一元函数积分学

$$\downarrow$$

$$\text{多元函数积分学}\begin{cases}\text{重积分}\\ \text{曲线积分}\\ \text{曲面积分}\end{cases}$$

第九章　重 积 分

一、二重积分的 定义、可积性条件、性质

二、二重积分的 计算：

直角坐标系、极坐标系、相互转化

三、三重积分的 定义、性质

四、三重积分的 计算

五、重积分的应用：

曲面面积、物体重心、平面薄板的转动惯量

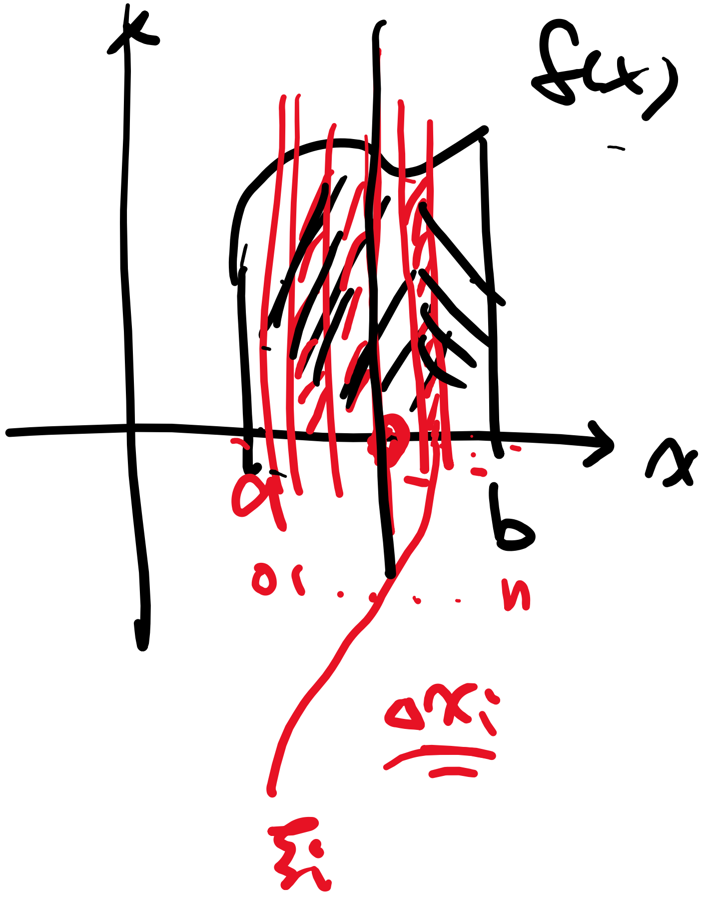
$\int_a^b f(x)dx$ $z = f(x, y)$.

① 分割 (划分).

② 近似、 $f(\xi_i)\Delta x_i$

③ 求和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

④ 求极限 $n \to \infty$ $\lim_{d_m \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$



$d = \|\Delta x_i\|$

$d_m = \max\{\Delta x_i\}$

第一节 二重积分的概念与性质

一、引例： 曲面柱体的体积、平面薄片的质量

二、二重积分的定义与可积性

三、二重积分的性质

$$F(x,y,z)=0 \quad \begin{cases} x = x(y,z) \\ y = y(x,z) \\ z = z(x,y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1$$

$$x = x(t)$$

$$\int f(x)\,dx = \int f(x(t))\,\boxed{x'}\,dt$$

$$\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1.$$

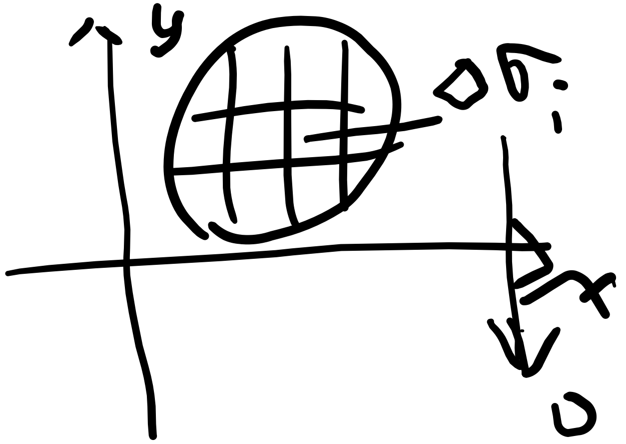
$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1.$$

$$\left(-\frac{F_y}{F_x}\right)\left(-\frac{F_z}{F_y}\right)\left(-\frac{F_x}{F_z}\right) = -1$$

