第八章 多元函数微分学及其应用

一、 二元函数极限、连续性：概念、计算

二、偏导数：概念、计算

三、全微分：定义、可微条件

四、求导：多元复合函数、隐函数

五、方向导数、梯度

六、几何应用

七、多元函数的极值、最值、条件极值

思考与练习

1. 平面 $3x+\lambda y-3z+16=0$ 与椭球面 $3x^2+y^2+z^2=16$ 相切，求 λ.

2. 设 $f(u)$ 可微，证明曲面 $z=xf(\frac{y}{x})$ 上任一点处的切平面都通过原点。

3. 证明曲面 $F(x-my,z-ny)=0$ 的所有切平面恒与定直线平行，

其中 $F(u,v)$ 可微.

4. 试求一平面，使它通过曲线 $\begin{cases} y^2=x \\ z=3(y-1) \end{cases}$ 在 $y=1$ 处的切线，且与曲面

$x^2+y^2=4z$ 相切。

2. 设 $f(u)$ 可微, 证明曲面 $z = xf(\frac{y}{x})$ 上任一点处的切平面都通过原点。

提示: 在曲面上任意取一点 $M(x_0, y_0, z_0)$,

则通过此点的切平面为

$$z - z_0 = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M (x - x_0) + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M (y - y_0)$$

证明原点坐标满足上述方程 。

3. 证明曲面 $F(x-my, z-ny)=0$ 的所有切平面恒与定直线平行,

其中 $F(u,v)$ 可微.

证: 曲面上任一点的法向量

$$\vec{n}=(F_1, \ F_1\cdot(-m)+F_2\cdot(-n), \ F_2)$$

取定直线的方向向量为 $\vec{l}=(m, 1, n)$ (定向量)

则 $\vec{l}\cdot\vec{n}=0$, 故结论成立。

例 试求一平面，使它通过曲线$\begin{cases} y^2 = x \\ z = 3(y-1) \end{cases}$在 y=1处的切线，且与曲面 $x^2 + y^2 = 4z$ 相切。

解：曲线可看成参数方程$\begin{cases} x = y^2 \\ y = y \\ z = 3(y-1) \end{cases}$

切线方程：$\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z}{3}$

过切线的平面束方程：$x - 2y + 1 + \lambda(3y - z - 3) = 0$

曲面在切点处的法向量：$\vec{n} = (x, y, -2)$

过切线的平面束方程：$x-2y+1+\lambda(3y-z-3)=0$

曲面在切点处的法向量：$\vec{n}=(x,y,-2)$

平面法向量与曲面法向量平行：$\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{3\lambda-2}=\dfrac{-2}{-\lambda}$

