大学基础物理学

University Fundamental Physics

电子工程系@华东师范大学

李波

2019年

简谐运动的描述

先从最简单的振动开始研究(简谐振动)

在一切振动中，最简单和最基本的振动称为**简谐运动**。物体运动时，如果离开平衡位置的位移（或角位移）按**余（正）弦函数**的规律随时间变化------简谐运动

任何复杂的运动都可以看成是若干简谐运动的合成

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

A: 振幅， ω: 角频率 ， $\omega t + \varphi$: 相， φ: 初相

振动的范围 振动的快慢 运动状态

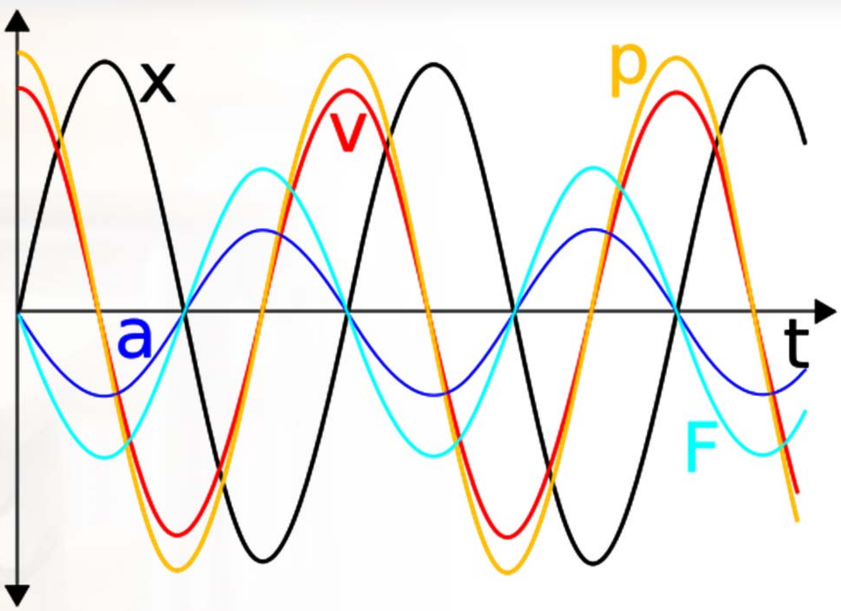
$$\boxed{v = \frac{dx}{dt}; a = \frac{d^2x}{dt^2}}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) = \omega A\cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) = \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi + \pi)$$

简谐运动的描述

振动曲线



$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) = \omega A\cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) = \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi + \pi)$$

$$p = mv = m\frac{dx}{dt} = m\omega A\cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi + \pi)$$

说明：

物体在简谐运动时，其位移、速度、加速度都是周期性变化的

v 比 x 超前 $\pi/2$, a 比 x 超前 π

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$$

简谐运动

微分方程

$$\omega^2=\frac{k}{m}$$

$$\frac{dv}{dt}=-\omega^2x$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\omega^2x$$

$$\frac{dv}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=-\omega^2x$$

$$vdv=-\omega^2xdx$$

$$\frac{v^2}{2}=-\frac{\omega^2x^2}{2}+c$$

令 $:v=0,\quad c=\frac{\omega^2A^2}{2}$

$$\frac{dx}{dt}=-\omega\sqrt{A^2-x^2}$$

$$\omega dt=-\frac{dx}{\sqrt{A^2-x^2}}=-\frac{d(\frac{x}{A})}{\sqrt{1-(\frac{x}{A})^2}}$$

$$\omega t+\varphi_0=\arccos(\frac{x}{A})$$

$$a=\frac{f}{m}=-\frac{k}{m}x$$

$$\Rightarrow$$

$$x=A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) = \omega A\cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) = \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi + \pi)$$

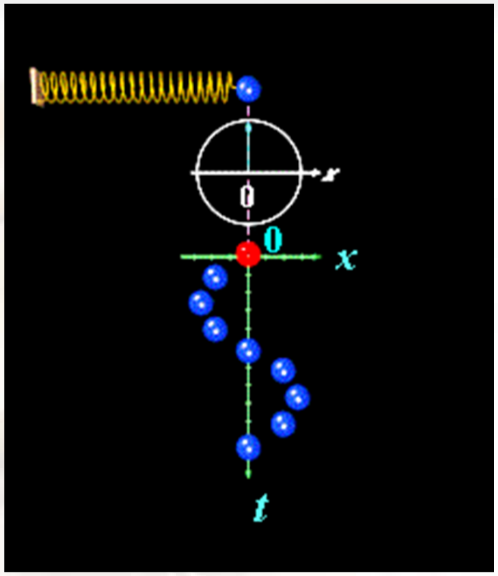
$$\boxed{a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x}$$

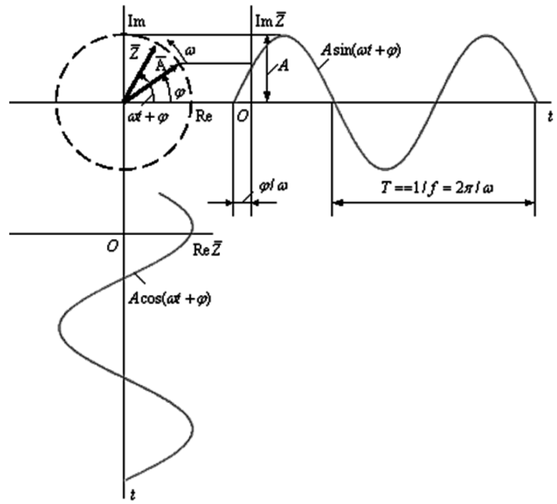
$$\boxed{F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega^2 x}$$

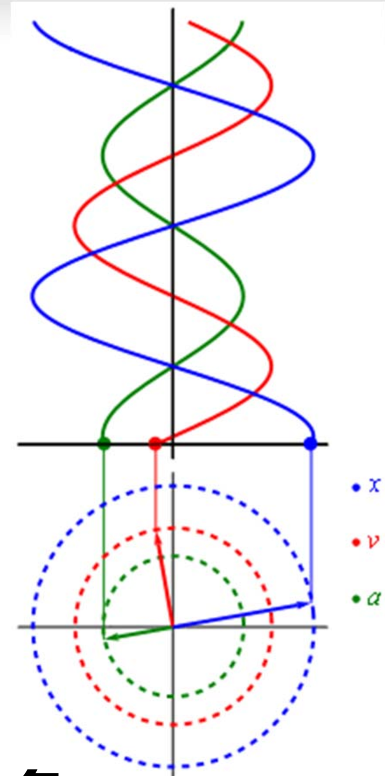
$$f = -kx$$

力的方向与位移的方向相反，始终指向平衡位置的，称为回复力。

简谐运动的描述







振幅A ——圆周半径

固有频率ω_0——匀角速度

位相ϕ ——旋转矢量与X轴的夹角

旋转矢量端点的投影坐标： $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$

投影点的速度： $v = \omega_0 A\cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2)$

投影点的加速度： $a = \omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \varphi + \pi)$

简谐运动的描述

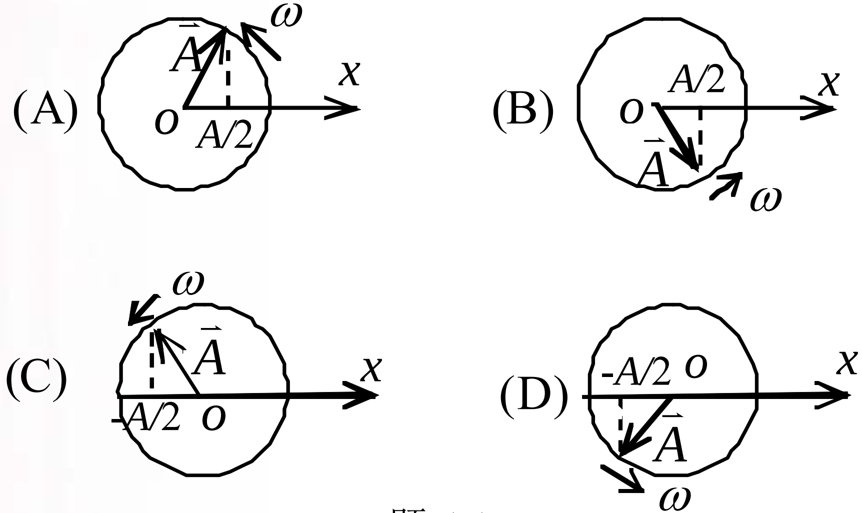
结论 旋转矢量作匀速转动时，其端点的位置、速度、加速度在X轴上的投影，等于一特定的简谐振动的位移、速度、加速度。

一般地，给定A、ω、φ三个特征量就唯一确定一个简谐振动。

注：1）仅在旋转矢量法中，A、ω_0、ϕ才有几何意义。

2）此方法只是直观描述简谐振动的工具。

一质点作简谐振动，振幅为*A*，在起始时刻质点的位移为 ，**A/2** 且向*x*轴的正方向运动，代表此简谐振动的旋转矢量图



题 (3)

【 B 】

例1：一个沿 x 轴作谐振动的弹簧振子，振幅为 A，周期为T，若 t = 0 时，质点的状态分别为：（1）$x_0 = -A$；（2）过平衡位置向x正向运动；（3）过 x = A/2 处向x负方向运动；试求相应的初相，并写出用余弦函数表示的振动方程。

