三、小结

偏导数的定义（偏增量比的极限）

偏导数的计算、偏导数的几何意义

高阶偏导数 $\begin{cases} \text{纯偏导} \\ \text{混合偏导（相等的条件）} \end{cases}$

内容小结

1. 偏导数的概念及有关结论

- 定义; 记号; 几何意义
- 函数在一点偏导数存在 $\not\Longrightarrow$ 函数在此点连续
- 混合偏导数连续 $\Longrightarrow$ 与求导顺序无关

2. 偏导数的计算方法

- 求一点处偏导数的方法 $\begin{cases} \text{先代后求} \\ \text{先求后代} \\ \text{利用定义} \end{cases}$
- 求高阶偏导数的方法 —— 逐次求导法

(与求导顺序无关时, 应选择方便的求导顺序)

思考题 设 $z=f(u)$，方程 $u=\varphi(u)+\int_y^x p(t)\,dt$ 确定 u 是 x , y 的函数，其中 $f(u),\varphi(u)$ 可微，$p(t),\varphi'(u)$ 连续，且 $\varphi'(u)\neq 1$，求 $p(y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+p(x)\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

解: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial y}$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x}+p(x)\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial y}-p(y)\end{aligned}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{p(x)}{1-\varphi'(u)}\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=\frac{-p(y)}{1-\varphi'(u)}\end{aligned}\right.$$

$$\therefore\ p(y)\frac{\partial z}{\partial x}+p(x)\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)\left[\,p(y)\frac{\partial u}{\partial x}+p(x)\frac{\partial u}{\partial y}\,\right]=0$$

2 设$u=e^{ax}\cos by$，求二阶偏导数.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=ae^{ax}\cos by,\qquad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-be^{ax}\sin by;$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a^2e^{ax}\cos by,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-b^2e^{ax}\cos by,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-abe^{ax}\sin by,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=-abe^{ax}\sin by.$$

第三节 全微分

一元函数 $y=f(x)$ 的微分

$$\Delta y=\underline{A\Delta x}+o(\Delta x)$$

$$\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x \xrightarrow{\text{应用}} \begin{cases}\text{近似计算}\\ \text{估计误差}\end{cases}$$

本节内容:

一、全微分的定义

***二、全微分在数值计算中的应用**

一、全微分的定义

由一元函数微分学中增量与微分的关系得

$$\boxed{\begin{aligned} &f(x+\Delta x, y)-f(x, y) \\ &f(x, y+\Delta y)-f(x, y) \end{aligned}} \begin{aligned} &\approx \\ &\approx \end{aligned} \boxed{\begin{aligned} &f_x(x, y)\Delta x \\ &f_y(x, y)\Delta y \end{aligned}}$$

二元函数 　　　　　　　　二元函数

对 x 和对 y 的偏增量 　　对 x 和对 y 的偏微分

全增量的概念

如果函数$z = f(x, y)$在点(x, y)的某邻域内有定义，并设$P'(x+\Delta x, y+\Delta y)$为这邻域内的任意一点，则称这两点的函数值之差

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

为函数在点 P 对应于自变量增量$\Delta x, \Delta y$的全增量，记为Δz，

即 $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$

全微分的定义

如果函数$z=f(x,y)$在点(x,y)的全增量$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$可以表示为$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，其中$A,B$不依赖于$\Delta x,\Delta y$而仅与$x,y$有关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数$z=f(x,y)$在点$(x,y)$可微分，$A\Delta x+B\Delta y$称为函数$z=f(x,y)$在点$(x,y)$的全微分，记为$dz$，即 $dz=A\Delta x+B\Delta y$.

函数若在某区域 D 内各点处处可微分，则称这函数在 D 内可微分.

如果函数$z=f(x,y)$在点(x,y)可微分, 则函数在该点连续.

事实上 $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$, $\lim\limits_{\rho\to 0}\Delta z = 0$,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x+\Delta x, y+\Delta y) = \lim_{\rho\to 0}[f(x,y)+\Delta z]$$

$$= f(x,y)$$

故函数$z=f(x,y)$在点(x,y)处连续.

即

$\boxed{\text{函数 } z=f(x,y) \text{ 在点 } (x,\ y) \text{ 可微} \Longrightarrow \text{函数在该点连续}}$

一元函数在某点的导数存在 $\Longleftrightarrow$ 微分存在.

多元函数的各偏导数存在 $\overset{?}{\Longleftrightarrow}$ 全微分存在.

