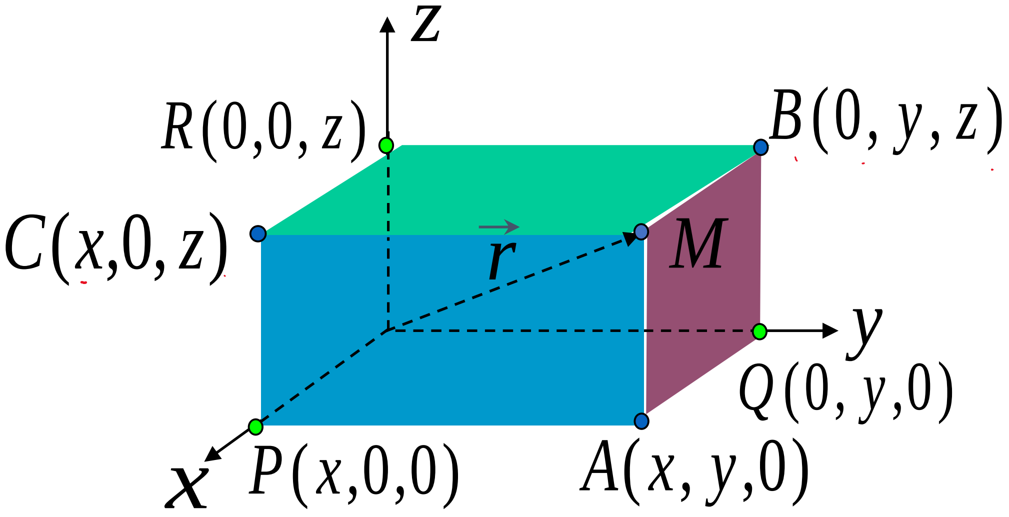
第七章
空间解析几何

一、向量：概念、表示、运算、性质

二、 空间几何：空间直线、 空间曲线

平面、曲面（旋转面、柱面、二次曲面）

方向角: 与三坐标轴的夹角α, β, γ



方向余弦:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{r}|} \quad \cos\beta = \frac{y}{|\vec{r}|} \quad \cos\gamma = \frac{z}{|\vec{r}|}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

单位方向向量: $\vec{r}^{\circ} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

向量关系:

$$\vec{a} // \vec{b} \rightleftarrows \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \rightleftarrows \boxed{\frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z}}$$

$$\boxed{\vec{a} \perp \vec{b} \rightleftarrows \vec{a} \cdot \vec{b} = 0} \rightleftarrows a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$$

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{共面} \rightleftarrows \underline{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0}$$

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0 \quad \checkmark$$

$\vec{c} \perp \vec{a}$

$\vec{c} \perp \vec{b}$

$\Rightarrow \vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

平面内容小结

1. **平面**基本方程: $\vec{n}=(A,B,C)$

一般式 $Ax+By+Cz+D=0 \quad (A^2+B^2+C^2\neq 0)$

点法式 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

截距式 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1 \quad (abc\neq 0)$

三点式 $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$

2. 平面与平面之间的关系

平面1 $\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ 平面2 $\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$

垂直: $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=0 \Longleftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

平行: $\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\vec{0} \Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$

夹角公式: $\cos\theta=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$

3. $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离 $=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

例. 一平面通过两点$M_1(1,1,1)$ 和$M_2(0,1,-1)$, 且垂直于平面 $\prod: x+y+z=0$, 求其方程。

$\overrightarrow{M_1M_2}=(-1, 0, -2)$

设平面法向量为$\vec{n}$, 而平面Π的法向量$\vec{n_\pi}=(1,1,1)$

$\because \vec{n} \perp \overrightarrow{M_1M_2}$

$\vec{n} \perp \vec{n_\pi}$

$\therefore$ 取 $\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{n_\pi}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(2,-1,-1)$

$\therefore$ 平面方程为 $2(x-1)-(y-1)-(z-1)=0$

即 $2x-y-z=0$

例. 求过点$(1,1,1)$且垂直于二平面$x-y+z=7$和$3x+2y-12z+5=0$

的平面方程.

