大学物理

第三章 动量与角动量

(Momentum and Angular Momentum)

冲量，动量

定义： $\vec{F} = \dfrac{\mathrm{d}\,\vec{p}}{\mathrm{d}\,t} = \dfrac{\mathrm{d}(m\vec{\mathrm{v}})}{\mathrm{d}\,t} \longrightarrow \vec{F}dt = d\vec{p}$

质点的动量（**momentum**）— $\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$

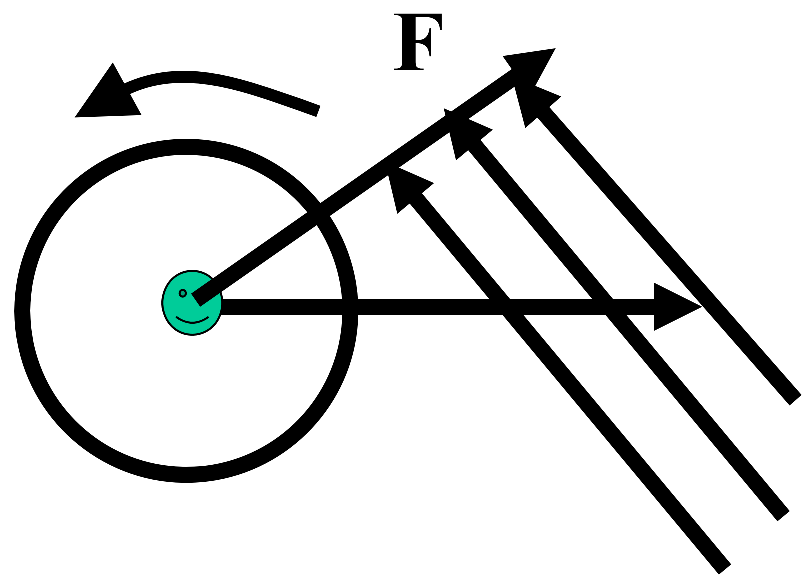
力的冲量（**impulse**）— $\boxed{\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,\mathrm{d}\,t = \int_{t_1}^{t_2} d\vec{p}}$

