大学基础物理学

University Fundamental Physics

电子工程系@华东师范大学

李波

2019年

感应电动势：

$$\boxed{\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_m}{dt}}$$

回路动引起的动生电动势$\boldsymbol{\varepsilon}_{动}$

磁场变引起的感生电动势$\boldsymbol{\varepsilon}_{感}$

回路动引起的动生电动势$\varepsilon_{动}$

- 非均匀磁场而且导体各段运动速度不同的情况

$$d\varepsilon = \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

一般公式 $$\varepsilon_{ab} = \int_a^b \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

磁场变引起的感生电动势$\varepsilon_{感}$

在一般情况下,既有静电场,也有感生电场

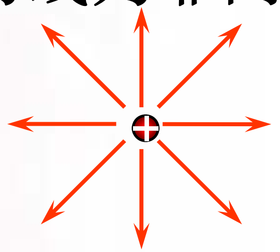
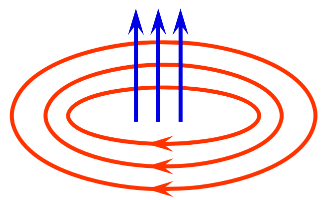
$$\oint_L \vec{E}_{静} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0 \qquad \oint_L \vec{E}_{感} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L (\vec{E}_{静} + \vec{E}_{感}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L \vec{E}_{静} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \oint_L \vec{E}_{感} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L \vec{E}_{感} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

这个公式是关于电场和磁场的又一个普遍的基本规律

感生电场与静电场的区别

	静电场 $\vec{E}$	感生电场 $\vec{E}_{\text{感}}$
起源	由静止电荷激发	由变化的磁场激发
电力线形状	电力线为非闭合曲线 	电力线为闭合曲线 $\vec{E}_{\text{感}}$  $\dfrac{d\boldsymbol{B}}{dt}>0$
电场的性质	为保守场作功与路径无关 $\oint \vec{E}\cdot d\vec{l}=0$	为非保守场作功与路径有关 $\varepsilon_i=\oint \vec{E}_{\text{感}}\cdot d\vec{l}=-\dfrac{d\phi_m}{dt}$
	静电场为有源场 $\oiint \vec{E}\cdot d\vec{S}=\dfrac{\sum q}{\varepsilon_0}$	感生电场为无源场 $\oiint \vec{E}_{\text{感}}\cdot d\vec{S}=0$

➢感生电动势的计算

方法一，由 $\varepsilon = \oint_L \vec{E}_{感} \cdot d\vec{l}$

需先算$\vec{\mathbf{E}}_{感}$

方法二，由 $\varepsilon = -\dfrac{d\phi}{dt}$

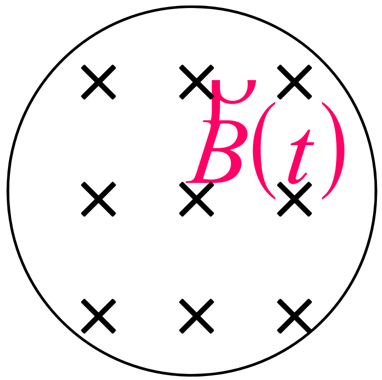
(有时需设计一个闭合回路)

2. 感生电场的计算

$$\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$

当 $\vec{E}_i$ 具有某种对称性才有可能计算出来

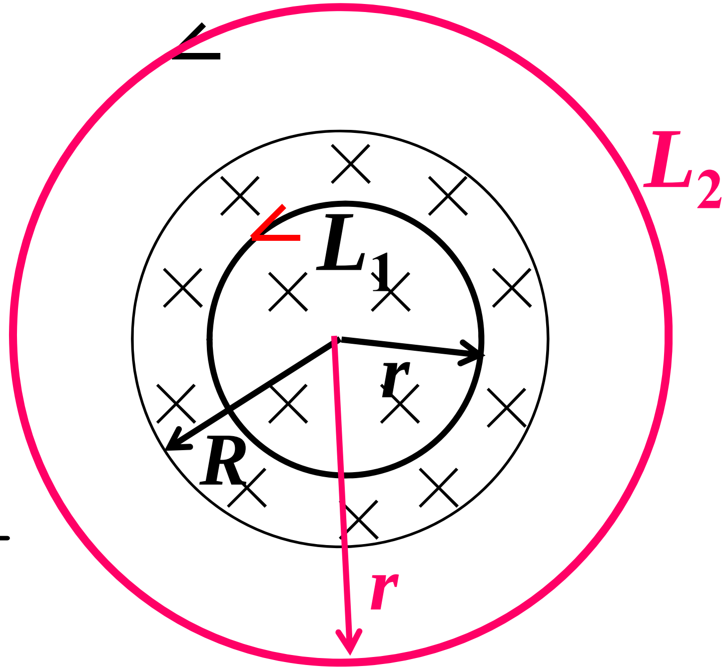
例：空间均匀的磁场被限制在圆柱体内，磁感强度方向平行柱轴，如长直螺线管内部的场。磁场随时间变化，且设dB/dt=C >0，求圆柱内外的感生电场。



则感生电场具有柱对称分布

此 $\vec{E}_i$ 特点：同心圆环上各点大小相同，方向沿圆周切向，且为逆时针

$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = E_i \cdot 2\pi r$$



回路L_1 $r<R$ $\Phi_m = -B \cdot \pi r^2$

$$-\frac{d\Phi_m}{dt} = \pi r^2 \frac{dB}{dt} = \pi r^2 \frac{dB}{dt}$$

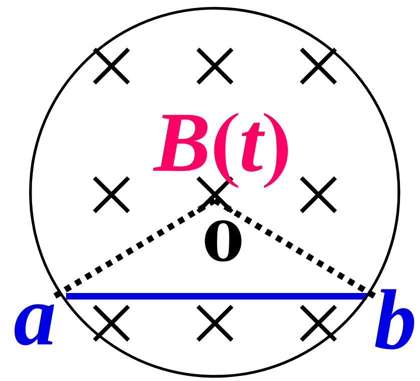
回路L_2 $r>R$ $\Phi_m = -B \cdot \pi R^2$

$$-\frac{d\Phi_m}{dt} = \pi R^2 \frac{dB}{dt} = \pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

线段*ab*内的感生电动势

补上两个半径*oa*和*bo*与*ab*构成回路*obao*

$$\varepsilon_{obao}=\varepsilon_{ob}+\varepsilon_{ba}+\varepsilon_{ao}=-\frac{d\Phi_m}{dt}$$



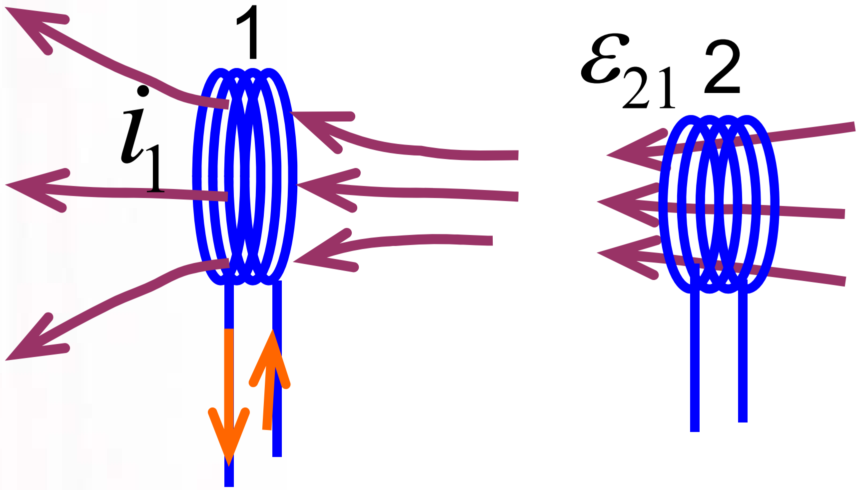
$$\varepsilon_{ao}=0 \qquad \varepsilon_{ob}=0$$

$$\varepsilon_{ba}=-S_{\Delta oab}\frac{dB}{dt}\begin{cases}|\varepsilon|=S_{\Delta oab}\dfrac{dB}{dt}\\ a\longrightarrow b\end{cases}$$

§4 互感和自感

一、互感现象和互感电动势:

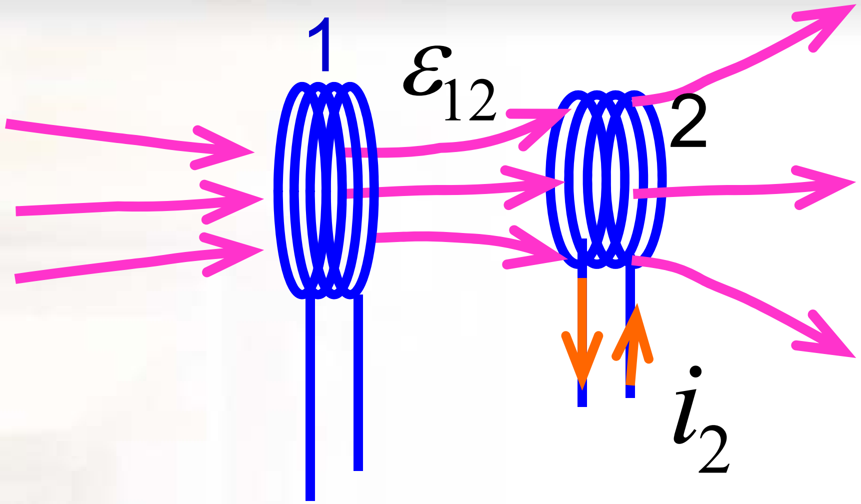
当线圈 1中的电流变化时, 所激发的磁场会在它邻近的另一个线圈 2 中产生感应电动势，这种现象称为互感现象。该电动势叫互感电动势。



$$\Psi_{21} \propto B_1 \propto I_1$$

$$\Psi_{21} = M_{21} i_1$$

$$\varepsilon_{21} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} \qquad \varepsilon_{21} = -M_{21}\frac{di_1}{dt}$$



$$\Psi_{12} = M_{12} i_2$$

$$\varepsilon_{12} = -\frac{d\Psi_{12}}{dt}$$

$$\varepsilon_{12} = -M_{12}\frac{di_2}{dt} \qquad \varepsilon = -M\frac{di}{dt}$$

可以证明，对两个给定的线圈有：$\boxed{\boldsymbol{M_{21} = M_{12} = M}}$

式中“-”表示方向，电流增大感应电流（电动势）与原电流相反；电流减小则感应电流（电动势）与原电流同向。

M 就叫做这两个线圈的互感系数，简称为互感。

1）单位：亨利（H），毫亨（mH），微亨（μH）

2）互感系数为线圈本身的性质，与两线圈中是否通有电流无关，仅与两线圈的几何因素、相对位置和周围介质有关。

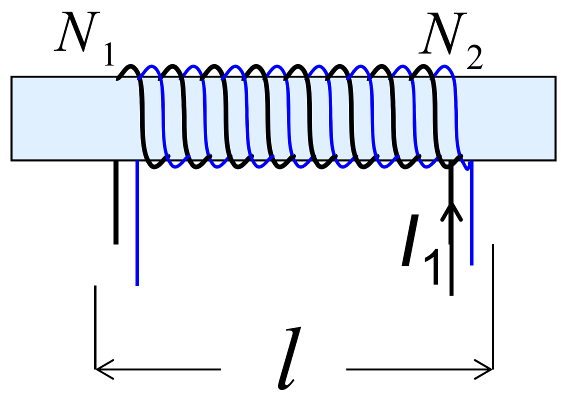
$$M = \frac{\Psi_{12}}{i_2} = \frac{\Psi_{21}}{i_1}$$

为算M，给线圈1或2通电均可

到底给谁通电?

当然是选择最方便的。

例：计算同轴螺线管的互感



两个共轴螺线管长为 L，匝数分别为N_1、N_2，截面积相同均为S,管内真空。

解：给螺线管1通以电流I_1

$$\Theta\ B_1 = n_1 \mu_0 I_1$$

线圈1产生的磁场通过线圈2的磁通链数

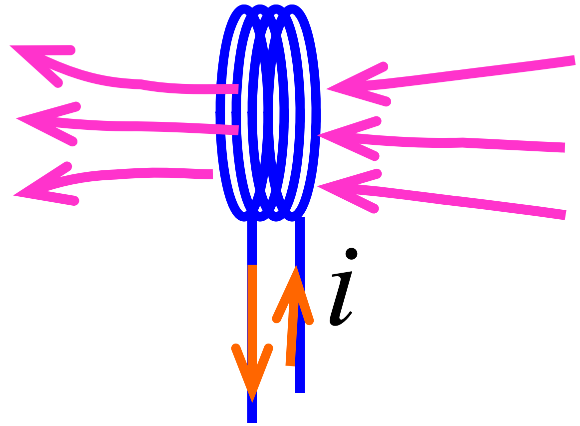
$$\Psi_{21} = B_1 S\ N_2 = \mu_0 n_1 I_1 S N_2$$

由互感定义

$$\therefore M = \frac{\Psi_{21}}{I_1} = \mu_0 n_1 S N_2 \frac{L}{L} = \mu_0 n_1 n_2 V$$

二、自感

➢实验现象：



当线圈中电流变化时，它所激发的磁场通过线圈自身的磁通量也在变化，使线圈自身产生感应电动势，叫自感现象. 该电动势叫自感电动势.

$$\varepsilon = -\frac{d\Psi_m}{dt}$$

全磁通与回路的电流成正比： $\Psi_m = Li$

$$\varepsilon = -\frac{d\Psi_m}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

- 称 *L*为线圈的自感系数,简称自感或电感。

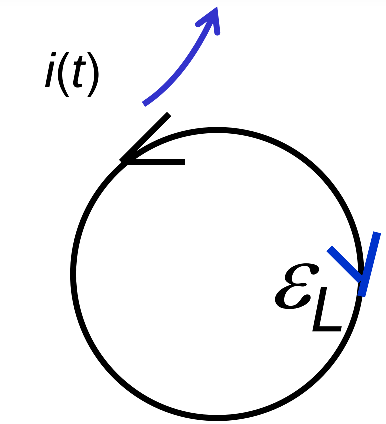
$$\Psi_m = Li \qquad L = \frac{\Psi_m}{i} = \frac{N\Phi_m}{i}$$

1）单位：亨利（H）毫亨（mH），微亨（μH）

2）*L*与线圈中是否通有电流无关，仅与线圈自身几何结构、及周围介质有关

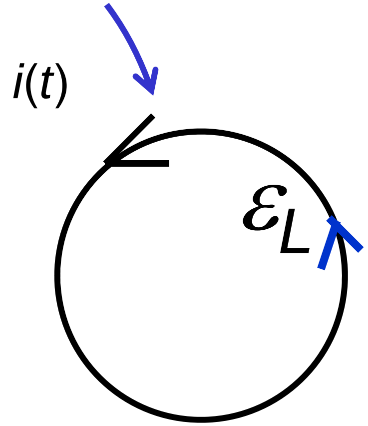
3）物理意义：一个线圈中通有单位电流时，通过线圈自身的磁通链数，等于该线圈的自感系数。

➢自感电动势 $\varepsilon_L = -\dfrac{d\Psi_m}{dt} = -L\dfrac{di}{dt}$



大小： $|\varepsilon_L| = L\left|\dfrac{di}{dt}\right|$

方向： 阻碍线圈中原有电流的变化



L越大，线圈中电流越不易改变

L越小，改变线圈中电流较容易

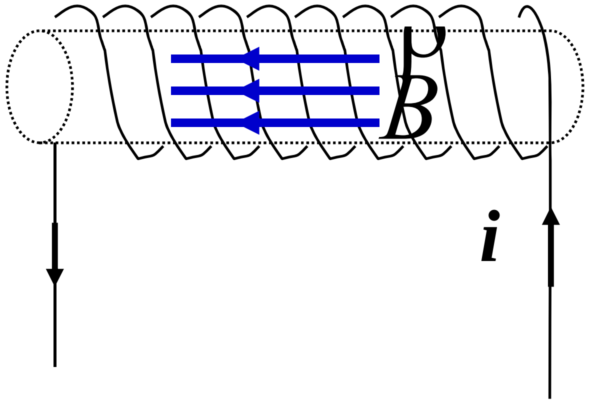
所以说，任何导体线圈都有维持原电路状态的能力，*L*就是这种能力大小的量度，它表征导体回路电磁惯性的大小。

*L*的计算：假设通以电流*i*和计算磁通链数ψ来求自感系数*L*。

例：求长直螺线管的自感系数*L*，已知总长度*l*，总匝数*N*，截面面积*S*,单位长度上的匝数*n*.

