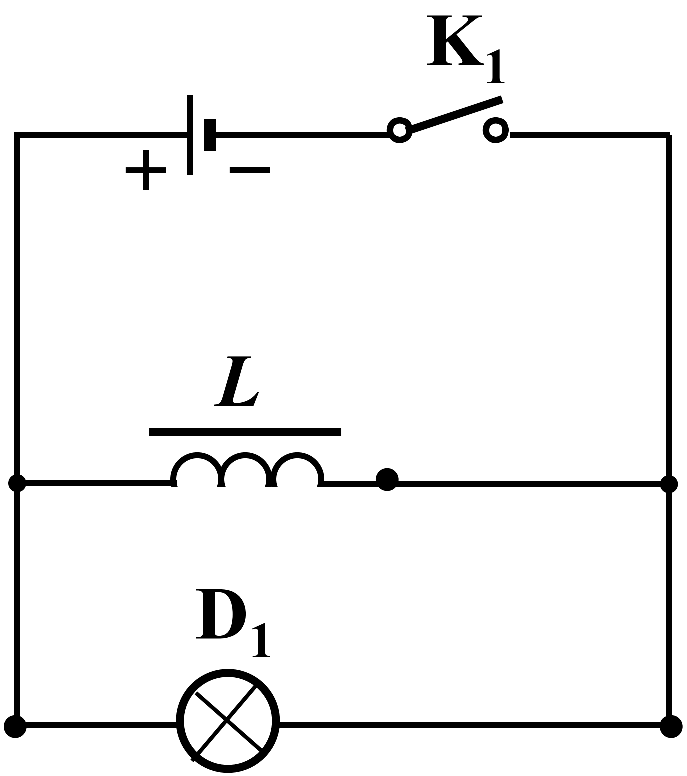
3、磁场能量

磁场与电场一样，都具有能量

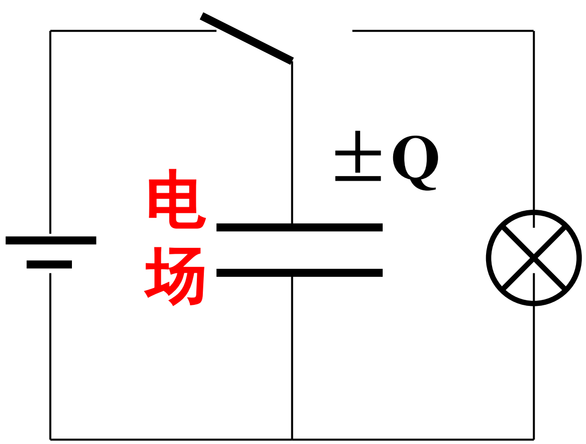
场建立过程中，外界作功转化为场的能量



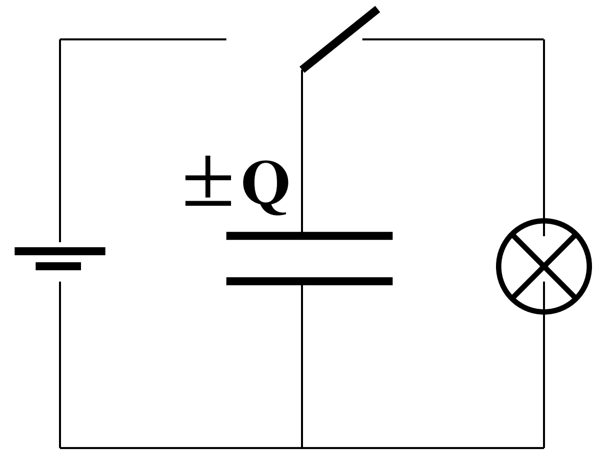
断开K_1： D_1会突然的闪一下再熄灭

磁场： 电源克服感应电动势所作的功转化为磁场的能量。

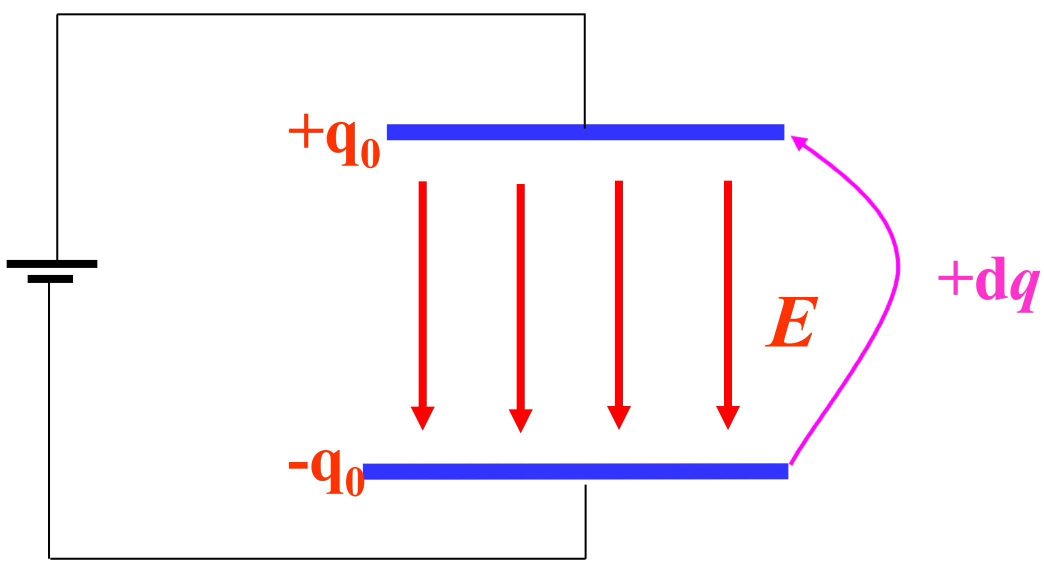
电场具有能量



充电



放电



静电场：外力克服静电场力作功转化为静电场的能量

一、 自感磁能

R： 回路的等效电阻

$$\varepsilon = -\varepsilon_L + iR$$