解：所求振动方程为

$$x = A\cos(\omega t + \phi) = A\cos(\frac{2\pi}{T}t + \phi)$$

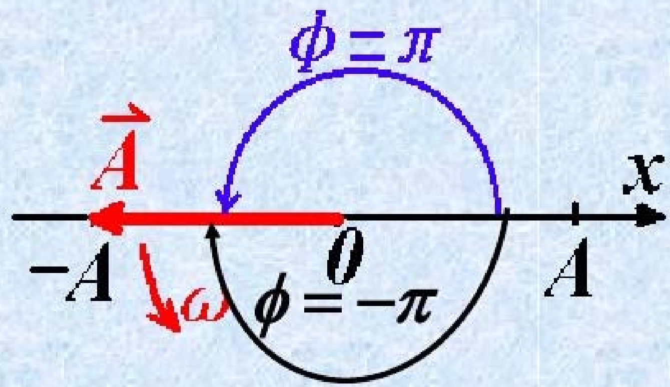
（1）解析法（$x_0 = -A$）

由$x_0 = A\cos\phi = -A, \Rightarrow \cos\phi = -1, \Rightarrow \phi = \pi$

旋转矢量法：

$\phi = \pi$或$-\pi$

$$\therefore x = A\cos(\frac{2\pi}{T}t + \pi)$$



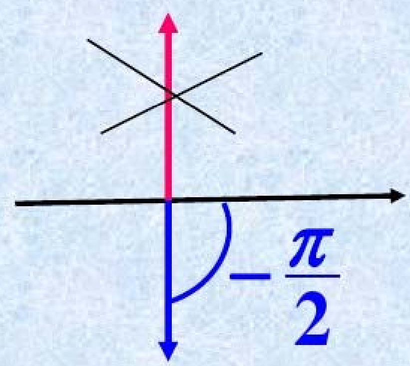
(2)解析法(过平衡位置向x正向运动)

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= A\cos\phi = 0 \Rightarrow \phi = \pm\frac{\pi}{2} \\ v_0 &= -\omega A\sin\phi > 0 \Rightarrow \sin\phi < 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \phi = -\frac{\pi}{2}$$

旋转矢量法:

$$\phi = -\frac{\pi}{2} \text{ 或 } \frac{3\pi}{2}$$

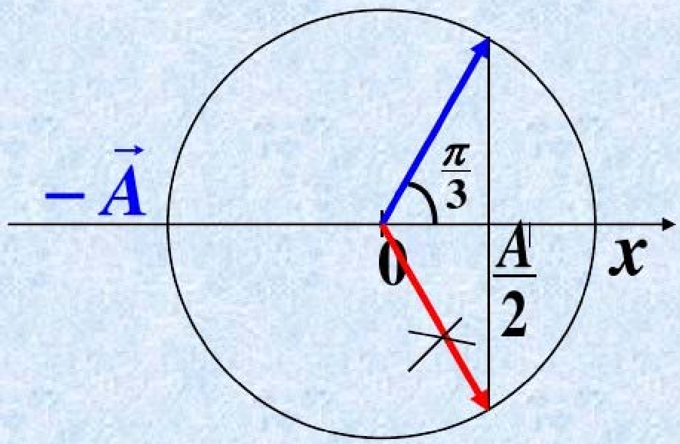
$$\therefore x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{2}\right)$$



(3)解析法略 (过 $x = A/2$ 处向x负方向运动)

旋转矢量法:

$$\phi = \frac{\pi}{3}$$



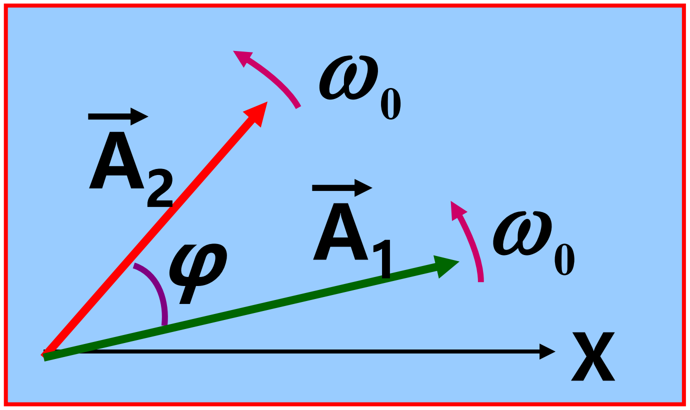
$$\therefore x = A\cos(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{3})$$

简谐运动的描述

设两频率相等的简谐振动：

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$



它们的位相差：

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1 = \varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi$$

——初位相差

简谐运动的描述

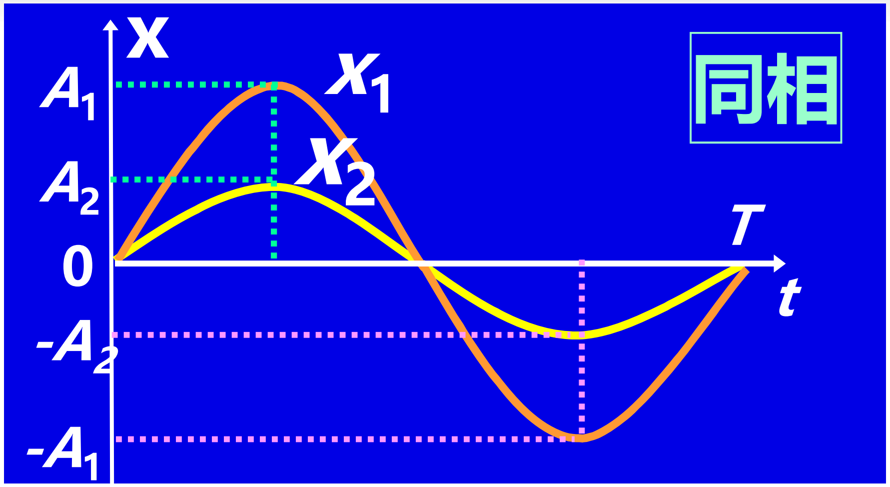
(1) $\Delta\phi = 2k\pi$ 或 0　　$\varphi_2 = \varphi_1 + 2k\pi$

$$x_1 = A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega_0 t + \varphi_1 + 2k\pi)$$

$$= A_2\cos(\omega_0 t + \varphi_1)$$

两振子同时到达同方向各自最大位移处，同时过平衡点向同方向运动两振动步调一致。

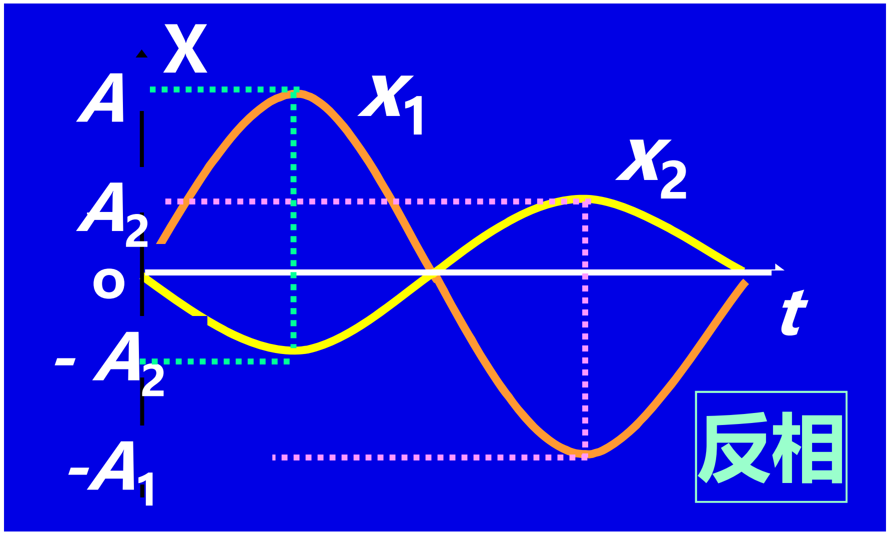


(2) $\Delta\phi = (2k+1)\pi$　　$\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$

$$x_1 = A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega_0 t + \varphi_1 + 2k\pi + \pi)$$

$$= -A_2\cos(\omega_0 t + \varphi_1)$$



简谐运动的描述

(3) $\Delta\phi \neq k\pi$

则两振动不同相，

若$\Delta\phi$ > 0　　则：$\varphi_2 > \varphi_1$

x_2 比x_1较早达到正向最大，称x_2比x_1超前 $\Delta\phi$ 的位相(或x_1比x_2落后)。

注：　位相的周期是2π，**一般$\Delta\phi$的值限制在 $\pm\pi$ 以内**

例如：　$$\Delta\phi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{3}{2}\pi = -\frac{1}{2}\pi$$

一般说，x_2的振子比 x_1的落后 $\frac{\pi}{2}$ 的位相

$$f = -kx$$

质点在与对平衡位置的位移成**正比**，而**反向**的合外力作用下的运动就是**简谐运动**。 ------动力学定义

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

固有角频率 固有周期

$$f = -kx$$

初始条件： $t = 0$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$x_0 = A\cos\varphi$$

