大学基础物理学

University Fundamental Physics

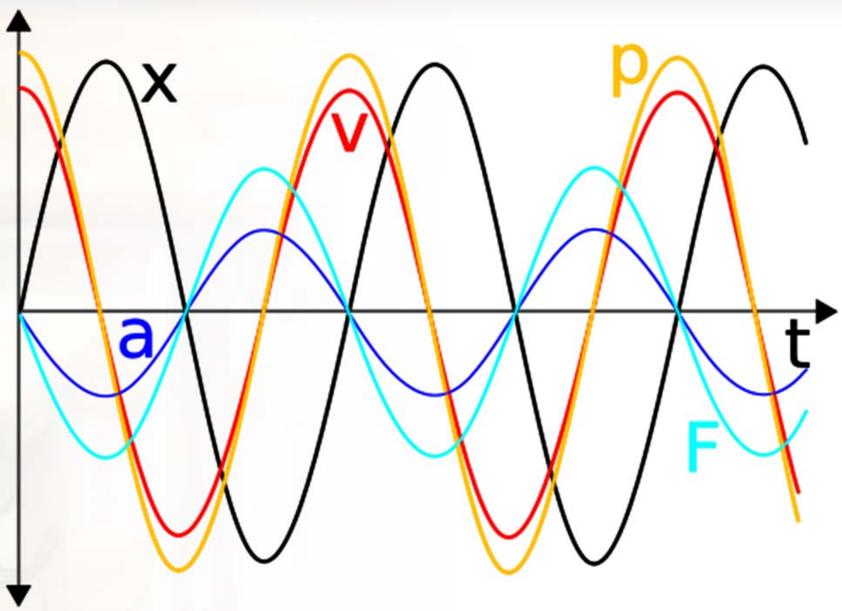
电子工程系@华东师范大学

李波

2019年

简谐运动的描述

振动曲线



$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi) = \omega A\cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi) = \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi + \pi)$$

$$p = mv = m\frac{dx}{dt} = m\omega A\cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi + \pi)$$

说明：

物体在简谐运动时，其位移、速度、加速度都是周期性变化的

v 比 x 超前 $\pi/2$, a 比 x 超前 π

简谐振动系统的能量

---简谐振动系统的动能和势能

水平弹簧振子的总机械能 $E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$

<u>任意时刻 *t*</u>

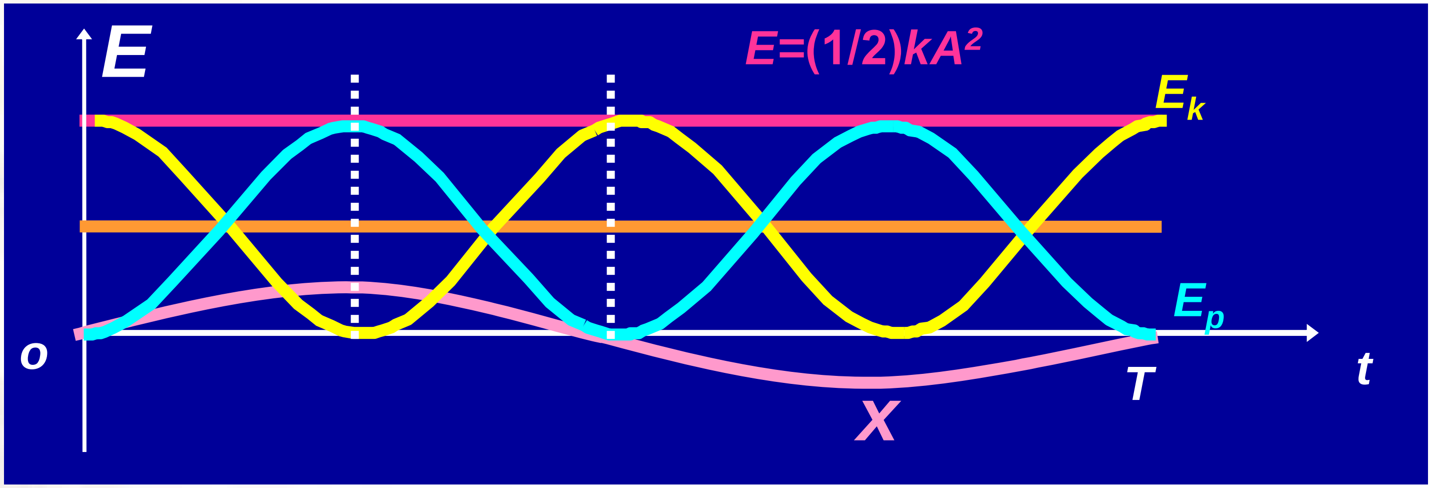
$\omega^2 = \frac{k}{m}$

动能 $\boxed{E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kA^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)}$