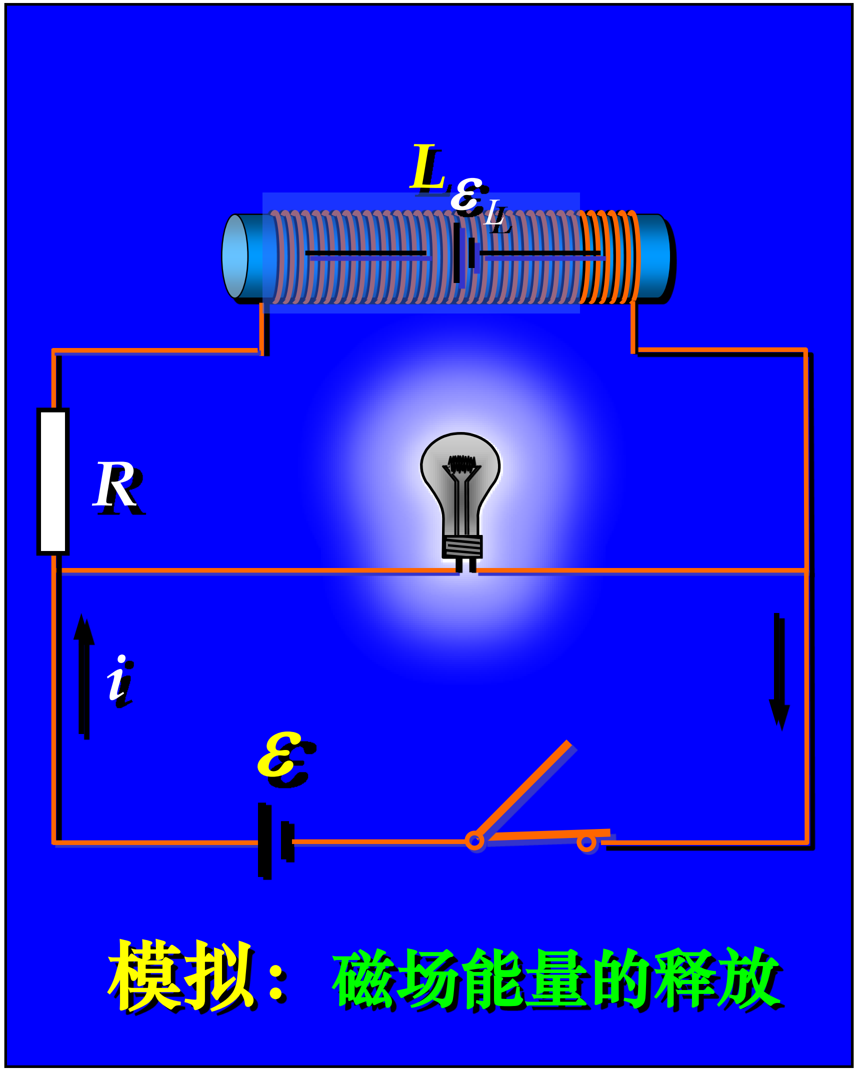
t ~ t+dt 时间内电源作功

$$dW = i\varepsilon dt$$

$$= -\varepsilon_L i dt + i^2 R dt$$

其中： $t : 0 \to \tau$

$i : 0 \to I$



t ~ t+dt 时间内电源作功 $dW = \varepsilon i dt = -\varepsilon_L i dt + i^2 R dt$

$-\varepsilon_L i dt$ ： 磁能（储存在螺线管的磁场中）

$i^2 R dt$ ： 焦耳热

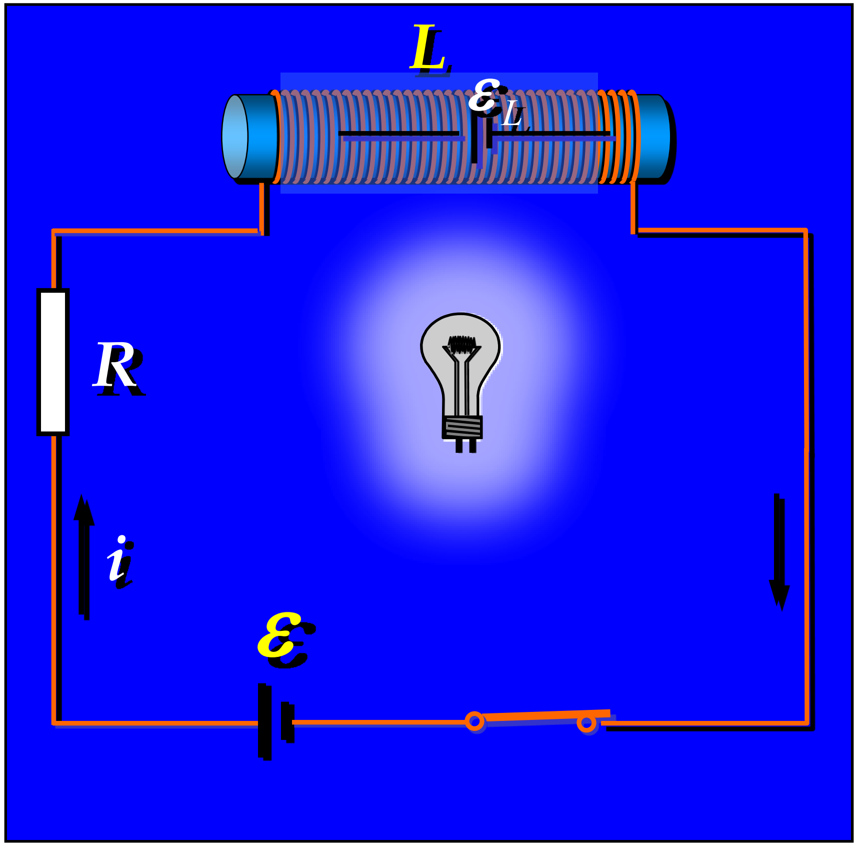