$$v = \omega A\cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

$$v = -\omega A\cos\varphi$$

$$\boxed{A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}}$$

$$\boxed{\varphi = \arctan\left(-\frac{v_0}{\omega x_0}\right)}$$

简谐振动系统的能量

---简谐振动系统的动能和势能

水平弹簧振子的总机械能 $E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$

任意时刻 t

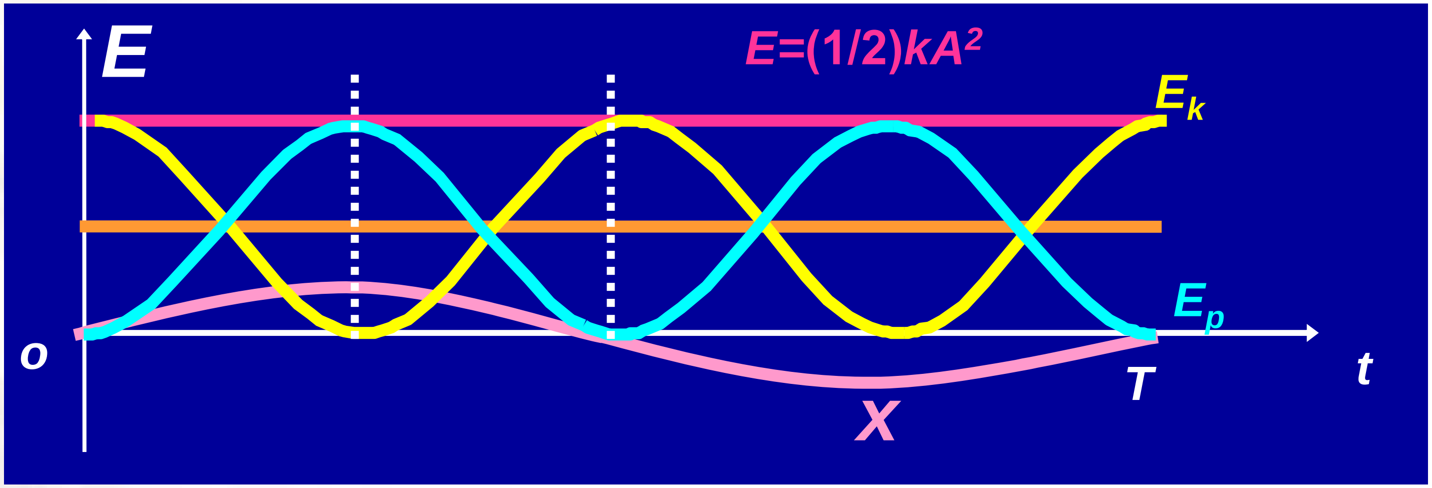
$\omega^2 = \frac{k}{m}$

动能 $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$

势能 $E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$

随时间变化

总机械能 $E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2$ =常量



$$\overline{E}_p = \overline{E}_k$$

E = 常量：简谐振动的过程正是动能与势能相互转换的过程

动能与势能的时间平均值:

$$\overline{E_k} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0)dt = \frac{1}{4}kA^2$$

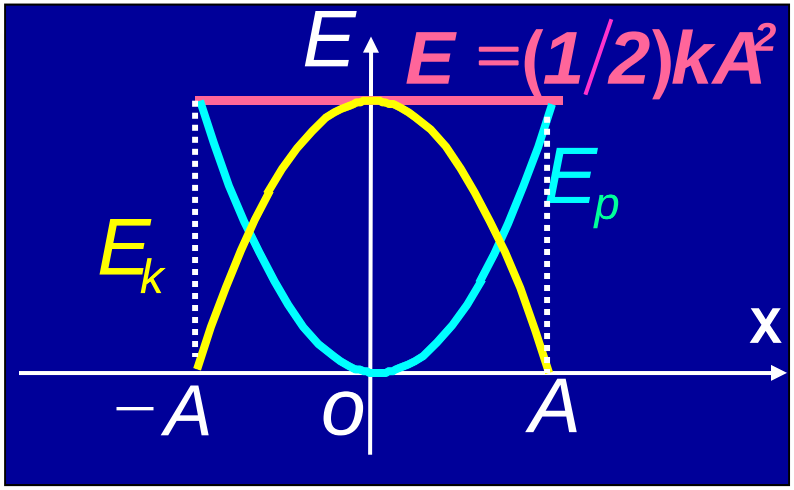
$$\overline{E_P} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t+\varphi_0)dt = \frac{1}{4}kA^2$$

$$\boxed{\overline{E}_k = \overline{E}_p = E_t/2}$$

$$E_k = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \rightarrow \boxed{E_k = \frac{1}{2}k(A^2 - x^2)}$$

$$E_p = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi) \rightarrow \boxed{E_p = \frac{1}{2}kx^2}$$

能量与位移关系



E正比于振幅的平方***A***²

$$\boxed{A = \sqrt{\frac{2E}{k}}}$$

结论:

弹簧振子的动能和势能的平均值**相等**，且等于总机械能的**一半**

任一简谐振动总能量与振幅的**平方**成正比

振幅不仅给出简谐振动运动的**范围**，而且还反映了振动系统**总能量**的大小（振动的强度）

这些结论同样适用于任何简谐振动!!!

简谐振动的合成与分解

1. 同振动方向、同频率的两个简谐振动的合成

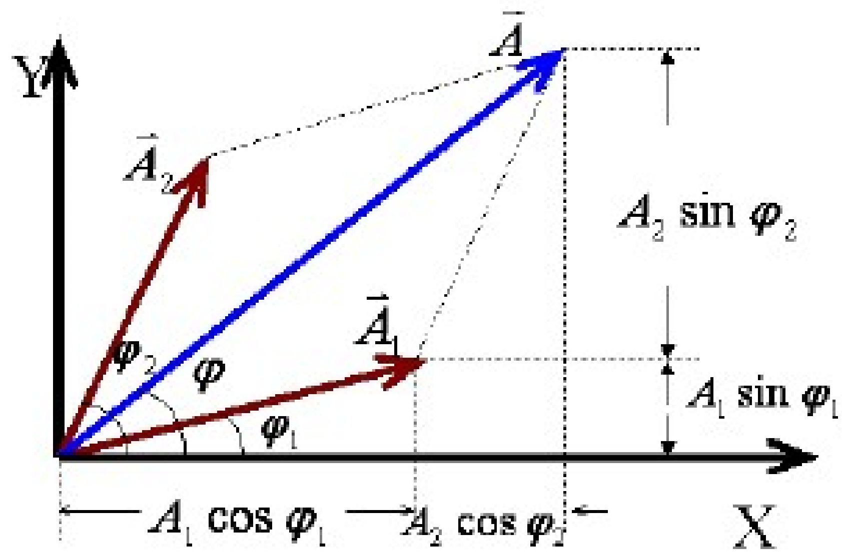
设两简谐振动为：

$$x_1 = A_1\cos(\omega_0 t+\varphi_1)$$

$$x_2 = A_2\cos(\omega_0 t+\varphi_2)$$

用旋转矢量法：

$$\vec{A}_1+\vec{A}_2=\vec{A}$$



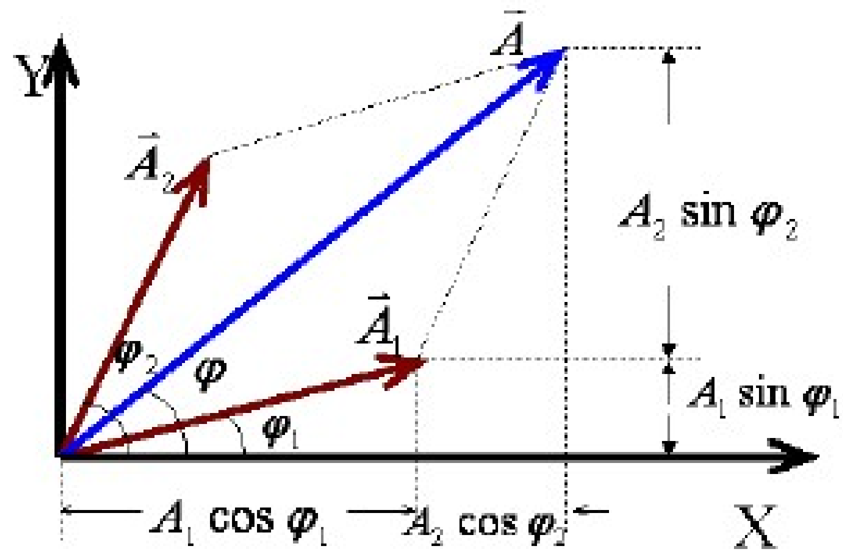
$\vec{A}$在X轴的投影： $x = A\cos(\omega_0 t+\varphi)$

由几何关系得： $x = x_1 + x_2$ x_1、x_2的合振动就是 x

即： $x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t+\varphi)$

合振动的振幅为A:

$$\boxed{A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$



合振动的初位相φ:

$$\boxed{tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}}$$

结论:

(1)合振动仍是同频率的简谐振动。

(2)合振幅不仅与分振幅有关还与$\Delta\varphi$有关。

特例：

1： 两个分振动同相

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$$

$$A^2 = A_1^{\ 2} + A_2^{\ 2} + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

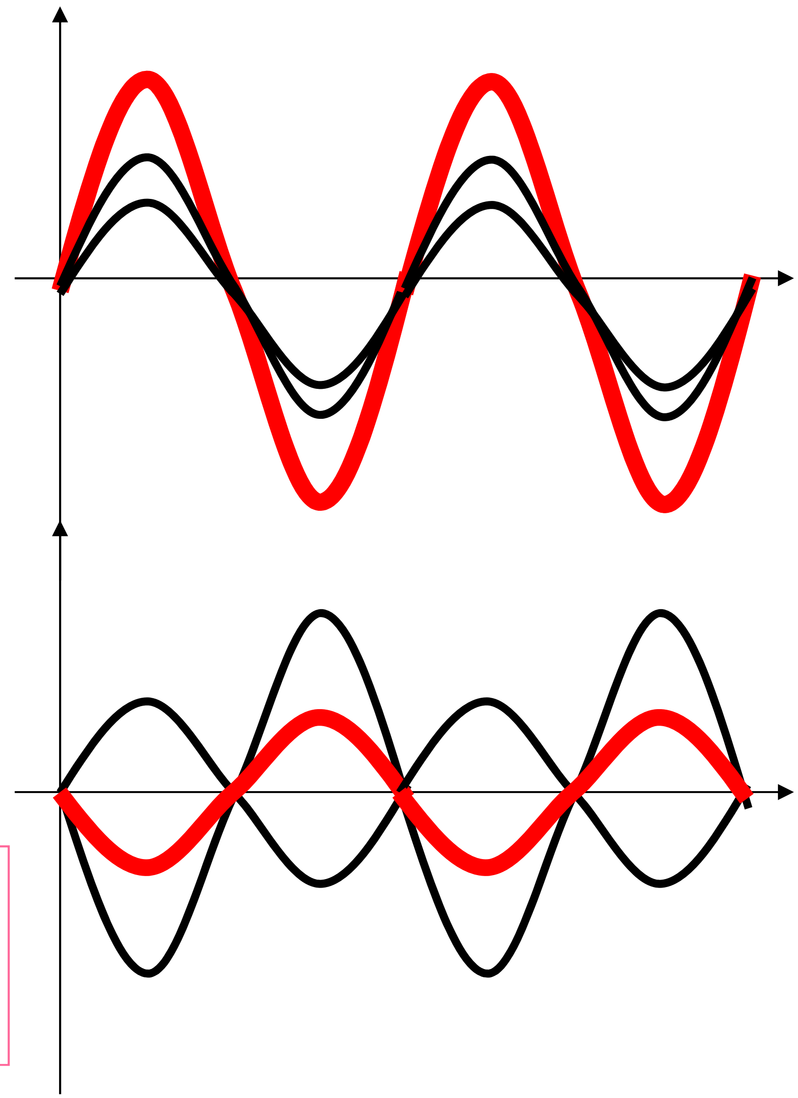
$A = |A_1 + A_2|$ **合振幅最大**

2： 两个分振动反相

$$\varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi$$

$$A^2 = A_1^{\ 2} + A_2^{\ 2} + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$A = |A_1 - A_2|$ **合振幅最小**