势能 $\boxed{E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)}$

随时间变化

总机械能 $E = E_k + E_p = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2$ =常量



$$\overline{E}_p = \overline{E}_k$$

***E* = 常量：简谐振动的过程正是动能与势能相互转换的过程**

动能与势能的时间平均值:

$$\overline{E_{\mathrm{k}}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)dt = \frac{1}{4}kA^2$$

$$\overline{E_{\mathrm{P}}} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)dt = \frac{1}{4}kA^2$$

$$\boxed{\overline{E}_{\mathrm{k}} = \overline{E}_{\mathrm{p}} = E_{\mathrm{t}}/2}$$

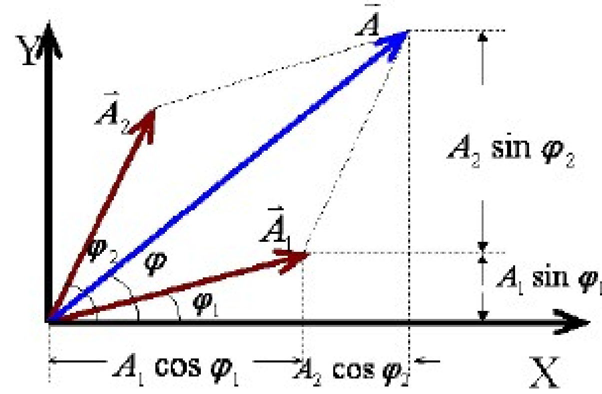
$$A^2 = A_1^{\ 2} + A_2^{\ 2} + 2A_1A_2\cos\Delta\phi$$

$$\varphi_2 = \omega_2 t + \varphi_{2,0}$$

$$\varphi_1 = \omega_1 t + \varphi_{1,0}$$

$$\Delta\phi = (\omega_2 t + \varphi_{2,0}) - (\omega_1 t + \varphi_{1,0}) = (\omega_2 - \omega_1)t + (\varphi_{2,0} - \varphi_{1,0})$$

$$tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$



同振动方向、同频率的两个简谐振动的合成

$$A^2 = A_1^{\;2} + A_2^{\;2} + 2A_1A_2\cos(\varphi_{2,0} - \varphi_{1,0})$$

$$tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_{1,0} + A_2\sin\varphi_{2,0}}{A_1\cos\varphi_{1,0} + A_2\cos\varphi_{2,0}}$$

$$\varphi_{2,0} - \varphi_{1,0} = 2k\pi \qquad A = |A_1 + A_2|$$

$$\varphi_{2,0} - \varphi_{1,0} = (2k+1)\pi \qquad A = |A_1 - A_2|$$

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$$

合振动仍是**同频率**的**简谐振动** & 合振幅不仅与分振幅有关还与**$\Delta\varphi$有关**，合振幅的值在A_1+A_2与A_1-A_2（绝对值）之间。

同振动方向、不同频率的两个简谐振动的合成

$$A_1 = A_2 \quad \omega_1 \neq \omega_2 \quad \varphi_{1,0} = \varphi_{2,0} = \varphi$$

$$A = 2A_1\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2})t$$

$$\varphi' = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t + \varphi$$

$$x = 2A_1\cos(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t)\cos(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}t + \varphi)$$

振幅*A*按余弦函数变化，变化范围：$0 \leq A \leq 2A_1$

可见 $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t$ 改变 π 时，*A*就重复出现一次变化~~拍

拍的周期τ和拍的频率ν: $\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\tau = \pi$ $\quad \tau = \frac{1}{\nu}$

阻尼振动

根据牛顿定律： $F = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$　则： $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\dfrac{dx}{dt}$

即： $$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$ ——动力学方程

阻尼项

其中： $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$　　$\beta = \dfrac{\gamma}{2m}$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0}$$

β — 阻尼系数

运动学特征

$$\ddot{x}+2\beta\dot{x}+\omega_0^2x=0$$

- **1：阻尼较小时，$\beta<\omega_0$，称为欠阻尼（弱阻尼）**

解：

$$x(t)=A_0e^{-\beta\cdot t}\cos(\omega t+\varphi_0)$$

振幅 $A=A_0e^{-\beta t}$　　**频率** $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}$

机械能*E*随振幅*A*的减小而衰减 $E=E_0e^{-2\beta t}$

能量减小到原来的1/e的时间为:

时间常量 （鸣响时间）

$$\tau=1/2\beta$$

品质因数

鸣响时间内振荡次数 x 2π

$$Q=2\pi\frac{\tau}{T}=\omega\tau=\omega/(2\beta)$$

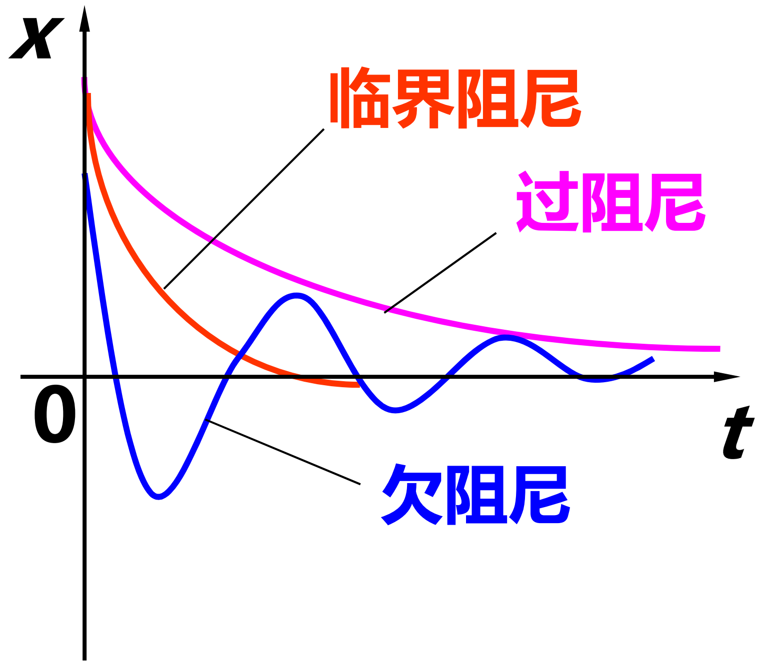
➢ 2：阻尼较大时，$\beta > \omega_0$，称为过阻尼

方程的解：$$x(t) = C_1 e^{-(\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}$$

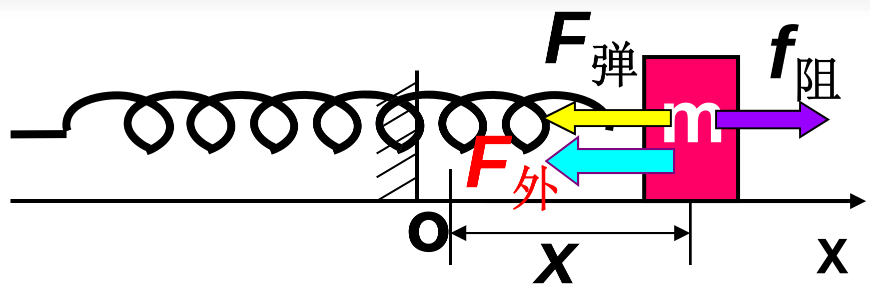
➢ 3：$\beta = \omega_0$，称为临界阻尼

方程的解：

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\beta t}$$



受迫振动



$$F_{外}=F_0\cos\omega_{外}t$$

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2}=F_{弹}+f_{阻}+F_{外}}$$

$$\omega_0^2=\frac{k}{m}\qquad 2\beta=\frac{\gamma}{m}\qquad a_0=\frac{F_0}{m}$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=a_0\cos\omega_{外}t}$$ ——动力学方程

$$\boxed{x(t)=\underbrace{A_0e^{-\beta\cdot t}\cos(\omega t+\varphi_0)}_{\text{反映系统的暂态行为}}+A_p\cos(\omega_{外}t+\alpha)}$$

反映系统的暂态行为

系统的稳定振动状态

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=a_0\cos\omega_{外}t$$

稳态解

$$\boxed{x(t)=A_p\cos(\omega_{外}t+\alpha)}$$

即：稳态时的受迫振动按简谐振动的规律变化

稳态频率： $\omega=\omega_{外}$

将稳态解代入方程可得：

振幅： $$A_p=\frac{a_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_{外}^2\right)^2+4\beta^2\omega_{外}^2}}$$

位相： $$tg\alpha=\frac{-2\beta\omega_{外}}{\omega_0^2-\omega_{外}^2}$$

共振 —— 位移共振

在一定频率条件下，振幅出现 极大值，振动剧烈的现象。

$$A_p = \frac{a_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_{外}^2\right)^2 + 4\beta^2\omega_{外}^2}}$$

