小结

1.两个准则

夹逼准则；单调有界准则 .

2.两个重要极限

设 α 为某过程中的无穷小，

$$1^0 \quad \lim_{某过程} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1; \qquad 2^0 \quad \lim_{某过程} (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

例4 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{-x})^{-x}]^{-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{(1+\frac{1}{-x})^{-x}}$

$$=\frac{1}{e}.$$

例5 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3+x}{2+x})^{2x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{x+2})^{x+2}]^{2}(1+\frac{1}{x+2})^{-4}=e^{2}$.

例 6 计算 $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}}$.

解

$$\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{2}{x}} = \lim_{-x\to 0}\left\{[1+(-x)]^{(-\frac{1}{x})}\right\}^{-2}$$

$$= \left\{\lim_{-x\to 0}[1+(-x)]^{(-\frac{1}{x})}\right\}^{-2}$$

$$= \frac{1}{e^2}.$$

上一页 下一页 返 回

例 7　计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$，令 $u=(1+x)^{\frac{1}{x}}$,

则当 $x\to 0$ 时，$u\to \mathrm{e}$，　所以原式 = 1，即

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

例 8 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

解 令 $u=e^x-1$，则 $x=\ln(1+u)$，

当 $x\to 0$ 时 $u\to 0$. 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)}=1.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

第三节 无穷小与无穷大

一、无穷小

二、无穷大

三、无穷小与无穷大的关系

四、无穷小的比较

一、 无穷小

定义1 . 若 $x \to x_0$ $(或x \to \infty)$ 时，函数 $f(x) \to 0$，则称函数 $f(x)$ 为 $x \to x_0$ $(或x \to \infty)$ 时的**无穷小** .

例如：

$\lim\limits_{x \to 1}(x-1)=0$，函数 $x-1$ 当 $x \to 1$ 时为无穷小;

$\lim\limits_{x \to \infty}\frac{1}{x}=0$，函数 $\frac{1}{x}$ 当 $x \to \infty$ 时为无穷小;

$\lim\limits_{x \to -\infty}\frac{1}{\sqrt{1-x}}=0$，函数 $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ 当 $x \to -\infty$ 时为无穷小.

定义1. 若$x \to x_0$ (或 $x \to \infty$) 时, 函数 $f(x) \to 0$, 则

则称函数 $f(x)$ 为 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时的**无穷小**.

说明: 除 0 以外任何很小的常数都不是无穷小！

因为

$$\lim_{x \to x_0} C = 0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$$

当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,

$$|C - 0| < \varepsilon$$

显然 C 只能是 0！

定理 1 . （无穷小的性质）

（1）有限个无穷小的代数和仍是无穷小;

（2）有限个无穷小的乘积仍是无穷小;

（3）无穷小与有界变量的乘积仍是无穷小;

（4）无穷小与极限不为0的变量的商仍是无穷小.

定理 2 .（无穷小与函数极限的关系）

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow f(x)=A+\alpha\text{，其中}\alpha\text{为 } x\to x_0$$

时的无穷小量 .

证: $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$

$$\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists\delta>0,\text{ 当 } 0<|x-x_0|<\delta \text{ 时,有}$$

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

$$\xLeftrightarrow{\alpha=f(x)-A} \lim_{x\to x_0}\alpha=0$$

对自变量的其它变化过程类似可证 .

二、 无穷大

定义2．若**任给** $M>0$，总存在 $\delta>0$ (**正数** X)，使对一切满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ ($|x|>X$) 的 x，总有

$$|f(x)|>M \qquad ①$$

则称函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ ($x\to\infty$) 时为无穷大, 记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty. \qquad (\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty)$$

若在定义中将 ①式改为 $f(x)>M$ ($f(x)<-M$)，

则记作 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=+\infty$ ($\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=-\infty$)

注意:

1. 无穷大不是很大的数, 它是描述函数的一种状态.

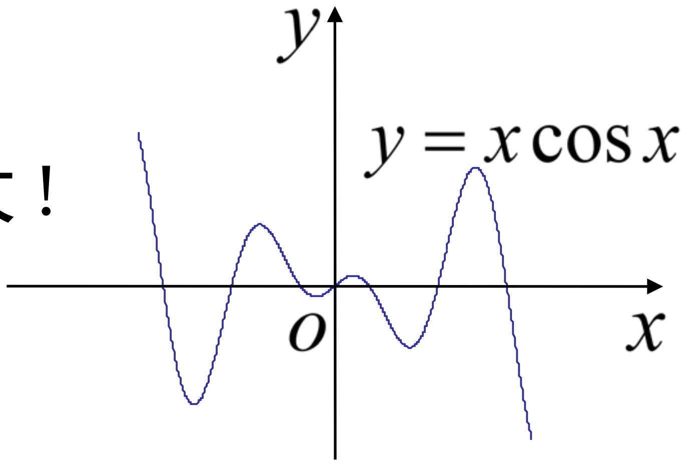
2. 函数为无穷大 , 必定无界 . 但反之不真 !

