第八节 多元函数的极值及其求法

一、多元函数的极值

二、最值应用问题

三、条件极值

定理1 (必要条件) 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 存在偏导数, 且在该点取得极值 , 则有

$$f'_x(x_0, y_0) = 0\,,\ \ f'_y(x_0, y_0) = 0$$

说明: 使偏导数都为 0 的点称为驻点 .

但驻点不一定是极值点.

定理2 (充分条件) 若函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的的某邻域内具有一阶和二阶连续偏导数, 且

$$f_x(x_0, y_0) = 0,\ f_y(x_0, y_0) = 0$$

令 $A = f_{xx}(x_0, y_0),\ B = f_{xy}(x_0, y_0),\ C = f_{yy}(x_0, y_0)$

则: 1) 当 $AC - B^2 > 0$ 时, 具有极值 $\begin{cases} A<0 \text{ 时取极大值;} \\ A>0 \text{ 时取极小值.} \end{cases}$

2) 当 $AC - B^2 < 0$ 时, 没有极值.

3) 当 $AC - B^2 = 0$ 时, 不能确定 , 需另行讨论.

二、最值问题

依据

函数 f 在闭域上连续

$$\Downarrow$$

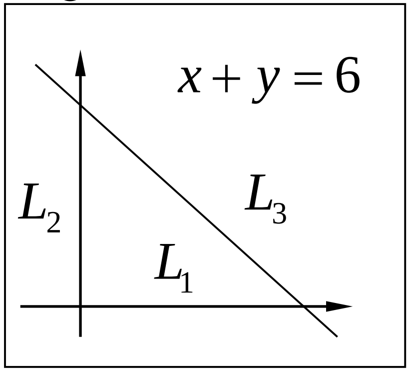
函数 f 在闭域上可达到最值

最值可疑点 $\begin{cases} \text{驻点,偏导数不存在的点} \\ \text{边界上的最值点} \end{cases}$

特别, 当区域内部最值存在, 且**只有一个**极值点P 时,

$f(P)$ 为极小**(大)** 值 $\Longrightarrow$ $f(P)$ 为最小**(大)** 值

例3. 设区域 D 由x 轴、y 轴及直线 $x+y=6$ 围成的三角形区域，求函数 $f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在 D上的最大值和最小值.



解: 解方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)=2xy(4-x-y)-x^2y=0 \\ f_y(x,y)=x^2(4-x-y)-x^2y=0 \end{cases}$

得 $f(x,y)$在 D内的唯一驻点$(2,1)$， $f(2,1)=4$.

在 L_1上， $y=0,\quad 0\le x\le 6,\quad f(x,y)\equiv 0$

在 L_2上， $x=0,\quad 0\le y\le 6,\quad f(x,y)\equiv 0$

在 L_3上， $y=6-x,\quad 0\le x\le 6,\quad z=\varphi(x)=2x^3-12x^2$

$\varphi'(x)=6x^2-24x$， 令 $\varphi'(x)=0$， 得 $x=0$ 或 $x=4$.

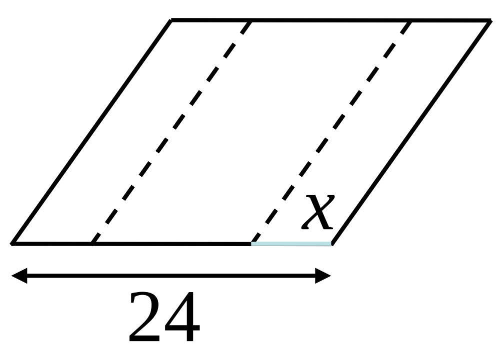
$\because\ \varphi(0)=0,\ \varphi(4)=-64,\ \varphi(6)=0.$

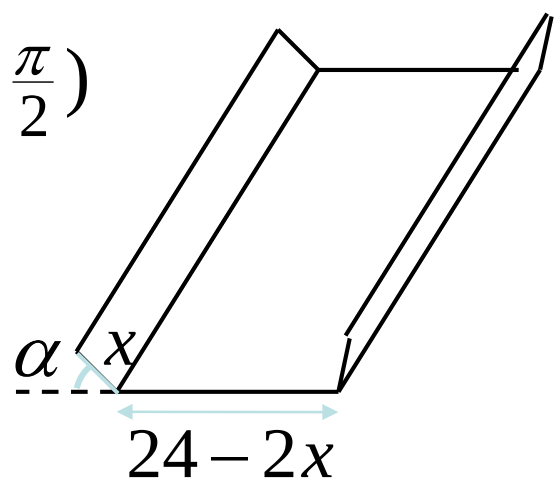
所以在 D上最大值为$f(2,1)=4$，最小值为 $f(4,2)=-64$.