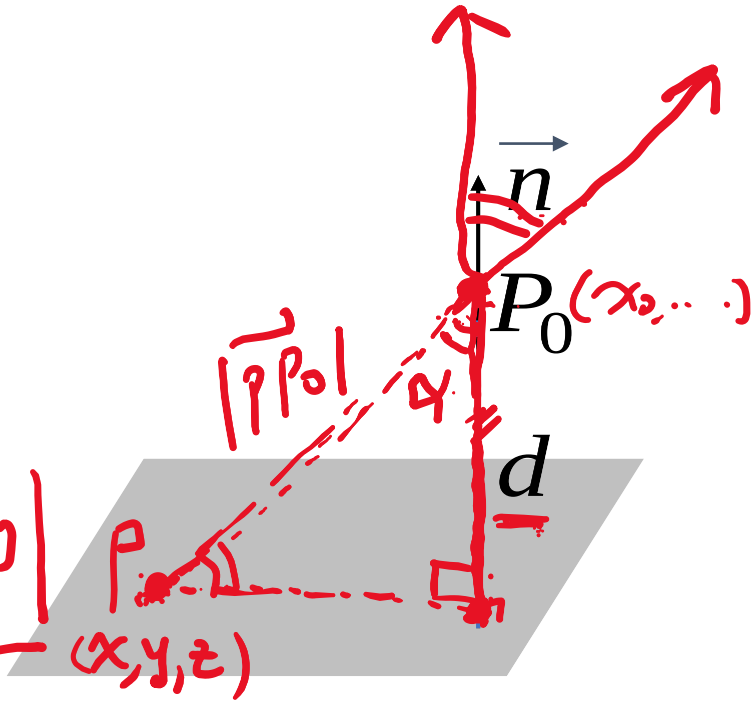
$\vec{n}_1=(1,-1,1)$, $\vec{n}_2=(3,2,-12)$

$$\underline{\underline{\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2}}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -12 \end{vmatrix}=(10,15,5)$$

取 $\vec{n}=(2,3,1)$

$\therefore$ $2(x-1)+3(y-1)+(z-1)=0$ 即. $2x+3y+z-6=0$

例. 设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 外一点, 求 P_0 到平面的距离 d. (点到平面的距离公式)



取 $P(x,y,z)$, 满足 $Ax+By+Cz+D=0$ ✓

$\vec{PP_0}=(x_0-x, y_0-y, z_0-z)$

$\vec{n}=(A, B, C)$.

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{PP_0}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{PP_0}|}=\frac{|A(x_0-x)+B(y_0-y)+C(z_0-z)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot|\vec{PP_0}|}$$

$$=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\ |\vec{PP_0}|}$$

$$\therefore d=|\vec{PP_0}|\cdot\cos\alpha=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

三、空间直线方程

$\vec{v}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$

$(x,y,z)\to f(t)$

一般式、对称式(点向式)、参数式、两直线夹角、线面间的位置关系

$\vec{v}\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, & \vec{n}_1\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, & \vec{n}_2\end{cases}$ —— 直线

$\begin{cases}y=h_1(A,B,\ldots)+h_2(A,B,C,\ldots)\cdot t\\ z=h_3(A,\ldots)+h_4(\cdots)\cdot t\\ x=x_0=t\end{cases}$

$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$

$\vec{n}=$

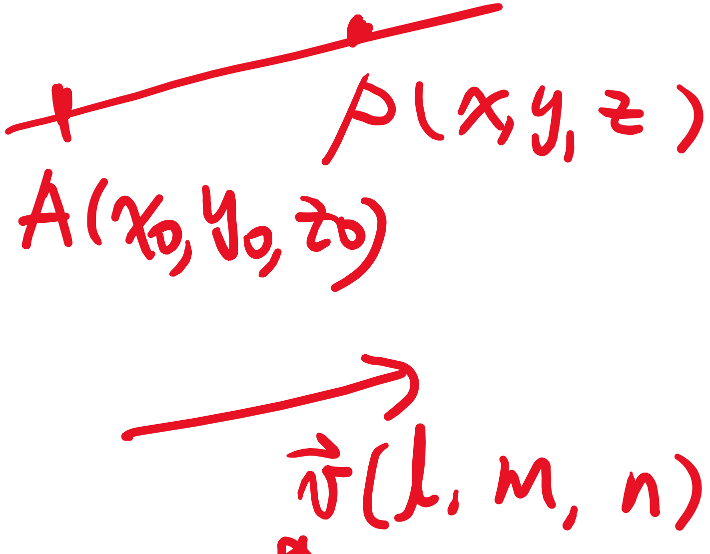
$(A_1\lambda_1+A_2\lambda_2,\ B_1\lambda_1+B_2\lambda_2,\ C_1\lambda_1+C_2\lambda_2)$

平面束.

