例 1　求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}(\frac{1}{1+x})^n$的收敛域.

解　由达朗贝尔判别法

$$\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{|1+x|}\to\frac{1}{|1+x|}\ (n\to\infty)$$

(1) 当$\frac{1}{|1+x|}<1$, $\Rightarrow|1+x|>1$,

即$x>0$或$x<-2$时，原级数绝对收敛.

例2 求下列幂级数的收敛区间:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-nx)^n$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{\sqrt{n}}(x-\frac{1}{2})^n$.

解 (1) $\because \rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1 \quad \therefore R=1$

当$x=1$时, 级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, 该级数收敛

当$x=-1$时, 级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, 该级数发散

故收敛区间是$(-1,1]$.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-nx)^n$;

$\because \rho = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} n = +\infty, \quad \therefore R = o,$

级数只在$x = 0$处收敛,

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$;

$\because \rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0, \quad \therefore R = +\infty,$

收敛区间$(-\infty,+\infty)$.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^n}{\sqrt{n}}(x-\frac{1}{2})^n$.

$\because \rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 2 \quad \therefore R = \frac{1}{2}$,

即 $\left|x-\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$ 收敛, $x \in (0,1)$ 收敛,

当 $x=0$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$, 发散

当 $x=1$ 时, 级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 收敛

故收敛区间为(0,1].

例 3　求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}$的收敛区间.

解　$\because$ 级数为$\frac{x}{2}+\frac{x^3}{2^2}+\frac{x^5}{2^3}+\cdots$ 缺少偶次幂的项

应用达朗贝尔判别法

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}/2^{n+1}}{x^{2n-1}/2^n}\right| = \frac{1}{2}|x|^2,$$

当$\frac{1}{2}x^2<1$,　即$|x|<\sqrt{2}$时,　级数收敛,

当$\frac{1}{2}x^2 > 1$，即$|x| > \sqrt{2}$时，级数发散，

当$x = \sqrt{2}$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}$，级数发散，

当$x = -\sqrt{2}$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{\sqrt{2}}$，级数发散，

原级数的收敛区间为$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

例 4 求级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$的和函数.

解 $\because s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$, 显然 $s(0)=0$,

$$s'(x)=1-x+x^2-\cdots=\frac{1}{1+x},\quad(-1<x<1)$$

两边积分得

$$\int_0^x s'(t)dt=\ln(1+x)$$

即 $s(x)-s(0)=\ln(1+x)$

$$\therefore s(x)=\ln(1+x),$$

又 $x=1$时, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$收敛.

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\ln(1+x). \quad (-1<x\leq 1)$$

例 5　求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{2^n}$ 的和.

解　考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$，收敛区间(-1,1),

则 $s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n=x(\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n+1})''$

$$=x\left(\frac{x^2}{1-x}\right)''=\frac{2x}{(1-x)^3},$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n(n+1)}{2^n}=s\left(\dfrac{1}{2}\right)=8.$