例4. 有一宽为 24cm 的长方形铁板 ,把它折起来做成一个断面为等腰梯形的水槽, 问怎样折法才能使断面面积最大.

解: 设折起来的边长为 x cm, 倾角为 α , 则断面面积为

$$A=\frac{1}{2}(24-2x+2x\cos\alpha+24-2x)\cdot x\sin\alpha$$
$$=24x\sin\alpha-2x^2\sin\alpha+x^2\cos\alpha\sin\alpha$$
$$\left(D:\ 0<x<12,\ 0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$





$$A = 24x\sin\alpha - 2x^2\sin\alpha + x^2\cos\alpha\sin\alpha$$
$$(D:\ 0 < x < 12,\ 0 < \alpha < \tfrac{\pi}{2})$$

令 $\begin{cases} A_x = 24\sin\alpha - 4x\sin\alpha + 2x\sin\alpha\cos\alpha = 0 \\ A_\alpha = 24x\cos\alpha - 2x^2\cos\alpha + x^2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0 \end{cases}$

$$\Big\downarrow\ \sin\alpha \neq 0,\ x \neq 0$$

$$\begin{cases} 12 - 2x + x\cos\alpha = 0 \\ 24\cos\alpha - 2x\cos\alpha + x(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0 \end{cases}$$

解得: $\alpha = \dfrac{\pi}{3} = 60^\circ,\ x = 8\,(\text{cm})$

由题意知,最大值在定义域D 内达到, 而在域D 内只有一个驻点, 故此点即为所求.

三、条件极值

$$\text{极值问题}\begin{cases}\text{无条件极值: 对自变量只有定义域限制} \\ \text{条件极值: 对自变量除定义域限制外,} \\ \qquad\qquad\quad \text{还有其它条件限制}\end{cases}$$

条件极值的求法:

方法1 代入法. 例如,

在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下, 求函数 $z=f(x,y)$ 的极值

转化 $\Big\Downarrow$ 从条件 $\varphi(x,y)=0$ 中解出 $y=\psi(x)$

求一元函数 $z=f(x,\psi(x))$ 的无条件极值问题

方法2　拉格朗日乘数法．例如,

在条件$\varphi(x,y)=0$下, 求函数 $z=f(x,y)$ 的极值.

如方法 1 所述 , 设 $\varphi(x,y)=0$ 可确定隐函数$y=\phi(x)$,

则问题等价于一元函数 $z=f(x,\phi(x))$ 的极值问题，故极值点必满足

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=f_x+f_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

因$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$, 故有 $f_x-f_y\frac{\varphi_x}{\varphi_y}=0$

记 $$\frac{f_x}{\varphi_x}=\frac{f_y}{\varphi_y}=-\lambda$$

极值点必满足 $\begin{cases} f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$

引入辅助函数 $F = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$

则极值点满足: $\begin{cases} F_x = f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ F_y = f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ F_\lambda = \varphi = 0 \end{cases}$

辅助函数***F*** 称为拉格朗日(Lagrange)函数. 利用拉格朗日函数求极值的方法称为拉格朗日乘数法.

推广 拉格朗日乘数法可推广到多个自变量和多个约束条件的情形.

例如，求函数 $u = f(x, y, z)$ 在条件 $\varphi(x, y, z) = 0$，$\psi(x, y, z) = 0$下的极值.

