第 5 章　积 分

参考答案

1、求函数 $y=\int_{\cos^2 x}^{2x^3}\frac{1}{\sqrt{1+t^4}}dt$ **的导数。**

解：$y'=\frac{6x^2}{\sqrt{1+16x^{12}}}+\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^8 x}}$

2、求函数 $y=\int_{x^2}^{0}x\cos^2 tdt$ **的导数。**

解：$y'=\frac{d}{dx}\left[x\int_{x^2}^{0}\cos^2 tdt\right]=\int_{x^2}^{0}\cos^2 tdt-2x^2\cos^2\left(x^2\right)$

$$=\int_{x^2}^{0}\frac{1+\cos 2t}{2}dt-2x^2\cos^2\left(x^2\right)$$

$$=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}\sin\left(2x^2\right)-2x^2\cos^2\left(x^2\right)$$

3、求下列不定积分：

(4) $\int\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx=\int\frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x}dx=\frac{1}{2}\int\sec^2 xdx+\frac{1}{2}\int dx=\frac{1}{2}\left(\tan x+x\right)+C$

(5) **解法 1：** $\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=-\left(\tan x+\cot x\right)+C$

解法 2： $\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx=4\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 2x}dx=2\int\frac{d\sin 2x}{\sin^2 2x}=-2\csc 2x+C$

(6) $\int\cot^2 xdx=\int\left(\csc^2 x-1\right)dx=-\cot x-x+C$

(7) $\int\sin^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1-\cos x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(x-\sin x\right)+C$

4、用第一类换元法求下列不定积分：

（1）$\int\sin 3x\,dx=\frac{1}{3}\int\sin 3x\,d\left(3x\right)=-\frac{1}{3}\cos 3x+C$

（2）$\int\left(5x+4\right)^{10}dx=\frac{1}{5}\int\left(5x+4\right)^{10}d\left(5x+4\right)=\frac{1}{55}\left(5x+4\right)^{11}+C$

（3）$\int x\sqrt{2+3x^2}\,dx=\frac{1}{6}\int\left(2+3x^2\right)^{\frac{1}{2}}d\left(2+3x^2\right)=\frac{1}{9}\left(2+3x^2\right)^{\frac{3}{2}}+C$

（4）$\int\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=-\int e^{\frac{1}{x}}d\left(\frac{1}{x}\right)=-e^{\frac{1}{x}}+C$

（5）$\int \frac{x^3}{1+2x^4}dx = \frac{1}{8}\int \frac{d\left(1+2x^4\right)}{1+2x^4} = \frac{1}{8}\ln\left(1+2x^4\right)+C$

（6）$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}dx = 2\int \sin\sqrt{x}d\left(\sqrt{x}\right) = -2\cos\sqrt{x}+C$

（7）$\int \cos x \cdot e^{\sin x}dx = \int e^{\sin x}d\left(\sin x\right) = e^{\sin x}+C$

（8）$\int \frac{dx}{x\left(4-\ln x\right)} = -\int \frac{d\left(4-\ln x\right)}{4-\ln x} = -\ln\left|4-\ln x\right|+C$

（9）$\int \frac{e^x}{e^x+e^{-x}}dx = \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(e^{2x}+1\right)}{e^{2x}+1} = \frac{1}{2}\ln\left(e^{2x}+1\right)+C$

（10）$\int \frac{dx}{4x^2+4x+5} = \frac{1}{4}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{1+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{4}\arctan\left(x+\frac{1}{2}\right)+C$

（11）$\int \frac{dx}{4-9x^2} = \int \frac{dx}{(2+3x)(2-3x)} = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{2+3x}+\frac{1}{2-3x}\right)dx$

$$= \frac{1}{12}\int \frac{d\left(2+3x\right)}{2+3x} - \frac{1}{12}\int \frac{d\left(2-3x\right)}{2-3x} = \frac{1}{12}\ln\left|\frac{2+3x}{2-3x}\right|+C$$

（12）$\int \tan^3 x\,dx$

解法 1：$\int \tan^3 x\,dx = \int \frac{\tan^2 x}{\sec x}d(\sec x) = \int \frac{\sec^2 x-1}{\sec x}d(\sec x) = \frac{1}{2}\sec^2 x - \ln\left|\sec x\right|+C$

解法 2：$\int \tan^3 x\,dx = \int\left(\sec^2 x-1\right)\tan x\,dx = \int \sec^2 x\tan x dx - \int \tan x dx$

$$= \int \sec x d\left(\sec x\right) - \int \tan x dx = \frac{1}{2}\sec^2 x + \ln\left|\cos x\right|+C$$

解法 3：$\int \tan^3 x\,dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}dx = \int \frac{\cos^2 x-1}{\cos^3 x}d\left(\cos x\right) = \ln\left|\cos x\right| + \frac{1}{2\cos^2 x}+C$

（13）$\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx = \int \arctan x\,d\left(\arctan x\right) = \frac{1}{2}\left(\arctan x\right)^2+C$

（14）$\int \frac{\left(\arcsin x\right)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int\left(\arcsin x\right)^2 d\left(\arcsin x\right) = \frac{1}{3}\left(\arcsin x\right)^3+C$

（15）$= \int \sin 2x\cos 3x dx = \frac{1}{2}\int\left(\sin 5x - \sin x\right)dx = \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{10}\cos 5x + C$

（16）$\int \sec^4 x\,dx = \int \left(1+\tan^2 x\right) d\left(\tan x\right) = \tan x + \frac{1}{3}\tan^3 x + C$

（17）$\int \frac{\cos x - \sin x}{\sqrt[3]{\sin x + \cos x}} dx = \int \left(\sin x + \cos x\right)^{-\frac{1}{3}} d\left(\sin x + \cos x\right) = \frac{3}{2}\left(\sin x + \cos x\right)^{\frac{2}{3}} + C$

（18）$\int \frac{1}{e^x+1} dx$

解法 1：$\int \frac{1}{e^x+1} dx = \int \left(1 - \frac{e^x}{e^x+1}\right) dx = x - \ln\left(e^x+1\right) + C$

解法 2：$\int \frac{1}{e^x+1} dx = \int \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} dx = -\ln\left(e^{-x}+1\right) + C = x - \ln\left(e^x+1\right) + C$