解： 设通以电流*i*

$$B = \mu_0 ni$$



$$\Phi_m = \mu_0 niS$$

$$\Psi = N\Phi_m = N\mu_0 niS$$

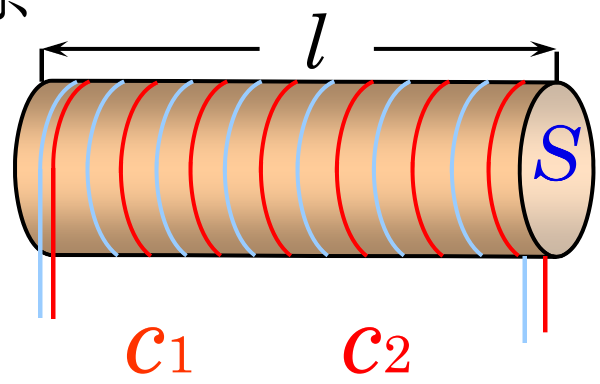
$$L = \frac{\Psi}{i} = N\mu_0 nS = \mu_0 nSN\frac{l}{l}$$

$$\boxed{\therefore L = \mu_0 n^2 V}$$

例. 长直螺线管由两个密绕的线圈C_1、C_2组成，两线圈分别绕N_1、N_2匝。

求: (1)两线圈的互感系数

(2)两线圈的自感系数与互感系数的关系



(1) $$M=\mu_0 n_1 n_2 V$$

(2) 由 $$L_1=\mu_0 n_1{}^2 \mathrm{V}$$

$$L_2=\mu_0 n_2{}^2 \mathrm{V}$$

$$M=\sqrt{L_1 L_2}$$

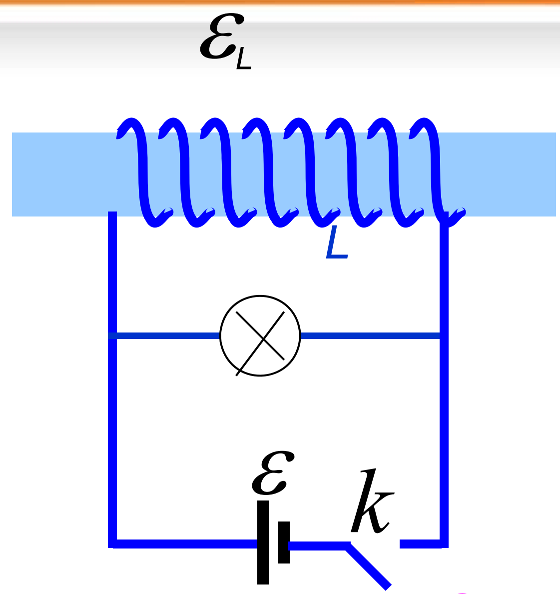
对非完全耦合线圈：

$$M=k\sqrt{L_1 L_2}$$

$$0<k<1$$

§5 磁场的能量

一、 通电线圈储能（自感磁能）：



自感为 L的线圈, 通有电流 I 时, 在其周围建立了磁场，所储存的磁能根据功能原理，应该等于这电流消失时自感电动势所做的功.

$$dA = \varepsilon_L dq = -L\frac{di}{dt}\cdot idt = -Lidi$$

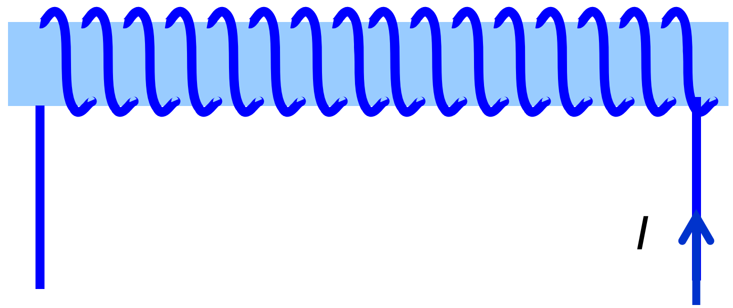
$$A = \int_I^0 -Li\cdot di = \frac{1}{2}LI^2 = W_L$$

自感磁能

通电I线圈储能（自感磁能）： $W_L = \frac{1}{2} L I^2$

二、磁场能量W_m：

对螺线管: $L = \mu_0 n^2 V$



$$W_m = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 V I^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\mu_0^2 n^2 I^2}{\mu_0} V$$

$$= \frac{B^2}{2\mu_0} V$$

$$B = \mu_0 n I$$

$$\boxed{w_m = \frac{B^2}{2\mu_0}}$$

磁能密度： $w_m = \dfrac{B^2}{2\mu_0} = \dfrac{1}{2}HB$

磁场能量： $W_m = \int_V \dfrac{B^2}{2\mu_0} dV$

对任何磁场普遍有效

积分应遍及磁场存在的全空间。

$$\boxed{w_m = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2}HB}$$

磁场能量密度

比较

$$\boxed{w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}DE}$$

电场能量密度

二、麦克斯韦假设

假设1.变化的磁场激发电场 ⟶ 感生电场

$$\oint \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

空间的总电场: $\boxed{\vec{E} = \vec{E}^{(1)} + \vec{E}_i}$

$$\oint_L \vec{E}\cdot d\vec{l} = \oint_L \vec{E}^{(1)}\cdot d\vec{l} + \oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oiint_S \vec{E}^{(1)}\cdot d\vec{S} + \oiint_S \vec{E}_i\cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0}$$

一. 麦克斯韦方程组的积分形式

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho_0 \,\mathrm{d}V$$

电场的高斯定律 (1)

$$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$$

磁通连续定理 (2)

$$\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

法拉第电磁感应定律 (3)

$$\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0\int_S (\vec{j}_0 + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})\cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

安培环路定理 (4)

(1) — (4)是积分形式的麦克斯韦方程组**(Maxwell equations)**。

除(1) — (4)外还有洛仑兹力公式：

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}}$$

$$\boxed{\oint_S \vec{j}_0 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho_0 \, \mathrm{d}V}$$

电荷守恒定律的积分形式。

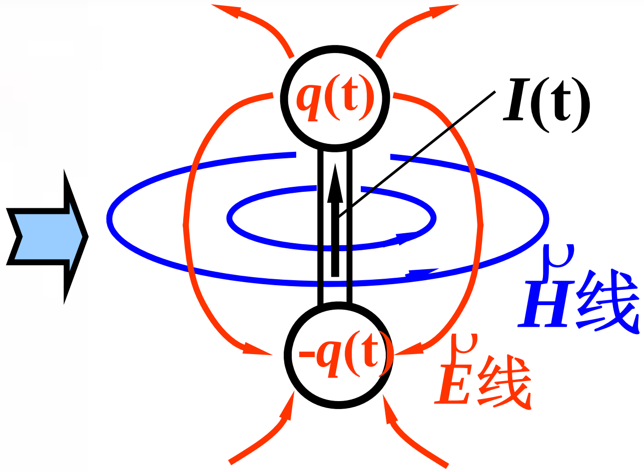
对各向同性介质还有如下三个补充关系：

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} \\ \vec{j}_0 &= \sigma \vec{E} \end{aligned}}$$

