高等数学上册

第一章　函数与极限

（一）函数

1、 函数定义及性质（有界性、单调性、奇偶性、周期性）；

2、 反函数、复合函数、函数的运算；

3、 初等函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数、双曲函数、反双曲函数；

4、 函数的连续性与间断点；

函数 $f(x)$ 在 x_0 连续 $\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

间断点：

第一类：左右极限均存在。

可去间断点、跳跃间断点

第二类：左右极限、至少有一个不存在。

无穷间断点、振荡间断点

5、 闭区间上连续函数的性质：有界性与最大值最小值定理、零点定理、介值定理及其推论。

（二）极限

1、 定义

1） 数列极限

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathrm{N},\ \forall n>N,\ \left|x_n-a\right|<\varepsilon$$

2） 函数极限

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, \text{当} 0 < |x - x_0| < \delta \text{时，} |f(x) - A$$

左极限：$f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$　　　右极限：$f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$ 存在 $\Leftrightarrow f(x_0^-) = f(x_0^+)$

2、 极限存在准则

1） 夹逼准则：

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ y_n \le x_n \le z_n \quad (n \ge n_0) \\ 2)\ \lim_{n \to \infty} y_n = \lim_{n \to \infty} z_n = a \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = a$$

2） 单调有界准则：单调有界数列必有极限。

3、 无穷小（大）量

1） 定义：若 $\lim \alpha = 0$ 则称为无穷小量；若 $\lim \alpha = \infty$ 则称为无穷大量。

2） 无穷小的阶：高阶无穷小、同阶无穷小、等价无穷小、k 阶无穷小

<u>**Th1**</u> $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \beta = \alpha + o(\alpha)$；

<u>**Th2**</u> $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta', \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$（无穷小代

换）

4、 求极限的方法

1） 单调有界准则；

2） 夹逼准则；

3） 极限运算准则及函数连续性；

4） 两个重要极限：

a） $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

b） $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to +\infty}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$

5） 无穷小代换：（$x\to 0$）

a） $x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x$

b） $1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^{2}$

c） $e^{x}-1\sim x$ （$a^{x}-1\sim x\ln a$）

d） $\ln(1+x)\sim x$ （$\log_{a}(1+x)\sim\frac{x}{\ln a}$）

e） $(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$

第二章 导数与微分

（一）导数

1、　定义：$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

左导数：$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

右导数：$f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

函数$f(x)$在x_0点可导$\Leftrightarrow f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$

2、　几何意义：$f'(x_0)$为曲线$y=f(x)$在点$\left(x_0, f(x_0)\right)$处的切线的斜率。

3、　可导与连续的关系：

4、　求导的方法

1）导数定义；

2）基本公式；

3）四则运算；

4）复合函数求导（链式法则）；

5）隐函数求导数；

6）参数方程求导；

7）对数求导法。

5、　高阶导数

1）　定义：$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$

2） Leibniz公式：$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(k)}v^{(n-k)}$

（二）微分

1） 定义：$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+o(\Delta x)$，其中$A$与$\Delta x$无关。

2）可微与可导的关系：可微$\Leftrightarrow$可导，且$dy=f'(x_0)\Delta x=f'(x_0)dx$

第三章 微分中值定理与导数的应用

（一）中值定理

1、 Rolle定理：若函数$f(x)$满足：

1） $f(x)\in C[a,b]$； 2） $f(x)\in D(a,b)$； 3） $f(a)=f(b)$；

则$\exists\xi\in(a,b)$,使$f'(\xi)=0$.

2、 Lagrange中值定理：若函数$f(x)$满足：

1） $f(x)\in C[a,b]$； 2） $f(x)\in D(a,b)$；

则$\exists\xi\in(a,b)$,使$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

3、 Cauchy中值定理：若函数$f(x),F(x)$满足：

1） $f(x),F(x)\in C[a,b]$； 2） $f(x),F(x)\in D(a,b)$；3）

$$F'(x)\neq 0, x\in(a,b)$$

则 $\exists\xi\in(a,b)$, 使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$

（二）洛必达法则

注意:

1、尽量先化简（有理化、无穷小代换、分离非零因子）再用洛必达法则！

如：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}-\cos x}{\tan^4 x}$

2、对于某些数列极限问题，可化为连续变量的极限，然后用洛必达法则！

如：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$

3、洛必达法则是一种很有效的方法，但不是万能的！

如：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\cos(x^2)}{x}$

如：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\cos\frac{1}{x}}{\sin x}$

（三）Taylor 公式

n 阶 Taylor 公式：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

ξ 在 x_0 与 x 之间.