（19）$\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx = 2\int \frac{\arctan\sqrt{x}}{1+\left(\sqrt{x}\right)^2} d\sqrt{x} = 2\int \arctan\sqrt{x}\, d\left(\arctan\sqrt{x}\right)$

$$= \left(\arctan\sqrt{x}\right)^2 + C$$

（20）$\int \frac{x^2-1}{x^4+1} dx = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 - 2}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)-\sqrt{2}} - \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)+\sqrt{2}}\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right| + C$$

（21）$\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2} dx = \int \frac{\frac{1-\ln x}{x^2}}{\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)^2} dx = \int \frac{1}{\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)^2} \left(\frac{1nx}{x}\right)' dx$

$$= -\int \frac{1}{\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)^2} d\left(1-\frac{1nx}{x}\right) = \frac{1}{1-\frac{\ln x}{x}} + C = \frac{x}{x-\ln x} + C$$

（22）$\int \frac{1+\tan x}{\sin 2x} dx = \int \left(\csc 2x + \frac{1}{2}\sec^2 x\right) dx = \frac{1}{2}\ln\left|\csc 2x - \cot 2x\right| + \frac{1}{2}\tan x + C$

（23）$\int \frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}dx=\int \frac{d(x\ln x)}{(x\ln x)^2}=-\frac{1}{x\ln x}+C$

（24）$\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)}dx=\int \frac{(x+1)e^x}{xe^x(1+xe^x)}dx=\int \frac{1}{xe^x}d(xe^x)-\int \frac{1}{1+xe^x}d(xe^x+1)$

$$=\ln\left|\frac{xe^x}{1+xe^x}\right|+C$$

（25）$\int \frac{1-x}{1+x^3}dx=\int \frac{1-x+x^2-x^2}{1+x^3}dx=\int \frac{dx}{1+x}-\int \frac{x^2dx}{1+x^3}=\ln|1+x|-\frac{1}{3}\ln\left|1+x^3\right|+C$

5、用第二类换元法求下列不定积分：

（1）$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$

解法 1：令 $x=\sin t$（$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$），则

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int \frac{\sin^2 t}{\cos t}\cdot\cos t dt=\int \frac{1-\cos 2t}{2}dt=\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t+C$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C$$

解法 2：$\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\int \sqrt{1-x^2}dx+\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

$$=\arcsin x-\int \sqrt{1-x^2}dx=\arcsin x-\left[x\sqrt{1-x^2}-\int x\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx\right]$$

$$=\arcsin x-x\sqrt{1-x^2}-\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

故得 $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+C$

（2）$\int \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}$

解：令 $x=\sin t$（$-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$），则

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{1-x^2}}=\int \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}dt=\frac{1}{2}\int\left(\frac{(\cos t+\sin t)+(\cos t-\sin t)}{\sin t+\cos t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\left(1+\frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\right)dt=\frac{1}{2}t+\ln\left|\sin t+\cos t\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}\arcsin x+\ln\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|+C$$

（3）$\int\frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$（$a>0$）

解：令 $x=a\tan t$（$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$），则

$$\int\frac{dx}{\left(a^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{a\sec^2 t}{a^3\sec^3 t}dt=\frac{1}{a^2}\int\cos tdt=\frac{1}{a^2}\sin t+C$$

$$=\frac{1}{a^2}\tan t\cos t+C=\frac{1}{a^2}\frac{\tan t}{\sec t}+C=\frac{1}{a^2}\frac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}}+C=\frac{1}{a^2}\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}+C$$

（从图 1 可以直接看出 $\sin t$ 与 x 的关系）

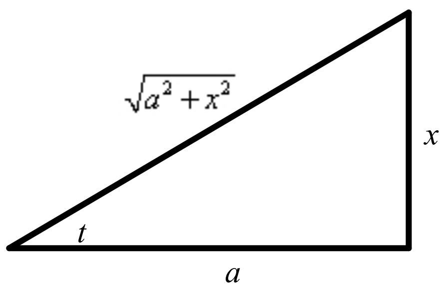


图　1

（4）$\int\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^2}dx$（$a>0$）

解：令 $x=a\tan t$（$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2},t\neq 0$），则

$$\int\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x^2}dx=\int\frac{a\sec t}{a^2\tan^2 t}\cdot a\sec^2 tdt=\int\frac{dt}{\sin^2 t\cos t}=\int\frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\sin^2 t\cos t}dt$$

$$=\int\sec tdt+\int\csc t\cot tdt=\ln\left|\sec t+\tan t\right|-\csc t+C$$

$$=\ln\left|\sqrt{1+\tan^2 t}+\tan t\right|-\frac{\sqrt{1+\tan^2 t}}{\tan t}+C$$

$$=\ln\left|\frac{\sqrt{a^2+x^2}+x}{a}\right|-\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}+C=\ln\left|\sqrt{a^2+x^2}+x\right|-\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{x}+C'$$

（从图 1 可以直接看出 $\sec t,\csc t$ 与 x 之间的关系）

（5）$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx$（$a>0$）

解：1° $x>a$，令 $x=a\sec t$（$0<t<\frac{\pi}{2}$），则

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx=\int \frac{a\tan t}{a\sec t}\cdot a\sec t\tan tdt=a\int \tan^2 tdt=a\int\left(\sec^2 t-1\right)dt$$

$$=a\left(\tan t-t\right)+C=\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}+C$$

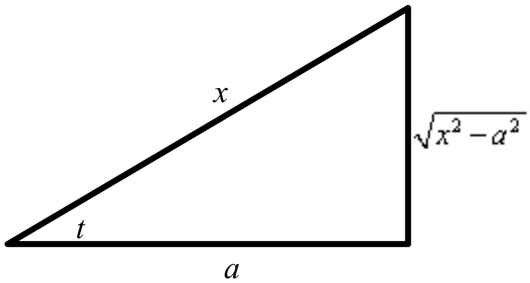


图 2

（从图 2 可以直接看出 $\tan t$，t 与 x 之间的关系）x

2° $x<-a$，令 $x=a\sec t$（$\frac{\pi}{2}<t<\pi$），则

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx=\int \frac{-a\tan t}{a\sec t}\cdot a\sec t\tan tdt=-a\int \tan^2 tdt=-a\int\left(\sec^2 t-1\right)dt$$

$$=-a\left(\tan t-t\right)+C=\sqrt{x^2-a^2}+a\arccos\frac{a}{x}+C$$

注意到 $x<-a$ 时，有 $\arccos\frac{a}{x}=\pi-\arccos\left(-\frac{a}{x}\right)$，因此，综上可得

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx=\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{|x|}+C$$

