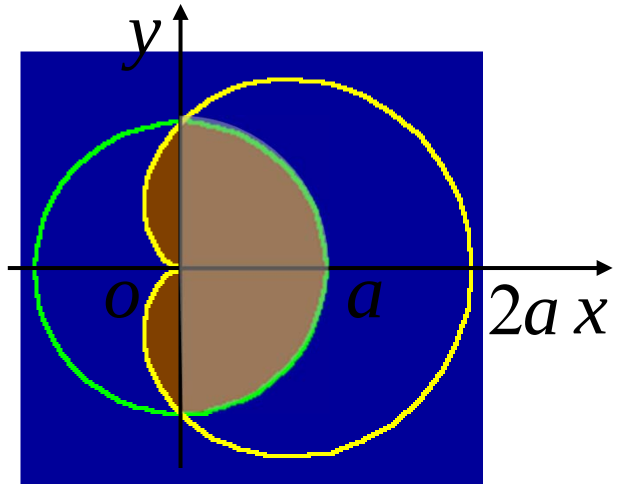
例7. 计算心形线 $r = a(1+\cos\theta)\ (a>0)$ 与圆 $r = a$ 所围图形的面积 .

解: 利用对称性，所求面积

$$A = \frac{1}{2}\pi a^2 + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2} a^2 (1+\cos\theta)^2 \,\mathrm{d}\theta = \frac{5}{4}\pi a^2 - 2a^2$$

$$A = \frac{1}{2}\pi a^2 + 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{a(1+\cos\theta)} \rho \,\mathrm{d}\rho$$

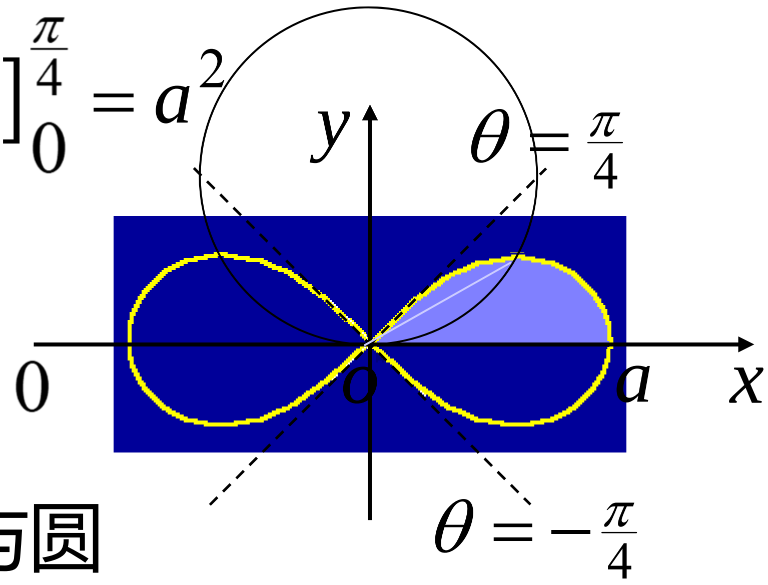
$$= \frac{5}{4}\pi a^2 - 2a^2$$



例8. 求双纽线 $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ 所围图形面积 .

解: 利用对称性 , 则所求面积为

$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} a^2 \cos 2\theta \,\mathrm{d}\theta = a^2 [\sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2$$



$$A = 4\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{a\cos 2\theta\, \mathrm{d}\theta} \rho \,\mathrm{d}\rho = a^2$$

思考: 用二重积分表示该双纽线与圆 $r = a\sqrt{2}\sin\theta$ 所围公共部分的面积 .

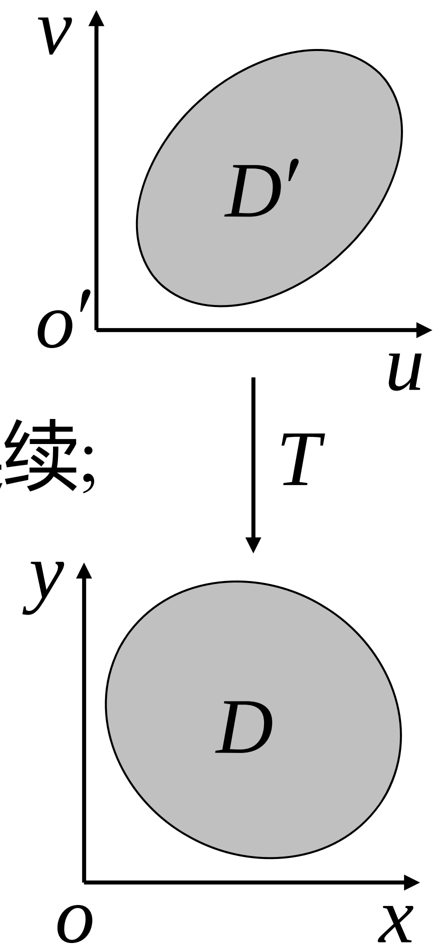
答案: $A = 2\left[\int_0^{\frac{\pi}{6}} a^2 \sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} a^2 \cos 2\theta \,\mathrm{d}\theta\right]$