$$\Rightarrow x=\frac{2}{\lambda},\quad y=\frac{2}{\lambda}(3\lambda-2)$$

再代入平面束方程得：$6\lambda^2-11\lambda+5=0$

$$\Rightarrow \lambda=1,\ \lambda=\frac{5}{6}$$

所求平面为：$x+y-z-2=0,\quad 6x+3y-5z-9=0$

第八章 多元函数微分学及其应用

一、 二元函数极限、连续性：概念、计算

二、偏导数：概念、计算

三、全微分：定义、可微条件

四、求导：多元复合函数、隐函数

五、方向导数、梯度

六、几何应用

七、多元函数的极值、最值、条件极值

第八节

多元函数的极值及其求法

一、多元函数的极值

二、最值应用问题

三、条件极值

定理 (必要条件) 函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 存在偏导数,

且在该点取得极值，则有 $f_x'(x_0,y_0)=0$， $f_y'(x_0,y_0)=0$

证: 因 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 取得极值，

故 $z=f(x,y_0)$ 在 $x=x_0$ 取得极值

$z=f(x_0,y)$ 在 $y=y_0$ 取得极值

据一元函数极值的必要条件可知定理结论成立。

说明: 使偏导数都为 0 的点称为驻点。但驻点不一定是极值点。

定理 (充分条件)　若函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的邻域内具有

一阶和二阶连续偏导数, 且 $f_x(x_0, y_0) = 0$, $f_y(x_0, y_0) = 0$

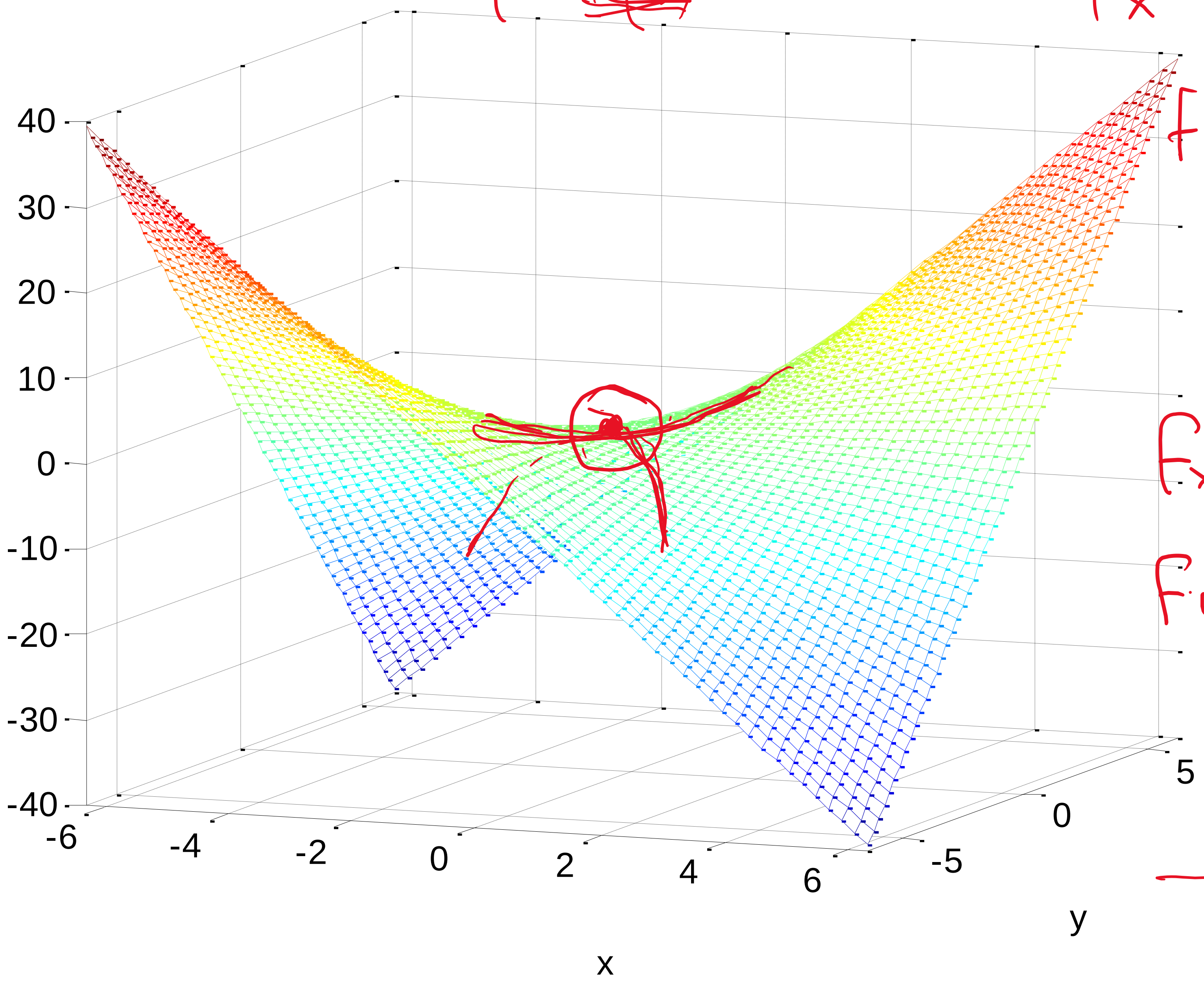
令 $A = f_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f_{yy}(x_0, y_0)$

则: 1) 当 $AC - B^2 > 0$ 时, 具有极值 $\begin{cases} A<0 \text{ 时取极大值;} \\ A>0 \text{ 时取极小值。} \end{cases}$

2) 当 $AC - B^2 < 0$ 时, 没有极值。

3) 当 $AC - B^2 = 0$ 时, 不能确定, 需另行讨论。

$F = xy$



$F_x = y = 0$

$F_y = x = 0$

$(0, 0)$

$F_{xx} = 0, \quad F_{xy} = 1$

$F_{yy} = 0$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$

例1. 求函数 $f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$ 的极值。

解：第一步 求驻点.