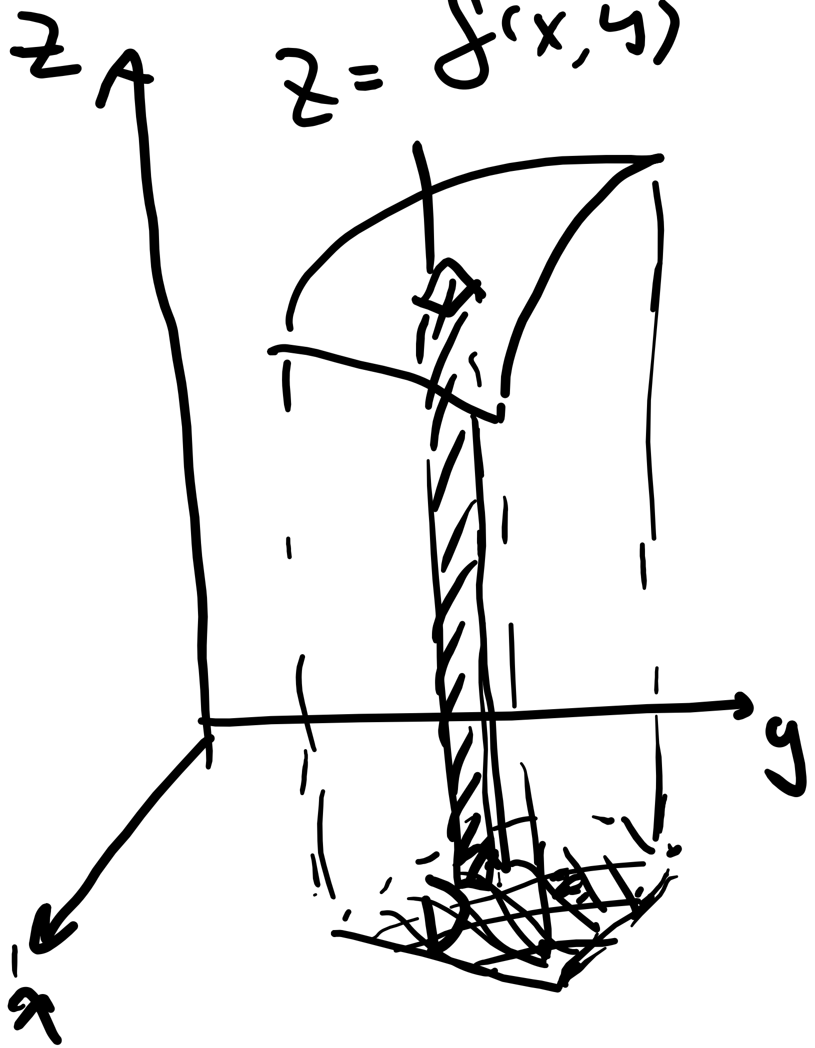
$$y = y(x)$$

$$x = x(y) = y^{-1}(x)$$

一、引例



1. 曲顶柱体的体积

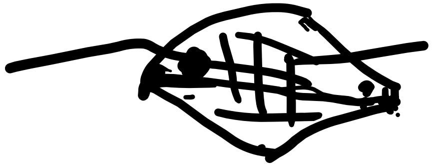


① 分割

② 近似 $v_i = f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

③ 求和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$

④ 取极限 $n\to\infty$ $\lim\limits_{d_{max}\to 0}\sum_{i=1}^{n} f\Delta\sigma_i$ (ξ_i,η_i)

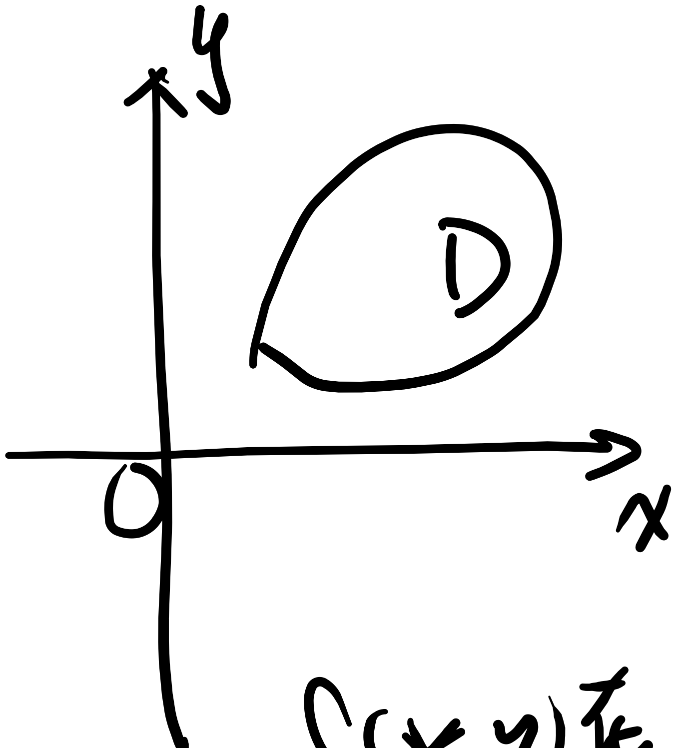


$\Delta\sigma_i$

$d=\|\Delta\sigma_i\|$

$$\lim_{d_{max} \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta\sigma_i$$