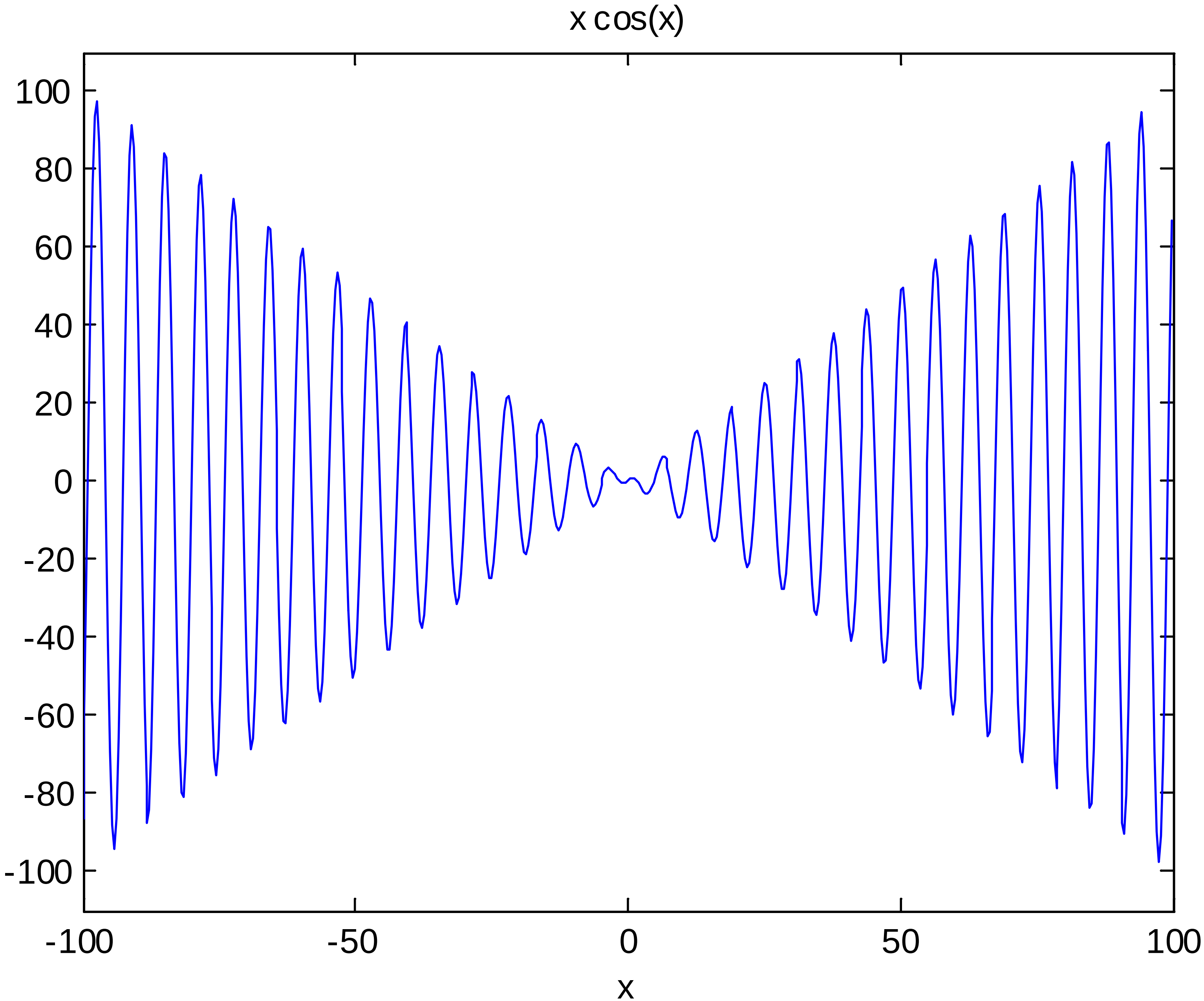
例如, 函数 $f(x) = x\cos x,\ x \in (-\infty, +\infty)$