$$\vec{F}dt = d\vec{p}$$ ⟶ 质点动量定理

（**theorem of momentum of a particle**）

质点的角动量定理

转动效果不但与力的大小有关，还与力的位置有关（相对于某一质点）

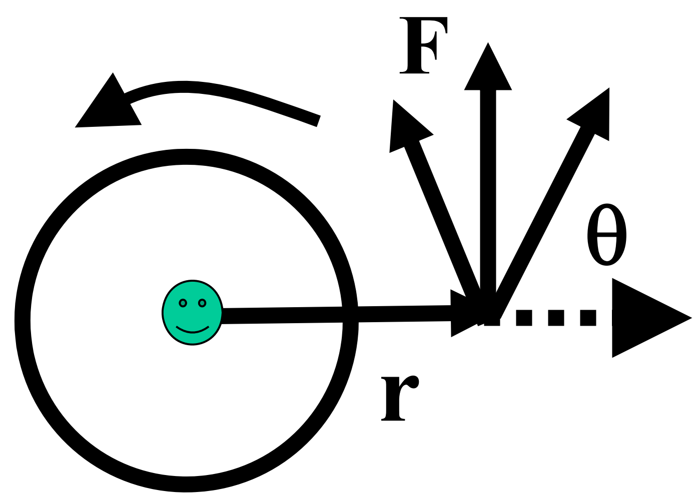


主要参量（F, r, θ ）

θ=90, sinθ=1

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

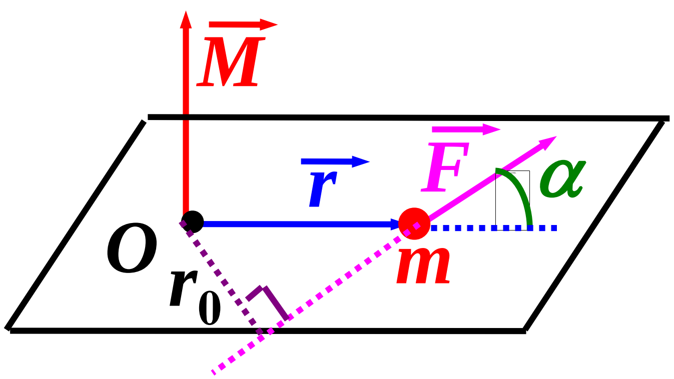
$$M = rF\sin\theta$$



方向：垂直于r，F平面

定义力对定点 O 的力矩 (moment of force) 为：

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}}$$



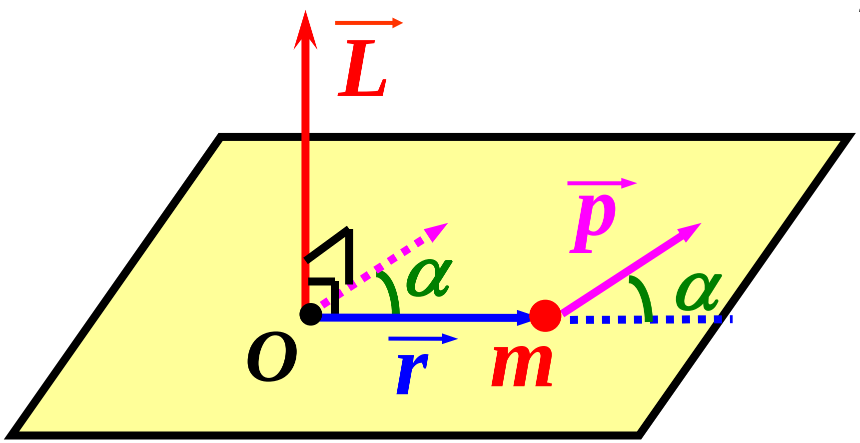
$$M = rF\sin\alpha = r_0 F$$

$r_0 = r\sin\alpha$　称力臂

$$\frac{d}{dt}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt} + \frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}$$

$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F} = r\times\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(r\times p) - \frac{dr}{dt}\times p$$

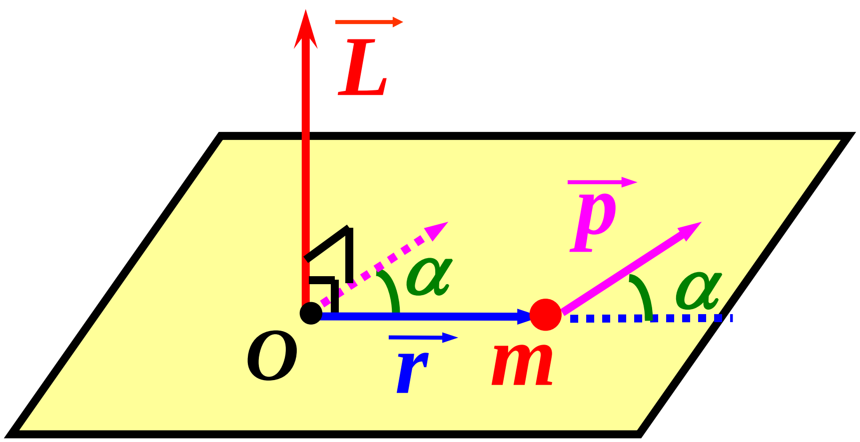
$$\vec{M} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{v}\times m\boldsymbol{v}$$



$$\boxed{\vec{M} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}) = \frac{dL}{dt}}$$

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d}{dt}(r \times p) = \frac{dL}{dt}}$$

定点O的角动量定义为：



$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v})}$$

大小：$L = rp\sin\alpha = rmv\sin\alpha$，单位：kg m^2/s

方向：⊥于$\vec{r}$，$\vec{p}$（$\vec{v}$）决定的平面（右螺旋）

于是有 $\boxed{\vec{M}=\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$

或 $\boxed{\mathrm{d}\vec{L}=\vec{M}\,\mathrm{d}t}$

质点角动量定理

（微分形式）

积分 $\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\cdot\mathrm{d}t=\vec{L}_2-\vec{L}_1}$

质点角动量定理

（积分形式）

$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\,\mathrm{d}t$ 称冲量矩

——力矩对时间的积累作用。

§ 3.8 角动量守恒定律

（law of conservation of angular momentum）

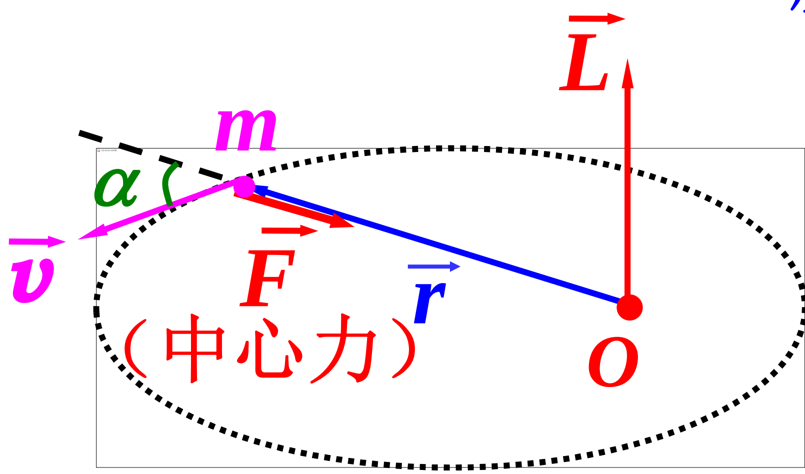
$$\boxed{\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}}$$