设 $F = f(x, y, z) + \lambda_1 \varphi(x, y, z) + \lambda_2 \psi(x, y, z)$

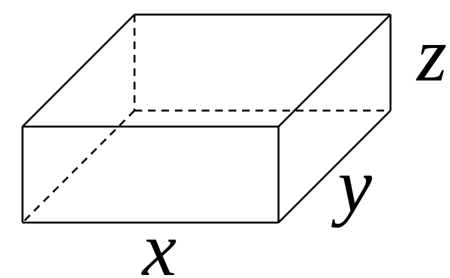
解方程组
$$\begin{cases} F_x = f_x + \lambda_1 \varphi_x + \lambda_2 \psi_x = 0 \\ F_y = f_y + \lambda_1 \varphi_y + \lambda_2 \psi_y = 0 \\ F_z = f_z + \lambda_1 \varphi_z + \lambda_2 \psi_z = 0 \\ F_{\lambda_1} = \varphi = 0 \\ F_{\lambda_2} = \psi = 0 \end{cases}$$

可得到条件极值的可疑点 .

例6. 要设计一个容量为 V_0 的长方体开口水箱, 试问水箱长、宽、高等于多少时所用材料最省?

解: 设 x , y , z 分别表示长、宽、高,则问题为求 x , y , z 使在条件 $xyz = V_0$ 下水箱表面积 $S = 2(xz + yz) + xy$ 最小.

令 $F = 2(xz + yz) + xy + \lambda(xyz - V_0)$

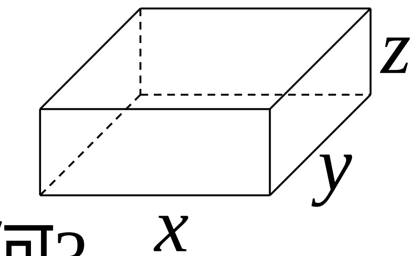


解方程组

$$\begin{cases} F_x = 2z + y + \lambda yz = 0 \\ F_y = 2z + x + \lambda xz = 0 \\ F_z = 2(x + y) + \lambda xy = 0 \\ F_\lambda = xyz - V_0 = 0 \end{cases}$$

得唯一驻点 $x = y = 2z = \sqrt[3]{2V_0}$, $\lambda = \frac{-4}{\sqrt[3]{2V_0}}$

由题意可知合理的设计是存在的, 因此 , 当高为 $\sqrt[3]{\frac{V_0}{4}}$,
长、宽为高的 2 倍时，所用材料最省.



思考:

1) 当水箱封闭时, 长、宽、高的尺寸如何?

提示: 利用对称性可知, $x = y = z = \sqrt[3]{V_0}$

2) 当开口水箱底部的造价为侧面的二倍时, 欲使造价最省, 应如何设拉格朗日函数? 长、宽、高尺寸如何?

提示: $F = 2(xz + yz) + 2\ xy + \lambda(xyz - V_0)$

长、宽、高尺寸相等 .

内容小结

1. 函数的极值问题

第一步 利用必要条件在定义域内找驻点.

如对二元函数 $z = f(x, y)$, 即解方程组

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$$

第二步 利用充分条件 判别驻点是否为极值点 .

2. 函数的条件极值问题

(1) 简单问题用代入法

(2) 一般问题用拉格朗日乘数法

如求二元函数 $z = f(x, y)$ 在条件 $\varphi(x, y) = 0$ 下的极值,

设拉格朗日函数 $F = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$

解方程组 $\begin{cases} F_x = f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ F_y = f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ F_\lambda = \varphi = 0 \end{cases}$ 求驻点 .

3. 函数的最值问题

第一步 找目标函数, 确定定义域 (及约束条件)

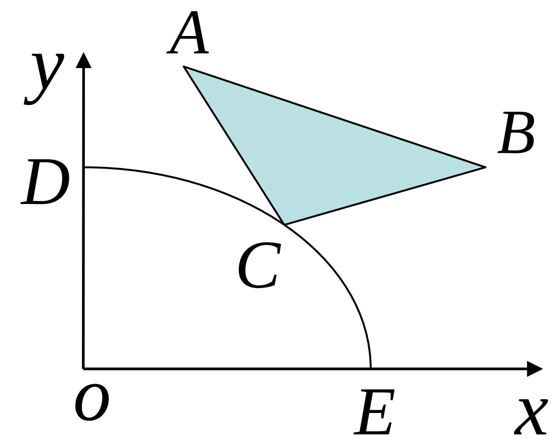
第二步 判别

- 比较驻点及边界点上函数值的大小
- 根据问题的实际意义确定最值

思考与练习 已知平面上两定点 $A(1,3)$, $B(4,2)$,

试在椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\ (x>0,\ y>0)$ 圆周上求一点 C, 使

$\triangle ABC$ 面积 $S_\triangle$ 最大.