令：$$\frac{dA_p}{d\omega_{外}} = 0$$

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

共振频率

$$A_p = A_{max} = \frac{a_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

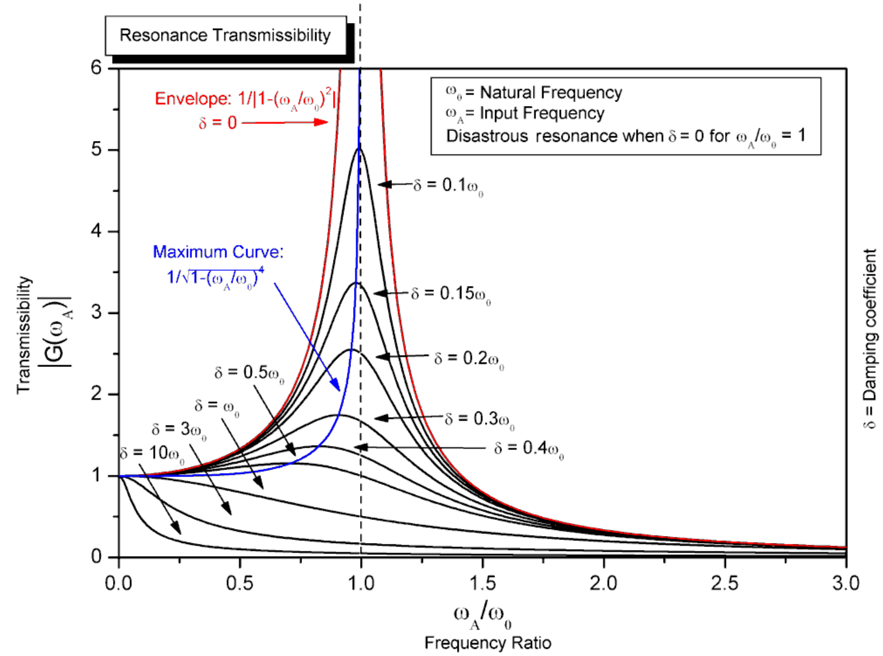
$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$$

$$A_p = A_{max} = \frac{a_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

$\omega_r < \omega_0$，与 β 有关

β 大， ω_r 小　A_{max}—小

β 小， ω_r 大　A_{max}—大

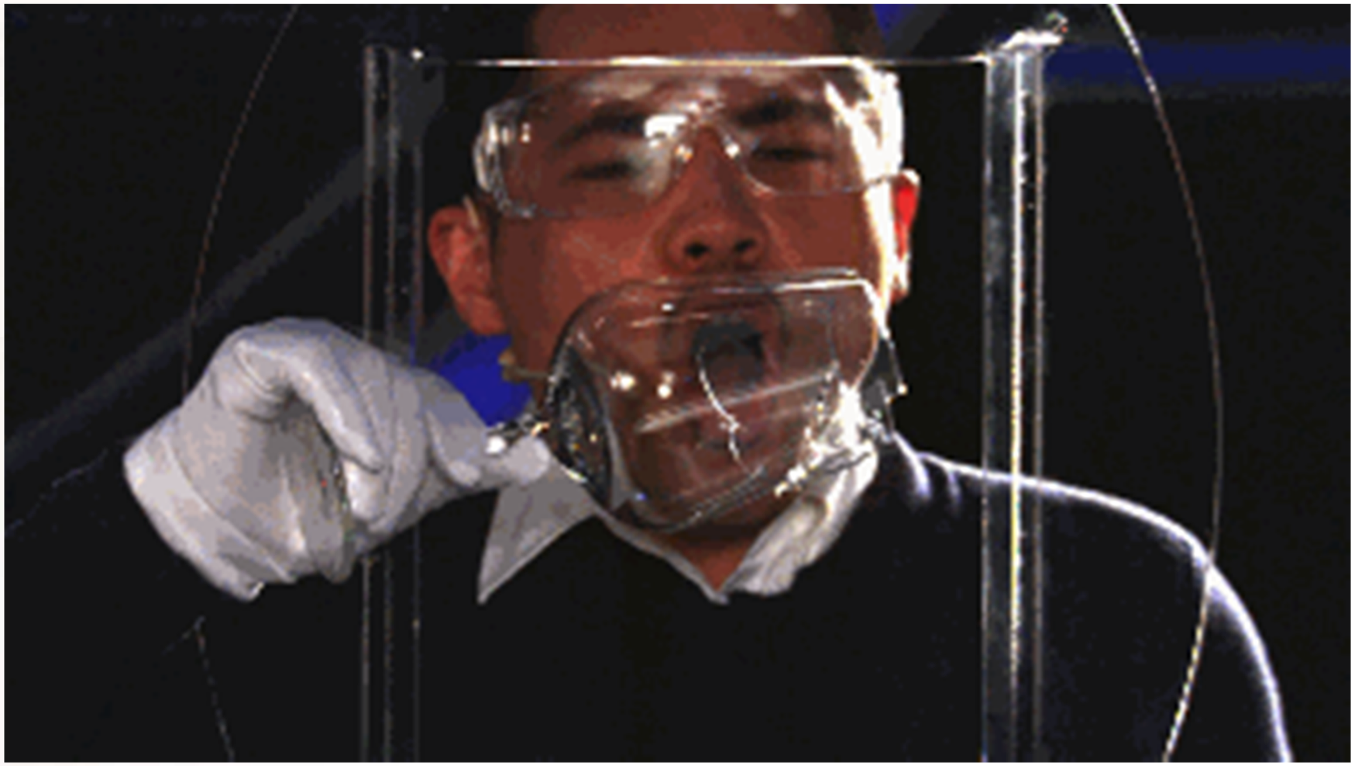


若 $\beta \ll \omega_0$，则 $\omega_r \approx \omega_0$

$A_r \approx a_0/(2\beta\,\omega_0)$~~称尖锐共振

$\boxed{若\ \beta \to 0 \quad A_{max} \to \infty}$ → 实际上不可能

小号发出的声波足以使酒杯破碎



当 $\beta \to 0$ 弱阻尼时

共振发生在固有频率处，
称为尖锐共振。

$$A_p = \frac{a_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_{外}^2)^2 + 4\beta^2\omega_{外}^2}}$$

