第八章

多元函数微分学及其应用

一元函数微分学

$\downarrow$ **推广**

多元函数微分学

注意: 善于类比, 区别异同

第一节 多元函数的基本概念

一、准备工作：

（1） 点集知识：邻域、点、区域

（2）多元函数的概念，二元函数的图形

二、多元函数的极限定义，二重极限的计算

三、多元函数的连续性

四、闭区域上多元连续函数的性质：

有界性、最值定理、介值定理、一致连续性

一、准备工作：点集知识

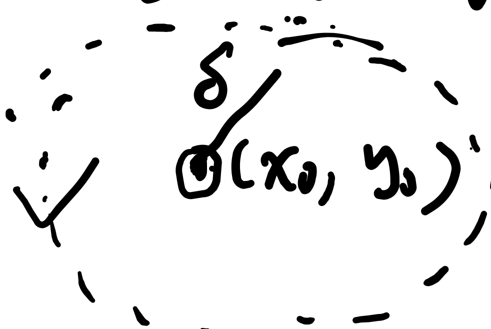
1. 邻域

邻域 $0<\|\vec{x}-\vec{x_0}\|<\delta$

二元 $\vec{x}=(x,y)$

$\vec{x_0}=(x_0,y_0)$

$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$

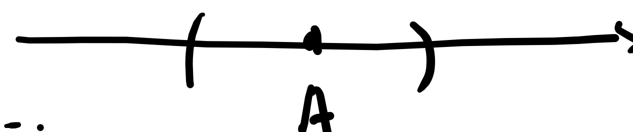


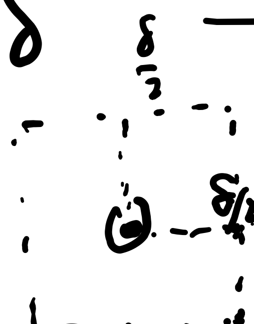
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ 当

