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x,$$
非齐次方程特解可设
$$y^*(x) = x(A\cos x + B\sin x),$$
代入可得
$$A = \frac{1}{2}, \quad B = 0.$$
于是
$$y^*(x) = \frac{x}{2}\cos x,$$
所以非齐次方程通解为
$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{2}\cos x.$$
由 $f(0) = 0, f'(0) = 1$ 定出 $C_1 = 0, C_2 = \frac{1}{2}$.故所求

$$f(x)=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x.$$

14. **解** 由全微分方程充要条件

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

有
$$x^2+2xy-f(x)=f''(x)+2xy,$$
即
$$f''(x)+f(x)=x^2,$$
其通解为
$$f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x+x^2-2.$$
由 $f(0)=0,f'(0)=1$ 可得
$$C_1=2,\quad C_2=1.$$
从而
$$f(x)=2\cos x+\sin x+x^2-2.$$
于是原方程为
$$[xy^2-(2\cos x+\sin x)y+2y]\mathrm{d}x$$
$$+(-2\sin x+\cos x+2x+x^2y)\mathrm{d}y=0.$$
解此全微分方程：取起点(0,0)，则其通解为
$$\int_0^x 0\mathrm{d}x+\int_0^y(-2\sin x+\cos x+2x+x^2y)\mathrm{d}y=C,$$
即
$$-2y\sin x+y\cos x+2xy+\frac{x^2y^2}{2}=C.$$

15. **解** (1) 原方程的通解为
$$y(x)=\mathrm{e}^{-ax}\left[\int f(x)\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x+C\right],$$
用 $F(x)$ 表示 $f(x)\mathrm{e}^{ax}$ 的一个确定的原函数，于是通解可写成
$$y(x)=\mathrm{e}^{-ax}[F(x)+C].$$
由 $y(0)=0$，得 $C=F(0)$. 故
$$y(x)=\mathrm{e}^{-ax}[F(x)-F(0)].$$
再由
$$F(x)-F(0)=\int_0^x f(x)\mathrm{e}^{ax}\mathrm{d}x,$$
得到满足初始条件 $y(0)=0$ 的特解为
$$y(x)=\mathrm{e}^{-ax}\int_0^x f(t)\mathrm{e}^{at}\mathrm{d}t. \tag{*}$$

(2) 由(*)式
$$|y(x)|\leqslant \mathrm{e}^{-ax}\int_0^x|f(t)|\mathrm{e}^{at}\mathrm{d}t\quad(x\geqslant 0)$$
$$\leqslant \mathrm{e}^{-ax}k\int_0^x\mathrm{e}^{at}\mathrm{d}t=\frac{k}{a}\mathrm{e}^{-ax}(\mathrm{e}^{ax}-1)$$

$$= \frac{k}{a}(1 - e^{-ax}).$$

16. **解** (1) 因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{2(n+1)}}{[2(n+1)]!} \Big/ \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} = 0,$$

所以 $R = +\infty$,故知对任意 x 收敛,即收敛域为$(-\infty, +\infty)$.

(2) 设 $y(x) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$,则

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

$$y'' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

代入方程得

$$y'' - y = -1,$$

所以级数满足方程.

(3) 由级数的和函数 $y(x), y'(x)$ 可知

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 0,$$

问题转化为求$\begin{cases} y'' - y = -1, \\ y(0) = 2, y'(0) = 0 \end{cases}$的特解.

特解方程 $\quad r^2 - 1 = 0, \quad r = \pm 1.$

齐次方程通解为 $\quad Y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$

又设该方程特解为 $y^* = A$,显然 $y^* = 1$.所以微分方程通解

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + 1,$$

由 $$y(0) = 2, \quad y'(0) = 0,$$

得 $$C_1 = C_2 = \frac{1}{2}.$$

所以 $$y(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + 1,$$

$$\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + 1 = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

$$x \in (-\infty, +\infty).$$

17. **证** 微分方程的特征方程为

$$r^2 + 1 = 0, \quad 得\ r = \pm i.$$

故对应齐次方程通解为

$$Y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

只要证明

$$y^*(x)=\int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$$

$$=\sin x\int_0^x f(t)\cos t\mathrm{d}t-\cos x\int_0^x f(t)\sin t\mathrm{d}t$$

是原方程一个特解.因为

$$y^{*\prime}(x)=\cos x\int_0^x f(t)\cos t\mathrm{d}t+\sin x\int_0^x f(t)\sin t\mathrm{d}t,$$

$$y^{*\prime\prime}(x)=-\sin x\int_0^x f(t)\cos t\mathrm{d}t+\cos x\int_0^x f(t)\sin t\mathrm{d}t+f(x).$$

代入原方程,有

$$y^{*\prime\prime}+y^{*\prime}=f(x),$$

所以 $y^*(x)$ 是原方程一个特解.所以

$y=C_1\cos x+C_2\sin x+\int_0^x f(t)\sin(x-t)\mathrm{d}t$ 是原方程通解.

18. **解** 令 $r=\sqrt{x^2+y^2}$,则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{x^2}{r^2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}-\frac{x^2}{r^3}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r},$$

同理

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{y^2}{r^2}\cdot\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}-\frac{y^2}{r^3}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r},$$

代入原方程得

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}r^2}+u=r^2. \tag{$*$}$$

$(*)$ 所对应齐次方程通解为

$$u=C_1\cos r+C_2\sin r.$$

$(*)$ 的特解形式 $u^*(r)=ar^2+br+c$ 代入 $(*)$ 得

$$a=1,\quad b=0,\quad c=-2.$$

所以 $(*)$ 通解为

$$u=C_1\cos r+C_2\sin r+r^2-2,$$

即

$$u=C_1\cos\sqrt{x^2+y^2}+C_2\sin\sqrt{x^2+y^2}+(x^2+y^2)-2.$$

19. **解** 由已知条件有

$$\pi\int_1^t f^2(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}[t^2f(t)-f(1)]. \tag{$*$}$$

对 $(*)$ 两边对 t 求导

$$3f^2(t) = 2tf(t) + t^2 f'(t),$$

即 $f(x)$ 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (**)$$

$(**)$ 是齐次方程,令 $u = \frac{y}{x}$ 可求得通解为

$$y = x + Cx^3 y.$$

再由已知条件

$$y(2) = \frac{2}{9},$$

得
$$y = \frac{x}{1 + x^3}.$$

20. **解** 曲边扇形的面积公式为

$$S = \frac{1}{2}\int_0^\theta r^2(\theta)\mathrm{d}\theta,$$

又弧微分
$$\mathrm{d}S = \sqrt{r^2(\theta) + (r'(\theta))^2}\mathrm{d}\theta,$$

由题设有

$$\frac{1}{2}\int_0^\theta r^2(\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^\theta \sqrt{r^2(\theta) + (r'(\theta))^2}\mathrm{d}\theta.$$

上式两边对 θ 求导(积分上限)

$$r^2(\theta) = \sqrt{r^2(\theta) + (r'(\theta))^2},$$

所以 r 满足方程

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = \pm\sqrt{r^4 - r^2} = \pm r\sqrt{r^2 - 1},$$

即
$$\frac{\mathrm{d}r}{r\sqrt{r^2 - 1}} = \pm\,\mathrm{d}\theta,$$

两边积分
$$\int\frac{\mathrm{d}r}{r\sqrt{r^2 - 1}} = \int\frac{\mathrm{d}r}{r^2\sqrt{1 - \frac{1}{r^2}}} = -\arcsin\frac{1}{r} = \pm\theta + C.$$

由 $r(0) = 2$,得 $C = -\frac{\pi}{6}$,所以曲线 L 的方程为

$$r\sin\left(\frac{\pi}{6} \pm \theta\right) = 1.$$

21. **解** (1) 由通解公式

$$y(x) = \mathrm{e}^{-\int \sin x\mathrm{d}x}\left[\int \varphi(x)\mathrm{e}^{\cos x}\cdot\mathrm{e}^{\int \sin x\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C\right] = \mathrm{e}^{\cos x}\left[\int \varphi(x)\mathrm{d}x + C\right].$$

引入函数 $\Phi(x)=\int_0^x\varphi(t)\mathrm{d}t$，从而

$$\Phi(0)=0,\quad \Phi(2\pi)=a,$$

并且通解 $y(x)$ 可写成

$$y(x)=\mathrm{e}^{\cos x}[\Phi(x)+C].$$

(2) $y(x)$ 以 2π 为周期 $\Leftrightarrow y(x+2\pi)-y(x)=0$，而

$$\begin{aligned}y(x+2\pi)-y(x)&=\mathrm{e}^{\cos x}[\Phi(x+2\pi)+C]-\mathrm{e}^{\cos x}[\Phi(x)+C]\\&=\mathrm{e}^{\cos x}[\Phi(x+2\pi)-\Phi(x)]\\&=\mathrm{e}^{\cos x}\left[\int_0^{x+2\pi}\varphi(t)\mathrm{d}t-\int_0^x\varphi(t)\mathrm{d}t\right]\\&=\mathrm{e}^{\cos x}\left[\int_0^{2\pi}\varphi(t)\mathrm{d}t\right]=a\mathrm{e}^{\cos x}.\end{aligned}$$

所以 $y(x)$ 以 2π 为周期 $\Leftrightarrow a=0$.

22. **解**　先求出 Γ 在点 $M(x,y)$ 处的切线方程

$$Y-y(x)=y'(x)(X-x),\tag{$*$}$$

其中 (X,Y) 是切线上点的坐标，在 $(*)$ 中令 $Y=0$，得 x 轴上的截距

$$X=x-\frac{y(x)}{y'(x)}.$$

又弧段 $\widehat{AM}=\int_0^x\sqrt{1+y'^2(t)}\mathrm{d}t$，由题意

$$\int_0^x\sqrt{1+y'^2(t)}\mathrm{d}t-\left(x-\frac{y}{y'}\right)=\sqrt{2}-1.\tag{$**$}$$

$(**)$ 两边对 x 求导，有

$$\sqrt{1+y'^2}=1-\frac{y'^2-yy''}{y'^2},$$

即

$$y'^2\sqrt{1+y'^2}=yy''.$$

由条件及 $(**)$ 式得

$$y(0)=\sqrt{2}-1,\quad y'(0)=1.$$

因此得初值问题

$$\begin{cases}y'^2\sqrt{1+y'^2}=yy'',\\y(0)=\sqrt{2}-1,y'(0)=1.\end{cases}\tag{$***$}$$

求解 $(***)$，令 $p=y'$ 得

$$p^2\sqrt{1+p^2}=yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y},$$

分离变量
$$\frac{\mathrm{d}p}{p\sqrt{1+p^2}}=\frac{\mathrm{d}y}{y},$$
两边积分
$$-\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{p}\right)}{\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}}=\int\frac{\mathrm{d}y}{y},$$
得
$$\ln\left(\frac{1}{p}+\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}\right)=-\ln y+C_1.$$
由 $y=\sqrt{2}-1$ 时，$p=1$ 得 $C_1=0$，所以
$$\frac{1}{p}+\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}=\frac{1}{y},$$
即
$$\sqrt{1+\frac{1}{p^2}}-\frac{1}{p}=y.$$
由 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{p}$ 得
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}-y\right),$$
再积分得
$$x=\frac{1}{2}\ln y-\frac{1}{4}y^2+C,$$
由 $y(0)=\sqrt{2}-1$ 得
$$C=\frac{1}{4}(\sqrt{2}-1)^2-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}-1),$$
所以
$$x=\frac{1}{2}\ln y-\frac{1}{4}y^2+\frac{1}{4}(\sqrt{2}-1)^2-\frac{1}{2}\ln(\sqrt{2}-1)$$
是所求曲线 Γ 的方程.

23. **解** 由 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ 及连续的混合偏导数与求导次序无关可得
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y},$$
所以
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0. \tag{$*$}$$
因 $u=f(r)$，由(*)式及复合函数求导法可导出 $f(r)$ 满足的常微分方程
$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}f'(r),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(r)\frac{x^2}{r^2}+f'(r)\left[\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\right].$$
同理
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(r)\frac{y^2}{r^2}+f'(r)\left[\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3}\right].$$

得到
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f''(r)+\frac{1}{r}f'(r)=0. \qquad (**)$$

$(**)$ 实际上是一阶线性方程(把 $f'(r)$ 看作未知函数),两边乘积分因子 r 得
$$rf''(r)+f'(r)=0,$$
即
$$(rf'(r))'=0,\quad rf'(r)=C_1,\quad f(r)=C_1\ln r+C_2.$$
所以
$$u=C_1\ln r+C_2.$$
为求 $v(x,y)$,由条件
$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}=C_1\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{x}{r}=\frac{C_1x}{x^2+y^2},$$
对 y 积分得
$$v=C_1\int\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y+C_2(x)=C_1\arctan\frac{y}{x}+C_2(x),$$
再由
$$\frac{\partial v}{\partial x}=C_1\frac{-y}{x^2+y^2}+C_2'(x)=-\frac{\partial u}{\partial y}=C_1\frac{(-y)}{r^2}=\frac{-C_1y}{x^2+y^2},$$
得到
$$C_2'(x)=0,\quad C_2(x)=C_2,$$
有
$$v=C_1\arctan\frac{y}{x}+C_2.$$

模拟试题及参考答案(高等数学部分)

◆ 数学一　模拟试题一

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $f(x)$ 具有一阶连续导数,且 $f(0)=0, f'(0)=1$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^{x}f(t)\mathrm{d}t\right)^2}=$ ______.

(2) 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''-2y'+5y=\mathrm{e}^x\cos^2 x$ 的特解形式为 $y^*=$ ______.

(3) 已知 $f(x)$ 是周期为 $2\mathrm{e}$ 的函数,$S(x)$ 是 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数,如

$$f(x)=\begin{cases} x^{\frac{1}{2-\ln x}}, & 0<x<\mathrm{e},\\ x, & \mathrm{e}\leqslant x\leqslant 0,\end{cases}$$

则 $S(x)$ 在 $[-\mathrm{e},\mathrm{e}]$ 上的分段函数表达式为 $S(x)=\begin{cases} \\ \\ \text{\_\_\_\_\_\_}\end{cases}$.

(4) 设 $f(x^2-1)=\ln\dfrac{x^2}{x^2-2}$ 且 $f(\varphi(x))=\ln x$,则 $\int\varphi(x)\mathrm{d}x=$ ______.