（6）$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}dx$（$a>0$）

解：1° $x>a$，令 $x=a\sec t$（$0<t<\frac{\pi}{2}$），则

$$\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}dx=\int \frac{a\tan t}{a^2\sec^2 t}\cdot a\sec t\tan tdt=\int \frac{\sin^2 t}{\cos t}dt=\int\left(\sec t-\cos t\right)dt$$

$$=\ln\left|\sec t+\tan t\right|-\sin t+C=\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|-\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}+C$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|-\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}+C'$$

（从图 2 可以直接看出 $\tan t$， $\sin t$ 与 x 之间的关系）

2° $x<-a$，令 $x=a\sec t$（$\frac{\pi}{2}<t<\pi$），则

$$\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}dx=\int\frac{-a\tan t}{a^2\sec^2 t}\cdot a\sec t\tan t dt=-\int\frac{\sin^2 t}{\cos t}dt=-\int(\sec t-\cos t)dt$$

$$=-\ln\left|\sec t+\tan t\right|+\sin t+C=-\ln\left|\frac{x-\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|-\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}+C$$

$$=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|-\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}+C'$$

综上，$\int\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}dx=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|-\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}+C$

（7）$\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}dx$（$a>0$）

解法 1：1° $x>a$，令 $x=a\sec t$（$0<t<\frac{\pi}{2}$），则

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}dx=\int\frac{a\sec t\tan t}{a^2\sec^2 t\cdot a\tan t}dt=\frac{1}{a^2}\int\cos t dt$$

$$=\frac{1}{a^2}\sin t+C=\frac{1}{a^2}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}+C$$

2° $x<-a$，令 $x=a\sec t$（$\frac{\pi}{2}<t<\pi$），则

$$\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}dx=-\int\frac{a\sec t\tan t}{a^2\sec^2 t\cdot a\tan t}dt=-\frac{1}{a^2}\int\cos t dt$$

$$=-\frac{1}{a^2}\sin t+C=\frac{1}{a^2}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}+C$$

综上，$\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}dx=\frac{1}{a^2}\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}+C$

解法 2：倒代换 $x=\frac{1}{t}$，分 $x>a$ 和 $x<-a$ 两种情形讨论。略。

（8）$\int\frac{dx}{\sqrt{2x-3}+1}$（$a>0$）

解：令 $t=\sqrt{2x-3}$，则 $x=\frac{t^2+3}{2}$，$dx=tdt$，于是

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2x-3}+1}=\int\frac{tdt}{t+1}=\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=t-\ln|1+t|+C=\sqrt{2x-3}-\ln\left|1+\sqrt{2x-3}\right|+C$$

（9）$\int\sqrt{1+e^x}\,dx\left(\sqrt{1+e^x}=t\right)=2\int\frac{t^2}{t^2-1}dt=2\int\left(1+\frac{1}{t^2-1}\right)dt=2t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=\cdots$

（10）$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$

解：令 $\sqrt[6]{x}=t$，则 $x=t^6$，$dx=6t^5dt$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}=\int\frac{6t^5}{t^3+t^2}dt=6\int\frac{t^3}{t+1}dt=6\int\frac{t^3-1+1}{t+1}dt$$

$$=6\int\left(t^2-t+1-\frac{1}{t+1}\right)dt=2t^3-3t^2+6t-6\ln|t+1|+C$$

$$=2\sqrt{x}-3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}-6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right|+C$$

6、用分部积分法求下列不定积分：

（1）$\int xe^{-2x}dx=-\frac{1}{2}\int xd\left(e^{-2x}\right)=-\frac{1}{2}\left[xe^{-2x}-\int e^{-2x}dx\right]$

$$=-\frac{1}{2}\left[xe^{-2x}+\frac{1}{2}\int e^{-2x}d(-2x)\right]=-\frac{1}{2}xe^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+C$$

（2）$\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=2\int\ln x\,d\left(\sqrt{x}\right)=2\left[\sqrt{x}\ln x-\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx\right]=2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+C$

（3）$\int\ln^2 x\,dx=x\ln^2 x-2\int\ln x\,dx=x\ln^2 x-2\left[x\ln x-x\right]+C$

（4）$\int x^2\cos x\,dx=x^2\sin x-2\int x\sin x\,dx=x^2\sin x+2\left[x\cos x-\sin x\right]+C$

（5）$\int\frac{x}{\cos^2 x}dx=\int xd(\tan x)=x\tan x-\int\tan x\,dx=x\tan x+\ln|\cos x|+C$

（6）$\int e^{3x}\sin 2xdx=-\frac{1}{2}\int e^{3x}d\left(\cos 2x\right)=-\frac{1}{2}\left[e^{3x}\cos 2x-3\int e^{3x}\cos 2xdx\right]$

$$=-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x+\frac{3}{2}\int e^{3x}\cos 2xdx=-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x+\frac{3}{4}\int e^{3x}d\left(\sin 2x\right)$$

$$=-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x+\frac{3}{4}\left[e^{3x}\sin 2x-3\int e^{3x}\sin 2xd\right]$$

$$=-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x+\frac{3}{4}e^{3x}\sin 2x-\frac{9}{4}\int e^{3x}\sin 2xdx$$

故得

$$\int e^{3x}\sin 2xdx=\frac{4}{13}\left(-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x+\frac{3}{4}e^{3x}\sin 2x\right)+C=\frac{1}{13}e^{3x}\left(3\sin 2x-2\cos 2x\right)+C$$

（7）$\int\left(\arcsin x\right)^2dx=x\left(\arcsin x\right)^2-2\int x\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=x\left(\arcsin x\right)^2+2\int\arcsin xd\left(\sqrt{1-x^2}\right)=x\left(\arcsin x\right)^2+2\left[\sqrt{1-x^2}\arcsin x-\int dx\right]$$

$$=x\left(\arcsin x\right)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x+C$$

（8）$\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=2\int\arcsin\sqrt{x}d\left(\sqrt{x}\right)=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}-\int\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$

$$=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C$$

（9）$\int\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}dx=-2\int\arcsin xd\left(\sqrt{1-x}\right)=-2\sqrt{1-x}\arcsin x+2\int\sqrt{1-x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$=-2\sqrt{1-x}\arcsin x+4\sqrt{1+x}+C$$

