

# 构造辅助函数证明微分中值定理及应用

孙冬雪

(湖州师范学院 030713 班 313000 )

**摘要:** 构造辅助函数是证明中值命题的一种重要途径。本文给出了几种辅助函数的构造方法: 微分方程法, 常数  $K$  值法, 几何直观法, 原函数法, 行列式法; 并且举出具体例子加以说明。

**关键字:** 辅助函数, 微分方程, 微分中值定理

# **Constructing auxiliary function to prove differential median theorem and its coplications**

Sun Dong Xue

( Class of 030713 Huzhou Teachers College 313000 )

**Abstract:** Constructing auxiliary function is the important method to prove median theorem. This paper gives several ways of constructing auxiliary function: Differential equation, Constant K, Geometry law, Primary function law, Determinant law; and Gives some specific examples to illustrate how to constructing.

**Key words:** Auxiliary function; Differential equation; Differential median theorem

## 目录

一：引言.....	第 4 页
二：数学分析中三个中值定理.....	第 4 页
三：五种方法构造辅助函数.....	第 6 页
1：几何直观法.....	第 6 页
2：行列式法.....	第 7 页
3：原函数法.....	第 8 页
4：微分方程法.....	第 10 页
5：常数 $k$ 值法.....	第 13 页
四：结论.....	第 15 页
参考文献.....	第 15 页
致谢.....	第 16 页

## 一:引言

微分中值定理是应用导数的局部性质研究函数在区间上的整体性质的基本工具,在高等数学课程中占有十分重要的地位,是微分学的理论基础,这部分内容理论性强,抽象程度高,所谓中值命题是指涉及函数(包括函数的一阶导数,二阶导数等)定义区间中值一些命题,实际上,高等数学中的一些定理,如:罗尔定理,拉格朗日定理,柯西定理均可看做是中值命题。我们可以利用这些定理来证明其他的中值命题。

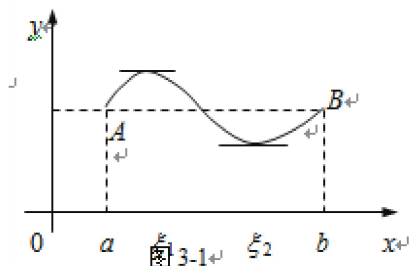
在证明中值命题时,首先要构造辅助函数,尤其是证明诸如:“至少存在一点,使得其代数式成立”这样结论的题目,证明中,如果辅助函数构造得当,题目很容易证明,反之题目将很难解决。所以构造恰当的辅助函数是证明中值命题的关键,人们在探究辅助函数构造规律的教学实践中,总结出了很多有益的方法,比如常数 $k$ 值法,原函数法,行列式法,微分方程法等。根据命题形式的变化选择合适的方法并加以解决.下面我们以不同的方法通过分析解决问题的途径。

## 二:数学分析中三个中值定理

**定理 1**<sup>[1-3]</sup> (Rolle 中值定理) 设函数  $f(x)$  满足

条件

- (1) 在闭区间  $[a, b]$  上连续,
- (2) 在开区间  $(a, b)$  内可微,
- (3)  $f(a) = f(b)$ ,



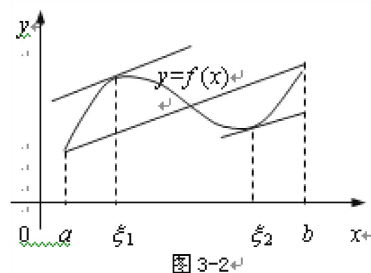
则至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$ .

我们先从几何角度分析定理的含意: 条件(3)说明弦  $AB$  平行于  $x$  轴; 条件(1)、(3)表明曲线  $y=f(x)$  是平面上一条以两个同高度的点  $A(a, f(a))$ 、 $B(b, f(b))$  为端点的连续曲线, (2)是说曲线在  $(a, b)$  内处处有不平行于  $y$  轴的切线; 结论是说在开区间  $(a, b)$  内部必至少有一点, 使得曲线  $y=f(x)$  在该点的切线平行于  $x$  轴, 从而平行于弦  $AB$ . 一句话, 平面上一条以两个同高度的点为端点的连续曲线处处有不平行于  $y$  轴的切线时, 其线内至少有一点, 其切线平行于  $x$  轴。