(5) 设 L 为正向闭曲线,$|x|+|y|=1$,则 $\oint_L\dfrac{(x+y^2)\mathrm{d}y-(y+x^2)\mathrm{d}x}{x^2+y^2+2|xy|}=$ ______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分,每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 当 $x\to 0^+$ 时,下列 4 个无穷小量中,哪一个是比其他三个更高阶的无穷小量?(　　)

(A) $x^3+\ln(1-x^3)$;

(B) $\int_0^{x^2}\sin t^2\mathrm{d}t$;

(C) $\cos\sqrt{x^3}-\mathrm{e}^{-\frac{x^3}{2}}$;

(D) $x - \sqrt[3]{\sin(x^3)}$.

(2) 设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续且 $g(x) < f(x) < m$，则由曲线 $y = f(x)$, $y = g(x)$, 直线 $x = a$, $x = b$ 围成的平面图形绕直线 $y = m$ 旋转而成的旋转体体积 $V =$ (　　).

(A) $\int_a^b \pi[2m - f(x) + g(x)][f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$;

(B) $\int_a^b \pi[2m - f(x) - g(x)][f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$;

(C) $\int_a^b \pi[m - f(x) + g(x)][f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$;

(D) $\int_a^b \pi[m - f(x) - g(x)][f(x) - g(x)]\mathrm{d}x$.

(3) 设 S 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的上半部分的上侧，则下列式子错误的是(　　).

(A) $\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$;　　(B) $\iint\limits_S y\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$;

(C) $\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$;　　(D) $\iint\limits_S y^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0$.

(4) 函数 $f(x,y) = \sqrt{|(x-1)(y-1)|}$ 在 $(1,1)$ 处(　　).

(A) 偏导数存在但不连续;　　(B) 连续但偏导数不存在;

(C) 连续，偏导数存在但不可微;　　(D) 具有连续的偏导数.

(5) 设函数 $y = f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有界且可导，则(　　).

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$;

(B) 当 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = 0$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x) = 0$;

(C) 当 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to0^+} f'(x) = 0$;

(D) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ 存在时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$;

三、(本题满分 6 分)

已知 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin6x - (\tan x)f(x)}{x^3} = 0$，求 $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{6 - f(x)}{x^2}$.

四、(本题满分 7 分)

设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0) = 0$，并且对任意 $x \in (0,1)$，有 $f(x) \neq 0$. 证明对任意的自然数 m 与 n，至少存在一点 $\xi \in (0,1)$，使得

$$\frac{nf'(\xi)}{\xi} = \frac{mf'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

五、(本题满分 7 分)

已知二元函数 $f(x,y)$ 满足

$$f(x, y) = y + 2\int_0^x f(x - t, y)\mathrm{d}t,$$

$g(x, y)$ 满足

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = -1,$$

且 $g(0,0) = 0$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f\left(\dfrac{1}{n}, n\right)}{g(n,1)}\right]^n$.

六、(本题满分 7 分)

设 D_1 是由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $x = a, x = 2$ 及 $y = 0$ 所围成的平面区域;D_2 是由抛物线 $y = 2x^2$ 和直线 $y = 0, x = a$ 所围成的平面区域,其中 $0 < a < 2$.

(1) 试求 D_1 绕 x 轴旋转而成的旋转体体积 V_1;D_2 绕 y 轴旋转而成的旋转体体积 V_2;

(2) 问当 a 为何值时, $V_1 + V_2$ 取得最大值?试求此最大值.

七、(本题满分 7 分)

计算二重积分 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\max\{x^2, y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

八、(本题满分 7 分)

设 $u = u(x, y)$ 由方程组

$$u = f(x, y, z, t), \quad g(y, z, t) = 0, \quad h(z, t) = 0$$

所确定,其中 f, g, h 对各变量有连续的偏导数,且

$$\frac{\partial g}{\partial z}\cdot\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial h}{\partial z}\cdot\frac{\partial g}{\partial t} \neq 0,$$

求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

九、(本题满分 7 分)

计算曲线积分

$$\int_L \frac{(12xy + \mathrm{e}^y)\mathrm{d}x - (\cos y - x\mathrm{e}^y)\mathrm{d}y}{x^2 + y^2},$$

其中, L 为自 $A(0, -1)$ 沿曲线 $x = -\sqrt{1 - y^2}$ 到点 $B(0,1)$ 的曲线段.

十、(本题满分 8 分)

设 $P > 0$,讨论下列级数何时发散?何时绝对收敛?何时条件收敛?

(1) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n$, 其中 $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^p} - \dfrac{1}{n^{2p}} + o\left(\dfrac{1}{n^{2p}}\right) \ (n \to \infty)$, $p > 0$ 为常数.

(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^p + (-1)^n}$, 其中, $p > 0$ 为常数.

十一、(本题满分 7 分)

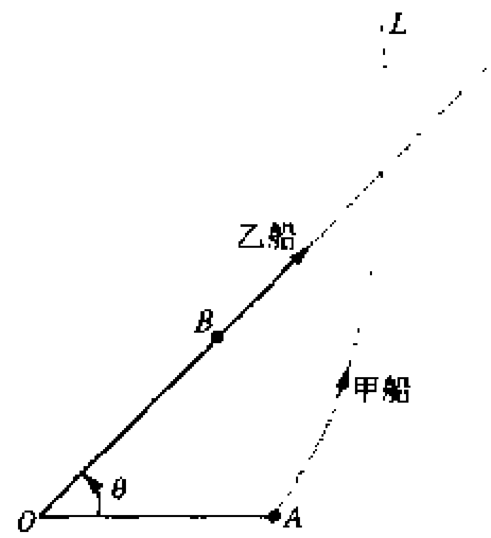
计算曲面积分：$\iint\limits_S \dfrac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{|\boldsymbol{r}|^2}\mathrm{d}S$. 其中 $\boldsymbol{r}=\{x,y,z\}$, S 是球面

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \quad (a^2+b^2+c^2\neq R^2>0)$$

的外侧，$\boldsymbol{n}$ 是 S 的外侧的单位法向量.

十二、(本题满分 7 分)

如图我缉私船(甲船)奉命追击走私船(乙船). 已知我船与走私船的速率(即速度的大小)比为 2 : 1，且当我船赶到距事发地点 O 点 a 海里处的 A 点时，走私船所在的位置 B 也与 O 点相距 a 海里(即 $OA=OB=a$). 由于天降大雾，我船赶到 A 点时，看不到走私船，加上无法事先知道走私船的逃跑方向(但假设走私船总是沿着一个方向直线逃跑). 请你为我船设计一条追击路线 L(如图)，使我船沿此路线追击，一定能追上走私船(即对每一个 θ 值，当我船到达该 θ 值对应的射线时，正好与沿该射线逃跑的走私船相遇).



数学一　模拟试题一解答

一、填空题

(1) 2.

分析　由 $f(0)=0, f'(0)=1$, 当 $x\to 0$ 时, $f(x)\sim x, f(x^2)\sim x^2, \int_0^x f(t)\mathrm{d}t\sim \dfrac{x^2}{2}$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2xf(x^2)}{2f(x)\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2}=2.$$

(2) $axe^x\cos 2x+bxe^x\sin 2x+Ce^x$.

提示　因为 $\lambda^2-2\lambda+5=0$ 的两根为 $\lambda=1\pm 2\mathrm{i}$,

$$e^x\cos^2 x=\frac{1}{2}e^x\cos 2x+\frac{1}{2}e^x.$$

(3) $S(x)=\begin{cases} x^{\frac{1}{2-\ln x}}, & 0<x<\mathrm{e}, \\ x, & -\mathrm{e}<x<0, \\ \dfrac{1}{2\mathrm{e}}, & 0, \\ 0, & x=\pm\mathrm{e}. \end{cases}$

分析　因为 $f(x)$ 连续时，$S(x)=f(x)$，否则 $S(x)=\frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)]$，由于

$$f(0-0)=0,\quad f(0+0)=\mathrm{e}^{-1}.$$

又
$$f(\mathrm{e}-0)=\mathrm{e},\quad f(\mathrm{e}+0)=f(-\mathrm{e}+0)=-\mathrm{e}.$$

(4) $x+2\ln(x-1)+C$.

分析　由

$$f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}=\ln\frac{(x^2-1)+1}{(x^2-1)-1},$$

得
$$f(\varphi(x))=\ln\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=\ln x,$$

则
$$\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=x,$$

即
$$\varphi(x)=\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1},$$

故
$$\int\varphi(x)\mathrm{d}x=\int\left(1+\frac{2}{x-1}\right)\mathrm{d}x=x+2\ln(x-1)+C.$$

(5) 4.

分析

$$\text{原式}=\oint_L(x+y^2)\mathrm{d}y-(y+x^2)\mathrm{d}x=\iint_D 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4.$$

二、选择题

(1) (D).

提示　$x^3+\ln(1-x^3)=\frac{1}{2}x^6+o(x^6)\sim\frac{1}{2}x^6$,　(6 阶).

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\sin t^2\mathrm{d}t}{x^n}=\lim_{x\to0}\frac{2x\sin x^4}{nx^{n-1}},$$

所以 $n=6$,(6 阶).

$$\cos\sqrt{x^3}-\mathrm{e}^{\frac{x^3}{2}}=-\frac{1}{12}x^6+o(x^6),\quad(6\text{ 阶}).$$

$$x-\sqrt[3]{\sin(x^3)}=\frac{x^3-\sin x^3}{x^2+x\sqrt[3]{\sin x^3}+(\sqrt[3]{\sin x^3})^2}\sim\frac{1}{3x^2}\left(\frac{1}{3!}x^9+o(x^9)\right),$$

所以 7 阶.

(2) (B).

提示 $V=\int_a^b\pi[(m-g(x))^2-(m-f(x))^2]\mathrm{d}x$

$$=\pi\int_a^b(2m-f(x)-g(x))(f(x)-g(x))\mathrm{d}x.$$

(3) (C).

分析 利用二型曲面积分的奇偶对称性：如曲面 S(包括侧)关于 $x=0$ 对称，被积函数 $f(x,y,z)$ 关于 x 是偶(或奇)函数，则 $\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$ (或 $=2\iint\limits_{S_半}f(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$)，其中

$$S_半=S\cap x\geqslant 0\quad(\text{或 } S\cap x\leqslant 0).$$

注意 ① 二型积分的奇偶对称性与重积分和一型积分的奇偶对称性正好相反. ② 二型积分的奇偶对称性只能一项一项地用，即 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 项用关于 $x=0$ 对称，$\mathrm{d}z\mathrm{d}x$ 项用关于 $y=0$ 对称，$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 项用 $z=0$ 对称，不能同时对三项一起用，而且 $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 项只能用关于 $x=0$ 对称，不能用关于 $y=0$ 或 $z=0$ 对称.

(4) (C).

分析 显然 $f(x,y)$ 在(1,1) 处连续，偏导数存在. 因为

$$\lim_{\rho\to0}\frac{f(x,y)-f(1,1)}{\rho}=\lim_{\substack{x\to1\\y=x\to1}}\frac{\sqrt{(x-1)^2}}{\sqrt{2}\,|x-1|}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

所以 $f(x,y)$ 在(1,1) 处不可微.

(5) (D).

分析 用反证法，若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=A\neq0$，不妨设 $A>0$，所以存在 $X_0>0$，当 $x>X_0$ 时有 $f'(x)>\frac{A}{2}$. 故当 $x>X_0$ 时有

$$f(x)=\int_{X_0}^x f'(t)\mathrm{d}t+f(X_0)>\int_{X_0}^x\frac{A}{2}\mathrm{d}t+f(X_0)=\frac{A}{2}(x-X_0)+f(X_0),$$

令 $x\to+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，与 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 有界矛盾.

三、解 显然

$$\lim_{x\to0}\frac{\frac{\sin6x}{\tan x}-f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin6x-\tan xf(x)}{x^3}=0,$$

所以

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{6-f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 6x}{\tan x}-f(x)}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{6-\frac{\sin 6x}{\tan x}}{x^2}$$

$$= 0 + \lim_{x\to 0}\frac{6\tan x - \sin 6x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{6\sec^2 x - 6\cos 6x}{3x^2}$$

$$= \frac{6}{3}\cdot\frac{1}{\cos^2 0}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 6x\cos^2 x}{x^2}$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{-6\sin 6x\cos^2 x - \cos 6x\sin 2x}{x} = 38.$$

四、证 令 $F(x) = [f(x)]^n[f(1-x)]^m$,显然 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 可导,且 $F(0) = F(1) = 0$,所以存在 $\xi \in (0,1)$ 使 $F'(\xi) = 0$,即

$$n[f(\xi)]^{n-1}f'(\xi)[f(1-\xi)]^m - [f(\xi)]^n m[f(1-\xi)]^{m-1}f'(1-\xi) = 0,$$

因为 $f(\xi) \neq 0, f(1-\xi) \neq 0$,所以有

$$\frac{nf'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{mf'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

五、解 由

$$f(x,y) = y + 2\int_0^x f(x-t,y)\mathrm{d}t = y + 2\int_0^x f(u,y)\mathrm{d}u,$$

两边同时对 x 求导,得 $f'_x(x,y) = 2f(x,y)$,即有 $f(x,y) = C(y)\mathrm{e}^{2x}$,而 $f(0,y) = y$,因此 $C(y) = y$.故 $f(x,y) = y\mathrm{e}^{2x}$.

再由

$$\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = -1,$$

且 $g(0,0) = 0$ 易知有 $g(x,y) = x - y$.

于是

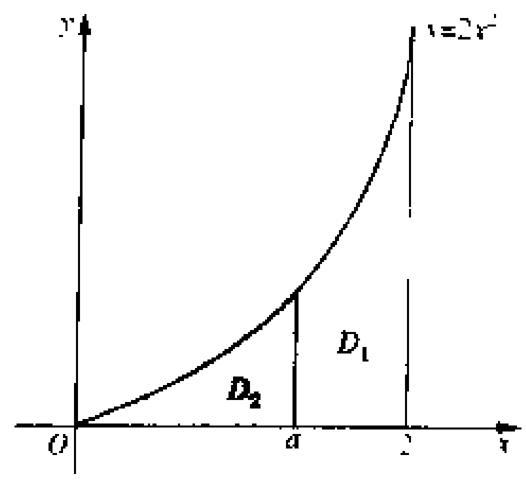
$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f\left(\frac{1}{n},n\right)}{g(n,1)}\right]^n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\mathrm{e}^{\frac{2}{n}}n}{n-1}\right]^n = \lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^2\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \mathrm{e}^3.$$

六、解 (1)

$$V_1 = \pi\int_a^2(2x^2)^2\mathrm{d}x = \frac{4\pi}{5}(32-a^5);$$

$$V_2 = \pi a^2\cdot 2a^2 - \pi\int_0^{2a^2}\frac{y}{2}\mathrm{d}y = 2\pi a^4 - \pi a^4 = \pi a^4.$$

(2) 设



$$V = V_1 + V_2 = \frac{4\pi}{5}(32 - a^5) + \pi a^4.$$

由 $$V' = 4\pi a^3(1 - a) = 0,$$
得区间 $(0,2)$ 内的惟一驻点 $a = 1$.

