第三十三节
空间解析几何

一、向量：概念、表示、运算、性质

二、 空间几何：空间直线、 空间曲线

平面、曲面（旋转面、柱面、二次曲面）

一、向量的几何表示

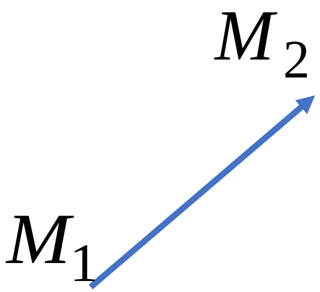
向量：既有大小，又有方向的量称为向量 (又称矢量).

表示法：有向线段 $\overrightarrow{M_1 M_2}$, 或 $\vec{a}$,或 $\mathbf{a}$.

向量的模：向量的大小，记作 $|\overrightarrow{M_1M_2}|$, 或 $|\vec{a}|$, 或 $|\mathbf{a}|$.

向径 (矢径)：起点为原点的向量.

自由向量：与起点无关的向量.



单位向量：模为 1 的向量，记作 $\vec{a}^{\circ}$ 或 a° .

零向量：模为 0 的向量，记作 $\vec{0}$,或 0 .

若向量$\vec{a}$与$\vec{b}$大小相等，方向相同，则称$\vec{a}$与$\vec{b}$相等，记作$\vec{a}=\vec{b}$；

若向量$\vec{a}$与$\vec{b}$方向相同或相反，则称$\vec{a}$与$\vec{b}$平行，记作 $\vec{a}//\vec{b}$；

规定：零向量与任何向量平行；

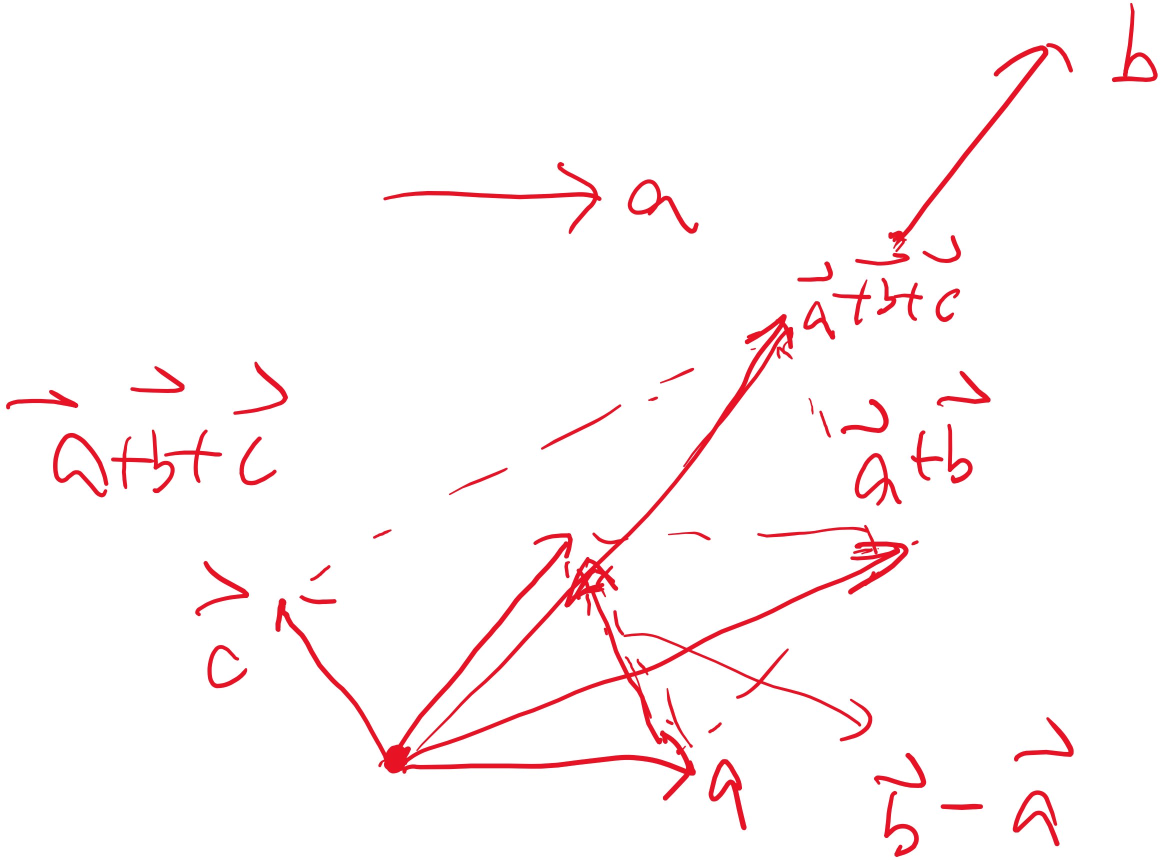
与$\vec{a}$的模相同，但方向相反的向量称为$\vec{a}$的负向量，记作 $-\vec{a}$；

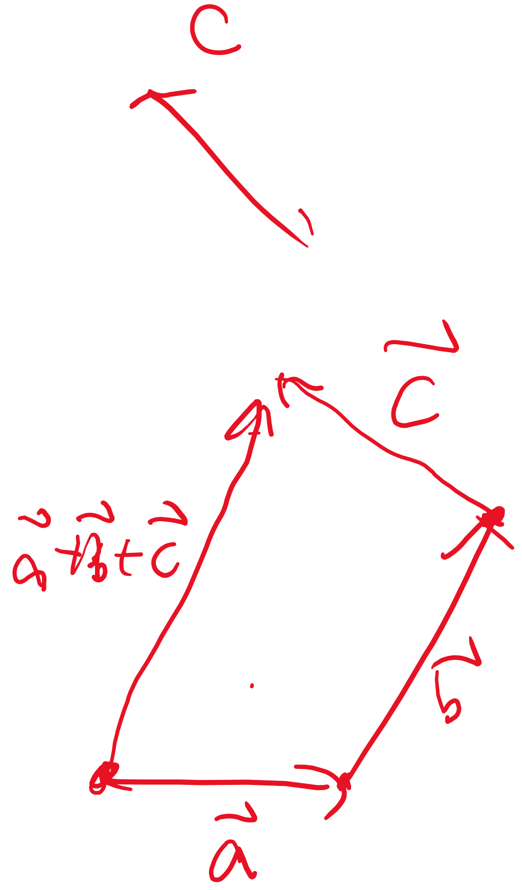
因平行向量可平移到同一直线上，故两向量平行又称两向量共线．

若 $k\,(\geq 3)$个向量经平移可移到同一平面上，则称此 k个向量共面．

向量的线性运算

平行四边形法则、三角形法则





向量与数的乘法

λ 是一个数，λ 与 $\vec{a}$ 的乘积是一个新向量，记作 $\lambda\vec{a}$.