当 $x_0=0$ 时，成为 n 阶麦克劳林公式：

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

ξ 在 0 与 x 之间.

常见函数的麦克劳林公式：

1） $e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$

ξ 在 0 与 x 之间，$-\infty<x<+\infty$；

2 ）

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+\frac{\sin\left[\xi+(2m+1)\frac{\pi}{2}\right]}{(2m+1)!}x^{2m+1}$$

ξ 在 0 与 x 之间，$-\infty<x<+\infty$；

3 ）

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-2}}{(2m-2)!} + \frac{\cos\left[\xi + 2m \cdot \frac{\pi}{2}\right]}{(2m)!} x^{2m}$$

ξ 在 0 与 x 之间，$-\infty < x < +\infty$；

4） $$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}$$

ξ 在 0 与 x 之间，$-1 < x < 1$

5 ）

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+\xi)^{\alpha-n-1}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

ξ 在 0 与 x 之间，$-1 < x < 1$.

（四）单调性及极值

1、单调性判别法：$f(x) \in C[a,b]$，$f(x) \in D(a,b)$，则若 $f'(x) > 0$，则 $f(x)$ 单调增加；则若 $f'(x) < 0$，则 $f(x)$ 单调减少。

2、极值及其判定定理：

a） 必要条件：$f(x)$ 在 x_0 可导，若 x_0 为 $f(x)$ 的极值点，则

$f'(x_0)=0$.

b）第一充分条件：$f(x)$在x_0的邻域内可导，且$f'(x_0)=0$，则①若当$x<x_0$时，$f'(x)>0$，当$x>x_0$时，$f'(x)<0$，则x_0为极大值点；②若当$x<x_0$时，$f'(x)<0$，当$x>x_0$时，$f'(x)>0$，则x_0为极小值点；③若在x_0的两侧$f'(x)$不变号，则x_0不是极值点。

c） 第二充分条件：$f(x)$在x_0处二阶可导，且$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$，则

①若$f''(x_0)<0$，则x_0为极大值点；②若$f''(x_0)>0$，则x_0为极小值点。

3、凹凸性及其判断，拐点

1）$f(x)$在区间 *I* 上连续，若$\forall x_1,x_2\in I,\ f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称$f(x)$在区间 *I* 上的图形是凹的；若$\forall x_1,x_2\in I,\ f(\frac{x_1+x_2}{2})>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称$f(x)$在区间 *I* 上的图形是凸的。

2）判定定理：$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)上有一阶、二阶导数，则

a）若 $\forall x \in (a,b), f''(x) > 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的；

b）若 $\forall x \in (a,b), f''(x) < 0$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凸的。

3）拐点：设 $y = f(x)$ 在区间 I 上连续，x_0 是 $f(x)$ 的内点，如果曲线 $y = f(x)$ 经过点 $(x_0, f(x_0))$ 时，曲线的凹凸性改变了，则称点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线的拐点。

（五）不等式证明

1、利用微分中值定理；

2、利用函数单调性；

3、利用极值（最值）。

（六）方程根的讨论

1、连续函数的介值定理；

2、Rolle 定理；

3、函数的单调性；

4、极值、最值；

5、 凹凸性。

（七）渐近线

1、 铅直渐近线：$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$，则 $x = a$ 为一条铅直渐近线；

2、 水平渐近线：$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$，则 $y = b$ 为一条水平渐近线；

3、 斜渐近线：$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ $\lim\limits_{x \to \infty}[f(x) - kx] = b$ 存在，则

$y=kx+b$ 为一条斜

渐近线。

（八）图形描绘

步骤：

1. 确定函数 $y=f(x)$ 的定义域，并考察其对称性及周期性；

2. 求 $f'(x), f''(x)$ 并求出 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 为零和不存在的点；