当 $0 < a < 1$ 时, $V' > 0$; 当 $a > 1$ 时, $V' < 0$. 因此 $a = 1$ 是极大值点即最大值点. 此时 $V_1 + V_2$ 取得最大值, 等于 $\frac{129}{5}\pi$.

七、解 设

$$D_1 = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x\},$$

$$D_2 = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, x \leqslant y \leqslant 1\},$$

则
$$\begin{aligned}\iint\limits_D e^{\max\{x^2,y^2\}}\,dx\,dy &= \iint\limits_{D_1} e^{\max\{x^2,y^2\}}\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} e^{\max\{x^2,y^2\}}\,dx\,dy \\ &= \iint\limits_{D_1} e^{x^2}\,dx\,dy + \iint\limits_{D_2} e^{y^2}\,dx\,dy \\ &= \int_0^1 dx\int_0^x e^{x^2}\,dy + \int_0^1 dy\int_0^y e^{y^2}\,dx \\ &= \int_0^1 x e^{x^2}\,dx + \int_0^1 y e^{y^2}\,dy = e - 1.\end{aligned}$$

八、解 因为共有5个变量, 3个方程, 所以有 $5 - 3 = 2$ 个自变量, 由题意选 x, y 为自变量, 因 $u = u(x,y)$, $z = z(x,y)$, $t = t(x,y)$, 对方程组对 x 求导(y 看作常数, u, z, t 是 x 的函数)有:

$$\begin{cases} u_x' = f_x' + f_z' \cdot z_x' + f_t' \cdot t_x', & (1) \\ g_z' \cdot z_x' + g_t' \cdot t_x' = 0, & (2) \\ h_z' \cdot z_x' + h_t' \cdot t_x' = 0, & (3) \end{cases}$$

由方程(2),(3) 再由克莱姆法则 $z_x' = 0$(注意由已知 $g_z' \cdot h_t' - h_z' \cdot g_t' \neq 0$), 同理 $t_x' = 0$ 代入(1) 中有 $\frac{\partial u}{\partial x} = f_x'$.

同理对方程组对 y 求导有

$$\begin{cases} u_y' = f_y' + f_z' \cdot z_y' + f_t' \cdot t_y', & (4) \\ g_y' + g_z' \cdot z_y' + g_t' \cdot t_y' = 0, & (5) \\ h_z' \cdot z_y' + h_t' \cdot t_y' = 0, & (6) \end{cases}$$

由(5),(6) 有

$$z_y' = \frac{-g_y' \cdot h_t'}{g_z' \cdot h_t' - h_z' \cdot g_t'}, \quad t_y' = \frac{g_y' \cdot h_z'}{g_z' \cdot h_t' - h_z' \cdot g_t'},$$

代入(4)中有

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f_y' + \frac{-g_y' \cdot h_t' \cdot f_z' + g_y' \cdot h_z' \cdot f_t'}{g_z'h_t' - h_z'g_t'}.$$

九、解 因为在 L 点 $x^2 + y^2 = (-\sqrt{1-y^2})^2 + y^2 = 1$,所以

$$原式 = \oint_{L+\overline{BA}} (12xy + e^y)dx - (\cos y - xe^y)dy + \int_{\overline{AB}} (12xy + e^y)dx - (\cos y - xe^y)dy$$

$$= -\iint_D [e^y - e^y - 12x]dxdy + \int_{-1}^{1} (-\cos y)dy$$

$$= 12\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta \int_0^1 r^2\cos\theta d\theta - 2\sin 1 = -8 - 2\sin 1.$$

其中 $\overline{BA}$ 是联结 $B(0,1)$ 和 $A(0,-1)$ 两点有向线段,或

$$原式 = \int_L d(e^y x - \sin y) + \int_L 12xydx = I_1 + I_2,$$

$$I_1 = [e^y x - \sin y]_{A(0,-1)}^{B(0,1)} = -2\sin 1,$$

$$I_2 = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 12 \cdot \cos t \cdot \sin t d\cos t = 12\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin^2 t d\sin t = -8,$$

所以原式 $= -8 - 2\sin 1$.

十、解 (1) 记

$$b_n = \frac{(-1)^n}{n^p}, \quad c_n = -\frac{1}{n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right) \quad (n \to \infty),$$

则 $a_n = b_n + c_n$.显然,$p > 1$ 时 $\sum b_n$ 绝对收敛,$0 < p \leqslant 1$ 时 $\sum b_n$ 条件收敛.

又因为 $\dfrac{c_n}{\frac{1}{n^{2p}}} \to -1$,所以 $\sum c_n$ 与 $\sum \dfrac{1}{n^{2p}}$ 同敛散.

即 $p > \dfrac{1}{2}$ 时 $\sum c_n$ 收敛且绝对收敛,$0 < p \leqslant \dfrac{1}{2}$ 时 $\sum c_n$ 发散.因此可知

$$\sum a_n = \sum (b_n + c_n)$$

当 $0 < p \leqslant \dfrac{1}{2}$ 时发散,当 $\dfrac{1}{2} < p \leqslant 1$ 时条件收敛,当 $p > 1$ 时绝对收敛.

(2) 因为

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^p + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^p}\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^p}\right)^{-1}$$

$$= \frac{(-1)^n}{n^p}\left[1 - \frac{(-1)^n}{n^p} + o\left(\frac{(-1)^n}{n^p}\right)\right]$$

$$= \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right),$$

所以$\sum u_n$的收敛性同(1).

十一、解 因为

$$|\boldsymbol{n}| = 1, \quad \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}\mathrm{d}S = \{\mathrm{d}y\mathrm{d}z, \mathrm{d}z\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\},$$

所以 $$\iint\limits_S \frac{\cos\langle \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\rangle}{|\boldsymbol{r}|^2}\mathrm{d}S = \iint\limits_S \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S}{|\boldsymbol{r}|^3|\boldsymbol{n}|} = \iint\limits_S \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}},$$

因此当 $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \neq 0$ 时,

$$P_x' + Q_y' + R_z' = \left(\frac{x}{r^3}\right)_x' + \left(\frac{y}{r^3}\right)_y' + \left(\frac{z}{r^3}\right)_z' = 0.$$

易见当 $a^2+b^2+c^2 > R^2$(即原点不在 S 所围的区域内)时,因为在 S 所围的闭区域 Ω 内 $r \neq 0$,所以

$$原式 \xlongequal{高斯} \iiint\limits_\Omega (P_x' + Q_y' + R_z')\mathrm{d}v = \iiint\limits_\Omega 0\mathrm{d}v = 0.$$

而当 $a^2+b^2+c^2 < R^2$(即原点在 S 所围区域内)时,在 S 内做一个小球面 S_1:

$$x^2+y^2+z^2 = \varepsilon^2(内侧),$$

则在 $S+S_1$ 所围区域 Ω_1 内 $r \neq 0$. 故而

$$原式 = \iint\limits_S = \iint\limits_{S+S_1} - \iint\limits_{S_1} \xlongequal{高斯} \iiint\limits_{\Omega_1} (P_x' + Q_y' + R_z')\mathrm{d}v - \iint\limits_{S_1}$$

$$= 0 - \iint\limits_{S_1} = -\iint\limits_{S_1} \frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

注意 在 S_1 上 $x^2+y^2+z^2 = \varepsilon^2$,且 S_1 是内侧,$\Omega_\varepsilon = x^2+y^2+z^2 \leqslant \varepsilon^2$. 所以

$$原式 = -\frac{1}{\varepsilon^3}\iint\limits_{S_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{高斯} -\frac{1}{\varepsilon^3}(-1)\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon} (x_x' + y_y' + z_z')\mathrm{d}v$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^3}3\cdot\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3 = 4\pi.$$

总之 $a^2+b^2+c^2 > R^2$ 时,原式 $= 0$;$a^2+b^2+c^2 < R^2$ 时,原式 $= 4\pi$.

十二、解 如题图,取 O 点为极点,OA 为极轴,建立极坐标系. 设 L 的极坐标方程为

$$r = r(\theta).$$

由题设在 L 上：$\int_0^\theta \mathrm{d}s : (r(\theta) - OB) = 2 : 1.$ $\quad(*)$

注意 $\mathrm{d}s = s_\theta' \mathrm{d}\theta$ 且

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 = (x_\theta'^2 + y_\theta'^2)(\mathrm{d}\theta)^2 = [(r\cos\theta)_\theta'^2 + (r\sin\theta)_\theta'^2](\mathrm{d}\theta)^2$$
$$= (r_\theta'^2 + r^2)(\mathrm{d}\theta)^2 \Rightarrow s_\theta'^2 = r_\theta'^2 + r^2,$$

再由$(*)$式及 $OB = a$，得

$$2(r(\theta) - a) = \int_0^\theta s_\theta' \mathrm{d}\theta \Rightarrow 2r_\theta' = s_\theta',$$

所以得到 $r = r(\theta)$ 满足的微分方程

$$(2r_\theta')^2 = r_\theta'^2 + r^2, \quad r(0) = a.$$

因为要向外追，所以 $r_\theta' > 0$. 又显然 $r > 0$，所以

$$r_\theta' = r/\sqrt{3} \Rightarrow r = c\mathrm{e}^{\theta/\sqrt{3}},$$

再由 $r(0) = a \Rightarrow c = a$. 故 L 的极坐标方程为 $r = a\mathrm{e}^{\theta/\sqrt{3}}$.

数学一　模拟试题二

一、填空题(本大题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分)

(1) $\int_{-1}^{1} x(1 + x^{2003})(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x =$ ________.

(2) 已知函数 $y = y(x)$ 由方程 $\mathrm{e}^y + 6xy + x^2 - 1 = 0$ 确定，则 $y''(0) =$ ________.

(3) 微分方程 $yy'' + y'^2 = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 1, y'|_{x=0} = \frac{1}{2}$ 的特解是________.

(4) 设周期函数 $f(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$内可导，周期为 4，又 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = -1$，则曲线 $y = f(x)$ 在点$(5, f(5))$处的切线的斜率为________.

(5) 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant x + y + 1\}$，则 $\iint\limits_D (x + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ ________.

二、选择题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分. 每小题给出四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上为连续函数，$F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数，则当(　　).

(A) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=+\infty$ 时，则必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$；

(B) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ 时，则必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=+\infty$；

(C) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ 时，则必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=-\infty$；

(D) $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=-\infty$ 时，则必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

(2) 对于下列四个数项级数

① $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$；　　② $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n n!}{n^n}$；

③ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\ln n)\sin\sqrt{n}}{\sqrt{n^3+n-1}}$；　　④ $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin\left[\left(n+\dfrac{1}{\ln n}\right)\pi\right]$.

发散的数项级数有(　　).

(A) 1 个；　　(B) 2 个；　　(C) 3 个；　　(D) 4 个.

(3) 直线 $l:\begin{cases}x+3y+2z+1=0,\\2x-y-10z+3=0,\end{cases}$ 平面 $\pi: 4x-2y+z-2=0$，则(　　).

(A) $l\parallel\pi$ 但不在 π 上；　　(B) l 垂直 π；

(C) l 与 π 斜交；　　(D) l 在 π 上.

(4) 设 $f(x,y,z)$ 是连续函数

$$I(R)=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

则 $R\to0$ 时，下面说法正确的是(　　).

(A) $I(R)$ 是 R 的一阶无穷小；　　(B) $I(R)$ 是 R 的二阶无穷小；

(C) $I(R)$ 是 R 的三阶无穷小；　　(D) $I(R)$ 至少是 R 的三阶无穷小.

(5) 设 $f(x,y)$ 为区域 D 内的函数，则下列各种说法中不正确的是(　　).

(A) 若在 D，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$，则 $f(x,y)\equiv$ 常数；

(B) 若在 D 的任何一点处沿两个不共线方向的方向导数都为零，则 $f(x,y)\equiv$ 常数；

(C) 若在 D，$\mathrm{d}f(x,y)\equiv0$，则 $f(x,y)\equiv$ 常数；

(D) 若在 D，$\dfrac{\partial f}{\partial x}x+\dfrac{\partial f}{\partial y}y\equiv0$，则 $f(x,y)\equiv$ 常数.

三、(本题满分 5 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}$.

四、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有一阶连续导数，且 $f(0)\neq 0, f'(0)\neq 0$，若 $af(h)+bf(2h)-f(0)$ 在 $h\to 0$ 时是比 h 高阶的无穷小，试确定 a,b 的值.

五、(本题满分 8 分)

设 $\varphi(x)=\int_0^{\sin x} f(tx^2)\mathrm{d}t$，其中 $f(x)$ 为连续函数.

(1) 求 $\varphi'(x)$. (2) 讨论 $\varphi'(x)$ 的连续性.

六、(本题满分 7 分)

设闭区域 D：$x^2+y^2\leqslant y, x\geqslant 0$. $f(x,y)$ 为 D 上的连续函数，且

$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{8}{\pi}\iint_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

求 $f(x,y)$.

七、(本题满分 7 分)

设 $u=f(x,z)$，而 $z=z(x,y)$ 是由方程 $z=x+y\varphi(z)$ 所确定的函数，其中 $f(x,z)$ 具有连续偏导数，而 φ 具有连续导数，求 $\mathrm{d}u$.

八、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数，L 是上半平面 $(y>0)$ 内的有向分段光滑曲线，其起点为 (a,b)，终点为 (c,d). 记

$$I=\int_L \frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y,$$

(1) 证明曲线积分 I 与路径 L 无关；

(2) 当 $ab=cd$ 时，求 I 的值.

九、(本题满分 7 分)

计算曲面积分

$$I=\oiint_\Sigma x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left[\frac{1}{z}f\left(\frac{y}{z}\right)+y^3\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left[\frac{1}{y}f\left(\frac{y}{z}\right)+z^3\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中，$f(u)$ 具有连续导数，Σ 为锥面 $x=\sqrt{y^2+z^2}$ 和球面

$$x^2+y^2+z^2=1,\quad x^2+y^2+z^2=4$$

所围立体表面的外侧.

十、(本题满分 7 分)

设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^{x^2}(2+t^2)\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{x^2}, & x\neq 0,\\ A, & x=0,\end{cases}$ 确定 A 使 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内任意阶可导，并求 $f^{(8)}(0), f^{(9)}(0)$.

十一、(本题满分 7 分)

设一元函数 $u = f(r)$,当 $0 < r < +\infty$ 时有连续的二阶导数,且 $f(1) = 0, f'(1) = 1$,又 $u = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ 满足方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

试求 $f(r)$ 的表达式.