(1)合振动仍是**同频率**的**简谐振动**。

(2)合振幅不仅与分振幅有关还与**$\Delta\varphi$有关**，合振幅的值在A_1+A_2与A_1-A_2（绝对值）之间。

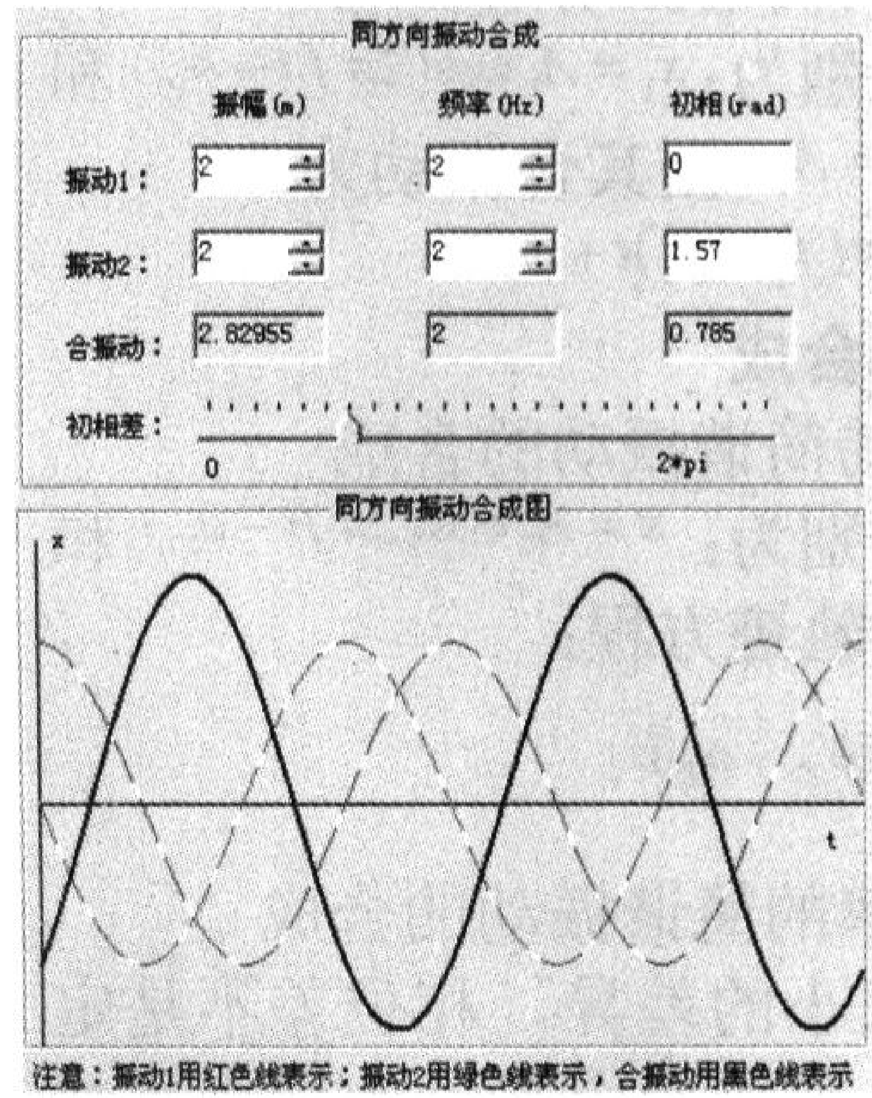


图2. 同方向同频率振动的合成

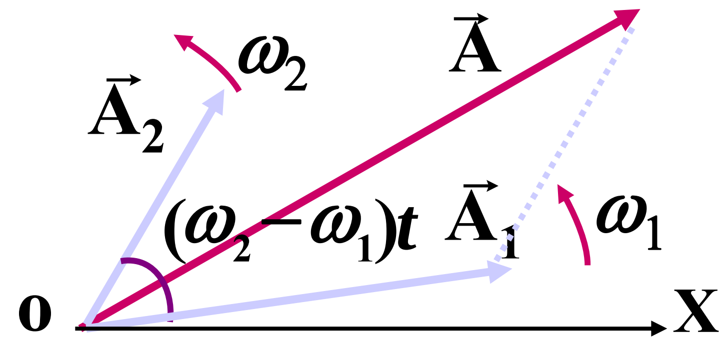
同振动方向、不同频率的两个简谐振动的合成

设两振动为：x_1、x_2

$\vec{A}_1$与 $\vec{A}_2$以不同的角速度旋转

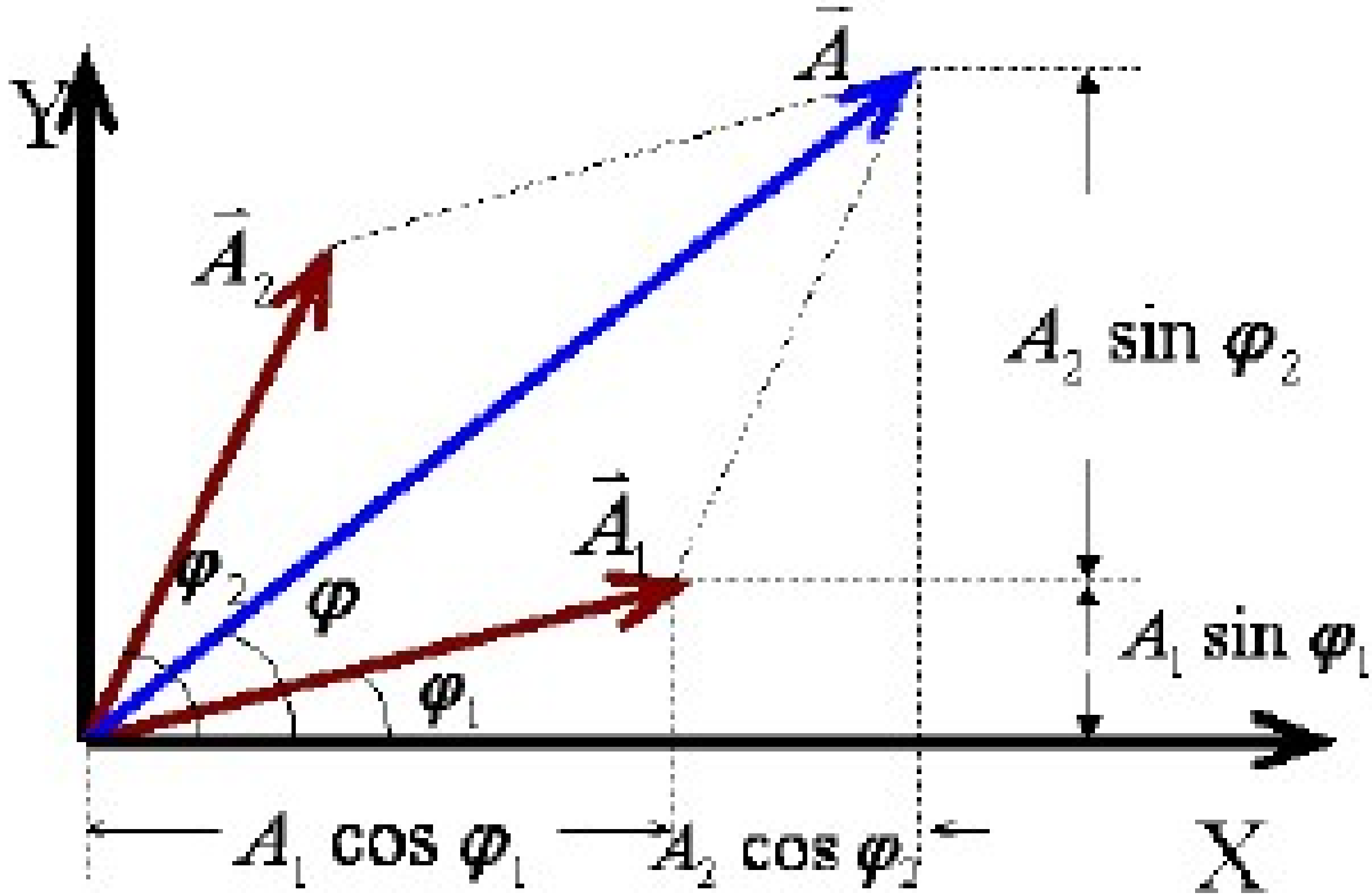
它们之间的夹角为：

$$\Delta\phi=(\omega_2 t+\varphi_2)-(\omega_1 t+\varphi_1)$$
$$=(\omega_2-\omega_1)t+(\varphi_2-\varphi_1)$$