$\boxed{\text{若 } \vec{M} = 0\text{，则 } \vec{L} = \text{常矢量}}$

——质点角动量守恒定律

$$\vec{M} = 0 \begin{cases} \vec{F} = 0\,, \\ \vec{F}\text{过}O\text{点：中心力（如行星受中心恒星的万有引力）} \end{cases}$$

角动量守恒定律是物理学的基本定律之一，它不仅适用于宏观体系，也适用于微观体系，而且在高速低速范围均适用。



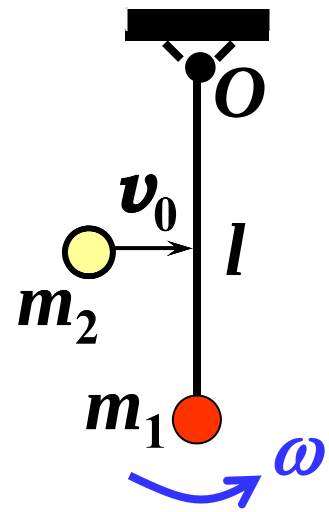
质点角动量守恒特征：

$$\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v}) = \text{常矢量}$$

（1） $m v r \sin\alpha = \text{const.}$，

（2）轨道在同一平面内。

例2:一根长为l的轻质杆，端部固结一小球m_1，另一小球m_2以水平速度v_0碰杆中部并与杆粘合。求:碰撞后杆的角速度ω



解：选m_1（含杆）+ m_2为系统

碰撞时重力和轴力都通过O，对O力矩为零，故角动量守恒。

有 $$\frac{l}{2}m_2 v_0 = l m_1 \omega l + \frac{l}{2} m_2 \omega \frac{l}{2}$$

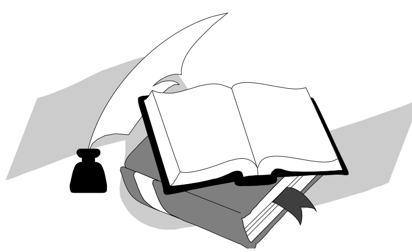
解得： $$\omega = \frac{2m_2}{4m_1 + m_2} \cdot \frac{v_0}{l}$$

$\boxed{\text{思考}}$ （$m_1 + m_2$）的水平动量是否守恒？


INCEPTION
DO YOU STILL DREAM, MR. COBB?

小结：动量与角动量的比较

动量	角动量
$\vec{p}=\sum_i m_i\vec{v}_i$	$\vec{L}=\sum_i \vec{r}_i\times\vec{p}_i$
矢量	矢量
与固定点无关	与固定点有关
与内力无关	与内力矩无关
守恒条件 $\sum_i \vec{F}_i=0$	守恒条件 $\sum_i \vec{r}_i\times\vec{F}_i=0$