十二、(本题满分 8 分)

设有一小山,取它的底面所在的平面为 Oxy 坐标面,其底部所占的区域为

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - xy \leqslant 75\},$$

小山的高度函数为 $h(x, y) = 75 - x^2 - y^2 + xy$.

(1) 设 $M(x_0, y_0)$ 为区域 D 上一点,问 $h(x, y)$ 在该点沿平面上什么方向的方向导数最大?若记此方向导数的最大值为 $g(x_0, y_0)$,试写出 $g(x_0, y_0)$ 的表达式.

(2) 现欲利用此小山开展攀岩活动,为此需要在山脚寻找一上山坡度最大的点作为攀登的起点.也就是说,要在 D 的边界线 $x^2 + y^2 - xy = 75$ 上找出使(1)中的 $g(x, y)$ 达到最大值的点.试确定攀登起点的位置.

数学一　模拟试题二解答

一、填空题

(1) $4e^{-1}$.

分析　由于 $x(e^x - e^{-x})$ 为偶函数,$x^{2004}(e^x - e^{-x})$ 为奇函数,且积分区间关于原点对称,所以

$$原式 = 2\int_0^1 x(e^x - e^{-x})dx = 2\int_0^1 x d(e^x + e^{-x})dx$$

$$= 2\left[x(e^x + e^{-x})\Big|_0^1 - \int_0^1 (e^x + e^{-x})dx\right] = 4e^{-1}.$$

(2) -2.

分析　由原式 $y(0) = 0$,原式两边对 x 求导有,

$$y'e^y + 6y + 6xy' + 2x = 0,$$

由 $y(0) = 0$,有 $y'(0) = 0$.再两边对 x 求导有,$y''e^y + (y')^2e^y + 12y' + 6xy'' + 2 = 0$,由 $y(0) = 0, y'(0) = 0$ 代入可得 $y''(0) = -2$.

(3) $y=\sqrt{x+1}$ 或 $y^2=x+1$.

分析 令 $y'=p$, $y''(x)=\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$ 代入原方程,

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}+p^2=0,\quad p=\frac{1}{C_1y},$$

由 $y(0)=1$, $y'(0)=\dfrac{1}{2}$ 得 $C_1=\dfrac{1}{2}$,所以$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{y}$,得 $y^2=x+C_2$,由 $y(0)=1$ 得 $C_2=1$,所以原方程解为 $y^2=x+1$.

(4) -2.

分析 由 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$内可导,且 $f(x)=f(x+4)$,两边对 x 求导,则 $f'(x)=f'(x+4)$,故 $f'(5)=f'(1)$.又因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\frac{1}{2}f'(1)=-1,$$

则 $f'(1)=-2$,故 $y=f(x)$ 在$(5,f(5))$处的切线斜率为 $f'(5)=-2$.

(5) $\dfrac{3}{2}\pi$.

分析 积分区域 D 实际上是圆域$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2\leqslant\dfrac{3}{2}$.由形心公式知:

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{S_D},\quad \bar{y}=\frac{\iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{S_D},$$

S_D 表示区域 D 的面积.

本题中的圆域$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2\leqslant\dfrac{3}{2}$ 形心显然是圆心$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$,则 $\bar{x}=\bar{y}=\dfrac{1}{2}$,而 $S_D=\dfrac{3}{2}\pi$,则

$$\iint\limits_D x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\bar{x}\,S_D=\frac{3}{4}\pi,\quad \iint\limits_D y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{4}\pi.$$

故

$$\iint\limits_D(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{2}\pi.$$

二、选择题

(1) (C).

分析 由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ 知,存在 $M>0$,当 $x>M$ 时,$f(x)<-1$,而 $F(x)$ 可表示为

$$F(x)=\int_M^x f(t)\mathrm{d}t+C\leqslant-(x-M)+C,$$

可见当 $x\to+\infty$ 时,$F(x)\to-\infty$.

(2) (A).

分析 设每个数项级数的一般项为 u_n，则级数①，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{\frac{1}{n}}=1$，所以级数①与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 同发散.

级数②，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{2}{e}<1.$$

级数③，

$$|u_n|\leqslant\frac{\ln n}{2n^{3/2}}\leqslant\frac{1}{2n^{2.5/2}}\quad(n\to\infty\text{ 时}).$$

级数④，$u_n=(-1)^n\sin\dfrac{\pi}{\ln n}$ 满足莱布尼兹判别法.所以仅级数①发散.

(3) (B).

分析 因为直线 l 的方向向量

$$\boldsymbol{S}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\1&3&2\\2&-1&-10\end{vmatrix}=-7(4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}),$$

平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n}=4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，所以 $\boldsymbol{S}\parallel\boldsymbol{n}$，即直线 $l\perp\pi$.

(4) (D).

分析 $f(x,y,z)$ 为常数 M 时

$$I(R)=M\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\leqslant R^2}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4}{3}M\pi R^3,$$

对 $f(x,y,z)$ 的一般性，由于 $f(x,y,z)$ 是连续的，则由积分中值定理得

$$I(R)=f(\xi,\eta,\zeta)\cdot\frac{4}{3}\pi R^3,$$

其中 $\xi^2+\eta^2+\zeta^2\leqslant R^2$，当 $R\to0$ 时，$(\xi,\eta,\zeta)\to(0,0,0)$，于是

$$\lim_{R\to0}\frac{I(R)}{R^3}=\lim_{R\to0}\frac{4}{3}\pi f(\xi,\eta,\zeta)=\frac{4\pi}{3}f(0,0,0).$$

当 $f(0,0,0)\neq0$ 时 $I(R)$ 是 R 的三阶无穷小，当 $f(0,0,0)=0$ 时，$I(R)$ 是比 R^3 高阶的无穷小.

(5) (D).

分析 显然(A)是正确的，又因为在区域 D，

$$\mathrm{d}f(x,y)\equiv0\Leftrightarrow\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0.$$

于是(C)也是正确.

现在如果能在(B)与(D)中证明其中之一是正确的或举例说明其中一个是错误的,则就可作出正确的选择.

考察(B).

设$(x_0,y_0)\in D$为任意一点,它存在两个不共线的方向:

$$\boldsymbol{l}_i=\{\cos\alpha_i,\cos\beta_i\}\quad(i=1,2)$$

使得
$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \boldsymbol{l}_i}=0\quad(i=1,2),$$

即
$$\begin{cases}\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cos\alpha_1+\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cos\beta_1=0,\\[2ex]\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cos\alpha_2+\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cos\beta_2=0,\end{cases}$$

由于$\boldsymbol{l}_1,\boldsymbol{l}_2$不共线,所以$\begin{vmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\beta_1\\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2\end{vmatrix}\neq 0$.由线性方程组理论得到

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0,$$

即对于任意一点$(x,y)\in D$有

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0,$$

所以$f(x,y)\equiv$常数,(B)正确,因此选(D).

考察(D).

在极坐标变换$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$下,

$$\frac{\partial f}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial f}{\partial x}x+\frac{\partial f}{\partial y}y\right]=0,$$

即$x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$,仅能表示$f(x,y)$与$r$无关,不能说明$f(x,y)$为常数.

如

$$f(x,y)=\arctan\frac{y}{x},\quad(x,y)\in D=\{(x,y)\mid x>0,y>0\},$$

则
$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2},\quad\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}=0,\quad(x,y)\in D.$$

但$f(x,y)$在D不恒为常数,因此选(D).

三、解法一

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t}{1-\cos x+x\sin x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2x\arctan(1+x^2)}{\sin x+\sin x+x\cos x}$$

$$=2\lim_{x\to0}\arctan(1+x^2)\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{2\sin x}{x}+\cos x}$$

$$=2\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{\pi}{6}.$$

解法二

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x(1-\cos x)}=2\lim_{x\to0}\frac{\int_0^x\left[\int_0^{u^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u}{x^3}$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}\arctan(1+t)\mathrm{d}t}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2x\arctan(1+x^2)}{3x}=\frac{\pi}{6}.$$

四、解法一 由题设条件知

$$\lim_{h\to0}[af(h)+bf(2h)-f(0)]=(a+b-1)f(0)=0.$$

由于 $f(0)\neq0$,故必有 $a+b-1=0$.

又由洛必达法则,有

$$0=\lim_{h\to0}\frac{af(h)+bf(2h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{af'(h)+2bf'(2h)}{1}=(a+2b)f'(0),$$

因 $f'(0)\neq0$,故 $a+2b=0$.于是得 $a=2,b=-1$.

解法二 由条件得

$$f(h)=f(0)+f'(0)h+o(h),\quad f(2h)=f(0)+2f'(0)h+o(h),$$

所以 $af(h)+bf(2h)-f(0)=(a+b-1)f(0)+(a+2b)f'(0)h+o(h)$.

因此当 $a=2,b=-1$ 时,有

$$af(h)+bf(2h)-f(0)=o(h).$$

五、(1) 分析 这里 $\varphi(x)$ 由积分式定义,不仅积分限含参变量 x,被积函数也含参变量 x.首先作变量替换,把积分式变成只有积分限含参变量 x 即变成变限积分.

解

$$\varphi(x)=\frac{1}{x^2}\int_0^{\sin x}f(tx^2)\mathrm{d}(tx^2)\xlongequal{tx^2=S}\frac{1}{x^2}\int_0^{x^2\sin x}f(s)\mathrm{d}s\quad(x\neq 0).$$

又 $\varphi(0)=0$.

下面求 $\varphi'(x)$. $x\neq 0$ 时,由变限积分求导法得

$$\varphi'(x)=-\frac{2}{x^3}\int_0^{x^2\sin x}f(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{x^2}f(x^2\sin x)(2x\sin x+x^2\cos x).$$

$x=0$ 时按定义求

$$\varphi'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int_0^{x^2\sin x}f(s)\mathrm{d}s=\lim_{x\to 0}\frac{(2x\sin x+x^2\cos x)f(x^2\sin x)}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x+x^2\cos x}{3x^2}\cdot\lim_{x\to 0}f(x^2\sin x)=f(0).$$

因此得 $$\varphi'(x)=\begin{cases}-\dfrac{2}{x^3}\displaystyle\int_0^{x^2\sin x}f(s)\mathrm{d}s+\dfrac{1}{x^2}f(x^2\sin x)(2x\sin x+x^2\cos x), & x\neq 0,\\ f(0), & x=0.\end{cases}$$

(2) 由变限积分的连续性及连续性的运算法则知, $x\neq 0$ 时 $\varphi'(x)$ 连续.

考察 $\varphi'(x)$ 在 $x=0$ 的连续性即考察是否成立:

$$\lim_{x\to 0}\varphi'(x)=f(0)=\varphi'(0).$$

注意,参照 $\varphi'(0)$ 的过程可知

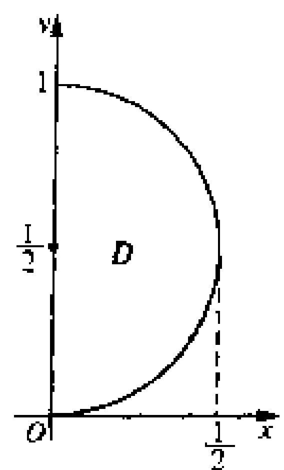
$$\lim_{x\to 0}\left(-\frac{2}{x^3}\int_0^{x^2\sin x}f(s)\mathrm{d}s\right)=-2f(0).$$

又 $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}f(x^2\sin x)(2x\sin x+x^2\cos x)=3f(0),$$

于是 $$\lim_{x\to 0}\varphi'(x)=-2f(0)+3f(0)=f(0)=\varphi'(0),$$

因此, $\varphi'(x)$ 处处连续.

六、解 设 $\iint\limits_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=A$, 在已知等式两边求区域 D 上的二重积分,有



$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{8A}{\pi}\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

从而 $$A=\iint\limits_D\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-A.$$

所以

$$2A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sin\theta}\sqrt{1-r^2}\cdot r\mathrm{d}r=\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^3\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

故
$$A=\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

于是
$$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{4}{3\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).$$

七、分析 这是一个抽象复合函数求导问题，解决这类问题的关键是要分析清楚变量间的函数关系以及抽象复合函数有几个中间变量，有几个自变量．对本题而言，两个方程 $u=f(x,z)$，$z=x+y\varphi(z)$ 确定了两个函数，由题意因变量是 u,z，自变量是 x,y，要求 $\mathrm{d}u$．求出 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$ 即可．

解 $\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+f_2'\frac{\partial z}{\partial x}$，而 $\frac{\partial z}{\partial x}=1+y\varphi'\frac{\partial z}{\partial x}$，因此

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1-y\varphi'},$$

所以
$$\frac{\partial u}{\partial x}=f_1'+\frac{f_2'}{1-y\varphi'}.$$

同理由

$$\frac{\partial u}{\partial y}=f_2'\frac{\partial z}{\partial y}\quad 及\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\varphi(z)+y\varphi'\frac{\partial z}{\partial y},$$

得
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\varphi(z)}{1-y\varphi'},$$

所以
$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{f_2'\varphi(z)}{1-y\varphi'},$$

于是
$$\mathrm{d}u=\left(f_1'+\frac{f_2'}{1-y\varphi'(z)}\right)\mathrm{d}x+\frac{f_2'\varphi(z)}{1-y\varphi'(z)}\mathrm{d}y.$$

注 1° $u=f(x,z)$ 有两个中间变量，若把 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 写为"$\frac{\partial u}{\partial x}=f'+f'\frac{\partial z}{\partial x}$"是错误的；

2° $\varphi(z)$ 通过中间变量 $z=z(x,y)$ 是 x,y 的函数，若把 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 写为"$\frac{\partial z}{\partial x}=1+y\varphi_x'\frac{\partial z}{\partial x}$"是错误的．

八、(1) **证** 因为

$$\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\right\}=f(xy)-\frac{1}{y^2}+xyf'(xy)=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\right\}$$

在上半平面内处处成立，所以在上半平面内曲线积分 I 与路径无关．

(2) **解法一** 由于 I 与路径无关，故可取积分路径 L 为由点 (a,b) 到点 (c,b) 再到点 $(c,$

d)的折线段,所以

$$I=\int_a^c \frac{1}{b}[1+b^2f(bx)]\mathrm{d}x+\int_b^d \frac{c}{y^2}[y^2f(cy)-1]\mathrm{d}y$$

$$=\frac{c-a}{b}+\int_a^c bf(bx)\mathrm{d}x+\int_b^d cf(cy)\mathrm{d}y+\frac{c}{d}-\frac{c}{b}$$

$$=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{bc}f(t)\mathrm{d}t+\int_{bc}^{cd}f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}+\int_{ab}^{cd}f(t)\mathrm{d}t.$$

当 $ab=cd$ 时,$\int_{ab}^{cd}f(t)\mathrm{d}t=0$,由此得 $I=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$.

