§2 极坐标系下二重积分的计算

总结

二重积分化为二次积分的公式（1）

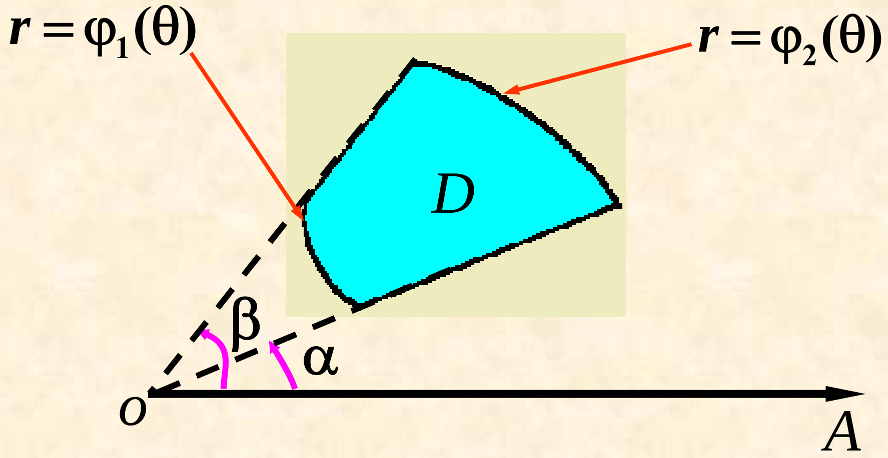
区域特征如图

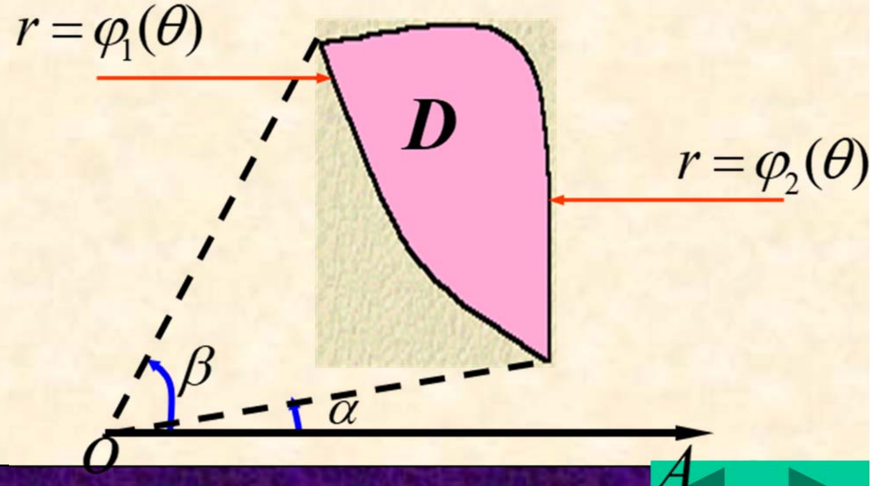
$$\alpha \le \theta \le \beta,$$

$$\varphi_1(\theta) \le r \le \varphi_2(\theta).$$

$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$$

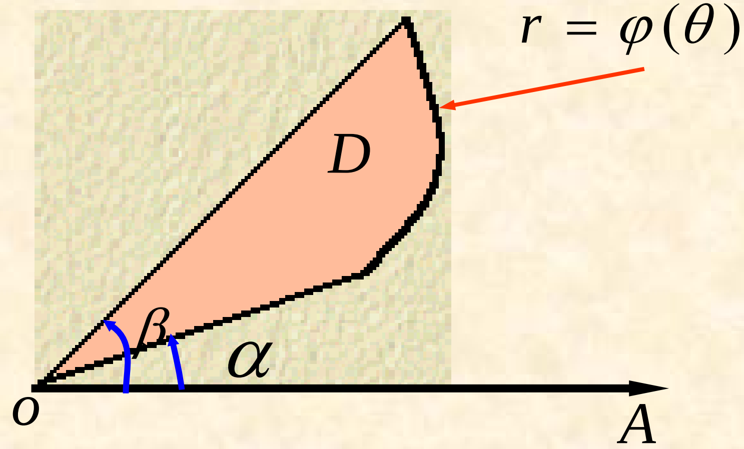




区域特征如图

$$\alpha \le \theta \le \beta,$$

$$0 \le r \le \varphi(\theta).$$



$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$$

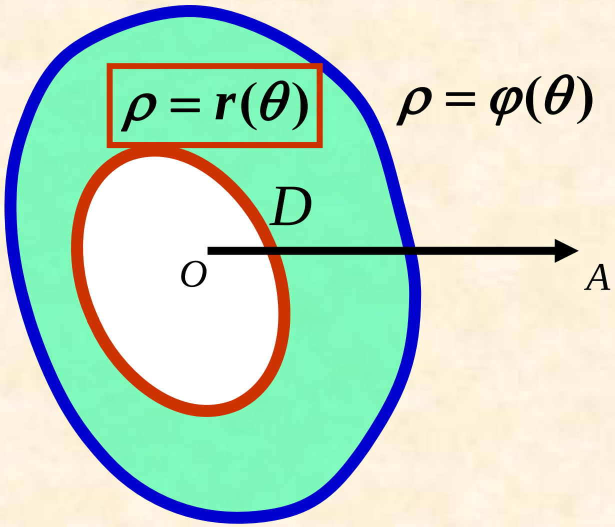
$$= \int_\alpha^\beta d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$$

若极点在D的内部

则D可以用不等式表示:

$$0 \le \rho \le \varphi(\theta), \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$