$$= \iint_{D} f(x, y)\, d\sigma$$



$z = f(x, y)$ 在 xoy 上的投影

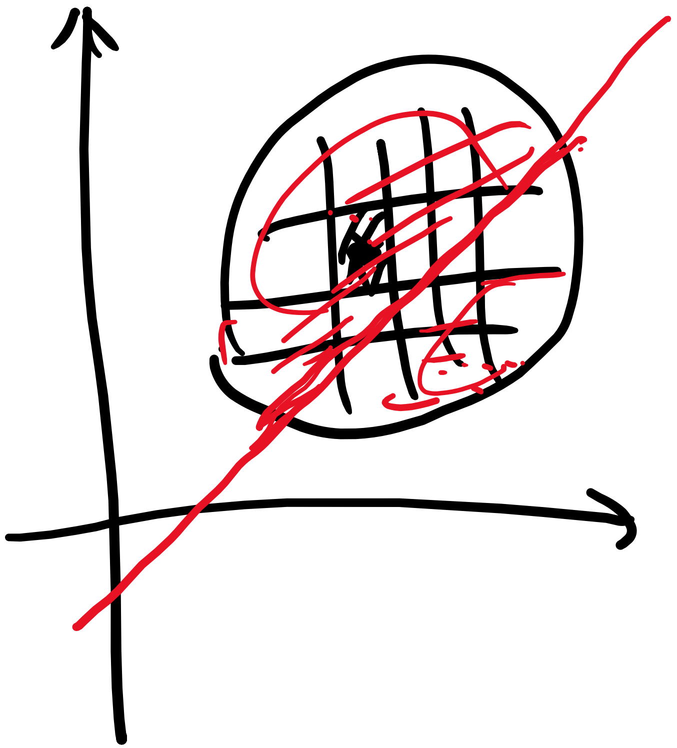
2. 非均匀平面薄片的质量

$\mu(x,y)$

$$\lim_{d_{max}\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mu(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta\sigma_i$$

$$=\iint_D \mu\, d\sigma$$

$$d=\|\Delta\sigma_i\|$$



两个问题的**共性**：

(1) 解决问题的步骤相同： “大化小, 常代变, 近似和,取极限”

(2) 所求量的结构式相同

曲顶柱体体积: $V = \lim_{\|\Delta\sigma\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k$

平面薄片的质量: $M = \lim_{\|\Delta\sigma\| \to 0} \sum_{k=1}^{n} \mu(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k$

二、二重积分的定义

设 $f(x,y)$是定义在有界区域 D上的有界函数, 将区域 D 任意分成 n 个小区域 $\Delta\sigma_k$ $(\mathrm{k}=1,2,\cdots,n)$,任取一点 $(\xi_k,\eta_k)\in\Delta\sigma_k$,

若存在一个常数 I , 使 $I=\lim\limits_{\|\Delta\sigma\|\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k \xlongequal{\text{记作}} \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$

则称 $f(x,y)$**可积**, 称I为 $f(x,y)$ 在D上的二重积分

积分和

$$\iint_D \boxed{f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma}$$

积分表达式

x,y 称为积分变量

积分域

被积函数

面积元素

如果 $f(x,y)$ 在D上可积，可用平行坐标轴的直线来划分区域D，这时 $\Delta\sigma_k = \Delta x_k \Delta y_k$，因此面积元素 $\mathrm{d}\sigma$ 也常记作 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，二重积分记作

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

引例1中曲顶柱体体积:

$$V = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

引例2中平面薄板的质量:

$$M = \iint_D \mu(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D \mu(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

二重积分存在定理: (证明略)

定理1. 若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则 $f(x,y)$ 在 D 上**可积。**

定理2. 若有界函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上除去有限个点或有限个光滑曲线外都连续 ,则 $f(x,y)$ 在 D 上**可积。**

二重积分的几何解释

曲顶柱体的体积

三、二重积分的性质

$\iint\limits_D f\,d\sigma$，$\iint\limits_D g\,d\sigma$ 存在.（f, g 在D上可积）

① 线性性质.