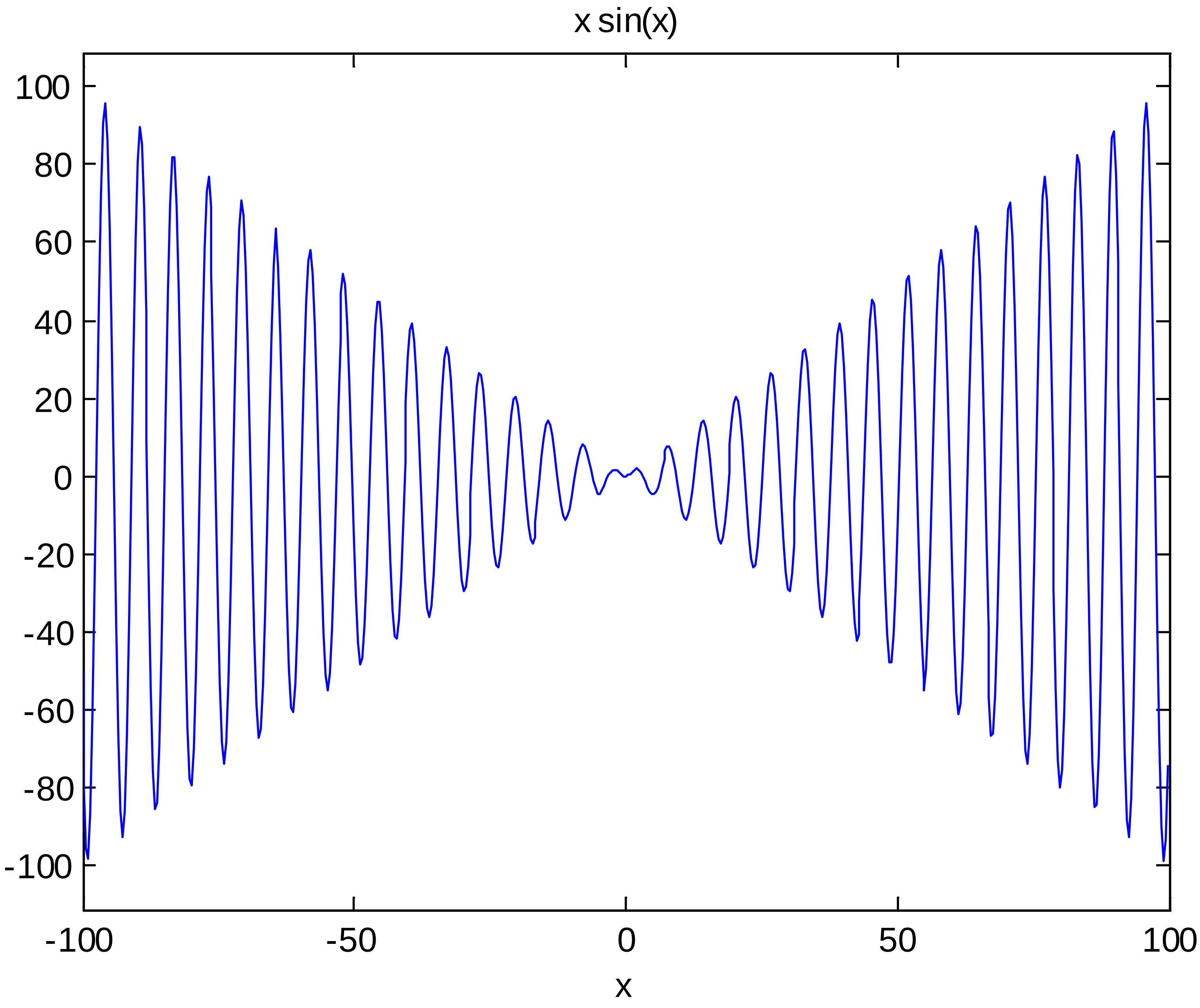
$$f(2n\pi) = 2n\pi \to \infty \ (\text{当 } n \to \infty)$$

但 $f(\frac{\pi}{2} + n\pi) = 0$

所以 $x \to \infty$ 时 , $f(x)$ 不是无穷大 !




x cos(x)
100
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-100
-50
0
50
100
x


x sin(x)
100
80
60
40
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-100
-50
0
50
100
x