下面两个定理给出了可微与偏导数的关系:

(1) 函数可微 $\begin{array}{c}\longrightarrow\\ \not\longleftarrow\end{array}$ 偏导数存在

(2) 偏导数连续 $\begin{array}{c}\longrightarrow\\ \not\longleftarrow\end{array}$ 函数可微

定理1(必要条件) 若函数 $z=f(x,y)$ 在点(x,y) **可微**，

则该函数在该点偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ 必存在,且有

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$$

证: 由全增量公式 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$, 令 $\Delta y=0$,

得到对 x 的偏增量

$$\Delta_x z=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=A\Delta x+o(|\Delta x|)$$

$$\therefore \quad \frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=A$$

同样可证 $\frac{\partial z}{\partial y}=B$, 因此有 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$

注意：定理1 的逆定理不成立 . 即:

偏导数存在的函数 不一定可微 ！

反例：函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

易知 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$， 但

$$\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]=\frac{\Delta x\,\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

$$\frac{\Delta x\,\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}\Big/\rho=\frac{\Delta x\,\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\not\to 0$$

$\neq o(\rho)$ 因此,函数在点 (0,0) 不可微 .

定理2 **(充分条件)** 若函数 $z=f(x,y)$ 的偏导数 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$

在点 (x,y) 连续, 则函数在该点可微分.

证: $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$

$$= [f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)]$$

$$+ [f(x, y+\Delta y) - f(x,y)]$$

$$= f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x + f_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y$$

$$\boxed{(0<\theta_1, \theta_2<1)}$$

$$= [f_x(x,y)+\alpha]\Delta x + [f_y(x,y)+\beta]\Delta y$$

$$\left(\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \alpha = 0, \quad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \beta = 0\right)$$

$$\Delta z = \cdots$$

$$= f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + \alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y$$

$$\left(\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \alpha = 0, \quad \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \beta = 0 \right)$$

注意到 $\left| \dfrac{\alpha\,\Delta x + \beta\,\Delta y}{\rho} \right| \le |\alpha| + |\beta|$，故有

$$\Delta z = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y + o(\rho)$$

所以函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x, y) 可微.

推广: 类似可讨论三元及三元以上函数的可微性问题.

例如, 三元函数 $u=f(x,y,z)$ 的全微分为

$$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z$$

习惯上把自变量的增量用微分表示, 于是

$$\mathrm{d}u=\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x}_{\mathrm{d}_x u}+\underbrace{\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y}_{\mathrm{d}_y u}+\underbrace{\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z}_{\mathrm{d}_z u}$$

记作 $\mathrm{d}_x u$ $\mathrm{d}_y u$ $\mathrm{d}_z u$

$\mathrm{d}_x u,\mathrm{d}_y u,\mathrm{d}_z u$ 称为**偏微分**. 故有下述叠加原理

$$\mathrm{d}u=\mathrm{d}_x u+\mathrm{d}_y u+\mathrm{d}_z u$$

例1. 计算函数 $z=e^{xy}$ 在点 $(2,1)$ 处的全微分.

解: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}$, $\quad \dfrac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(2,1)}=e^2,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,1)}=2e^2$$

$$\therefore\quad \left.\mathrm{d}z\right|_{(2,1)}=e^2\,\mathrm{d}x+2e^2\,\mathrm{d}y=e^2(\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y)$$

例2. 计算函数 $u=x+\sin\dfrac{y}{2}+e^{yz}$ 的全微分.

解: $\mathrm{d}u=1\cdot\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2}+ze^{yz}\right)\mathrm{d}y+ye^{yz}\,\mathrm{d}z$

例 2 计算函数$u = x + \sin\frac{y}{2} + e^{yz}$的全微分.

解 $\frac{\partial u}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\cos\frac{y}{2} + ze^{yz}$,

$\frac{\partial u}{\partial z} = ye^{yz}$,

所求全微分

$$du = dx + \left(\frac{1}{2}\cos\frac{y}{2} + ze^{yz}\right)dy + ye^{yz}dz.$$

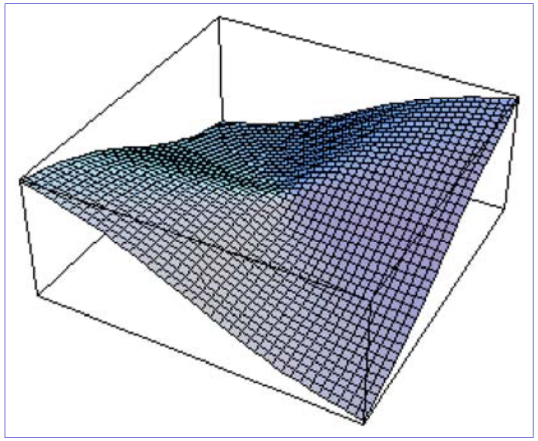
例 3 试证函数

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

在点(0,0)连续且偏导数存在，但偏导数在点(0,0)不连续，而 f 在点(0,0)可微.