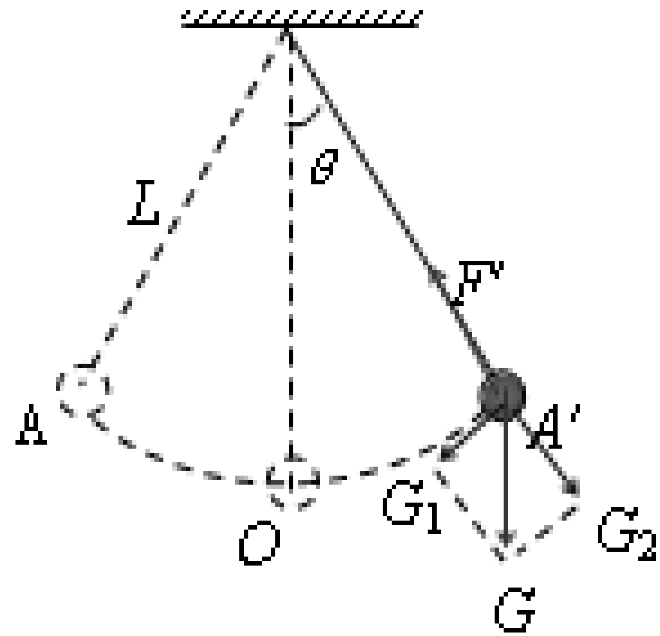
$$\mathrm{tg}\alpha = -\frac{2\beta\omega_{外}}{\omega_0^2 - \omega_{外}^2}$$

$$\therefore \omega_r = \omega_0, \quad A_p \longrightarrow \infty, \; \alpha_r = -\pi/2$$

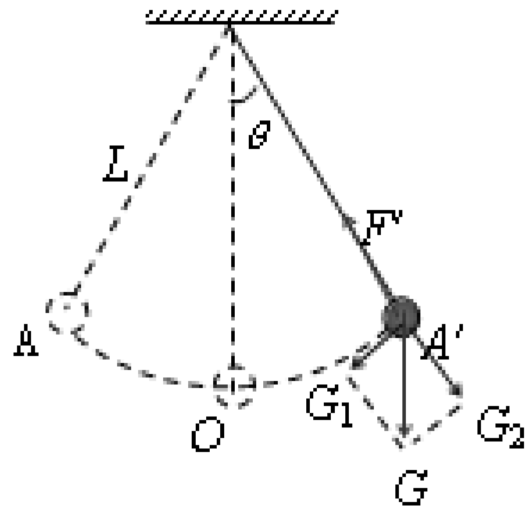
共振时，受迫振动相位落后于强迫力相位π/2，即振动速度与强迫力同位相，那么外力始终对系统作正功，对速度的增大有最大的效率。这正是振动振幅急剧增大的原因 (速度共振)。

但是，随着振幅的增大，阻力的功率也不断增大，最后与强迫力的功率相抵，从而使振幅保持恒定。

单摆的小摆角振动，摆长l, 摆锤质量m,证明是简谐运动，并求周期



单摆的小摆角振动，摆长l, 摆锤质量m,证明是简谐运动，并求周期



$$f_t = -mg\sin\theta \approx -mg\theta$$

小摆角

切向加速度

$$a_t = \frac{dv}{dt} = l\frac{d\omega}{dt} = l\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$F_t = ma_t = ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\theta$$

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l}\theta = 0}$$

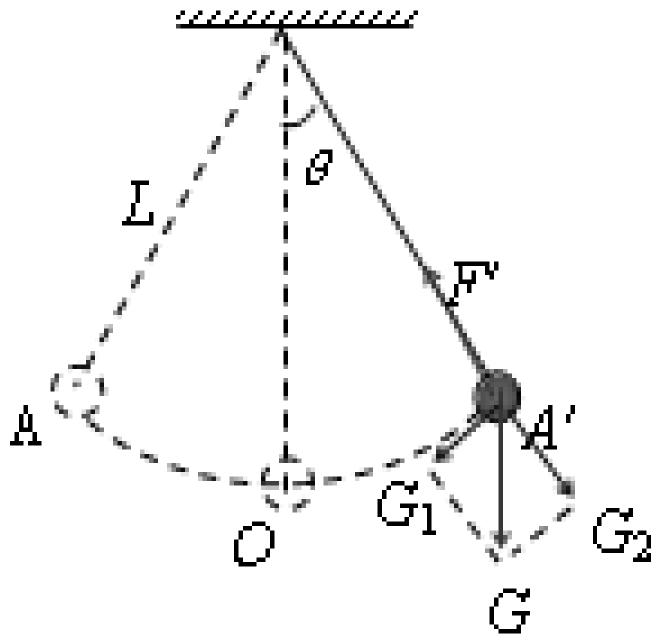
$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

