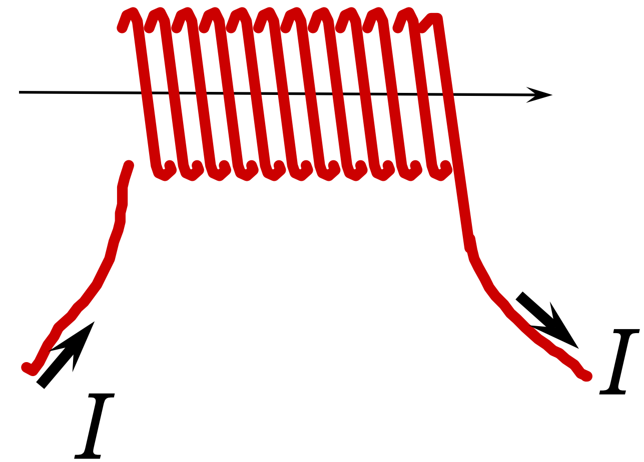
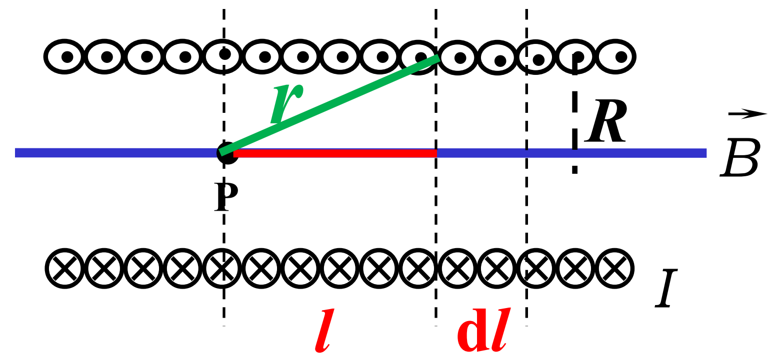
例3 载流螺旋管在其轴上的磁场



求： 半径为 R，总长度L，单位长度的匝数是n的螺线管在其轴线上的磁场？



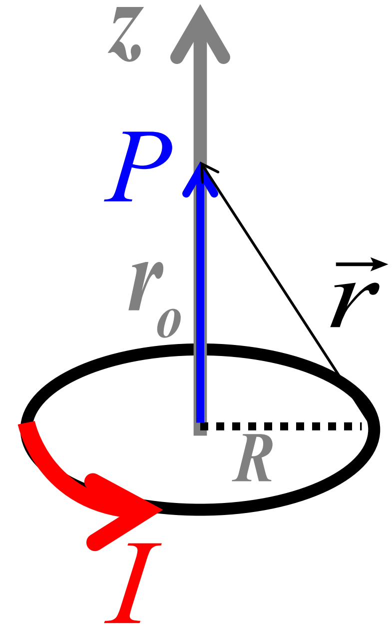
解： 长度 dl 内的各匝圆线圈电流的总效果，是一匝圆电流线圈的n dl倍。

$$dI = nIdl$$

$$dm = SdI = \pi R^2 dI = \pi R^2 nIdl$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 d\vec{m}}{2\pi r^3} \qquad d\vec{B} = \frac{\mu_0 nIR^2 dl}{2r^3}$$

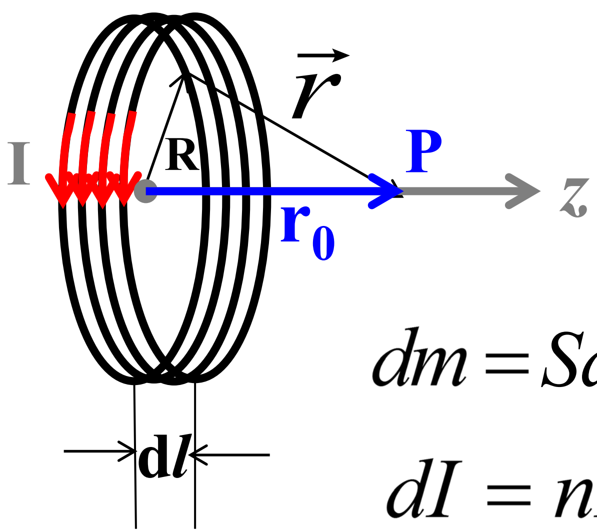
载流圆线圈在其轴上的磁场

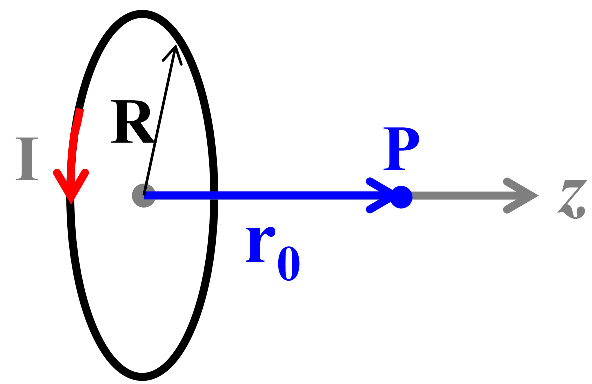


$$B_z = \frac{\mu_0 R^2 I}{2r^3}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \vec{m}}{2\pi r^3}$$

磁矩 $\vec{m} = I\pi R^2 \vec{n}$

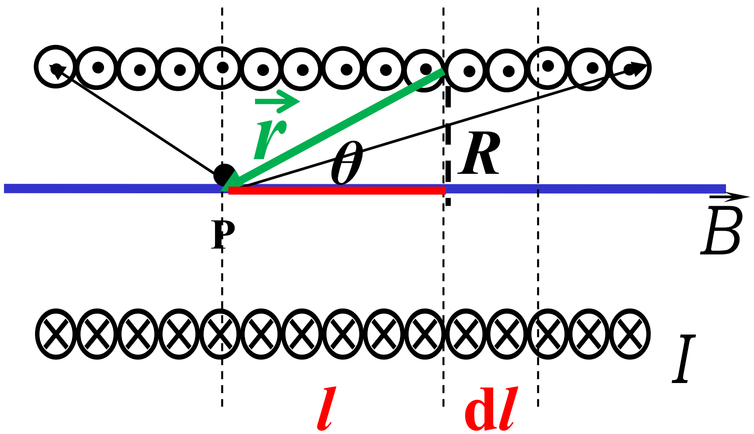




$$dm = SdI = \pi R^2 nIdl$$

$$dI = nIdl$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 n I R^2 dl}{2r^3}$$