充电结束时电源克服自感电动势作功

$$A = -\int i\varepsilon_L dt$$

$$= -\int i\left(-L\frac{di}{dt}\right)dt$$

$$= L\int i di$$

$$= \frac{1}{2}LI^2$$



3、磁场能量

自感磁能 $$\boxed{W_m = \frac{1}{2}LI^2}$$

对长直螺线管由 $B = \mu nI$ 和 $L = \mu n^2 V$ ，得：$W_m = \dfrac{B^2}{2\mu}V$

磁能密度： $$\boxed{w_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}}$$

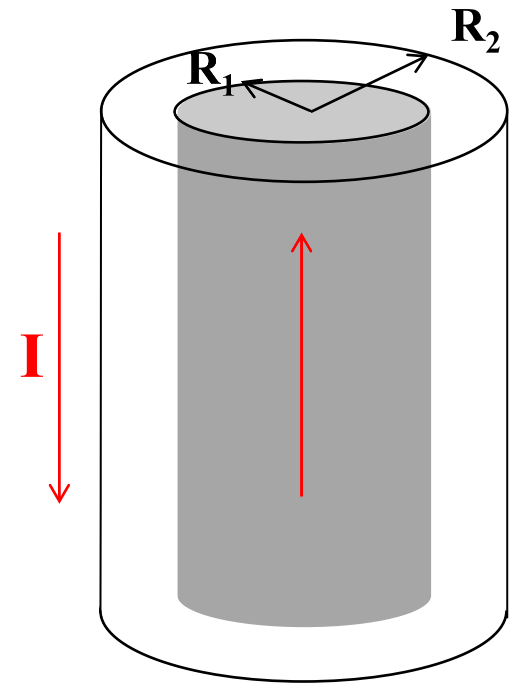
磁场能量 $$W_m = \int_V \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H}\,\mathrm{d}V$$

从能量角度理解电感中电流之所以不能突变，是因为磁能不能突变，否则功率将为无限大。

从磁能角度看，任何一个电流系统都有相应的电感量L，故也可以从能量出发计算L：

$$\boxed{L = \frac{2W_m}{I^2}}$$

例4：一无限长同轴电缆是圆柱形导体(半径R_1，磁导率μ_1)，与半径R_2（$R_2>R_1$）的金属圆筒组成，在金属圆柱与圆筒之间充满磁导率是μ_2的磁介质，电流I从圆筒流出，从圆柱流回，求单位长度的磁能。