$\boxed{0<|x-x_0|<\delta}$ 时 有

$|f(x)-A|<\varepsilon$

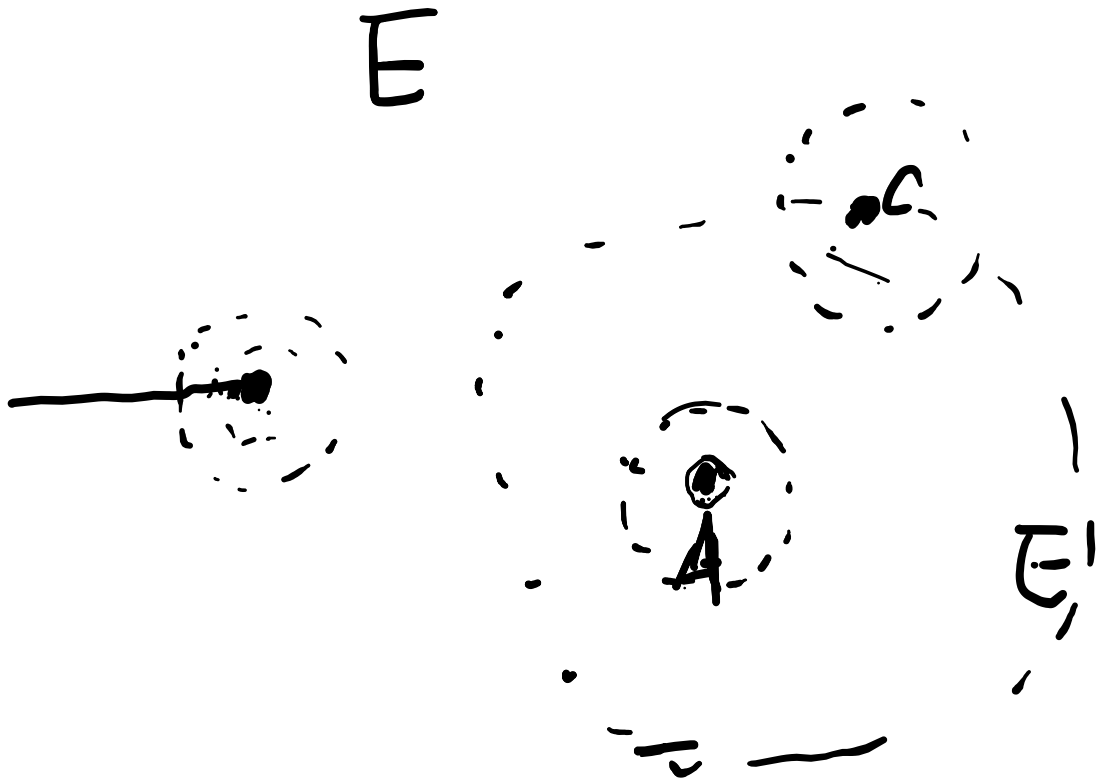




$\|\vec{x}-\vec{x_0}\|=\max\{x-x_0,\ y-y_0\}$

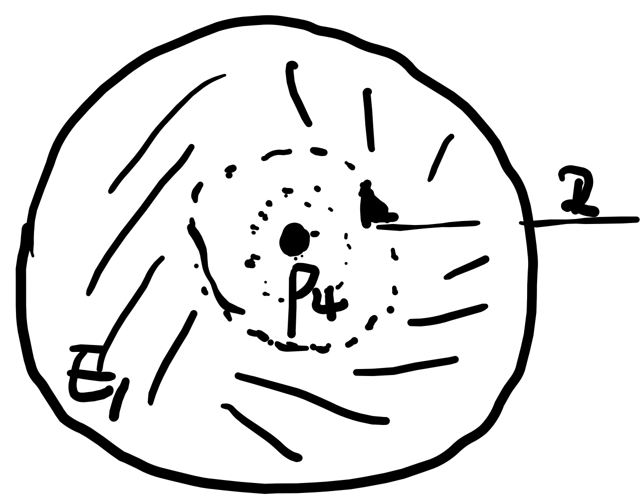
A B C AC

2. 内点、外点、边界点、聚点

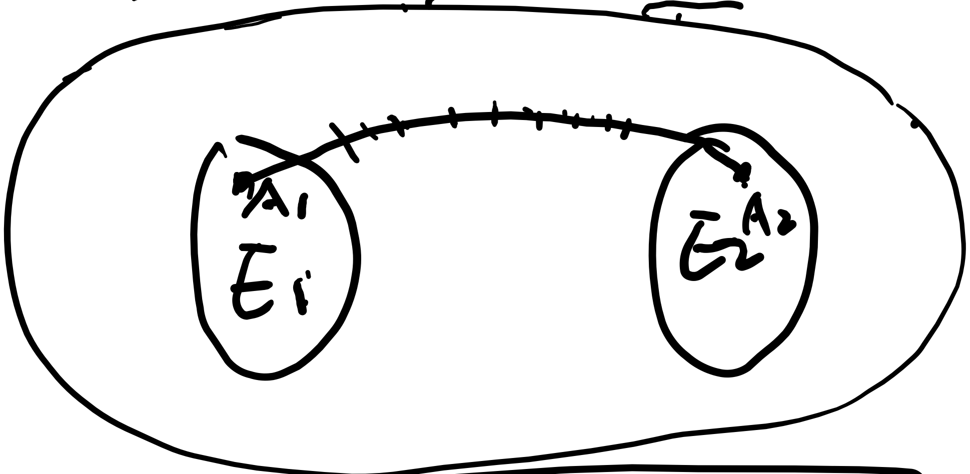


$$\overline{E_1} = \{(x,y) \mid x^2+y^2=0 \text{ or } 1 < x^2+y^2 \le 4\}$$

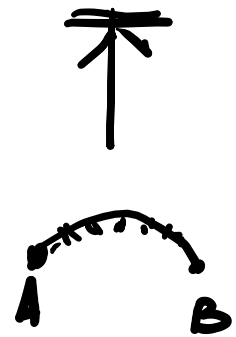
(0,0)