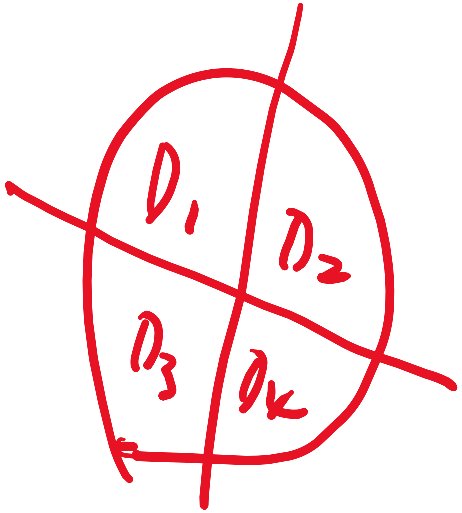
$$\iint\limits_D (k_1 f + k_2 g)\,d\sigma = k_1 \iint\limits_D f\,d\sigma + k_2 \iint\limits_D g\,d\sigma$$

② 积分区域可加性.

$$\iint\limits_D f\,d\sigma = \iint\limits_{D_1+D_2+D_3+D_4} f\,d\sigma$$

$$= \iint\limits_{D_1} f\,d\sigma + \iint\limits_{D_2} f\,d\sigma + \iint\limits_{D_3} f\,d\sigma$$

$$+ \iint\limits_{D_4} f\,d\sigma$$



$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$

③ 保序性：　$f(x,y)\le g(x,y)$

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,d\sigma \le \iint\limits_{D} g(x,y)\,d\sigma$$

$f(x,y)\ge 0$

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\,d\sigma \ge 0$$ 保号性.

闭区域D上连续函数 $f(x,y)$，$\iint_D d\sigma = A$

$$m \le f(x,y) \le M$$

$$mA \le \iint_D m\,d\sigma \le \iint_D f(x,y)\,d\sigma \le \iint_D M\,d\sigma = MA$$

$$m \le \frac{\iint_D f(x,y)\,d\sigma}{A} \le M$$

积分值估计

$f(x,y)=1$. $\iint_D f(x)\,dx = A$ (D的面积)

$$\because \quad m \le \frac{\iint_D f(x,y)\,d\sigma}{A} \le M$$

$$\|$$

$$m \le f(x,y) \le M, \quad (x,y) \in D.$$

$$\therefore \exists (\xi,\eta) \in D \ \text{s.t.} \ f(\xi,\eta) = \frac{\iint_D f(x,y)\,d\sigma}{A}$$

$$\iint_D f(x,y)\,d\sigma = f(\xi,\eta)\cdot A.$$ 积分中值定理.

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a), \ \exists \xi \in (a,b)$$

$$-|f(x,y)| \leq f(x,y) \leq |f(x,y)|$$

$$-\iint_D |f(x,y)|\,d\sigma \leq \iint_D f(x,y)\,d\sigma \leq \iint_D |f(x,y)|\,d\sigma$$

$$\Leftrightarrow \quad \left|\iint_D f(x,y)\,d\sigma\right| \leq \iint_D |f(x,y)|\,d\sigma$$

积分绝对值 ≤ 绝对值的积分

例. 比较下列积分的大小: $\iint_D (x+y)^2 \, d\sigma \le \iint_D (x+y)^3 \, d\sigma$ $\quad F=(x-2)^2+(y-1)^2-2$