规定：$\lambda > 0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向，$|\lambda\vec{a}| = \lambda|\vec{a}|$;

$\lambda < 0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向，$|\lambda\vec{a}| = -\lambda|\vec{a}|$;

$\lambda = 0$ 时，$\lambda\vec{a} = \vec{0}$.

总之：$|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$

若 $\vec{a} \neq \vec{0}$，则有单位向量 $\vec{a}^{\circ} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$. 因此 $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a}^{\circ}$

运算规律：交换律 $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

结合律 $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

结合律 $\lambda(\mu\,\vec{a})=\mu\,(\lambda\,\vec{a})=\lambda\,\mu\,\vec{a}$

分配律 $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\,\vec{a}+\mu\,\vec{a}$

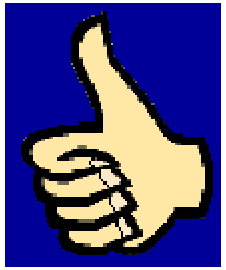
$\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\,\vec{a}+\lambda\,\vec{b}$

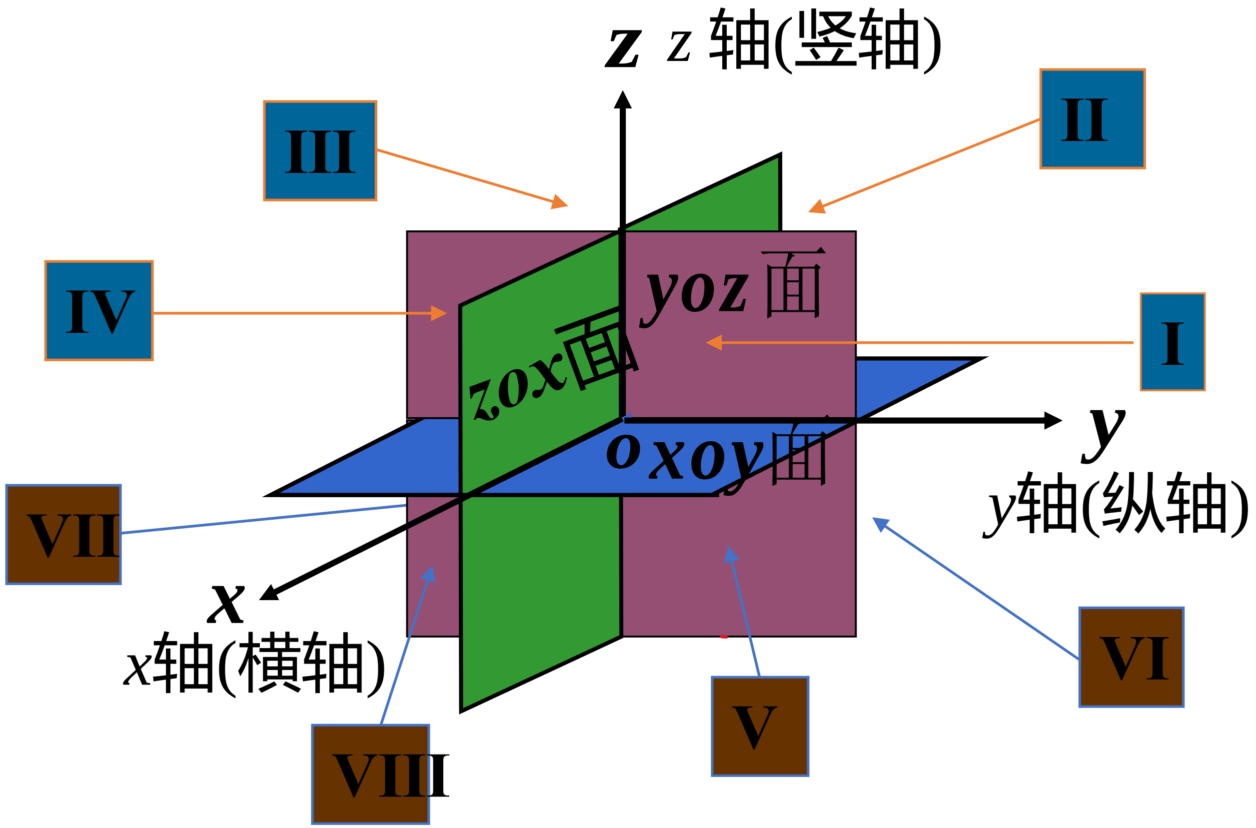
三角不等式 $|\vec{a}+\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$　　$|\vec{a}-\vec{b}|\le|\vec{a}|+|\vec{b}|$

二、空间直角坐标系

过空间一定点 o ,由三条互相垂直的数轴按右手规则组成

- 坐标原点
- 坐标轴
- 坐标面
- 卦限(八个)