$$dl = -\frac{R}{\sin^2\theta} d\theta$$

$$R = r\sin\theta$$

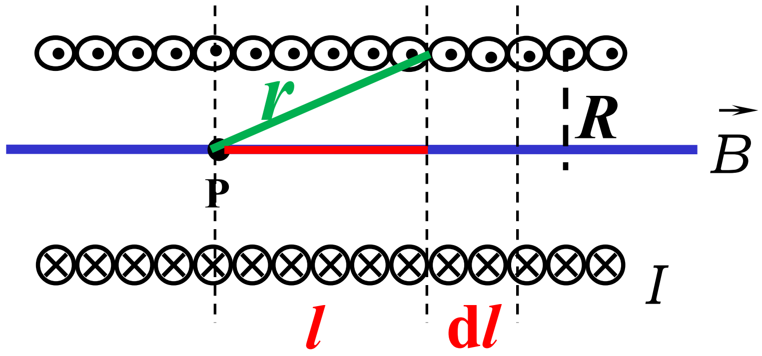
$$l = Rctg\theta$$

$$dB = -\frac{\mu_o n I}{2}\sin\theta d\theta$$

$$B = -\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\mu_o n I}{2}\sin\theta d\theta$$

$$\boldsymbol{B = \frac{\mu_o n I}{2}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)}$$

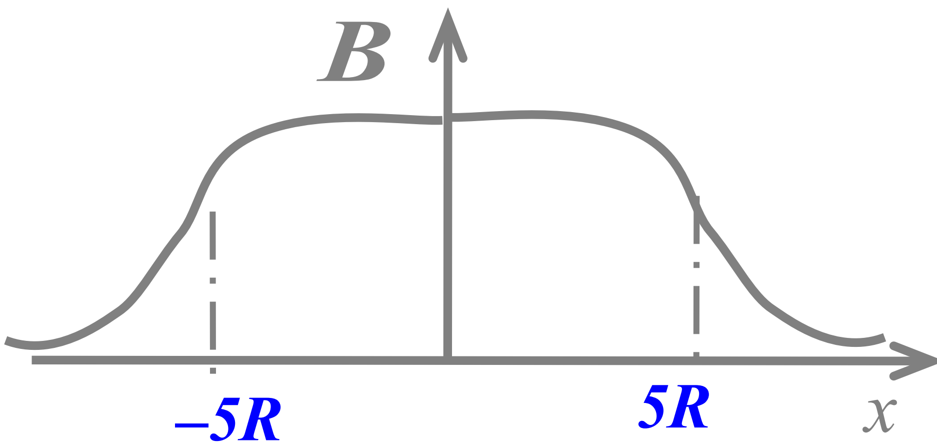
$$B = \frac{\mu_o n I}{2}(\cos\theta_2 - \cos\theta_1)$$