（10）$\int\sin\sqrt{x}dx\left(t=\sqrt{x}\right)=2\int t\sin tdt=-2t\cos t+2\sin t+C$

$$=-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+2\sin\sqrt{x}+C$$

（11）$\int\cos\left(\ln x\right)dx\left(t=\ln x\right)=\int e^t\cos tdt=e^t\sin t-\int e^t\sin tdt$

$$=e^t\sin t+e^t\cos t-\int e^t\cos tdt$$

故得$\int\cos\left(\ln x\right)dx=\int e^t\cos tdt$

$$=\frac{1}{2}\left(e^t\sin t+e^t\cos t\right)+C=\frac{1}{2}x\left[\sin\left(\ln x\right)+\cos\left(\ln x\right)\right]+C$$

7、求下列不定积分：

（1）$\int \frac{2x-1}{x^2+3x+2}dx$

解：$\int \frac{2x-1}{x^2+3x+2}dx = \int \frac{2x+3}{x^2+3x+2}dx - \int \frac{4}{x^2+3x+2}dx$

$$= \int \frac{d\left(x^2+3x+2\right)}{x^2+3x+2} - 4\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx = \ln\left(x^2+3x+2\right) - 4\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C$$

（2）$\int \frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}dx$

解：$\int \frac{x^{11}}{x^8+3x^4+2}dx = \frac{1}{4}\int \frac{x^8}{\left(x^4+1\right)\left(x^4+2\right)}d\left(x^4\right)$（令 $x^4=t$）

$$= \frac{1}{4}\int \frac{t^2}{(t+1)(t+2)}dt = \frac{1}{4}\int\left(\frac{t^2}{t+1}-\frac{t^2}{t+2}\right)dt = \frac{1}{4}\int\left(t-1+\frac{1}{t+1}-(t-2)-\frac{4}{t+2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{4}\int\left(1+\frac{1}{t+1}-\frac{4}{t+2}\right)dt = \frac{1}{4}\left(t+\ln\frac{t+1}{(t+2)^4}\right)+C = \frac{1}{4}\left(x^4+\ln\frac{x^4+1}{\left(x^4+2\right)^4}\right)+C$$

（3）$\int \frac{1}{1+\sin x}dx$

解：$\int \frac{1}{1+\sin x}dx = \int \frac{1-\sin x}{\cos^2 x}dx = \tan x - \sec x + C$

（4）$\int \frac{1}{\sin 2x + 2\sin x}dx$

解法 1：$\int \frac{1}{\sin 2x+2\sin x}dx = \int \frac{1}{2\sin x(1+\cos x)}dx$

$$= \int \frac{1}{8\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}dx = \int \frac{1}{8\tan\frac{x}{2}\cos^4\frac{x}{2}}dx$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{1+\tan^2\frac{x}{2}}{\tan\frac{x}{2}}d\left(\tan\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2} + C$$

解法 2：$\int \frac{1}{\sin 2x+2\sin x}dx = \int \frac{1}{2\sin x(1+\cos x)}dx$

$$= \int \frac{1}{8\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}dx = \int \frac{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}{8\sin\frac{x}{2}\cos^3\frac{x}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos^3\frac{x}{2}}dx+\frac{1}{8}\int\frac{1}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}dx$$

$$=-\frac{1}{4}\int\frac{d\left(\cos\frac{x}{2}\right)}{\cos^3\frac{x}{2}}+\frac{1}{4}\int\frac{1}{\sin x}dx$$

$$=\frac{1}{8}\sec^2\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\ln\left|\csc x-\cot x\right|+C$$

解法 3：$\int\frac{1}{\sin 2x+2\sin x}dx=\int\frac{1}{2\sin x(1+\cos x)}dx$

$$=\int\frac{1-\cos x}{2\sin^3 x}dx=\frac{1}{2}\int\csc^3 xdx-\frac{1}{2}\int\frac{d\sin x}{\sin^3 x}$$

$$=-\frac{1}{4}\csc x\cot x+\frac{1}{4}\ln\left|\csc x-\cot x\right|+\frac{1}{4}\csc^2 x+C$$

（利用 $\int\csc^3 xdx=-\frac{1}{2}\csc x\cot x+\frac{1}{2}\ln\left|\csc x-\cot x\right|+C$ ）

注：三种解法的结果虽然在形式上不同，但彼此都是等价的。这是因为：

$$\ln\left|\csc x-\cot x\right|=\ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right|=\ln\left|\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}\right|=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|;$$

$$\sec^2\frac{x}{2}=1+\tan^2\frac{x}{2};$$

$$\csc^2 x-\csc x\cot x=\frac{1-\cos x}{\sin^2 x}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{4\sin^2\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$$

8、求下列不定积分：

（1）$\int\frac{\cos 2x}{1+\sin x\cos x}dx=\int\frac{2\cos 2x}{2+\sin 2x}dx=\ln\left|2+\sin 2x\right|+C$

（2）$\int\frac{dx}{x^2+2x+5}=\int\frac{dx}{(x+1)^2+4}=\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+C$

（3）$\int\frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}=\int\frac{\sec^2 x}{2+\tan^2 x}dx=\int\frac{d(\tan x)}{2+\tan^2 x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)+C$

（4）$\int\frac{\sin x}{1+\sin x}dx$

解法 1：$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx = x - \int \frac{1}{1+\sin x}dx = x - \tan x + \sec x + C$（利用第 7 题第 3 小题的结果）

解法 2：$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx = \int \frac{\sin x(1-\sin x)}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx - \int \tan^2 x\,dx$

$$= \sec x - (\tan x - x) + C = x - \tan x + \sec x + C$$

（5）$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2+x^2}} = \int \frac{a\sec^2 t}{a^3\tan^2 t\sec t}dt = -\frac{1}{a^2}\csc t + C = -\frac{1}{a^2}\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + C$

（6）$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{x^2\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}}$ （$x^2 = t$）

$= \frac{1}{2}\int \frac{\cos u}{\sin u\cos u}du = \frac{1}{2}\int \csc u\,du = \frac{1}{2}\ln\left|\csc u - \cot u\right| + C$（$t = \sin u$）

$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-t^2}}{t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^4}}{x^2}\right| + C$

（7）$\int \frac{2^x dx}{1+2^x+4^x} = \frac{1}{\ln 2}\int \frac{dt}{1+t+t^2} = \frac{1}{\ln 2}\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right) + C$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}\ln 2}\arctan\left(\frac{2^{x+1}+1}{\sqrt{3}}\right) + C$$