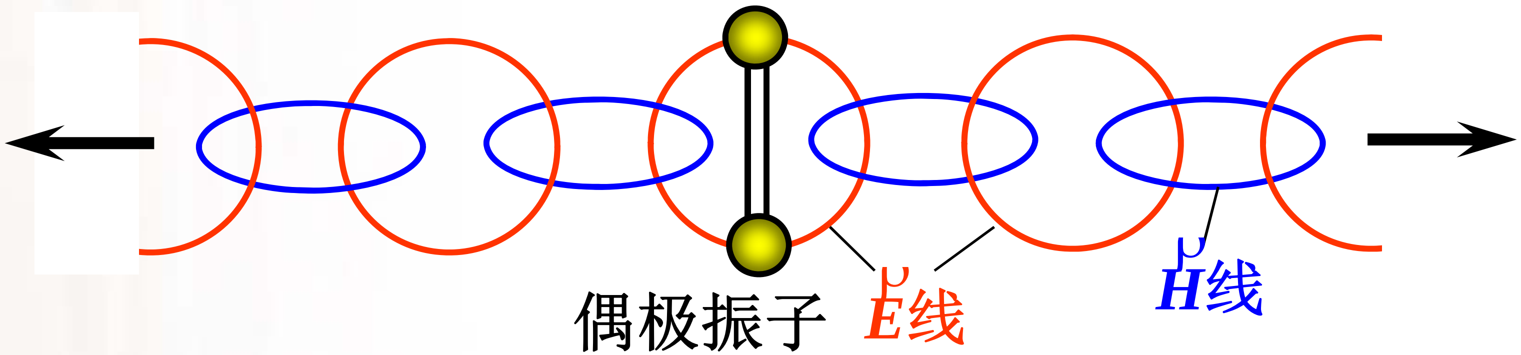
§ 7.8 电磁波（ electromagnetic wave）

麦克斯韦**1865**年预言了电磁波，**1886**年赫兹（**Hertz**） 用实验证实了电磁波的存在。

在开放的空间中， 电磁场的变化和相互激发可以传播开去， 形成脱离开场源的电磁辐射。



电偶极振子天线
电磁场完全开放



电磁波是如何传播的?

波的传播是需要介质的

声音：空气

地震波：地球

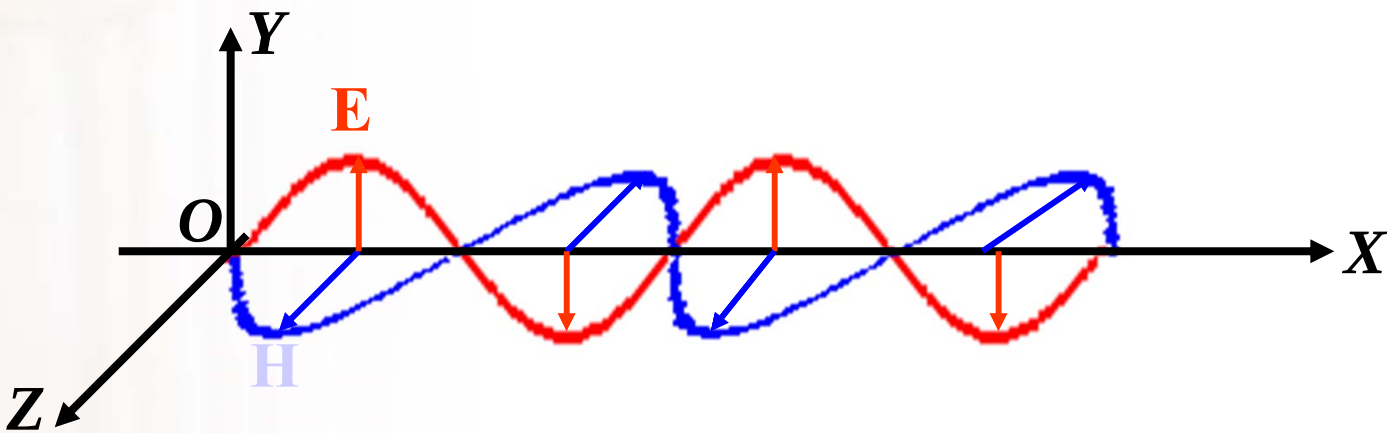
水波（海浪）：水

电磁波：介质？以太?

电磁波是一种可以独立存在的物质，它的传播不需要任何介质。

平面波

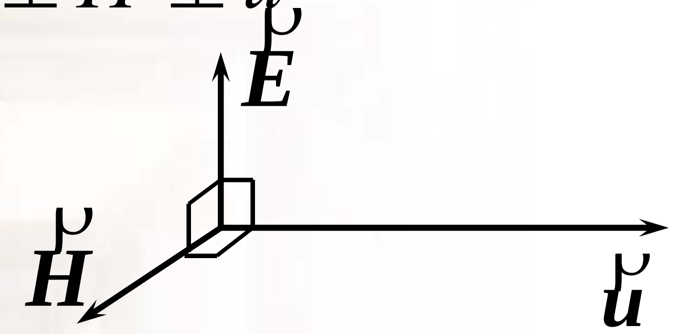
理论和实践都证明：若 ***E*** 在 **Y** 方向振动，**H** 在 **Z**方向振动，则电磁波在 **X** 方向传播。



二. 电磁波的性质

1. $\vec{E} \perp \vec{H} \perp \vec{u}$

2. $\vec{E} \times \vec{H} \,//\, \vec{u}$ 波传播方向



即电磁波是横波

（**transverse wave**）

3. $B = \dfrac{E}{c}$ **E**和**B**同时达到各自的正极大值

4. 波速： $$u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n}$$

n为介质的折射率， $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r} \approx \sqrt{\varepsilon_r}$（非铁磁质）

5. 能量 （energy）

电磁场能量密度： $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{w}_e+\boldsymbol{w}_m$

在真空中： $$\mathrm{w}=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2+\frac{1}{2\mu_0}B^2$$

对电磁波： $B=\dfrac{E}{c}$,

$$\mathrm{w}_m=\frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{E}{c}\right)^2=\frac{\varepsilon_0}{2}E^2=\mathrm{w}_e$$

$$\therefore\quad \mathrm{w}=2\mathrm{w}_e=\varepsilon_0 E^2$$

* 能流密度 （energy flow density）

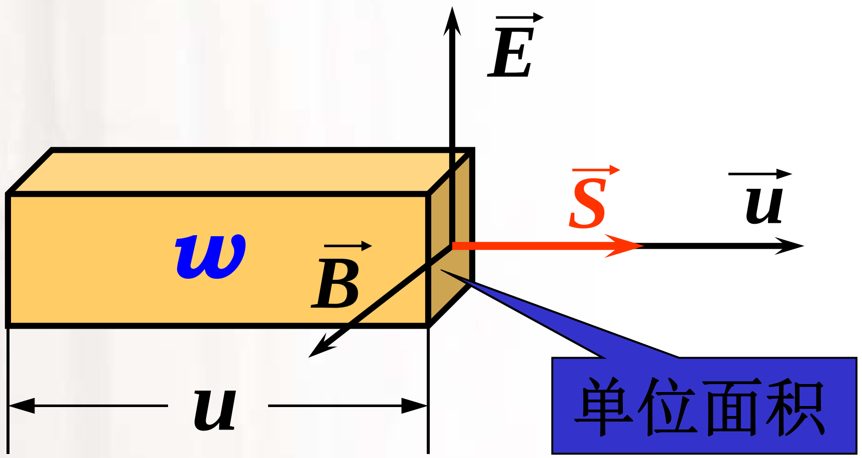
能流密度S： 单位时间内，通过垂直波传播方向的单位面积的能量。

能流密度矢量：

$$\vec{S} = S \cdot \vec{e}_u = \frac{wdAcdt}{dAdt} \cdot \vec{e}_u = cw \cdot \vec{e}_u$$

$$= c\varepsilon_0 E^2 \cdot \vec{e}_u = \frac{EB}{\mu_0} \cdot \vec{e}_u$$

$$\vec{S} = \frac{EB}{\mu_0} \cdot \vec{e}_u = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$



也叫坡印廷矢量

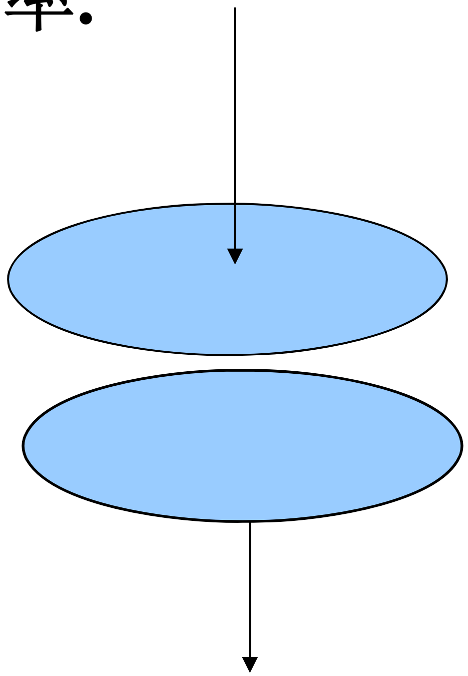
（Poynting vector）

例:一个正在充电的电容器(R, b),忽略边缘效应

证明:

1:两板间电场的边缘处的坡印廷矢量 S的方向指向电容器内部.