思路：按有关定义讨论；对于偏导数需分 $(x,y)\neq(0,0)$，$(x,y)=(0,0)$讨论.

证 令 $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta,$



则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} xy\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$=\lim_{\rho\to 0}\rho^2\sin\theta\cos\theta\cdot\sin\frac{1}{\rho}=0=f(0,0),$$

故函数在点(0,0)连续,

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0,$$

同理 $f_y(0,0)=0.$

当$(x,y)\neq(0,0)$时，

$$f_x(x,y)=y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2y}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

当点$P(x,y)$沿直线$y=x$趋于$(0,0)$时，

$$\lim_{(x,x)\to(0,0)} f_x(x,y)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{\sqrt{2}\,|x|}-\frac{x^3}{2\sqrt{2}\,|x|^3}\cos\frac{1}{\sqrt{2}\,|x|}\right),$$

不存在.

所以$f_x(x,y)$在$(0,0)$不连续.

同理可证$f_y(x,y)$在$(0,0)$不连续.

$$\Delta f = f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0)$$

$$= \Delta x \cdot \Delta y \cdot \sin \frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

$$= o(\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2})$$

故$f(x,y)$在点$(0,0)$可微　　$df\big|_{(0,0)} = 0.$

*二、全微分在数值计算中的应用

1. 近似计算

由全微分定义

$$\Delta z = \underbrace{f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y}_{\mathrm{d}\,z} + o(\rho)$$

可知当 $|\Delta x|$ 及 $|\Delta y|$ 较小时, 有近似等式:

$$\Delta z \approx \mathrm{d}\,z = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

(可用于近似计算; 误差分析)

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

(可用于近似计算)

例3.计算 $1.04^{2.02}$ 的近似值.

解: 设 $f(x,y)=x^y$,则

$$f_x(x,y)=\ y\,x^{y-1}\,,\quad f_y(x,y)=x^y\ln x$$

取 $x=1,\ y=2,\ \ \Delta x=0.04,\ \ \Delta y=0.02$

则 $$1.04^{2.02}=f(1.04,\ 2.02)$$

$$\approx f(1,2)+f_x(1,2)\Delta x+f_y(1,2)\Delta y$$

$$=1+2\times 0.04+0\times 0.02=1.08$$

2. 误差估计

利用 $\Delta z \approx f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$

令 $\delta_x, \delta_y, \delta_z$ 分别表示 x , y , z 的绝对误差界，则

z 的绝对误差界约为

$$\delta_z = |f_x(x,y)|\delta_x + |f_y(x,y)|\delta_y$$

z 的相对误差界约为

$$\frac{\delta_z}{|z|} = \left|\frac{f_x(x,y)}{f(x,y)}\right|\delta_x + \left|\frac{f_y(x,y)}{f(x,y)}\right|\delta_y$$

内容小结

1. 微分定义: ($z = f(x,y)$)

$$\Delta z = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y \ + o(\rho)$$

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

$$\mathrm{d}z = f_x(x,y)\mathrm{d}x + f_y(x,y)\mathrm{d}y$$

2. 重要关系:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{\text{函数连续}} \arrow[rr, shift left, "/" marking] \arrow[dr, shift left, "/" marking] & & \boxed{\text{偏导存在}} \arrow[ll, shift left, "/" marking] \arrow[dl, shift right, "/" marking] \\
& \boxed{\text{函数可微}} \arrow[ul, shift left] \arrow[ur, shift right] \arrow[d, shift left, "/" marking] & \\
& \boxed{\text{偏导数连续}} \arrow[u, shift left] &
\end{tikzcd}$$

3. 微分应用

- 近似计算

$$\Delta z \approx f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

$$f(x+\Delta x\,,\,y+\Delta y)$$

$$\approx f(x,y) + f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y$$

- 估计误差

绝对误差 $\delta_z = \left|f_x(x,y)\right|\delta_x + \left|f_y(x,y)\right|\delta_y$

相对误差 $\dfrac{\delta_z}{|z|} = \left|\dfrac{f_x(x,y)}{f(x,y)}\right|\delta_x + \left|\dfrac{f_y(x,y)}{f(x,y)}\right|\delta_y$