（8）$\int x^2\arccos x\,dx = \frac{1}{3}x^3\arccos x + \frac{1}{3}\int x^3\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$= \frac{1}{3}x^3\arccos x + \frac{1}{6}\int x^2\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}d(x^2)$（设 $x^2 = t$）

$= \frac{1}{3}x^3\arccos x + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{1-x^2}\right) + C$

（9）$\int \frac{1-x^7}{x(1+x^7)}dx = \int \frac{1}{x(1+x^7)}dx - \int \frac{x^7}{x(1+x^7)}dx$

$= \frac{1}{7}\int \frac{d(x^7)}{x^7(1+x^7)} - \frac{1}{7}\int \frac{d(x^7)}{1+x^7} = \frac{1}{7}\int\left(\frac{1}{x^7} - \frac{1}{1+x^7}\right)d(x^7) - \frac{1}{7}\int \frac{d(x^7)}{1+x^7}$

$= \frac{1}{7}\ln\left|\frac{x^7}{1+x^7}\right| - \frac{1}{7}\ln\left|1+x^7\right| + C = \ln|x| - \frac{2}{7}\ln\left|1+x^7\right| + C$

（10）解法 1：$\int \frac{dx}{\tan^3 x\cos^8 x} =\int \frac{\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^3}{\sin^3 x\cos^5 x}dx$

$$=\int \frac{\sin^6 x+3\sin^4 x\cos^2 x+3\sin^2 x\cos^4 x+\cos^6 x}{\sin^3 x\cos^5 x}dx$$

$$=\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x}dx+3\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx+3\int \frac{dx}{\sin x\cos x} +\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$$

$$=-\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^5 x}d\cos x-3\int \frac{d\cos x}{\cos^3 x} +6\int \csc 2xdx +\int \frac{d\sin x}{\sin^3 x}$$

$$=\frac{1}{4}\sec^4 x-\frac{1}{2}\sec^2 x+\frac{3}{2}\sec^2 x+3\ln\left|\csc 2x-\cot 2x\right|-\frac{1}{2}\csc^2 x+C$$

$$=\frac{1}{4}\sec^4 x+\sec^2 x+3\ln\left|\csc 2x-\cot 2x\right|-\frac{1}{2}\csc^2 x+C$$

$$=\frac{1}{4}\sec^4 x+\sec^2 x+3\ln\left|\tan x\right|-\frac{1}{2}\csc^2 x+C$$

解法 2：$\int \frac{dx}{\tan^3 x\cos^8 x} =\int \frac{\sec^6 xd\left(\tan x\right)}{\tan^3 x} =\int \frac{(1+\tan^2 x)^3 d\left(\tan x\right)}{\tan^3 x}$

$$=-\frac{1}{2}\tan^{-2} x+3\ln\left|\tan x\right|+\frac{3}{2}\tan^2 x+\frac{1}{4}\tan^4 x+C$$

（11）$\int \frac{\cot x}{1+\sin x}dx=\int \frac{\cot x\csc x}{1+\csc x}dx=-\int \frac{d\left(1+\csc x\right)}{1+\csc x} =-\ln\left|1+\csc x\right|+C$

（12）$\int \frac{\arctan x}{x^2\left(1+x^2\right)}dx=\int \frac{\arctan x}{x^2}dx-\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$

$$=-\frac{1}{x}\arctan x+\int \frac{1}{x\left(1+x^2\right)}dx-\frac{1}{2}\left(\arctan x\right)^2$$

$$=-\frac{1}{x}\arctan x+\int \frac{x}{x^2\left(1+x^2\right)}dx-\frac{1}{2}\left(\arctan x\right)^2$$

$$=-\frac{1}{x}\arctan x+\frac{1}{2}\left(\int \frac{1}{x^2}d\left(x^2\right)-\int \frac{1}{1+x^2}d\left(1+x^2\right)\right)-\frac{1}{2}\left(\arctan x\right)^2$$

$$=-\frac{1}{x}\arctan x+\ln\left|x\right|-\ln\left(1+x^2\right)-\frac{1}{2}\left(\arctan x\right)^2+C$$

（13）$\int \frac{dx}{\left(2x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}} =\int \frac{\sec^2 t}{\left(2\tan^2 t+1\right)\sec t}dt$

$$=\int\frac{\sec t}{\tan^2 t+\sec^2 t}dt=\int\frac{\cos t}{\sin^2 t+1}dt=\arctan(\sin t)+C$$

$$=\arctan(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}})+C$$

（14）$\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx=2\int xd\left(\sqrt{e^x-1}\right)=2x\sqrt{e^x-1}-2\int\sqrt{e^x-1}dx$

而$\int\sqrt{e^x-1}dx=\int t\frac{2t}{1+t^2}dt=2\int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt$（令$t=\sqrt{e^x-1}$）

$$=2t-2\arctan t+C$$

$$=2\sqrt{e^x-1}-2\arctan\sqrt{e^x-1}+C$$

故$\int\frac{xe^x}{\sqrt{e^x-1}}dx=2x\sqrt{e^x-1}-4\sqrt{e^x-1}+4\arctan\sqrt{e^x-1}+C$

9、计算下列定积分：

（1）-（4） 略。

（5）$\int_{-1}^{2}\left(3|x|+\frac{2}{|x|+1}\right)dx=\int_{-1}^{0}\left(-3x+\frac{2}{1-x}\right)dx+\int_{0}^{2}\left(3x+\frac{2}{x+1}\right)dx=6+2\ln 3$

（6）$\int_{-1}^{2}\max\left\{x,x^2\right\}dx=\int_{-1}^{0}x^2\,dx+\int_{0}^{1}x\,dx+\int_{1}^{2}x^2\,dx=\frac{19}{6}$

（7）$\int_{0}^{\pi}\sqrt{1+\sin 2x}\,dx=\int_{0}^{\pi}\sqrt{(\sin x+\cos x)^2}\,dx=\int_{0}^{\pi}|\sin x+\cos x|dx$

$$=\int_{0}^{\pi}\left|\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right|dx=\sqrt{2}\int_{0}^{\frac{3\pi}{4}}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx-\sqrt{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)dx=2\sqrt{2}$$

10、计算下列定积分：

（1）$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx\left(x=\sin t\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cot^2 t\,dt=-\left(\cot t+t\right)\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}=1-\frac{\pi}{4}$

（2）$\int_{0}^{2}\frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}\left(\sqrt{x+1}=t\right)=2\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{dt}{1+t^2}=2\arctan t\Big|_{0}^{\sqrt{3}}=\frac{2\pi}{3}$

