二、初等函数的连续性

基本初等函数在定义区间内连续

连续函数经四则运算仍连续

连续函数的复合函数连续

$\boxed{\text{一切初等函数在定义区间内连续}}$

例如,

$y=\sqrt{1-x^2}$ 的连续区间为 $[-1,1]$ (端点为单侧连续)

$y=\ln\sin x$ 的连续区间为 $(2n\pi,(2n+1)\pi)$, $n\in Z$

而 $y=\sqrt{\cos x-1}$ 的定义域为 $x=2n\pi$, $n\in Z$

因此它无连续点

第三章　导数与微分

§ 3.1 导数的概念

★问题的提出
★导数的定义
★由定义求导数
★导数的几何意义与物理意义
★可导与连续的关系
★小结

一、问题的提出

1.自由落体运动的瞬时速度问题

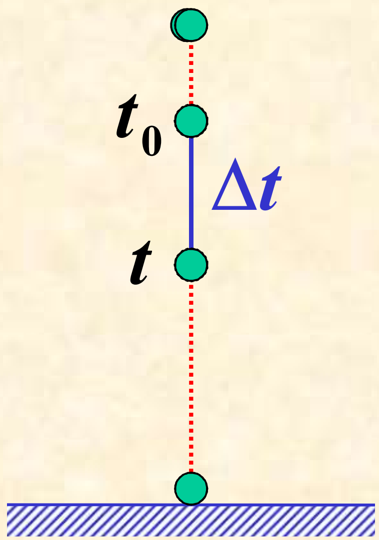
如图, 求t_0时刻的瞬时速度,

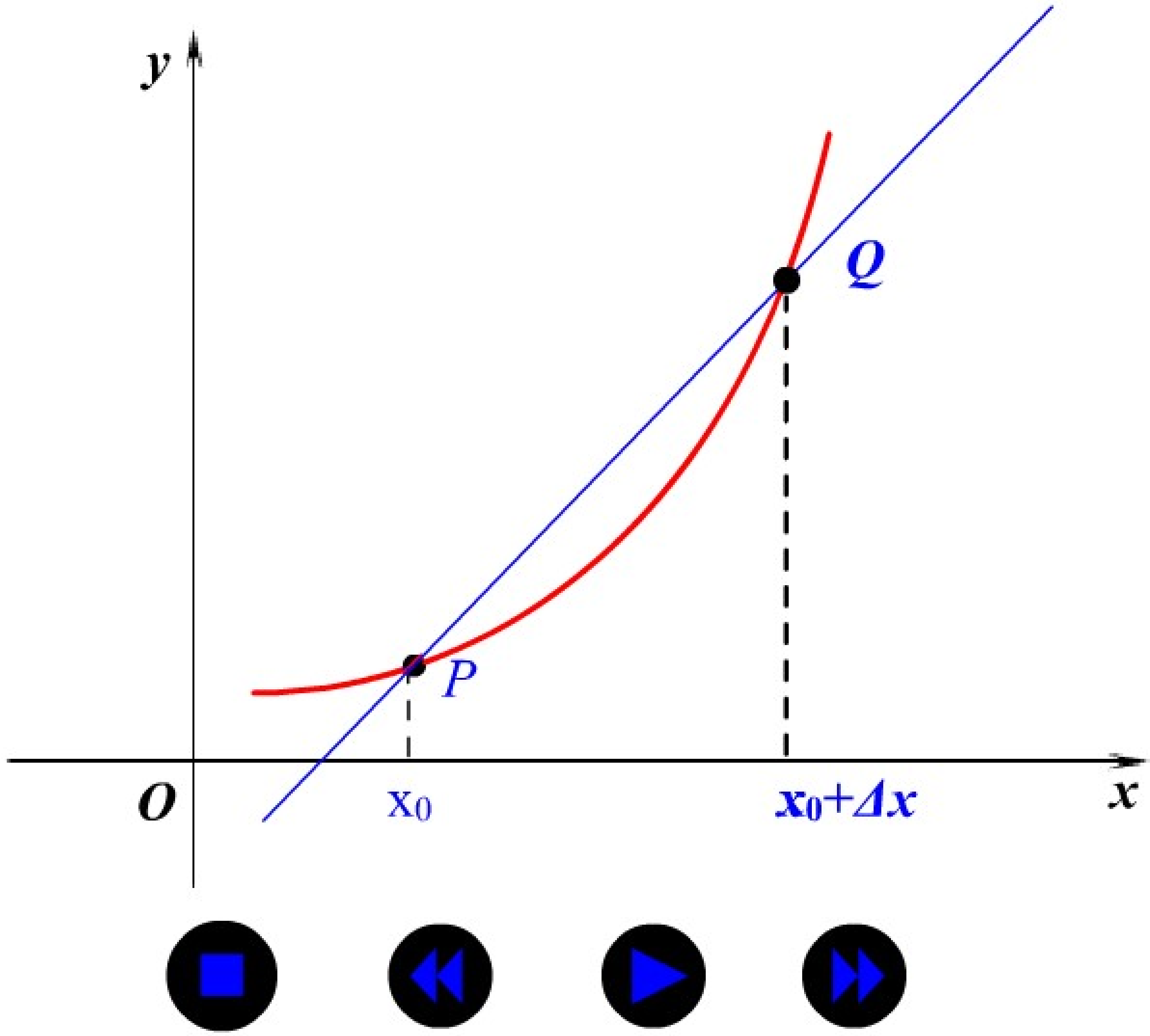
取一邻近于t_0的时刻t,运动时间Δt,

平均速度 $\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{s - s_0}{t - t_0} = \dfrac{g}{2}(t_0 + t).$

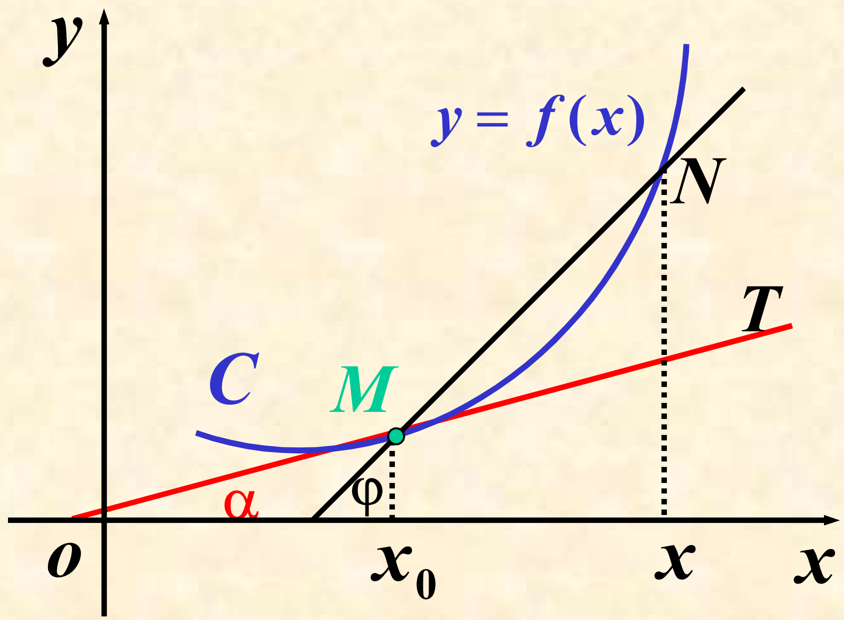
当$t \to t_0$时, 取极限得

瞬时速度 $v = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{g(t_0 + t)}{2} = g t_0.$




y
Q
P
O
x₀
x₀+Δx
x

如图, 如果割线MN绕点M旋转而趋向极限位置MT,直线MT就称为曲线C在点M处的<u>切线</u>.



极限位置即

$|MN| \to 0, \angle NMT \to 0.$ 设 $M(x_0, y_0), N(x, y).$

割线MN的斜率为 $\tan\varphi = \dfrac{y - y_0}{x - x_0} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$

$N \xrightarrow{\text{沿曲线}C} M, x \to x_0,$

切线MT的斜率为 $k = \tan\alpha = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$

总结: 上面两个问题虽然出发点相异，但都可归结为同一类型的数学问题:

★ 求函数 f 在点 x_0 处的增量 $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ 与自变量增量 $\Delta x = x - x_0$ 之比的极限.

★这个增量比称为函数 f 关于自变量的平均变化率，增量比的极限 (如果存在) 称为 f 在点 x_0 处关于 x 的瞬时变化率(或简称变化率).