这时有



$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varphi(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho}$$

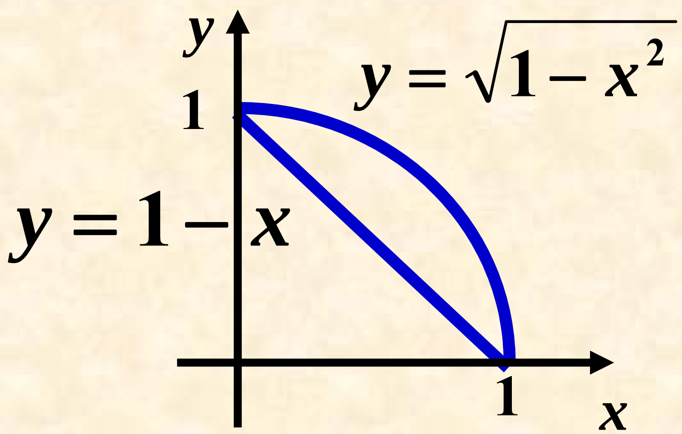
若D由两条封闭曲线围成（如图），则

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\boxed{r(\theta)}}^{\varphi(\theta)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho}$$

例1 将$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma, D: 1-x \le y \le \sqrt{1-x^2}$,

$0 \le x \le 1$, 化为极坐标下的二次积分.

解 利用$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}$把积分区域的边界曲线化为极坐标形式:



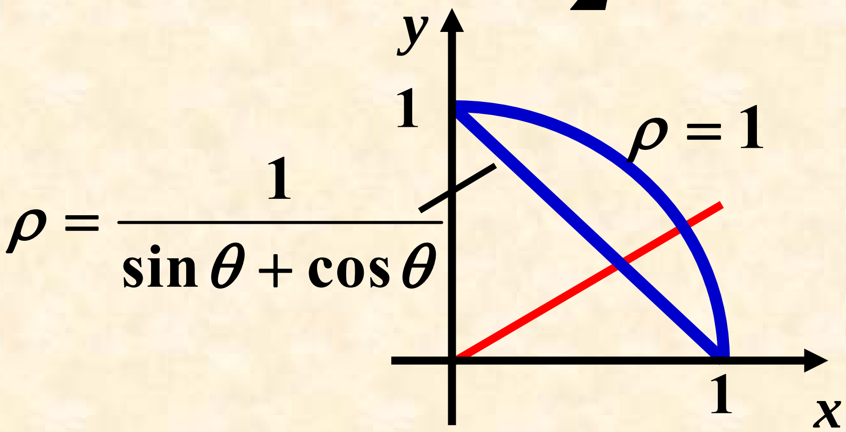
圆: $y=\sqrt{1-x^2} \longrightarrow \rho=1$,