（3）$\int_{0}^{1}\left(1+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}dx\left(x=\tan t\right)=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\cos t dt=\frac{\sqrt{2}}{2}$

（4） $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx\left(x=\sec t\right)=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^2 t\,dt=\left(\tan t-t\right)\Big|_0^{\pi/3}=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$

（5） $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx\left(\sqrt{e^x-1}=t\right)=\int_0^1\frac{2t^2}{1+t^2}dt=2-\frac{\pi}{2}$

（6） $\int_{\sqrt{e}}^{e}\frac{dx}{x\sqrt{\ln x\left(1-\ln x\right)}}\left(\ln x=t\right)=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dt}{\sqrt{t\left(1-t\right)}}=2\arcsin\sqrt{t}\Big|_{1/2}^{1}=\frac{\pi}{2}$

11、利用函数的奇偶性计算定积分：

（1） $\int_{-\pi}^{\pi}x^4\sin x\,dx$

解： $I=0$

（2） $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}}dx$ （ $ab\neq 0$ ）

解： $I=0$

（3） $\int_{-1}^{1}\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx$

解： $I=\int_{-1}^{1}\left(x^2+1-x^2+2x\sqrt{1-x^2}\right)dx=\int_{-1}^{1}\ dx+\int_{-1}^{1}2x\sqrt{1-x^2}\,dx=2$

（4） $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x^3+\sin^2 x\right)\cos^2 x\,dx$

解： $I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}x^3\cos^2 x\,dx+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos^2 x\,dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2x\,dx=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 4x\right)dx=\frac{\pi}{8}$$

12、当 n 为正整数时，证明：

$$\int_0^{2\pi}\cos^n x\,dx=\int_0^{2\pi}\sin^n x\,dx=\begin{cases}0, & n\text{为奇数}\\ 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx, & n\text{为偶数}\end{cases}$$

证明： $\int_0^{2\pi}\sin^n x\,dx=\int_{\pi}^{-\pi}\sin^n t\left(-dt\right)=\int_{-\pi}^{\pi}\sin^n t\,dt$

当 n 为奇数时， $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^n t\,dt=0$ ；

当 n 为偶数时，$\int_{-\pi}^{\pi}\sin^n t\,dt=2\int_0^{\pi}\sin^n t\,dt=2\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\cos^n u\left(-du\right)$（$u=\dfrac{\pi}{2}-t$）

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n u\,du=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx;$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^n x\,dx=\int_{\pi}^{-\pi}(-1)^n\cos^n t\left(-dt\right)$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}(-1)^n\cos^n t\,dt=2\int_0^{\pi}(-1)^n\cos^n t\,dt$$

$$=2\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}(-1)^n\sin^n u\left(-du\right)=2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(-1)^n\sin^n u\,du$$

当 n 为奇数时，$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(-1)^n\sin^n u\,du=0$；

当 n 为偶数时，$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(-1)^n\sin^n u\,du=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$

13、计算下列定积分：

（1）$\int_0^{e-1}\ln\left(x+1\right)dx\left(x+1=t\right)=\int_1^{e}\ln t\,dt=\left(t\ln t-t\right)\Big|_1^{e}=1$

（2）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin x\,dx=-x^2\cos x\Big|_0^{\pi/2}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\cos x\,dx=2\left(x\sin x+\cos x\right)\Big|_0^{\pi/2}=\pi-2$

（3）$\int_0^{1}x^3e^{x^2}dx\left(x^2=t\right)=\dfrac{1}{2}\int_0^{1}te^t dt=\dfrac{1}{2}\left(te^t-e^t\right)\Big|_0^{1}=\dfrac{1}{2}$

（4）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos x\,dx=e^{2x}\sin x\Big|_0^{\pi/2}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\sin x\,dx$

$$=e^{\pi}+2\left(e^{2x}\cos x\right)\Big|_0^{\pi/2}-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos x\,dx=e^{\pi}-2-4\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos x\,dx$$

故得 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2x}\cos x\,dx=\dfrac{1}{5}\left(e^{\pi}-2\right)$

（5）$\int_0^{1}\left(\arcsin x\right)^2dx\left(\arcsin x=t\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\cos t dt$

$$=\left(t^2\sin t\right)\Big|_0^{\pi/2}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin t\,dt=\frac{\pi^2}{4}+2\left(t\cos t-\sin t\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi^2}{4}-2$$

（6）$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\arctan 2x\,dx=x\arctan 2x\Big|_0^{\pi/2}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{2xdx}{1+4x^2}=\dfrac{\pi}{2}\arctan\pi-\dfrac{1}{4}\ln\left(1+\pi^2\right)$

14、求$\int_0^x f(t)\,dt$，其中$f(x)=\begin{cases}\sin x & (0\le x\le 1)\\ x\ln x & (1<x\le 2)\\ 1 & (x>2)\end{cases}$。

解：1º　$0\le x\le 1$时，$\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x \sin t\,dt=1-\cos x$；

2º　$1<x\le 2$时，

$$\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^1 \sin t\,dt+\int_1^x t\ln t\,dt$$

$$=1-\cos 1+\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{4}-\cos 1$$

3º　$x>2$时，

$$\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^1 \sin t\,dt+\int_1^2 t\ln t\,dt+\int_2^x dt$$

$$=1-\cos 1+2\ln 2-\frac{3}{4}+x-2$$

$$=x-\cos 1+2\ln 2-\frac{7}{4}$$

15、判别下列各广义积分的敛散性，若收敛，则计算广义积分值：

（1）$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}\,dx$

解：$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}\,dx=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{2}$

（2）$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}\,dx$

解：该广义积分发散。

（3）$\int_1^{+\infty}\frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx$

解：$\int_1^{+\infty}\frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx=-\frac{\ln^2 x}{x}\Big|_1^{+\infty}+2\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}\,dx=-\frac{2\ln x}{x}\Big|_1^{+\infty}+2\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx=-\frac{2}{x}\Big|_1^{+\infty}=2$

（4）$\int_0^{+\infty}e^{-x}\cos x\,dx$

解：$I=\int_0^{+\infty}e^{-x}\cos x\,dx=-e^{-x}\cos x\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-x}\sin x\,dx$

$$=1+e^{-x}\sin x\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-x}\cos x\,dx=1-I$$