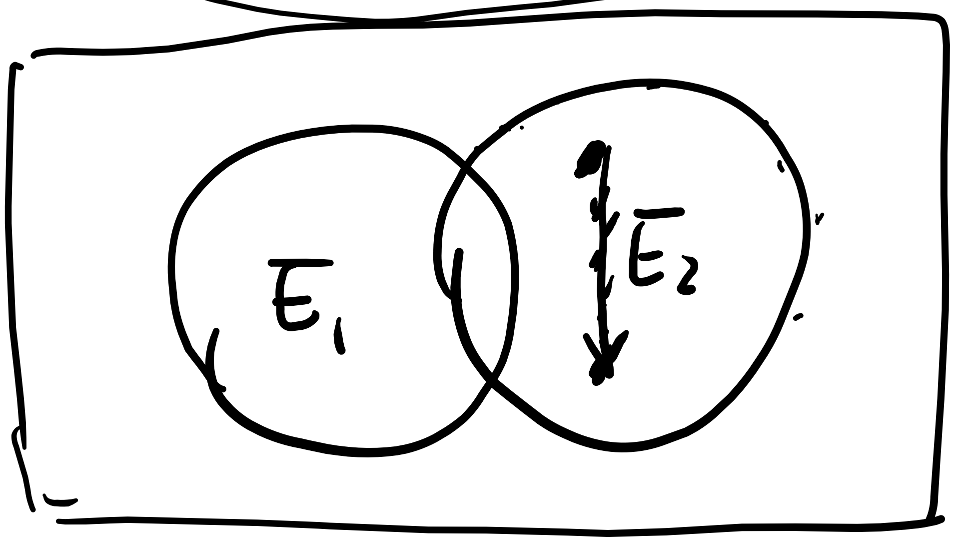


3. 开集、连通性、区域、有界域

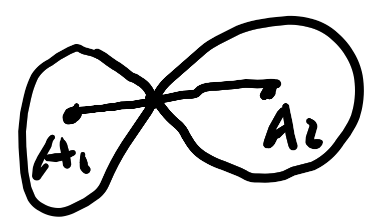


$E = E_1 \cup E_2$





$E = E_1 \cap E_2$



例：判断区域 ①开集 ②连通性

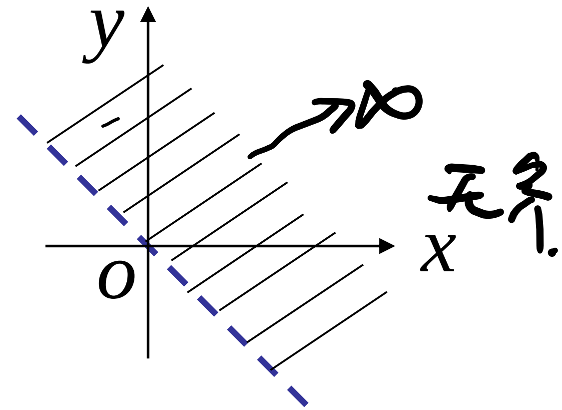
无界

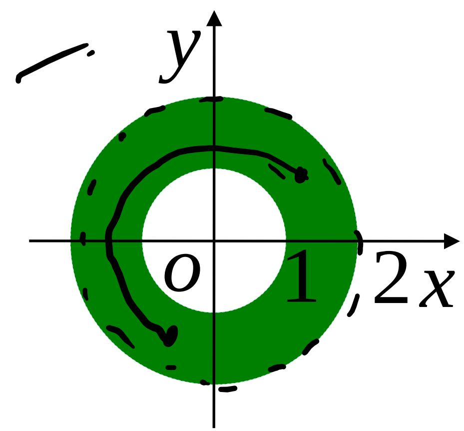
- $\{(x,y) \mid x+y>0\}$ 开.
- $\{(x,y) \mid 1<x^2+y^2<4\}$ 开.

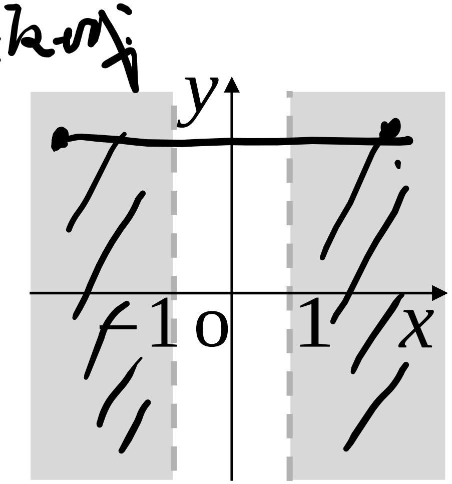
有界

- $\{(x,y) \mid x+y\geq 0\}$
- $\{(x,y) \mid 1\leq x^2+y^2\leq 4\}$ 闭...
- $\{(x,y) \mid |x|>1\}$ 非区域

