(6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n^2}{n+1}$.

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{(n+1)}\cdot\sin n^2$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt[3]{n}}}{1+\frac{1}{n}}\cdot\sin n^2 = 0$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(4x+1)^{10}(3x-1)^{20}}{(4x-3)^{30}}$.

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{(4x+1)}{(4x-3)}\right]^{10}\cdot\left[\frac{(3x-1)}{(4x-3)}\right]^{20}$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4+\frac{1}{x}}{4-\frac{3}{x}}\right)^{10}\left(\frac{3-\frac{1}{x}}{4-\frac{3}{x}}\right)^{20} = \frac{4^{10}\cdot 3^{20}}{4^{30}} = \frac{3^{20}}{4^{20}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{20}$

(8) $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{\sin x-\sin\alpha}{x-\alpha}$.

$= \lim\limits_{x\to a} 2\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)/(x-a)$

$= 2\cos a\cdot\lim\limits_{x\to a}\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)/(x-a)$

$= 2\cos a\times\frac{1}{2} = \cos a$

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$, 其中 $|x|<1$.

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2^n})}{(1-x)}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1-x^{2^{n+1}})}{1-x} = \frac{1}{1-x}$

(10) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{x}{|x|}\right)$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\frac{x}{|x|}\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{2}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}}{1+e^{-\frac{2}{x}}}+1\right)$

$= 1$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}+\left(\frac{x}{|x|}\right)\right) = 2-1 = 1$

∴ 极限为 1

13. 函数 $y = x\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内是否有界？当 $x \to +\infty$ 数的极限是否为无穷大？为什么？

$y = x\sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内无界 $f(x) = x\sin x$

$\because$ 对于任意 M $(M>0)$

总存在 x_0，使 $|f(x_0)| > M$

$x \to +\infty$ 时这个函数的极限不存在

$\because$ $x \to 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ 时 $f(x) \to 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

$x \to 2k\pi$ $f(x) \to 0$

14. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x + e^{2ax} - 1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续，求 a 的值。

解：$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x + e^{2ax} - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x + 2ax}{x}$

$= \lim\limits_{x\to 0} (2+2a) = 2+2a$

$2+2a = a$ $\therefore$ $a = -2$ 时

$f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续

15. 求出下列函数的间断点并给出间断点的类型：

(1) $y = \frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x^2(x-1)}$.

$x=0$，$x=1$ 时 $x^2(x-1) = 0$.

$\therefore$ $x=0$，$x=1$ 为可去间断点

无穷间断点

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x^2(x-1)} = \infty$

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{\cos\frac{\pi}{2}x}{x^2(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}x)}{x^2(x-1)}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \frac{\frac{\pi}{2}(1-x)}{x^2(x-1)} = -$

(2) $y = \arctan\frac{1}{x}$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} \arctan\frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$

$\therefore$ $x=0$ 是跳跃间断点

(3) $y = \frac{1-2^{\frac{1}{x-1}}}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$. $1-\frac{2^{\frac{x}{x-1}}}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$

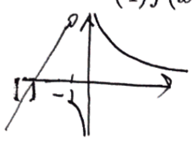
$\lim\limits_{x\to1^+} \frac{1-2^{\frac{1}{x-1}}}{1+2^{\frac{1}{x-1}}} = 1 - \frac{1}{2+\frac{1}{2}} = \frac{3}{5}$ -1.

$\lim\limits_{x\to1^-} \frac{1-2^{\frac{1}{x-1}}}{1+2^{\frac{1}{x-1}}} = 1$

$x=1$时 y无意义

$\therefore x=1$ 为可去间断点 跳跃间断点

(4) $f(x) = \begin{cases} 2x+6, & x<-1, \\ \frac{1}{x}, & x\geq -1. \end{cases}$



$\because \lim\limits_{x\to0} \frac{1}{x} = \infty$ $\therefore$ $x=0$是无穷间断点

$\lim\limits_{x\to-1}(2x+6) = 4$ $\lim\limits_{x\to-1} \frac{1}{x} = -1$

$\therefore x=-1$是跳跃间断点

16. 证明方程$x-2\sin x=0$ 在 $(0,+\infty)$内有实根。

解. 设 $f(x) = x-2\sin x$

$g(x) = x$ $h(x) = 2\sin x$ $\because g(x). h(x)$均连续.

$\therefore f(x)$在$(0.+\infty)$上连续.

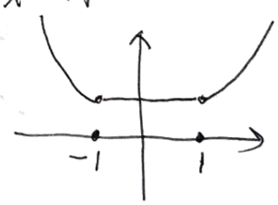
$f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}-2 < 0$

$f(\frac{3}{2}\pi) = \frac{3\pi}{2}+2 > 0$

$\therefore f(x)=0$ 在 $[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi]$上有实根即在$(0.+\infty)$上有实根

(17) 讨论函数 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}$ 的连续性。

$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{n+2}-x^{-n}}{x^n+x^{-n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^{2n+2}-1}{x^{2n}+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{x^{2n+2}}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^{2n+2}}}$



$|x|>1$时: $f(x) = x^2$

$|x|=1$时 $f(x)=0$

$0<|x|<1$时. $f(x)=-1$

$\therefore x=1$, $x=-1$ 是可去间断点 跳跃

$x=0$ 可去间断点.