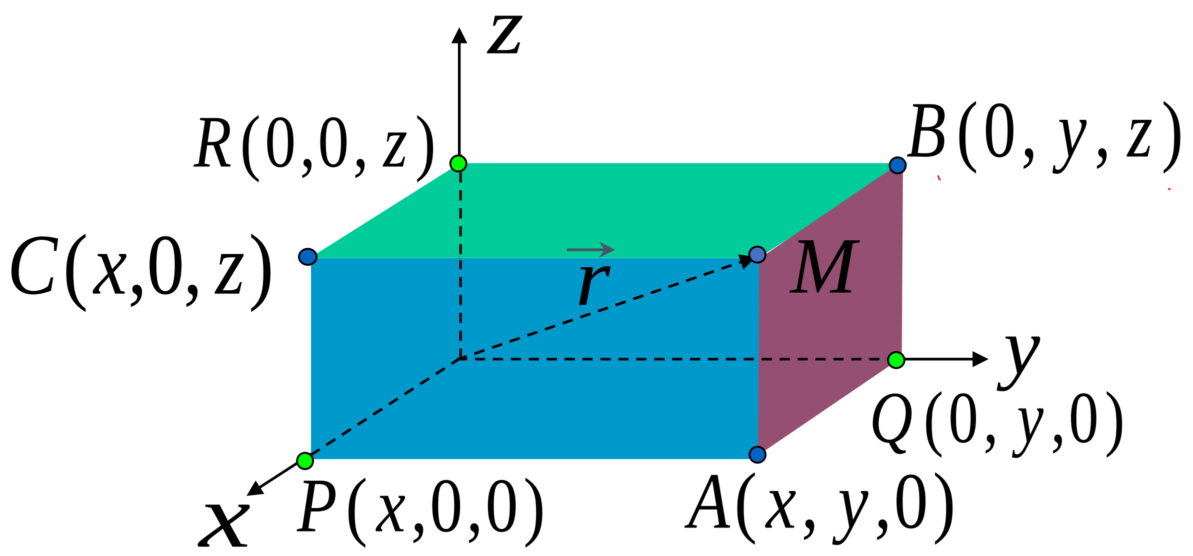


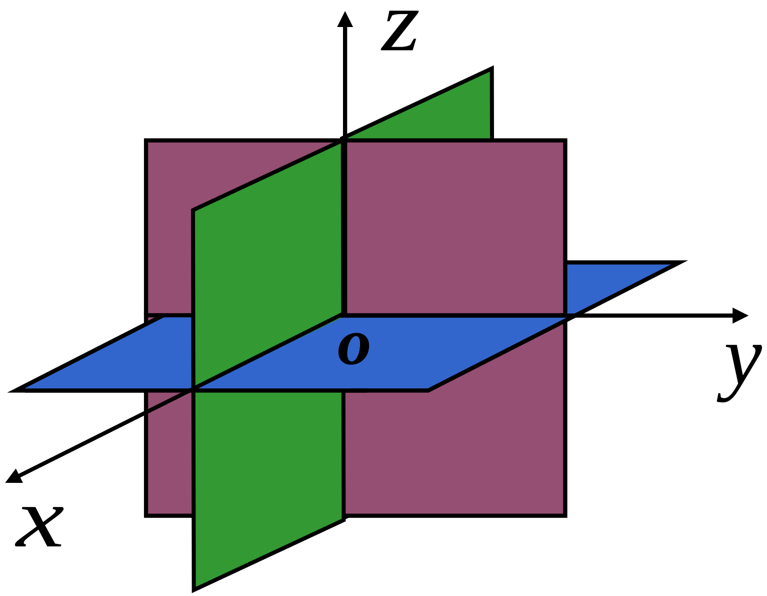


点 $M \xleftrightarrow{1--1}$ 有序数组$(x, y, z) \xleftrightarrow{1--1}$ 向径 $\vec{r}$

(称为点 M 的**坐标**)

原点 $O(0,0,0)$； 坐标轴上的点 P, Q, R； 坐标面上的点 A, B, C





坐标轴：

$$x\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$y\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ x=0 \end{cases}$$