其中 $D: (x-2)^2+(y-1)^2 \le 2$

$$(x+y)^2 \le (x+y)^3$$

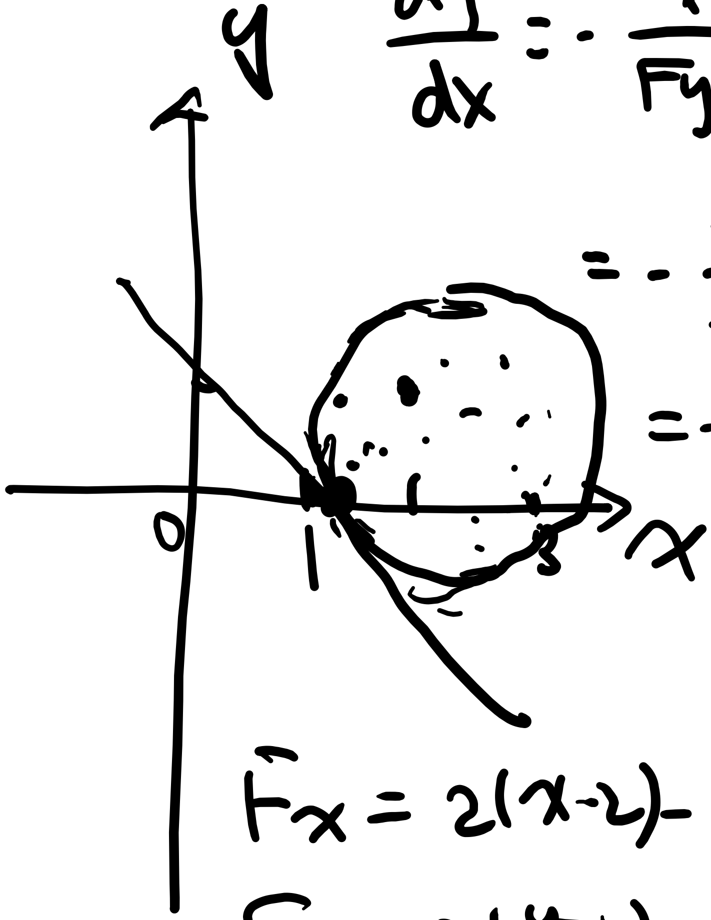
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y}$$

$$= -\frac{-2}{-2}$$

$$= -1$$

$x+y \ge 1$ ✓

$x+y<1$



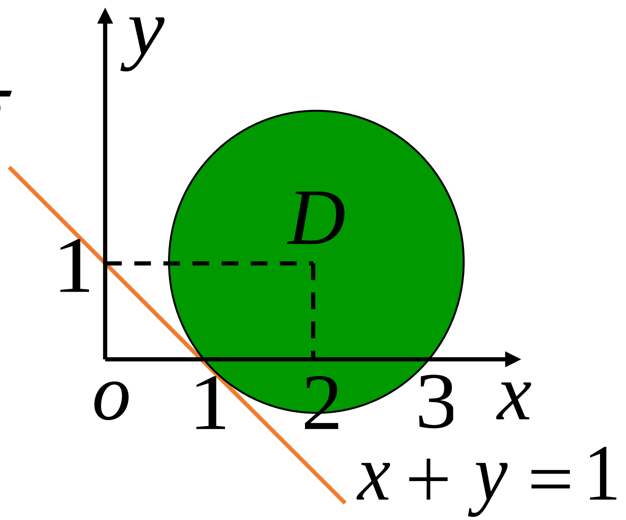
$F_x = 2(x-2)$

$F_y = 2(y-1)$

例. 比较下列积分的大小:

$$\iint_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma\,,\quad \iint_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$$

其中 $D:(x-2)^2+(y-1)^2\le 2$



解: 积分域 D 的边界为圆周

$$(x-2)^2+(y-1)^2=2$$

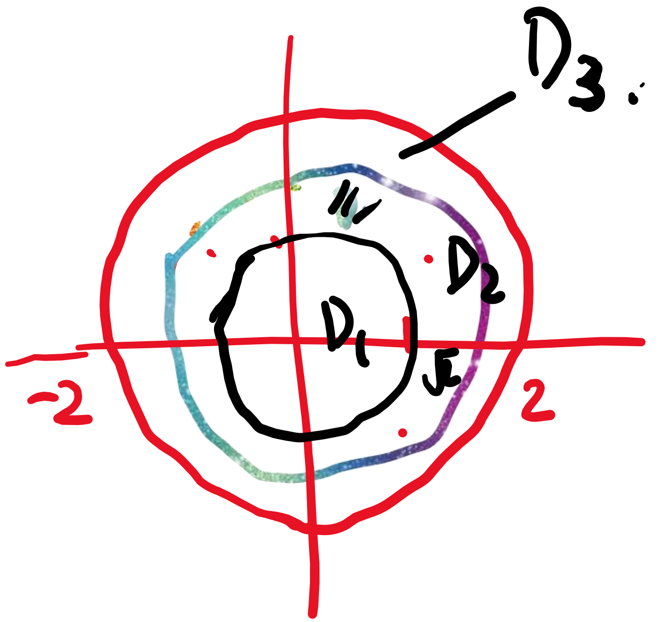
它与 x 轴交于点 $(1,0)$, 与直线 $x+y=1$ 相切. 而域 D 位于直线的上方, 故在 D 上 $x+y\ge 1$, 从而

$$(x+y)^2\le (x+y)^3$$

$$\therefore\quad \iint_D (x+y)^2\,\mathrm{d}\sigma \le \iint_D (x+y)^3\,\mathrm{d}\sigma$$

例. 判断积分 $\iint\limits_{x^2+y^2\le 4} \sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 的正负号.