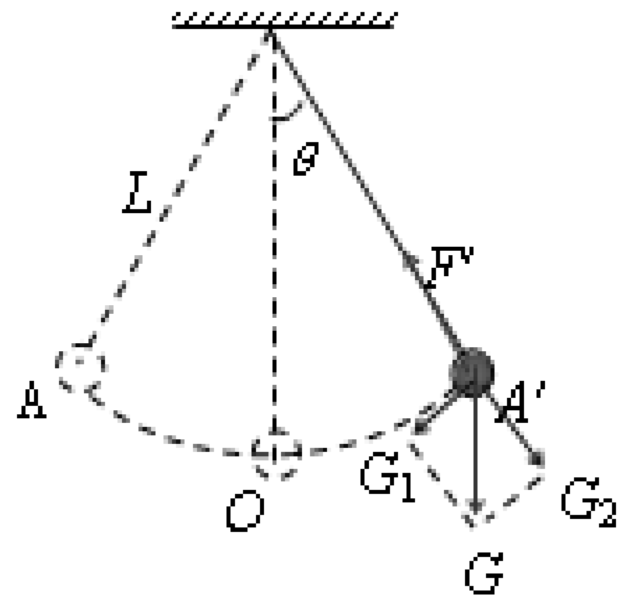
单摆的小摆角振动，摆长l, 摆锤质量m,证明是简谐运动，并求周期

L=1.0m, 初始振幅5^0，经过100s，振幅衰减为4^0。再经过多长时间，振幅衰减为2^0。阻尼系数？ Q值？



单摆的小摆角振动，摆长l, 摆锤质量m,证明是简谐运动，并求周期

L=1.0m, 初始振幅5^0，经过100s，振幅衰减为4^0。阻尼系数？ Q值？再经过多长时间，振幅衰减为2^0。



$$A = A_0 e^{-\beta t} \qquad \theta = \theta_0 e^{-\beta t}$$

$$\beta = \frac{\ln\frac{\theta_0}{\theta_1}}{t} = \frac{\ln\frac{5}{4}}{100} = 2.2*10^{-3}s^{-1}$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}} \qquad Q = \frac{\omega}{2\beta} = \frac{1}{2\beta}\sqrt{\frac{g}{l}} = 712 \qquad \Delta t = \frac{\ln\frac{\theta_0}{\theta_1}}{\beta} = \frac{\ln\frac{4}{2}}{2.2*10^{-3}} = 311s$$

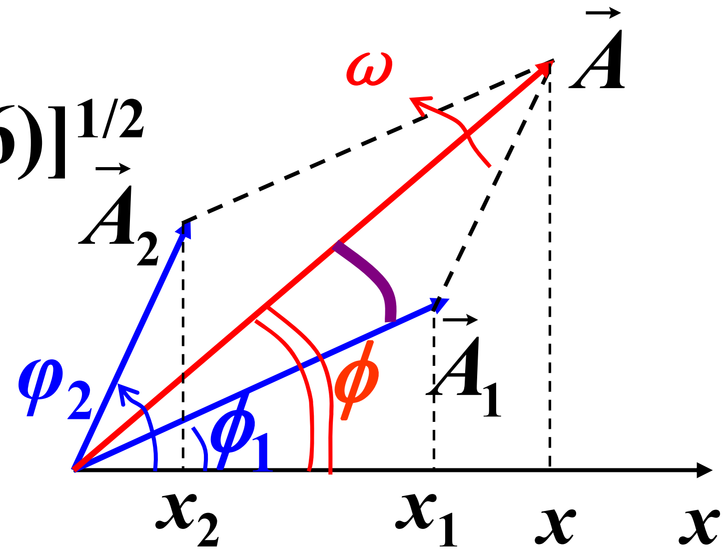
例9.3.1 有两个同方向同频率简谐振动,其合振动振幅为0.2m，合振动的相位与第一个振动的相位之差为π/6，若第一个简谐振动的振幅为0.173m,求：第二个振动的振幅；第二个与第一个振动的相位差。