3. 列表判别函数的增减及曲线的凹向，求出极值和拐点；

4. 求渐近线；

5. 确定某些特殊点，描绘函数图形．

第四章 不定积分

（一）概念和性质

1、 原函数：在区间 I 上，若函数 $F(x)$ 可导，且 $F'(x)=f(x)$，则 $F(x)$ 称为 $f(x)$ 的一个原函数。

2、 不定积分：在区间 I 上，函数 $f(x)$ 的带有任意常数的原函数称为 $f(x)$ 在区间 I 上的不定积分。

3、 基本积分表（P188，13 个公式）；

4、 性质（线性性）。

（二）换元积分法

1、第 一 类 换 元 法 （ 凑 微 分 ）：

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\mathrm{d}x = \left[\int f(u)du\right]_{u=\varphi(x)}$$

2、第 二 类 换 元 法 （ 变 量 代 换 ）：

$$\int f(x)dx = \left[\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t\right]_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

（三）分部积分法：$\int udv = uv - \int vdu$

（四）有理函数积分

1、“拆”；

2、变量代换（三角代换、倒代换等）。

第五章 定积分

（一）概念与性质：

1、 定义：$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\lambda \to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

2、 性质：（7 条）

<u>性质 7</u>（积分中值定理） 函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则 $\exists \xi \in [a,b]$，使 $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ （平均值：

$$f(\xi)=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$）

（二）微积分基本公式（N—L 公式）

1、 变上限积分：设$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$**，则**$\Phi'(x)=f(x)$

推广：$\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f(t)dt=f[\beta(x)]\beta'(x)-f[\alpha(x)]\alpha'(x)$

2、 N—L 公式：若 $F(x)$ **为** $f(x)$ **的一个原函数，则**

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

（三）换元法和分部积分

1、 换元法：$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$

2、 分部积分法：$\int_a^b udv = [uv]_a^b - \int_a^b vdu$

（四）反常积分

1、 无穷积分：

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{+\infty} f(x)dx$$

2、 瑕积分：

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to a^+} \int_{t}^{b} f(x)dx$$ **（*a* 为瑕点）**

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim_{t\to b^-} \int_{a}^{t} f(x)dx$$ **（*b* 为瑕点）**

两个重要的反常积分：

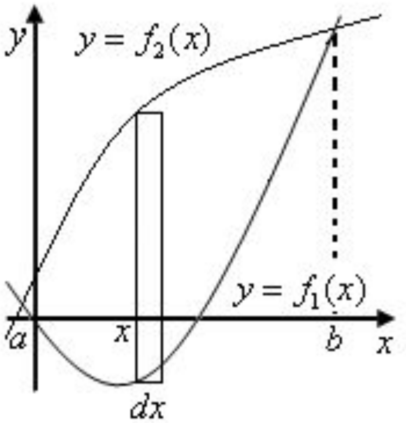
1） $$\int_{a}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p} = \begin{cases} +\infty, & p \le 1 \\ \dfrac{a^{1-p}}{p-1}, & p > 1 \end{cases}$$

2） $$\int_{a}^{b} \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^q} = \int_{a}^{b} \frac{\mathrm{d}x}{(b-x)^q} = \begin{cases} \dfrac{(b-a)^{1-q}}{1-q}, & q < 1 \\ +\infty, & q \ge 1 \end{cases}$$

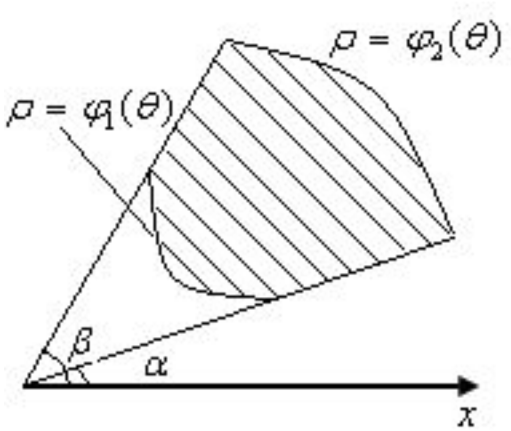
第六章 定积分的应用

（一）平面图形的面积

1、 直角坐标： $A = \int_{a}^{b} [f_2(x) - f_1(x)]dx$



2、 极坐标：$A=\dfrac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[\varphi_2^2(\theta)-\varphi_1^2(\theta)]d\theta$



