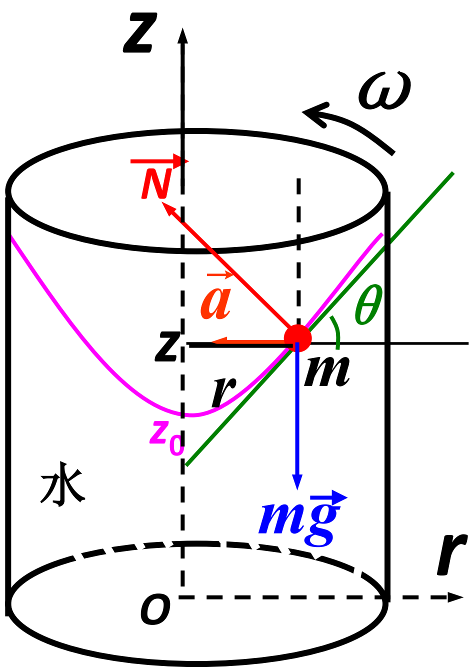
牛顿运动定律的解题步骤：

1. 选研究对象；
2. 看运动情况；
3. 查受力；
4. 选择坐标系；
5. 列运动方程；
6. 解方程；
7. 必要时进行讨论。

例2： 桶绕z 轴转动，ω= const.，水对桶是静止的。

桶的半径R，静止时水的高度h。

求： 水面形状（z - r关系）



解： 1. **选对象：** 任选表面上一小块水为隔离体m；

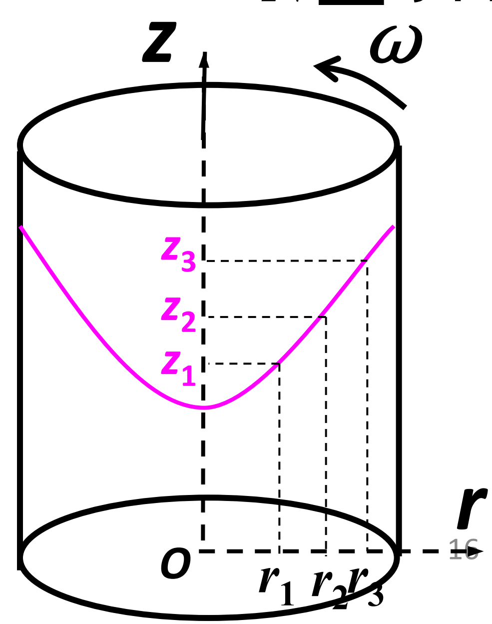
2. **看运动：** m作匀速率圆周运动：

$$a = \omega^2 r$$

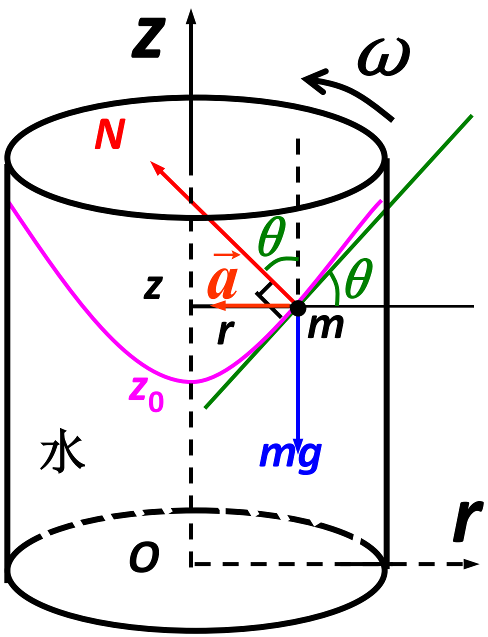
3. **查受力：** 受重力：$m\vec{g}$

及其余水的压力：$\vec{N} \perp$ 水面

4. **建立坐标系：**



5. 列方程：



$$\vec{N}+m\vec{g}=m\vec{a}=-m\omega^2\vec{r}$$

z向：$N\cos\theta-mg=0$ (1)