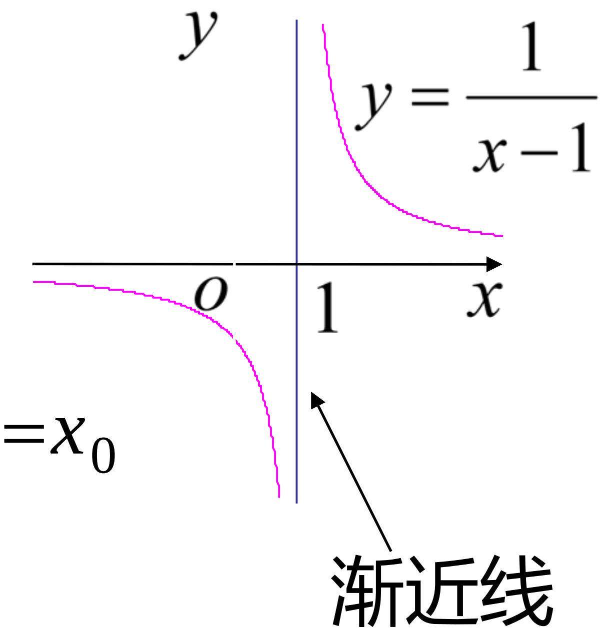
例. 证明 $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1} = \infty$

证: $\forall M > 0$, 要使 $\left| \dfrac{1}{x-1} \right| > M$, 只要 $|x-1| < \dfrac{1}{M}$.

因此可以取 $\delta = \dfrac{1}{M}$, 当 $0 < |x-1| < \delta$ 时,

$$\left| \frac{1}{x-1} \right| > M$$

$$\therefore \lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = \infty .$$



说明: 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$, 则直线 $x = x_0$

为曲线 $y = f(x)$ 的铅直渐近线 .

例.证明 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1}{1+x}=\infty$

证: $\forall M>0$, 要使 $\left|\dfrac{1}{1+\mathrm{x}}\right|>M$, 只要 $|1+\mathrm{x}|<\dfrac{1}{M}$.

因此可以取$\delta=\dfrac{1}{M}$, 当$0<\left|x-(-1)\right|=\left|x+1\right|<\delta$时, 有

$$\left|\frac{1}{1+x}\right|>\frac{1}{\delta}=M$$

$$\therefore \lim_{x\to -1}\frac{1}{1+x}=\infty$$

三、无穷小与无穷大的关系

定理3. 在自变量的同一变化过程中,

若 $f(x)$ 为无穷大, 则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小 ;

若 $f(x)$ 为无穷小, 且 $f(x)\neq 0$, 则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

说明: 据此定理 , 关于无穷大的问题都可转化为无穷小来讨论.

例. 求$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$，其中$a_0\neq 0, b_0\neq 0, n, m\in N^+$

解: 若$n=m$，用x^n同除分子分母，则

$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0+a_1\dfrac{1}{x}+\cdots+a_n\dfrac{1}{x^n}}{b_0+b_1\dfrac{1}{x}+\cdots+b_m\dfrac{1}{x^n}}=\frac{a_0+a_1\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+\cdots+a_n\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^n}}{b_0+b_1\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}+\cdots+b_m\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^n}}=\frac{a_0}{b_0}$$

若$n<m$，用x^m同除分子分母，则

$$\text{原式}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0\dfrac{1}{x^{m-n}}+a_1\dfrac{1}{x^{m-n+1}}+\cdots+a_n\dfrac{1}{x^m}}{b_0+b_1\dfrac{1}{x}+\cdots+b_m\dfrac{1}{x^m}}=\frac{0+0+\cdots+0}{b_0+0+\cdots+0}=0$$

若$n > m$,

因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}=0$，根据定理3有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\infty$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m\\ 0, & n<m\\ \infty, & n>m\end{cases}$$

四、无穷小的比较

引例． $x \to 0$ 时, $3x$, x^2, $\sin x$ 都是无穷小, 但

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x}=0, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{3x}=\frac{1}{3},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}=\infty,$$

可见无穷小趋于 0 的速度是多样的．

定义. 设 α , β 是自变量同一变化过程中的无穷小,

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=0$,则称 β 是比 α **高阶**的无穷小, 记作

$$\beta = o(\alpha)$$

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\infty$, 则称 β 是比 α **低阶**的无穷小;

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=C\neq 0$, 则称 β 是 α 的**同阶**无穷小;

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=C\neq 0$, 则称 β 是关于 α 的 $\boldsymbol{k}$ **阶**无穷小;

若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=1$, 则称 β 是 α 的**等价**无穷小, 记作 $\alpha\sim\beta$