3、参数方程：$\int_{\alpha}^{\beta}|\mathrm{y}(t)x'(t)|dt$

（二）体积

1、 旋转体体积：

a) 曲边梯形 $y=f(x),x=a,x=b,x$ 轴，绕 x 轴旋转而成的旋转体的体积：$V_x=\int_a^b \pi f^2(x)dx$

b) 曲边梯形 $y=f(x), x=a, x=b, x$ 轴，绕 y 轴旋转而成的

旋转体的体积：$V_y=\int_a^b 2\pi x f(x)dx$　　　　（柱壳法）

2、 平行截面面积已知的立体：$V=\int_a^b A(x)dx$

3、 极坐标图形绕极轴旋转所成旋转体体积：

$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta \rho^3(\theta)\sin\theta d\theta$$

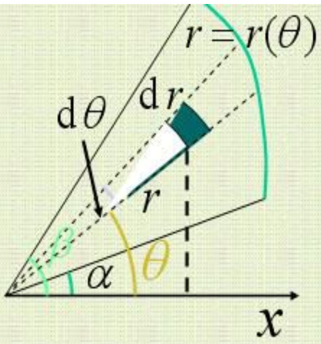
证: 先求 $[\theta,\theta+\mathrm{d}\theta]$ 上微曲边扇形绕极轴旋转而成的体积 $\mathrm{d}V_{ox}$.

体积微元 $r\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\cdot 2\pi r\sin\theta$

$$\therefore\ \mathrm{d}V_{ox}=2\pi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)} r^2\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2\pi}{3}r^3(\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

故 $$V_{ox}=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$



（三）弧长

1、 直角坐标：$s=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$

2、 参数方程：$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\phi'(t)]^2}dt$

3、 极坐标：$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\rho(\theta)]^2+[\rho'(\theta)]^2}d\theta$

第七章　微分方程

（一）概念

1、 微分方程：表示未知函数、未知函数的导数及自变量之间关系的方程。

阶：微分方程中所出现的未知函数的最高阶导数的阶数。

2、 解：使微分方程成为恒等式的函数。

通解：方程的解中含有任意的常数，且常数的个数与微分方程的阶数相同。

特解：确定了通解中的任意常数后得到的解。

（二）变量可分离的方程

$g(y)dy = f(x)dx$，两边积分 $\int g(y)dy = \int f(x)dx$

（三）齐次型方程

$\dfrac{dy}{dx} = \varphi(\dfrac{y}{x})$，设 $u = \dfrac{y}{x}$，则 $\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$；

或 $\dfrac{dx}{dy} = \phi(\dfrac{x}{y})$，设 $v = \dfrac{x}{y}$，则 $\dfrac{dx}{dy} = v + y\dfrac{dv}{dy}$

（四）一阶线性微分方程

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$$

用 常 数 变 易 法 或 用 公 式 ： $y=e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right]$

（五）可降阶的高阶微分方程

1、$y^{(n)}=f(x)$，两边积分n次；

2、$y''=f(x,y')$（不显含有y），令$y'=p$，则$y''=p'$；

3、$y''=f(y,y')$（不显含有x），令$y'=p$，则$y''=p\frac{dp}{dy}$

（六）线性微分方程解的结构

1、y_1,y_2是齐次线性方程的解，则$C_1y_1+C_2y_2$也是；

2、y_1,y_2是齐次线性方程的线性无关的特解，则$C_1y_1+C_2y_2$是方程的通解；

3、$y=C_1y_1+C_2y_2+y^*$为非齐次方程的通解，其中y_1,y_2为对应齐次方程的线性无关的解，y^*非齐次方程的特解。

（七）常系数齐次线性微分方程

二阶常系数齐次线性方程：$y''+py'+qy=0$

特征方程：$r^2+pr+q=0$，特征根： r_1,r_2

特征根	通　　解
实根 $r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

（八）常系数非齐次线性微分方程

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

1、$f(x) = e^{\lambda x} P_m(x)$

设特解 $y^* = x^k e^{\lambda x} Q_m(x)$，其中 $k = \begin{cases} 0, & \lambda\text{不是特征根} \\ 1, & \lambda\text{是一个单根} \\ 2, & \lambda\text{是重根} \end{cases}$

2、$f(x) = e^{\lambda x}\left(P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x\right)$

设特解 $y^* = x^k e^{\lambda x}\left[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x + R_m^{(2)}(x)\sin\omega x\right]$,

其中 $m = \max\{l, n\}$，$k = \begin{cases} 0, & \lambda + \omega i\text{不是特征根} \\ 1, & \lambda + \omega i\text{是特征根} \end{cases}$