(方法一).利用公式计算：

根据余弦定理，有

$A_2=[A_1^2+A^2-2A_1\cdot A\cdot Cos(\pi/6)]^{1/2}$

代入数据得：$A_2=0.1m$



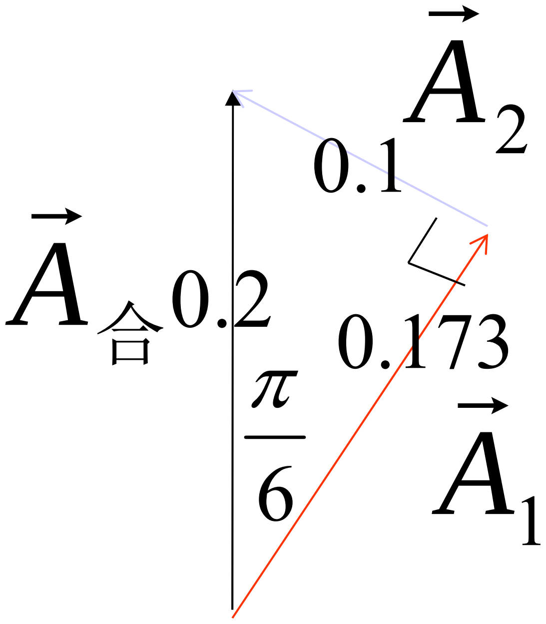
- 根据合振幅表达式：
- $A=[A_1^2+A_2^2+2A_1\cdot A_2\cdot Cos(\varphi_2-\varphi_1)]^{1/2}$
- 代入数据得：$\varphi_2-\varphi_1=\pi/2$

解：(方法二)旋转矢量法

利用旋转矢量法，如图示,

可得第二个谐振动得振幅为**0.1m,**

与第一个谐振动的位相差为 $\frac{\pi}{2}$



三个谐振动方程分别为 $x_1 = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$

$$x_2 = A\cos(\omega t + \frac{7\pi}{6}) \qquad x_3 = A\cos(\omega t + \frac{11\pi}{6})$$

求：(1)画出它们的旋转矢量图。并在同一 ***x-t*** 坐标上画出振动曲线。(2)写出合振动方程。

解：(1).

三个谐振动方程分别为 $x_1 = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$

$x_2 = A\cos(\omega t + \frac{7\pi}{6})$ $x_3 = A\cos(\omega t + \frac{11\pi}{6})$

求：(1)画出它们的旋转矢量图。并在同一 ***x-t*** 坐标上画出振动曲线。(2)写出合振动方程。

解：(1).

$$\boxed{A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\boxed{tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}}$$

$$x_1 = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \qquad x_2 = A\cos(\omega t + \frac{7\pi}{6})$$

$$\boxed{A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \qquad \boxed{tg\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}}$$

$$\boxed{A_{1,2}{}^2 = A^2 + A^2 + 2AA\cos\frac{2}{3}\pi = A^2} \quad \boxed{tg\varphi = \frac{\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2}{\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2} = \frac{\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{7\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{7\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{0 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}} \quad \boxed{\varphi = \frac{5\pi}{6}}$$

$$x_3 = A\cos(\omega t + \frac{11\pi}{6})$$

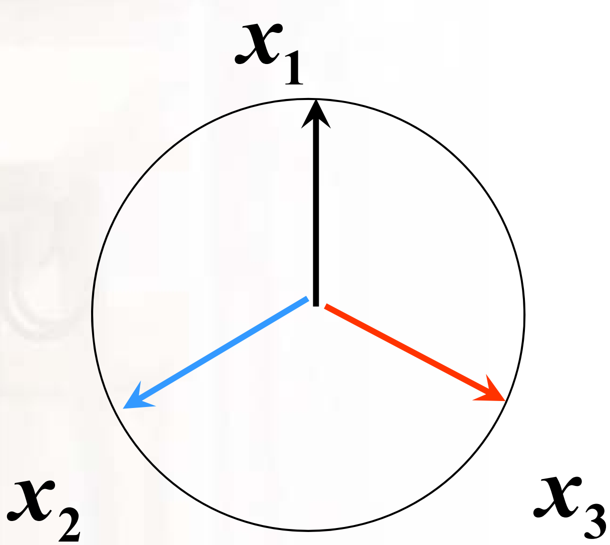
$$\boxed{A_{1,2,3}{}^2 = A^2 + A^2 + 2AA\cos(\frac{11\pi}{6} - \frac{5\pi}{6}) = 2A^2 + 2AA\cos\pi = 0}$$