或 $\beta\sim\alpha$

例如，当$x \to 0$ 时

$$x^3 = o(6x^2)\;;\quad \sin x \sim x\;;\quad \tan x \sim x$$

$$\arcsin x \sim x;\quad \ln(1+x) \sim x;\quad e^x - 1 \sim x$$

又如，

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4(\frac{x}{2})^2} = \frac{1}{2}$$

故 $x \to 0$ 时 $1-\cos x$ 是关于 x 的二阶无穷小, 且

$$1-\cos x \sim \tfrac{1}{2}x^2$$

例1. 证明: 当 $x \to 0$ 时, $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n} x$

证: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{\frac{1}{n} x}$

$$a^n - b^n = (a-b)\,(a^{n-1} + a^{n-2} b + \cdots + b^{n-1})$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt[n]{1+x})^n - 1}{\frac{1}{n} x \left[(\sqrt[n]{1+x})^{n-1} + (\sqrt[n]{1+x})^{n-2} + \cdots + 1 \right]}$$

$$= 1$$

$\therefore$ 当 $x \to 0$ 时, $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{n} x$

定理1. $\alpha \sim \beta \rightleftarrows \beta = \alpha + o(\alpha)$

证: $\alpha \sim \beta \rightleftarrows \lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$

$\rightleftarrows \lim(\dfrac{\beta}{\alpha} - 1) = 0$, 即 $\lim \dfrac{\beta - \alpha}{\alpha} = 0$

$\rightleftarrows \beta - \alpha = o(\alpha)$, 即 $\beta = \alpha + o(\alpha)$

例如, $x \to 0$ 时, $\sin x \sim x$, $\tan x \sim x$, 故

$x \to 0$ 时, $\sin x = x + o(x)$, $\tan x = x + o(x)$

定理2. 设 $\alpha \sim \alpha',\ \beta \sim \beta'$, 且 $\lim \dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在, 则

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$$

证: $$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim\left(\frac{\beta}{\beta'}\ \frac{\beta'}{\alpha'}\ \frac{\alpha'}{\alpha} \right)$$

$$= \lim \frac{\beta}{\beta'}\ \lim \frac{\beta'}{\alpha'}\ \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$$

例如, $$\lim_{x \to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{5x} = \frac{2}{5}$$

因式代替规则: 若 $\alpha \sim \beta$, 且 $\varphi(x)$ 极限存在或有界, 则

$$\lim \alpha\varphi(x) = \lim \beta\varphi(x)$$

例如, $$\lim_{x\to 0} \arcsin x \cdot \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x \cdot \sin\frac{1}{x} = 0$$

例1. 求 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \sin x}{x^3}$.

解: 原式 $\displaystyle = \lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}$　　原式 $\displaystyle \cancel{=} \lim_{x\to 0}\frac{x - x}{x^3}$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3} = \frac{1}{2}$$

例2. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}$.

解: 当 $x\to 0$ 时,

$$(1+x^2)^{\frac{1}{3}}-1 \sim \frac{1}{3}x^2$$

$$\cos x-1 \sim -\frac{1}{2}x^2$$

$$\therefore \quad 原式 = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^2}{-\frac{1}{2}x^2} = -\frac{2}{3}$$

例3. 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x^3+x^{\frac{5}{2}})\sqrt{\sin 2x}}{\tan^3 x}$.

解: 因为当$x\to 0^+$时, $\sin 2x \sim 2x, \tan x \sim x$

$$\text{原式} = \lim_{x\to 0^+}\frac{(x^3+x^{\frac{5}{2}})\sqrt{2x}}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^3\sqrt{2x}}{x^3}+\lim_{x\to 0^+}\sqrt{2}\,\frac{x^{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}}{x^3}$$

$$=\sqrt{2}$$

例4. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(e^{-x^2}-1)}{x^2\ln(1-2x)}$.

解: 因为当$x\to 0$时,

$$\sin x \sim x, e^{-x^2}-1\sim -x^2, \ln(1-2x)\sim -2x$$

$$\therefore \text{原式} = \lim_{x\to 0^+}\frac{x(-x^2)}{x^2(-2x)} = \frac{1}{2}$$

常用等价无穷小总结

设□为无穷小，则

$$\square \sim \sin\square \sim \tan\square \sim \arcsin\square \sim \arctan\square \sim \ln(1+\square) \sim e^{\square}-1$$

$$(1+\square)^{\frac{1}{n}}-1 \sim \frac{1}{n}\square, \quad (1+\square)^{\alpha}-1 \sim \alpha\square,$$

$$1-\cos\square \sim \frac{1}{2}\square^{2}$$