**定理 2** (Lagrange 中值定理) 设函数  $f(x)$  满足条件

- (1) 在闭区间  $[a, b]$  上连续;
- (2) 在开区间  $(a, b)$  内可微, 则至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad ①$$



我们也先从几何上看 Lagrange 定理的意义：①式右端是弦  $AB$  的斜率。定理是说，若平面上一条以  $A(a, f(a))$ 、 $B(b, f(b))$  为端点的连续曲线  $y = f(x)$  在  $(a, b)$  内处处有不平行于  $y$  轴的切线，则在开区间  $(a, b)$  内部必至少有一点，使得曲线  $y = f(x)$  在该点的切线平行于弦  $AB$ ，即平行于两个端点  $(a, f(a))$  与  $(b, f(b))$  的连线（图 3-2）

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

一句话，平面上以  $A, B$  为端点的连续曲线弧处处有不平行于  $y$  轴的切线时，其线内至少有一点，其切线平行于弦  $AB$ 。如果在 Lagrange 中值定理中增加函数在两端点值相等的条件则结论正是 Rolle 中值定理的结论。可见，Rolle 中值定理是 Lagrange 中值定理的特例，这又是一个先处理特殊后处理一般情形的例子。因而定理 2 证明的思路就是将 Lagrange 中值定理转化到 Rolle 中值定理上去以获得证明，

**定理 3**（Cauchy 中值定理）设函数  $f(x)$ 、 $g(x)$  满足条件

- (1) 在闭区间  $[a, b]$  上连续，
- (2) 在开区间  $(a, b)$  内可微，
- (3)  $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$ ，则至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ ，使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

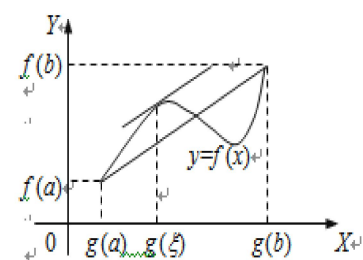


图 3-4

Cauchy 中值定理的几何意义在理解为参数方程是与 Lagrange 中值定理相同。

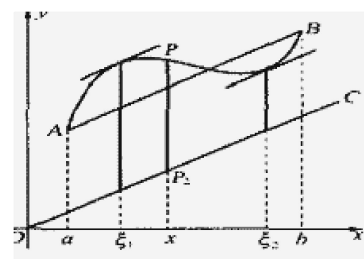
如果取函数  $g(x) = x$ ，Cauchy 中值定理就变成 Lagrange 中值定理了，所以 Cauchy 中值定理是 Lagrange 中值定理的推广，Rolle 中值定理是 Lagrange 中值定理的特殊情况（要求  $f(a) = f(b)$ ）；Lagrange 中值定理是中值定理的核心定理，故称之为微分学中值定理。

### 三：五种方法构造辅助函数

#### 1：几何直观法<sup>[5-6]</sup>

此法是通过几何图形考察两函数在区间端点处函数值的关系，从而建立恰当的辅助函数  
拉格朗日定理：设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续，在  $(a, b)$  内可导，则存在  $\xi \in (a, b)$ ，使等式

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \text{ 成立。}$$



分析：该命题条件不满足罗尔定理条件中的  $f(a) = f(b)$  .

但从左图可见  $\varphi_1(x) = f(x) - y_1(x)$ , 满足罗尔定理条件。

其中  $y_1(x)$  为直线 AB 的方程且

$$y_1(x) = f(a) + \frac{f(a) - f(b)}{b - a}(x - a),$$

从而可作辅助函数  $\varphi_1(x) = f(x) - y_1(x)$  证明本题.

证明：如图直线 AB 方程为

$$y_1(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

作辅助函数

$$\varphi_1(x) = f(x) - [f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)],$$

容易验证  $\varphi_1(x)$  适合罗尔定理条件,  $\varphi_1(b) = \varphi_1(a)$ ,  $\varphi_1(x)$  在  $[a, b]$  连续, 在  $(a, b)$  可导, 且

$$\varphi_1'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

由罗尔定理知至少存在一点  $\xi \in (a, b)$  使  $\varphi_1'(\xi) = 0$ , 即

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

亦即

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

一般来说, 凡  $f(x)$  与  $x$  的线性式, 只要在端点处取值相同, 都可取作辅助函数.