直线: $y=1-x \longrightarrow \rho=\dfrac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$

$$\boxed{D: 1 - x \le y \le \sqrt{1 - x^2}, 0 \le x \le 1,}$$

于是

$$D: \frac{1}{\sin\theta + \cos\theta} \le \rho \le 1, \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$



$$\iint_D f(x, y) d\sigma$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\sin\theta + \cos\theta}}^{1} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho d\rho$$

例2. 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中$D: x^2+y^2\le a^2$.

解: 在极坐标系下$D: \begin{cases} 0\le r\le a \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$, 故

$$\text{原式}=\iint_D e^{-r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a re^{-r^2}\,\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\left[\frac{-1}{2}e^{-r^2}\right]_0^a=\pi(1-e^{-a^2})$$

由于 e^{-x^2} 的原函数不是初等函数 , 故本题无法用直角坐标计算.

注:利用例6可得到一个在概率论与数理统计及工程上非常有用的反常积分公式

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad ①$$

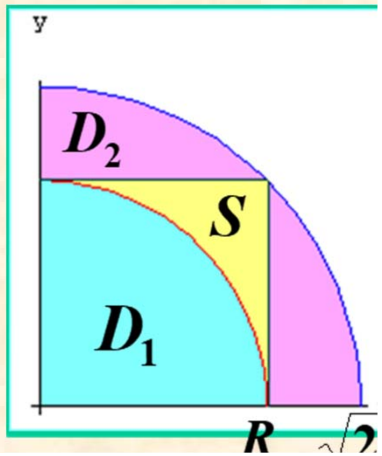
事实上, 当D 为 R^2 时,

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}\,y$$

$$= 4\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x\right)^2$$

利用例6的结果, 得

$$4\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}\,x\right)^2 = \lim_{a\to+\infty} \pi(1-e^{-a^2}) = \pi$$

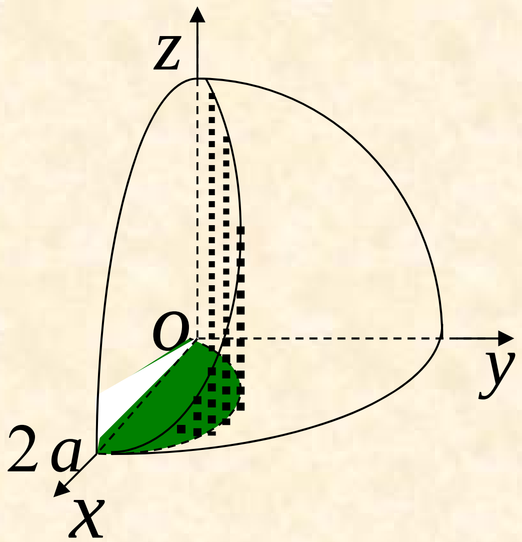


故①式成立 .

例3. 求球体 $x^2+y^2+z^2\le 4a^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax$ $(a>0)$ 所截得的(含在柱面内的)立体的体积.

