第五节 函数展开成幂级数

一、泰勒级数

上节例题 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\ln(1+x)\quad(-1<x\le 1)$

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 存在幂级数在其收敛域内以$f(x)$为和函数

问题: 1.如果能展开, a_n 是什么?

2.展开式是否唯一?

3.在什么条件下才能展开成幂级数?

定理 1　如果函数 $f(x)$ 在 $U_\delta(x_0)$ 内具有任意阶导数，且在 $U_\delta(x_0)$ 内能展开成 $(x-x_0)$ 的幂级数，

即 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$

则其系数 $a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\qquad (n=0,1,2,\cdots)$

且展开式是唯一的.

证明 $\because \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 在 $u(x_0)$ 内收敛于 $f(x)$,即

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots$$

逐项求导任意次,得

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+\cdots+na_n(x-x_0)^{n-1}+\cdots$$

$$\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(x)=n!a_n+(n+1)n\cdots3\cdot2a_{n+1}(x-x_0)+\cdots$$

令 $x=x_0$, 即得

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\qquad(n=0,1,2,\cdots)$$ 泰勒系数

泰勒系数是唯一的, $\therefore f(x)$的展开式是唯一的.

定义 如果$f(x)$在点x_0处任意阶可导, 则幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$称为$f(x)$在点x_0的泰勒级数.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$称为$f(x)$在点x_0的麦克劳林级数.

问题 $$f(x)\overset{?}{=\!=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

泰勒级数在收敛区间是否收敛于$f(x)$? 不一定.

例如 $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

在$x=0$点任意可导, 且 $f^{(n)}(0)=0 \quad (n=0,1,2,\cdots)$

$\therefore f(x)$的麦氏级数为$\sum\limits_{n=0}^{\infty} 0\cdot x^n$

该级数在$(-\infty,+\infty)$内和函数$s(x)\equiv 0.$ 可见

除$s=0$外, $f(x)$的麦氏级数处处不收敛于$f(x)$.

定理 2 $f(x)$在点x_0的泰勒级数, 在$U_\delta(x_0)$内收敛于$f(x) \Leftrightarrow$在$U_\delta(x_0)$内$\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$

证明 必要性 设$f(x)$能展开为泰勒级数,

$$\because f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i + R_n(x)$$

$$\therefore R_n(x) = f(x) - s_{n+1}(x), \quad \because \lim_{n\to\infty} s_{n+1}(x) = f(x)$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty}[f(x) - s_{n+1}(x)] = 0;$$

充分性 $\because f(x)-s_{n+1}(x)=R_n(x),$

$$\therefore \lim_{n\to\infty}[f(x)-s_{n+1}(x)]=\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}s_{n+1}(x)=f(x),$

$\therefore f(x)$的泰勒级数收敛于 $f(x)$.

*定理 3 设 $f(x)$在$U(x_0)$上有定义, $\exists M>0$, 对 $\forall x\in(x_0-R,\ x_0+R)$, 恒有 $\left|f^{(n)}(x)\right|\le M$ $(n=0,1,2,\cdots)$, 则 $f(x)$在(x_0-R, x_0+R)内可展开成点x_0的泰勒级数.

证明

$$\because \left|R_n(x)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\right| \le M\frac{\left|x-x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!},$$

$x \in (x_0 - R, x_0 + R)$

$\because \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left|x-x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!}$在$(-\infty,+\infty)$收敛,

$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\left|x-x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!}=0$, 故 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}R_n(x)=0,$

$x \in (x_0 - R, x_0 + R)$

$\therefore$ 可展成点x_0的泰勒级数.

二、函数展开成幂级数

1. 直接法(泰勒级数法)

步骤: (1) 求$a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$;

(2) 讨论 $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ 或 $\left|f^{(n)}(x)\right| \le M$,

则级数在收敛区间内收 敛于 $f(x)$.

例1 将$f(x)=e^x$展开成幂级数.

例2 将$f(x)=\sin x$展开成x的幂级数.

例3 将$f(x)=(1+x)^\alpha\ (\alpha\in R)$展开成$x$的幂级数.

2. 间接法

根据唯一性, 利用常见展开式, 通过变量代换, 四则运算, 恒等变形, 逐项求导, 逐项积分等方法,求展开式.

例如 $\cos x = (\sin x)'$

$$\because \sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

$$\therefore \cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\arctan x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$$

$$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

$$x \in [-1,1]$$

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x}$$

$$= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots$$

$$x \in (-1,1]$$

例4 将$f(x)=\dfrac{x-1}{4-x}$在$x=1$处展开成泰勒级数

($展开成x-1$的幂级数)并求$f^{(n)}(1)$.

几个基本展开式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots, \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots \quad (-1 < x < 1)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \cdots \quad x \in (-1,1]$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \qquad x \in (-1,1)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad x \in (-1,1)$$

思考题

什么叫幂级数的间接展开法?