∴ 则合运动不是简谐振动。

$$\boxed{A^2=A_1^{\,2}+A_2^{\,2}+2A_1A_2\cos\Delta\phi}$$



$\vec{A}$
Y
$\vec{A}_2$
$A_2 \sin \varphi_2$
$\vec{A}_1$
φ_2
φ
$A_1 \sin \varphi_1$
φ_1
$A_1 \cos \varphi_1$
$A_2 \cos \varphi_2$
X

$$(A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2)^2 + (A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2)^2$$

$$= A_1^2 \sin^2\varphi_1 + A_2^2 \sin^2\varphi_2 + 2A_1 \sin\varphi_1 A_2 \sin\varphi_2$$

$$+ A_1^2 \cos^2\varphi_1 + A_2^2 \cos^2\varphi_2 + 2A_1 \cos\varphi_1 A_2 \cos\varphi_2$$

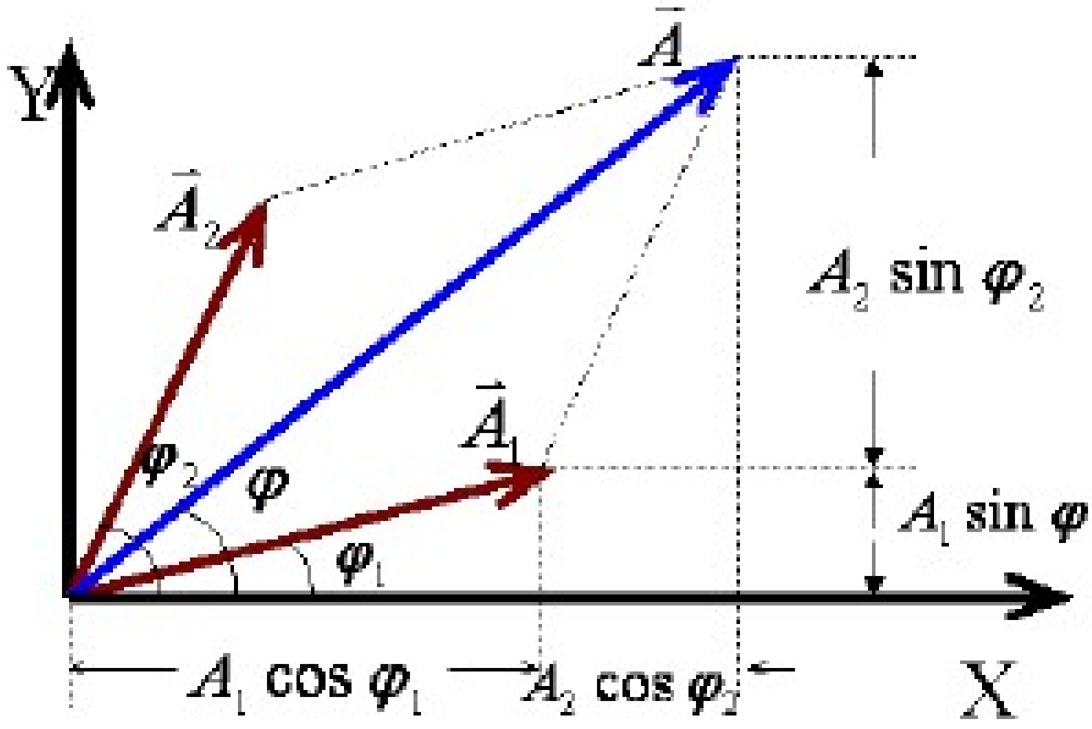
$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + 2A_1A_2 \cos\varphi_1 \cos\varphi_2$$

$$= A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 (\sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + \cos\varphi_1 \cos\varphi_2)$$

$\boxed{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$A^2 = A_1^{\ 2} + A_2^{\ 2} + 2A_1A_2\cos\Delta\phi$$

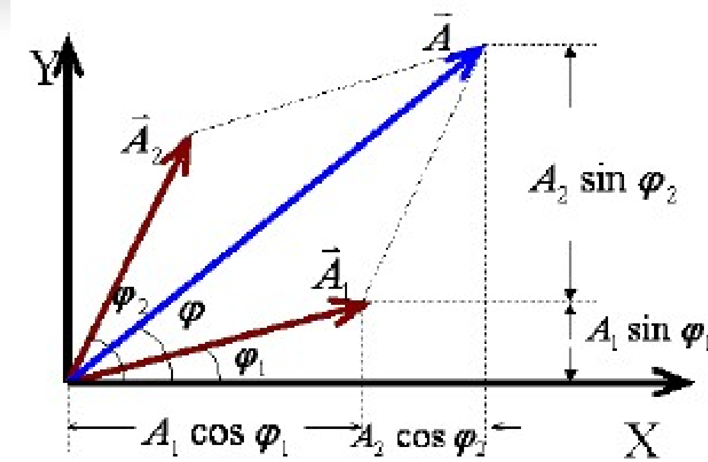


$$\varphi_2 = \omega_2 t + \varphi_{2,0}$$

$$\varphi_1 = \omega_1 t + \varphi_{1,0}$$

$$tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

$$\boxed{A^2 = A_1^{\ 2} + A_2^{\ 2} + 2A_1A_2\cos\Delta\phi}$$



$$\Delta\phi = (\omega_2 t + \varphi_{2,0}) - (\omega_1 t + \varphi_{1,0})$$

$$= (\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_{2,0} - \varphi_{1,0})$$

$$A_1 = A_2 \quad \omega_1 \neq \omega_2 \quad \varphi_{1,0} = \varphi_{2,0} = \varphi$$

$$A^2 = A_1^{\ 2} + A_2^{\ 2} + 2A_1A_2\cos(\omega_2 - \omega_1)t$$

$$A^2 = 2A_1^{\ 2} + 2A_1^{\ 2}\cos(\omega_2 - \omega_1)t = 4A_1^{\ 2}\sqrt{\frac{1+\cos(\omega_2-\omega_1)t}{2}}^{\,2}$$

$$\boxed{A = 2A_1\cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)t}$$

讨论一特例： $A_1=A_2 \quad \omega_1\neq\omega_2 \quad \varphi_1=\varphi_2=\varphi$

则两振动为： $x_1=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi)$

$x_2=A_1\cos(\omega_2 t+\varphi)$

合振动： $x=x_1+x_2$

$$x=A_1\cos(\omega_1 t+\varphi)+A_1\cos(\omega_2 t+\varphi)$$

$$=\underline{\underline{2A_1\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t)}}\cos(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi)$$

合振动的振幅

由旋转矢量图可得： $A^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\omega_2-\omega_1)t$

$$A^2=2A_1^2+2A_1^2\cos(\omega_2-\omega_1)t=4A_1^2\sqrt{\frac{1+\cos(\omega_2-\omega_1)t}{2}}^2$$

$$A=2A_1\cos(\frac{\omega_2-\omega_1}{2})t$$

$$tg\varphi' = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}$$

$$\boldsymbol{A_1 = A_2 \quad \omega_1 \neq \omega_2} \quad \varphi_{1,0} = \varphi_{2,0} = \varphi$$

$$tg\varphi' = \frac{\sin(\omega_1 t + \varphi) + \sin(\omega_2 t + \varphi)}{\cos(\omega_1 t + \varphi) + \cos(\omega_2 t + \varphi)}$$

sinθ+sinφ = 2 sin[(θ+φ)/2] cos[(θ-φ)/2]

cosθ+cosφ = 2 cos[(θ+φ)/2] cos[(θ-φ)/2]

$$= \frac{2\sin(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \varphi)\cos(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \varphi)}{2\cos(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \varphi)\cos(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t + \varphi)} = tg(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \varphi)$$

$$\varphi' = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \varphi$$

$$\boxed{x=2A_1\cos\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t+\varphi\right)}$$