$$z\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

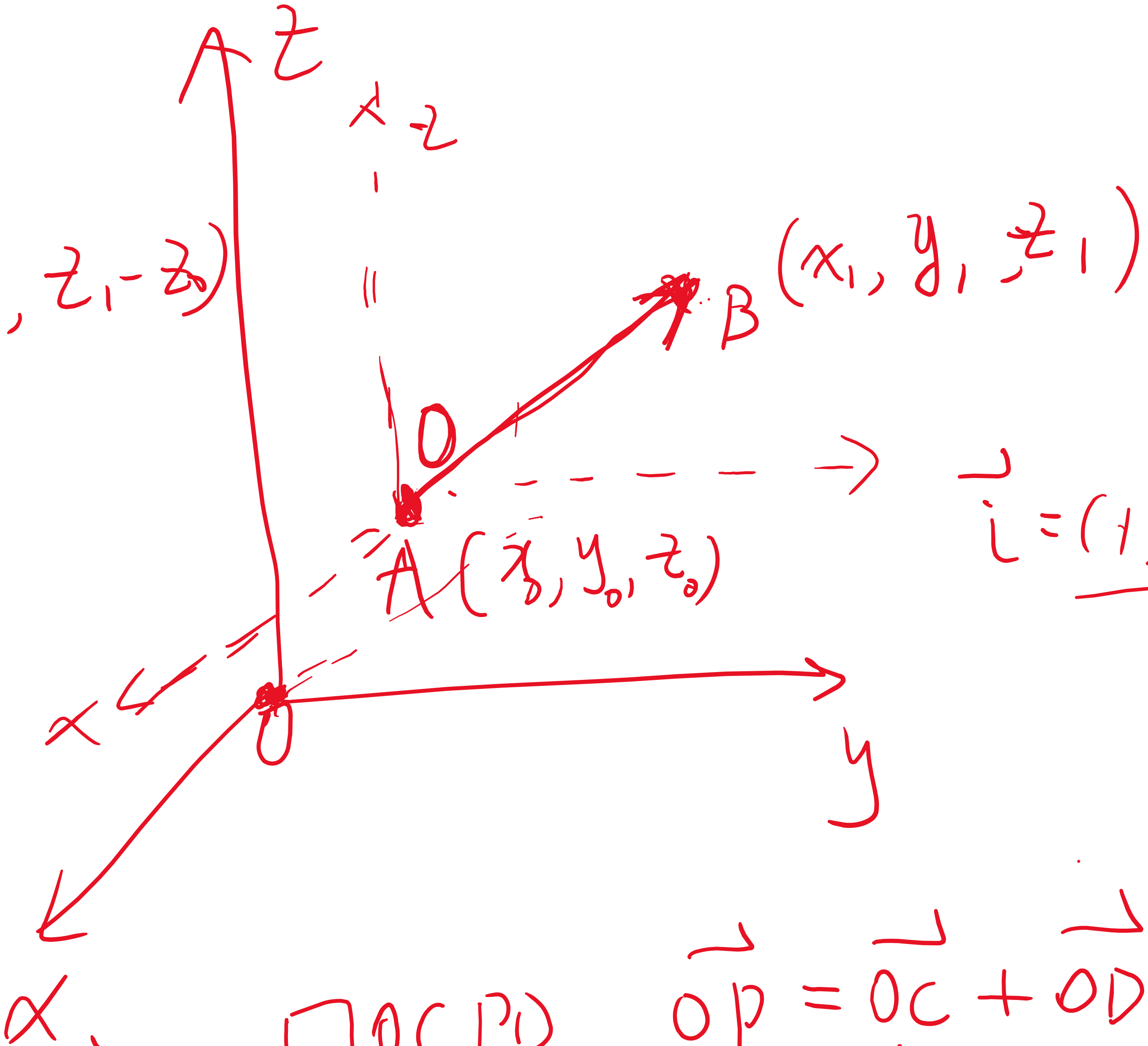
坐标面：

$$xoy\text{面} \leftrightarrow z=0$$

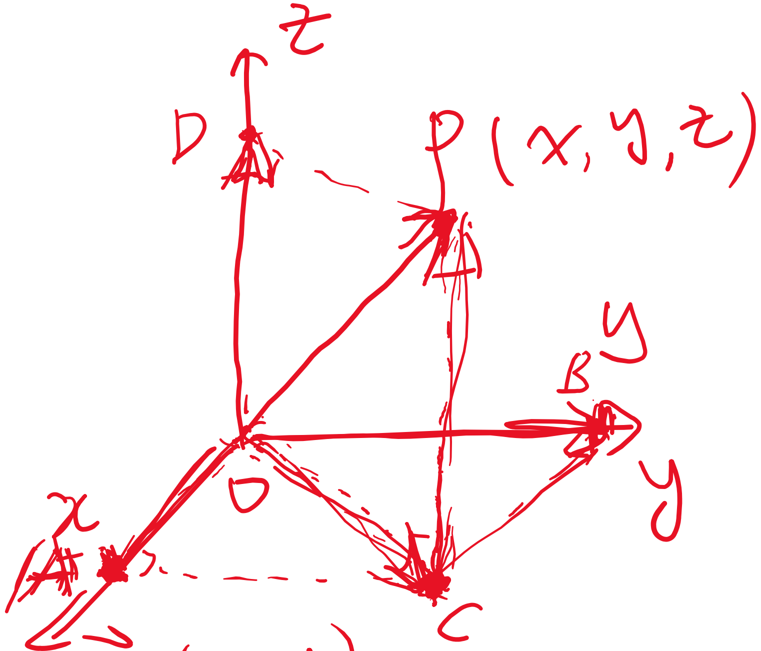
$$yoz\text{面} \leftrightarrow x=0$$

$$zox\text{面} \leftrightarrow y=0$$

$\vec{AB} = (x_1 - x_0,\ y_1 - y_0,\ z_1 - z_0)$



$\vec{i} = (1, 0, 0)$



$x \quad \vec{i} = (1, 0, 0)$

▱ OACB $\quad \vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$

▱ OCPD $\quad \vec{OP} = \vec{OC} + \vec{OD}$

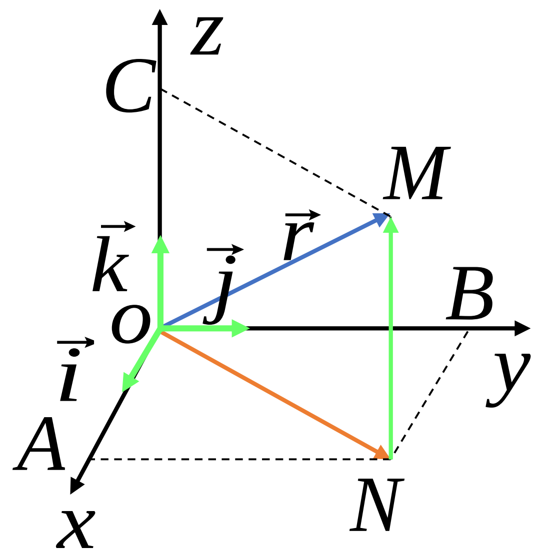
$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Leftarrow = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OD}$

三. 向量的坐标表示

任意向量 $\vec{r}$ 可用向径 $\overrightarrow{OM}$ 表示.

以 $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ 分别表示 x,y,z 轴上的单位向量，

设点 M 的坐标为 $M(x,y,z)$, 则



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{i},\ \overrightarrow{OB} = y\vec{j},\ \overrightarrow{OC} = z\vec{k}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x,y,z)$$

此式称为向量 $\vec{r}$ 的**坐标分解式**，

$x\vec{i},y\vec{j},z\vec{k}$ 称为向量 $\vec{r}$ 沿三个坐标轴方向的**分向量**.

向量的线性运算 $k_1\vec{a}+k_2\vec{b}$

$$\vec{a}=(a_x,\ a_y,\ a_z),\quad \vec{b}=(b_x,\ b_y,\ b_z)$$

$$k_1\vec{a}+k_2\vec{b}=(k_1a_x,\ k_1a_y,\ k_1a_z)+(k_2b_x,\ k_2b_y,\ k_2b_z)$$

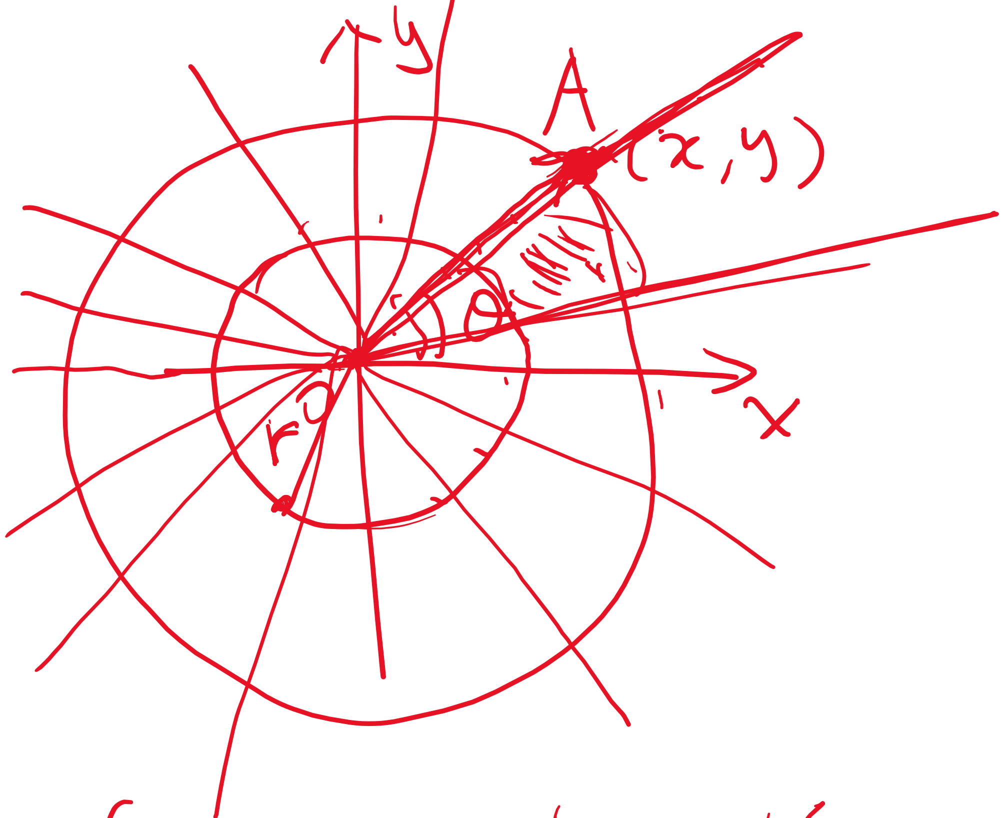
$$=(k_1a_x+k_2b_x,\ k_1a_y+k_2b_y,\ k_1a_z+k_2b_z)$$

例. 求解以向量为未知元的线性方程组 $\begin{cases} 5\vec{x}-3\vec{y}=\vec{a} & ① \\ 3\vec{x}-2\vec{y}=\vec{b} & ② \end{cases}$