载流螺旋管在其轴上的磁场，磁场方向与电流满足右手螺旋法则。

$\theta_2 = 0,\ \theta_1 = \pi$ $B = \mu_o n I$

$\theta_1 = \pi,\ \theta_2 = \pi/2$ $B = \frac{1}{2}\mu_0 n I$

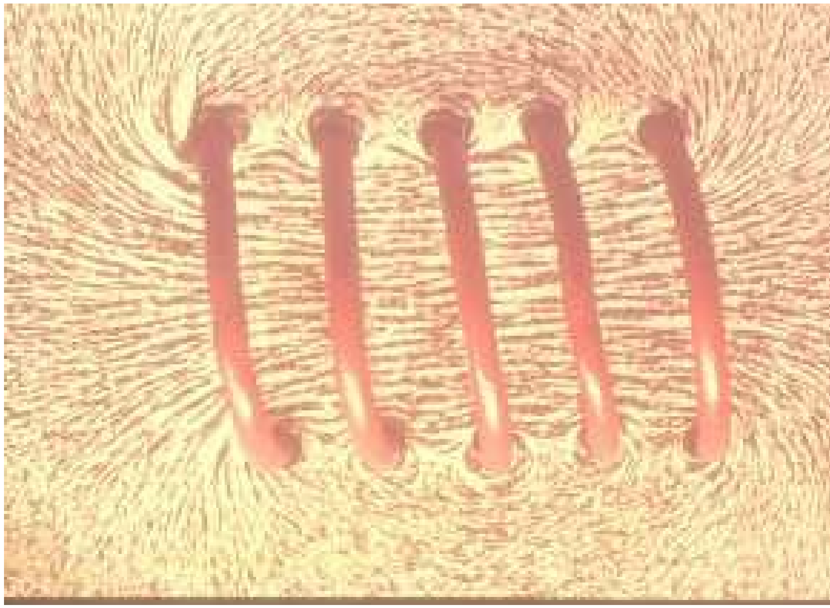


L =10 R

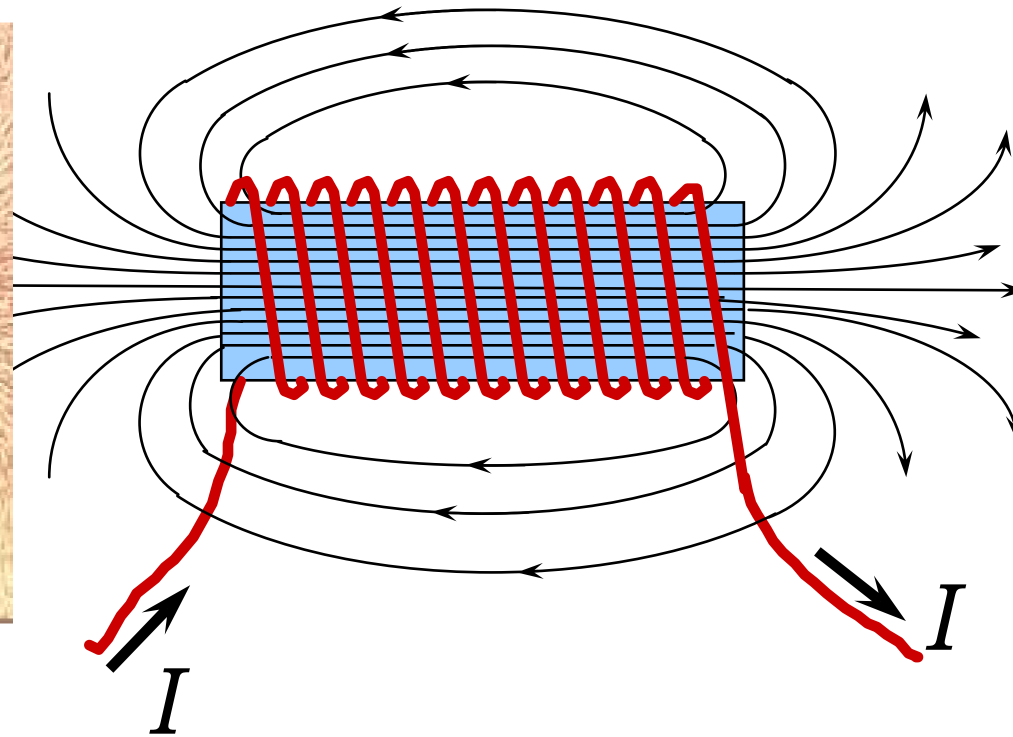
在管端口处，磁场等于中心处的一半。

在距管轴中心约七个管半径处，磁场就几乎等于零了。

通电螺线管的磁力线



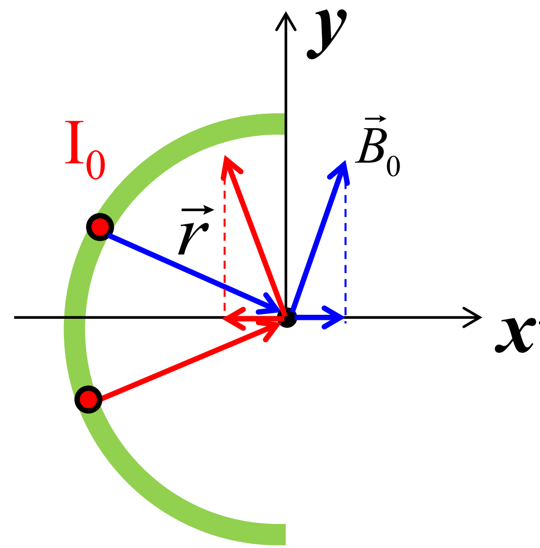
直螺线管电流的磁感线

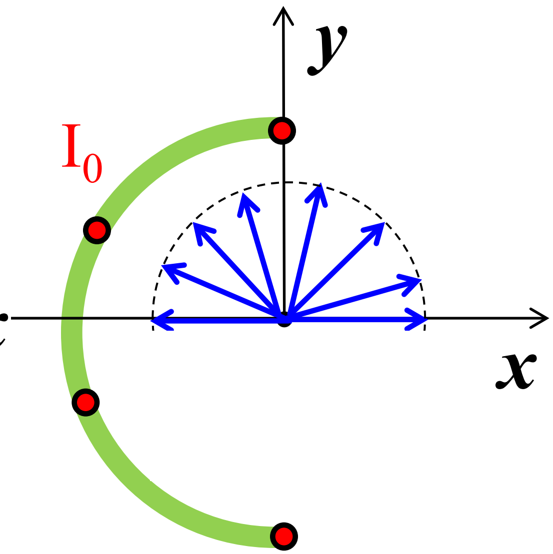


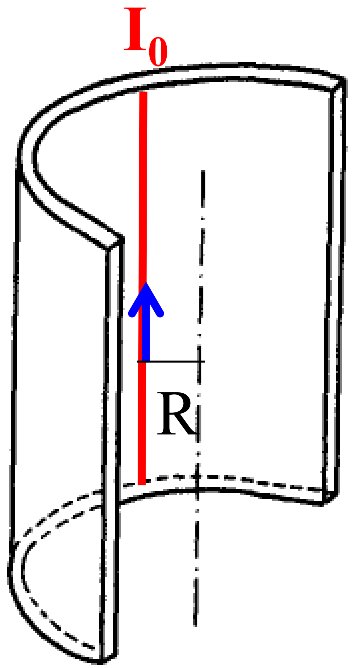
$$B=\frac{\mu_o nI}{2}(\cos\theta_2-\cos\theta_1)$$

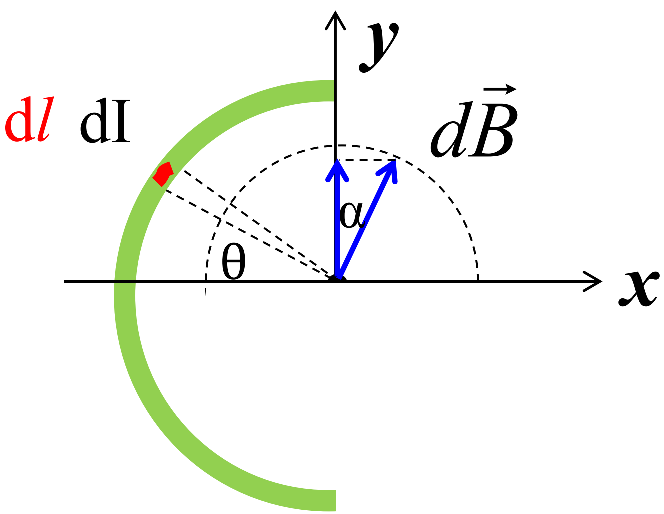
作业1：

在半径R=1cm的“无限长”半圆柱形金属箔，有电流I_1=5A，自下而上地通过，求圆柱轴上一点磁感应强度。





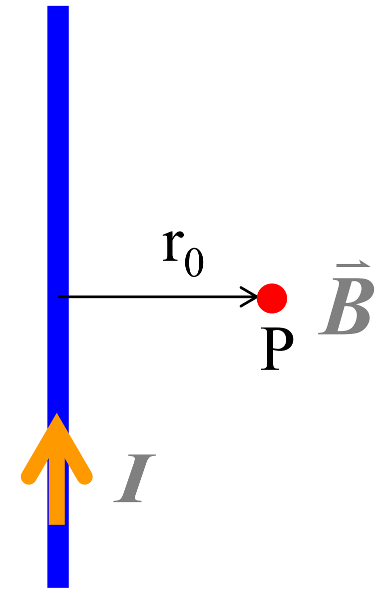




$$B_0 = \frac{\mu_o I_0}{2\pi R}$$

直线电流的磁场

$$B=\frac{\mu_o I}{4\pi r_o}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$