解方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)=3x^2+6x-9=0 \\ f_y(x,y)=-3y^2+6y=0 \end{cases}$

得驻点: $(1, 0)$, $(1, 2)$, $(-3, 0)$, $(-3, 2)$.

第二步 判别. 求二阶偏导数

$\underbrace{f_{xx}(x,y)=6x+6}_{A}$, $\underbrace{f_{xy}(x,y)=0}_{B}$, $\underbrace{f_{yy}(x,y)=-6y+6}_{C}$

在点$(1,0)$ 处 $A=12,\ B=0,\ C=6,$

$AC-B^2=12\times 6>0,\ A>0,$

$\therefore f(1,0)=-5$为极小值

在点$(1,2)$处 $A=12, B=0, C=-6$

$$AC-B^2=12\times(-6)<0, \therefore f(1,2)$$不是极值;

在点$(-3,0)$处 $A=-12,\ B=0,\ C=6,$

$$AC-B^2=-12\times 6<0, \ \therefore f(-3,0)$$不是极值;

在点$(-3,2)$处 $A=-12,\ B=0,\ C=-6$

$$AC-B^2=-12\times(-6)>0,\ A<0,$$

$\therefore f(-3,2)=31$为极大值。

$f_{xx}(x,y)=6x+6,\ f_{xy}(x,y)=0,\ f_{yy}(x,y)=-6y+6$

A B C

例. 讨论函数 $z = x^3 + y^3$ 及 $z = (x^2 + y^2)^2$ 在点(0,0)是否取得极值。

解: 显然 $(0,0)$ 都是它们的驻点，并且在 $(0,0)$ 都有

$$AC - B^2 = 0$$

$z = x^3 + y^3$ 在(0,0)点邻域内的取值

可能为 $\begin{cases} \textbf{正} \\ \textbf{负} \\ 0 \end{cases}$ ，因此 $z(0,0)$ 不是极值。

当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时， $z = (x^2 + y^2)^2 > z\big|_{(0,0)} = 0$

因此 $z(0,0) = (x^2 + y^2)^2\big|_{(0,0)} = 0$为极小值。

二、最值问题

依据

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{函数 } f \text{ 在闭域上连续} \\ \Downarrow \\ \text{函数 } f \text{ 在闭域上可达到最值}\end{array}}$$

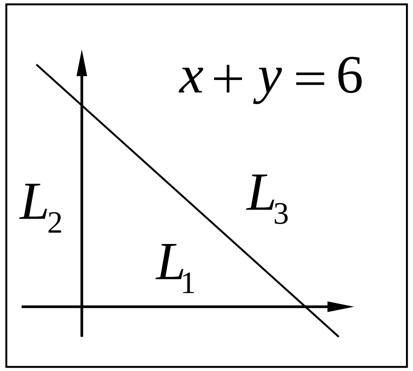
最值可疑点 $\begin{cases}\text{驻点, 偏导数不存在的点} \\ \text{边界上的最值点}\end{cases}$

特别, 当区域内部最值存在, 且**只有一个**极值点 P 时,

$f(P)$ 为极小**(大)** 值 $\Longrightarrow$ $f(P)$ 为最小**(大)** 值

例. 设区域 D 由 x 轴、y 轴及直线 $x+y=6$ 围成的三角形区域，

求函数 $f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在 D 上的最大值和最小值。



解: 解方程组 $\begin{cases} f_x(x,y)=2xy(4-x-y)-x^2y=0 \\ f_y(x,y)=x^2(4-x-y)-x^2y=0 \end{cases}$

得 $f(x,y)$ 在 D 内的唯一驻点 $(2,1)$，$f(2,1)=4$.

在 L_1 上，$y=0,\quad 0\le x\le 6,\quad f(x,y)\equiv 0$

在 L_2 上，$x=0,\quad 0\le y\le 6,\quad f(x,y)\equiv 0$

在 L_3 上，$y=6-x,\quad 0\le x\le 6,\quad z=\varphi(x)=2x^3-12x^2$

$\varphi'(x)=6x^2-24x$，令 $\varphi'(x)=0$，得 $x=0$ 或 $x=4$.