$\vec{n}_1=(a,b,c)\Rightarrow\lambda_2=k\lambda_1$

$\overrightarrow{AP} \parallel \vec{v}$

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t$$ 点向式



$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases}$$

参数式

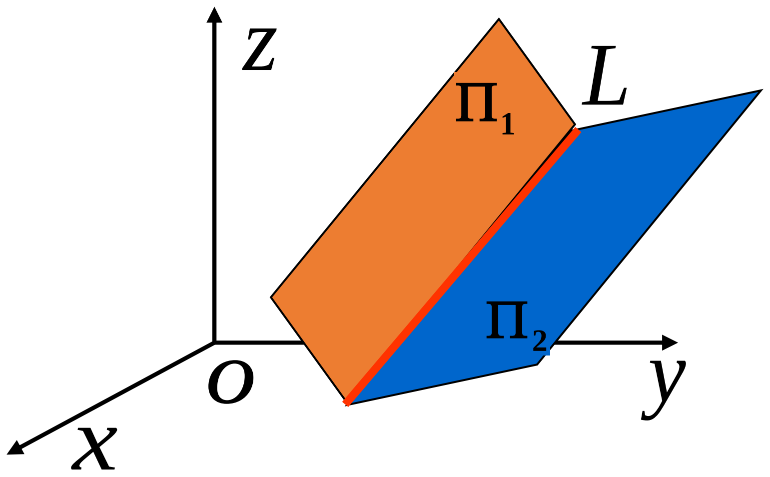
$$\boxed{t\in(\alpha,\beta)}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x=x_0+lt^2 \\ y=y_0+mt \\ z=z_0+nt \end{cases}$$ 曲线

1、 一般式方程：视直线为两平面交线

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

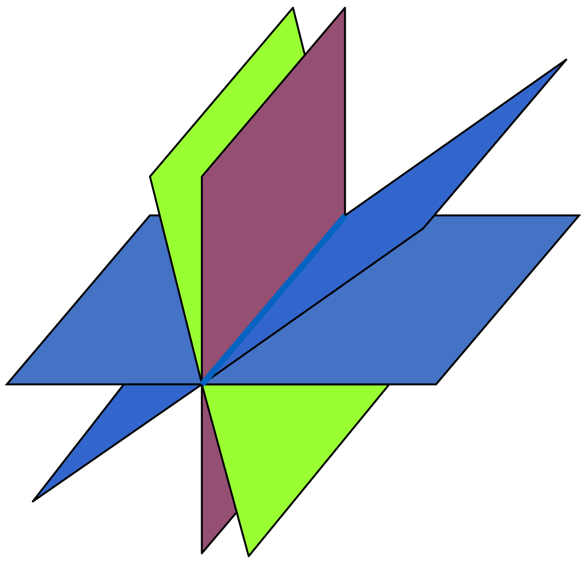
(不唯一)



平面束方程

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)$$
$$+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

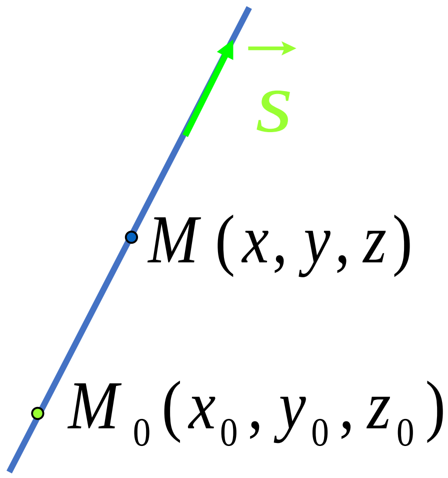
$(\lambda_1,\lambda_2$ 不全为0$)$



2、对称式方程(点向式方程)

已知直线上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$和它的方向向量 $\vec{s} = (m, n, p)$,

设直线上的动点为 $M(x, y, z)$ 则 $\overrightarrow{M_0M} // \vec{s}$



故有 $$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

说明: 某些分母为零时, 其分子也理解为零.