解: 设 $D:0\le r\le 2a\cos\theta,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

由对称性可知



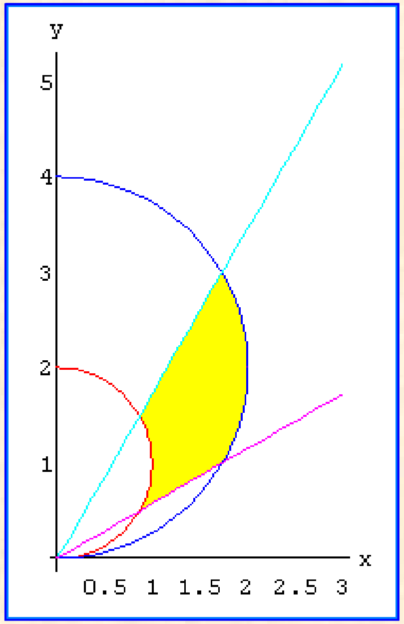
$$V=4\iint_D\sqrt{4a^2-r^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{4a^2-r^2}\,r\,\mathrm{d}r$$

$$=\frac{32}{3}a^3\int_0^{\pi/2}(1-\sin^3\theta)\,\mathrm{d}\theta=\frac{32}{3}a^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$$

例 4 计算 $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$，其 D 为由圆 $x^2+y^2=2y$，$x^2+y^2=4y$ 及直线 $x-\sqrt{3}y=0$，$y-\sqrt{3}x=0$ 所围成的平面闭区域.

解



$$y-\sqrt{3}x=0 \Rightarrow \theta_2=\frac{\pi}{3}$$

$$x^2+y^2=4y \Rightarrow r=4\sin\theta$$

$$x-\sqrt{3}y=0 \Rightarrow \theta_1=\frac{\pi}{6}$$

$$x^2+y^2=2y \Rightarrow r=2\sin\theta$$

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{2\sin\theta}^{4\sin\theta}r^2\cdot rdr=15\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{3}\right).$$

例5 计算 $\iint\limits_D \frac{\sin\left(\pi\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}d\sigma$,

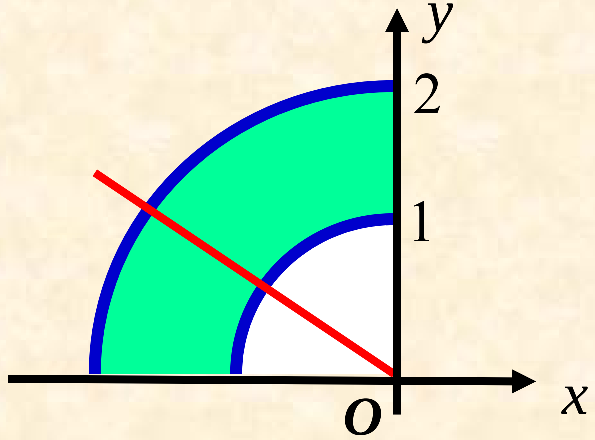
其中 $D: 1 \le x^2+y^2 \le 4, x \le 0, y \ge 0.$

解 用极坐标 $D: 1 \le \rho \le 2, \frac{\pi}{2} \le \theta \le \pi$

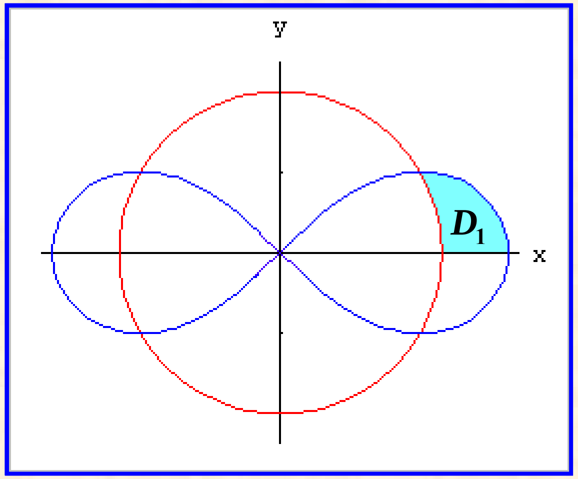
原积分 $= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_1^2 \frac{\sin \pi\rho}{\rho} \cdot \rho d\rho$

$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_1^2 \sin \pi\rho d\rho$

$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2}{\pi} d\theta = -1$



例 6　求曲线 $(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)$ 和 $x^2+y^2\geq a^2$ 所围成的图形的面积.



