例1：求微分方程 $y'' + y' = x^2$的通解。

解：$r^2 + r = 0 \quad \Rightarrow r = 0, r = -1$

$$Y_t = c_1 + c_2 e^{-x} \qquad y^* = x(ax^2 + bx + c)$$

$$y^{*\prime} = 3ax^2 + 2bx + c \qquad y^{*\prime\prime} = 6ax + 2b$$

$$6ax + 2b + 3ax^2 + 2bx + c = x^2$$

$$\Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = -1, c = 2$$

$\therefore$ 方程的通解为 $y = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2 + 2x + c_1 + c_2 e^{-x}$

例2 求方程 $y''-3y'+2y=xe^{2x}$ 的通解.

解 特征方程 $r^2-3r+2=0$,

特征根 $r_1=1,\ r_2=2$,

对应齐次方程通解 $Y=c_1e^x+c_2e^{2x}$,

$\because \lambda=2$ 是单根, 设 $y^*=x(Ax+B)e^{2x}$,

代入方程, 得 $2Ax+B+2A=x$ $\therefore \begin{cases} A=\dfrac{1}{2} \\ B=-1 \end{cases}$,

于是 $y^*=x(\frac{1}{2}x-1)e^{2x}$

原方程通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+x(\frac{1}{2}x-1)e^{2x}$.

例3 写出微分方程 $y''-4y'+4y=6x^2+8e^{2x}$ 的待定特解的形式.

解 设 $y''-4y'+4y=6x^2$ 的特解为 y_1^*

设 $y''-4y'+4y=8e^{2x}$ 的特解为 y_2^*

则所求特解为 $y^*=y_1^*+y_2^*$

$\because r^2-4r+4=0 \quad \therefore$ 特征根 $r_{1,2}=2$

$\therefore y_1^*=Ax^2+Bx+C \quad y_2^*=Dx^2e^{2x}$ （重根）

$$y^*=y_1^*+y_2^* \;=Ax^2+Bx+C+Dx^2e^{2x}.$$

例4 求方程 $y''+y=4\sin x$ 的通解.

解　对应齐方通解 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$,

作辅助方程　$y''+y=4e^{jx}$,

$\because \lambda=i$ 是单根,　故 $y^*=Axe^{ix}$,

代入上式　$2Ai=4$, $\therefore A=-2i$,

$\therefore y^*=-2ixe^{jx}=2x\sin x-(2x\cos x)i$,

所求非齐方程特解为 $y^*=-2x\cos x$, （取虚部）

原方程通解为 $y=C_1\cos x+C_2\sin x-2x\cos x$.

例5 求方程 $y''+y=x\cos 2x$ 的通解.

解 对应齐方通解 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$,

作辅助方程 $y''+y=xe^{2ix}$,

$\because \lambda=2i$ 不是特征方程的根,

设 $y^*=(Ax+B)e^{2ix}$, 代入辅助方程

$$\begin{cases} 4Ai-3B=0 \\ -3A=1 \end{cases} \quad \therefore A=-\frac{1}{3},\ B=-\frac{4}{9}i,$$

$$\therefore y^*=(-\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}i)e^{2ix},$$

$$=(-\frac{1}{3}x-\frac{4}{9}i)(\cos 2x+i\sin 2x)$$

$$=-\frac{1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x-(\frac{4}{9}\cos 2x+\frac{1}{3}x\sin 2x)i,$$

所求非齐方程特解为 $y^*=-\frac{1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x,$

（取实部）

原方程通解为 $\boldsymbol{y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{1}{3}x\cos 2x+\frac{4}{9}\sin 2x.}$

注意 $\boldsymbol{Ae^{\lambda x}\cos\omega x,\ Ae^{\lambda x}\sin\omega x}$

分别是 $Ae^{(\lambda+i\omega)x}$ 的实部和虚部.

例6 求方程 $y''+y=\tan x$ 的通解.

解 对应齐方通解 $Y=C_1\cos x+C_2\sin x$,

用常数变易法求非齐方程通解

设 $y=c_1(x)\cos x+c_2(x)\sin x$,

$$w(x)=1,\qquad \begin{cases} c_1(x)=\sin x-\ln\left|\sec x+\tan x\right|+C_1 \\ c_2(x)=-\cos x+C_2 \end{cases},$$

原方程通解为

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x-\cos x\cdot\ln\left|\sec x+\tan x\right|.$$

例 求欧拉方程

$$x^3y''' + x^2y'' - 4xy' = 3x^2$$ 的通解.

解 作变量变换 $x = e^t$ 或 $t = \ln x$,

原方程化为

$$D(D-1)(D-2)y + D(D-1)y - 4Dy = 3e^{2t},$$

即 $$D^3y-2D^2y-3Dy=3e^{2t},$$

或 $$\frac{d^3y}{dt^3}-2\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}=3e^{2t}. \qquad (1)$$

方程(1)所对应的齐次方程为

$$\frac{d^3y}{dt^3}-2\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}=0,$$

其特征方程 $$r^3-2r^2-3r=0,$$

特征方程的根为 $r_1 = 0, r_2 = -1, r_3 = 3.$

所以齐次方程的通解为

$$Y = C_1 + C_2e^{-t}C_3e^{3t} = C_1 + \frac{C_2}{x} + C_3x^3.$$

设特解为 $y^* = be^{2t} = bx^2,$

代入原方程，得 $b = -\frac{1}{2}.$ 即 $y^* = -\frac{x^2}{2},$

所给欧拉方程的通解为 $y = C_1 + \frac{C_2}{x} + C_3x^3 - \frac{1}{2}x^2.$