解答提示: 设 C 点坐标为 (x,y),

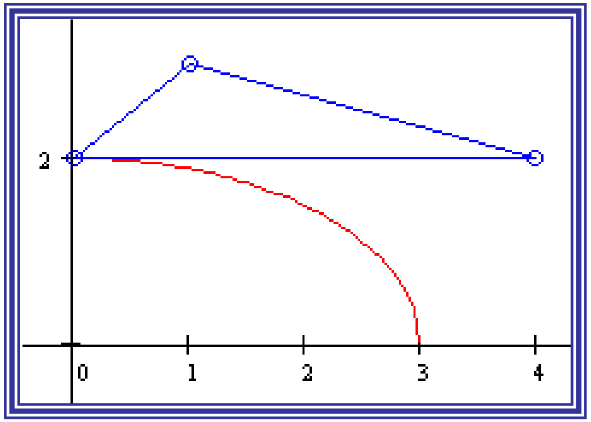
则 $S_\Delta=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

$$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 0\\ x-1 & y-3 & 0\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|(0,0,x+3y-10)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|x+3y-10\right|$$

设拉格朗日函数 $F=(x+3y-10)^2+\lambda(1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4})$

解方程组 $\begin{cases} 2(x+3y-10)-\frac{2\lambda}{9}x=0 \\ 6(x+3y-10)-\frac{2\lambda}{4}y=0 \\ 1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=0 \end{cases}$



点击图中任意点动画开始或暂停

得驻点 $x=\frac{3}{\sqrt{5}}, y=\frac{4}{\sqrt{5}}$, 对应面积 $S\approx 1.646$

而 $S_D=2, S_C=3.5$, 比较可知, 点 C 与 E 重合时, 三角形面积最大.

备用题 **1.** 求半径为R 的圆的内接三角形中面积最大者.

解: 设内接三角形各边所对的圆心角为 x , y , z ,则

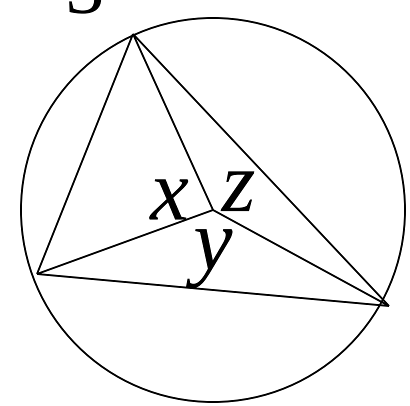
$$x+y+z=2\pi\,,\quad x\ge 0\,,\, y\ge 0\,,\, z\ge 0$$

它们所对应的三个三角形面积分别为

$$S_1=\tfrac{1}{2}R^2\sin x\,,\quad S_2=\tfrac{1}{2}R^2\sin y\,,\quad S_3=\tfrac{1}{2}R^2\sin z$$

设拉氏函数 $F=\sin x+\sin y+\sin z+\lambda(x+y+z-2\pi)$

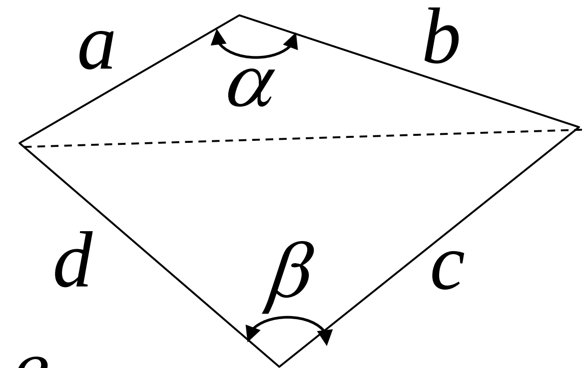
解方程组 $\begin{cases}\cos x+\lambda=0\\ \cos y+\lambda=0\\ \cos z+\lambda=0\\ x+y+z-2\pi=0\end{cases}$, 得 $x=y=z=\dfrac{2\pi}{3}$