解　根据对称性有 $D=4D_1$

在极坐标系下

$$x^2+y^2=a^2\Rightarrow r=a,$$

$$(x^2+y^2)^2=2a^2(x^2-y^2)\Rightarrow\quad r=a\sqrt{2\cos 2\theta},$$

由$\begin{cases} r = a\sqrt{2\cos 2\theta} \\ r = a \end{cases}$，　得交点$A = (a, \dfrac{\pi}{6})$,

所求面积$\sigma = \iint\limits_{D} dxdy = 4\iint\limits_{D_1} dxdy$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta \int_a^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} rdr$$

$$= a^2(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}).$$

小结 $\boxed{\text{计算二重积分一化为二次积分}}$

一、利用直角坐标

若D（X型）：$\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x), a \le x \le b$

$$\text{则} \iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$$

(先y后x积分)

若D为（Y型）：$\psi_1(y) \le x \le \psi_2(y), c \le y \le d$

$$\text{则} \iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$$

(先对x后y积分)

改变二次积分的次序的步骤:

X型域

(先对y后x积分)

按定限规则

积分区域D

按题目要求

按定限规则

Y型域

(先对x后y积分)

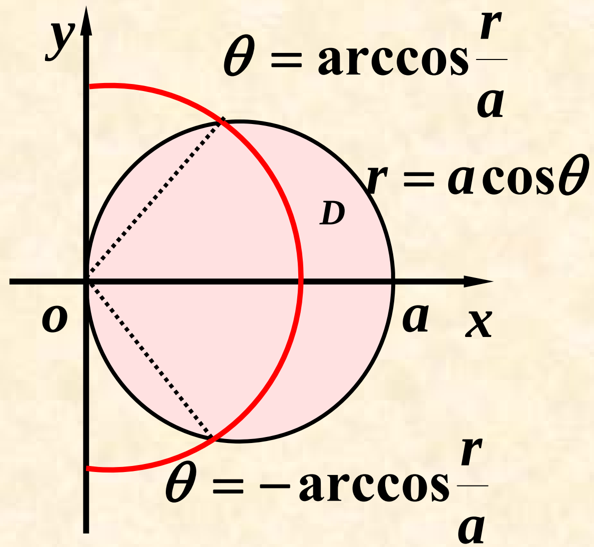
思考题

交换积分次序:

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{a\cos\theta}f(r,\theta)dr\quad(a\geq 0).$$

思考题解答

$$D:\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2},\\ 0\leq r\leq a\cos\theta\end{cases}$$



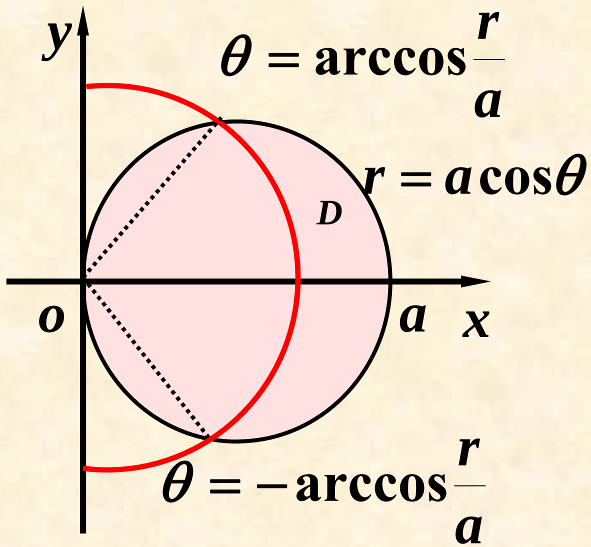
$$I=\int_0^a dr\int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}}f(r,\theta)d\theta.$$

交换积分次序:

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{0}^{a\cos\theta}f(r,\theta)dr\quad(a\geq 0).$$

思考题解答

$$D:\begin{cases}-\dfrac{\pi}{2}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2}\\ 0\leq r\leq a\cos\theta\end{cases},$$