如下列函数:

$$\phi_3(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

$$\phi_4(x) = [f(x) - f(a)](b - a) - (x - a)[f(b) - f(a)],$$

$$\phi_5(x) = f(x)(b - a) - x[f(b) - f(a)],$$

都可取作辅助函数. 这些函数在  $[a, b]$  上都满足罗尔定理的条件, 从而可证明拉格朗日定理。

## 2: 行列式法:

经分析认识到罗尔定理是中值定理的特殊情况 (区间端点处的函数值相等)。而拉格朗日中值定理又是柯西中值定理当函数  $g(x) = x$  时的特殊情况。在进一步引导下, 会想到三

个定理间既然有着内在的联系能否用一个统一的形式加以刻画，从而引出下面的行列式定理。

定理：设函数  $f(x), h(x), g(x)$  在  $[a, b]$  上连续，在  $(a, b)$  内可导则至少存在一点  $\xi \in (a, b)$  使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix} = 0$$

成立。在上述定理中，当  $h(x)=1$  时，便是柯西中值定理。当  $h(x)=1$ ，且  $g(x)=x$  时，便是拉格朗日中值定理，当  $h(x)=g(x)=1$  时，便是罗尔定理。

例一：设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续，在  $(a, b)$  内可导，试证存在  $\xi \in (a, b)$  使

$$2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi).$$

分析：结论移项为

$$-2\xi[f(b)-f(a)]+(b^2-a^2)f'(\xi)=0,$$

即

$$0-2\xi \begin{vmatrix} 1 & f(a) \\ 1 & f(b) \end{vmatrix} + f'(\xi) \begin{vmatrix} 1 & a^2 \\ 1 & b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2\xi f'(\xi) \\ 1 & a^2 f(a) \\ 1 & b^2 f(b) \end{vmatrix},$$

将上述行列式中  $\xi$  换为  $x$ ，并求出原函数  $F(x)$

$$F(x) = \begin{vmatrix} 1 & x^2 f(x) \\ 1 & a^2 f(a) \\ 1 & b^2 f(b) \end{vmatrix},$$

即为要找的辅助函数。

证明：作辅助函数

$$F(x) = \begin{vmatrix} 1 & x^2 f(x) \\ 1 & a^2 f(a) \\ 1 & b^2 f(b) \end{vmatrix},$$

易验证  $F(a)=F(b)=0$ ，又  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续，在  $(a, b)$  内可导且

$$F'(x) = 2x(f(b)-f(a)) + f'(x)(b^2-a^2),$$

由罗尔定理知，至少存在  $\xi \in (a, b)$  使  $F'(\xi)=0$ ，即

$$-2\xi[f(b)-f(a)]+f'(\xi)(b^2-a^2)=0,$$

亦即

$$2\xi[f(b)-f(a)]=f'(\xi)(b^2-a^2).$$

### 3: 原函数法

(1) 原函数法的思想:

- ① 将要证的结论中的  $\xi$  换为  $x$ .
- ② 通过恒等变形将结论化为易消除导数符号的形式,
- ③ 用观察法或积分法求出原函数 (等式中不含导数符号), 并取积分常数为 0,
- ④ 移项使等式一边为 0, 另一边即为所求辅助函数  $F(x)$ .

(2) 拉氏中值定理证明中辅助函数的构造: 在拉氏中值定理的结论

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi),$$

中令:  $\xi=x$ , 则有

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(x).$$

两边积分得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x=f(x)+c,$$

取  $c=0$ , 得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x=f(x),$$

移项得

$$f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x=0,$$

故

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x,$$

为所求辅助函数.

(3) 柯西中值定理证明中辅助函数的构造. 在柯西中值定理的结论中

令  $\xi=x$ , 得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

若两边同时积分, 右端去不含导数符号, 为此将上式变形为

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)=f'(x),$$

积分得



$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)=f(x)+c,$$

取  $c=0$ , 并移项得

$$f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)=0,$$

故

$$F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x).$$

为所求辅助函数.