无限长直流电流

$$\theta_1=0 \qquad \theta_2=\pi \qquad B=\frac{\mu_o I}{2\pi r_o}$$

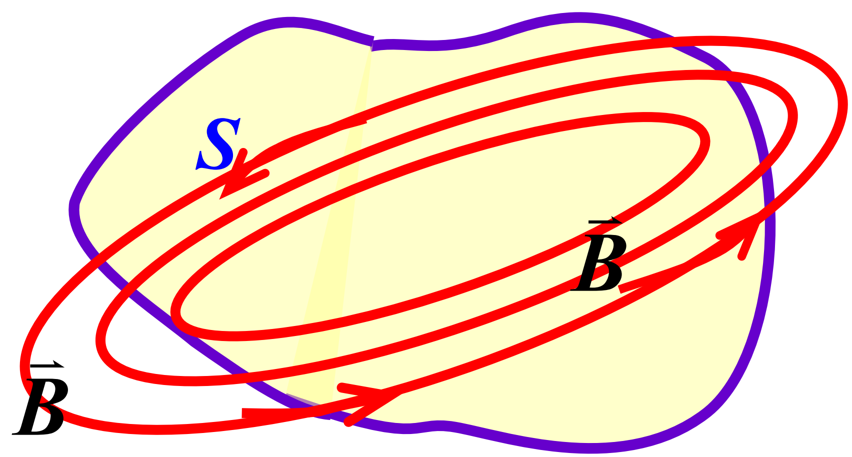
13.4 磁通连续定理和安培环路定理

一、磁通连续定理：

任何磁场中通过任意封闭曲面的磁通量等于零。

——磁场的高斯定理

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$$



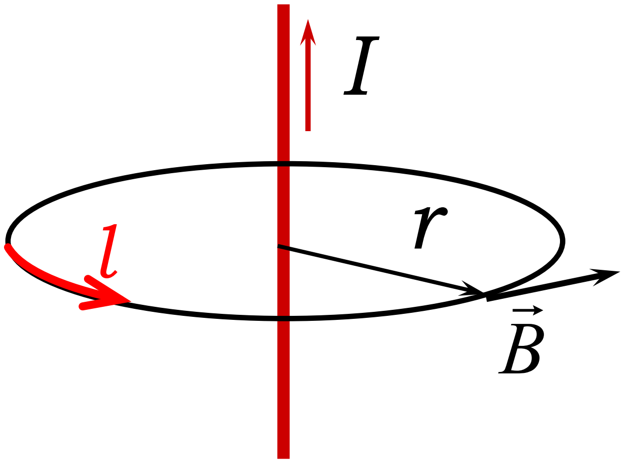
解释: 磁感应线是闭合的，因此有多少条磁感应线进入闭合曲面，就一定有多少条磁感应线穿出该曲面。

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{\sum q_{\mathrm{i}}}{\varepsilon_0}$$

二、安培环路定理

在静电场中 $\oint_l \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$ ，说明静电场是保守场；

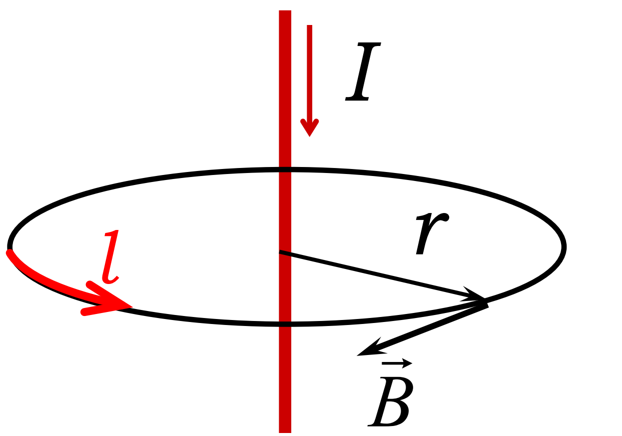
在稳恒电流的磁场中 $\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = ?$



(1) 圆形积分回路

$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_l \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dl = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\int_l dl = \mu_0 I$$

即：$\oint_l \vec{B}\bullet d\vec{l} = \mu_0 I$



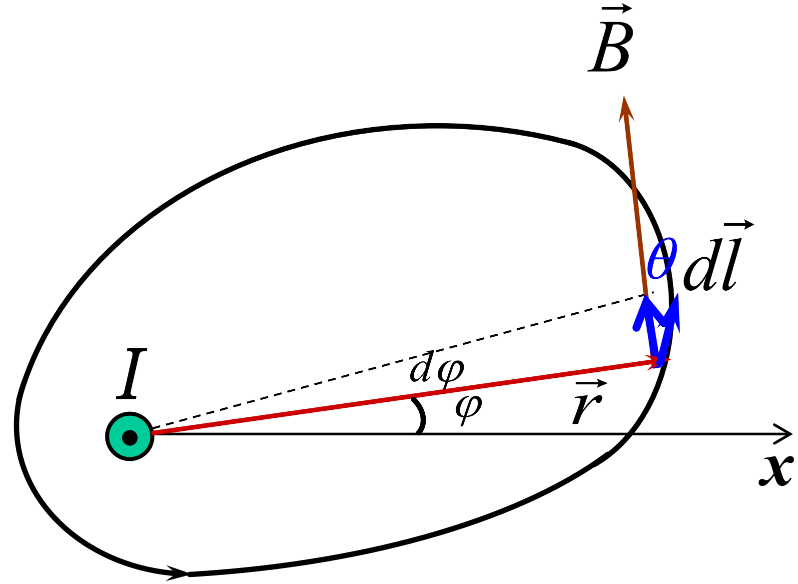
改变电流方向 $\oint_l \vec{B}\bullet d\vec{l} = -\mu_0 I$

