例1. 根据题意将二重积分转化为极坐标进行求解，

令$x=\rho cos\theta, y=\rho sin\theta$,则原式转化为$\int_0^{2\pi}\int_0^R\rho\left(\sqrt{R^2-\rho^2}\right)d\rho d\theta=\frac{2\pi R^3}{3}$

例2. 根据题意$\iint_D\left(b-\sqrt{x^2+y^2}\right)d\sigma=\int_0^{2\pi}\int_0^a\rho(b-\rho)d\rho d\theta=\pi a^2(\frac{3b-2a}{3})$

例3. 根据题意可知被积函数在第一象限，且$x+y>1$,故被积函数$(x+y)^3>(x+y)^2$,因此$I_2>I_1$.

例4. 当$r\le|x|+|y|\le 1$时，$0<x^2+y^2\le(|x|+|y|)^2\le 1$,故$\ln(x^2+y^2)\le 0$,

又当$|x|+|y|<1$时，$\ln(x^2+y^2)<0$,于是$\iint_{r\le|x|+|y|\le 1}\ln(x^2+y^2)\,dxdy<0$

例5. 根据题意可知$b^2\le x^2+y^2\le a^2$,区域面积为$ab\pi$,所以被积函数取值范围为$e^{b^2}\le e^{(x^2+y^2)}\le e^{a^2}$,所以此积分估计值为$ab\pi e^{b^2}\le\iint_D e^{(x^2+y^2)}d\sigma\le ab\pi e^{a^2}$

华东师范大学 EAST CHINA NORMAL UNIVERSITY 计算机科学与软件工程学院 School of Computer Science and Software Engineering

例6. 解 $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{(x+y)^2+16}}$,区域面积为$\sigma=2$,在$D$上$f(x,y)$的最大值为$M=\frac{1}{4}$,$(x=0,y=0)$ $f(x,y)$的最小值为$m=\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{1}{5}$,$(x=1,y=2)$,故$\frac{2}{5}\le I\le\frac{2}{4}$.

例7. 根据积分中值定理$\lim\limits_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}\iint_{x^2+y^2\le\rho^2} f(x,y)dxdy=$

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}f(\xi_i,\eta_i)\sigma=\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\pi\rho^2}f(\xi_i,\eta_i)\pi\rho^2=f(0,0).$$

例8. 采用反证法，假如$f(x,y)\neq 0$,则肯定存在某一区域内D_1有$f(x,y)>0$,则$\iint_D f(x,y)d\sigma=\iint_{D-D_1} f(x,y)d\sigma+\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma\ge\iint_{D_1} f(x,y)d\sigma>0$,矛盾。

例9. 根据被积函数的奇偶性可知

(1) $\iint_D \sin(xy)\cos(x^2+y^2)\,d\sigma = 0.$

(2) $\iint_D x^3\sin(x^2+y^2)\,d\sigma = 0.$

(3) $\iint_D (x+y)d\sigma = \iint_D y\,d\sigma = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} dydx = \frac{4}{3}.$

(4) $\iint_{|x|+|y|\le 1} |xy|d\sigma = 4\iint_{|x|+|y|\le 1, x\ge 0, y\ge 0} |xy|\,d\sigma$