在利用中值定理证明相关命题时, 我们也可根据上面的思路来构造辅助函数, 既先把命题结论转化为  $[\ ]'_{x=\xi}=0$  的形式, 据此构造出适当的辅助函数  $F(x)$ . 使其符合罗尔定理条件,

然后利用罗尔定理给出 证明, 这就是原函数法, 但构造  $F(x)$  有时尚需一定的技巧.

例一: 设  $f(x)$  在闭区间  $[0,1]$  上连续, 在开区间  $(0,1)$  内可导, 且  $f(0)=f(1)=0$  试证:

在开区间  $(0,1)$  内至少存在一点  $\xi$  使

$$\xi f'(\xi)+f(\xi)=0.$$

分析: 原结论即  $[xf(x)]'_{x=\xi}=0$ , 因此可直接设  $F(x)=xf(x)$ . 显然  $F(x)$  在  $[0,1]$  上满足

罗尔定理, 由罗尔定理, 在  $(0,1)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使

$$F'(\xi)=\xi f'(\xi)+f(\xi)=0.$$

例二: 设  $f(x)$  在闭区间  $[0,1]$  上连续, 在开区间  $(0,1)$  内可导, 且  $f(1)=0$ ,

试证: 在开区间  $(0,1)$  内至少存在一点  $\xi$  使

$$f'(\xi)=-\frac{kf(\xi)}{\xi}(k>0).$$

分析: 原结论变形为

$$\xi f'(\xi)+kf(\xi)=0,$$

若设

$$F(x)=xf'(x)+kf(x).$$

难以构造  $F(x)$ , 考虑乘法求导法则

$$(uv)' = u'v + uv',$$

及导数公式

$$(x^k)' = kx^{k-1},$$

将原结论两端同乘以  $\xi^k$ 。整理得

$$\xi^k f'(\xi) + k\xi^{k-1} f(\xi) = 0,$$

即

$$[x^k f(x)]'_{x=\xi} = 0.$$

设  $F(x) = x^k f(x)$ , 由题设, 不难证明结论.

#### 4: 微分方程法<sup>[4]</sup>

证明的关键在于如何构造辅助函数, 若采用原函数的方法, 结论中的代数式非常复杂, 不易求出原函数, 故用微分方程的方法.

例一: 拉格朗日中值定理:

设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  内可导, 则在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

分析: 由结论发现, 将  $\xi$  看成变量  $x$ , 则可得到一阶微分方程

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

其通解为

$$f(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x + c.$$

若将常数  $c$  变为  $x$  的函数  $c(x)$ , 则得到一个辅助函数

$$c(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x,$$

证明: 作辅助函数

$$c(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} x,$$

有

$$c(a) = c(b) = \frac{bf(a) - af(b)}{b-a}.$$

则  $c(x)$  满足罗尔定理的三个条件，故在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$

使得 
$$c'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = 0.$$

$$\therefore f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

例二：设  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  上连续，在  $[0, +\infty)$  内可导，且

$$0 \leq f(x) \leq \frac{x}{1+x^2},$$

则至少存在一点  $\xi \in [0, +\infty)$ ，使

$$f'(\xi) = \frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}.$$

分析：先将  $\xi$  看成变量  $x$ ，由结论可化为使  $f'(x) - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0$ ，即

$$(f(x) - \frac{x}{1+x^2})' = 0.$$

易知其通解为  $f(x) - \frac{x}{1+x^2} = c$ ，若将常数  $c$  变为  $x$  的函数  $c(x)$ ，则得到一个辅助函数

$$c(x) = f(x) - \frac{x}{1+x^2}.$$

证明：作辅助函数  $c(x) = f(x) - \frac{x}{1+x^2}$ ，则数  $c'(x) = f'(x) - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ ，由已知条件

$0 \leq f(x) \leq \frac{x}{1+x^2}$  得到

$$f(0) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \text{ 且 } c(x) = f(x) - \frac{x}{1+x^2} \leq 0.$$

若  $c(x) \equiv 0, x \in (0, +\infty)$  时，则  $c'(x) = 0$  即有  $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ 。

若  $c(x) \neq 0, x \in (0, +\infty)$  时则必定存在  $a (0 < a < +\infty)$ ，使  $c(a) < 0$ ，又  $c(x)$  在  $[0, +\infty)$  上连