$I=\frac{1}{2}$

（5）$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+4x+9}dx$

解：$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{x^2+4x+9}dx=\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2+4x+9}dx+\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2+4x+9}dx$

$$=\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{(x+2)^2+5}dx+\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{(x+2)^2+5}dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{5}}\Bigg|_0^{+\infty}+\frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\frac{x+2}{\sqrt{5}}\Bigg|_{-\infty}^{0}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{2}{\sqrt{5}}\right)+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\arctan\frac{2}{\sqrt{5}}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{\sqrt{5}}$$

（6）$\int_1^5\frac{x}{\sqrt{5-x}}dx$

解法 1：$\int_1^5\frac{x}{\sqrt{5-x}}dx=\int_1^5\left(-\sqrt{5-x}+\frac{5}{\sqrt{5-x}}\right)dx$

$$=-\int_1^5\sqrt{5-x}\,dx+5\int_1^5\frac{dx}{\sqrt{5-x}}\;=-\frac{2}{3}(5-x)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^5-10\sqrt{5-x}\Big|_2^5\;=\frac{44}{3}$$

解法 2：令 $t=\sqrt{5-x}$，或即 $x=5-t^2$，则

$$\int_1^5\frac{x}{\sqrt{5-x}}dx=\int_2^0\frac{5-t^2}{t}(-2t\,dt)=\int_0^2\left(10-2t^2\right)dt=\frac{44}{3}$$

（7）$\int_0^1\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

解：$\int_0^1\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{2}(\arcsin x)^2\Big|_0^1=\frac{\pi^2}{8}$

（8）$\int_0^1\ln x\,dx$

解：$\int_0^1\ln x\,dx=x\ln x\Big|_0^1-1=-1$

（9）$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx$

解：$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}dx=2\arcsin\sqrt{x}\Big|_0^1=\pi$

（10）$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}} dx$

解：$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{1-\cos 2x}} dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sqrt{2\sin^2 x}} dx$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2}} dx - \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 0$$

（11）$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}} dx$

解：$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{|x-x^2|}} dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}} dx + \int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}} dx$

$$= \arcsin(2x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} + \ln\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|\Bigg|_{1}^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi}{2} + \ln\left(2+\sqrt{3}\right)$$

（第二个积分应用了结果$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}} dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$）

16、计算下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\cos\frac{k}{n}}$

（2）$\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4n^2-2^2} + \frac{2}{4n^2-3^2} + \cdots + \frac{n-1}{4n^2-n^2} \right)$

解：（1）$\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\cos\frac{k}{n}} = \pi \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} \times \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\cos\frac{k}{n}}$

$$= \pi \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\cos\frac{k}{n}} = \pi \int_0^1 \frac{dx}{1+\cos x}$$

$$= \pi \int_0^1 \frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \pi \tan\frac{x}{2}\Big|_0^1 = \pi \tan\frac{1}{2}$$

（2）**解法 1**（两边夹逼）：$\frac{1}{4n^2-2^2}+\frac{2}{4n^2-3^2}+\cdots+\frac{n-1}{4n^2-n^2}$

$$<\frac{2}{4n^2-2^2}+\frac{3}{4n^2-3^2}+\cdots+\frac{n}{4n^2-n^2}$$

$$<\frac{1}{4n^2-1^2}+\frac{2}{4n^2-2^2}+\frac{3}{4n^2-3^2}+\cdots+\frac{n}{4n^2-n^2}$$

$$=\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{4-\frac{1^2}{n^2}}+\frac{2}{4-\frac{2^2}{n^2}}+\frac{3}{4-\frac{3^2}{n^2}}+\cdots+\frac{n}{4-\frac{n^2}{n^2}}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{4-\frac{k^2}{n^2}}$$

又

$$\frac{1}{4n^2-2^2}+\frac{2}{4n^2-3^2}+\cdots+\frac{n-1}{4n^2-n^2}$$

$$\geq\frac{1}{4n^2-1^2}+\frac{2}{4n^2-2^2}+\frac{3}{4n^2-3^2}+\cdots+\frac{n-1}{4n^2-(n-1)^2}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{4n^2-k^2}-\frac{n}{4n^2-n^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{4-\frac{k^2}{n^2}}-\frac{n}{4n^2-n^2}$$

考虑到 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{4n^2-n^2}=0$，因此由数列极限的迫敛性（Sandwich 定理）得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4n^2-2^2}+\frac{2}{4n^2-3^2}+\cdots+\frac{n-1}{4n^2-n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{4-\frac{k^2}{n^2}}=\int_0^1\frac{x}{4-x^2}\,dx=\ln 2-\frac{1}{2}\ln 3$$

解法 2（裂项求和）：$\frac{1}{4n^2-2^2}+\frac{2}{4n^2-3^2}+\cdots+\frac{n-1}{4n^2-n^2}$

$$=\frac{1-1}{4n^2-1^2}+\frac{2-1}{4n^2-2^2}+\frac{3-1}{4n^2-3^2}+\cdots+\frac{n-1}{4n^2-n^2}$$

$$=\left(\frac{1}{4n^2-1^2}+\frac{2}{4n^2-2^2}+\frac{3}{4n^2-3^2}+\cdots+\frac{n}{4n^2-n^2}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{4n^2-1^2}+\frac{1}{4n^2-2^2}+\frac{1}{4n^2-3^2}+\cdots+\frac{1}{4n^2-n^2}\right)$$

但

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4n^2-1^2}+\frac{2}{4n^2-2^2}+\frac{3}{4n^2-3^2}+\cdots+\frac{n}{4n^2-n^2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\frac{k}{n}}{4-\frac{k^2}{n^2}}=\int_0^1\frac{x}{4-x^2}\,dx$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4n^2-1^2}+\frac{1}{4n^2-2^2}+\frac{1}{4n^2-3^2}+\cdots+\frac{1}{4n^2-n^2}\right)=0$$

故原式$=\int_0^1\frac{x}{4-x^2}\,dx=\ln 2-\frac{1}{2}\ln 3$

17、计算下列定积分：

（1）$I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx=\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin^3 t}{1+\cos^2 t}(-dt)$（$x=\pi-t$）

$$=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin^3 t}{1+\cos^2 t}dt=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx-\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx=\int_0^{\pi}\frac{\pi\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx-I$$

故得

$$I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\cos^2 x-1}{1+\cos^2 x}d(\cos x)$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\left(1-\frac{2}{1+\cos^2 x}\right)d(\cos x)=-\pi-\pi\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}-\pi$$