故圆内接正三角形面积最大, 最大面积为

$$S_{\max}=\frac{R^2}{2}\cdot 3\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2\,.$$

2. 求平面上以 a, b, c, d 为边的面积最大的四边形，试列出其目标函数和约束条件？



提示:

目标函数： $S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha + \frac{1}{2}cd\sin\beta$

$$(0 < \alpha < \pi, 0 < \beta < \pi)$$

约束条件： $a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta$

答案: $\alpha + \beta = \pi$, 即四边形内接于圆时面积最大 .

例1 设 $u=f(x,y,z)$, $\varphi(x^2,e^y,z)=0$, $y=\sin x$, (f,φ 具有一阶连续偏导数), 且 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$, 求 $\dfrac{du}{dx}$.

解 $$\frac{du}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx},$$

显然 $$\frac{dy}{dx}=\cos x,$$

求 $\dfrac{dz}{dx}$, 对 $\varphi(x^2,e^y,z)=0$ 两边求 x 的导数,得

$$\varphi_1'\cdot 2x+\varphi_2'\cdot e^y\frac{dy}{dx}+\varphi_3'\frac{dz}{dx}=0,$$

于是可得, $\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{1}{\varphi_3'}(2x\varphi_1'+e^{\sin x}\cdot\cos x\varphi_2'),$

故 $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\cos x\dfrac{\partial f}{\partial y}-\dfrac{1}{\varphi_3'}(2x\varphi_1'+e^{\sin x}\cdot\cos x\varphi_2')\dfrac{\partial f}{\partial z}.$

例3 设函数 $u(x)$ 由方程组 $\begin{cases} u=f(x,y), \\ g(x,y,z)=0, \\ h(x,z)=0. \end{cases}$

所确定,且 $\dfrac{\partial g}{\partial y}\neq 0,\ \dfrac{\partial h}{\partial z}\neq 0,$ 试求 $\dfrac{du}{dx}.$

解 将方程组的变元 u 以及 y,z 都看成是 x 的函数.

方程组各方程两边对 x 求导,得

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = f_x + f_y \dfrac{dy}{dx}, & (1) \\ g_x + g_y \cdot \dfrac{dy}{dx} + g_z \cdot \dfrac{dz}{dx} = 0, & (2) \\ h_x + h_z \cdot \dfrac{dz}{dx} = 0. & (3) \end{cases}$$

由(3)得 $\dfrac{dz}{dx} = -\dfrac{h_x}{h_z}$, 代入(2)得 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{g_z \cdot h_x}{g_y \cdot h_z} - \dfrac{g_x}{g_y}$,

代入(1)得 $\dfrac{du}{dx} = f_x - \dfrac{f_y \cdot g_x}{g_y} + \dfrac{f_y \cdot g_z \cdot h_x}{g_y \cdot h_z}$.

例5 求 $u=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处沿点的向径 r_0 的方向导数，问 a,b,c 具有什么关系时此方向导数等于梯度的模?

解 $\because\quad r_0=\{x_0,y_0,z_0\},\quad |r_0|=\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2},$

$$\cos\alpha=\frac{x_0}{|r_0|},\quad \cos\beta=\frac{y_0}{|r_0|},\quad \cos\gamma=\frac{z_0}{|r_0|}.$$

$\therefore$ 在点 M 处的方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial r_0}\Big|_M=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_M\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_M\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_M\cos\gamma$$

$$=\frac{2x_0}{a^2}\frac{x_0}{|r_0|}+\frac{2y_0}{b^2}\frac{y_0}{|r_0|}+\frac{2z_0}{c^2}\frac{z_0}{|r_0|}=\frac{2}{|r_0|}\left(\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}\right)$$

$$=\frac{2u(x_0,y_0,z_0)}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}.$$