振幅A按余弦函数变化，变化范围：$0\leq A\leq 2A_1$

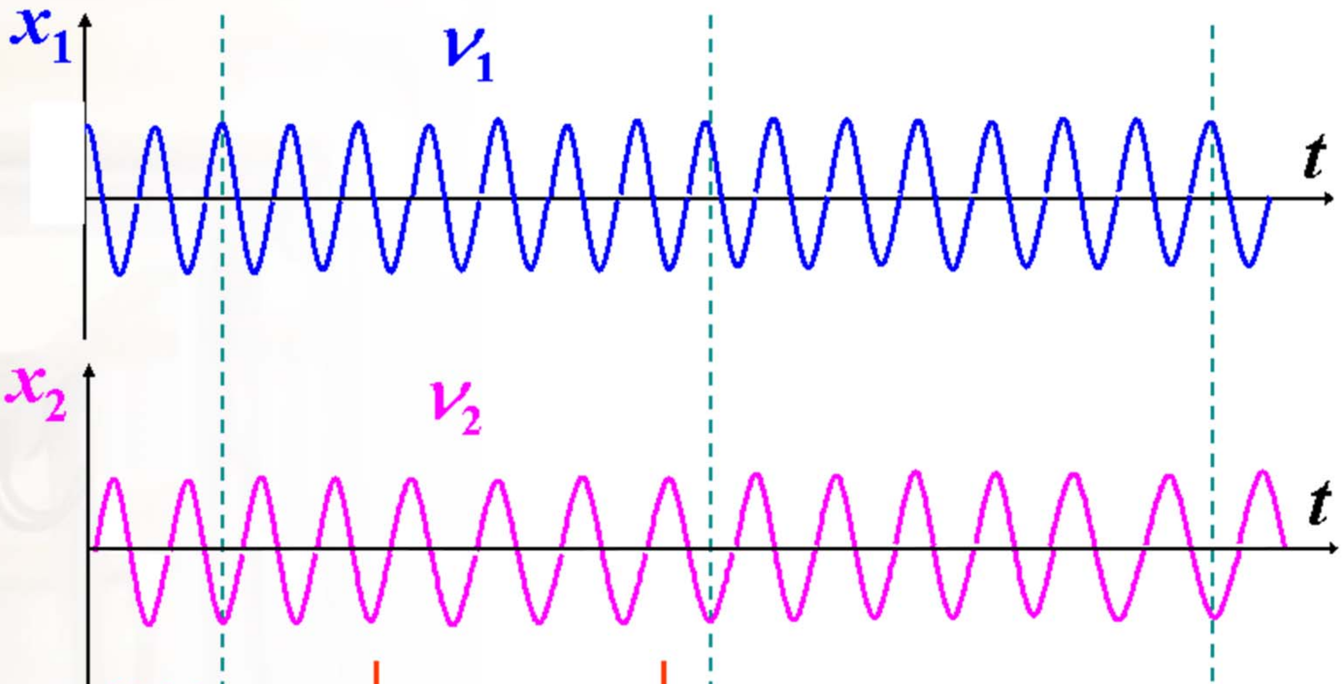
这种振幅出现加强和减弱现象称为~~拍。

可见$\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t$ 改变π时，A就重复出现一次变化

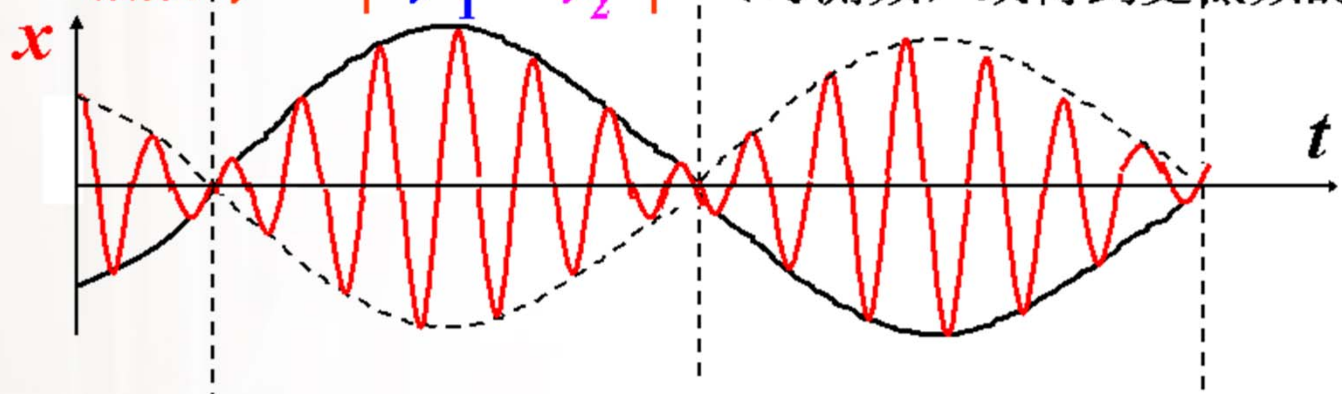
拍的周期τ和拍的频率ν:

$$\tau=\frac{2\pi}{\omega_2-\omega_1}=\frac{1}{\nu_2-\nu_1}=\frac{1}{\nu} \qquad \nu=\left|\nu_2-\nu_1\right|$$

注：拍现象只在两分振动的频率相差不太大时才显出来。　即：$\omega_1+\omega_2>>\left|\omega_1-\omega_2\right|$ 现象才明显



拍频 $\nu = \left| \nu_1 - \nu_2 \right|$ （可测频，或得到更低频的振动）



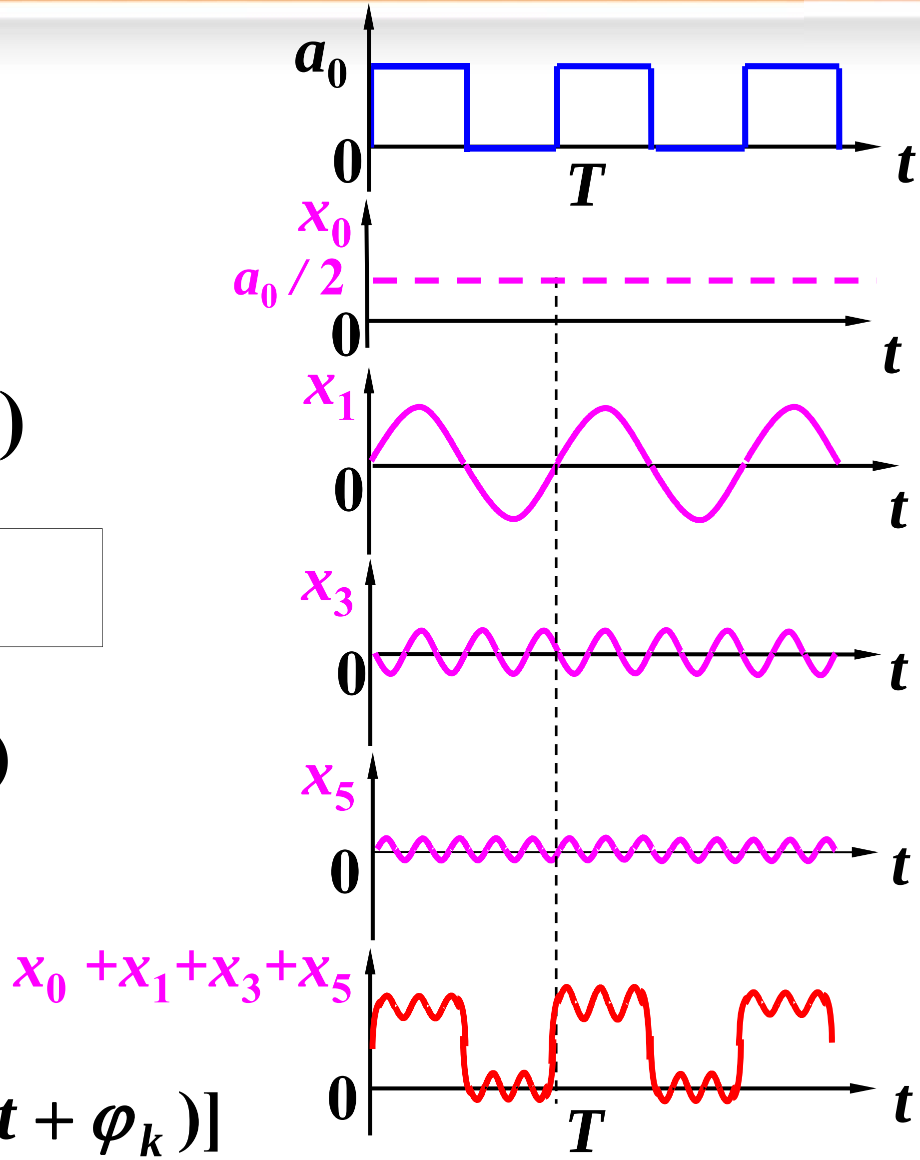
谐振分析* 方波:

$$x(0)=\frac{a_0}{2}$$

$$x(t)=A_1\cos(1\omega t+\varphi_1)$$

$$x(t)=A_3\cos(3\omega t+\varphi_3)$$

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}[A_k\cos(k\omega t+\varphi_k)]$$



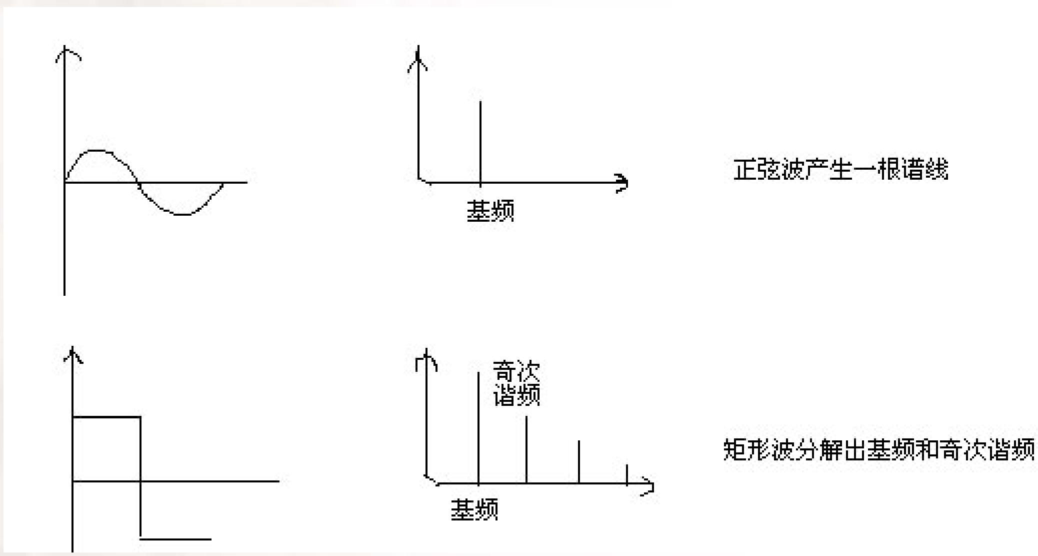
利用付里叶分解，可将任意振动分解成若干**谐振振动**的叠加。

对周期性振动：

T— 周期，$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}[A_k \cos(k\omega t + \varphi_k)]$$