$$A = 2\int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{d}\theta \int_0^{a\sqrt{2}\sin\theta\, \mathrm{d}\theta} \rho \,\mathrm{d}\rho + 2\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}\cos 2\theta\, \mathrm{d}\theta} \rho \,\mathrm{d}\rho$$

三、二重积分换元法

定理: 设 $f(x,y)$ 在闭域 D 上连续, 变换:

$$T:\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \quad (u,v)\in D' \to D$$



满足 (1) $x(u,v),\ y(u,v)$ 在 D' 上一阶偏导连续;

(2) 在 D' 上 雅可比行列式

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0;$$

(3) 变换 $T: D'\to D$ 是一一对应的 ,

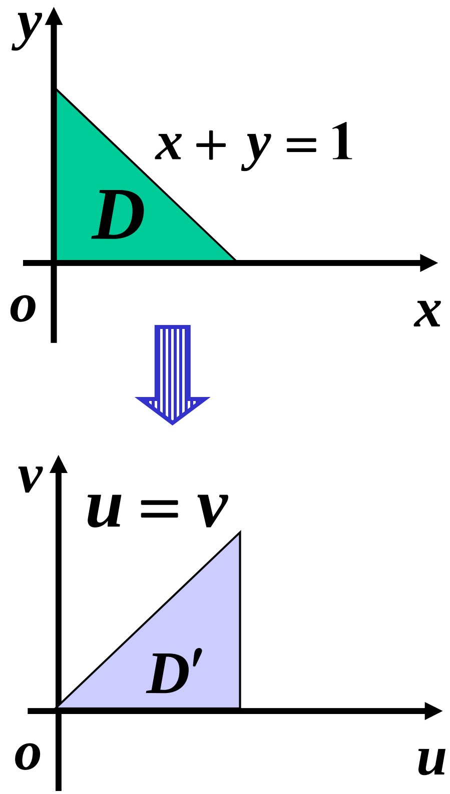
则 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(x(u,v),y(u,v))\left|J(u,v)\right|\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$

例1 计算$\iint\limits_D \frac{y}{x+y} e^{(x+y)^2} d\sigma$，其中 D：$x+y=1$，$x=0$和$y=0$所围成.

令$\begin{cases} u=x+y \\ v=y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=u-v \\ y=v \end{cases}$，

雅可比行列式$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=1$，

变换后区域为



$$D'\text{：}\ x+y=1 \quad \Rightarrow u=1$$

$$x=0 \quad \Rightarrow u-v=0$$

$$y=0 \quad \Rightarrow v=0$$

$$\iint\limits_{D} \frac{y}{x+y} e^{(x+y)^2} d\sigma = \iint\limits_{D'} f(u,v)\,|J|\,dudv$$

$$= \int_0^1 du \int_0^u \frac{v}{u} \cdot e^{u^2} dv = \int_0^1 \frac{u}{2} \cdot e^{u^2} du = \frac{1}{4}(e-1).$$

例2. 试计算椭球体 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$ 的体积V.

解: 取 $D:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$, 由对称性

$$V=2\iint_D z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=2c\iint_D\sqrt{1-\tfrac{x^2}{a^2}-\tfrac{y^2}{b^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

