# 第三节 高阶微分方程---12.3.2 线性微分方程解的性质

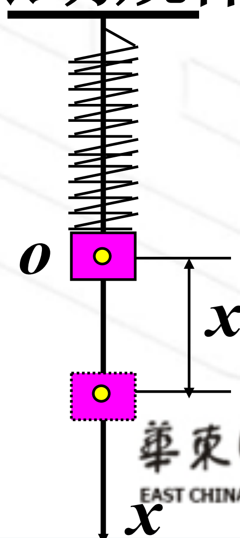
## 一、概念的引入

例：设有一弹簧下挂一重物，如果使物体具有一个初始速度 $v_0 \neq 0$，物体便离开平衡位置，并在平衡位置附近作上下振动。试确定物体的振动规律 $x = x(t)$.

**解** 受力分析

1. 恢复力 $f = -cx$;

2. 阻力 $R = -\mu \dfrac{dx}{dt}$;



$$\because F = ma, \quad \therefore m\frac{d^2x}{dt^2} = -cx - \mu\frac{dx}{dt},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + k^2x = 0$$ 物体自由振动的微分方程

若受到铅直干扰力 $F = H\sin pt,$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + k^2x = h\sin pt$$ 强迫振动的方程

$$Lc\frac{d^2u_c}{dt^2} + 2\beta\frac{du_c}{dt} + \omega_0{}^2u_c = \frac{E_m}{LC}\sin\omega t$$

串联电路的振荡方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P(x)\frac{dy}{dx}+Q(x)y=f(x)$$

二阶线性微分方程

当 $f(x)=0$时， 二阶线性齐次微分方程

当 $f(x)\neq 0$时，二阶线性非齐次微分方程

$n$阶线性微分方程

$$y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+P_{n-1}(x)y'+P_n(x)y=f(x).$$

# 二、线性微分方程的解的结构

## 1. 二阶齐次方程解的结构:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (1)$$

定理 1 如果函数$y_1(x)$与$y_2(x)$是方程(1)的两个解, 那末$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$也是(1)的解. （$C_1$, $C_2$是常数）

**问题:** $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$一定是通解吗?

定义：设$y_1, y_2, \cdots, y_n$为定义在区间$I$内的$n$个函数．如果存在$n$个不全为零的常数，使得当$x$在该区间内有恒等式成立

$$k_1 y_1 + k_2 y_2 + \cdots + k_n y_n = 0,$$

那么称这$n$个函数在区间$I$内线性相关．否则称线性无关

**例如** 当$x \in (-\infty, +\infty)$时，$e^x, e^{-x}, e^{2x}$线性无关

$1, \cos^2 x, \sin^2 x$ 线性相关

特别地：若在 I 上有 $\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq$ 常数，

则函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 在 I 上线性无关.

定理 2：如果 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程(1)的两个线性无关的特解，那么 $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ 就是方程(1)的通解.

例如 $y'' + y = 0$, $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$,

且 $\dfrac{y_2}{y_1} = \tan x \neq$ 常数, $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

## 2. 二阶非齐次线性方程的解的结构:

定理 3 设 $y^*$ 是二阶非齐次线性方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \qquad (2)$$

的一个特解， $Y$ 是与 (2) 对应的齐次方程 (1) 的通解，那么 $y = Y + y^*$ 是二阶非齐次线性微分方程 (2) 的通解.

定理 4　设非齐次方程(2)的右端 $f(x)$ 是几个函数之和，如 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$

而 $y_1^*$ 与 $y_2^*$ 分别是方程,

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_1(x)$$

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f_2(x)$$

的特解，那么 $y_1^* + y_2^*$ 就是原方程的特解.