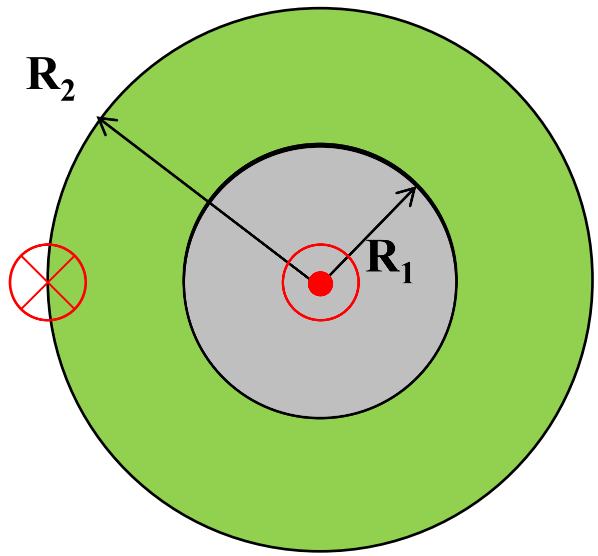


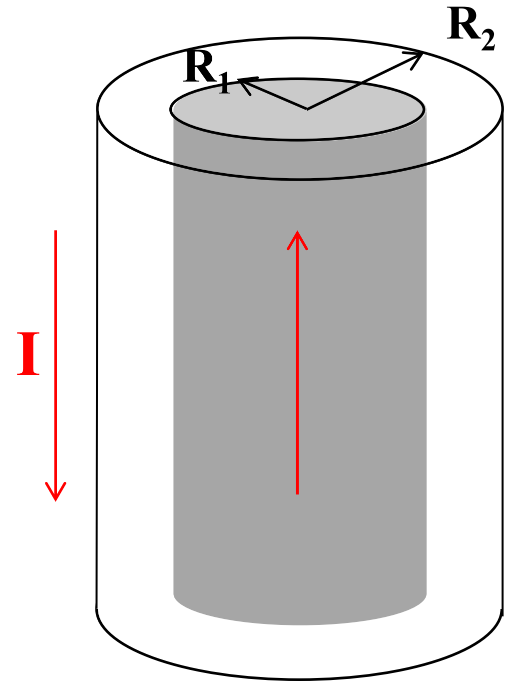
磁感应强度的分布：

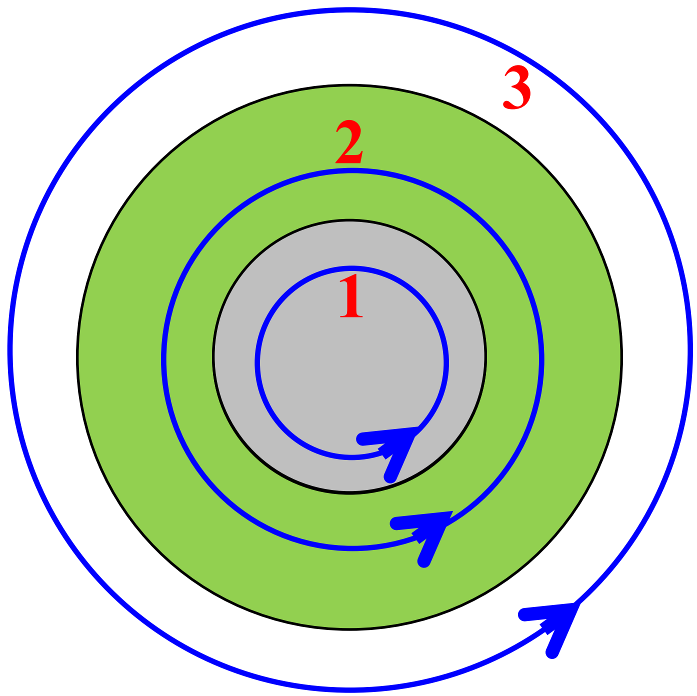
$$
\begin{cases}
B_1 = \dfrac{\mu_1 I r}{2\pi R_1^2} & r < R_1 \\[2ex]
B_2 = \dfrac{\mu_2 I}{2\pi r} & R_1 < r < R_2 \\[2ex]
B_3 = 0 & r > R_2
\end{cases}
$$