令 $x=a\,r\cos\theta$, $y=b\,r\sin\theta$, 则D 的原象为

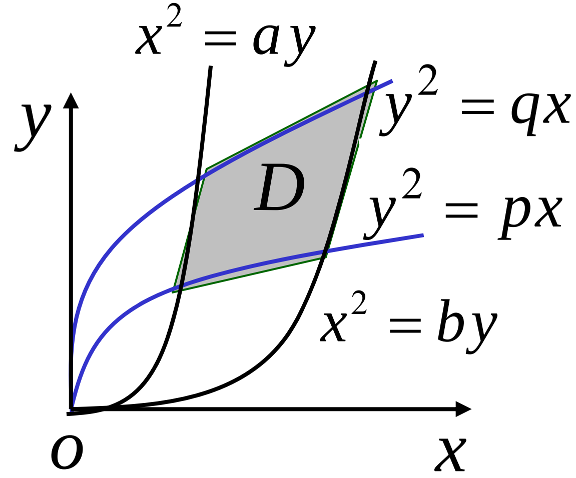
$$D':r\le 1\,,\,0\le\theta\le 2\pi$$

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix} a\cos\theta & -a\,r\sin\theta \\ b\sin\theta & b\,r\cos\theta \end{vmatrix}=a\,b\,r$$

$$\therefore\quad V=2c\iint_{D'}\sqrt{1-r^2}\,a\,b\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=2abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\,\theta\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,r\,\mathrm{d}\,r=\frac{4}{3}\pi abc$$

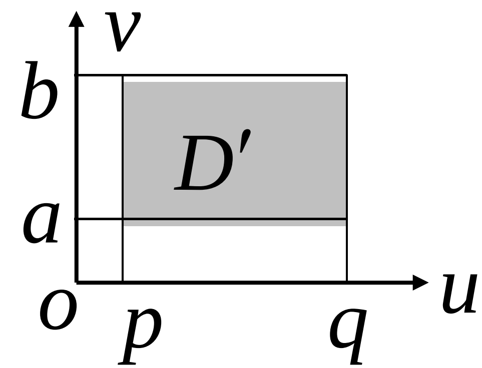
例3. 计算由 $y^2 = px, y^2 = qx, x^2 = ay, x^2 = by$ $(0 < p < q, 0 < a < b)$ 所围成的闭区域 D 的面积 S.



解: 令 $u = \dfrac{y^2}{x}, v = \dfrac{x^2}{y}$, 则

$$D': \begin{cases} p \le u \le q \\ a \le v \le b \end{cases} \longrightarrow D$$

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = -\frac{1}{3}$$



$$\therefore S = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D'} |J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = \frac{1}{3}\int_p^q \mathrm{d}u \int_a^b \mathrm{d}v = \frac{1}{3}(q-p)(b-a)$$

二、小结

1. 作什么变换主要取决于积分区域 D 的形状，同时也兼顾被积函数 $f(x,y)$ 的形式.

基本要求：变换后定限简便，求积容易.

2. $$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}.$$

第三节　三重积分

一、三重积分的概念

二、三重积分的计算

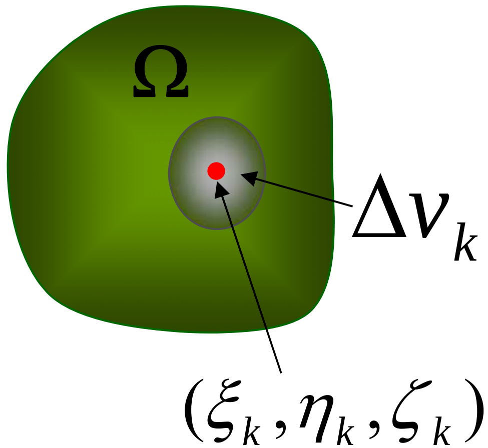
一、三重积分的概念

引例: 设在空间有限闭区域 Ω 内分布着某种不均匀的物质,密度函数为 $\mu(x,y,z)\in C$,求分布在 Ω 内的物质的质量 M .

解决方法: 类似二重积分解决问题的思想, 采用

"大化小, 常代变, 近似和, 求极限"

可得



$$M=\lim_{\|\Delta V\|\to 0}\sum_{k=1}^{n}\mu(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k$$

定义. 设 $f(x,y,z)$, $(x,y,z)\in\Omega$, 若对 Ω 作**任意分割**: $\Delta v_k\ (k=1,2,\cdots,n)$,**任意取点** $(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\in\Delta v_k$,下列 “乘积和式” 极限

$$\lim_{\|\Delta V\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta v_k \overset{\text{记作}}{=\!=\!=} \iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v$$

存在, 则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在Ω上的**三重积分**.

dv称为**体积元素**, 在直角坐标系下常写作 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

性质: 三重积分的性质与二重积分相似. 例如

中值定理. 设 $f(x,y,z)$在有界闭域 Ω 上连续, V 为Ω 的体积, 则存在 $(\xi,\eta,\zeta)\in\Omega$, 使得

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,\mathrm{d}v = f(\xi,\eta,\zeta)V$$