$k = 1$	基频（ω）	高次谐频
$k = 2$	二次谐频（2ω）	
$k = 3$	三次谐频（3ω）	
……		



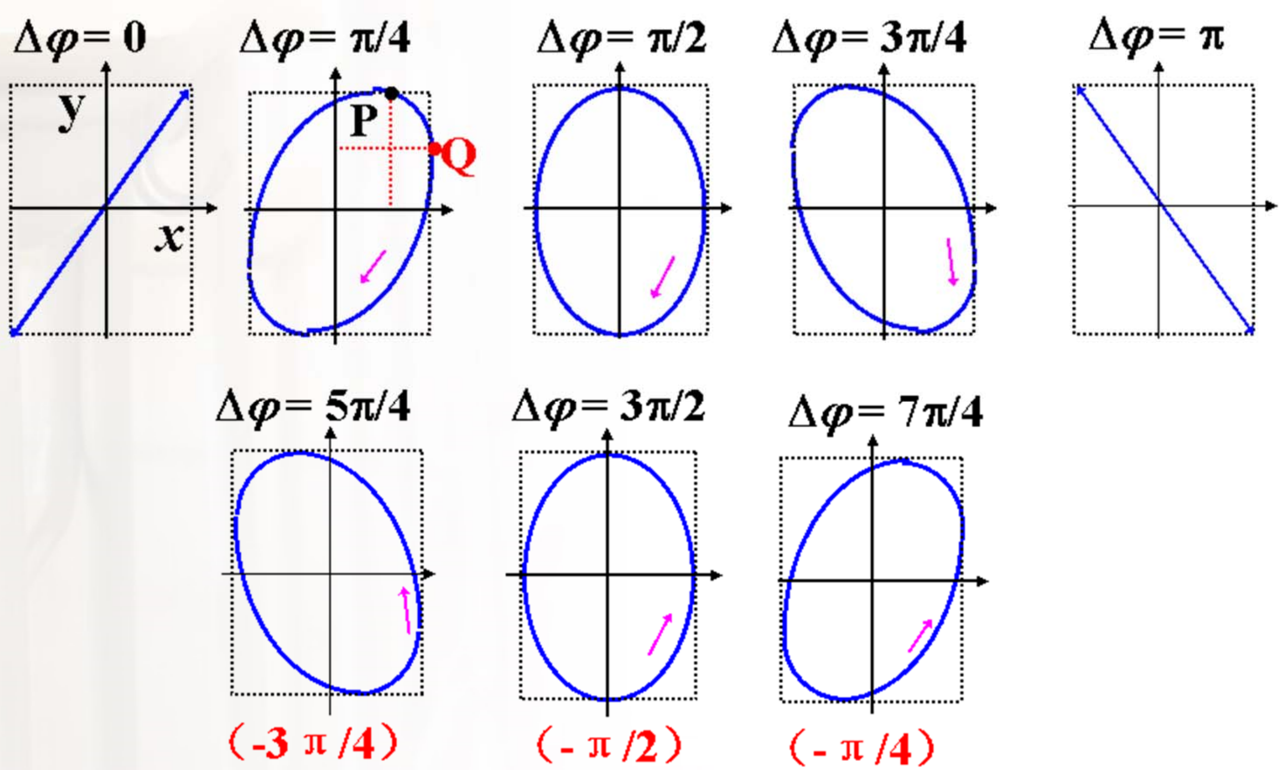
频谱表示各谐振成分的振幅和频率的关系。

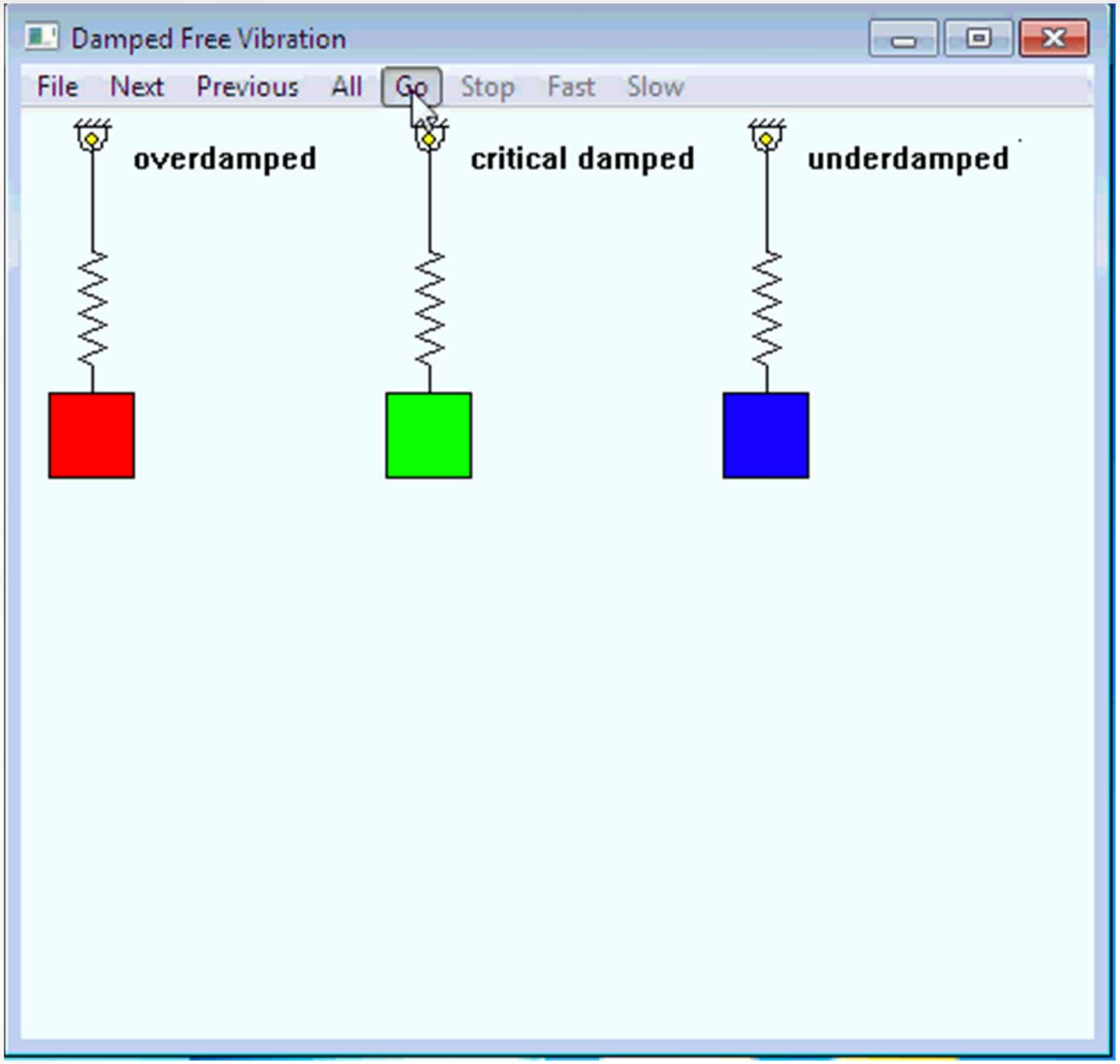
不同方向（垂直）、同频率的两个简谐振动的合成

$$x = A_1 \cos(\omega t + \phi_1)$$
$$y = A_2 \cos(\omega t + \phi_2)$$

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2}\cos(\phi_2 - \phi_1) = \sin^2(\phi_2 - \phi_1)$$

椭圆方程

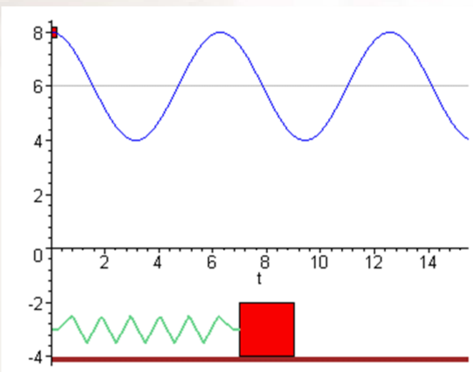


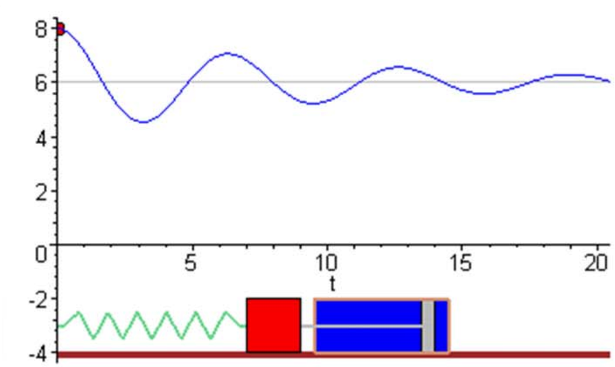

Damped Free Vibration
File Next Previous All Go Stop Fast Slow
overdamped
critical damped
underdamped

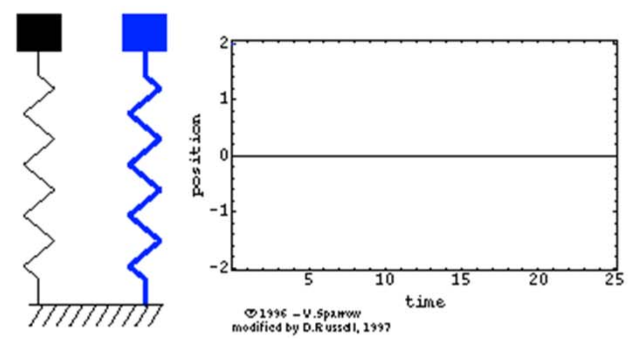
简谐振动：无阻尼自由振动，等幅振动

阻尼振动：克服阻力，对外做功，能量减小，振幅减小，减幅振动

当速度不大时，阻力与速度成正比，并方向相反







动力学方程： $F = F_{弹} + f_{阻}$ $\quad F_{弹} = -kx$

$$f_{阻} = -\gamma v = -\gamma \frac{dx}{dt}$$

比例常数，物体的大小，形状，表面状况等

根据牛顿定律： $F = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$ 则： $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\dfrac{dx}{dt}$