例如, 当 $m = n = 0,\ p \neq 0$ 时, 直线方程为 $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$

3、参数式方程

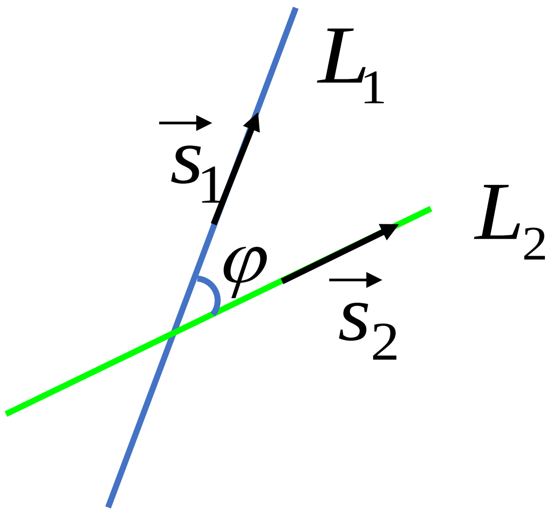
设 $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p} = t$ 得参数式方程 : $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$

4、**两直线的夹角**: 指其方向向量间的夹角(通常取锐角)

设直线 L_1 , L_2的方向向量分别为 $\vec{s_1}=(m_1,\ n_1,\ p_1)$, $\vec{s_2}=(m_2,\ n_2,\ p_2)$

则两直线夹角 φ 满足

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{s_1}\cdot\vec{s_2}|}{|\vec{s_1}||\vec{s_2}|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1{}^2+n_1{}^2+p_1{}^2}\ \sqrt{m_2{}^2+n_2{}^2+p_2{}^2}}$$



特别有:

(1) $L_1\perp L_2 \Longleftrightarrow \vec{s_1}\perp\vec{s_2} \Longleftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$

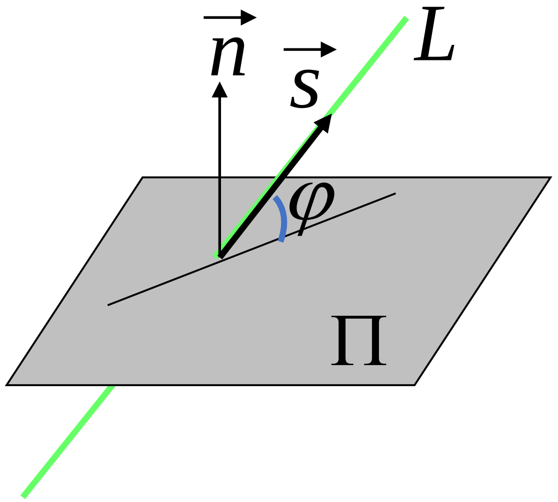
(2) $L_1 // L_2 \Longleftrightarrow \vec{s_1}//\vec{s_2} \Longleftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$

13

5、直线与平面的夹角 φ

当直线与平面不垂直时，直线和它在平面上的投影直线所夹锐角 φ 称为直线与平面间的夹角;

当直线与平面垂直时, 规定其夹角 $\pi/2$.



设直线 L 的方向向量为 $\vec{s}=(m,n,p)$

平面 Π 的法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$

则直线与平面夹角 φ 满足

$$\sin\varphi=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

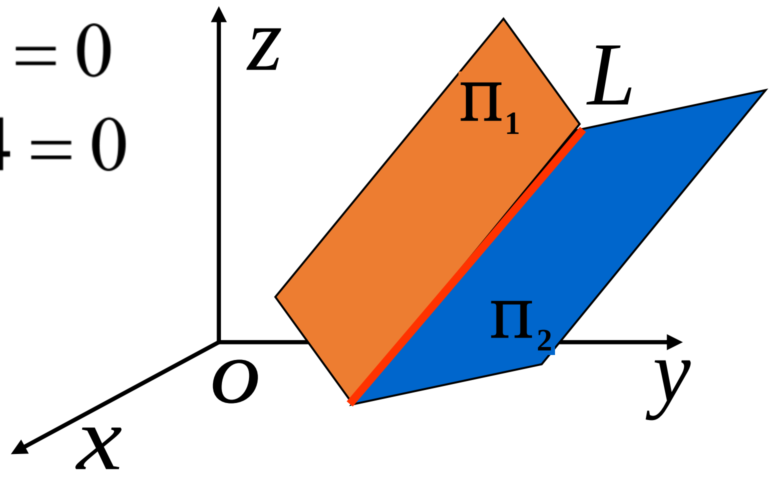
14

特别有:

$$(1)\ L \perp \Pi \Longleftrightarrow \vec{s} \,//\, \vec{n} \Longleftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$$

$$(2)\ L \,//\, \Pi \Longleftrightarrow \vec{s} \perp \vec{n} \Longleftrightarrow Am + Bn + Cp = 0$$