长度是l的圆柱体内，磁场能量$W_m = \int w_e dV$

磁能密度 $w_e = \dfrac{B^2}{2\mu}$



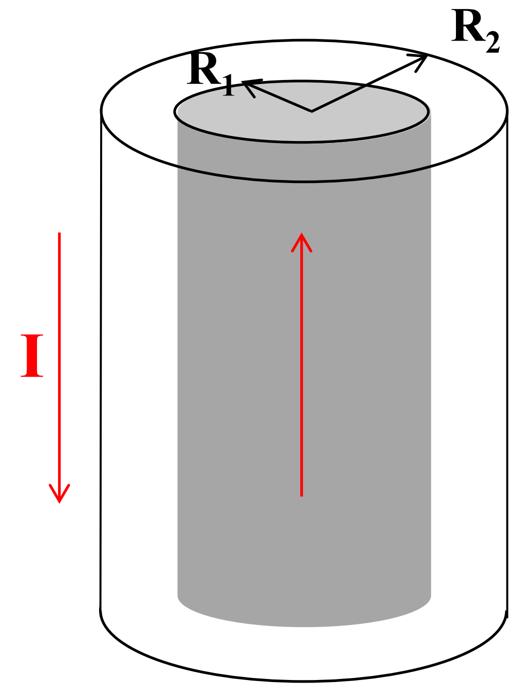




$$\int \overrightarrow{H} \bullet d\vec{l} = \sum I_0$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

例4: 一无限长同轴电缆是圆柱形导体(半径R_1，磁导率u_1)，与半径R_2（R_2>R_1）的金属圆筒组成，在金属圆柱与圆筒之间充满磁导率是u2的磁介质，电流I从圆筒流出，从圆柱流回，求单位长度的磁能。



当$r < R_1$时

$$W_{1m} = \int w_e dV = \int \frac{B_1^2}{2\mu_1} dV = \frac{\mu_1 I^2 l}{16\pi}$$

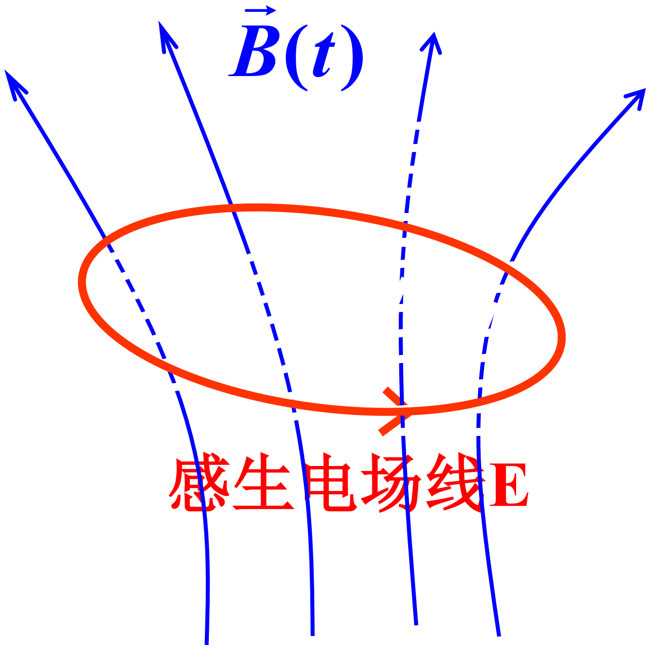
当$R_1 < r < R_2$时

$$W_{2m} = \int w_e dV = \int \frac{B_2^2}{2\mu_2} dV = \frac{\mu_2 I^2 l}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

单位长度的磁能 $W = \frac{1}{l}(W_{1m} + W_{2m})$

§ 14.2 麦克斯韦 (电磁场) 方程组

一、感生电场



产生感生电动势的非静电力是什么呢?

麦克斯韦(Maxwell)提出：

变化的磁场可以激发非静电性质的电场。

——**感生电场** $\vec{E}_{感}$

$$\varepsilon_{感} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{感} = \oint_L \vec{E}_{感} \cdot \mathbf{d}\vec{l}$$

$$\oint_L \vec{E}_{感} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

一、感生电场

在一般情况下,一个空间中既有静电场,也有感生电场。

$$\oint_L \vec{E}_{静} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

$$\oint_L \vec{E}_{感} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

$$\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L (\vec{E}_{静} + \vec{E}_{感}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L \vec{E}_{静} \cdot d\vec{l} + \oint_L \vec{E}_{感} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\boxed{\oint_L \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_L \vec{E}_{感} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{s}}$$