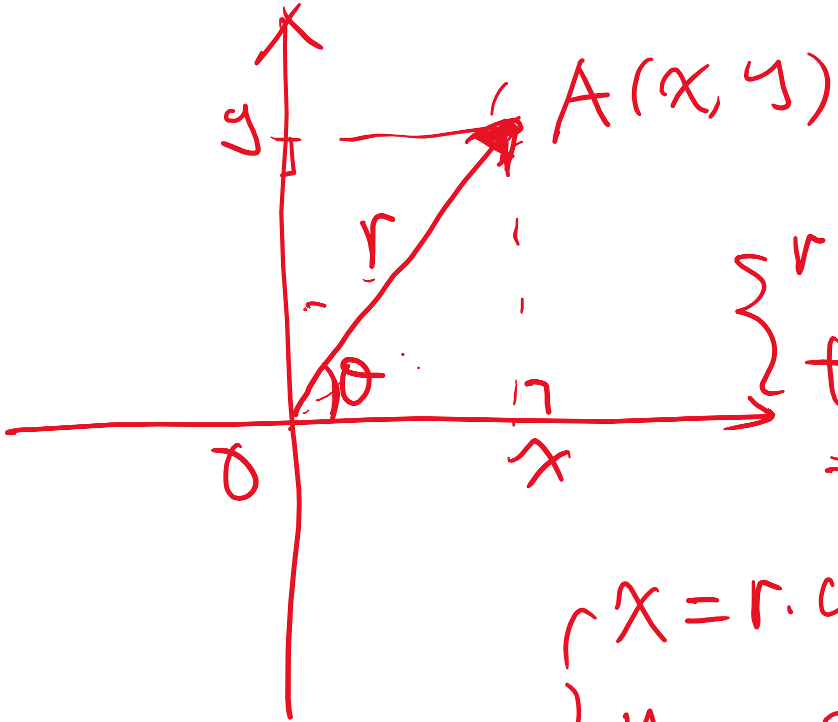
其中 $\vec{a}=(2,1,2),\vec{b}=(-1,1,-2)$.

解: 2×① - 3×②，得 $\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{b}=(7,-1,10)$

代入②得 $\vec{y}=\frac{1}{2}(3\vec{x}-\vec{b})=(11,-2,16)$



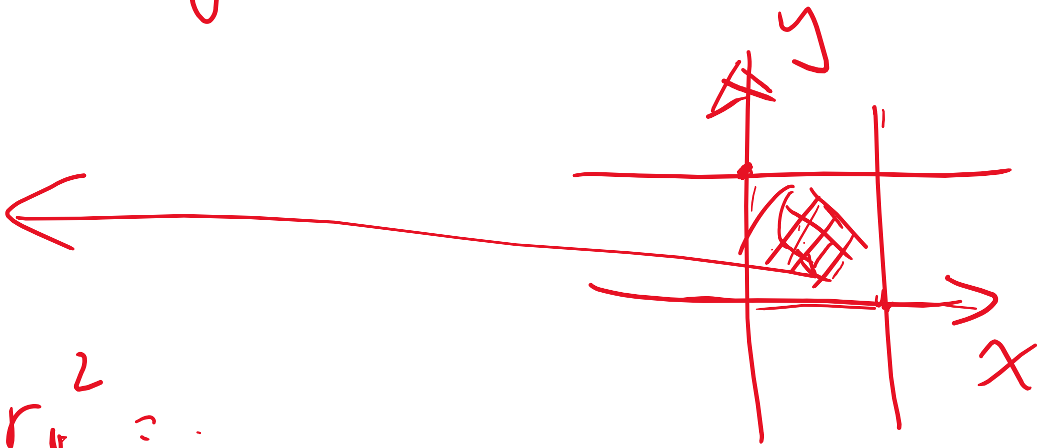
(r, θ) 极坐标系

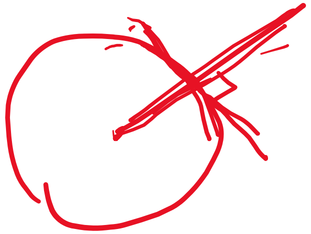


$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ \operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x} \end{cases}$$

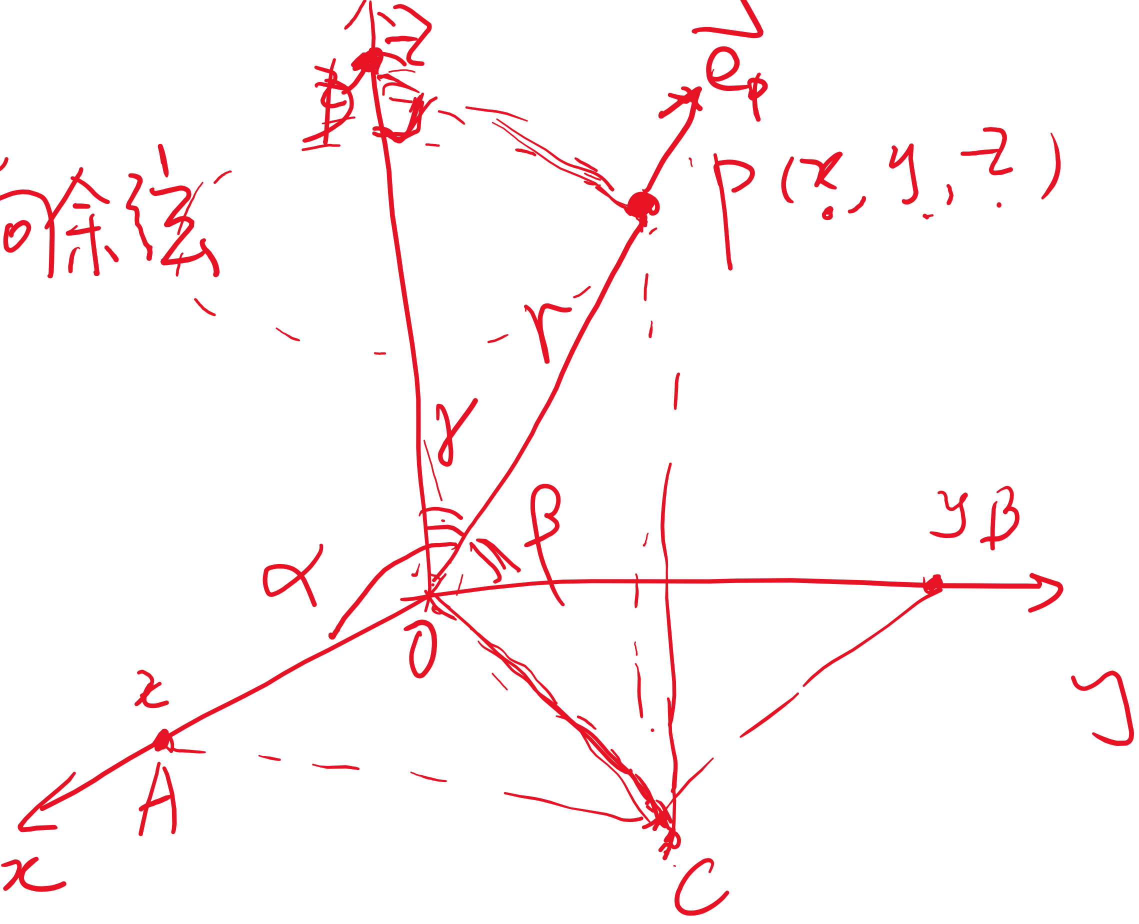
$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\theta \\ y = r\cdot\sin\theta \end{cases}$$