（2）$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{10}x-\cos^{10}x}{4-\sin x-\cos x}dx$（令$x=\frac{\pi}{2}-t$）

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\cos^{10}t-\sin^{10}t}{4-\cos t-\sin t}(-dt)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^{10}t-\sin^{10}t}{4-\cos t-\sin t}dt$$

$=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{10}x-\cos^{10}x}{4-\sin x-\cos x}dx=-I$，故$I=0$。

18、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且单调不增，证明：$\int_0^{\alpha} f(x)\,dx \ge \alpha \int_0^1 f(x)\,dx$（$0<\alpha<1$）。

证明：考虑函数 $F(t)=\dfrac{\int_0^t f(x)\,dx}{t}$（$0<t\le 1$），则

$$F'(t)=\frac{t\,f(t)-\int_0^t f(x)\,dx}{t^2}=\frac{tf(t)-t\,f(\xi)}{t^2}=\frac{f(t)-f(\xi)}{t}$$

其中第二个等式利用了积分中值定理，$0\le\xi\le t$。由 $f(x)$ 的单调性知 $f(\xi)\ge f(t)$，因此得 $F'(t)\le 0$，因此 $F(t)$ 单调不增，于是

$$F(\alpha)=\frac{\int_0^{\alpha} f(x)\,dx}{\alpha}\ge F(1)=\int_0^1 f(x)dx$$

故不等式成立。

19、设 $f(x)$ 连续，且 $f(x)>0$，证明：$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $\int_a^{\xi} f(x)\,dx=\int_{\xi}^b f(x)\,dx$。

证明：构造函数 $F(t)=\int_a^t f(x)\,dx-\int_t^b f(x)\,dx$，则 $F(t)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数，且 $F(a)=-\int_a^b f(x)\,dx<0$，$F(b)=\int_a^b f(x)\,dx>0$，故由零点存在定理知，$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $F(\xi)=0$，此即 $\int_a^{\xi} f(x)\,dx=\int_{\xi}^b f(x)\,dx$。

20、设 $f(x)=x-\int_0^{\pi} f(x)\cos x\,dx$，求 $f(x)$。

解：设 $I=\int_0^{\pi} f(x)\cos x\,dx$，则由已知得

$$f(x)=x-\int_0^{\pi}(x-I)\cos x\,dx=x-\int_0^{\pi} x\cos x\,dx+I\int_0^{\pi}\cos x\,dx$$

$$=x-\left[x\sin x\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x\,dx\right]+I\sin x\Big|_0^{\pi}=x+2$$

21、求 $\dfrac{d}{dx}\int_0^x t\,f\left(x^2-t^2\right)dt$

解：$\int_0^x t\,f\left(x^2-t^2\right)dt$（令 $u=x^2-t^2$，注意 t 为积分变量）

$$=\int_{x^2}^0 \sqrt{x^2-u}\,f(u)\frac{-1}{2\sqrt{x^2-u}}\,du=\frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)\,du,$$

故 $\dfrac{d}{dx}\int_0^x t\,f\left(x^2-t^2\right)dt=x\,f\left(x^2\right)$

22. 求函数 $f(x)=\int_0^{x^2}(2-t)e^{-t}dt$ 的最大值和最小值。

解：由 $f'(x)=2x\left(2-x^2\right)e^{-x^2}=0$ 得驻点 $x=0$，$x=\pm\sqrt{2}$。我们列表如次：

x	$\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)$	$-\sqrt{2}$	$\left(-\sqrt{2},0\right)$	0	$\left(0,\sqrt{2}\right)$	$\sqrt{2}$	$\left(\sqrt{2},+\infty\right)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\uparrow$	极大值 $1+\frac{1}{e^2}$	$\downarrow$	极小值 0	$\uparrow$	极大值 $1+\frac{1}{e^2}$	$\downarrow$

或由

$$f''(x)=\left(4-6x^2\right)e^{-x^2}-2x\left(4x-2x^3\right)e^{-x^2}=\left[\left(4-6x^2\right)-2x\left(4x-2x^3\right)\right]e^{-x^2}$$

$$=\left(4x^4-14x^2+4\right)e^{-x^2}$$

得 $f''(0)=4>0$，$f\left(\pm\sqrt{2}\right)=-8e^{-2}<0$。因此 $x=0$ 为极小点，$x=\pm\sqrt{2}$ 为极大点。

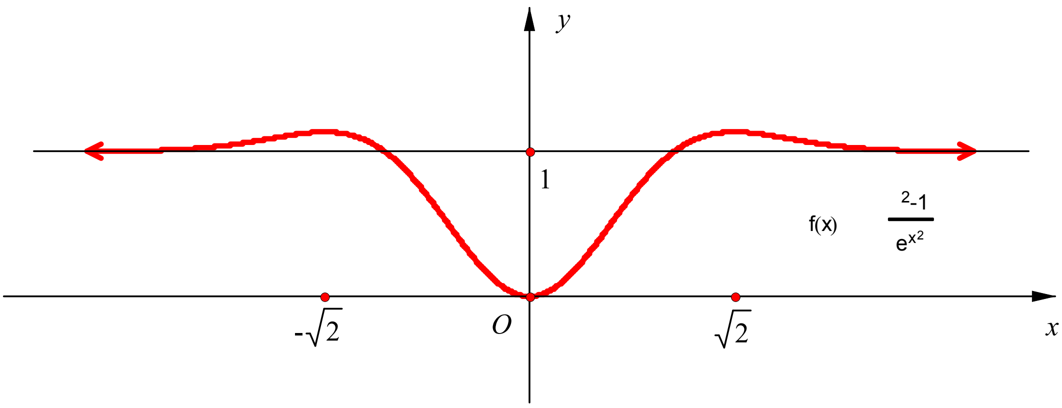
但因

$$f(x)=-(2-t)e^{-t}\Big|_0^{x^2}+\int_0^{x^2}\left(-e^{-t}\right)dt=1+\left(x^2-1\right)e^{-x^2}=1+\frac{x^2-1}{e^{x^2}}$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x^2-1}{e^{x^2}}\right)=1$$

所以 $y=1$ 为水平渐近线。因此，原函数的最大值为 $f\left(\pm\sqrt{2}\right)=1+\frac{1}{e^2}$，最小值为 $f(0)=0$。

函数图像见下图：



第 22 题中函数 $f\left(x\right)$ 的图像

如有错误，敬请指正；如有疑问，欢迎讨论！