(2) **解法二**

$$I=\int_L \frac{\mathrm{d}x}{y}-\frac{x\mathrm{d}y}{y^2}+\int_L yf(xy)\mathrm{d}x+xf(xy)\mathrm{d}y,$$

$$\int_L \frac{\mathrm{d}x}{y}-\frac{x\mathrm{d}y}{y^2}=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}.$$

设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数,则

$$\int_L yf(xy)\mathrm{d}x+xf(xy)\mathrm{d}y=\int_L f(xy)\mathrm{d}(xy)=F(cd)-F(ab).$$

所以当 $ab=cd$ 时,$F(cd)-F(ab)=0$,由此得 $I=\frac{c}{d}-\frac{a}{b}$.

九、分析 应用高斯公式.

解

$$P(x,y,z)=x^3,\quad Q(x,y,z)=\frac{1}{z}f\left(\frac{y}{z}\right)+y^3,\quad R(x,y,z)=\frac{1}{y}f\left(\frac{y}{z}\right)+z^3,$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=3x^2,\quad \frac{\partial Q}{\partial y}=\frac{1}{z^2}f'\left(\frac{y}{z}\right)+3y^2,\quad \frac{\partial R}{\partial z}=-\frac{1}{z^2}f'\left(\frac{y}{z}\right)+3z^2.$$

所以

$$原式=\iiint_\Omega \left[3x^2+\frac{1}{z^2}f'\left(\frac{y}{z}\right)+3y^2-\frac{1}{z^2}f'\left(\frac{y}{z}\right)+3z^2\right]\mathrm{d}V$$

$$=3\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_1^2 r^4\mathrm{d}r$$

$$=\frac{93\pi}{5}(2-\sqrt{2}).$$

十、解 令 $g(t)=(2+t^2)\mathrm{e}^{t^2}$,将 $g(t)$ 展开成幂级数.因为

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}, \quad t \in (-\infty, +\infty), \quad (0! = 1),$$

所以

$$g(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2t^{2n}}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2(n+1)}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2t^{2n}}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(n-1)!}$$

$$= 2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n!} + \frac{1}{(n-1)!}\right) t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n!} t^{2n}, \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

逐项积分

$$\int_0^{x^2} g(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n!} \cdot \frac{1}{2n+1} x^{2(2n+1)}$$

$$= x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n!} \cdot \frac{1}{2n+1} x^{4n},$$

所以当 $x \neq 0$ 时,

$$f(x) = \frac{\int_0^{x^2} g(t)\mathrm{d}t}{x^2} = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n!} \cdot \frac{1}{2n+1} x^{4n},$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2 + \lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n!} \cdot \frac{1}{2n+1} x^{4n} = 2 + 0 = 2.$$

所以当 $A = 2$ 时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 连续, 因此

$$f(x) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n!} \cdot \frac{1}{2n+1} x^{4n}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

由幂级数性质: $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内任意次可导, 注意 x^8 项系数是 $\frac{2+2}{2!} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$, 于是 $f^{(8)}(0) = (8!) \cdot \frac{2}{5}$, x^9 项系数为 0, 即 $f^{(9)}(0) = 0$.

十一、解

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(r) \cdot \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(r) \cdot \frac{x^2}{r^2} + f'(r) \cdot \frac{r^2 - x^2}{r^3},$$

同理

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r) \cdot \frac{y^2}{r^2} + f'(r) \cdot \frac{r^2 - y^2}{r^3},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f''(r) \cdot \frac{z^2}{r^2} + f'(r) \cdot \frac{r^2 - z^2}{r^3},$$

代入方程得

$$f''(r) + \frac{2}{r} f'(r) = 0,$$

令 $f'(x) = P(r)$ 得 $rp' + 2p = 0$, 解得 $p = \frac{C_1}{r^2}$, 即 $f'(r) = \frac{C_1}{r^2}$, 积分得 $f(r) = C_2 - \frac{C_1}{r}$,

由 $f(1)=0, f'(1)=1$ 得 $f(r)=1-\frac{1}{r}$.

十二、解 (1) 由梯度的几何意义知, $h(x,y)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处沿梯度

$$\operatorname{grad}h(x,y)\big|_{(x_0,y_0)}=(y_0-2x_0)\boldsymbol{i}+(x_0-2y_0)\boldsymbol{j}$$

方向的方向导数最大,方向导数的最大值为该梯度的模,所以

$$g(x_0,y_0)=\sqrt{(y_0-2x_0)^2+(x_0-2y_0)^2}=\sqrt{5x_0^2+5y_0^2-8x_0y_0}.$$

(2) 令 $f(x,y)=g^2(x,y)=5x^2+5y^2-8xy$, 由题意, 只需求 $f(x,y)$ 在约束条件 $75-x^2-y^2+xy=0$ 下的最大值点.

令

$$L(x,y,\lambda)=5x^2+5y^2-8xy+\lambda(75-x^2-y^2+xy),$$

则

$$\begin{cases} L_x'=10x-8y+\lambda(y-2x)=0, & (*)\\ L_y'=10y-8x+\lambda(x-2y)=0, & (**)\\ L_\lambda'=75-x^2-y^2+xy=0. & (***)\end{cases}$$

$(*)$式与$(**)$式相加可得 $\quad (x+y)(2-\lambda)=0,$

从而得 $y=-x$ 或 $\lambda=2$.

若 $\lambda=2$, 则由$(*)$式得 $y=x$, 再由$(***)$式得 $x=\pm5\sqrt{3}, y=\pm5\sqrt{3}$.

若 $y=-x$, 则由$(***)$式得 $x=\pm5, y=\mp5$.

于是得到 4 个可能的极值点

$$M_1(5,-5),\quad M_2(-5,5),\quad M_3(5\sqrt{3},5\sqrt{3}),\quad M_4(-5\sqrt{3},-5\sqrt{3}).$$

由于 $\quad f(M_1)=f(M_2)=450,\quad f(M_3)=f(M_4)=150,$

$M_1(5,-5)$ 或 $M_2(-5,5)$ 可作为攀登的起点.

数学一　模拟试题三

一、填空题(本大题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(e^{\frac{1}{n}}+2e^{\frac{2}{n}}+\cdots+ne)=$ ________.

(2) 设 $x=\int_0^t e^{-s^2}ds, y=\int_0^t \sin(t-s)^2 ds$, 则 $\frac{d^2y}{dx^2}=$ ________.

(3) 设 $f(x)=\begin{cases} x, & 0<x\leqslant 1,\\ 1-x, & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$ $S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos\dfrac{n\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 的傅里叶级数，则 $S(7)=$ ________.

(4) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^1\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=$ ________.

(5) 已知 $y_1=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}, y_2=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}, y_3=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-x}$ 是某二阶线性非齐次微分方程的三个特解，则该微分方程为________.

二、选择题(本题共 5 小题，每小题 3 分，满分 15 分. 每小题给出四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$，则下列断言正确的是(　　).

(A) 若 x_n 发散，则 y_n 必发散；

(B) 若 x_n 无界，则 y_n 必有界；

(C) 若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小；

(D) 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小，则 y_n 必为无穷小.

(2) 设 $f(x)$ 在 $x=1$ 有连续的导数，又 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{x-1}=2$，则(　　).

(A) $x=1$ 是 $y=f(x)$ 的拐点；

(B) $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点；

(C) $x=1$ 是 $f(x)$ 的极大值点；

(D) $x=1$ 既不是 $f(x)$ 的极值点，又不是 $f(x)$ 的拐点.

(3) 下列命题中正确的是(　　).

(A) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛；

(B) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛且 $n\to+\infty$ 时 a_n 与 b_n 是等价无穷小，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛；

(C) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $a_n=o\left(\dfrac{1}{n}\right)(n\to+\infty)$；

(D) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛.

(4) 设 Σ 为柱面 $x^2+y^2=a^2(0\leqslant z\leqslant 3)$，其向外的单位法向量 $\boldsymbol{n}_0=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$，则

$$\iint\limits_{\Sigma}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}s$$

等于(　　).

(A) $6\pi a^2$; (B) $9\pi a^2$; (C) $\iint\limits_{\Sigma} z\cos\gamma \mathrm{d}s$; (D) 0.

(5) 设 $y(x)$ 是 $y''+a_1y'+a_2y=\mathrm{e}^x$ 满足初始条件 $y(0)=1, y'(0)=0$ 的特解(a_1, a_2 均为常数),则(　　).

(A) 对于 $a_2>1$ 时, $x=0$ 不是 $y(x)$ 的极大值点;

(B) 对于 $a_2>1$ 时, $x=0$ 是 $y(x)$ 的极小值点;

(C) 对于 $a_2<1$ 时, $x=0$ 是 $y(x)$ 的极小值点;

(D) 对于 $a_2<1$ 时, $x=0$ 是 $y(x)$ 的极大值点.

三、(本题满分 7 分)

设 $f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}t^2\sin\frac{x}{t}\left[g\left(2x+\frac{1}{t}\right)-g(2x)\right]$, $g(x)$ 的一个原函数为 $\ln(x+1)$, 计算定积分 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

四、(本题满分 7 分)

证明: $\left(\ln\frac{1+x}{x}-\frac{1}{1+x}\right)^2<\frac{1}{x(1+x)^2}(x>0)$.

五、(本题满分 7 分)

求曲面 $4z=3x^2-2xy+3y^2$ 到平面 $x+y-4z=1$ 的最短距离.

六、(本题满分 7 分)

(1) 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$.

(2) 证明 $f(x)=x\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界.

七、(本题满分 7 分)

试证抛物面 $z=1+x^2+y^2$ 上任意点处的切平面与抛物面 $z=x^2+y^2$ 所围的立体的体积与切点坐标无关.

八、(本题满分 7 分)

设函数 $u=f(\sqrt{x^2+y^2})$, 满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\iint\limits_{s^2+t^2\leqslant x^2+y^2}\frac{\mathrm{d}s\mathrm{d}t}{1+s^2+t^2},$$

且 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=0$, 试求函数 $f'(x)$ 的表达式.

九、(本题满分 6 分)

计算 $I=\iiint\limits_{\Omega}x^2\mathrm{d}V$, 其中 Ω 为 $x^2+y^2+z^2\leqslant 2z$.

十、(本题满分 6 分)

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义，在 $x=0$ 的某个邻域内有一阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=a>0$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 发散.

十一、(本题满分 8 分)

(1) 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)3^n}$ 的和 S.

(2) 设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 二阶连续可导，$f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$，$a_n$ 是 $f(x)$ 的傅里叶系数，求证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛.

十二、(本题满分 8 分)

(1) 试求向量场 $\boldsymbol{F}=\{f(x,y,z)+x,2f(x,y,z)+y,f(x,y,z)+z\}$ 沿 Σ: $x-y+z=1$ 在第四卦限部分的上侧的流量，其中 $f(x,y,z)$ 为连续函数.

(2) 计算曲线积分 $I=\int_L(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$，其中 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 和柱面 $x^2+y^2=ax(a>0)$ 的交线位于 xy 平面上方部分，从 z 轴上点 $(b,0,0)(b>a)$ 看去，L 的方向是顺时针的.

数学一　模拟试题三解答

一、填空题

(1) 1.

分析

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(e^{\frac{1}{n}}+2e^{\frac{2}{n}}+\cdots+ne^{\frac{n}{n}}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{n}e^{\frac{i}{n}}$$
$$=\int_0^1 xe^x dx=\left[xe^x-e^x\right]\Big|_0^1=1.$$

(2) $2te^{2t^2}(\sin t^2+\cos t^2)$.

分析

$$x'(t)=e^{-t^2},\quad y=\int_0^t\sin(t-s)^2ds\xlongequal{t-s=u}\int_0^t\sin u^2du,$$

$$y'(t)=\sin t^2,$$

所以
$$y'(x)=\frac{y'(t)}{x'(t)}=e^{t^2}\sin t^2,$$

$$y''(x)=\frac{2te^{t^2}\sin t^2+(2t\cos t^2)e^{t^2}}{e^{-t^2}}=2te^{2t^2}(\sin t^2+\cos t^2).$$

(3) $\frac{1}{2}$.

分析 $S(x)$ 为周期4的偶函数,所以

$$S(7)=S(-1)=S(1)=\frac{1}{2}[f(1-0)+f(1+0)]=\frac{1}{2}.$$

(4) $\frac{1}{2}(1-e^{-1})$.

分析 **解法一** 交换积分次序:

$$原式=\int_0^1 dy\int_0^y e^{-y^2}dx=\int_0^1 ye^{-y^2}dy=\frac{1}{2}(1-e^{-1}).$$

解法二 应用格林公式计算:取 $P(x,y)=0,Q(x,y)=xe^{-y^2}$.则

$$原式=\oint_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\oint_L xe^{-y^2}dy$$

$$=\int_{\overline{OA}}xe^{-y^2}dy+\int_{\overline{AB}}xe^{-y^2}dy+\int_{\overline{BO}}xe^{-y^2}dy=\int_0^1 xe^{-x^2}dx=\frac{1}{2}(1-e^{-1}),$$

其中 L 为 $OABO$ 折线,取逆时针方向,$O(0,0),A(1,1),B(0,1)$.

(5) $y''-y'-2y=e^x-2xe^x$.

分析 此题是求微分方程的反问题,利用二阶线性非齐次方程解的结构来确定此方程.

由题设知 e^{2x} 与 e^{-x} 是相应齐次方程两个线性无关的解,且 xe^x 是非齐次方程一个特解,故此方程是 $y''-y'-2y=f(x)$.将 $y=xe^x$ 代入上式得:

$$f(x)=(xe^x)''-(xe^x)'-2xe^x=e^x-2xe^x.$$

因此所求方程为 $y''-y'-2y=e^x-2xe^x$.

二、选择题

(1) (D).

分析 由两个无穷小的乘积仍是无穷小的性质有

$$\lim_{n\to\infty}(x_n,y_n)\cdot\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to\infty}y_n=0.$$

所以选(D).或用举反例排除法:设 $y_n=0$ 便排除了(A).设 $x_n=0$ 便排除了(C).设

$$x_n=\begin{cases}0, & n\ 为奇数,\\ n, & n\ 为偶数,\end{cases}\quad y_n=\begin{cases}n, & n\ 为奇数,\\ 0, & n\ 为偶数,\end{cases}$$

则排除了(B),由此得到(D)是正确的.

(2) (B).