$2\le x^2+y^2\le 4$



$f(x)\ge 0$, $\iint\limits_{D} f(x)\,d\sigma \ge 0$

$x^2+y^2>1$ $\quad \sqrt{1-x^2-y^2}<0$ $-\sqrt{3}\le f_2\le 0$

$0<x^2+y^2<1$ $\quad \sqrt{1-x^2-y^2}>0$; $0\le f_1\le 1$

$$\iint\limits_{D_1}\sqrt[3]{1-x^2-y^2}\,d\sigma - \iint\limits_{D_2+D_3}\sqrt{x^2+y^2-1}\,d\sigma$$

D: $0\le x^2+y^2\le 4$

D_1 $0\le x^2+y^2\le 1$

D_2 $1\le x^2+y^2\le 2$

$$\le \pi - \iint\limits_{D_3}\sqrt{x^2+y^2-1}\,d\sigma \le \pi - 1\times\pi(2)\le -\pi<0$$

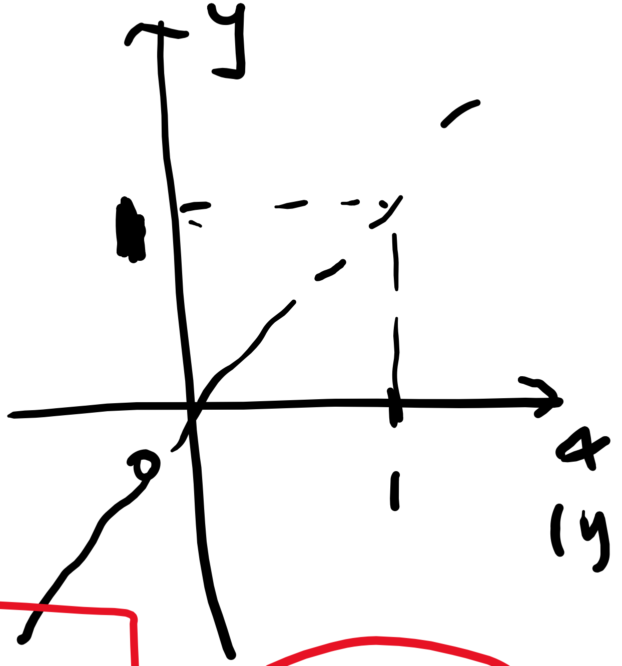
I

例. 证明: $1 \le \iint_D (\sin x^2 + \cos y^2)\,d\sigma \le \sqrt{2}$, 其中$D$ 为 $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$.

$$\iint_D \sin x^2\, d\sigma + \iint_D \cos y^2\, d\sigma$$

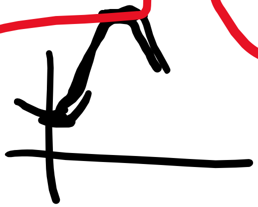
$$= \iint_D \sin x^2\, d\sigma + \iint_D \cos x^2\, d\sigma$$

$$= \iint_D (\sin x^2 + \cos x^2)\, d\sigma \qquad \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2} \le \sin\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right) \le 1}$$



$y = x$

$$= \iint_D \sqrt{2}\sin\left(x^2 + \frac{\pi}{4}\right) d\sigma \Rightarrow 1 \le I \le \sqrt{2}$$



内容小结

1. 二重积分的定义

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma = \lim_{\|\Delta\sigma\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i \quad (\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y)$$

2. 二重积分的性质 (与定积分性质相似)

思考与练习

1. 比较下列两组积分值的大小关系:

$$I_1 = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad I_2 = \iint\limits_{|x|+|y|\le 1} |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad I_3 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |xy|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$I_1 = \iint\limits_D yx^3\,\mathrm{d}\sigma,\quad I_2 = \iint\limits_D y^2x^3\,\mathrm{d}\sigma,\quad I_3 = \iint\limits_D y^{1/2}x^3\,\mathrm{d}\sigma$$