$$\frac{1}{2}\alpha r_2^2 - \frac{1}{2}\alpha r_1^2$$

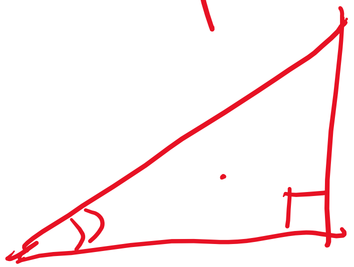




$\cos\gamma = \frac{z}{r}$ 方向余弦



方向角 (α, β, γ)



$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

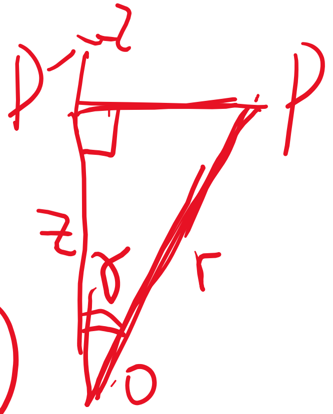
$\cos\beta = \frac{y}{r}$

POD

$\cos\alpha = \frac{x}{r}$

PD ⊥ OD

OPB



★ $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

$\vec{e}_p = \frac{\vec{OP}}{|\vec{OP}|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

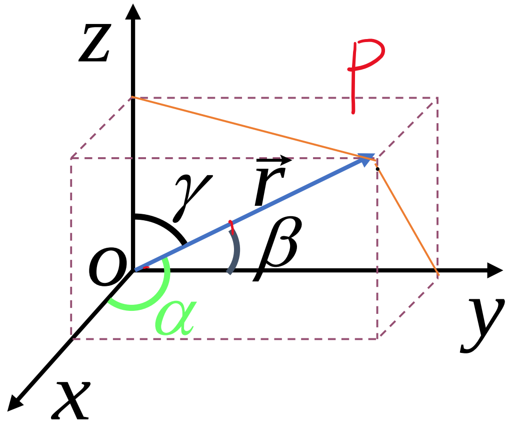
给定 $\vec{r}=(x,y,z)\neq\vec{0}$, 称 $\vec{r}$ 与三坐标轴的夹角 α,β,γ 为其**方向角**.

方向角的余弦称为其**方向余弦**.

$$\cos\alpha=\frac{x}{|\vec{r}|}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\beta=\frac{y}{|\vec{r}|}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\gamma=\frac{z}{|\vec{r}|}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$



$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

向量 $\vec{r}$ 的单位向量： $\vec{r}^{\circ}=\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

例. 已知两点 $M_1(2,2,\sqrt{2})$ 和 $M_2(1,3,0)$，计算向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的模、方向余弦和方向角.

$\overrightarrow{M_1M_2} = (1-2,\ 3-2,\ 0-\sqrt{2}) = (-1,\ 1,\ -\sqrt{2})$

$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{1+1+2} = 2$

$\cos\alpha = \frac{-1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{2}{3}\pi$

$\cos\beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{3}$

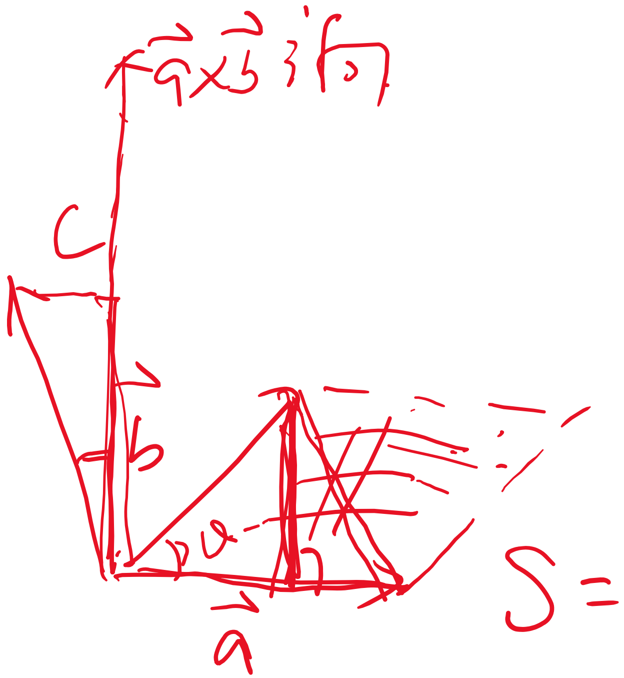
$\cos\gamma = \frac{-\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{3}{4}\pi$

四、向量的数量积、向量积、混合积

$$(\vec a \times \vec b)\cdot \vec c = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

$$\vec a \cdot \vec b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = |\vec a|\cdot|\vec b|\cos\theta$$

$$\vec a \times \vec b = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec i - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec j + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec k$$



$$S = |\vec a \times \vec b| = \big|\, |\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\sin\theta \,\big|$$

第三十三节 空间解析几何

一、向量：概念、表示、运算、性质

二、 空间几何：空间直线、 空间曲线

平面、曲面（旋转面、柱面、二次曲面）

二、空间平面方程:

点法式、三点式、截距式、一般方程、两平面的夹角、点到平面距离

1、设一平面通过已知点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且垂直于非零向量 $\vec{n} = (A, B, C)$,