二、三重积分的计算

1. 利用直角坐标计算三重积分

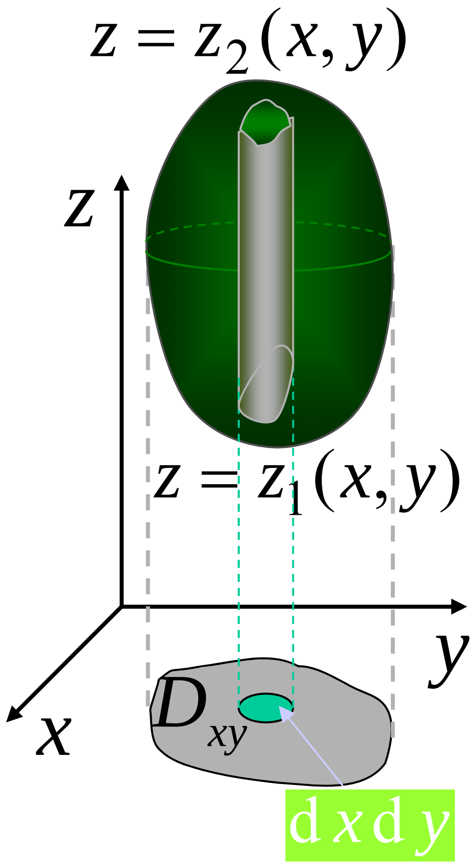
先假设连续函数 $f(x,y,z)\geq 0$, 并将它看作某物体的密度函数，通过计算该物体的质量引出下列各计算方法:

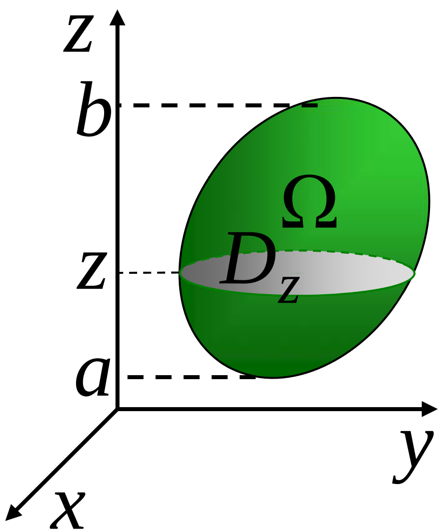
方法1．投影法 (“先一后二”)

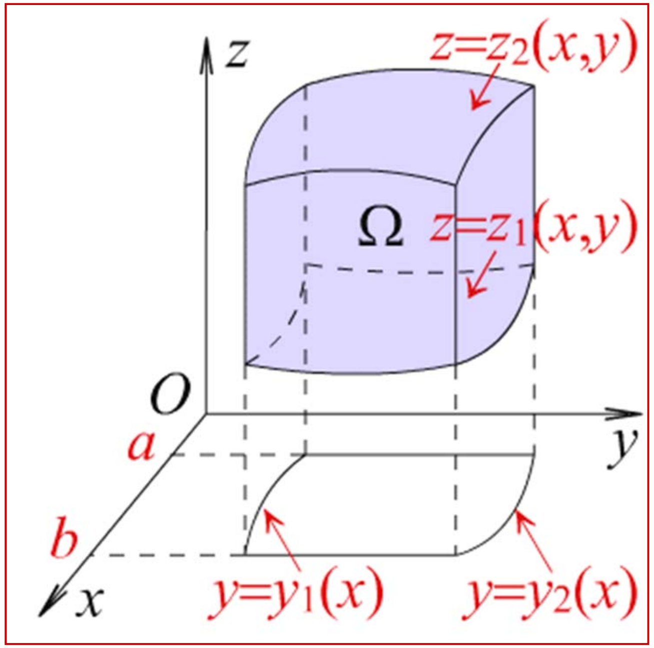
方法2．截面法 (“先二后一”)

方法3．三次积分法

最后, 推广到一般可积函数的积分计算.


$z = z_2(x, y)$
z
$z = z_1(x, y)$
y
x
D_{xy}
d x d y


z
b
Ω
z
D_z
a
y
x


z
$z=z_2(x,y)$
Ω
$z=z_1(x,y)$
O
y
a
b
x
$y=y_1(x)$
$y=y_2(x)$