续，由介值定理，必存在  $b, c$  两点， $0 < b < a < c < +\infty$  使  $c(a) < c(b) = c(c) < 0$ 。对  $c(x)$

$[b, c]$  上使用罗尔定理，则至少存在一点  $\xi \in (b, c) \subset (0, +\infty)$ 。使得  $c'(\xi) = 0$ ，即

$$f'(\xi) = \frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}.$$

在上述例子中, 将某一客观存在的定值  $\xi$  看成变量  $x$ , 利用常数变易法的基本思想, 将常微分方程通解中的独立常数  $c$  变为关于  $x$  的函数  $c(x)$ , 我们就可得到待证命题中所需的辅助函数. 如果在教学过程中恰当的引入此法, 对于开拓学生的思路, 培养学生分析问题, 解决问题的能力 and 创新能力是有益的. 通过微分方程构造辅助函数的步骤如下:

- (1) 先将结论中的值  $\xi$  改为  $x$ , 从而得到关于  $x$  的微分方程.
- (2) 再求解该方程的通解, 并解出常数  $c$ .
- (3) 将常数  $c$  写成关于  $x$  的函数  $c(x)$ , 即  $c(x)$  就是所需辅助函数.
- (4) 对辅助函数  $c(x)$  在给定区间应用罗尔定理, 即得结论.

这种构造辅助函数的方法在证明中值命题时很有实用价值, 也便于推广应用.

## 5: 常数 $k$ 值法

直接从定理的条件出发构造辅助函数, 较为自然的想法是已知函数  $y = f(x)$ , 未必满足  $f(a) = f(b)$ . 那么能否给  $f(x)$  添加一个尾项使得添加后的函数满足罗尔定理的三个条件呢? 最简单的尾项是取作  $x$ , 若取  $F(x) = f(x) + x$ , 则有  $F(a) \neq F(b)$  为此给  $x$  添上一个可伸缩的系数使得出现  $F(a) = F(b)$  取辅助函数  $F(x) = f(x) + kx$ , 从  $f(a) + ka = f(b) + kb$  中解得

$$k = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

故  $F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$  即为拉氏中值定理证明中的辅助函数. 这种引入方式可以减少困难易于理解, 更重要的是能培养学生的思维能力和创造能力. 沿着上述思维方式发展下去, 自然会想到若给  $f(x)$  添加的尾项改为函数  $g(x)$  会怎样? 即取  $F(x) = f(x) + kg(x)$

则由  $F(a) = F(b)$  可得  $k = -\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$ , 由  $g(b) - g(a) \neq 0$  所以对  $g(x)$  再提出要求.

即在  $(a, b)$  内可导且  $g'(x) \neq 0$ , 这正是柯西中值定理中的已知条件, 故

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g(x).$$

即为柯西中值定理证明中的辅助函数，事实上易验证  $F(x)$  满足罗尔定理的三个条件，对  $F(x)$  在  $[a, b]$  上应用罗尔定理即得，在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ ，使得  $F'(\xi) = 0$  即

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

例一：设函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续，在  $(a, b)$  内可导，证明在  $(a, b)$  内至少存在一点  $\xi$ ，使得

$$\frac{bf(b) - af(a)}{b - a} = f(\xi) + \xi f'(\xi).$$

分析：令

$$\frac{bf(b) - af(a)}{b - a} = k,$$

则

$$bf(b) - kb = af(a) - ka,$$

为一个关于  $a$  与  $b$  的对称式。故可取

$$F(x) = xf(x) - kx.$$

证明：令

$$F(x) = xf(x) - \frac{bf(b) - af(a)}{b - a}x,$$

则  $F(x)$  在  $[a, b]$  上连续，在  $(a, b)$  内可导，又  $F(a) = F(b) = 0$  从而  $F(x)$  在  $[a, b]$  上满足罗尔定理，于是存在一个  $\xi \in (a, b)$ ，使得  $F'(\xi) = 0$ ，即

$$f(\xi) + \xi f'(\xi) - \frac{bf(b) - af(a)}{b - a} = 0.$$

亦即

$$\frac{bf(b) - af(a)}{b - a} = f(\xi) + \xi f'(\xi).$$

例二：设  $f''(x)$  在  $[a, b]$  上存在， $a < c < b$ ，试证明存在  $\xi \in (a, b)$ ，使得

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = \frac{1}{2} f''(\xi).$$

分析：令

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{f(b)}{(b-a)(b-c)} + \frac{f(c)}{(c-a)(c-b)} = k,$$