第三章结束

第四章 功和能

（**Work and Energy**）

前言

——力对时间和空间的积累效应。

力在时间上的积累效应：

平动 ⟶ 冲量 ⟶ 动量的改变

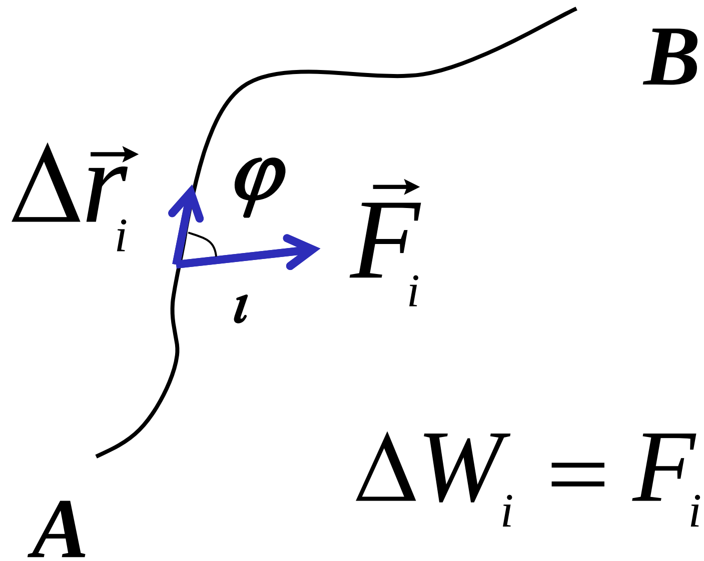
转动 ⟶ 冲量矩 ⟶ 角动量的改变

力在空间上的积累效应

⟶ 功 ⟶ 改变能量

§ 4.1 功

力的空间积累



点积（标量积）

$$\Delta W_i = F_i \Delta r_i \cos\varphi_i$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\varphi$$

功

$$\Delta W_i = \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

A到B做功 $W_{AB} = \sum_i \Delta W_i = \sum_i \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i = \int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$

▲ 功是标量，有正、负之分。

点积和叉积

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a} \qquad \vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=a^2 \qquad \vec{a}\times\vec{a}=0$$

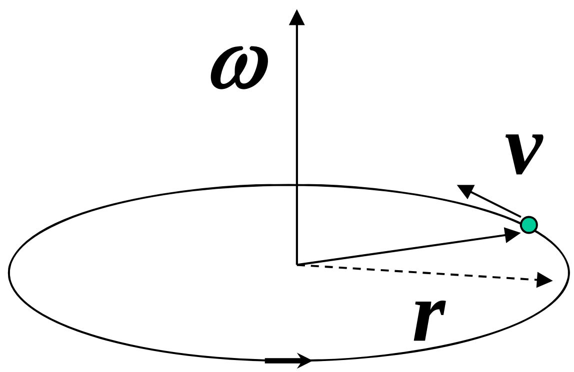
$$\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}(\vec{b}\cdot\vec{c})-\vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c})$$

$$\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$$

点积的微商 $\dfrac{d}{dt}(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot\dfrac{d\vec{b}}{dt}+\dfrac{d\vec{a}}{dt}\cdot\vec{b}$

叉积的微商 $\dfrac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times\dfrac{d\vec{b}}{dt}+\dfrac{d\vec{a}}{dt}\times\vec{b}$

例:



角速度 $\boldsymbol{\omega} = const.$

速度 $\vec{\boldsymbol{v}} = \dot{\vec{\boldsymbol{r}}} = \vec{\boldsymbol{\omega}} \times \vec{\boldsymbol{r}}$

同理 $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \vec{\omega} \times \vec{v} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\vec{r}\omega^2$

$$\vec{\boldsymbol{c}} \times (\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}) = \vec{\boldsymbol{a}}(\vec{\boldsymbol{b}} \cdot \vec{\boldsymbol{c}}) - \vec{\boldsymbol{b}}(\vec{\boldsymbol{a}} \cdot \vec{\boldsymbol{c}})$$

说明：功是标量，没有方向，只有大小，但有正负

$\theta<\pi/2$，功W为正值，力对物体作正功；

$\theta=\pi/2$，功W=0，力对物体不作功；

$\theta>\pi/2$，功W为负值，力对物体作负功，或物体克服该力作功。

$$A_{12}=\int_{(1)}^{(2)}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\,\vec{r}=\int_{(1)}^{(2)}(\vec{F}_1+\vec{F}_2+\cdots+\vec{F}_n)\cdot\mathrm{d}\,\vec{r}$$

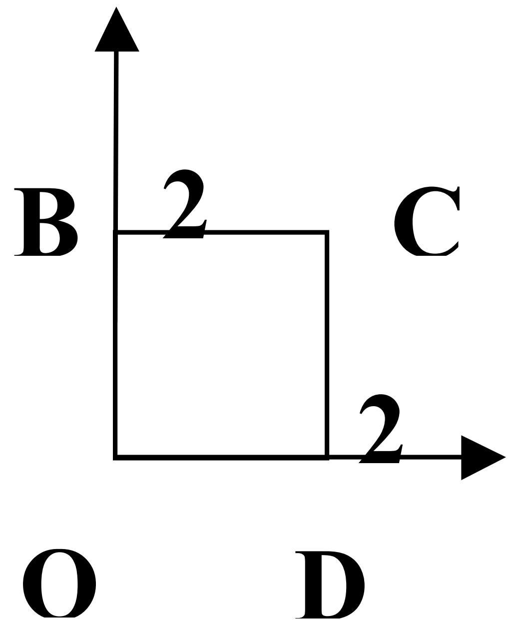
$$=\int_{(1)}^{(2)}\vec{F}_1\cdot\mathrm{d}\,\vec{r}+\int_{(1)}^{(2)}\vec{F}_2\cdot\mathrm{d}\,\vec{r}+\cdots+\int_{(1)}^{(2)}\vec{F}_n\cdot\mathrm{d}\,\vec{r}$$