分析 由所给出的条件,考察 $f'(\ )$ 与 $f''(\ )$.

由 $f(x)$ 在 $x=1$ 有连续导数,又 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f'(x)}{x-1}=2$,知

$$f'(1)=0,\quad 且\quad f''(1)=\lim_{x\to1}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f'(x)}{x-1}=2>0.$$

由 $f'(1)=0, f''(1)>0$ 知 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

注:本题可不必考察 $f'(1)$ 与 $f''(1)$.

由条件 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f'(x)}{x-1}=2>0$ 知存在 $\delta>0$,当 $0<|x-1|<\delta$ 时,$\dfrac{f'(x)}{x-1}>0$,有 $1<x<1+\delta$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调上升;$1-\delta<x<1$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调下降,故 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小点.特别是,只须假定 $f(x)$ 在 $x=1$ 邻域可导,又 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$,推出 $x=1$ 是 $f(x)$ 的极小点.

(3) (D).

分析 关于(A),(B)是考查考生对正项级数与变号级数之间差别的了解.

若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 是正项级数且收敛,则 n 充分大后 $0\leqslant a\leqslant1, 0\leqslant a_n^2\leqslant a_n$,推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛,即对正项级数,(A)是正确的,但对变号级数而言,命题(A)是不正确的,例如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 收敛,但

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

发散.

对于正项级数,命题(B)则是比较判别法极限形式的推论,但对变号级数,命题(B)也是不正确的.如

$$a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},\quad b_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n},$$

则

$$\frac{b_n}{a_n}=1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\to1\quad(n\to+\infty),$$

即 a_n 与 b_n 是等价无穷小,但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散.

关于(C),若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则必有 a_n 为无穷小,这里考查 a_n 与 $\dfrac{1}{n}$ 的阶的关系.命题(C)是不

正确的.如$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$收敛,但

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\neq o\left(\frac{1}{n}\right)\quad(n\to+\infty).$$

命题(D)是正确的.因为$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛,推出a_n有界,即存在常数M使得$|a_n|\leqslant M(n=1,2,\cdots)$有$|a_nb_n|\leqslant M|b_n|$.由$\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|$收敛,推出$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$收敛,进而(D)成立.

注 1° 从选择正确答案的角度来看,如果你能证明(D)正确,则自然不必再考虑(A),(B)与(C).或者,你能通过举反例证明(A),(B),(C)不正确,则(D)就自然入选.

2° 要注意正项级数与变号级数间的差别.

(4) (A).

分析 因为柱面Σ上任意一点(x,y,z)的法向量$\boldsymbol{n}=\pm\{F_x,F_y,F_z\}=\pm\{2x,2y,0\}$.所以,向外的单位法向量为:

$$\boldsymbol{n}_0=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\{x,y,0\}=\frac{1}{a}\{x,y,0\},$$

方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{x}{a},\quad\cos\beta=\frac{y}{a},\quad\cos\gamma=0,$$

则

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma}(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)\mathrm{d}s&=\iint_{\Sigma}\{x,y,z\}\cdot\left\{\frac{x}{a},\frac{y}{a},0\right\}\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{a}\iint_{\Sigma}(x^2+y^2)\mathrm{d}s=\frac{1}{a}\iint_{\Sigma}a^2\mathrm{d}s=a\iint_{\Sigma}\mathrm{d}s\\&=a\times2\pi a\times3=6\pi a^2.\end{aligned}$$

(5) (C).

分析 当$y(0)=1,y'(0)=0$时,方程$y''=1-a_2$,所以$a_2<1$,即$y''(0)>0$,所以$x=0$是极小值点.

三、解

$$\begin{aligned}f(x)&=\lim_{t\to\infty}t^2\sin\frac{x}{t}\cdot\left[g\left(2x+\frac{1}{t}\right)-g(2x)\right]\\&=\lim_{t\to\infty}\frac{\sin\frac{x}{t}}{\frac{x}{t}}\cdot x\cdot\frac{g\left(2x+\frac{1}{t}\right)-g(2x)}{\frac{1}{t}}=xg'(2x),\end{aligned}$$

于是

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 xg'(2x)\mathrm{d}x \xlongequal{2x=t} \int_0^2 \frac{t}{2}g'(t)\frac{1}{2}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 x\mathrm{d}g(x) = \frac{1}{4}\left[xg(x)\Big|_0^2 - \int_0^2 g(x)\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[x\cdot\frac{1}{1+x} - \ln(x+1)\right]\Big|_0^2 = \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3} - \ln 3\right].$$

四、证 先证 $\ln\frac{1+x}{x} - \frac{1}{1+x} > 0$，为此令

$$F(x) = \ln\frac{1+x}{x} - \frac{1}{1+x},$$

则

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0,$$

并且

$$F'(x) = -\frac{1}{x(1+x)^2} < 0 \quad (x>0).$$

$F(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内是递减的，所以 $F(x)>0$. 因而原不等式等价于

$$0 < \ln\frac{1+x}{x} - \frac{1}{1+x} < \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} \quad (x>0).$$

再令

$$f(x) = \ln\frac{1+x}{x} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)},$$

则

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \quad f'(x) = \frac{1+3x-2\sqrt{x}}{2x^{\frac{3}{2}}(1+x)^2},$$

容易证得上式分子的最小值为 $\frac{2}{3}$，即 $1+3x-2\sqrt{x} \geqslant \frac{2}{3}$，由此知 $f'(x)>0$，所以，$f(x)$ 单调增趋于 0，$f(x)<0$，所以

$$\ln\frac{1+x}{x} - \frac{1}{1+x} < \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)},$$

即

$$\left(\ln\frac{1+x}{x} - \frac{1}{1+x}\right)^2 < \frac{1}{x(1+x)^2}.$$

五、解 因为曲面上任一点 $P(x,y,z)$ 到平面的距离

$$d = \frac{|x+y-4z-1|}{\sqrt{18}},$$

故令

$$F(x,y,z) = \frac{1}{2}(x+y-4z-1)^2 + \lambda(3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4z),$$

解 $\begin{cases} F_x' = x + y - 4z - 1 + \lambda(6x - 2y) = 0, \\ F_y' = x + y - 4z - 1 + \lambda(6y - 2x) = 0, \\ F_z' = -4(x + y - 4z - 1) - 4\lambda = 0, \\ F_\lambda' = 3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4z = 0 \end{cases}$

得 $x = y = \frac{1}{4}, z = \frac{1}{16}$. 因为驻点惟一,所以 $d_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{8}$.

注 求函数 $d = \frac{|x + y - 4z - 1|}{\sqrt{18}}$ 在 $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4z = 0$ 条件下的极值问题,等价于求函数 $g(x, y, z) = \frac{1}{2}(x + y - 4z - 1)^2$ 在 $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 4z = 0$ 条件下的极值问题.

六、(1) **分析** 本题属于 $0 \cdot \infty$ 型不定式,将它化为 $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定式,再利用洛必达法则计算.

解 利用洛必达法则

$$\lim_{x \to +\infty} x e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt = \lim_{x \to +\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{\frac{1}{x} e^{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2}}{2e^{x^2} - \frac{1}{x^2} e^{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

注 对于 $0 \cdot \infty$ 型的不定式要根据具体题目化为 $\frac{0}{0}$ 型或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型,本题如果化为 $\frac{0}{0}$ 型计算就很复杂.

(2) **分析** 可以证明 $f(x)$ 是偶函数,因此,只需证明 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界,要证明连续函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界,关键要找到常数 $A > 0$,设法证 $f(x)$ 在 $[A, +\infty)$ 上有界.

证 因为

$$f(-x) = (-x) e^{-x^2} \int_0^{-x} e^{t^2} dt,$$

对于 $\int_0^{-x} e^{t^2} dt$,令 $t = -u$,则有

$$\int_0^{-x} e^{t^2} dt = -\int_0^x e^{u^2} du = -\int_0^x e^{t^2} dt.$$

因此,$f(-x) = f(x)$,所以 $f(x)$ 是偶函数,于是只需证明 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界.

由(1)所得出 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$,因此,对于 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\exists A > 0$,当 $x > A$,有

$$\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}.$$

于是，当 $x>A$ 时有 $0<f(x)<1$.

又因为 $f(x)$ 在 $[0,A]$ 上连续，由连续函数在闭区间上的性质，$f(x)$ 在 $[0,A]$ 上有界，并注意到在 $[0,+\infty)$ 上 $f(x)\geqslant 0$. 因此，$\exists M_1>0$，使得 $\forall x\in[0,A]$，有 $0\leqslant f(x)\leqslant M_1$，取 $M=\max\{1,M_1\}$，则对 $\forall x\in[0,+\infty)$ 有 $0\leqslant f(x)\leqslant M$.

注　证明此题时取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$(或取其他一个确定的正常数)是非常必要的，如果用"$\forall\varepsilon>0$，$\exists A>0$ 当 $x>A$ 时有 $\left|f(x)-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon$"来证明 $f(x)$ 在 $[A,+\infty)$ 上有界，此种解法是错误的，实际上此时的"界"是不确定的.

七、证　设曲面 $z=1+x^2+y^2$ 上任一点 $M(x_0,y_0,z_0)$，则过 M 点的切平面方程为：

$$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-(z-z_0)=0.$$

因为 $M(x_0,y_0,z_0)$ 在曲面 $z=1+x^2+y^2$ 上，即 $z_0=1+x_0^2+y_0^2$. 上述切平面方程可化为：

$$2x_0x+2y_0y-z+(2-z_0)=0.$$

设它与曲面 $z=x^2+y^2$ 所围的体积为 V，则

$$V=\iint_D[(2x_0x+2y_0y+2-z_0)-(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D 是 $\begin{cases}2x_0x+2y_0y-z+(2-z_0)=0,\\ z=x^2+y^2\end{cases}$ 在 Oxy 坐标面上的投影区域，即 D 为：

$$\begin{cases}(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\leqslant 1,\\ z=0,\end{cases}$$

所以

$$V=\iint_D[1-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

令 $\begin{cases}x-x_0=r\cos\theta,\\ y-y_0=r\sin\theta,\end{cases}$ 则

$$V=\iint_D[1-r^2\cos^2\theta-r^2\sin\theta]r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2)r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2},$$

所以 V 与切点坐标 (x_0,y_0,z_0) 无关.

八、解　设 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f'(r)\cdot\frac{x}{r},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f''(r)\frac{x^2}{r^2}+f'(r)\cdot\frac{y^2}{r^3},$$

同理 $\dfrac{\partial u}{\partial y} = f'(r)\cdot\dfrac{y}{r},\quad \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(r)\dfrac{y^2}{r^2} + f'(r)\cdot\dfrac{x^2}{r^3}.$

而 $$\iint\limits_{s^2+t^2\leqslant x^2+y^2}\frac{1}{1+s^2+t^2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^r\frac{1}{1+\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho = \pi\ln(1+r^2),$$

于是由 $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \iint\limits_{s^2+t^2\leqslant x^2+y^2}\frac{1}{1+s^2+t^2}\mathrm{d}s\mathrm{d}t,$$

得 $$f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) = \pi\ln(1+r^2),$$

解此微分方程,得

$$f'(r) = \mathrm{e}^{-\int\frac{1}{r}\mathrm{d}r}\left[\int\pi\ln(1+r^2)\mathrm{e}^{\int\frac{1}{r}\mathrm{d}r}\mathrm{d}r + C_1\right] = \frac{\pi(1+r^2)}{2r}[\ln(1+r^2)-1] + \frac{1}{r}C,$$

即 $$f'(x) = \frac{\pi(1+x^2)}{2x}[\ln(1+x^2)-1] + \frac{C}{x}.$$

又 $$\lim_{x\to0^+}f'(x) = \lim_{x\to0^+}\left[\frac{\pi(1+x^2)\ln(1+x^2)}{2x} + \frac{2C-\pi-\pi x^2}{2x}\right]$$
$$= \lim_{x\to0^+}\frac{2C-\pi-\pi x^2}{2x} = 0,$$

知 $C = \dfrac{\pi}{2}$. 故

$$f'(x) = \frac{\pi(1+x^2)}{2x}[\ln(1+x^2)-1] + \frac{\pi}{2x}.$$

九、分析 用配方法易知 Ω 为 $x^2+y^2+(z-1)^2\leqslant 1^2$, 即是以 $(0,0,1)$ 为圆心, 半径为 1 的球体, 因此可选用球坐标变换或平移变换与球坐标变换来计算. 又被积函数只与 x 有关, 过轴上坐标为 x 的点作垂直于 x 轴的平面截 Ω 得圆域 $D(x)$: $y^2+(z-1)^2\leqslant 1-x^2$, 其面积为 $\pi(1-x^2)$, 因此选用先二(对 y,z 积分)后一(对 x 积分)的积分顺序也是十分方便的.

解法一 作球坐标变换, 则 Ω 的球坐标表示为

$$\Omega:\ 0\leqslant\theta\leqslant2\pi,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2},\quad 0\leqslant r\leqslant 2\cos\varphi.$$

于是 $$I = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$
$$= \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\cos\varphi}r^4\mathrm{d}r$$
$$= \frac{32\pi}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2\varphi)\cos^5\varphi\,\mathrm{d}(-\cos\varphi)$$
$$= \frac{32\pi}{5}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right) = \frac{4}{15}\pi.$$

解法二 作平移变换后再作球坐标变换,则 Ω 表为

$$0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\quad 0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\quad 0\leqslant r\leqslant 1.$$

于是

$$\begin{aligned}I&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\sin^2\varphi\cos^2\theta\cdot r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\\&=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\mathrm{d}r\\&=\pi\int_0^{\pi}(1-\cos^2\varphi)\mathrm{d}(-\cos\varphi)\cdot\frac{1}{5}=\frac{4}{15}\pi.\end{aligned}$$

解法三 在直角坐标系中先对 y,z 积分,后对 x 积分得

$$\begin{aligned}I&=\int_{-1}^1\mathrm{d}x\iint\limits_{D(x)}x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-1}^1\pi x^2(1-x^2)\mathrm{d}x\\&=2\int_0^1\pi x^2(1-x^2)\mathrm{d}x=2\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{15}\pi.\end{aligned}$$

十、证 由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=a$ 知 $f(0)=0$,且 $f'(0)=a$.由 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内有一阶连续导数及 $f'(0)=a>0$,知存在 $\delta>0$,在 $[0,\delta]$ 上 $f'(x)>0$,于是存在 N,使当 $n>N$ 时,$f\left(\dfrac{1}{n}\right)>0$,而且 $f\left(\dfrac{1}{n+1}\right)<f\left(\dfrac{1}{n}\right)$,$\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)=0$,可见交错级数

$$\sum_{n=N}^{\infty}(-1)^n f\left(\frac{1}{n}\right)$$

收敛,因而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 收敛.