二、导数的定义

定义1　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义,当自变量x在x_0处取得增量Δx(点$x_0+\Delta x$仍在该邻域内)时，相应地函数y取得增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，如果极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则称函数 f 在点 x_0 可导，该极限称为 f 在 x_0 的导数，记为$f'(x_0)$,或$y'\big|_{x=x_0}$，或

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} \text{或} \left.\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0},$$

即 $$y'\big|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

其它形式 $$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

关于导数的说明：

★ 点导数是因变量在点 x_0 处的变化率，它反映了因变量随自变量的变化而变化的快慢程度.

★ 如果函数 $y = f(x)$ 在集合 D 内的每点处都可导，就称函数 $f(x)$ 在 D 内可导或称 $f(x)$ 是 D 内的可导函数.

★ 若$f(x)$是D内的可导函数，则对于任一 $x\in I$，都对应着 $f(x)$的一个确定的导数值.这个函数叫做原来函数 $f(x)$的导函数.

记作 $y',f'(x),\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.

即 $\boldsymbol{y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}$

或 $\boldsymbol{f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}}$.

注意: $f'(x_0)=f'(x)\Big|_{x=x_0}$.

★ 单侧导数

1.左导数:

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

2.右导数:

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x};$$

★ 函数$f(x)$在点x_0处可导$\Leftrightarrow$左导数$f'_-(x_0)$和右导数$f'_+(x_0)$都存在且相等.

★ 如果$f(x)$在开区间(a,b)内可导，且$f'_+(a)$及$f'_-(b)$都存在，就说$f(x)$在闭区间$[a,b]$上可导.

例 设函数 $f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x \ge x_0 \\ \psi(x), & x < x_0\end{cases}$，讨论在点$x_0$的可导性.

$$若 \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\psi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)}{\Delta x} = f'_-(x_0)\ 存在$$

若 $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$= \lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)}{\Delta x} = f'_+(x_0)$ 存在

且 $\boldsymbol{f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = a,}$

则 $\boldsymbol{f(x)}$在点$\boldsymbol{x_0}$可导,

且 $\boldsymbol{f'(x_0) = a.}$

三、由定义求导数

步骤: (1) 求增量 $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x);$

(2) 算比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x};$

(3) 求极限 $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}.$

例1 求函数 $f(x) = C$(C为常数)的导数.

解 $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{C - C}{h} = 0.$$

即 $(C)' = 0.$

例2　设函数 $f(x)=\sin x$, 求$(\sin x)'$及$(\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}$.

解　$$(\sin x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\cos(x+\frac{h}{2})\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x.$$

即　$(\sin x)'=\cos x.$

$$\therefore (\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\cos x\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例3　求函数 $y=x^n$ (n为正整数)的导数.

解　$(x^n)'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^n-x^n}{h}$

$$=\lim_{h\to 0}[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h+\cdots+h^{n-1}]=nx^{n-1}$$

即　$(x^n)'=nx^{n-1}.$

更一般地　$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}.$　$(\mu\in R)$

例如,　$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$

$$(x^{-1})'=(-1)x^{-1-1}=-\frac{1}{x^2}.$$

例4 求函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$ 的导数.

解 $$(a^x)'=\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}$$

$$=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}$$

$$=a^x\ln a.$$

即 $(a^x)'=a^x\ln a.$ $(e^x)'=e^x.$

例5　求函数 $y=\log_a x(a>0, a\neq 1)$ 的导数.

解　$y'=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$

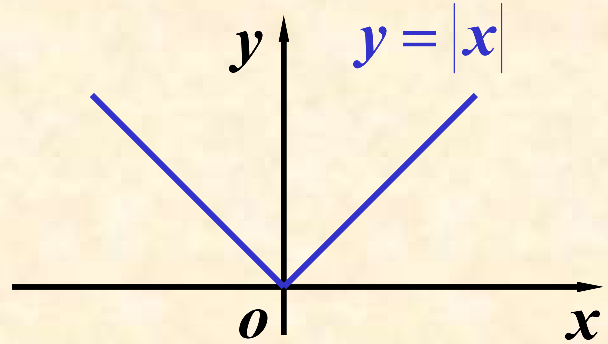
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{h\to 0}\log_a(1+\frac{h}{x})^{\frac{x}{h}}=\frac{1}{x}\log_a e.$$

即　$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x}\log_a e.$　　$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}.$

例6　讨论函数 $f(x)=|x|$ 在$x=0$处的可导性.

解　$\because \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\dfrac{|h|}{h},$



$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1,$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1.$$

即 $f'_+(0)\neq f'_-(0)$, 　$\therefore$ 函数$y=f(x)$在$x=0$点不可导.