(2) 任意积分回路

$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_l B\cos\theta dl$$

$$= \oint_l \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cos\theta dl$$

$$= \oint_l \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\varphi = \mu_0 I$$

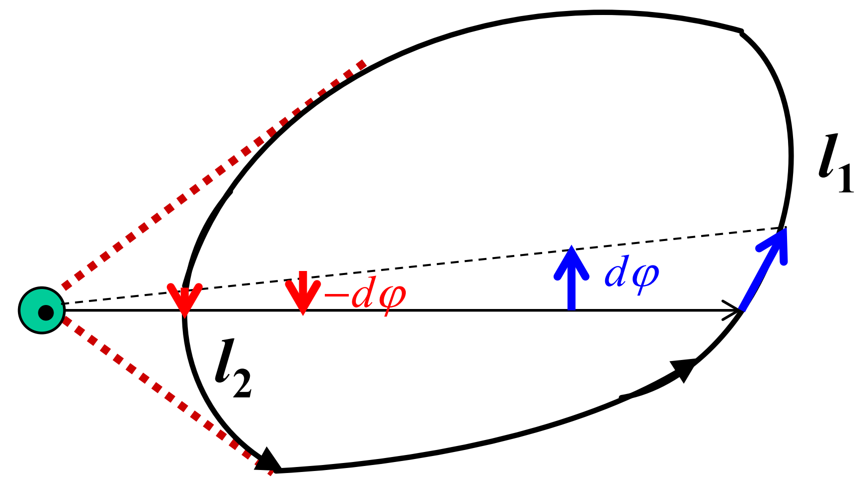


即：$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

(3) 回路不环绕电流

$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\int_{l_1} d\varphi + \int_{l_2} d\varphi\right)$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left[\alpha + (-\alpha)\right] = 0$$



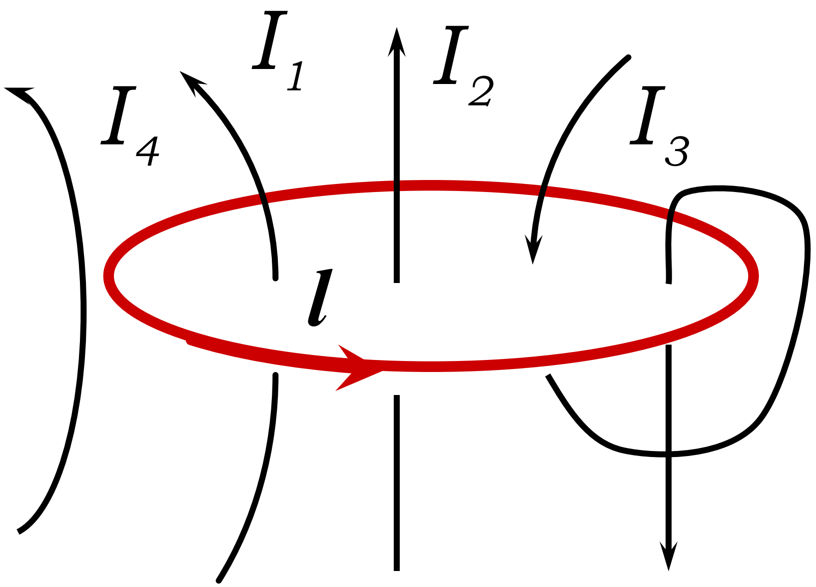
由前面分析可知：

在真空中的稳恒电流磁场中，磁感应强度$\vec{B}$沿任意闭合曲线的线积分（也称 $\vec{B}$ 的环流），等于穿过该闭合曲线的所有电流强度（即穿过以闭合曲线为边界的任意曲面的电流强度）的代数和的 μ_0 倍。

即：$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$

与环路成右旋关系的电流取正

如图：$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\left(I_1 + I_2 - 2I_3\right)$



*关于安培环路定理的讨论：

①若电流方向与环路的正方向满足右旋关系，则：

$I > 0$ 否则 $I < 0$

② $\mu_0 \sum I_i$ 中 $\sum I_i$ 为环路包含的总电流，环路外不计。

③磁感应强度的环流只与环路内的电流有关，但环路上一点的磁感应强度是由环路内、外电流共同产生的。

④安培环路定理是反映磁场普遍性质的基本定理之一，也是普遍的电磁场理论的基本方程之一。

⑤安培环路定理揭示了磁场的基本性质，磁场是有旋场，是非保守场，故不能引入势能的概念。

静电场	稳恒磁场
$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$	$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$
电场有保守性，它是保守场，或有势场	磁场没有保守性，它是非保守场，或无势场
$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum q_i$	$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$
电力线起于正电荷、止于负电荷。静电场是有源场	磁力线闭合、无自由磁荷磁场是无源场

三、安培环路定理求磁场的分布

适用范围：磁场的分布具有一定的对称性。

1. 依据电流的对称性分析磁场分布的对称性

2. 选取合适的闭合路径,该路径包含求磁感应强度的场点，且在该路径上B以标量形式提出积分符号。

3. 利用安培环路定理计算B的数值和方向
(注意环路方向与电流方向的右旋关系)

例1：求无限长圆柱面电流的磁场分布

(半径为 R)