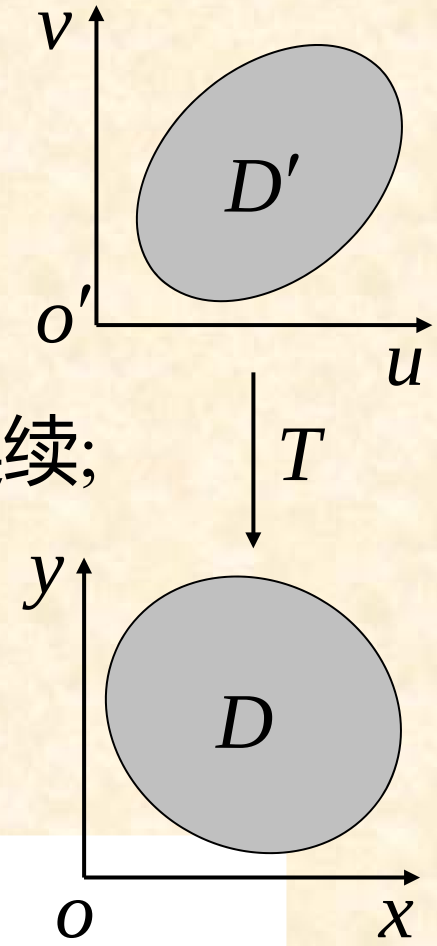


$$I=\int_{0}^{a}dr\int_{-\arccos\frac{r}{a}}^{\arccos\frac{r}{a}}f(r,\theta)d\theta.$$

三、二重积分换元法

定理: 设 $f(x,y)$ 在闭域 D 上连续, 变换:

$$T:\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \quad (u,v)\in D' \to D$$



满足 (1) $x(u,v),\ y(u,v)$ 在 D' 上一阶偏导连续;

(2) 在 D' 上 雅可比行列式

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0;$$

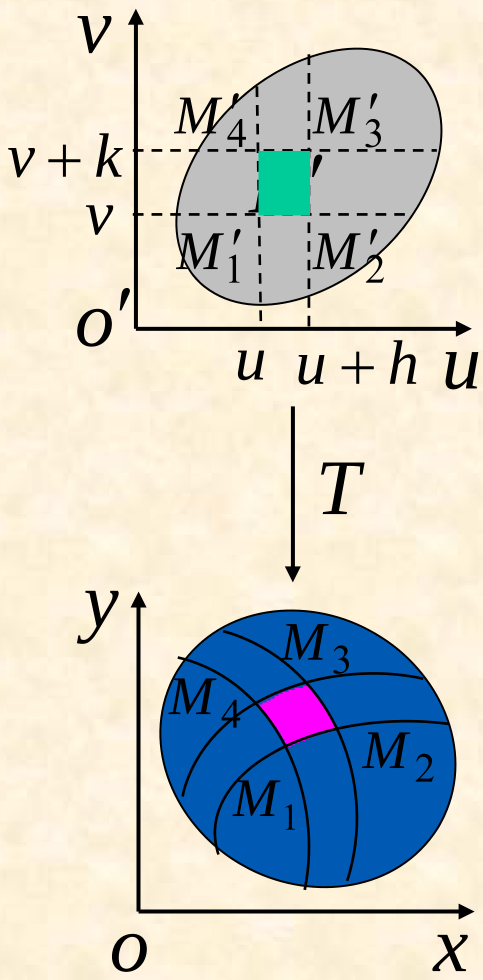
(3) 变换 $T: D'\to D$ 是一一对应的 ,

则 $$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|J(u,v)\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

证: 根据定理条件可知变换 T 可逆.