D 是第二象限的一个有界闭域，且 $0 < y < 1$

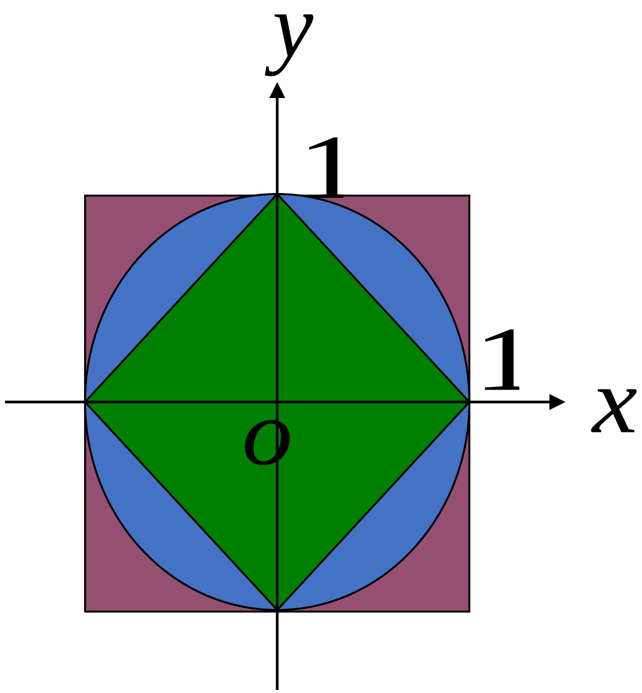
2. 估计 $I = \iint\limits_D \dfrac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$ 的值, 其中 D 为 $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2.$

3. 判断 $\iint\limits_{\sigma\le|x|+|y|\le 1} \ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\ (\sigma > 0)$ 的正负.

思考与练习

1. 比较下列积分值的大小关系:

$$I_1 = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} |xy| \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad I_2 = \iint\limits_{|x|+|y|\le 1} |xy| \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad I_3 = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |xy| \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$



解: I_1, I_2, I_3 被积函数相同, 且非负,

由它们的积分域范围可知

$$I_2 < I_1 < I_3$$

1. 设 D 是第二象限的一个有界闭域，且 $0<y<1$，则

$$I_1=\iint_D yx^3\,\mathrm{d}\sigma,\quad I_2=\iint_D y^2x^3\,\mathrm{d}\sigma,\quad I_3=\iint_D y^{1/2}x^3\,\mathrm{d}\sigma$$

的大小顺序为（ D ）

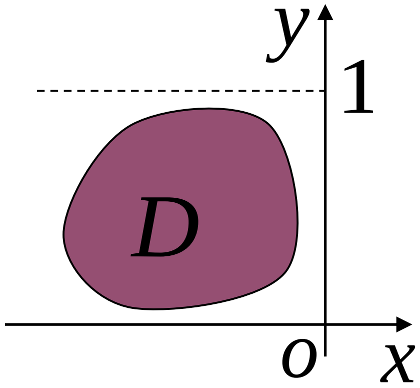
(A) $I_1\le I_2\le I_3$；　　(B) $I_2\le I_1\le I_3$；

(C) $I_3\le I_2\le I_1$；　　(D) $I_3\le I_1\le I_2$.

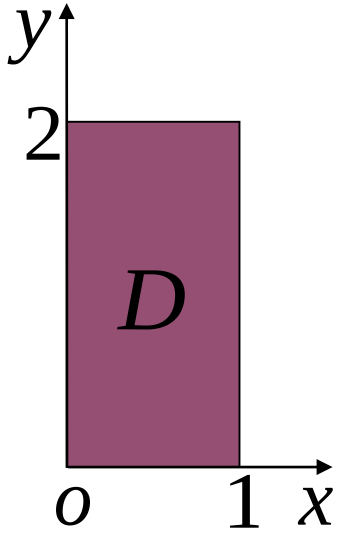
提示: 因 $0<y<1$，故 $y^2\le y\le y^{1/2}$；

又因 $x^3<0$，故在D上有

$$y^{1/2}x^3\le yx^3\le y^2x^3$$



2. 估计 $I=\iint\limits_D \frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{x^2+y^2+2xy+16}}$ 的值, 其中 D 为 $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2.$



解: 被积函数 $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{(x+y)^2+16}}$

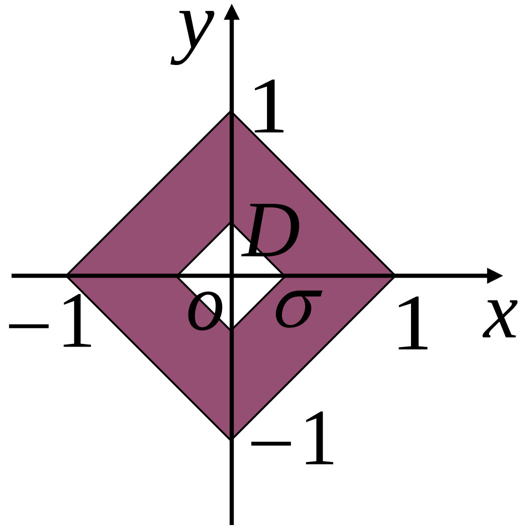
D 的面积 $\sigma=2$

在D上 $f(x,y)$ 的最大值 $M=f(0,0)=\frac{1}{4}$

$f(x,y)$ 的最小值 $m=f(1,2)=\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{1}{5}$

故 $\frac{2}{5}\le I\le\frac{2}{4},\ \therefore\ 0.4\le I\le 0.5$

3. 判断 $\iint\limits_{\sigma \le |x|+|y| \le 1} \ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \ (\sigma > 0)$ 的正负.