$x>1$ or $x<-1$





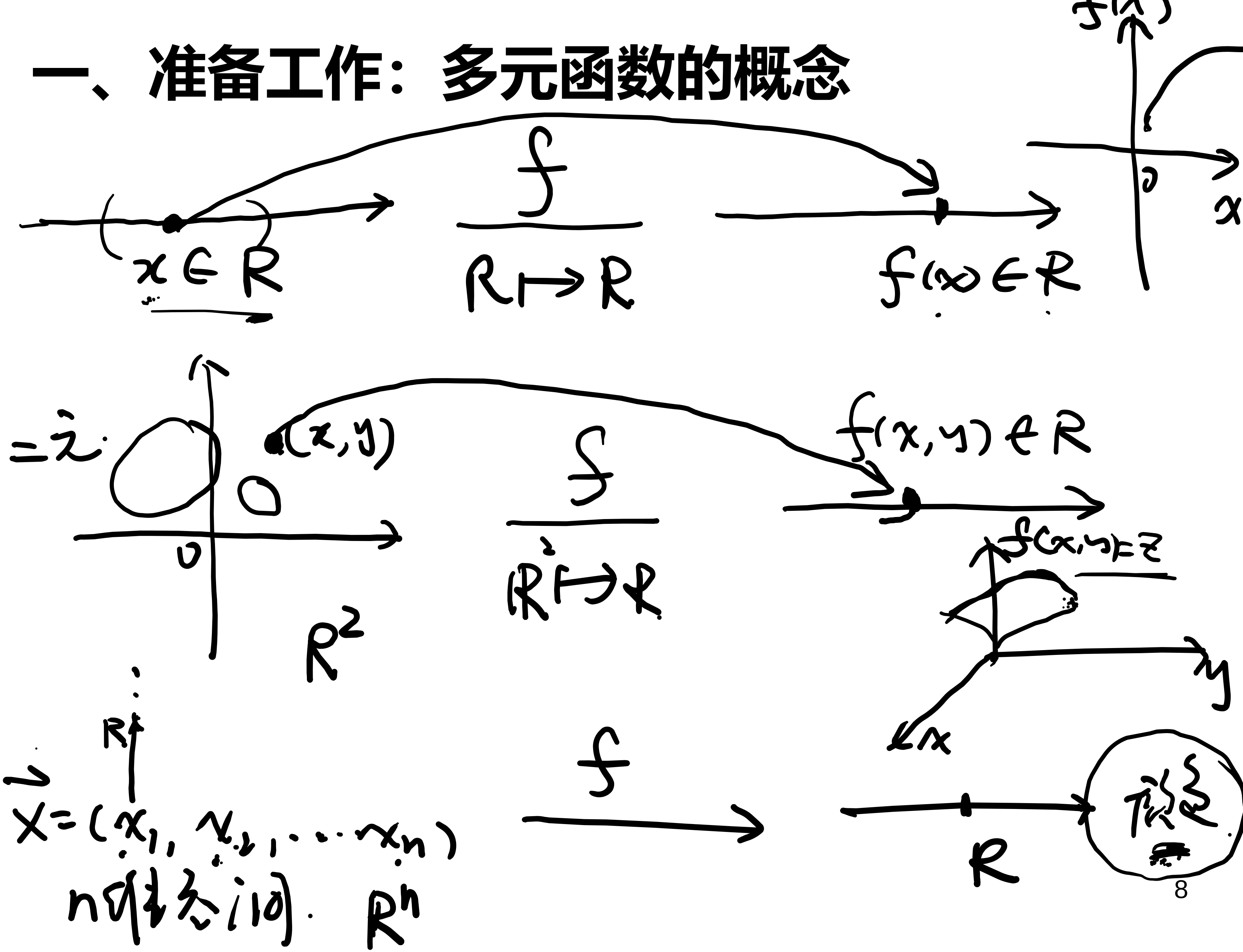


♣ 整个平面是最大的开域，也是最大的闭域

♣ 有界域

对区域 D，若存在正数 K，使一切点 $P\in D$与某定点 A 的距离 $|AP|\leq K$，则称 D 为**有界域，**否则称为**无界域**．

一、准备工作：多元函数的概念



** *n* 维空间

n 元有序数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全体称为 ***n* 维空间**,

记作 R^n, 即

$$\mathrm{R}^n = \mathrm{R} \times \mathrm{R} \times \cdots \times \mathrm{R}$$

$$= \{ (x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_k \in \mathrm{R}, k = 1, 2, \cdots, n \}$$

每一个元素 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为空间中的一个**点**,

数 x_k 称为该点的第 k 个**坐标**.