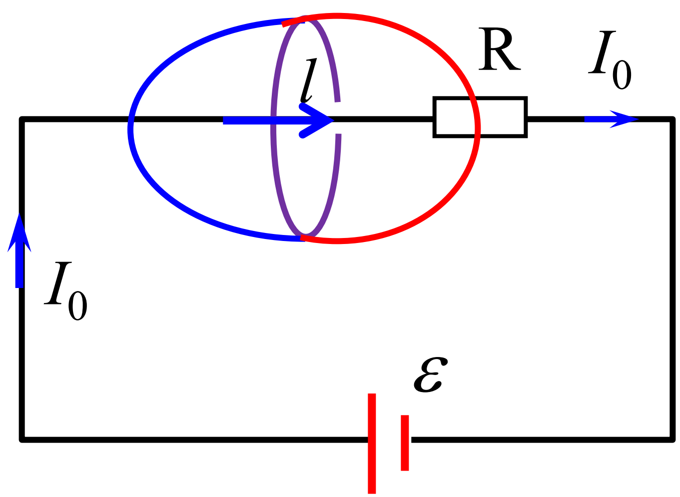
这个公式是关于电场和磁场的又一个普遍的基本规律。

二、位移电流假说的提出

1、问题的提出

在稳恒电流的磁场中，安培环路定理为

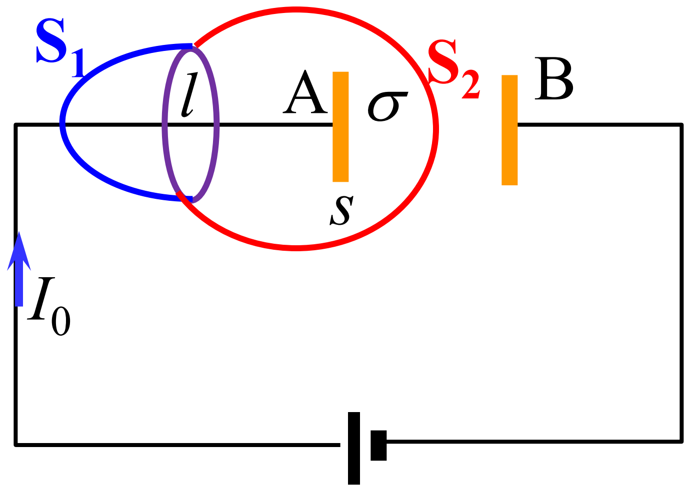
$$\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$$



对非稳恒电路，传导电流不连续，安培环路定理不成立。

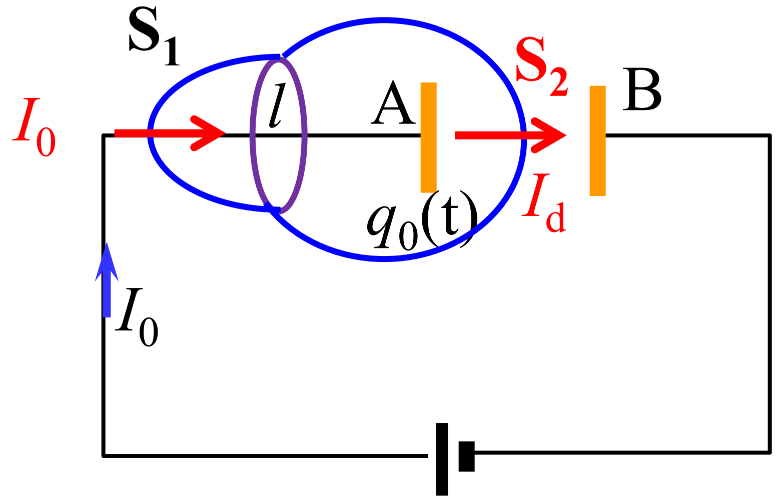
对于曲面S_1 $\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$