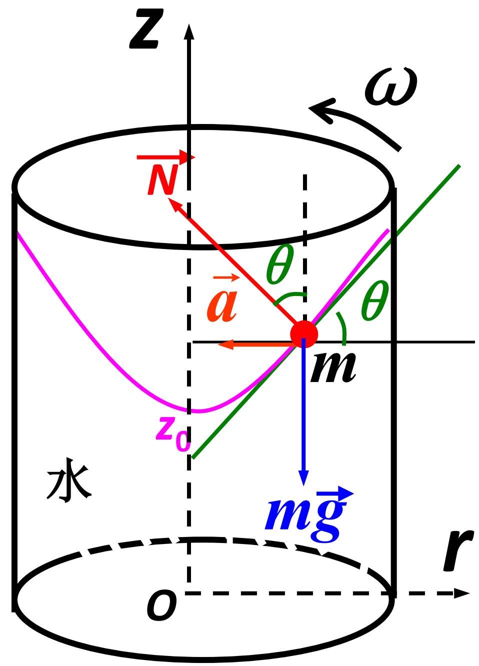
r向：$-N\sin\theta=-m\omega^2 r$ (2)

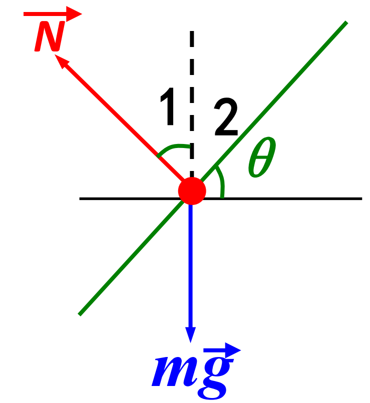
由导数关系：$\mathbf{tg}\,\theta=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}$ (3)

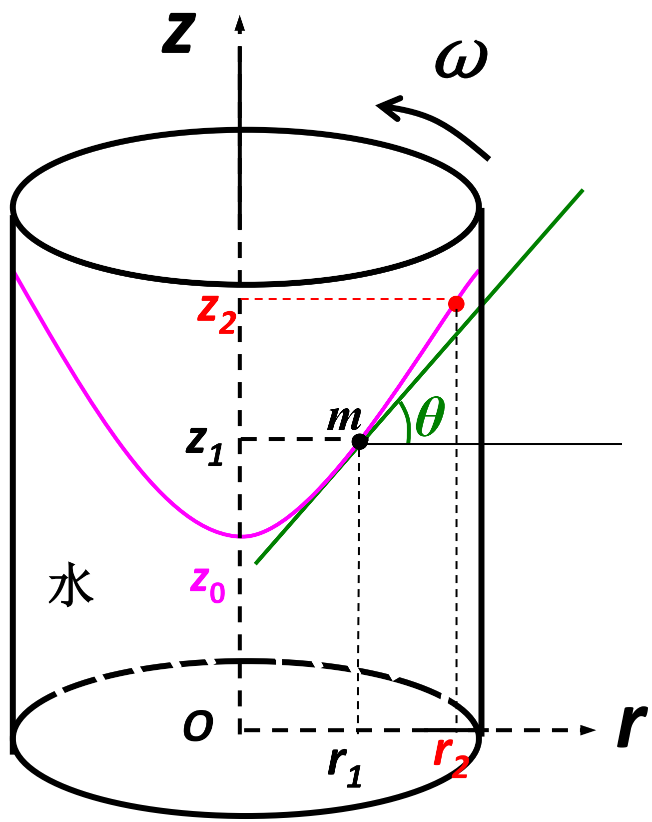
由式(1)(2)(3)得：
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}r}=\frac{\omega^2}{g}r$$