例. 用对称式及参数式表示直线 $\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}$



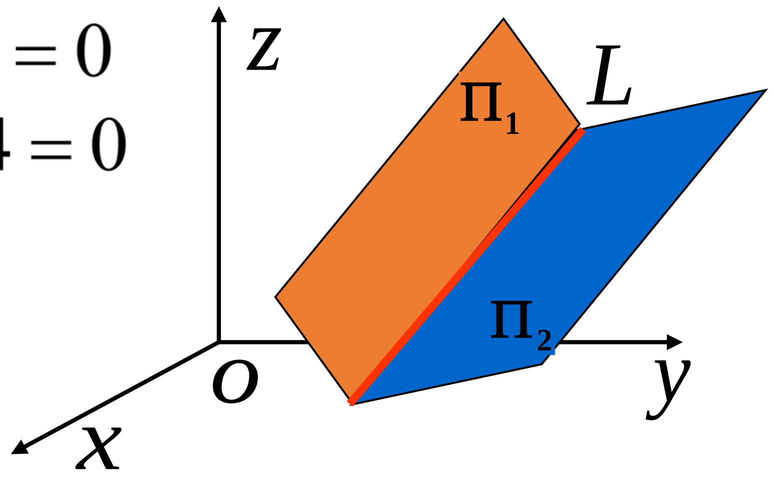
$\vec{n}_1=(1,1,1)$, $\quad \vec{n}_2=(2,-1,3)$

取 $\vec{v}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=(4,-1,-3)$; $\quad \underline{(-4,1,3)}$

令 $x=0$, $\begin{cases} y+z+1=0 \\ -y+3z+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{4} \\ z=-\frac{5}{4} \end{cases}$ $\quad$ 直线上一点 $\underline{\left(0,\frac{1}{4},-\frac{5}{4}\right)}$

$\therefore \dfrac{x-0}{4}=\dfrac{y-\frac{1}{4}}{-1}=\dfrac{z+\frac{5}{4}}{-3} \Rightarrow \begin{cases} x=4t \\ y=\frac{1}{4}-t \\ z=-\frac{5}{4}-3t \end{cases}$, t为参数.

例. 用对称式及参数式表示直线 $\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}$



解 参数化.

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3}(t+5) = -\frac{5}{3} - \frac{1}{3}t \\ y = \frac{2}{3} + \frac{1}{12}t \\ z = \frac{1}{4}t \end{cases}$$

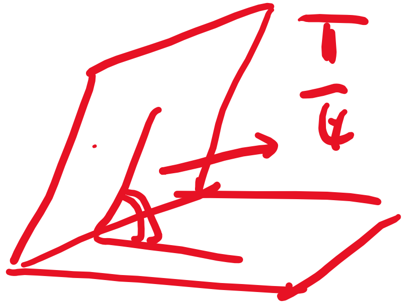
$$\vec{v} = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{12}, \frac{1}{4}\right)$$

$$\vec{v} = (-4, 1, 3)$$

$$3x + 4z + 5 = 0$$

$$\begin{aligned} y &= -1 - x - z \\ &= -1 + \frac{5}{3} + \frac{1}{3}t - \frac{1}{4}t \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{12}t \end{aligned}$$

例. 求过平面 $x+5y+z=0$ 与 $x-z+4=0$ 的交线且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 相交成 $\frac{\pi}{4}$ 角的平面方程。



平面束方程: $\lambda_1(x+5y+z)+\lambda_2(x-z+4)=0 \quad (*)$

$(\lambda_1+\lambda_2)x+5\lambda_1 y+(\lambda_1-\lambda_2)z+4\lambda_2=0$

$\therefore \vec{n}=(\lambda_1+\lambda_2,\ 5\lambda_1,\ \lambda_1-\lambda_2)$ ✓

$\vec{n}_1=(1,-4,-8)$. 由 $\vec{n}$ 与 $\vec{n}_1$ 成 $\frac{\pi}{4}$ 角得.