定义. 设非空点集 $D \subset \mathbb{R}^n$, 映射 $f: D \mapsto \mathbb{R}$ 称为定义在 D 上的 ***n* 元函数**，记作

$$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ 或 } u = f(P), P \in D$$

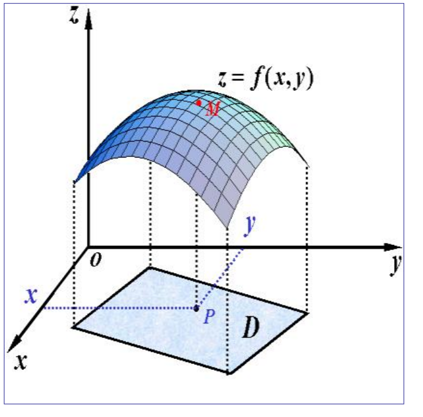
点集 D 称为函数的**定义域**；

数集 $\{u \mid u = f(P), P \in D\}$ 称为函数的**值域** .

特别地 , 当 $n = 2$ 时, 有二元函数

$$z = f(x, y), \quad (x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$$

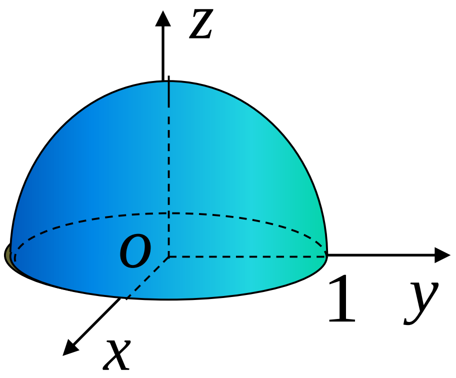
几何意义：一般为空间曲面 Σ .



例：　二元函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

定义域为圆域 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$

图形为中心在原点的上半球面.

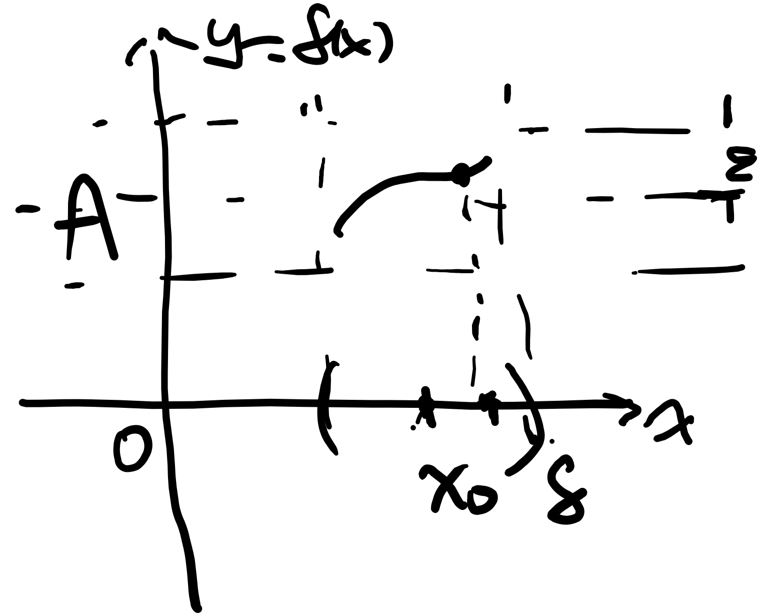


三元函数 $u=\arcsin(x^2+y^2+z^2)$

定义域为单位闭球 $\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1\}$

图形为 R^4 空间中的超曲面.