$$=A_1+A_2+\cdots+A_n$$

国际单位：焦尔（J） 1J=1N.M

常用单位：电子伏（eV）$1\text{ev}=1.6\times10^{-19}\text{J}$

例．一个质点沿如图所示的路径运行，求力 F=(4-2y)i (SI) 对该质点所作的功，（1）沿ODC；（2）沿OBC。



解： $\vec{F}=(4-2y)\vec{i}$ $F_x=4-2y$ $F_y=0$

（1）OD段：y=0,dy=0, DC段：x=2,Fy=0

$$W_{ODC}=\int_{OD}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_{DC}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^2(4-2\times0)dx+0=8J$$

（2）OB段：Fy=0，BC段：y=2

$$W_{OBC}=\int_{OB}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_{BC}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^2(4-2\times2)dx+0=0$$

结论：力作功与路径有关，即力沿不同的路径所作的功是不同的

*功率

•定义：单位时间内完成的功，叫做功率

$$\overline{P}=\frac{\Delta W}{\Delta t} \qquad \boxed{P=\frac{dW}{dt}}$$

•物理意义：表示作功的快慢

•功率的公式

$$\boxed{W=\frac{dW}{dt}=\frac{\vec{F}\cdot d\vec{S}}{dt}=\vec{F}\cdot\vec{v}}$$

•单位：瓦特（W）

几个功率的数量级：

睡觉	70—80W(基础代谢)	闲谈	70—80W
走路	170—380W	听课	70—140W
跑步	700—1000W	足球	630—840W

Δ § 4.2 动能定理（kinetic energy theorem）

▲ 对质点，由牛顿第二定律

$$dA = F \bullet dr = \frac{dp}{dt} \bullet dr = mvdv = d(\frac{1}{2}mv^2)$$

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2}$$

—— 动能

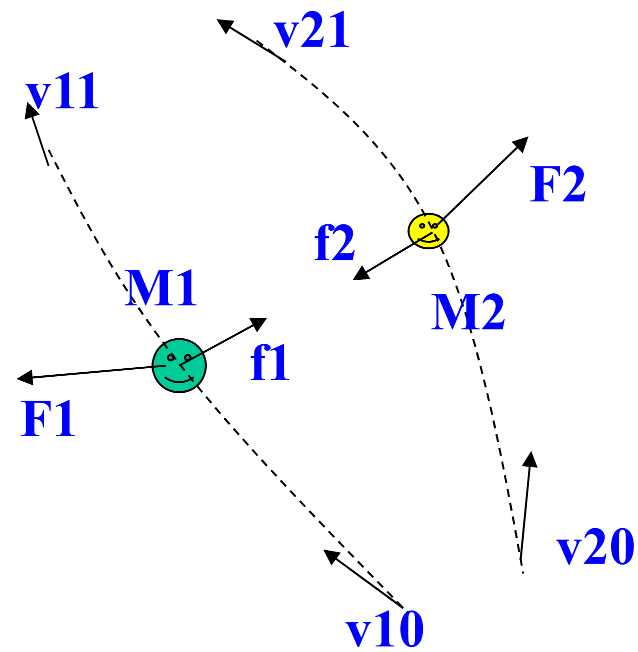
$$\left.\begin{array}{l} \boxed{dA = dE_k} \\ \boxed{A_{12} = E_{k2} - E_{k1}} \end{array}\right\} \text{动能定理}$$

动能定理（或功能定理）：合外力对质点做的功等于质点动能的增量

▲ 对质点系

m1: $\boxed{\int_0^1 F_1 \bullet dr + \int_0^1 f_1 \bullet dr = \frac{1}{2} m_1 v_{11}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2}$

m2: $\boxed{\int_0^1 F_2 \bullet dr + \int_0^1 f_2 \bullet dr = \frac{1}{2} m_2 v_{21}^2 - \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2}$



$$\boxed{A_{外} + A_{内} = E_{k2} - E_{k1}}$$

质点系动能定理

注意：内力虽成对出现，但内力功的和不一定为零（各质点位移不一定相同）。

内力能改变系统的总动能，但不能改变系统的总动量

谢谢！！！