答案

例1：解 $\overrightarrow{n_1}=(1,-1,1),\overrightarrow{n_2}=(3,2,-12)$

取法向量$\vec{n}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=(10,15,5)$

所求平面方程为

$$10(x-1)+15(y-1)+5(z-1)=0,$$

化简得$2x+3y+z-6=0.$

例2：解 $\overrightarrow{AB}=(-3,4,-6),\overrightarrow{AC}=(-2,3,-1)$, 取$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(14,9,-1)$, 所求平面方程为$14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0$, 化简得$14x+9y-z-15=0.$

已知平面经过$A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2),C(x_3,y_3,z_3)$

$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$是平面的三点式方程

平面与直线

例3. 设平面为$Ax+By+Cz+D=0$, 由平面过原点知$D=0$, 由平面过点$(6,-3,2)$, 知$6A-3B+2C=0$,因为$\vec{n}\perp(4,-1,2)$, 所以$4A-B+2C=0$，可得$A=B=-\frac{2}{3}C$, 所以平面方程为$2x+2y-3z=0$.

例5. (1)根据两个平面的方程，求出两个平面的夹角为
$\cos\theta=\frac{|-1\times 0+2\times 1-1\times 3|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{60}}$, 故两平面相交。

(2) $\overrightarrow{n_1}=(2,-1,1), \overrightarrow{n_2}=(-4,2,-2)\Rightarrow\frac{2}{-4}=\frac{-1}{2}=\frac{1}{-2}$,两平面平行，又因为$M(1,1,0)\in\Pi_1, M(1,1,0)\notin\Pi_2$, 两平面平行但不重合。

(3) $\overrightarrow{n_1}=(2,-1,-1), \overrightarrow{n_2}=(-4,2,2)\Rightarrow\frac{2}{-4}=\frac{-1}{2}=\frac{-1}{2}$,两平面平行，又因为$M(0,1,0)\in\Pi_1, M(0,1,0)\in\Pi_2$, 两平面重合。

平面与直线

例8.因为直线和y轴垂直相交，所以交点为$B(0,-3,0)$, 取$\vec{s} = \overrightarrow{BA}(2,0,4)$, 所求直线方程为

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-4}{4}.$$

例9.L的方向向量$\vec{s} = (2,1,0)\times(1,0,1) = (1,-2,-1)$, L与L_1确定一平面Π_1, $\overrightarrow{n_1} = (1,-2,-1)\times(2,1,0) = (1,-2,5)$, L与L_2确定一平面Π_2, $\overrightarrow{n_2} = (1,-2,-1)\times(1,0,1) = (-2,-2,2)$

因此Π_1: $(x-3) - 2y + 5(z-1) = 0$, Π_2: $(x+1) + (y-2) - z = 0$, $\Rightarrow$ 公垂线:$\begin{cases} x - 2y + 5z - 8 = 0 \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$

平面与直线

例10. 解 $\because \vec{s}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & -4\\ 2 & -1 & -5\end{vmatrix}=-(4,3,1)$

$\therefore$ 所求直线方程为$\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{1}$

例11. 设所求直线为l，先求两直线的交点。过点M_0做平面垂直于直线直线$L: 3x+2y-z=5.$

$\because L$的参数方程为$\begin{cases}x=-1+3t\\ y=1+2t\\ z=-t\end{cases}$ 代入平面方程，所以交点为

$M_1=\left(\frac{2}{7},\frac{13}{7},-\frac{3}{7}\right)$,取$\vec{s}=k\overrightarrow{M_0M_1}=(2,-1,4)$,所求直线方程为

$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}$

平面与直线

例12.解 $\vec{n}=(1,-1,2),\vec{s}=(2,-1,2)$,

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}=\frac{|1\cdot 2+(-1)\cdot(-1)+2\cdot 2|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}}=\frac{7}{3\sqrt{6}}$$

$\therefore\ \varphi=\arcsin\frac{7}{3\sqrt{6}}$为所求夹角

例14.解 过已知直线的平面束方程为$x+5y+z+\lambda(x-z+4)=0$,

即$(1+\lambda)x+5y+(1-\lambda)z+4\lambda=0$,其法向量$\vec{n}=(1+\lambda,5,1-\lambda)$.又已知平面的法向量$\overrightarrow{n_1}=(1,-4-8)$,由题意知

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{n_1}|}{|\vec{n}||\overrightarrow{n_1}|}=\frac{|(1+\lambda)\cdot 1+5\cdot(-4)+(1-\lambda)\cdot(-8)|}{\sqrt{1^2+(-4)^2+(-8)^2}\sqrt{(1+\lambda)^2+5^2+(1-\lambda)^2}}$$

即$\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{|\lambda-3|}{\sqrt{2\lambda^2+27}}$， 解得$\lambda=-\frac{3}{4}$,代回平面方程为$x+20y+7z-12=0$

方程$x+5y+z+\lambda(x-z+4)=0$为缺少平面$x-z+4=0$的平面束，

平面$x-z+4=0$的法向量$\overrightarrow{n_2}=(1,0,-1)$,由

$$\cos(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2})=\frac{|1\cdot 1+(-1)\cdot(-8)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}\sqrt{1^2+(-4)^2+(-8)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

得夹角为$\frac{\pi}{4}$。从而$x-z+4=0$为所求平面方程。

答案

例15.解 将两已知直线方程化为参数方程为

$$L_1:\begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=t-1 \end{cases},L_2:\begin{cases} x=t \\ y=3t-4 \\ z=2t-1 \end{cases}$$

设所求直线L与L_1,L_2的交点为$A(t_1,2t_1,t_1-1)$和$B(t_2,3t_2-4,2t_2-1)$

$\because M_0(1,1,1)$与A,B三点共线，故$\overrightarrow{M_0A},\overrightarrow{M_0B}$对应坐标成比例，即有

$$\frac{t_1-1}{t_2-1}=\frac{2t_1-1}{(3t_2-4)-1}=\frac{(t_1-1)-1}{(2t_2-1)-1}$$

解得$t_1=0,t_2=2,\therefore A(0,0,-1),B(2,2,3),$

$\because$ 点$M_0(1,1,1)$和$B(2,2,3)$同在直线L上，故L的方程为$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{2}$