2: 单位时间内按坡印廷矢量 计算进入电容器内部的总能量等于电容器中的静电能量的增加率.



证明: 1:两板间电场的边缘处的坡印廷矢量 S的方向指向电容器内部.

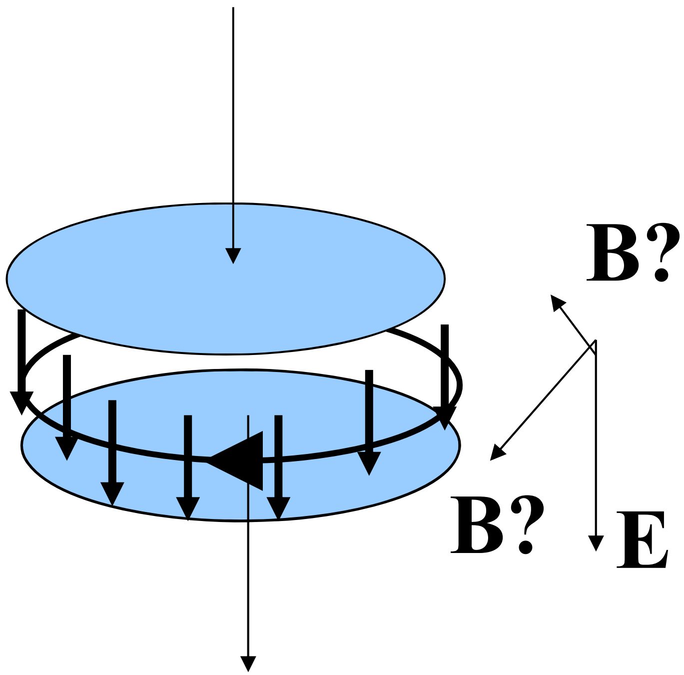
$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \frac{1}{c^2}\int_S \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$$

无恒电流 $$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \frac{1}{c^2}\int_S \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$$

$$B.2\pi R = \frac{\pi R^2}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow B = \frac{R}{2c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} > 0 ---> B > 0$$

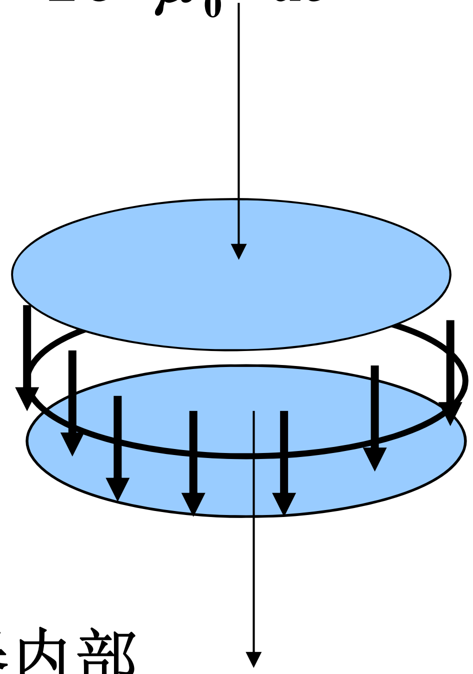


磁力线的方向和环路L的方向一致!

证明: 2: 单位时间内按坡印廷矢量 计算进入电容器内部的总能量等于电容器中的静电能量的增加率.

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} \quad\Rightarrow\quad S = \frac{EB}{\mu_0} = \frac{RE}{2c^2\mu_0}\frac{dE}{dt}$$

S: 单位时间内，通过垂直波传播方向的单位面积的能量。

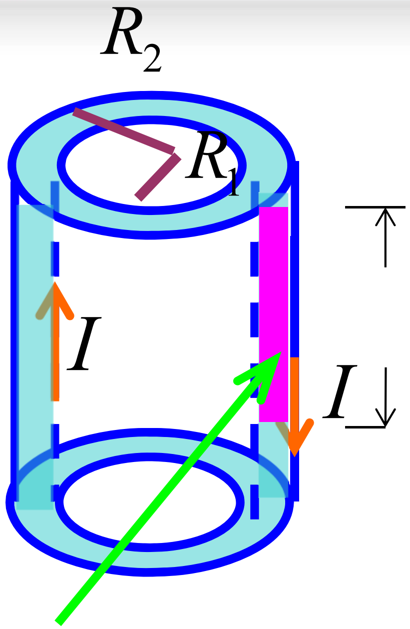


$$Ws = S.2\pi Rb = \frac{\pi R^2 b}{c^2\mu_0}E\frac{dE}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\pi R^2 b\frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\right)$$

单位时间内按坡印廷矢量 计算进入电容器内部的总能量等于电容器中的静电能量的增加率.

例题：计算同轴电缆单位长度的自感



根据对称性和安培环路定理，在内圆筒和外圆筒外的空间磁场为零。两圆筒间磁场为

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad R_1 \le r \le R_2$$

考虑 l 长电缆通过面元 ldr 的磁通量为

$$d\Phi = B \cdot dr \cdot l = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} ldr$$

$$\Psi = \Phi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} ldr = \frac{\mu_0 Il}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

该面积的磁通量

电缆单位长度的自感：$\therefore L = \frac{\Psi}{l \cdot I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$

计算长为l的电缆所具有的磁能？

$$W_m = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

复习 & 习题

电荷　静止　VS　运动

静止　电荷　电场

q

运动　电流　磁场

$$I=\frac{\Delta q}{\Delta t}$$

$$\boldsymbol{J}=nq\boldsymbol{v}$$

$$I=\int_S \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\mathscr{E}=\int_L \boldsymbol{E}_{\mathrm{ne}}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

电荷　静止　VS　运动

静止 电荷 电场

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{F}}{q}$$

$$\boldsymbol{F}=\frac{kq_1q_2}{r^2}\boldsymbol{e}_r=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0r^2}\boldsymbol{e}_r$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2}\boldsymbol{e}_r$$

$$\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{l}$$

运动 电流 磁场

$$B=F/qv\sin a$$

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{e}_r}{4\pi r^2}\quad(v\ll c)\qquad \mathrm{d}\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{e}_r}{4\pi r^2}$$

$$\boldsymbol{m}=I\boldsymbol{S}=IS\boldsymbol{e}_n$$

电荷　静止　VS　运动

静止　电荷　电场

电力线　电通量

$$\Phi_e = \int_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

高斯定律

$$\Phi_e = \oint_S \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum q_{\text{int}}$$

运动　电流　磁场

磁力线　磁通量

$$\Phi_m = \int_s B \bullet ds$$

闭合曲面的磁通

$$\oint_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0$$

电荷 静止 VS 运动

静止 电荷 电场

电场对电荷做用力

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{E}q$$

电偶极子力矩

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{E}$$

运动 电流 磁场

磁场对运动电荷做用力

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{E}q+q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$$

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B}$$

载流线圈力矩

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{B}$$

电荷　静止　VS　运动

静止 电荷 电场

运动 电流 磁场

$$R=\frac{mv}{qB}$$

$$T=\frac{2\pi m}{qB}$$

$$h=\frac{2\pi m}{qB}v_{//}$$

$$U_{\mathrm{H}}=\frac{IB}{nqb}$$

电荷　静止　VS　运动

静止 电荷 电场

运动 电流 磁场

电势差

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{(P_1)}^{(P_2)} \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

电荷q在外电场中的电势能

$$W = q\varphi$$

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = W_1 - W_2$$

$$\boldsymbol{W} = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}$$

载流线圈的势能

$$W_m = -\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{B}$$

电荷　静止　VS　运动

静止 电荷 电场　　　　　　　　运动 电流 磁场

静电场的能量

$$W_e = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}$$

$$W = \int_V \omega_e \mathrm{d}V = \int_V \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \mathrm{d}V$$

电荷　静止　VS　运动

静止 电荷 电场

$$E = E_0 / \varepsilon_r$$

电容　$C = \frac{Q}{U}$

电位移矢量

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \boldsymbol{E} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$$

$$\oint_S \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} = q_{0,\mathrm{int}}$$