$\therefore$ 在点 M 处的梯度为

$$gradu\big|_M=\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_M i+\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_M j+\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_M k$$

$$=\frac{2x_0}{a^2}i+\frac{2y_0}{b^2}j+\frac{2z_0}{c^2}k,$$

$$\left|gradu\right|_M = 2\sqrt{\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}+\frac{z_0^2}{c^4}},$$

当 $a=b=c$ 时, $\because \quad \left|gradu\right|_M = \frac{2}{a^2}\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2},$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r_0}\right|_M = \frac{\frac{2}{a^2}(x_0^2+y_0^2+z_0^2)}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}} = \frac{2}{a^2}\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2},$$

$$\therefore \quad \left.\frac{\partial u}{\partial r_0}\right|_M = \left|gradu\right|_M,$$

故当 a,b,c 相等时,此方向导数等于梯度的模.

例6.在第一卦限作椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面,使其在三坐标轴上的截距的平方和最小, 并求切点.

解: 设$F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$,切点为 $M(x_0,y_0,z_0)$,

则切平面的法向量为

$$\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)\Big|_M=\left(\frac{2x_0}{a^2},\frac{2y_0}{b^2},\frac{2z_0}{c^2}\right)$$

切平面方程

$$\frac{\cancel{2}x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{\cancel{2}y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{\cancel{2}z_0}{c^2}(z-z_0)=0$$

即 $$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z=1$$

切平面在三坐标轴上的截距为 $\dfrac{a^2}{x_0}, \dfrac{b^2}{y_0}, \dfrac{c^2}{z_0}$

问题归结为求 $s = (\dfrac{a^2}{x})^2 + (\dfrac{b^2}{y})^2 + (\dfrac{c^2}{z})^2$

在条件 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 下的条件极值问题 .

设拉格朗日函数

$$F = (\frac{a^2}{x})^2 + (\frac{b^2}{y})^2 + (\frac{c^2}{z})^2 + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)$$

$$(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$$

令

$$\begin{cases} F_x = -2\left(\dfrac{a^2}{x}\right)\dfrac{a^2}{x^2} + 2\lambda\dfrac{x}{a^2} = 0 \\ F_y = -2\left(\dfrac{b^2}{y}\right)\dfrac{b^2}{y^2} + 2\lambda\dfrac{y}{b^2} = 0 \\ F_z = -2\left(\dfrac{c^2}{z}\right)\dfrac{c^2}{z^2} + 2\lambda\dfrac{z}{c^2} = 0 \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b+c}} \\ y = \dfrac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b+c}} \\ z = \dfrac{c\sqrt{c}}{\sqrt{a+b+c}} \end{cases}$$

唯一驻点

由实际意义可知 $M\left(\dfrac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b+c}}, \dfrac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a+b+c}}, \dfrac{c\sqrt{c}}{\sqrt{a+b+c}}\right)$

为所求切点 .

练习题：

1. 在曲面 $z=xy$ 上求一点，使该点处的法线垂直于平面 $x+3y+z+9=0$，并写出该法线方程 .

提示： 设所求点为 (x_0, y_0, z_0)，则法线方程为

$$\frac{x-x_0}{y_0}=\frac{y-y_0}{x_0}=\frac{z-z_0}{-1}$$

利用 $\begin{cases} \dfrac{y_0}{1}=\dfrac{x_0}{3}=\dfrac{-1}{1} \\ z_0=x_0 y_0 \end{cases}$

法线垂直于平面

点在曲面上

得 $x_0=-3$，$y_0=-1$，$z_0=3$

2. 在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 的切平面使与三坐标面围成的四面体体积最小,并求此体积.

提示: 设切点为(x_0, y_0, z_0), 则切平面为

$$\frac{x_0 x}{a^2}+\frac{y_0 y}{b^2}+\frac{z_0 z}{c^2}=1$$

所指四面体围体积 $V=\frac{1}{6}\frac{a^2b^2c^2}{x_0 y_0 z_0}$

V 最小等价于 $f(x, y, z)=x\,y\,z$ 最大, 故取拉格朗日函数

$$F=xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)$$

用拉格朗日乘数法可求出(x_0, y_0, z_0).