在 $uo'v$ 坐标面上, 用平行于坐标轴的直线分割区域 D', 任取其中一个小矩形, 其顶点为

$$M_1'(u,v), \qquad M_2'(u+h,v),$$
$$M_3'(u+h,v+k), \quad M_4'(u,v+k).$$



通过变换T, 在 xoy 面上得到一个四边形,其对应顶点为$M_i(x_i, y_i)$ $(i=1,2,3,4)$

令 $\rho=\sqrt{h^2+k^2}$, 则

$$x_2-x_1=x(u+h,v)-x(u,v)=\left.\frac{\partial x}{\partial u}\right|_{(u,v)} h+o(\rho)$$

$$x_4 - x_1 = x(u, v+k) - x(u,v) = \left.\frac{\partial x}{\partial v}\right|_{(u,v)} k + o(\rho)$$

同理得 $$y_2 - y_1 = \left.\frac{\partial y}{\partial u}\right|_{(u,v)} h + o(\rho)$$

$$y_4 - y_1 = \left.\frac{\partial y}{\partial v}\right|_{(u,v)} k + o(\rho)$$

当h, k 充分小时,曲边四边形 $M_1M_2M_3M_4$ 近似于平行四边形, 故其面积近似为

$$\Delta\sigma \approx \left| \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_4} \right| = \left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 \end{vmatrix} \right|$$

$$\approx \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} h & \frac{\partial y}{\partial u} k \\ \frac{\partial x}{\partial v} h & \frac{\partial y}{\partial v} k \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \right| hk = \left| J(u,v) \right| hk$$

因此面积元素的关系为 $\mathrm{d}\sigma = \left|J(u,v)\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

从而得二重积分的换元公式:

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|J(u,v)\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

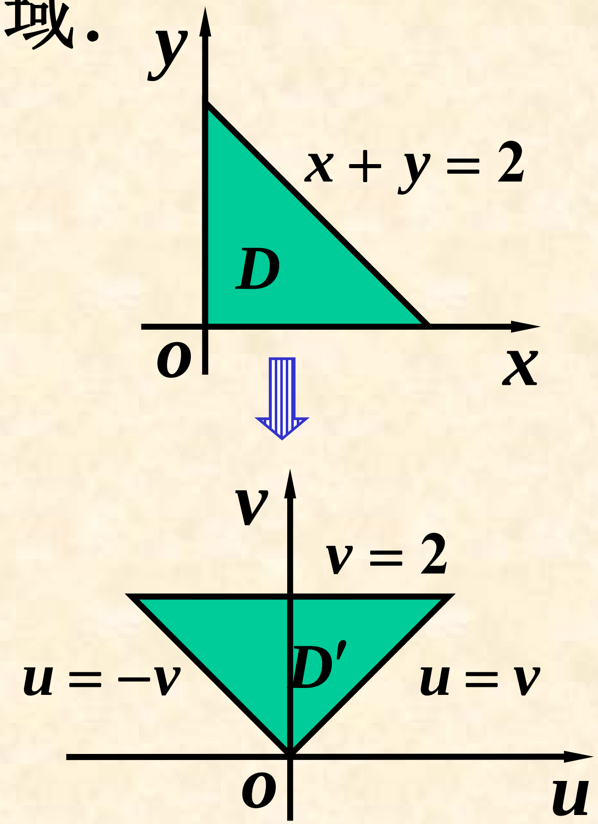
例如, 直角坐标转化为极坐标时, $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

$$\therefore \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

例1 计算 $\iint\limits_{D} e^{\frac{y-x}{y+x}} dxdy$, 其中 D 由 x 轴、y轴和直线 $x+y=2$ 所围成的闭区域.



解 令 $u = y - x, \quad v = y + x,$

则 $x = \dfrac{v-u}{2}, \quad y = \dfrac{v+u}{2}.$

$D \to D'$, 即 $\quad x = 0 \to u = -v;$

$y = 0 \to u = v;$

$x + y = 2 \to v = 2.$

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2},$$

故 $$\iint_D e^{\frac{y-x}{y+x}}dxdy=\iint_{D'} e^{\frac{u}{v}}\left|-\frac{1}{2}\right|dudv$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2 dv\int_{-v}^{v} e^{\frac{u}{v}}du=\frac{1}{2}\int_0^2(e-e^{-1})vdv=e-e^{-1}.$$