- 电流分布轴对称
- 磁场分布也具有轴对称性

仅有B_t,而B_r和B_a皆是零

(1)对于B_r，利用磁通连续定理，有

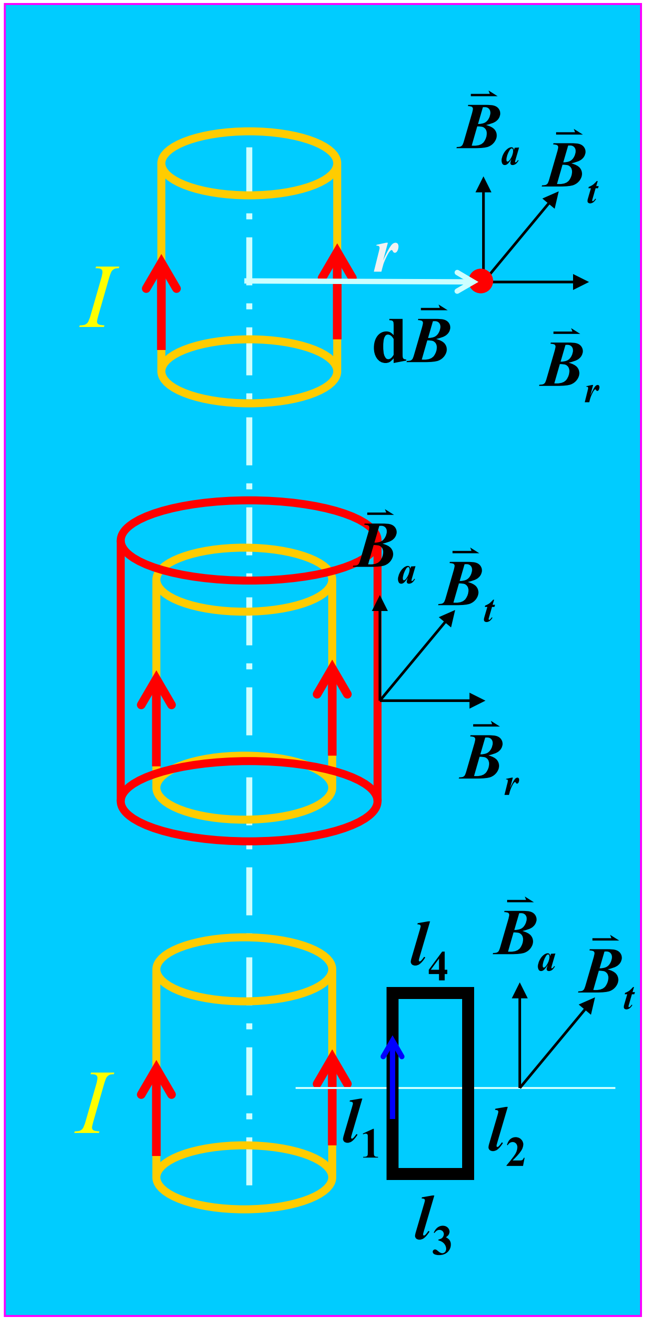
$$\oint_s \vec{B}\cdot d\vec{S} = \oint_{s_1} B_r dS = B_r 2\pi r l = 0$$

(2)对于B_a，利用安培环路积分

$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_{l1} B_a dl + \oint_{l2} B_a dl$$

