例 求方程 $y''+\dfrac{x}{1-x}y'-\dfrac{1}{1-x}y=x-1$ 的通解.

解 $\because 1+\dfrac{x}{1-x}-\dfrac{1}{1-x}=0,$

对应齐方一特解为 $y_1=e^x$，由刘维尔公式

$$y_2=e^x\int\frac{1}{e^{2x}}e^{-\int\frac{x}{1-x}dx}dx=x,$$

对应齐方通解为 $Y=C_1x+C_2e^x.$

设原方程的通解为 $y = c_1(x)x + c_2(x)e^x$,

$c_1'(x)$，$c_2'(x)$ 应满足方程组

$$\begin{cases} xc_1'(x) + e^x c_2'(x) = 0 \\ c_1'(x) + e^x c_2'(x) = x - 1 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} c_1'(x) = -1 \\ c_2'(x) = xe^{-x} \end{cases}$$

$$c_1(x) = -x + C_1, \qquad c_2(x) = -xe^{-x} - e^{-x} + C_2$$

原方程的通解为 $y = C_1 x + C_2 e^x - x^2 - x - 1.$

定义 由常系数齐次线性方程的特征方程的根确定其通解的方法称为**特征方程法**.

例1 求方程 $y''+4y'+4y=0$ 的通解.

解 特征方程为 $r^2+4r+4=0$,

解得 $r_1=r_2=-2$,

故所求通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$.

例2　求方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解.

解　特征方程为 $r^2+2r+5=0$,

解得　$r_{1,2}=-1\pm 2j$,

故所求通解为

$$y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x).$$

華東師範大學 EAST CHINA NORMAL UNIVERSITY
计算机科学与软件工程学院 School of Computer Science and Software Engineering

例3. 已知$y_1 = xe^x + e^{2x}, y_2 = xe^x, y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$
是二阶常系数线性非齐次微分方程

$$y'' + py' + qy = e^x - 2xe^x$$

的三个特解，求此微分方程。

解：$y_1 - y_3 = e^{-x}, \quad \Rightarrow$ 特征根$r_1 = -1$

$y_1 - y_2 = e^{2x}, \quad \Rightarrow$ 特征根$r_2 = 2$

$\therefore$ 特征方程为:$(r+1)(r-2) = 0$

$$\Rightarrow r^2 - r - 2 = 0$$

$\therefore$ 齐次方程为$y'' - y' - 2y = 0$

$\therefore$ 微分方程为$y'' - y' - 2y = e^x - 2xe^x$

華東師範大學
EAST CHINA NORMAL UNIVERSITY
计算机科学与软件工程学院
School of Computer Science and Software Engineering

例4 求方程

$y^{(5)}+y^{(4)}+2y^{(3)}+2y''+y'+y=0$ 的通解.

解 特征方程为 $r^5+r^4+2r^3+2r^2+r+1=0$,

$$(r+1)(r^2+1)^2=0,$$

特征根为 $r_1=-1,\quad r_2=r_3=j,\quad r_4=r_5=-j,$

故所求通解为

$$y=C_1e^{-x}+(C_2+C_3x)\cos x+(C_4+C_5x)\sin x.$$

華東師範大學
EAST CHINA NORMAL UNIVERSITY
计算机科学与软件工程学院
School of Computer Science and Software Engineering