18. 设$f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}, & -\frac{1}{2}<x<0\\ a, & x=0\\ x^2+b, & 0<x\le 1\end{cases}$

求 a,b使得 $f(x)$在 $x=0$连续。

解：$\because \lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})$

$=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1+x}+\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{1-x}=2.$

$\therefore a=2$

$x=0$ 时 $x^2+b=a$

$\therefore a=b=2.$

19.设函数 $f(x)$ 在开区间(a,b)连续，且$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$, 则在$[x_1,x_n]$上必存在ξ, 使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

解：$\because [x_1,x_n]\subseteq(a,b)$

$\therefore f(x)$在$[x_1,x_n]$上连续

设 $M=\max\{f(x)\mid x_1\le x\le x_n\}$

$N=\min\{f(x)\mid x_1\le x\le x_n\}$

$\therefore N\le\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots f(x_n)}{n}\le M$

由介值定理可知

$[x_1,x_n]$上必存在ξ

使得$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots f(x_n)}{n}$

20.若 $f(x)$ 在 $[0,2a]$ 上连续，其中 $a>0$ 且 $f(0)=f(2a)$，试证明方程 $f(x)=f(x+a)$ 在 $[0,a)$ 内至少有一个实根。

解: $F(x)=f(x)-f(x+a)$ $F(x)$ 在 $[0.a)$ 上连续

$F(0)=f(0)-f(a)$

$F(a)=f(a)-f(2a)$

$F(0)+F(a)=f(0)-f(a)+f(a)-f(2a)=0$

当 $F(0)=F(a)=0$

$\therefore f(x)=f(x+a)$ 在 $x=0$ 上成立

当 $F(0)\neq F(a)$ 且 $F(0)\neq 0$. $F(a)\neq 0$.

即必然有 $F(0)\cdot F(a)<0$ 则有 $\varepsilon\in[0.a)$ $f(\varepsilon)=f(\varepsilon+a)$

$\therefore f(x)=f(x+a)$ 在 $[0.a)$ 内至少有一个实根

21.设 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$，证明: $f(x)$ 在 $(a+\infty)$ 上有界。

解: $\because \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=B$

$\therefore$ 对于 $\varepsilon>0$，存在 N，当 $x>N$

$|f(x)-B|<\varepsilon$

$B-\varepsilon<f(x)<\varepsilon+B$

即 $f(x)$ 在 $(N.+\infty)$ 上有界

$N<a$ 时

对 $x>a$ $B-\varepsilon<f(x)<B+\varepsilon$

$f(x)$ 有界

$N\geqslant a$ 时

$f(x)$ 在 $(a.N]$ 上连续 $\therefore f(x)$ 在 $(a.N]$ 上有界

由上可知 $f(x)$ 在 $(N.+\infty)$ 上有界

$\therefore f(x)$ 在 $(a.+\infty)$ 上有界

第 3 章 导数与微分

1. 设 $f(x)=\ln[1+\sin(x-a)]+(x-a)\arctan^2\sqrt[3]{x}$，按定义求 $f'(a)$。

$\frac{1}{\cos(x-a)}$　　$2\cdot\frac{1}{1+x^{\frac{2}{3}}}$

$f'(x)=\frac{1}{\cos(x-a)}+\frac{2(x-a)}{x^{\frac{2}{3}}+1}+\arctan^2\sqrt[3]{x}$

$\therefore f'(a)=\frac{1}{\cos(a-a)}+\frac{2(a-a)}{x^{\frac{2}{3}}+1}+\arctan^2\sqrt[3]{x}$

$=1+\arctan^2\sqrt[3]{a}$

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln[1+\sin(x-a)]+(x-a)\arctan^2\sqrt[3]{x}-\ln 1}{x-a}$

$=\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{\ln[1+\sin(x-a)]}{x-a}+\arctan^2\sqrt[3]{x}\right]$

$=1+\arctan^2\sqrt[3]{a}$

2. 设 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0}=A$，求 $f'(x_0)$。

$\because \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

$\because \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{x-x_0}=A$　$\therefore \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$

$\therefore f(x_0)=0$

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A$.

3. 设 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=0$，试证 $F(x)=f(x)(1+|\sin x|)$ 在 $x=0$ 处可导。

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)(1+|\sin x|)-0}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}(1+|\sin x|)$

$=f'(0)\times 1$

$\because f(x)$ 可导　$\therefore F(x)$ 在 $x=0$ 处可导