由微分中值定理,当 $n>N$ 时,

$$f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)=f'(\xi)\frac{1}{n},\quad 0<\xi<\frac{1}{n},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{\xi\to0^+}f'(\xi)=f'(0)=a>0.$$

因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散,所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 发数.

十一、(1) 分析 引进幂级数,把数值级数求和转化为幂级数求和.

解 令

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)}x^{2n},$$

通过求导容易求和:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1},\quad f''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(x^2)^{n-1},$$

所以 $f''(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

注意 $f'(0)=0,f(0)=0$,有

$$f'(x)=\arctan x,$$

$$f(x)=\int_0^x\arctan t\,dt=x\arctan x-\int_0^x\frac{t}{1+t^2}dt=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

令 $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$,得

$$S=2f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{6}-\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}-2\ln 2+\ln 3.$$

(2) **分析** 要证明$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛,要对$|a_n|$进行估计.为此要对 a_n 的表达式作必要的变形 —— 分部积分.

证
$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)d\sin nx\\&=-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)d\cos nx\\&=\frac{(-1)^n}{n^2\pi}[f'(\pi)-f'(-\pi)]-\frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f''(x)\cos nx\,dx.\end{aligned}$$

注意 $|\cos nx|\leqslant 1$, $f''(x)$ 在$[-\pi,\pi]$有界,所以,存在常数 M 使得 $|a_n|\leqslant\dfrac{M}{n^2}$,又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{M}{n^2}$收敛,故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛.

十二、(1) **解** 所求流量为

$$\begin{aligned}S&=\iint_{\Sigma}(f(x,y,z)+x)dydz+(2f(x,y,z)+y)dzdx+(f(x,y,z)+z)dxdy\\&=\iint_D[(f+x)\cdot(-z_x')+(2f+y)\cdot(-z_y')+(f+z)]dxdy\\&=\iint_D dxdy=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

其中

$$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,x-1\leqslant y\leqslant 0\},$$

$$z=1-x+y,\quad z_x'=-1,\quad z_y'=1.$$

(2) **分析** 利用斯托克斯公式将曲线积分化为曲面积分,将曲面积分化为二重积分时注意曲面的侧与边界曲线 L 的方向符合右手法则,从而正确确定二重积分的正负号.在计算过程中要充分利用区域的对称性与被积函数的奇偶性以简化计算.

解 用斯托克斯公式化为曲面积分.

设 S 是上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 界于柱面 $x^2+y^2=ax$ 内的部分,以 L 为边界,按右手法则应取下侧.由斯托克斯公式得

$$I=\iint\limits_S\begin{vmatrix} dydz & dzdx & dxdy \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2\end{vmatrix}$$

$$=-2\iint\limits_S(y+z)dydz+(z+x)dzdx+(x+y)dxdy$$

$$=-2\iint\limits_S(y+z)dydz+(x+y)dxdy.$$

(S 关于 zx 平面对称,$z+x$ 对 y 为偶函数)

投影到 xy 平面化为二重积分,则有

$$I=-2\iint\limits_S[(y+z)\cos\alpha+(x+y)\cos\gamma]ds$$

$$=-(-2)\iint\limits_{D_{xy}}[(y+z)(-z_x')+(x+y)]dxdy,$$

其中 D_{xy} 为 S 在 xy 平面的投影区域

$$D_{xy}:\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+y^2\leqslant\left(\frac{a}{2}\right)^2,\quad z_x'=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=\frac{-x}{z}.$$

注意 D_{xy} 关于 x 轴对称,所以

$$I=4\iint\limits_{D_{xy}}xdxdy=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}r^2\cos\theta dr$$

$$=\frac{8a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta=\frac{8a^3}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}a^3,$$

或

$$I=4\iint\limits_{D_{xy}}xdxdy=4\iint\limits_{D_{xy}}\left(x-\frac{a}{2}\right)dxdy+4\iint\limits_{D_{xy}}\frac{a}{2}dxdy$$

$$=0+4\cdot\frac{a}{2}\cdot\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\pi}{2}a^3.$$

数学二　模拟试题

一、填空题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分)

(1) 设 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{ke^{\frac{2}{x}}+e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{2}{x}}+1}-\dfrac{\sin x}{|x|}\right]$存在,则常数 $k=$ ______.

(2) 已知函数 $x=x(t)$ 由方程 $\sin t-\int_1^{x-t}e^{-u^2}du=0$ 所确定,则$\left.\dfrac{d^2x}{dt^2}\right|_{t=0}=$ ______.

(3) 设 $f(x)$ 具有一阶连续导数,且 $f(0)=0,f'(0)=1$,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}f(t)dt}{\left(\int_0^x f(t)dt\right)^2}=$ ______.

(4) 二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''-2y'+5y=e^x\cos^2 x$ 的特解形式为 $y^*=$ ______.

(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\sqrt{1+\cos\dfrac{\pi}{n}}+\sqrt{1+\cos\dfrac{2\pi}{n}}+\cdots+\sqrt{1+\cos\dfrac{n\pi}{n}}\right]=$ ______.

二、选择题(本题共 5 小题,每小题 3 分,满分 15 分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(1) 当 $x\to 0^+$ 时,下列 4 个无穷小量中,哪一个是比其他三个更高阶的无穷小量?(　　)

(A) $x^3+\ln(1-x^3)$;　　(B) $\int_0^{x^2}\sin t^2dt$;

(C) $\cos\sqrt{x^3}-e^{-\frac{x^3}{2}}$;　　(D) $x-\sqrt[3]{\sin(x^3)}$.

(2) 设 $f(x),g(x)$ 在$[a,b]$连续且 $g(x)<f(x)<m$,则由曲线 $y=f(x),y=g(x)$,直线 $x=a,x=b$ 围成的平面图形绕直线 $y=m$ 旋转而成的旋转体体积 $V=$(　　).

(A) $\int_a^b\pi[2m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]dx$;

(B) $\int_a^b\pi[2m-f(x)-g(x)][f(x)-g(x)]dx$;

(C) $\int_a^b\pi[m-f(x)+g(x)][f(x)-g(x)]dx$;

(D) $\int_a^b \pi[m - f(x) - g(x)][f(x) - g(x)]dx$.

(3) 由下列 4 个条件

① $f(x) = (x-a)\varphi(x)$,其中 $\varphi(x)$ 在 $x = a$ 连续.

② $f(x) = |x-a|\varphi(x)$,其中 $\varphi(x)$ 在 $x = a$ 连续,且 $\varphi(0) \neq 0$.

③ 存在 $\delta > 0$,使对任意 $x \in (a-\delta, a+\delta)$,有 $|f(x)| \leqslant L|x-a|^{\alpha}$,其中 $L > 0$, $\alpha > 1$ 的常数.

④ $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(a+\frac{1}{n}\right) - f(a)\right]$存在($n$ 为正整数)

能分别推出 $f'(a)$ 存在的条件一共有(　　).

(A) 4 个;　　(B) 3 个;　　(C) 2 个;　　(D) 1 个.

(4) 下列用微积分基本定理计算定积分的作法中,错误的作法一共有(　　).

① $\int_0^{\pi} \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x}\,dx = \int_0^{\pi} \sin^{\frac{3}{2}} x \cos x\,dx = \frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}} x \Big|_0^{\pi} = 0$.

② $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}dx = \ln|x|\Big|_{-1}^{1} = 0$.

③ $\int_0^{2\pi} \frac{\sec^2 x}{2+\tan^2 x}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\Big|_0^{2\pi} = 0$.

④ $\int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\arctan\frac{1}{x}\right)dx = \arctan\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2}$.

(A) 1 个;　　(B) 2 个;　　(C) 3 个;　　(D) 4 个.

(5) 设函数 $f(x)$ 连续,则下列函数中,必为偶函数的是(　　).

(A) $\int_0^x t[f(t) + f(-t)]dt$;　　(B) $\int_0^x f^2(t)dt$;

(C) $\int_0^x t[f(t) - f(-t)]dt$;　　(D) $\int_0^x f(t^2)dt$.

三、(本题满分 7 分)

设 $f'(x) = \arcsin(x-1)^2$ 及 $f(0) = 0$,求$\int_0^1 f(x)dx$.

四、(本题满分 6 分)

已知 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x - (\tan x)f(x)}{x^3} = 0$,求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6 - f(x)}{x^2}$.

五、(本题满分 7 分)

求证:方程 $\ln x = \frac{x}{e} - \int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,dx$ 在$(0, +\infty)$内只有两个不同的实根.

六、(本题满分 7 分)

设函数 $f(x)$ 满足 $xf'(x) - 3f(x) = -6x^2$,且由曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x = 1$ 及 x 轴

所围成的平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积最小,试求 D 的面积.

七、(本题满分 7 分)

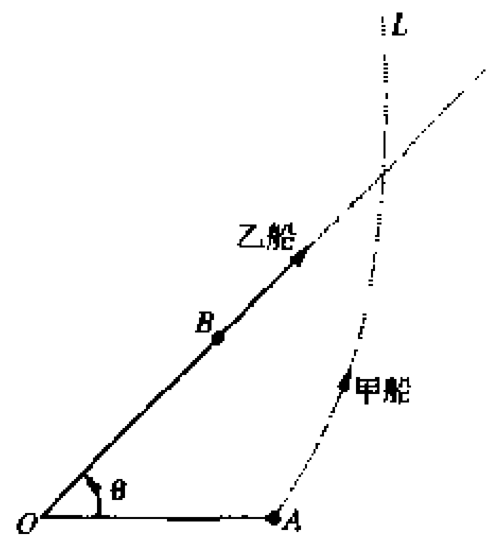
设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有二阶导数,且 $f(a)=f(b)=0, f'(a)\cdot f'(b)>0$. 证明存在 $\xi\in(a,b)$ 和 $\eta\in(a,b)$,使 $f(\xi)=0$ 及 $f''(\eta)=0$.

八、(本题满分 7 分)

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 有二阶连续导数, $f(a)=f(b)=0, M=\max\limits_{[a,b]}|f''(x)|$. 证明:

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{(b-a)^3}{12}M.$$

九、(本题满分 7 分)



如图我缉私船(甲船)奉命追击走私船(乙船). 已知我船与走私船的速率(即速度的大小)比为 $2:1$,且当我船赶到距事发地点 O 点 a 海里处的 A 点时,走私船所在的位置 B 也与 O 点相距 a 海里(即 $OA=OB=a$). 由于天降大雾,我船赶到 A 点时,看不到走私船,加上无法事先知道走私船的逃跑方向(但假设走私船总是沿着一个方向直线逃跑). 请你为我船设计一条追击路线 L(如图),使我船沿此路线追击,一定能追上走私船(即对每一个 θ 值,当我船到达该 θ 值对应的射线时,正好与沿该射线逃跑的走私船相遇).

十、(本题满分 7 分)

设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续,以 T 为周期. 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,求证: (1) $F(x)$ 一定能表成: $F(x)=kx+\varphi(x)$,其中 k 为某常数, $\varphi(x)$ 是以 T 为周期的周期函数;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\mathrm{d}x$;

(3) 若又有 $f(x)\geqslant 0(x\in(-\infty,+\infty))$, n 为自然数,则当 $nT\leqslant x<(n+1)T$ 时,有

$$n\int_0^T f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_0^x f(t)\mathrm{d}t<(n+1)\int_0^T f(x)\mathrm{d}x.$$

十一、(本题满分 7 分)

求满足 $x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t$ 的可微函数 $f(x)$.

十二、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内具有二阶连续导数,且 $f(0)\neq 0, f'(0)\neq 0, f''(0)\neq 0$. 证明: 存在惟一的一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,使得当 $h\to 0$ 时, $\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)$ 是比 h^2 高阶的无穷小.

数学二　模拟试题解答

一、填空题

(1) 2.

分析　由

$$\lim_{x\to0^-}\left(\frac{ke^{\frac{2}{x}}+e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{2}{x}}+1}-\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^-}\left(\frac{ke^{\frac{2}{x}}+e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{2}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=1,$$

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{ke^{\frac{2}{x}}+e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{2}{x}}+1}-\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{k+e^{-\frac{1}{x}}}{1+e^{-\frac{2}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=k-1,$$

故当且仅当 $k=2$ 时,原极限存在.

(2) $2e^2$.

分析　因为

$$\cos t=e^{-(x-t)^2}(x_t'-1),$$

$t=0$ 时,　$$x=1,\quad x_t'=e+1,$$

$$-\sin t=e^{-(x-t)^2}[-2(x-t)](x_t'-1)^2+e^{-(x-t)^2}x''(t).$$

$t=0,x=1,x_t'=e+1$ 代入上式得 $x''(0)=2e^2$.

(3) 2.

分析　由 $f(0)=0,f'(0)=1$,当 $x\to0$ 时,

$$f(x)\sim x,\quad f(x^2)\sim x^2,\quad \int_0^x f(t)\mathrm{d}t\sim\frac{x^2}{2},$$

故

$$\lim_{x\to0}\frac{\int_0^{x^2}f(t)\mathrm{d}t}{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)^2}=\lim_{x\to0}\frac{2xf(x^2)}{2f(x)\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)}=\lim_{x\to0}\frac{2x^2}{x^2}=2.$$

(4) $axe^x\cos2x+bxe^x\sin2x+Ce^x$.

分析　因为 $\lambda^2-2\lambda+5=0$ 的两根为

$$\lambda = 1 \pm 2\mathrm{i}, \quad \mathrm{e}^{x}\cos^{2}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}\cos 2x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}.$$

所以原方程可分解成

$$y'' - 2y' + 5y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x}\cos 2x, \quad y'' - 2y' + 5y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x},$$

所以有如上特解形式.

(5) $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

分析

$$原式 = \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{1+\cos\frac{k\pi}{n}}\cdot\frac{\pi}{n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\frac{x}{2}\mathrm{d}x = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

二、选择题

(1) (D).

分析

$$x^3 + \ln(1-x^3) = \frac{1}{2}x^6 + o(x^6) \sim \frac{1}{2}x^6, \quad (6\text{ 阶}).$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\sin t^2\mathrm{d}t}{x^n} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x^4}{nx^{n-1}},$$

所以 $n = 6$,(6 阶)

$$\cos\sqrt{x^3} - \mathrm{e}^{-\frac{x^3}{2}} = -\frac{1}{12}x^6 + o(x^6), \quad (6\text{ 阶}).$$

$$x - \sqrt[3]{\sin(x^3)} = \frac{x^3 - \sin x^3}{x^2 + x\sqrt[3]{\sin x^3} + (\sqrt[3]{\sin x^3})^2} \sim \frac{1}{3x^2}\left(\frac{1}{3!}x^9 + o(x^9)\right),$$

所以 7 阶.