$\because \varphi(0)=0,\quad \varphi(4)=-64,\quad \varphi(6)=0.$

所以在 D 上最大值为 $f(2,1)=4$，最小值为 $f(4,2)=-64$.

三、条件极值

$\boxed{f(x,y)}$, $\boxed{\phi(x,y)=0}$ $\Rightarrow$ $\underline{y=g(x)}$

$f(x, g(x))$, $\frac{df}{dx}=0 \Rightarrow f_x + f_y \frac{dy}{dx}=0$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{\phi_x}{\phi_y}$ $\therefore$ $f_x - \frac{\phi_x}{\phi_y} f_y = 0 \Rightarrow \frac{f_x}{\phi_x} = \frac{f_y}{\phi_y} = \lambda$

$f_x - \lambda\phi_x = 0$, $f_y - \lambda\phi_y = 0$

$(f-\lambda\phi)_x = 0$ $(f-\lambda\phi)_y = 0$

$F = f - \lambda\phi = \underline{F(x,y,\lambda)}$

$F_x=0$, $F_y=0$, $F_\lambda=0$

三、条件极值

$$\text{极值问题}\begin{cases}\text{无条件极值: 对自变量只有定义域限制} \\ \text{条件极值: 对自变量除定义域限制外,} \\ \qquad\qquad\quad \text{还有其它条件限制}\end{cases}$$

条件极值的求法:

方法1 代入法. 例如,

在条件 $\varphi(x,y)=0$ 下, 求函数 $z=f(x,y)$ 的极值

$\Big\downarrow$ 转化 从条件 $\varphi(x,y)=0$ 中解出 $y=\psi(x)$

求一元函数 $z=f(x,\psi(x))$ 的无条件极值问题

方法 2 **拉格朗日乘数法**. **例如,**

在条件 $\varphi(x, y)=0$ 下，求函数 $z=f(x, y)$ 的极值.

如方法 1 所述，设 $\varphi(x, y)=0$ 可确定隐函数 $y=\varphi(x)$,

则问题等价于一元函数 $z=f(x, \varphi(x))$ 的极值问题,

故极值点必满足 $\dfrac{\mathrm{d} z}{\mathrm{d} x}=f_x+f_y \dfrac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x}=0$

因 $\dfrac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x}=-\dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}$, 故有 $f_x-f_y \dfrac{\varphi_x}{\varphi_y}=0$ 　记 $\dfrac{f_x}{\varphi_x}=\dfrac{f_y}{\varphi_y}=-\lambda$

极值点必满足 $\begin{cases} f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$

引入辅助函数 $F = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y)$

则极值点满足: $\begin{cases} F_x = f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ F_y = f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ F_\lambda = \varphi = 0 \end{cases}$

辅助函数F 称为拉格朗日(Lagrange)函数.

利用拉格朗日函数求极值的方法称为拉格朗日乘数法.

推广 拉格朗日乘数法可推广到多个自变量和多个约束条件的情形。

例如, 求函数 $u = f(x, y, z)$ 在条件 $\varphi(x, y, z) = 0, \psi(x, y, z) = 0$ 下的极值.

设 $F = f(x, y, z) + \lambda_1 \varphi(x, y, z) + \lambda_2 \psi(x, y, z)$

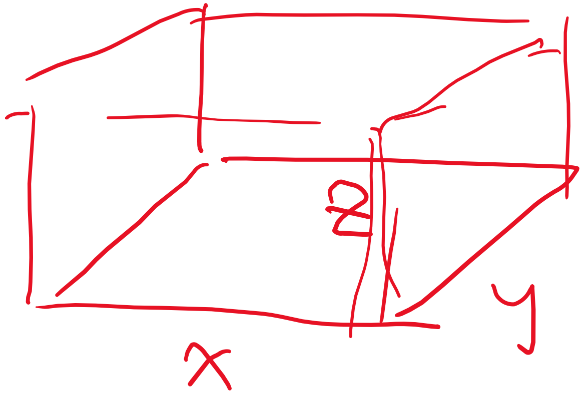
解方程组 $$\begin{cases} F_x = f_x + \lambda_1 \varphi_x + \lambda_2 \psi_x = 0 \\ F_y = f_y + \lambda_1 \varphi_y + \lambda_2 \psi_y = 0 \\ F_z = f_z + \lambda_1 \varphi_z + \lambda_2 \psi_z = 0 \\ F_{\lambda_1} = \varphi = 0 \\ F_{\lambda_2} = \psi = 0 \end{cases}$$

可得到条件极值的可疑点 .