$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}|} \Rightarrow |\lambda_1+\lambda_2-20\lambda_1-8(\lambda_1-\lambda_2)|=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{1+16+64}\cdot\sqrt{27\lambda_1^2+2\lambda_2^2}$

$\Rightarrow \lambda_2=k\lambda_1$ 代入 $(*)$

例. 求直线 $L_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-4} = \frac{z+3}{1}$ 和 $L_2: \begin{cases} x+y+2=0 \\ x+2z=0 \end{cases}$ 的夹角.

解: 直线 L_1的方向向量为 $\vec{s_1} = (1, -4, 1)$

直线 L_2 的方向向量为 $\vec{s_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2, -2, -1)$

二直线夹角φ 的余弦为 $\cos\varphi = \frac{|1\times 2 + (-4)\times(-2) + 1\times(-1)|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2 + 1^2}\,\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

从而 $\varphi = \frac{\pi}{4}$

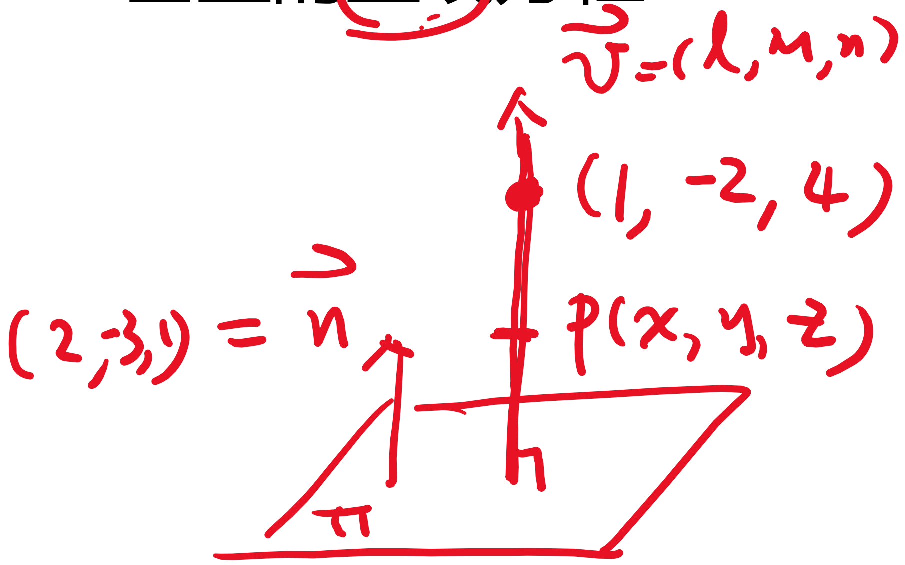
例. 求过点(1, -2 , 4) 且与平面 $2x-3y+z-4=0$ 垂直的直线方程.