(2) (B).

提示 $V = \int_a^b \pi[(m-g(x))^2 - (m-f(x))^2]\mathrm{d}x$

$$= \pi\int_a^b (2m - f(x) - g(x))(f(x) - g(x))\mathrm{d}x.$$

(3) (C).

分析 由 ① 可推出 $f'(a)$ 存在.因为 $f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\varphi(x) = \varphi(a)$,故 $f'(a) = \varphi(a)$.

由②不能推出 $f'(a)$ 存在. 由导数定义 $f'_+(a)=\varphi(a)$, $f'_-(a)=-\varphi(a)$, 因为 $\varphi(a)\neq 0$, 所以 $f'_+(a)\neq f'_-(a)$.

由③可推出 $f'(a)$ 存在. 显然 $f(a)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=0$, 即 $f'(a)=0$.

由④不能推出 $f'(a)$ 存在. 这是极限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f(a)}{h}$, 当 $h=\dfrac{1}{n}(n\to\infty)$ 离散地趋向 0 的特殊情况. 故它对这一极限的存在仅为必要的.

(4) (D).

分析 ① $\dfrac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}}x$ 仅在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上是被积函数的原函数, 在 $\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 上的原函数是 $-\dfrac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}}x$.

② $\ln|x|$ 在 $x=0$ 不连续. 实际上, 被积函数 $\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 无界. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{x}$ 是一个发散的广义积分.

③ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\dfrac{\tan x}{\sqrt{2}}$ 不是整个积分区间 $[0,2\pi]$ 上的原函数, 在 $x=\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}$ 处不连续.

④ $\arctan\dfrac{1}{x}$ 在 $x=0$ 不连续. 如果分别在 $[-1,0]$ 和 $[0,1]$ 上考虑, 得到的是两个收敛的广义积分. 即

$$\text{原式}=\arctan\frac{1}{x}\bigg|_{-1}^{0}+\arctan\frac{1}{x}\bigg|_{0}^{1}=-\frac{\pi}{2}.$$

(5) (A).

分析 令 $F(t)=t[f(t)+f(-t)]$, 显然 $F(t)$ 是奇函数. 所以

$$\varphi(x)=\int_0^x t[f(t)+f(-t)]\mathrm{d}t=\int_0^x F(t)\mathrm{d}t,$$

有
$$\varphi(-x)=\int_0^{-x}F(t)\mathrm{d}t\xlongequal{\text{令} u=-t}-\int_0^x F(-u)\mathrm{d}u=\int_0^x F(u)\mathrm{d}u=\varphi(x).$$

三、解

$$I=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=[xf(x)]\bigg|_0^1-\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x=f(1)-\int_0^1 x\arcsin(x-1)^2\mathrm{d}x,$$

而
$$f(1)=\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x+f(0)=\int_0^1\arcsin(x-1)^2\mathrm{d}x$$

代入上式得:

$$I=\int_0^1(1-x)\arcsin(x-1)^2\mathrm{d}x\xlongequal{\text{令} t=x-1}-\int_{-1}^{0}t\arcsin t^2\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\arcsin t^2 \mathrm{d}(t^2) = -\frac{1}{2}\left[t^2\arcsin t^2\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0}\frac{2t^3}{\sqrt{1-t^4}}\mathrm{d}t\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[-\frac{\pi}{2} + \sqrt{1-t^4}\Big|_{-1}^{0}\right] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

四、解 显然

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 6x}{\tan x} - f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x - \tan x f(x)}{x^3} = 0,$$

所以

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0}\frac{6 - f(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 6x}{\tan x} - f(x)}{x^2} + \lim_{x\to 0}\frac{6 - \frac{\sin 6x}{\tan x}}{x^2}$$

$$= 0 + \lim_{x\to 0}\frac{6\tan x - \sin 6x}{x^3} = \lim_{x\to 0}\frac{6\sec^2 x - 6\cos 6x}{3x^2}$$

$$= \frac{6}{3}\cdot\frac{1}{\cos^2 0}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1 - \cos 6x\cos^2 x}{x^2}$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{-6\sin 6x\cos^2 x - \cos 6x\sin 2x}{x} = 38.$$

五、证 令

$$f(x) = \ln x - \frac{x}{\mathrm{e}} + \int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x, \quad x \in (0, +\infty).$$

由于

$$\int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\int_0^{\pi}\sin x\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{2}.$$

取

$$x_1 = \mathrm{e}^{-4} \in (0, \mathrm{e}),$$

有

$$f(x_1) = -4 - \mathrm{e}^{-5} + 2\sqrt{2} < 0,$$

取

$$x_2 = \mathrm{e}^4 \in (\mathrm{e}, +\infty),$$

有

$$f(x_2) = 4 - \mathrm{e}^3 + 2\sqrt{2} < 0.$$

又

$$f(\mathrm{e}) = \int_0^{\pi}\sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x > 0,$$

$f(x)$ 在$(0, +\infty)$连续,所以 $f(x)$ 分别在(x_1, e)与(e, x_2)内至少各有一个零点.因为

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\mathrm{e}} = \begin{cases} > 0, & x \in (0, \mathrm{e}), \\ < 0, & x \in (\mathrm{e}, +\infty), \end{cases}$$

$f(x)$ 在$(0, \mathrm{e})$与$(\mathrm{e}, +\infty)$分别单调增加与减少,所以 $f(x)$ 在$(0, \mathrm{e})$,$(\mathrm{e}, +\infty)$内至多有一个零点.即 $f(x)$ 在$(0, +\infty)$有且仅有两个零点.也就是原方程在$(0, +\infty)$内只有两个不同实根.

六、解 一阶线性方程 $xy' - 3y = -6x^2$ 可化为标准形式:$y' - \frac{3}{x}y = -6x$,通解是

$y = Cx^3 + 6x^2$. 所以

$$V(C) = \pi\int_0^1 y^2 \mathrm{d}x = \pi\int_0^1 (Cx^3 + 6x^2)^2 \mathrm{d}x = \pi\left(\frac{C^2}{7} + 2C + \frac{36}{5}\right),$$

因为 $$V'(C) = \pi\left(\frac{2}{7}C + 2\right), \quad V''(C) = \frac{2}{7}\pi > 0,$$

可见 $V(C)$ 在惟一驻点 $C = -7$ 处取得极小值, 也是最小值.

由此已求函数 $f(x) = 6x^2 - 7x^3$, 由 $x = 1$, x 轴及 $f(x)$ 所围图形 D 的面积:

$$S = \int_0^1 |6x^2 - 7x^3| \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{6}{7}} (6x^2 - 7x^3)\mathrm{d}x + \int_{\frac{6}{7}}^1 (7x^3 - 6x^2)\mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{6}{7}\right)^3 - \frac{1}{4} = \frac{521}{1372}.$$

七、证 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导, 故 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续. 不妨设 $f'(a) > 0$, $f'(b) > 0$, 则存在 $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$, 使 $f'(x) > 0$, $x \in [a, a+\delta_1]$, $x \in [b-\delta_2, b]$. 于是 $f(x)$ 在这两个区间上严格增加, 因此存在 $x_1 \in (a, a+\delta_1)$, $x_2 \in (b-\delta_2, b)$, 使 $f(x_1) > f(a) = 0$, $f(x_2) < f(b) = 0$, 且 $x_1 < x_2$.

在区间 $[x_1, x_2]$ 上应用零点定理知, 存在 $\xi \in (x_1, x_2) \subset (a,b)$, 使 $f(\xi) = 0$.

由于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, $f(a) = f(\xi) = f(b) = 0$, 在 $[a,\xi]$ 和 $[\xi,b]$ 上分别应用罗尔定理, 则存在 $\xi_1 \in (a,\xi)$, $\xi_2 \in (\xi, b)$, 使 $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$.

再由 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 在 $[\xi_1, \xi_2]$ 上应用罗尔定理, 则存在 $\eta \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a,b)$, 使 $f''(\eta) = 0$.

八、证

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}(x-a) = -\int_a^b f'(x)(x-a)\mathrm{d}(x-b)$$

$$= \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\mathrm{d}x + \int_a^b f'(x)(x-b)\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\mathrm{d}x + \int_a^b (x-b)\mathrm{d}f(x)$$

$$= \int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

所以 $$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_a^b f''(x)(x-a)(x-b)\mathrm{d}x,$$

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{2}M\int_a^b (x-a)(b-x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}M\int_a^b (b-x)\mathrm{d}(x-a)^2$$

$$= \frac{1}{4}M\int_a^b (x-a)^2\mathrm{d}x = \frac{1}{12}M(b-a)^3.$$

九、解 如题图,取 O 点为极点,OA 为极轴,建立极坐标系.设 L 的极坐标方程为

$$r = r(\theta).$$

由题设在 L 上:$\int_0^{\theta} \mathrm{d}s : (r(\theta) - OB) = 2 : 1.$ $\qquad (*)$

注意 $\mathrm{d}s = s_{\theta}' \mathrm{d}\theta$ 且

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 = (x_{\theta}'^2 + y_{\theta}'^2)(\mathrm{d}\theta)^2 = [(r\cos\theta)_{\theta}'^2 + (r\sin\theta)_{\theta}'^2](\mathrm{d}\theta)^2$$

$$= (r_{\theta}'^2 + r^2)(\mathrm{d}\theta)^2 \Rightarrow s_{\theta}'^2 = r_{\theta}'^2 + r^2,$$

再由$(*)$式及 $OB = a$,得

$$2(r(\theta) - a) = \int_0^{\theta} s_{\theta}' \mathrm{d}\theta \Rightarrow 2r_{\theta}' = s_{\theta}',$$

所以得到 $r = r(\theta)$ 满足的微分方程

$$(2r_{\theta}')^2 = r_{\theta}'^2 + r^2, \quad r(0) = a.$$

因为要向外追,所以 $r_{\theta}' > 0$.又显然 $r > 0$,所以

$$r_{\theta}' = r/\sqrt{3} \Rightarrow r = c\mathrm{e}^{\theta/\sqrt{3}},$$

再由 $r(0) = a \Rightarrow c = a$.故 L 的极坐标方程为 $r = a\mathrm{e}^{\theta/\sqrt{3}}$.

十、证 (1) 即确定常数 k 使得 $\varphi(x) = F(x) - kx$ 以 T 为周期.由于

$$\varphi(x + T) = F(x + T) - k(x + T) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t - kx + \int_x^{x+T} f(t) - kT$$

$$= \varphi(x) + \int_0^T f(t)\mathrm{d}t - kT,$$

因此,取

$$k = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t, \quad \varphi(x) = F(x) - kx,$$

则 $\varphi(x)$ 是以 T 为周期的周期函数

$$F(x) = \left(\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t\right)x + \varphi(x).$$

(2) 不能用洛必达法则,因为

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to\infty} f(x)$$

不存在,但是

$$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{x}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t + \varphi(x).$$

$\varphi(x)$ 在$(-\infty, +\infty)$连续且以 T 为周期.于是 $\varphi(x)$ 在$[0, T]$上有界,$(-\infty, +\infty)$也有界.

因此

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t+\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\varphi(x)\right)=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

(3) 因为 $f(x)\geqslant 0$,所以 $nT\leqslant x<(n+1)T$ 时,

$$n\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=\int_0^{nT}f(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_0^x f(t)\mathrm{d}t<\int_0^{(n+1)T}f(t)\mathrm{d}t=(n+1)\int_0^T f(t)\mathrm{d}t.$$

十一、解 在 $\int_0^x tf(t-x)\mathrm{d}t$ 中,令 $u=t-x$,则有

$$x=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{-x}uf(u)\mathrm{d}u-x\int_0^{-x}f(u)\mathrm{d}u,$$

两边对 x 求导,整理得 $$f(x)=1+\int_0^{-x}f(u)\mathrm{d}u,$$

两边再对 x 求导,得

$$f'(x)=-f(-x),\quad f''(x)=f'(-x)=-f(x),$$

即 $$f''(x)+f(x)=0.$$

解得 $$f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x,\quad f'(x)=-C_1\sin x+C_2\cos x,$$

注意到 $f(0)=1,f'(0)=-1$,得

$$f(x)=\cos x-\sin x.$$

十二、证法一 只需证存在惟一的一组实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,使

$$\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)}{h^2}=0.$$

由题设和洛必达法则,从

$$\begin{aligned}0&=\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1 f(h)+\lambda_2 f(2h)+\lambda_3 f(3h)-f(0)}{h^2}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1 f'(h)+2\lambda_2 f'(2h)+3\lambda_3 f'(3h)}{2h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\lambda_1 f''(h)+4\lambda_2 f''(2h)+9\lambda_3 f''(3h)}{2}\\&=\frac{1}{2}(\lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3)f''(0)\end{aligned}$$

知,$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 应满足方程组

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1,\\ \lambda_1+2\lambda_2+3\lambda_3=0,\\ \lambda_1+4\lambda_2+9\lambda_3=0.\end{cases}$$

因为系数行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

所以上述方程组的解存在且惟一,即存在惟一的一组实数 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$,使得当 $h \to 0$ 时,

$$\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0)$$

是比 h^2 高阶的无穷小.

证法二 由麦克劳林公式得

$$f(h) = f(0) + f'(0)h + \frac{1}{2}f''(\xi)h^2 \quad (\text{其中 } \xi \text{ 介于 } 0 \text{ 与 } h \text{ 之间}),$$

据题设条件,当 $h \to 0$ 时

$$\begin{aligned} f(h) &= f(0) + f'(0)h + \frac{1}{2}f''(0)h^2 + \frac{1}{2}[f''(\xi) - f''(0)]h^2 \\ &= f(0) + f'(0)h + \frac{1}{2}f''(0)h^2 + o(h^2). \end{aligned}$$

同理可得

$$f(2h) = f(0) + 2f'(0)h + 2f''(0)h^2 + o(h^2),$$

$$f(3h) = f(0) + 3f'(0)h + \frac{9}{2}f''(0)h^2 + o(h^2),$$

有

$$\begin{aligned} &\lambda_1 f(h) + \lambda_2 f(2h) + \lambda_3 f(3h) - f(0) \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - 1)f(0) + (\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3)f'(0)h \\ &\quad + \frac{1}{2}(\lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3)f''(0)h^2 + o(h^2). \end{aligned}$$

所以 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 应满足方程组

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 + 9\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

以下同证法一.

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝考研数学题库　　高等数学（提高篇）
作者＝
页数＝２４２
ＳＳ号＝０
出版日期＝
Ｖｓｓ号＝６６６３３１４８