运动 电流 磁场

$$B = \mu_r B_0$$

磁场强度

$$\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu_r \mu_0} = \frac{\boldsymbol{B}}{\mu}, \quad \mu = \mu_r \mu_0$$

$$\oint_L \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{r} = I_{0,\mathrm{int}}$$

电荷　静止　VS　运动

静止 电荷 电场

电容器的能量

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{1}{2}QU$$

介电质电场能量密度&总能

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2 = \frac{1}{2}ED$$

$$W = \int w_e \mathrm{d}V = \int \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r E^2}{2}\mathrm{d}V$$

运动 电流 磁场

自感线圈的磁能

$$W_m = \frac{1}{2}LI^2$$

磁场能量密度&总能

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu_0\mu_r} = \frac{1}{2}BH$$

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

动生电动势 $\mathscr{E}_{ab} = \int_a^b (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$

感生电动势 $\mathscr{E} = \oint_L \boldsymbol{E}_\mathrm{i} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$

互感系数, 互感电动势 $M = \frac{\Psi_{12}}{i_2} = \frac{\Psi_{21}}{i_1}$ $\mathscr{E}_{21} = -M\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$ （M 一定时）

自感系数, 自感电动势 $L = \frac{\Psi}{i}$ $\mathscr{E}_L = -L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ （L 一定时）

(1) $\oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = q_{int}/\varepsilon_0$ ，最基本的电场和场源电荷的关系。此式在 q_{int} 静止的参考系中给出静电场。

(2) $\oint_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S} = 0$ ，磁通连续定理，说明自然界没有单独的“磁荷”存在。

(3) $\oint_L \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_S \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S}$ ，法拉第电磁感应定律，说明变化的磁场产生电场(感生电场)。在磁场不改变的情况下，此式给出静电场的环路定理。

(4) $\oint_L \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{r} = \mu_0 \int_S \left(\boldsymbol{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right) \cdot d\boldsymbol{S}$ ，普遍的安培环路定理，说明磁场由运动电荷或变化的电场产生。

电磁波

$$\boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{E}}{c^2},\quad B=\frac{E}{c}$$

电磁波具有能量，真空中能量密度为

$$w=\varepsilon_0 E^2=\frac{B^2}{\mu_0}$$

能流密度称为坡印亭矢量，为

$$\boldsymbol{S}=\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{\mu_0},\quad S=\frac{EB}{\mu_0}$$

10.14 两个无限长同轴圆柱面半径分别为 R_1 和 R_2，单位长度带电量分别为 $+\lambda$ 和 $-\lambda$。求内圆柱内、两圆柱间及外圆柱外的电场分布。

解 根据电场分布的轴对称性，可以选与圆柱同轴的圆柱面(上下封顶)作高斯面，再根据高斯定律即可求出：

在内圆柱面内， $r<R_1$， $E=0$

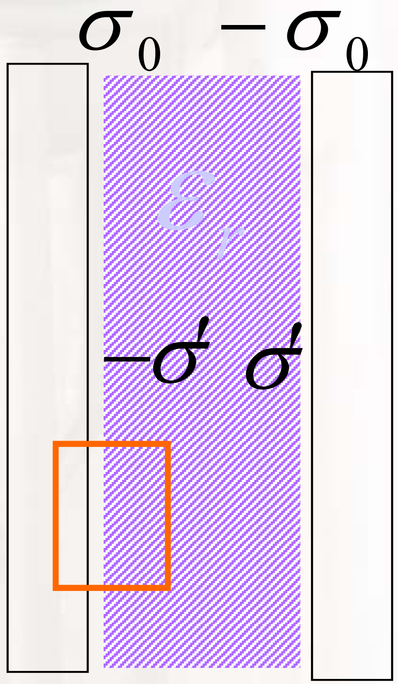
在两圆柱面间， $R_1<r<R_2$， $E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$

在外圆柱面外， $R_2<r$， $E=0$

例1、 平行板电容器，自由电荷面密度为$\pm\sigma_0$

其间充满相对介电常数为ε_r的均匀的各向同性的线性电介质。求:板间的场强。

解:均匀极化　表面出现束缚电荷



做如图所示高斯面

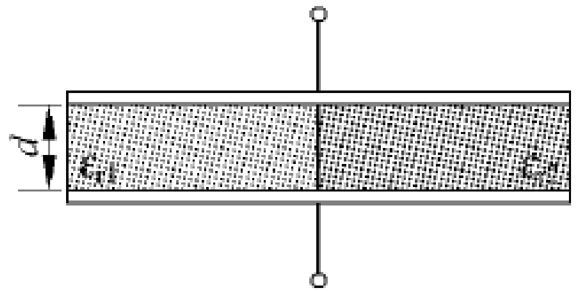
由有介质时的高斯定理，得

$D=\sigma_0$　由 $\vec{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}=\varepsilon\vec{E}$

得 $$E=\frac{\sigma_0}{\varepsilon_r\varepsilon_0}=\frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

E_0为无介质存在时的场强

12.10 如图 12.6 所示的电容器，板面积为 S，板间距为 d，板间各一半被相对介电常量分别为 ε_{r1} 和 ε_{r2} 的介电质充满。求此电容器的电容。



解 设电容器电压为 U，则其间左、右两部分电场强度相等，都等于 $E=U/d$。左侧一半板面积上自由面电荷密度为 $\sigma_1=\varepsilon_0\varepsilon_{r1}E$，右侧一半板面积上自由面电荷密度为 $\sigma_2=\varepsilon_0\varepsilon_{r2}E$。总电量

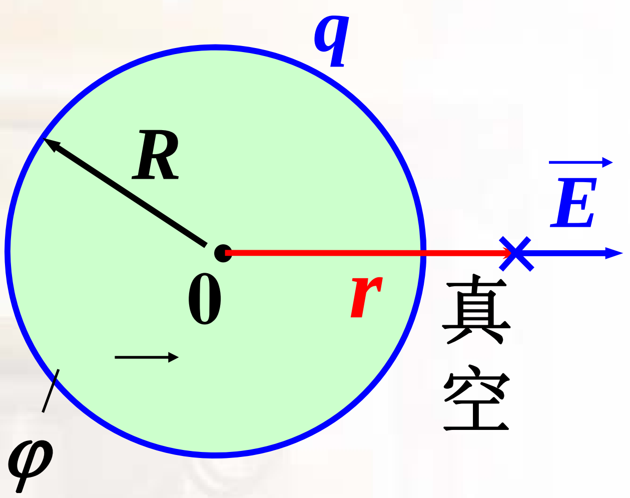
$$Q=Q_1+Q_2=\frac{S}{2}(\sigma_1+\sigma_2)=\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_{r1}+\varepsilon_{r2})}{2}SE=\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_{r1}+\varepsilon_{r2})SU}{2d}$$

电容器的电容为

$$C=\frac{Q}{U}=\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_{r1}+\varepsilon_{r2})S}{2d}$$

可以把左右两侧各看作一个电容器。上述结果实际上是这两个电容器的并联总电容。

例，对均匀带电球体的电场能W:



在球体外

$$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2}\right)^2$$

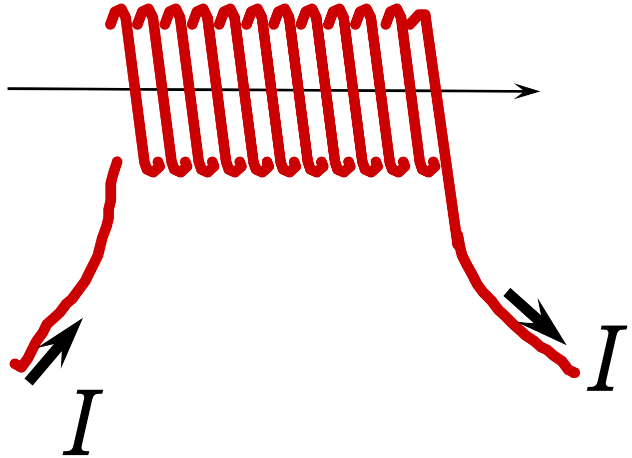
在球体内

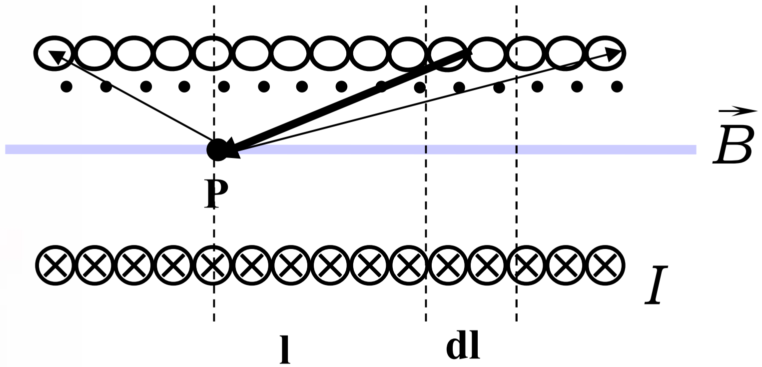
$$w_e=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{qr}{4\pi\varepsilon_0R^3}\right)^2$$

$$W=\int_0^R\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{qr}{4\pi\varepsilon_0R^3}\right)\cdot4\pi r^2\,\mathrm{d}r+\int_R^\infty\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0r^2}\right)\cdot4\pi r^2\,\mathrm{d}r \qquad W=\frac{3q^2}{20\pi\varepsilon_0R}$$

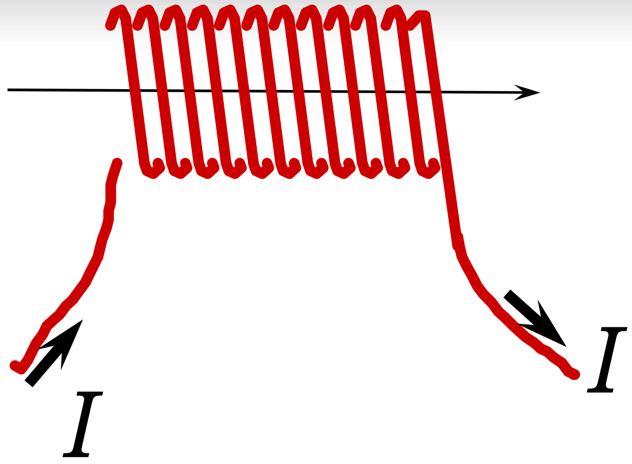
例3 载流螺旋管在其轴上的磁场

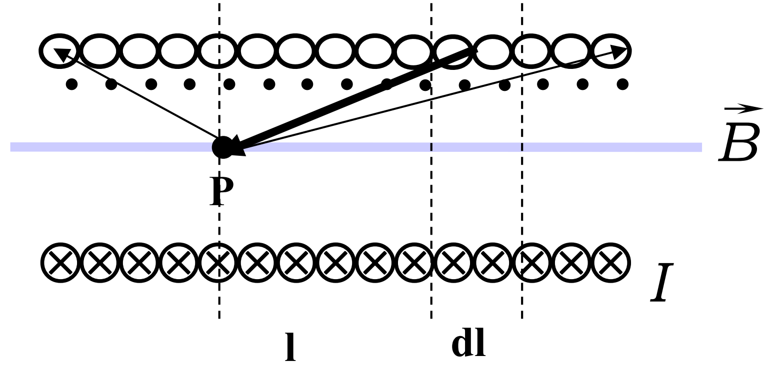
求半径为 R，总长度 L，单位长度上的匝数为 n 的螺线管在其轴线上一点的磁场？





求半径为 R，总长度 L，单位长度上的匝数为 n 的螺线管在其轴线上一点的磁场？





解：长度为 **dl** 内的各匝圆线圈的总效果，是一匝圆电流线圈的 **ndl** 倍。

$$dI = nIdl$$

$$dm = SdI = \pi R^2 dI = \pi R^2 nIdl$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o d\vec{m}}{2\pi r^3}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o nIR^2 dl}{2r^3}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_o nIR^2 dl}{2r^3}$$

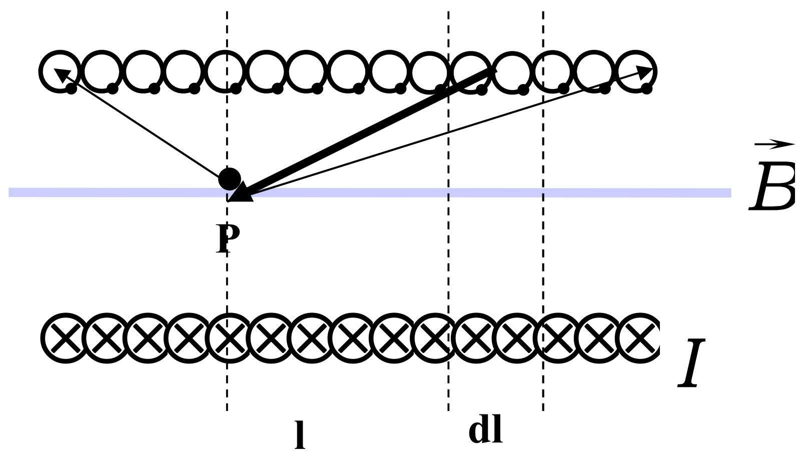
$$R = r\sin\theta \quad l = Rctg\theta$$

$$dl = -\frac{R}{\sin^2\theta}d\theta$$

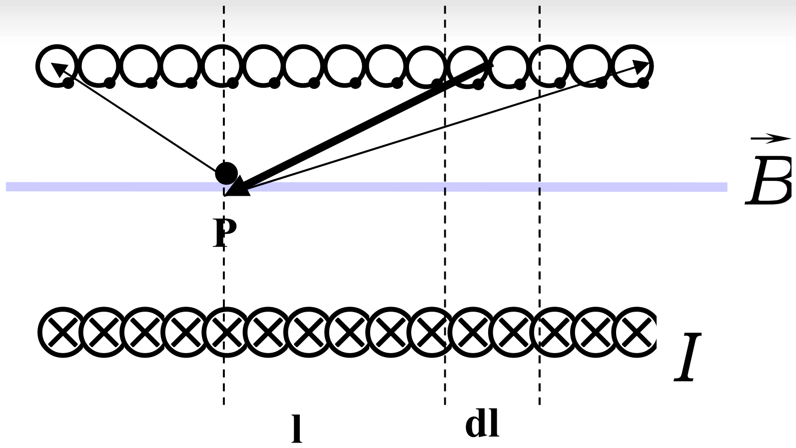
$$d\vec{B} = -\frac{\mu_o nI}{2}\sin\theta d\theta$$

$$\vec{B} = -\int_{\theta 1}^{\theta 2}\frac{\mu_o nI}{2}\sin\theta d\theta$$

$$B = \frac{\mu_o nI}{2}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$



$$B=\frac{\mu_o nI}{2}(\cos\theta_2-\cos\theta_1)$$



载流螺旋管在其轴上的磁场，磁场方向与电流满足右手螺旋法则。

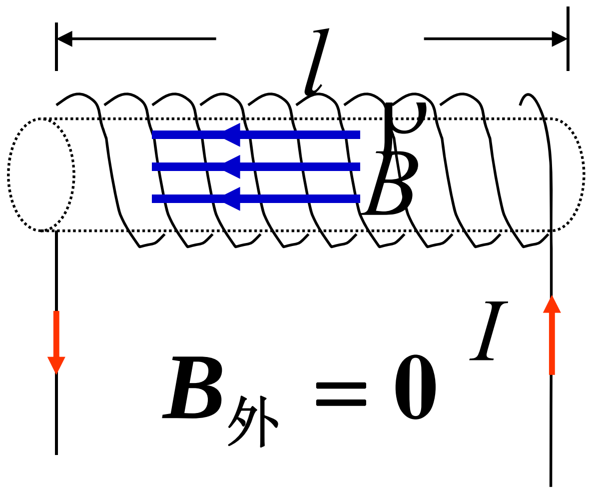
无限 $\theta_2=0,\theta_1=\pi \quad \therefore B=\mu_o nI$