二、多元函数的极限



$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = A$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A$$

$\vec{x} = x_1$

$\vec{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$\vec{x}_0=(x_{01}, x_{02}, \cdots, x_{0n})$

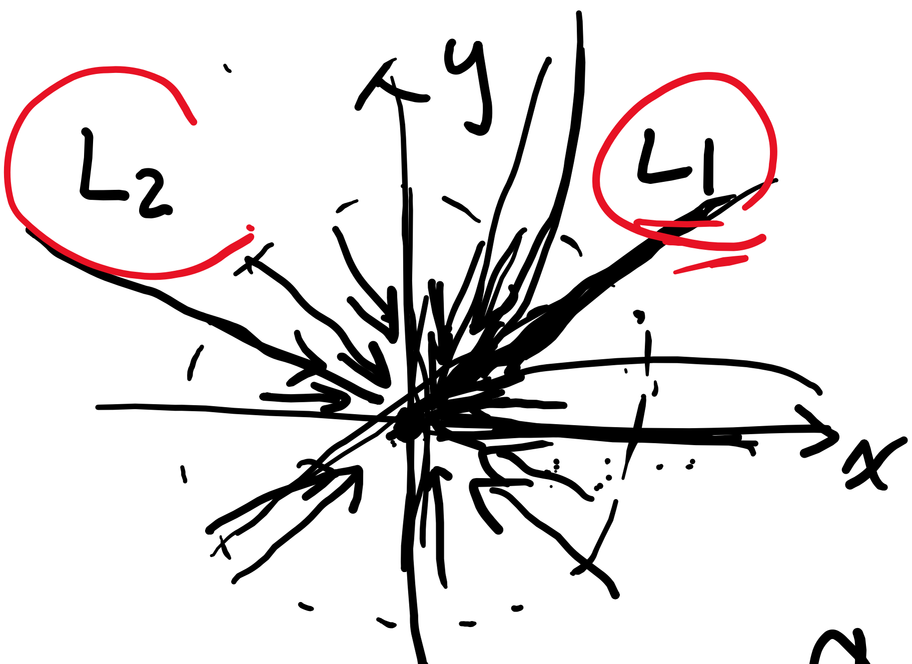
$\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, 当 $0<|\vec{x}-\vec{x}_0|<\delta$ 时

$|f(\vec{x})-A|<\varepsilon$.

二元情况下：$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$

$\rho=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$



$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = A$$

$$\Downarrow$$

Ø $\lim_{L_1} f(x) = A, \ \lim_{L_2} f(x) = B$

$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)$ 不存在

$y = kx$, $y = kx^2$

定义. 设 n 元函数 $f(P), P\in D\subset \mathrm{R}^n, P_0$ 是 D 的聚点，若存在常数 A，对任意正数 ε，总存在正数δ，对一切 $P\in D\bigcap U^{\circ}(P_0,\delta)$，都有 $\left|f(P)-A\right|<\varepsilon$，则称 A 为函数

$f(P)$当$P\to P_0$时的极限，记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A$$ (也称为 n 重极限)

当 $n=2$ 时，记 $\rho=\left|PP_0\right|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$

二元函数的极限可写作：

$$\lim_{\rho\to 0} f(x,y)=A=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

***** 二重极限**

例. 设 $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} \quad (x^2+y^2 \neq 0)$

$0 \le |\cdot|$ $\delta(x)$ $\le x^2+y^2 \to 0$

证明：$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = 0.$

$\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, 当

$0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ ②

时有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. ①

$\delta(\varepsilon)$

$|f(x,y)-0|$

$=\left|(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|$

$\le x^2+y^2 < \varepsilon.$

取 $\delta=\sqrt{\varepsilon}$，当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时

有 $|f(x,y)-0| \le x^2+y^2 < \delta^2 = \varepsilon$

$|f(x)-A| < \cdots\cdots < k\rho < \varepsilon$

$\rho < \boxed{\frac{\varepsilon}{k}}$ δ

$(\rho = \sqrt{x^2+y^2})$

例. 设 $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} \quad (x^2+y^2\neq 0)$

证明: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0.$

证明: $\because \left|(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-0\right| \le x^2+y^2$

$\therefore\ \forall \varepsilon>0,\ \exists \delta=\sqrt{\varepsilon}$, 当 $0<\rho=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时, 总有

$$\left|f(x,y)-0\right| \le x^2+y^2<\delta^2=\varepsilon$$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$

例. 设 $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}, & xy\neq 0 \\ 0, & xy=0 \end{cases}$

证明: $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0.$

$(x-0)^2+(y-0)^2$

$0\le \left|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right| \le \left|x\sin\frac{1}{y}\right|+\left|y\sin\frac{1}{x}\right|$