对于曲面S_2 $\oint_l \vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{l} = 0$



定义：**位移电流**

$$I_d = \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = \int_S \vec{j}_d \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

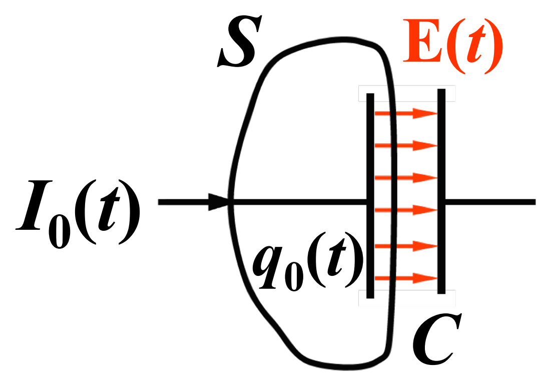


位移电流密度 $\vec{j}_d = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

引入 I_d 后，有 $I_0 = I_d$ 。

麦克斯韦认为：**高斯定理也适用于变化电场**

$$\left.\begin{aligned} \oint_S \vec{E}(t) \cdot \mathrm{d}\vec{S} &= \frac{q_0(t)}{\varepsilon_0} \\ I_0 &= \frac{\mathrm{d} q_0}{\mathrm{d} t} \end{aligned}\right\} \Rightarrow I_0 = \varepsilon_0 \oint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$



在非稳恒情况下$I_0 = I_d$。

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{0内} \longrightarrow \oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum (I_0 + I_d)_{内}$$

(稳恒) (非稳恒)

即
$$\boxed{\begin{aligned}\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} &= \mu_0 \int_S (\vec{j}_0 + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})\cdot d\vec{s} \\ &= \mu_0 (I_0 + \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\int_S \vec{E}\cdot d\vec{s})\end{aligned}}$$

——全电流定律

$\vec{j}_0$ 和 $\vec{j}_d (= \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t})$ 可同时存在于同一处。

位移电流在产生磁场上与传导电流虽有相同的效果，但本质上是不同的。

三. 麦克斯韦方程组的积分形式

$$\left.\begin{aligned}&\oint_L \vec{E}_{静}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=0\\&\oint_L \vec{E}_{感}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=-\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{s}\end{aligned}\right\}\longrightarrow \boxed{\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=-\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{s}}\quad (1)$$

$$\oint_S \vec{E}_{静}\cdot \mathrm{d}\vec{s}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho_0\,\mathrm{d}V \longrightarrow \boxed{\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho_0\,\mathrm{d}V}\quad (2)$$

$$\left.\begin{aligned}&\oint_L \vec{B}_{静}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\mu_0\int_S \vec{j}_0\cdot \mathrm{d}\vec{s}\\&\vec{j}_d=\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\end{aligned}\right\}\longrightarrow \boxed{\oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\mu_0\int_S (\vec{j}_0+\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t})\cdot \mathrm{d}\vec{s}}\quad (3)$$

$$\oint_S \vec{B}_{静}\cdot \mathrm{d}\vec{s}=0 \longrightarrow \boxed{\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{s}=0}\quad (4)$$

麦克斯韦方程组

$$\begin{cases} \oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\int_S \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\vec{s} & (1) \\ \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho_0 \,\mathrm{d}V & (2) \\ \oint_L \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \mu_0 \int_S (\vec{j}_0 + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t})\cdot \mathrm{d}\vec{s} & (3) \\ \oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0 & (4) \end{cases}$$

(1) — (4)是积分形式的麦克斯韦方程组，方程组形式上不对称，原因是没有单独的磁荷，也没有相应于传导电流的“磁流”。

除(1) — (4)外还有洛仑兹力公式： $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v}\times\vec{B}$ (5)

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{E},\ \vec{B} = \mu\vec{H},\ \vec{j}_0 = \sigma\vec{E} \quad (6)$$