一端 $\theta_1=\pi,\theta_2=\pi/2 \qquad \boldsymbol{B=\frac{1}{2}\mu_0 nI}$

例题5：通电密绕长直螺线管内部的磁感强度

设总匝数为N、总长为L

通过稳恒电流电流强度为I

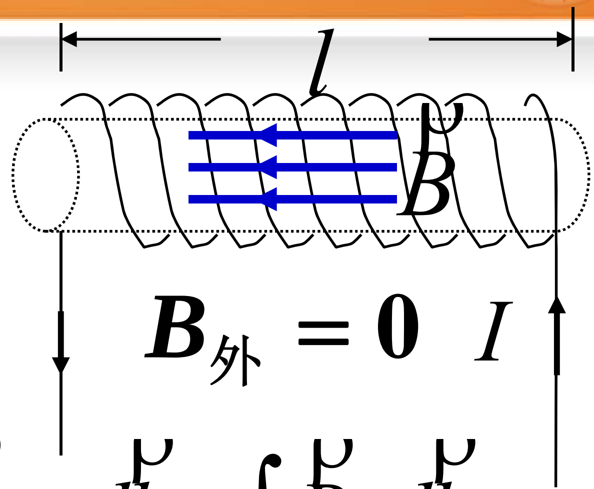


分析对称性，知内部场沿轴向，

方向与电流成右手螺旋关系

螺线管均匀密绕无漏磁 $B_{外}=0$

取过场点的每个边都相当小的矩形环路abcda

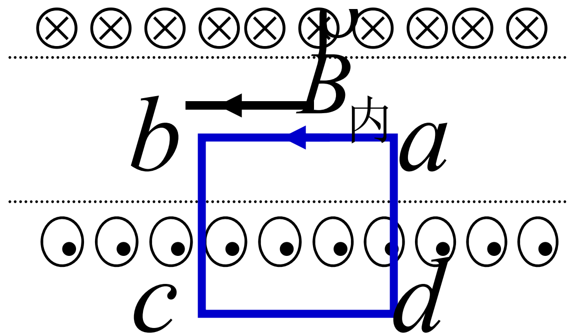


$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \int_{ab}\vec{B}_{内}\cdot d\vec{l} + \int_{bc}\vec{B}\cdot d\vec{l} + \int_{cd}\vec{B}_{外}\cdot d\vec{l} + \int_{da}\vec{B}\cdot d\vec{l}$$

$$= B_{内}\overline{ab}$$

由安培环路定理

$$= \mu_0 \frac{N}{l}\overline{ab}I \qquad n = \frac{N}{l}$$

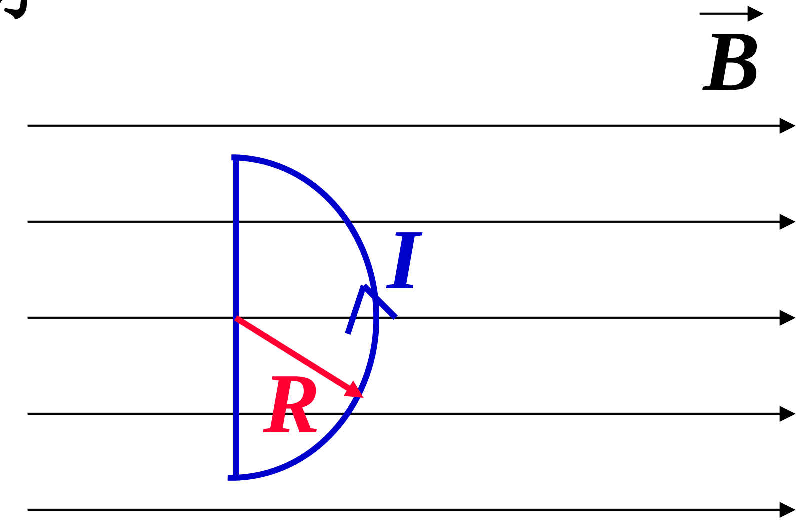


$$\Rightarrow \boxed{B = \mu_0 n I}$$

均匀场

例3：求　1）线圈受磁力；2）磁力矩；

3）线圈如何运动



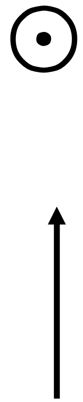
解：

1）$\sum \vec{F} = 0$

2）$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$

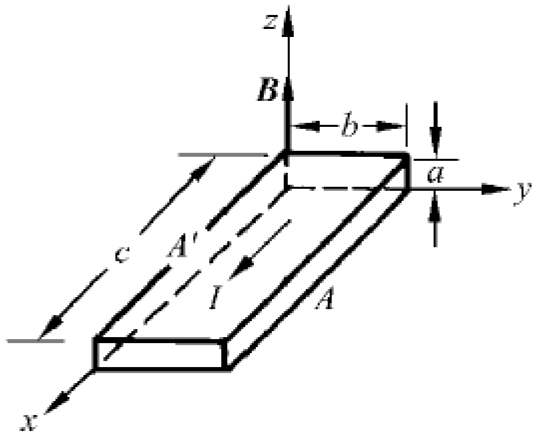
$$m = I\frac{\pi R^2}{2}$$

$$M = \frac{\pi R^2}{2} IB$$



3）线圈不平动，从上往下看，将逆时针转动。

14.8 如图 14.7 所示，一块半导体样品的体积为 $a\times b\times c$，沿 x 方向有电流 I，在 z 轴方向加有均匀磁场 $\boldsymbol{B}$。这时实验得出的数据 $a=0.10$ cm，$b=0.35$ cm，$c=1.0$ cm，



$I=1.0$ mA，$B=3000$ G，片两侧的电势差 $U_{AA'}=6.55$ mV。

(1) 这半导体是正电荷导电(P 型)还是负电荷导电(N 型)？

(2) 求载流子浓度。

解 (1) 由电流方向、磁场方向和 A 侧电势高于 A' 侧电势可知此半导体是负电荷导电。

(2) $$n=\frac{IB}{U_{AA'}qa}=\frac{1.0\times10^{-3}\times0.3}{6.55\times10^{-3}\times1.6\times10^{-19}\times10^{-3}}$$

$$=2.86\times10^{20}\ 个/\mathrm{m}^3$$

14.2 把 2.0×10^3 eV 的一个正电子，射入磁感应强度 $B=0.1$ T 的匀强磁场中，其速度矢量与 $\boldsymbol{B}$ 成 89°角，路径成螺旋线，其轴在 $\boldsymbol{B}$ 的方向。试求这螺旋线运动的周期 T、螺距 h 和半径 r。

解 正电子的速率为

$$v=\sqrt{\frac{2E_k}{m}}=\sqrt{\frac{2\times2\times10^3\times1.6\times10^{-19}}{9.11\times10^{-31}}}=2.6\times10^7\ \mathrm{m/s}$$

做螺旋运动的周期为

$$T=\frac{2\pi m}{eB}=\frac{2\pi\times9.11\times10^{-31}}{1.6\times10^{-19}\times0.1}=3.6\times10^{-10}\ \mathrm{s}$$

螺距为

$$h=v\cos89^\circ\ T=2.6\times10^7\times\cos89^\circ\times3.6\times10^{-10}=1.6\times10^{-4}\ \mathrm{m}$$

半径为

$$r=\frac{mv\sin89^\circ}{eB}=\frac{9.11\times10^{-31}\times2.6\times10^7\times\sin89^\circ}{1.6\times10^{-19}\times0.1}$$

$$=1.5\times10^{-3}\ \mathrm{m}$$

15.4 一铁制的螺绕环，其平均圆周长 30 cm，截面积为 1 cm^2，在环上均匀绕以 300 匝导线。当绕组内的电流为 0.032 A 时，环内磁通量为 2×10^{-6} Wb。试计算：

(1) 环内的磁通量密度(即磁感应强度)；

(2) 磁场强度；

(3) 磁化面电流(即面束缚电流)密度；

(4) 环内材料的磁导率和相对磁导率；

解 (1) $B=\Phi/S=2\times10^{-6}/(1\times10^{-4})=2\times10^{-2}$ T

(2) $H=nI=NI/l=300\times0.032/0.3=32$ A/m

(3) $j'=(\mu_r-1)nI=\dfrac{B}{\mu_0}-H=\dfrac{2\times10^{-2}}{4\pi\times10^{-7}}-32=1.6\times10^4$ A/m

(4) $\mu=B/H=2\times10^{-2}/32=6.3\times10^{-4}$ H/m

$\mu_r=\mu/\mu_0=6.3\times10^{-4}/(4\pi\times10^{-7})=5.0\times10^2$

谢谢！