例1. 当$t=0$时， $x=0, y=1, z=2, x'=e^t\cos t, y'=2\cos t-\sin t, z'=3e^{3t}, \Rightarrow x'(0)=1, y'(0)=2, z'(0)=3,$

切线方程为$\frac{x-0}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{3}$

法平面方程为$x+2(y-1)+3(z-2)=0$, 即$x+2y+3z-8=0$

例2. $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6, G(x,y,z)=x+y+z,$

$m=\begin{vmatrix}2y & 2z\\ 1 & 1\end{vmatrix}\Big|_{(1,-2,1)}=-6, n=\begin{vmatrix}2z & 2x\\ 1 & 1\end{vmatrix}\Big|_{(1,-2,1)}=0,$

$p=\begin{vmatrix}2x & 2y\\ 1 & 1\end{vmatrix}\Big|_{(1,-2,1)}=6,$ 取切向量s=(1,0,-1),得切线方程为$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1}$,法平面方程为$(x-1)-(z-1)=0$,即$x-z=0$.

例3. 设$F(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2-6$,则$\vec{n}=(F_x,F_y,F_z)|_{(1,1,1)}=(4,6,2)$, $u_x|_{(4,6,2)}=\frac{\sqrt{6}}{4}$, $u_y|_{(4,6,2)}=\frac{\sqrt{6}}{2}$, $u_z|_{(4,6,2)}=-2\sqrt{6}$, $\vec{e}=(\frac{\sqrt{14}}{7},\frac{3\sqrt{14}}{14},\frac{\sqrt{14}}{14})$,方向导数为$\frac{\sqrt{6}}{4}\times\frac{\sqrt{14}}{7}+\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{3\sqrt{14}}{14}-2\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{14}}{14}=0.$

例4. 解$f(x,y)=x^2+y^2-1$, $\vec{n}|_{(2,1,4)}=(2x,2y,-1)|_{(2,1,4)}=(4,2,-1)$,切平面方程为$4(x-2)+2(y-1)-(z-4)=0,\Rightarrow 4x+2y-z-6=0$,法线方程为$\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-4}{-1}$.

例5. 设$f(x,y,z)=z^2+x^2+y^2-1$,则切平面方程为$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0$,不妨设$2x_0=t, 2y_0=-t, 2z_0=2t$,则$x_0=\frac{t}{2}, y_0=-\frac{t}{2}, z_0=t$,带入到方程中得$t=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$,切平面方程为$\pm\frac{\sqrt{6}}{3}(x-y+2z)-2=0$.

例6. 曲线的切线方程为$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{-2t}=\frac{z-z_0}{3t^2}$,若与平面平行，则与法向量垂直，故$1-4t+3t^2=0, \Rightarrow t=1,\frac{1}{3}$,共两条。

例7. 根据题意可以得到此切平面方程为$2x-4y+z-5=0$,那么$2-4+b=0, 2-4a-1-3=0, \Rightarrow a=-\frac{1}{2}, b=2$.

例8. 设$f(x,y,z)=z^2+x^2+2y^2-\frac{5}{2}$,切平面方程为$2x_0(x-x_0)+4y_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0$,则$\frac{2x_0}{1}=\frac{4y_0}{-1}=\frac{2z_0}{1}=t, \Rightarrow x_0=\frac{t}{2}, y_0=-\frac{t}{4}, z_0=\frac{t}{2}, \Rightarrow t=\pm2$,切面方程为$\pm2(x-y+z)-5=0$.

椭球面上任意一点的法向量为$(2x,4y,2z)$,只要令$2x:4y:2z=1:-1:1$,带入到原方程中，得$(x=1,y=-\frac{1}{2},z=1)$或$(x=-1,y=\frac{1}{2},z=-1)$,即为这两点，通过计算可知$(x=1,y=-\frac{1}{2},z=1)$最远，$(x=-1,y=\frac{1}{2},z=-1)$最近。