解的叠加原理

# *三、降阶法与常数变易法

## 1. 齐次线性方程求线性无关特解——————降阶法

设$y_1$是方程(1)的一个非零特解，

令 $y_2 = u(x)y_1$ 　　代入(1)式，得

$$y_1u'' + (2y_1' + P(x)y_1)u' + \underline{(y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1)u} = 0,$$

即 $y_1u'' + (2y_1' + P(x)y_1)u' = 0,$ 　令$v = u',$

则有 $y_1v' + (2y_1' + P(x)y_1)v = 0,$

$$y_1 v' + (2y_1' + P(x)y_1)v = 0$$ $v$的一阶方程

降阶法

解得 $v = \dfrac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx}$，$\therefore u = \displaystyle\int \dfrac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx} dx$

$$\therefore y_2 = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx} dx,$$

刘维尔公式

齐次方程通解为

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int P(x)dx} dx.$$

## 2.非齐次线性方程通解求法-------常数变易法

设对应齐次方程通解为 $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \qquad (3)$

设非齐次方程通解为 $y = c_1(x) y_1 + c_2(x) y_2$

$$y' = c_1'(x) y_1 + c_2'(x) y_2 + c_1(x) y_1' + c_2(x) y_2'$$

设 $c_1'(x) y_1 + c_2'(x) y_2 = 0 \qquad (4)$

$$y'' = c_1'(x) y_1' + c_2'(x) y_2' + c_1(x) y_1'' + c_2(x) y_2''$$

将 $y, y', y''$ 代入方程(2), 得

$$c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' + c_1(x)(\underline{y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1})$$
$$+ c_2(x)(\underline{y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2}) = f(x)$$

$$c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = f(x) \qquad (5)$$

(4),(5)联立方程组 $\begin{cases} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0 \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = f(x) \end{cases}$

$\because$ 系数行列式 $w(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0,$

$$\therefore c_1'(x) = -\frac{y_2 f(x)}{w(x)}, \qquad c_2'(x) = \frac{y_1 f(x)}{w(x)},$$

积分可得 $$c_1(x) = C_1 + \int -\frac{y_2 f(x)}{w(x)} dx,$$

$$c_2(x) = C_2 + \int \frac{y_1 f(x)}{w(x)} dx,$$

非齐次方程通解为

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 - y_1 \int \frac{y_2 f(x)}{w(x)} dx + y_2 \int \frac{y_1 f(x)}{w(x)} dx.$$

**例** 求方程 $y''+\frac{x}{1-x}y'-\frac{1}{1-x}y=x-1$ 的通解.

补充内容 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 可观察出一个特解

(1) 若$P(x) + xQ(x) = 0,$ 特解 $y = x;$

(2) 若$1 + P(x) + Q(x) = 0,$ 特解 $y = e^{x};$

(3) 若$1 - P(x) + Q(x) = 0,$ 特解 $y = e^{-x}.$

## 第三节 高阶微分方程—12.3.3 二阶常系数齐次线性微分方程 的解

### 一、定义

**$n$阶常系数线性微分方程的标准形式**

$$y^{(n)} + P_1 y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1} y' + P_n y = f(x)$$

**二阶常系数齐次线性方程的标准形式**

$$y'' + py' + qy = 0$$

**二阶常系数非齐次线性方程的标准形式**

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

# 二、二阶常系数齐次线性方程解法

$$y'' + py' + qy = 0$$ ———特征方程法

设 $y = e^{rx}$, 将其代入上方程, 得

$(r^2 + pr + q)e^{rx} = 0$ $\because e^{rx} \neq 0,$

故有 $r^2 + pr + q = 0$ 特征方程

特征根 $r_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2},$

① 有两个不相等的实根 $(\Delta > 0)$

特征根为$r_1 = \dfrac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$, $r_2 = \dfrac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$,

两个线性无关的特解

$$y_1 = e^{r_1 x}, \qquad y_2 = e^{r_2 x},$$

得齐次方程的通解为 $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$;