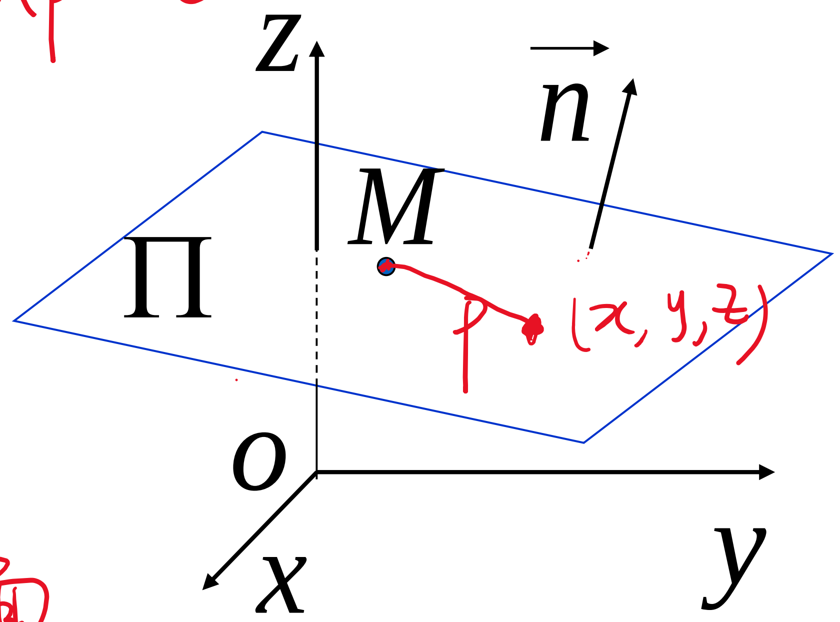
$\vec{n} \perp \Pi \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{MP} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$

$\overrightarrow{MP} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$

$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

$Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0 \Leftrightarrow$ 平面

$\vec{n}(A, B, C)$

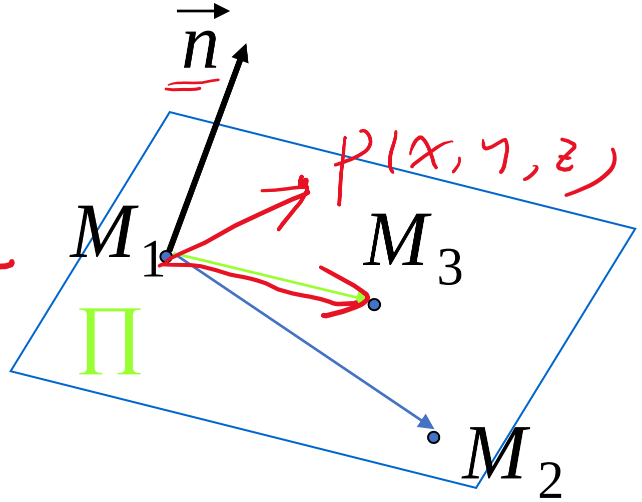


例. 求过三点 $M_1(2,-1,4), M_2(-1,3,-2), M_3(0,2,3)$ 的平面 Π 的方程.

$\vec{n} \perp \Pi$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{M_1M_3}$ $\Rightarrow$ 取 $\vec{n} = \overrightarrow{M_1M_3} \times \overrightarrow{M_1M_2}$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{M_1M_2}$



$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -6 \end{vmatrix} = (-14, -9, 1) = -14\vec{i} - 9\vec{j} + \vec{k}$$

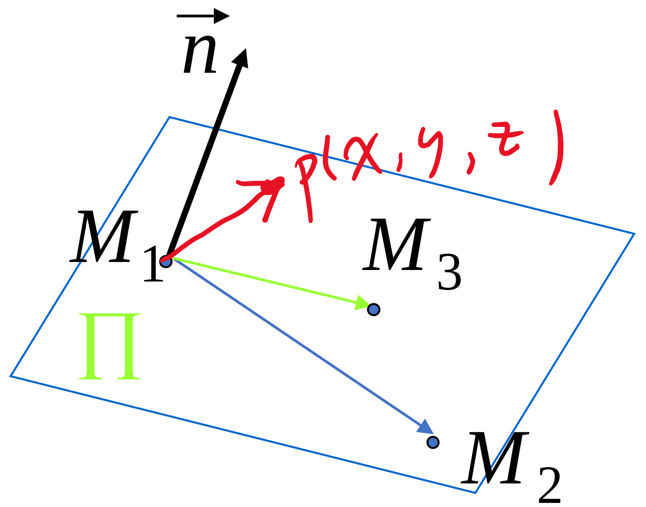
点法式

解: $-14(x-2) - 9(y+1) + (z-4) = 0$

$\overrightarrow{M_1P} = (x-2, y+1, z-4)$

例. 求过三点 $M_1(2,-1,4), M_2(-1,3,-2), M_3(0,2,3)$ 的平面 Π 的方程.

$$Ax+By+Cz+D=0$$



$(A\neq 0)$ $\quad x+\frac{B}{A}y+\frac{C}{A}z+\frac{D}{A}=0$

$$2A-B+4C+D=0$$

$$-A+3B-2C+D=0 \quad\Rightarrow\quad A= \quad B= \quad C=$$

$$0+2B+3C+D=0$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-4 \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=0$$

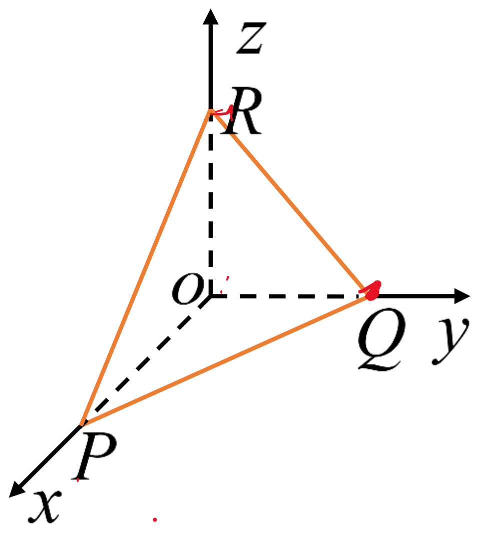
说明: 此平面的**三点式方程**也可写成 $\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-4 \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$

一般情况： 过三点 $M_k(x_k, y_k, z_k)$ $(k=1,2,3)$ 的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

2、当平面与三坐标轴的交点分别为 $P(a,0,0)$，$Q(0,b,0)$，$R(0,0,c)$ 时,

平面的**截距式方程** $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1\ (a,b,c\neq 0)$



分析:利用三点式 $\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix}=0$

按第一行展开得 $(x-a)bc-y(-a)c+zab=0$

即 $bcx+acy+abz=abc$

3、平面的一般方程

设有三元一次方程 $Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$

$\vec{n} = (A, B, C)$

特殊情形 $Ax+By+Cz+D=0 \quad (A^2+B^2+C^2 \neq 0)$

- $D=0$: $Ax+By+Cz=0$ 表示**通过原点**的平面
- $A=0$: $By+Cz+D=0$ 的法向量 $\vec{n}=(0,B,C) \perp \vec{i}$, 平面平行于 x 轴
- $B=0$: $Ax+Cz+D=0$ 表示平行于 y 轴的平面
- $C=0$: $Ax+By+D=0$ 表示平行于 z 轴的平面
- $A=B=0$: $Cz+D=0$ 表示平行于 xoy 面的平面
- $B=C=0$: $Ax+D=0$ 表示平行于 yoz 面的平面
- $A=C=0$: $By+D=0$ 表示平行于 zox 面的平面