$\le |x|+|y| < 2\sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow 0$

$< \varepsilon$

由夹逼准则. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x)=0$

$\boxed{\delta=\frac{\varepsilon}{2}} \longrightarrow$ 证毕

例. 设 $f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}, & xy\neq 0 \\ 0 \quad\quad , & xy=0 \end{cases}$

证明：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0.$

证明:

$\because \left| f(x,y)-0 \right| \le \left| x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x} \right| \le |x|+|y| \le 2\sqrt{x^2+y^2}$

$\therefore\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta=\varepsilon/2,$ 当 $0<\rho=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时,

总有 $\left| f(x,y)-0 \right| \le 2\sqrt{x^2+y^2}<2\delta=\varepsilon$

故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=0$

*** 累次极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 及 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$

- 与二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ **不同.**

结论:

如果它们都存在, 则三者相等.

仅知其中一个存在, 推不出其它二者存在.

*** 二重极限的计算

* 重要极限

$$\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{\sin xy}{y}=\lim_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{xy}{y}$$

$$\boxed{\lim_{\square\to0}\frac{\sin\square}{\square}=1}$$

$xy\to0=0$

$$\lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=e$$

* 等价代换

$\sin\square\sim\square$

$e^{\square}\sim1+\square$

$\sqrt{1+\square}\sim1+\frac{1}{2}\square$

$\sqrt{1+\square}-1\sim\frac{1}{2}\square$

$\vdots$

$\square\to0$

$\square\to f(x)$

$\to f(x,y)$ 令 $u=f(x,y)$ $\longrightarrow$

*** 二重极限的计算

* 夹逼准则

* 无穷小 × 有界.

例. $\displaystyle \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$.

0

$\sqrt{1+x}-1 \sim \frac{1}{2}x$

$x\to 0$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\frac{1}{2}xy}{xy}$$

$$= \frac{1}{2}$$

有理化

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\cancel{xy}+\cancel{1}-\cancel{1}}{\cancel{xy}(\sqrt{xy+1}+1)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

例. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \boxed{\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}}$ <1 $(x^2+y^2\neq 0)$

$$0 < \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| < |y| \to 0 \quad (y\to 0)$$

由 . . .

$$\therefore \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$$

例. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}}\left(x^2+y^2\right)^{xy}$

$0<\rho<\delta$

$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$

$x=\rho\cos\theta$

$y=\rho\sin\theta$

$$\lim_{\rho\to0}\frac{\frac{1}{\rho}}{-\frac{1}{\rho^2}}=0$$

$$= e^{\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} xy\ln(x^2+y^2)}$$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\ y\to0}} xy\ln(x^2+y^2)\to0$

$$=1$$

$$\boxed{xy\le\frac{x^2+y^2}{2}}$$

$$0\le\left|xy\ln(x^2+y^2)\right|\le\frac{1}{2}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$$

令 $\rho=x^2+y^2\to0$

$$=\frac{1}{2}\rho\ln\rho\to0\quad(\rho\to0)$$

$$\therefore\ \lim_{\substack{x\to0\\ y\to0}} xy\ln(x^2+y^2)=0$$

例. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x^2+y^2\right)^{xy}$

解：令 $z=\left(x^2+y^2\right)^{xy}$ 取对数，得

$$\ln z = xy\ln\left(x^2+y^2\right)$$

由于

$$0\le\left|xy\ln\left(x^2+y^2\right)\right|\le\rho^2\left|\ln\rho^2\right|\to 0\quad(\rho\to 0^+)$$

故由夹逼定理，有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x^2+y^2\right)^{xy}=e^0=1$$

例. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

$xy \le \frac{1}{2}(x^2+y^2)$

$$\left|\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}\right| \le \frac{1}{4}\frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{1}{4}\sqrt{x^2+y^2} \to 0$$

$$\left|\frac{1}{4}\rho\sin^2 2\theta\right| \le \frac{1}{4}\rho \to 0$$

$\therefore$ 原式 $= 0$.

解 $x=\rho\cos\theta$

$y=\rho\sin\theta$

$x^2+y^2=\rho^2 \to 0$

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\ \theta\text{任意}}} \frac{\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{\rho^3} = \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{4}\rho\cdot\boxed{\sin^2 2\theta}$$

$\boxed{\theta\text{任意}}$

① 无穷小·有界

② 夹逼