解: $\sigma \le |x|+|y| \le 1$ 时,

$$0 < x^2+y^2 \le (|x|+|y|)^2 \le 1$$

故 $\ln(x^2+y^2) \le 0$

$$\iint\limits_{\sigma \le |x|+|y| \le 1} \ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < 0$$

第二节　二重积分的计算法

一、利用直角坐标计算二重积分

二、利用极坐标计算二重积分

三、二重积分的换元法

二重积分的定义

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

x,y 称为积分变量

积分域

被积函数

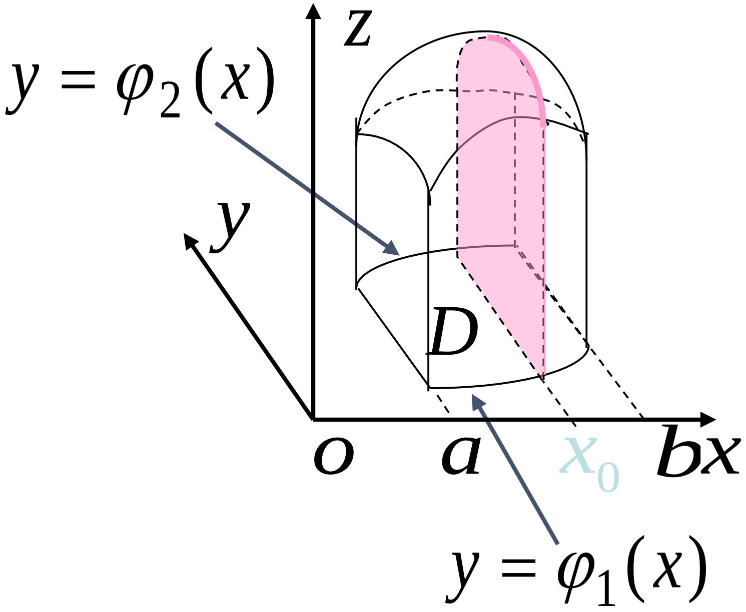
面积元素

几何意义：D上以曲面 $z=f(x,y)\geq 0$ 为顶的曲顶柱体的体积：

$$V=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

曲顶柱体体积的计算

设曲顶柱的底为 $D=\left\{(x,y)\left|\begin{array}{c}\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\\ a\le x\le b\end{array}\right.\right\}$



任取 $x_0\in[a,b]$,平面 $x=x_0$ 截柱体的

截面积为 $A(x_0)=\int_{\varphi_1(x_0)}^{\varphi_2(x_0)} f(x_0,y)\,\mathrm{d}y$

故曲顶柱体体积为

$$V=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma=\int_a^b A(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

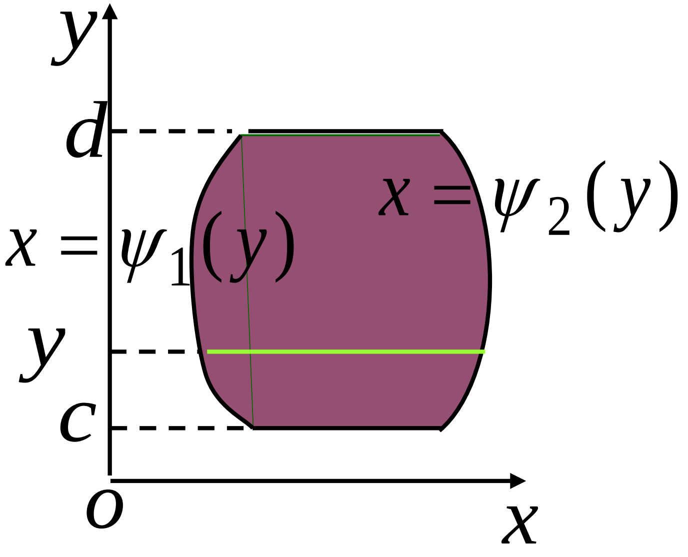
同样, 曲顶柱的底为 $D=\{(x,y)\ |\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y),\ c\le y\le d\}$

则其体积可按如下两次积分计算

$$V=\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_c^d\left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y$$

$$\triangleq\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$



32