$$= B_a l - B'_a l = 0$$

$$B_a = B'_a$$



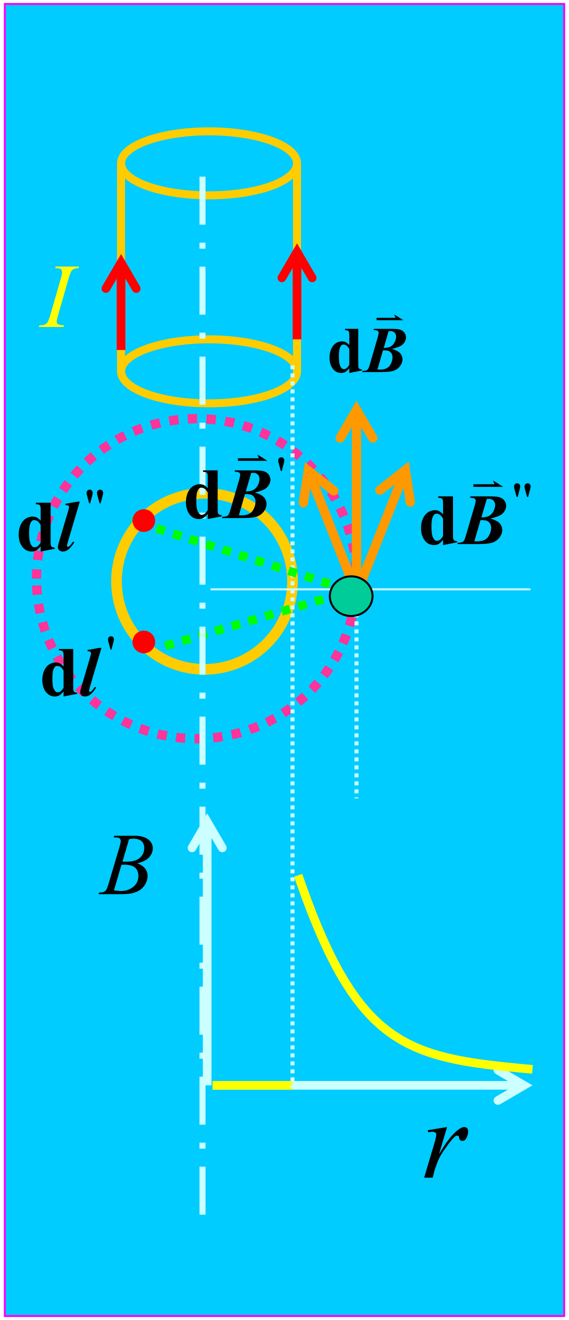
(3)对于B_l，以轴上一点为圆心，取垂直于轴的平面内半径是r 的圆为积分环路

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = 2\pi rB = \mu_o I$$

$$B = 0 \qquad r \le R$$

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi r} \qquad r > R$$

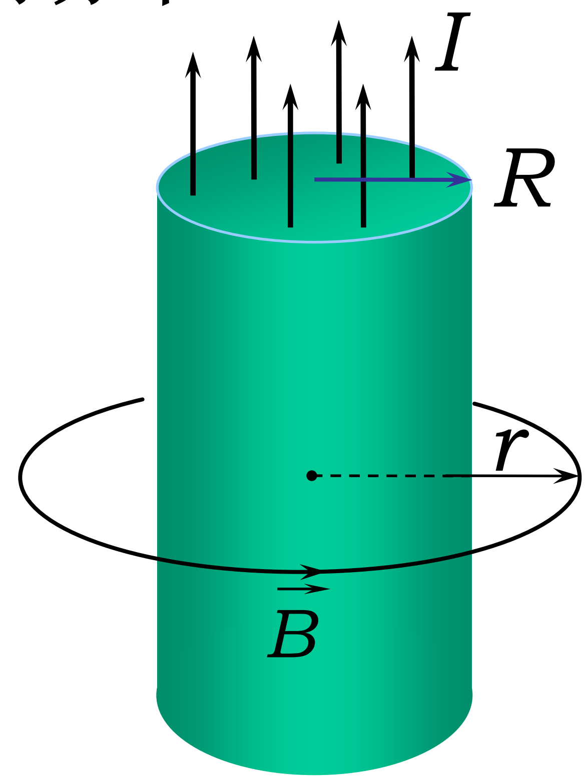
无限长圆柱面电流外面的磁场与电流都集中在轴上的直线电流的磁场相同



例2："无限长"载流圆柱导体内外磁场的分布

已知：I 、R，电流沿轴向在截面上均匀分布

电流及其产生的磁场具有轴对称分布



作**积分回路**如图

(1) 当 $r > R$ 时，如图

则$\vec{B}$沿该闭合回路的环流为：

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_l B dl = 2\pi r B$$

根据**安培环路**定理：

$$\oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

则：$B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

(2) 当 $r < R$ 时，如图示

作**积分回路**如图

则 $\vec{B}$ 沿该闭合回路的环流为：

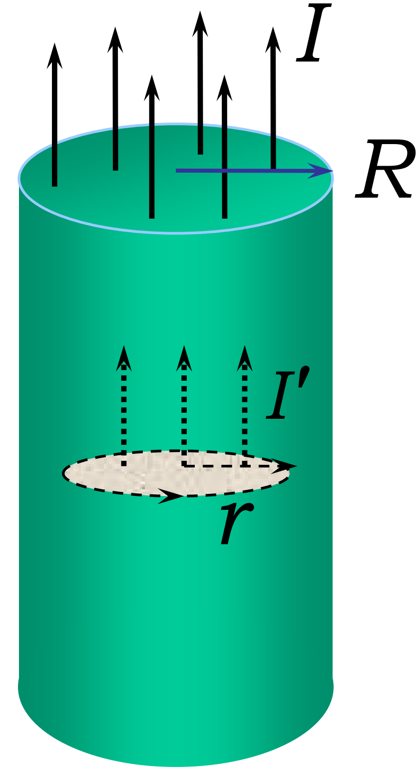
$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_l B dl = 2\pi r B$$