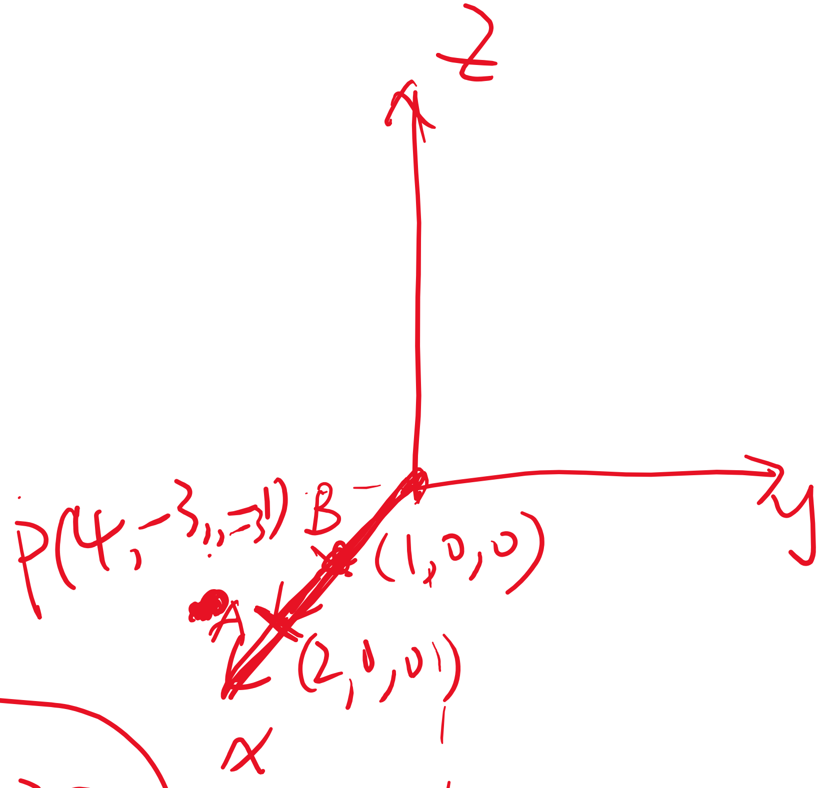
例. 求通过 x 轴和点 $(4, -3, -1)$ 的平面方程.

$$Ax+By+Cz+D=0$$

$$By+Cz=0$$

$$B\cdot(-3)+C(-1)=0 \Rightarrow C=-3B$$

$$By-3Bz=0 \Rightarrow y-3z=0$$



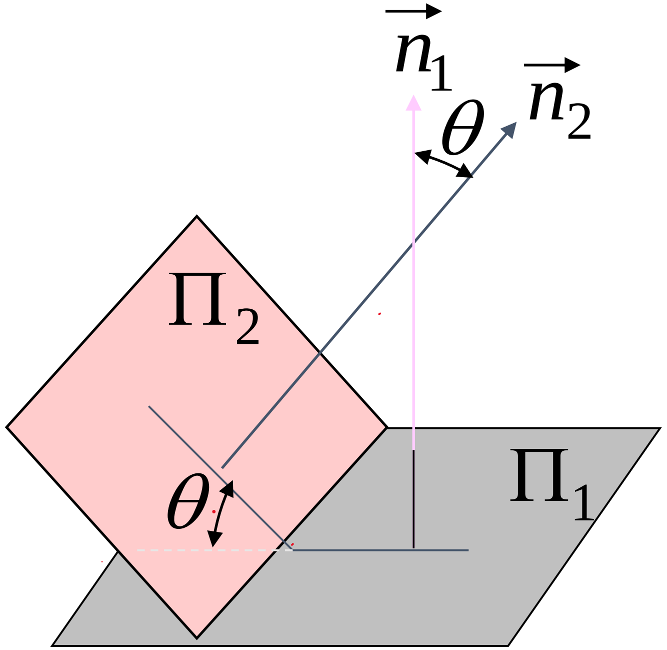
$$\left.\begin{aligned}\vec{n}\perp\vec{PA}\\ \vec{n}\perp\vec{AB}\end{aligned}\right\}\ \vec{n}=\vec{PA}\times\vec{AB}$$

4、**两平面的夹角**：两平面法向量的夹角(常为锐角)

设两平面的法向量分别为 $\vec{n_1}=(A_1, B_1, C_1)$ ，$\vec{n_2}=(A_2, B_2, C_2)$

则两平面夹角 θ 的余弦为

$$\cos\theta=\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}$$



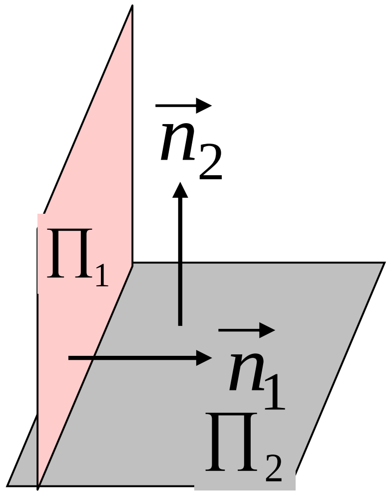
即

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

$$\Pi_1:\ n_1=(A_1,\ B_1,\ C_1)$$
$$\Pi_2:\ n_2=(A_2,B_2,C_2)$$

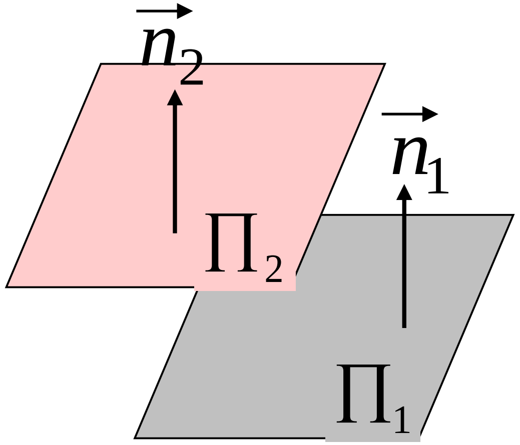
$$\cos\theta=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}$$

特别有下列结论：



(1) $\Pi_1\perp\Pi_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1\perp\vec{n}_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0$

$\Longleftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$



(2) $\Pi_1 // \Pi_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1 // \vec{n}_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1\times\vec{n}_2=0$

$\Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$

内容小结

1. **平面**基本方程:

一般式 $Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$

点法式 $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

截距式 $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1 \quad (abc \neq 0)$

三点式 $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$

2.平面与平面之间的关系

平面 $\Pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,\quad \vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$

平面 $\Pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,\quad \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$

垂直: $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Longleftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$

平行: $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \vec{0} \Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

夹角公式: $\cos\theta = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$

3. $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离 $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$