于是有

$$(b-c)f(a)+(a-b)f(c)+(c-a)f(b)=k(a-b)(a-c)(b-c),$$

上式为关于  $a, b, c$  三点的轮换对称式令  $b = x$  (or :  $c = x$ , or :  $a = x$ ) 则得

$$F(x) = (x-c)f(a) + (a-x)f(c) + (c-a)f(x) - k(a-x)(a-c)(x-c).$$

证明：令

$$F(x) = (x-c)f(a) + (a-x)f(c) + (c-a)f(x) - k(a-x)(a-c)(x-c).$$

则  $F(x)$  在  $[a, c], [c, b]$  上满足罗尔定理三个条件, 于是分别存在  $\xi_1 \in (a, c), \xi_2 \in (c, b)$  使

$$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0.$$

又

$$F'(x) = f(a) - f(c) + (c-a)f'(x) + k(a-c)(x-c) - k(a-x)(a-c).$$

$$F''(x) = (c-a)f''(x) + 2k(a-c).$$

从而可知  $F'(x)$  在  $[\xi_1, \xi_2]$  上满足罗尔定理三个条件, 故存在  $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a, b)$  使

$$F''(\xi) = 0 \text{ 即}$$

$$(c-a)f''(\xi) + 2k(a-c) = 0.$$

亦即

$$\frac{1}{2}f''(\xi) = k.$$

将常数  $k$  值法进行总结并归纳出下面一般性结论:

(1) 常数  $k$  值法适用于欲证结论为: 至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f''(\xi) = k, (k \neq 0)$ . 及其代数式的命题.

(2) 常数  $k$  值法构造辅助函数的步骤为:

①将欲证等式中常数部分分离出来并令为  $k$ .

②恒等变形使等式一端为  $a$  及  $f(a)$  构成的代数式, 另一端为  $b$  及  $f(b)$  构成的代数式.

③分析关于端点的表达式是否为对称式或轮换式, 若是, 只需把端点  $a$  改为  $x$ . 相应的函数

数值改为  $f(x)$  则换变量后的表达式就是所求的辅助函数.

#### 四：结论

以上用了构造辅助函数的几种方法，但要根据题目选择合适的方法这才是最重要的.一般的我们从命题结论入手，在微分中值定理辅助函数的构造中通常有哪几种方法？当命题结论为  $F(\xi, f(\xi), f'(\xi)) = 0$  这类形式时，一般采用哪种方法？在已有的成果中我们了解到，当欲证结论为：至少存在一点及  $\xi \in (a, b)$  使  $f''(\xi) = k (k \neq 0)$  其代数式时，通常采用常数  $k$  值法，当欲证结论经过适当变形较易向罗尔中值定理靠拢时，通常采用原函数法，当欲证结论经过适当变形可写成一个三阶行列式时，可将行列式中的  $\xi$  换成  $x$ ，然后采用行列式法，当欲证结论可写为  $F(\xi, f(\xi), f'(\xi)) = 0$  时，通常采用微分方程法.

### 参考文献

- [1] 刘玉链, 傅沛仁编, 数学分析讲义(上册) [M]. 高等教育出版社, 1985
- [2] 吉米多维奇, 数学分析习题集[M]. 山东: 科学技术出版社, 1981
- [3] 陈纪修, 於崇华, 金路. 数学分析(上册) [M]. 高等教育出版社, 2002, 9
- [4] 王高雄, 周之铭, 朱思铭, 王寿松编. 常微分方程[M]. 高等教育出版社, 1983, 9
- [5] 李玉凯, 史成堂, 翟美玲. 微分中值定理的研究[J]. 河南教育学院学报, 2003, 6
- [6] 文香丹. 微分方程在证明微分中值定理类问题中的应用[J]. 延边大学学报, 2005, 9
- [7] Walter Rudin ,Principles of mathematical Analysis, third Edition ISBN 7-111-13306-4, 2003

### 致谢

感谢王莉婕老师的精心指导,让我从中得到很多启示,并且顺利地完成了这篇论文.