反之：

已知 $y_1 = e^{r_1 x}$，$y_2 = e^{r_2 x}$为方程的两个特解

如何求微分方程？

$r_1, r_2$为特征方程的根

则特征方程为$(r - r_1)(r - r_2) = 0$

$$\Rightarrow r^2 - (r_1 + r_2)r + r_1 r_2 = 0$$

$\therefore$ 微分方程为 $y'' - (r_1 + r_2)y' + r_1 r_2 y = 0$

## ② 有两个相等的实根 $(\Delta = 0)$

特征根为 $r_1 = r_2 = -\dfrac{p}{2}$, 一特解为 $y_1 = e^{r_1 x}$,

设另一特解为 $y_2 = u(x)e^{r_1 x}$,

将 $y_2$, $y_2'$, $y_2''$ 代入原方程并化简,

$$u'' + \underline{(2r_1 + p)}u' + \underline{(r_1^2 + pr_1 + q)}u = 0,$$

知 $u'' = 0$, 取 $u(x) = x$, 则 $y_2 = xe^{r_1 x}$,

得齐次方程的通解为 $y = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}$;

反之：

已知 $y = xe^{r_1 x}$，为方程的一个特解

如何求微分方程？

$r$为特征方程的重根

则特征方程为$(r - r_1)^2 = 0$

$$\Rightarrow r^2 - 2r_1 r + r_1^2 = 0$$

$\therefore$ 微分方程为 $y'' - 2r_1 y' + r_1^2 y = 0$

## ③ 有一对共轭复根 $(\Delta < 0)$

特征根为 $r_1 = \alpha + j\beta,\quad r_2 = \alpha - j\beta,$

$$y_1 = e^{(\alpha + j\beta)x},\quad y_2 = e^{(\alpha - j\beta)x},$$

重新组合 $\bar{y}_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = e^{\alpha x}\cos\beta x,$

$$\bar{y}_2 = \frac{1}{2j}(y_1 - y_2) = e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

得齐次方程的通解为

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

**定义** 由常系数齐次线性方程的特征方程的根确定其通解的方法称为**特征方程法**.

**例1** 求方程 $y'' + 4y' + 4y = 0$ 的通解.

**例2** 求方程 $y'' + 2y' + 5y = 0$ 的通解.

例3：已知 $y_1 = xe^x + e^{2x}, y_2 = xe^x, y_3 = xe^x + e^{2x} - e^{-x}$

是二阶常系数线性非齐次微分方程

$$y'' + py' + qy = e^x - 2xe^x$$

的三个特解，求此微分方程。

# 三、*n*阶常系数齐次线性方程解法

$$y^{(n)}+P_1y^{(n-1)}+\cdots+P_{n-1}y'+P_ny=0$$

特征方程为 $r^n+P_1r^{n-1}+\cdots+P_{n-1}r+P_n=0$

| 特征方程的根 | 通解中的对应项 |
|---|---|
| 若是$k$重根$r$ | $(C_0+C_1x+\cdots+C_{k-1}x^{k-1})e^{rx}$ |
| 若是$k$重共轭复根$\alpha\pm j\beta$ | $[(C_0+C_1x+\cdots+C_{k-1}x^{k-1})\cos\beta x$ $+(D_0+D_1x+\cdots+D_{k-1}x^{k-1})\sin\beta x]e^{\alpha x}$ |

## 注意

$n$次代数方程有$n$个根, 而特征方程的每一个根都对应着通解中的一项, 且每一项各一个任意常数.

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

例4　求方程

$y^{(5)}+y^{(4)}+2y^{(3)}+2y''+y'+y=0$ 的通解.

## 二阶常系数齐次微分方程求通解的一般步骤:

（1）写出相应的特征方程;

（2）求出特征根;

（3）根据特征根的不同情况,得到相应的通解.

(见下表)

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad r^2 + pr + q = 0$$

| 特征根的情况 | 通解的表达式 |
| --- | --- |
| 实根 $r_1 \neq r_2$ | $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ |
| 实根 $r_1 = r_2$ | $y = (C_1 + C_2 x) e^{r_2 x}$ |
| 复根 $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ | $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$ |

# 思考题

求微分方程 $yy''-(y')^2=y^2\ln y$ 的通解.