即： $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\dfrac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ ——动力学方程

阻尼项

其中： $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ $2\beta = \dfrac{\gamma}{m}$ $\beta = \dfrac{\gamma}{2m}$

$$\boxed{\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0}$$

β — 阻尼系数

三种阻尼

固有频率 $\boxed{\omega_0 = \sqrt{k/m}}$ 和阻尼系数 $\boxed{\beta = \gamma/2m}$

过阻尼：$\beta > \omega_0$

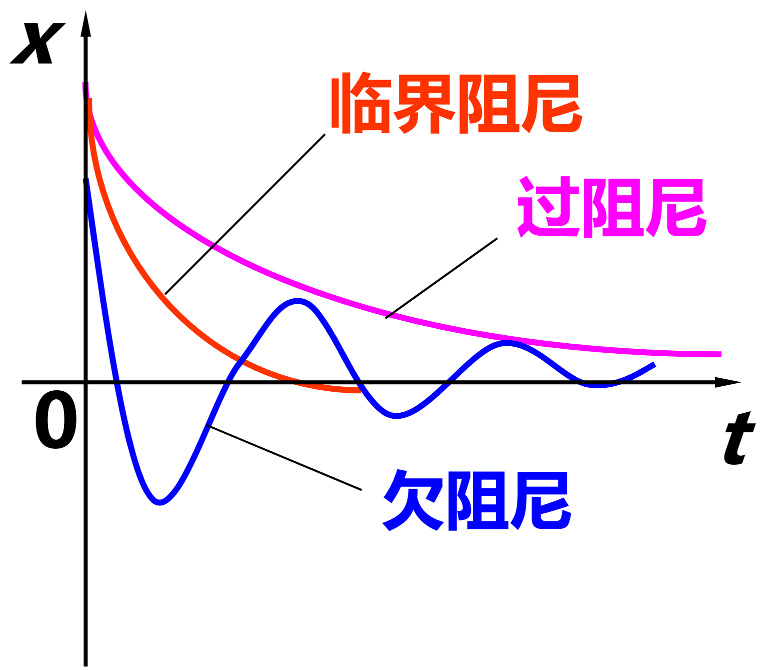
$$x(t) = C_1 e^{-(\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2})t}$$

临界阻尼：$\beta = \omega_0$

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\beta t}$$

欠阻尼：$\beta < \omega_0$

$$x(t) = A_0 e^{-\beta \cdot t}\cos(\omega t + \varphi_0)$$



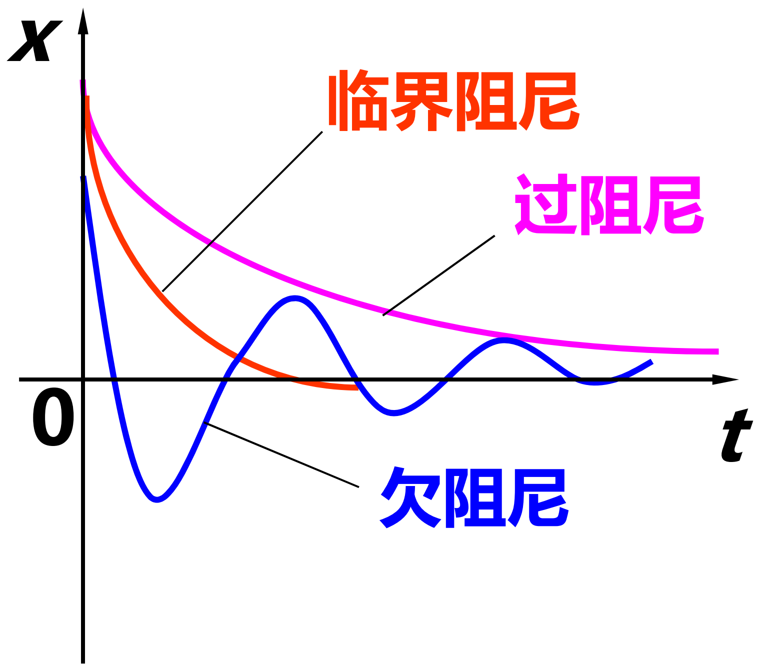
三种阻尼

固有频率 $\boxed{\omega_0 = \sqrt{k/m}}$ 和阻尼系数 $\boxed{\beta = \gamma/2m}$

过阻尼： $\beta > \omega_0$

临界阻尼： $\beta = \omega_0$

欠阻尼： $\beta < \omega_0$

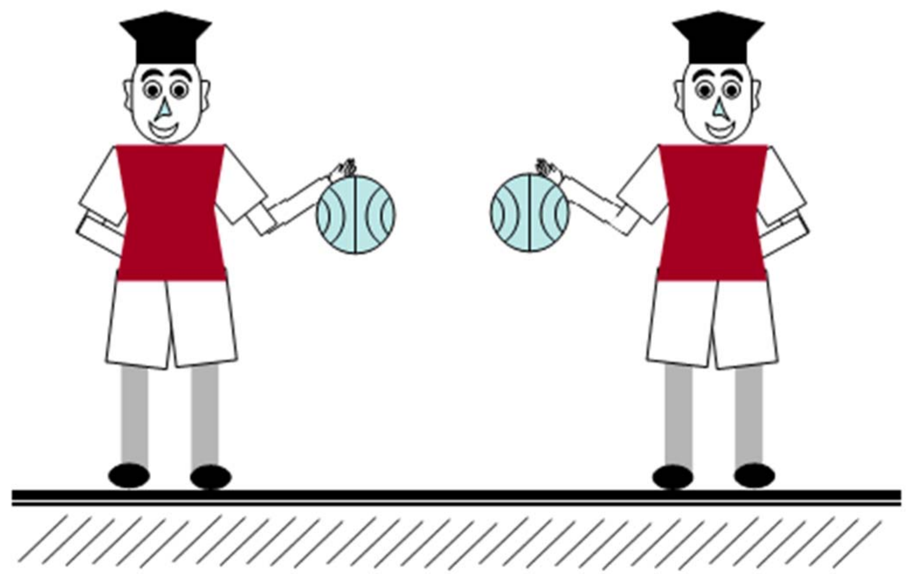


振幅： $A = A_0 e^{-\beta t}$

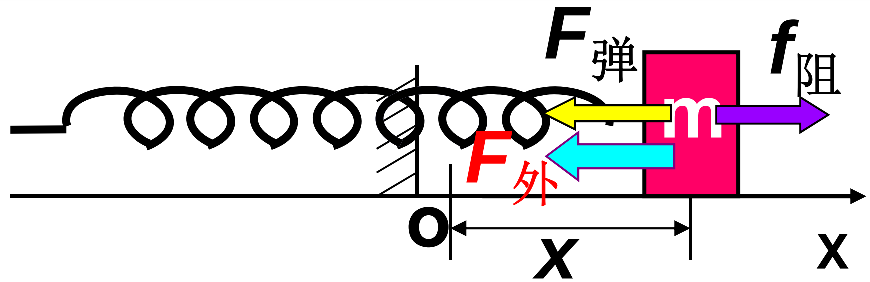
能量： $E = E_0 e^{-2\beta t}$

时间常数： $\tau = \dfrac{1}{2\beta}$ 品质因数 $Q = 2\pi\dfrac{\tau}{T} = \omega\tau = \omega/(2\beta)$


culm.cnwlt.net



谐振子的受迫振动方程



设强迫力 $F_{外}=F_0\cos\omega_{外}t$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F_{弹}+f_{阻}+F_{外}$$

$$\omega_0^2=\frac{k}{m}\quad 2\beta=\frac{\gamma}{m}\quad a_0=\frac{F_0}{m}$$

则有：

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=a_0\cos\omega_{外}t}$$

——动力学方程

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = a_0 \cos\omega_{外} t$$

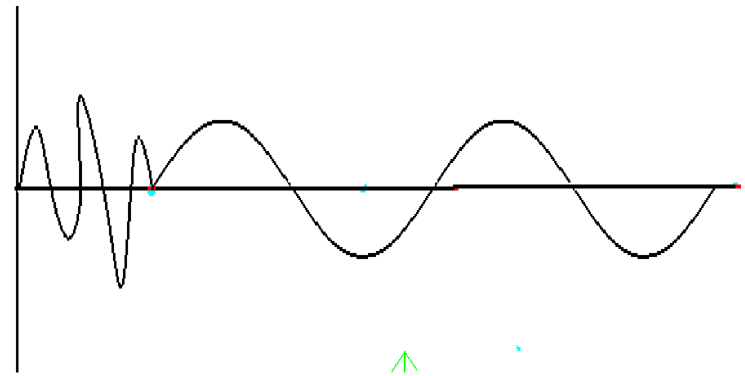
方程的通解=齐次微分方程的解+非齐次的一个特解

$$x(t) = \underbrace{A_0 e^{-\beta\cdot t}\cos(\omega t + \varphi_0)}_{\text{反映系统的暂态行为}} + A_p \cos(\omega_{外} t + \alpha)$$

系统的稳定振动状态

经过足够长的时间，稳态解：

$$\boxed{x(t) = A_p \cos(\omega_{外} t + \alpha)}$$



$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=a_0\cos\omega_{外}t$$

稳态解

$$\boxed{x(t)=A_p\cos(\omega_{外}t+\alpha)}$$

即：稳态时的受迫振动按简谐振动的规律变化

稳态频率：$\omega=\omega_{外}$

将稳态解代入方程可得：

振幅：$$A_p=\frac{a_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_{外}^2\right)^2+4\beta^2\omega_{外}^2}}$$

位相：$$tg\alpha=\frac{-2\beta\omega_{外}}{\omega_0^2-\omega_{外}^2}$$

谢谢！