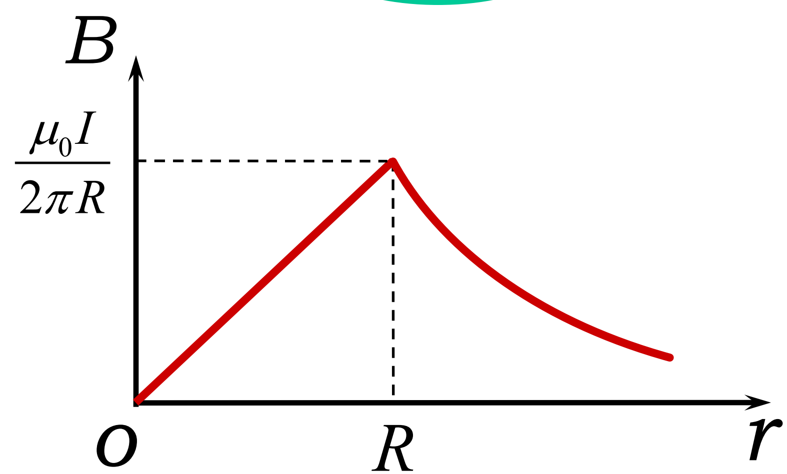
根据**安培环路**定理：

$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I'$$

$$= \mu_0 \frac{I}{\pi R^2}\pi r^2$$

则：$B = \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$



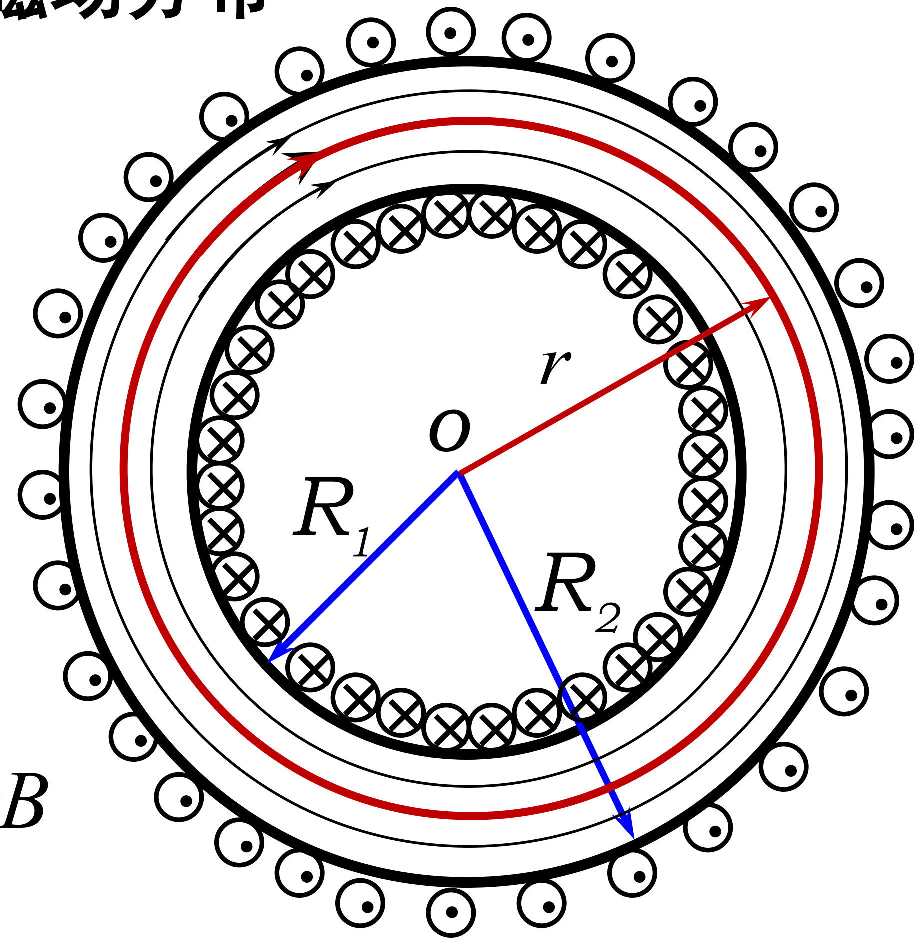


例3：环形载流螺线管内的磁场分布

已知：I、N、R_1、R_2

N— 导线总匝数

磁力线分布如图



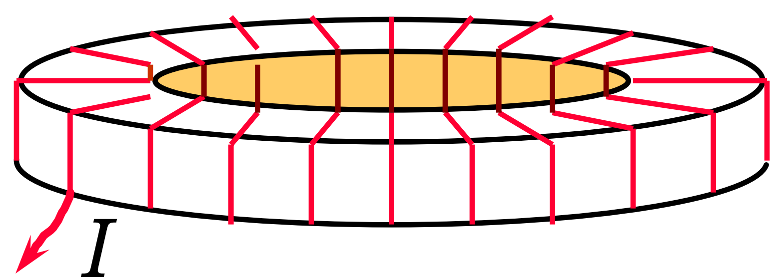
作**积分回路**如图

则$\vec{B}$沿该闭合回路的**环流**为：

$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \oint_l B dl = 2\pi r B$$

根据**安培环路**定理：

$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 N I$$

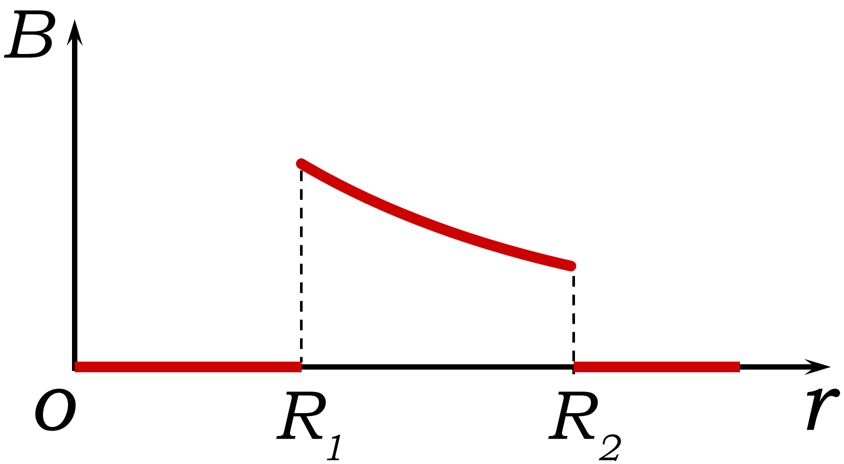


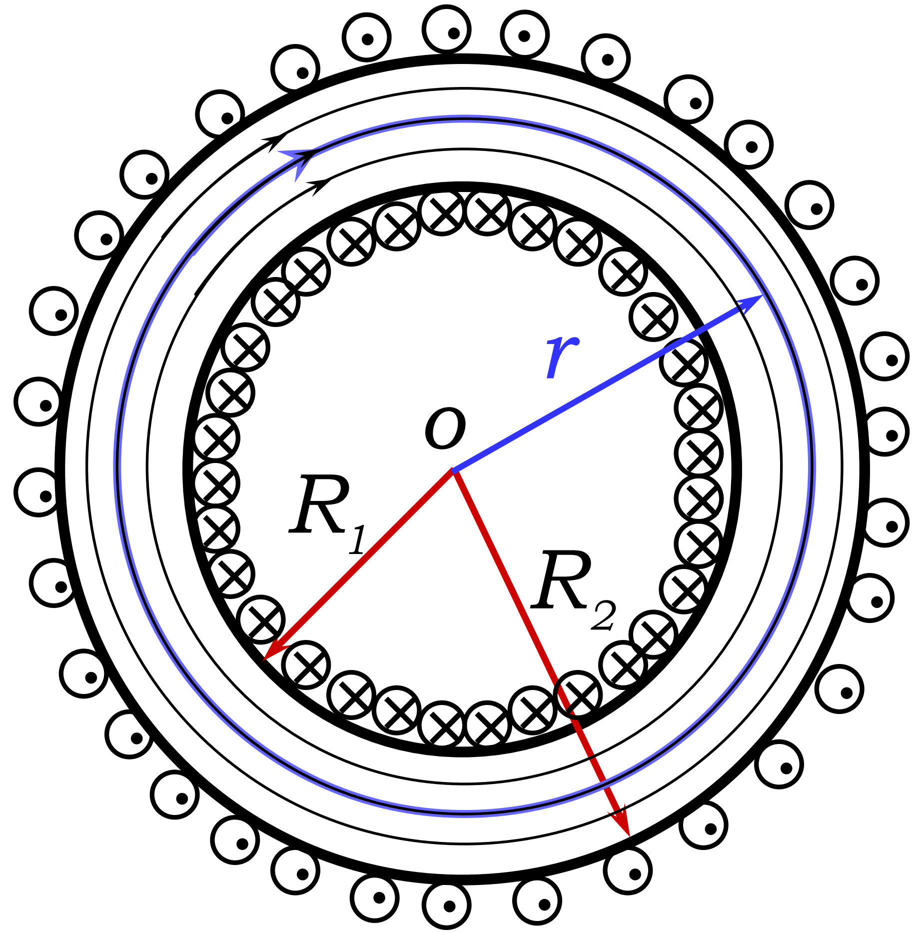
$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

若$\boldsymbol{R_1}$、$\boldsymbol{R_2 >> R_2 - R_1}$

$$n = \frac{N}{2\pi R_1}$$

则：$B \approx \mu_0 nI$





作业2：

有一导体片，由无限多根邻近的导线组成，每根导线都无限长，并且载有电流i。试证明**B**的方向如图所示，且在无限电流片外各点**B**的大小满足：

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 n i$$

这里**n**表示每单位长度上导线的根数。