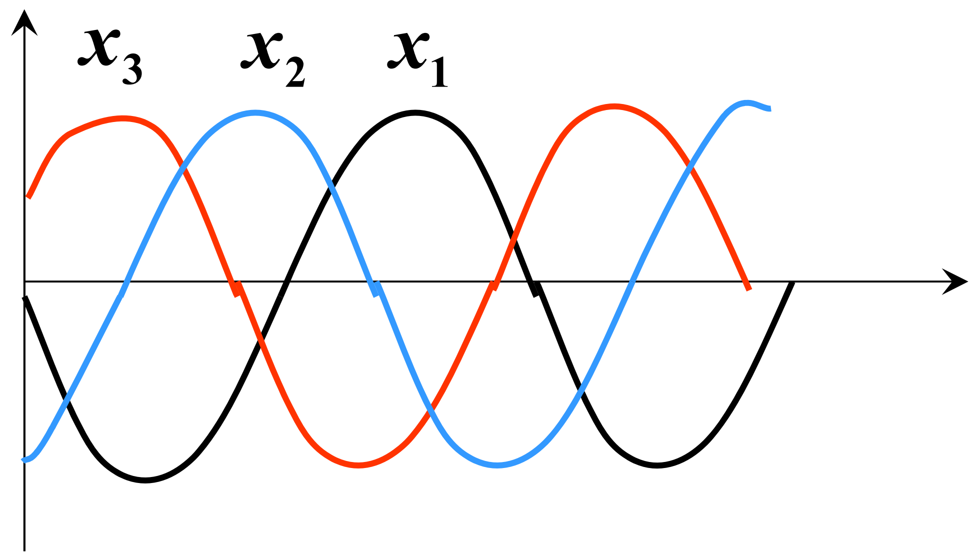
$$\boxed{x = 0}$$

$$x_1 = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$x_2 = A\cos(\omega t + \frac{7\pi}{6})$$

$$x_3 = A\cos(\omega t + \frac{11\pi}{6})$$





例9.3.3.同方向的N个同频率简谐振动，设它们的振幅相等，初相位依次差一个恒量。求合振动。

已知它们的表达式为:

$$x_1(t) = a\cos\omega t$$

$$x_2(t) = a\cos(\omega t + \phi)$$

$$x_3(t) = a\cos(\omega t + 2\phi)$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_N(t) = a\cos[\omega t + (N-1)\phi]$$

解：在ΔOCM中： $A = 2R\sin(N\phi/2)$

在ΔOCP中： $a = 2R\sin(\phi/2)$

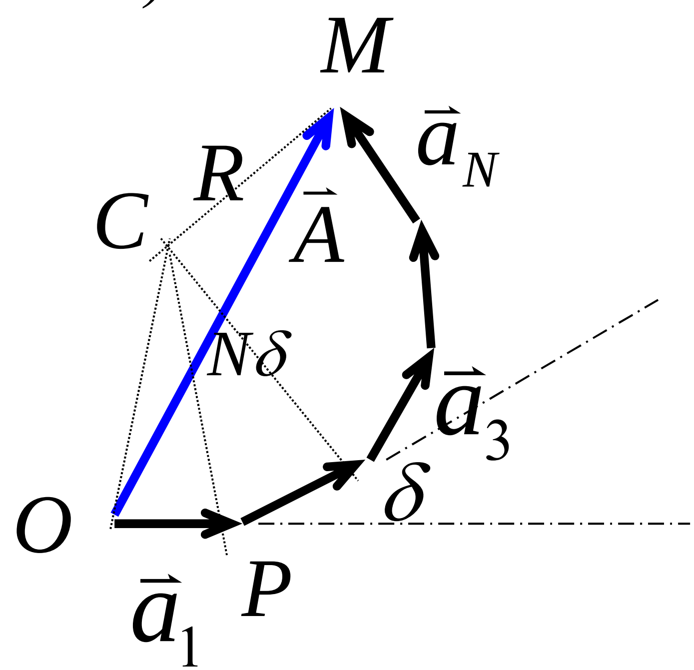
上两式相除得

$$A = a\frac{\sin(N\phi/2)}{\sin(\phi/2)}$$

$\because \angle COM = (\pi - N\phi)/2$

$\because \angle COP = (\pi - \phi)/2$

$\therefore \varphi = \angle COP - \angle COM = (N-1)\phi/2$



所以，合振动的表达式

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) = a\frac{\sin(N\phi/2)}{\sin(\phi/2)}\cos(\omega t + \frac{N-1}{2}\phi)$$

讨论1： 当：$\phi = 2k\pi \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

$$A = \lim a \frac{\sin(N\phi/2)}{\sin(\phi/2)} = Na$$

即各分振动同相位时，合振动的振幅最大。

讨论2： 当：$\boldsymbol{\delta = 2k'\pi / N}$ 且：$\boldsymbol{k' \neq kN}$

$$A = a\frac{\sin(k'\pi)}{\sin(k'\pi/N)} = 0$$

即：$N\phi = 2k'\pi \qquad k' = 1, 2, \cdots N-1, N+1, \cdots$

这时各分振动矢量依次相接，构成闭合的正多边形，合振动的振幅为零。

http://www.animations.physics.unsw.edu.au/jw/SHM.htm

谢谢！