分离变量：
$$\mathrm{d}z=\frac{\omega^2}{g}r\,\mathrm{d}r$$

等号双方积分：$\displaystyle\int_{z_0}^{z}\mathrm{d}z=\int_0^r\frac{\omega^2}{g}r\,\mathrm{d}r$


z
ω
N
θ
a
θ
m
z0
水
mg
r
o


N
1
2
θ
mg



a

解得：

$$z=\frac{\omega^2}{2g}r^2+z_0$$ （旋转抛物面）

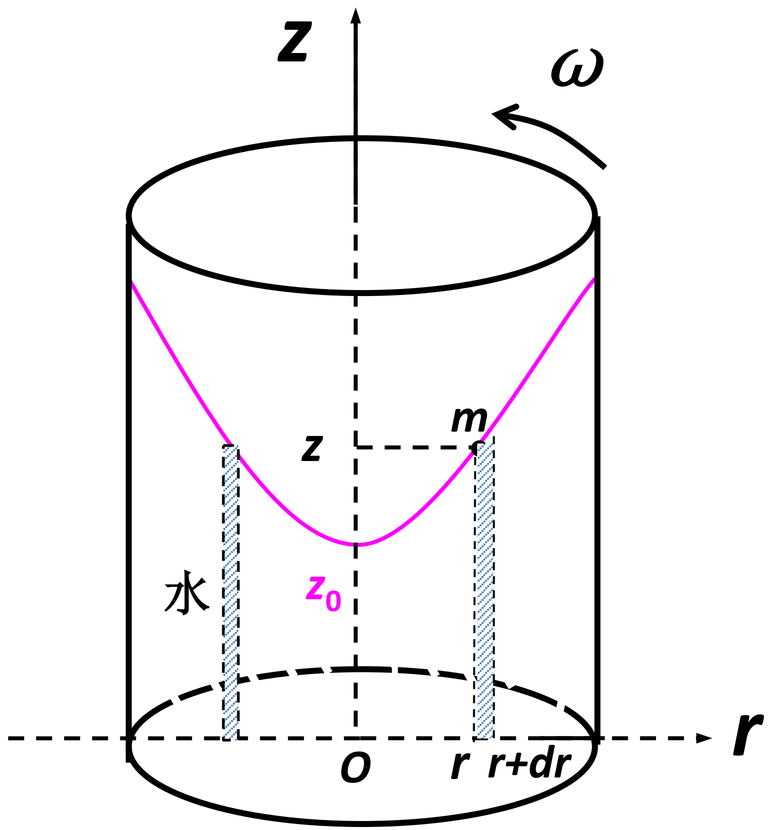
若不旋转时水深为h，桶半径为R ，因旋转前后水的体积不变，有：

$$\int_0^R z\cdot 2\pi\ r\,\mathrm{d}\,r=\pi R^2 h$$

$$\int_0^R\left(\frac{\omega^2}{2g}r^2+z_0\right)2\pi r\,\mathrm{d}\,r=\pi R^2 h$$

解得：

$$z_0=h-\frac{\omega^2R^2}{4g}$$



a

6. 验结果：

$$z=\frac{\omega^2}{2g}r^2+z_0=\frac{\omega^2}{2g}r^2-\frac{\omega^2}{4g}R^2+h$$

验证：

- **量纲的分析：** $[\omega]=1/T^2$， $[r]=m$， $[g]=m/T^2$，

$$[\frac{\omega^2}{2g}r^2]=[\frac{\omega^2}{4g}R^2]=\frac{(1/T^2)\cdot m^2}{m/T^2}=m=[h]\ =[z]$$ 正确。

- **过渡到特殊情形：**

$\omega=0$，有 $z=z_0=h$　　正确

- **看变化趋势：**

r 一定时，$\omega\uparrow\rightarrow(z-z_0)\uparrow$　　合理

习题2.3（1）——（3）

补充：一物体在5s内由静止下落108m，如果阻力正比于速度的大小，求它的极限速度。