例. 要设计一个容量为 V_0 的长方体开口水箱, 试问水箱长、宽、高等于多少时所用材料最省?

$$\boxed{V_0 = xyz}$$

$$S = xy + 2yz + 2xz$$ 求极值.

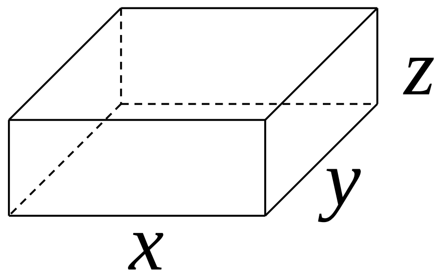


$$F = xy + 2xz + 2yz + \lambda xyz$$

$$\begin{cases} F_x = 0 \\ F_y = 0 \\ F_z = 0 \\ F_\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

例. 要设计一个容量为 V_0 的长方体开口水箱, 试问水箱长、宽、高等于多少时所用材料最省?

解: 设 x, y, z 分别表示长、宽、高, 则问题为求 x, y, z 使在条件 $xyz = V_0$ 下水箱表面积最小。$S = 2(xz + yz) + xy$



令 $F = 2(xz + yz) + xy + \lambda(xyz - V_0)$

解方程组 $\begin{cases} F_x = 2z + y + \lambda yz = 0 \\ F_y = 2z + x + \lambda xz = 0 \\ F_z = 2(x + y) + \lambda xy = 0 \\ F_\lambda = xyz - V_0 = 0 \end{cases}$ 得唯一驻点 $x = y = 2z = \sqrt[3]{2V_0}$,

$$\lambda = \frac{-4}{\sqrt[3]{2V_0}}$$

因此, 当高为 $\sqrt[3]{\frac{V_0}{4}}$, 长、宽为高的 2 倍时, 所用材料最省。

内容小结

1. 函数的极值问题

第一步 利用必要条件在定义域内找驻点。

如对二元函数 $z = f(x, y)$,即解方程组 $\begin{cases} f_x(x, y) = 0 \\ f_y(x, y) = 0 \end{cases}$

第二步 利用充分条件 判别驻点是否为极值点 .

2. 函数的条件极值问题

(1) 简单问题用代入法

(2) 一般问题用拉格朗日乘数法

如求二元函数$z = f(x, y)$在条件$\varphi(x, y) = 0$下的极值,

设拉格朗日函数 $F = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y)$

解方程组 $\begin{cases} F_x = f_x + \lambda\varphi_x = 0 \\ F_y = f_y + \lambda\varphi_y = 0 \\ F_\lambda = \varphi = 0 \end{cases}$ 求驻点。

3. **函数的最值问题**

第一步 找目标函数, 确定定义域 (及约束条件)