$\vec{n} \parallel \vec{v}$

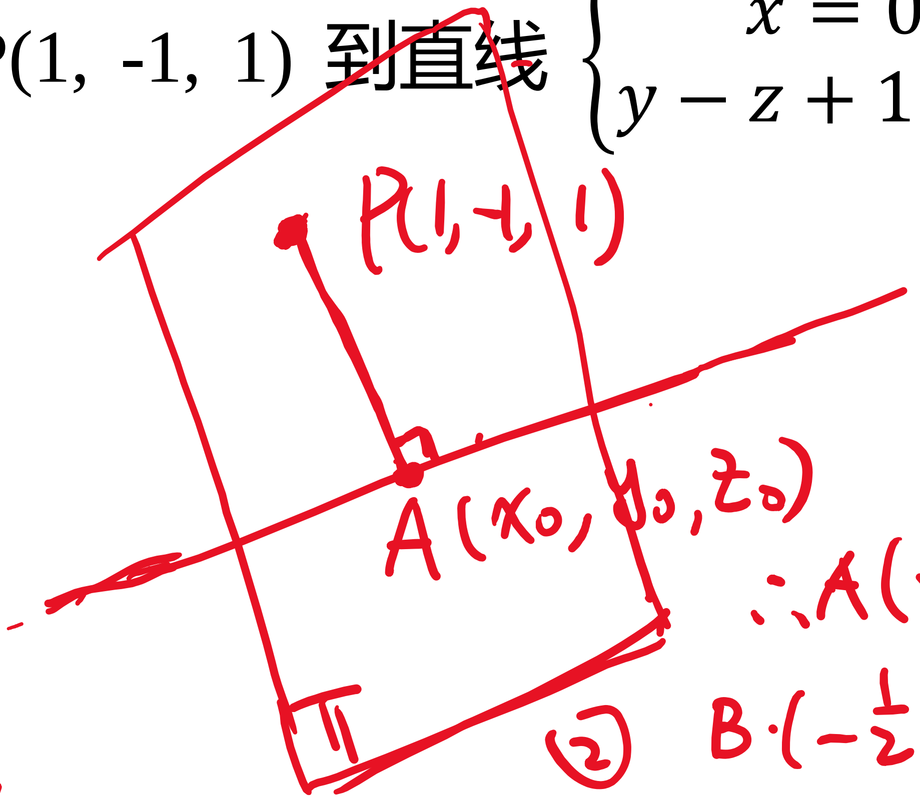
$\vec{n}=(2,-3,1)$

$\vec{v}=(x-1,\ y+2,\ z-4)$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-4}{1}$$



例. 设平面垂直 xoy 面，并过点 P(1, -1, 1) 到直线 $\begin{cases} x=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$ $\vec{l}$ 的垂线，求该平面方程. $(x+2y+1=0)$



(一)

$$Ax+By+D=0$$

$$A\cdot 1+B\cdot(-1)+D=0 \quad ①$$

直线参数方程 $\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=t+1 \end{cases}$，直线上一点 $A(0,t,t+1)$

$\vec{PA}=(1,-1-t,-t)$，$\vec{v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=(0,1,1)$

$\vec{PA}\perp\vec{v} \Rightarrow 1\cdot 0+1\cdot(-1-t)-1\cdot t=0$

$\Rightarrow t=-\frac{1}{2}$

$\therefore A(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

② $B\cdot(-\frac{1}{2})+D=0$

由①② $\Rightarrow x+2y+1=0$

内容小结

1. 空间直线方程

一般式 $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

对称式
(点向式) $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$

参数式 $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases} \quad (m^2 + n^2 + p^2 \neq 0)$

2. 线与线的关系

$$\text{直线}\, L_1\text{:}\ \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}, \quad \vec{s}_1=(m_1,\ n_1,\ p_1)$$

$$\text{直线}\, L_2\text{:}\ \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}, \quad \vec{s}_2=(m_2,\ n_2,\ p_2)$$

$$L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1\cdot\vec{s}_2=0 \Longleftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$$

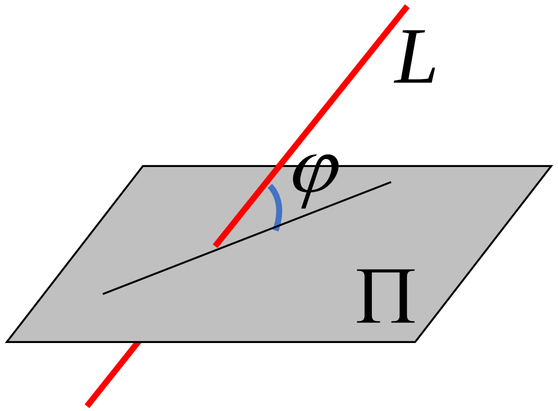
$$L_1 // L_2 \Longleftrightarrow \vec{s}_1\times\vec{s}_2=\vec{0} \Longleftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$$

$$\text{夹角公式:}\ \cos\varphi=\frac{|\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}$$

3. 面与线间的关系

平面 Π: $Ax + By + Cz + D = 0,\ \vec{n} = (A, B, C)$

直线 L: $\dfrac{x - x}{m} = \dfrac{y - y}{n} = \dfrac{z - z}{p},\quad \vec{s} = (m, n, p)$



$$L \perp \Pi \Longleftrightarrow \vec{s} \times \vec{n} = 0 \Longleftrightarrow \frac{m}{A} = \frac{n}{B} = \frac{p}{C}$$

$$L \,//\, \Pi \Longleftrightarrow \vec{s} \cdot \vec{n} = 0 \Longleftrightarrow mA + nB + pC = 0$$

夹角公式: $\sin\varphi = \dfrac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|}$

24