第二步 判别

- 比较驻点及边界点上函数值的大小
- 根据问题的实际意义确定最值

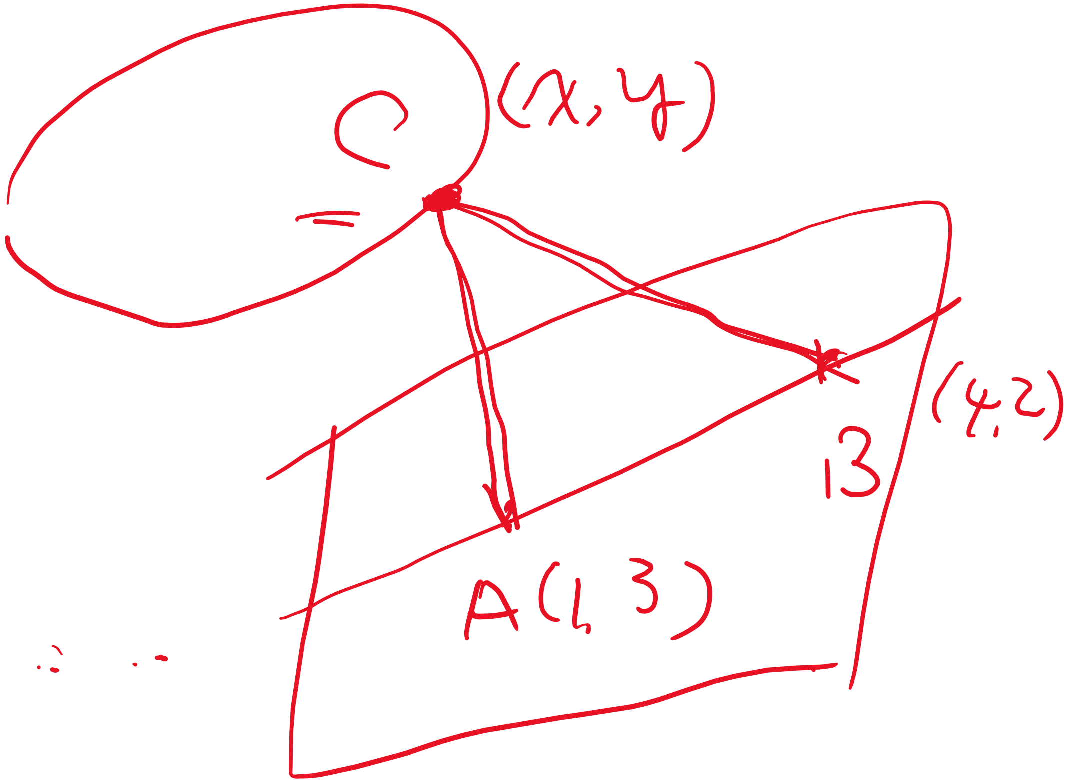
练习 已知平面上两定点 $A(1,3)$, $B(4,2)$, 试在椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1\ (x>0,\ y>0)$ 圆周上求一点 C, 使 $\triangle ABC$ 面积 $S_\triangle$ 最大.

$$S_\triangle = \frac{1}{2}\left|\vec{AC}\times\vec{BC}\right|$$

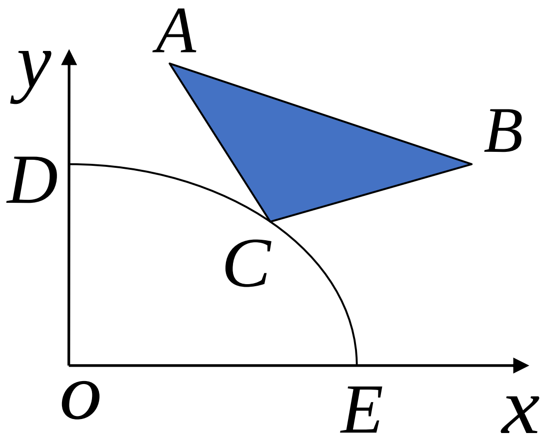
$$\phi = \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-1=0$$

$$F = S_\triangle + \lambda\phi$$

$$\begin{cases} F_x=0 \\ F_y=0 \\ F_\lambda=0 \end{cases} \Rightarrow \cdots$$



练习 已知平面上两定点 $A(1,3)$, $B(4,2)$, 试在椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\ (x>0, y>0)$ 圆周上求一点 C, 使 $\triangle ABC$ 面积 $S_\triangle$最大.



解答提示: 设 C 点坐标为 (x, y),

则 $S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$

$$=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 0\\ x-1 & y-3 & 0\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\left|(0,0,x+3y-10)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|x+3y-10\right|$$

设拉格朗日函数 $F=(x+3y-10)^2+\lambda(1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4})$

解方程组 $\begin{cases} 2(x+3y-10)-\frac{2\lambda}{9}x=0 \\ 6(x+3y-10)-\frac{2\lambda}{4}y=0 \\ 1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=0 \end{cases}$

得驻点 $x=\frac{3}{\sqrt{5}}, y=\frac{4}{\sqrt{5}}$, 对应面积 $S\approx 1.646$

而 $S_D=2, S_{\mathrm{E}}=3.5$, 比较可知, 点 C 与 E 重合时, 三角形面积最大。