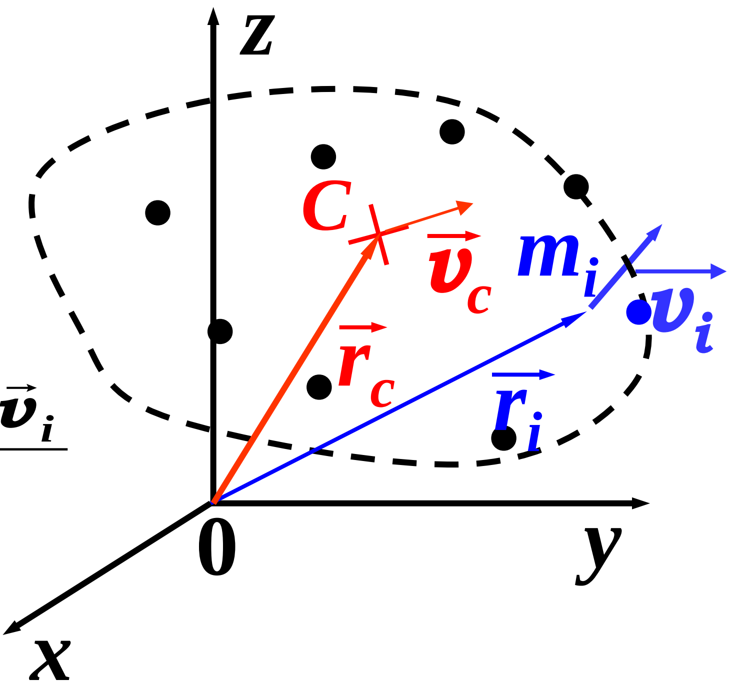
7.1 刚体质心的运动定理

一. 质心运动定理

质心的速度



$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{\sum m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{m} = \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{m}$$

$\vec{v}_C$是质点系的“平均”速度。

质点系的总动量 $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = m\vec{v}_C$

质点系的总动量 $\boxed{\vec{P} = m\vec{v}_C}$

$$\boldsymbol{\vec{v}}_C = \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{\vec{r}}_C}{\mathbf{d}\boldsymbol{t}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}\right) = \frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum m_i \vec{r}_i\right)$$

$$= \frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \cdots + m_i\vec{r}_i + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{m}\left(m_1\frac{\mathrm{d}\vec{r}_1}{\mathrm{d}t} + m_2\frac{\mathrm{d}\vec{r}_2}{\mathrm{d}t} + \cdots + m_i\frac{\mathrm{d}\vec{r}_i}{\mathrm{d}t} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{m}\left(m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + m_i\overrightarrow{v_i} + \cdots\right)$$

$$= \frac{\sum m_i \vec{v}_i}{m}$$

质心的加速度

$$\vec{a}_c=\frac{d\vec{v}_C}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\sum m_i\vec{v}_i}{m}\right)=\frac{\sum m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}}{m}=\frac{\vec{F}_{外}}{m}$$

$$\boxed{\vec{F}_{外}=m\vec{a}_C=\frac{d(m\vec{v}_c)}{dt}}$$

质点1: $\boxed{\vec{F}_1}+\vec{f}_{12}+\vec{f}_{13}+\cdots\cdots+\vec{f}_{1i}+\cdots\cdots+\vec{f}_{1n}=m_1\frac{d\vec{v}_1}{dt}$

质点2: $\vec{F}_2+\vec{f}_{21}+\vec{f}_{23}+\cdots\cdots+\vec{f}_{2i}+\cdots\cdots+\vec{f}_{2n}=m_2\frac{d\vec{v}_2}{dt}$

⋮

质点i: $\vec{F}_i+\vec{f}_{i1}+\vec{f}_{i2}+\cdots\cdots+\vec{f}_{i,i-1}+\cdots\cdots+\vec{f}_{in}=m_i\frac{d\vec{v}_i}{dt}$

⋮

质点n: $\vec{F}_n+\vec{f}_{n1}+\vec{f}_{n2}+\cdots\cdots+\vec{f}_{ni}+\cdots\cdots+\vec{f}_{n,n-1}=m_n\frac{d\vec{v}_n}{dt}$

有

$$\boxed{\vec{F}_{外} = m\vec{a}_C = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$

—— 质心运动定理

质心的运动如同一个在质心位置处的质点的运动，该质点集中了整个质点系的质量和所受的外力。在质点力学中所谓“物体”的运动，实际上是物体质心的运动。

$$\vec{F}_{外} = m\vec{a}_C = \frac{d(m\vec{v}_c)}{dt}$$

$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{\sum m_i\vec{v}_i}{m} \qquad \vec{P} = m\vec{v}_C$$

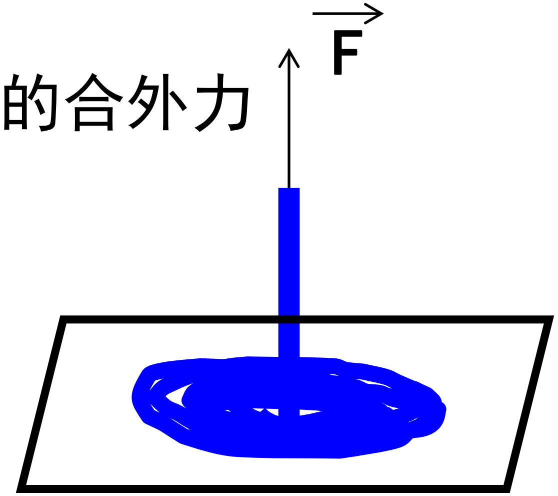
$$\left.\begin{array}{l} \vec{F}_{外} = m\vec{a}_C = \dfrac{d(m\vec{v}_c)}{dt} \\ \vec{P} = m\vec{v}_C \end{array}\right\} \quad \vec{F}_{外} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

例：长度为l，总质量是m的柔软细绳子放在水平台面上，用手将绳子的一端以恒定速率v_0向上提起，求当提起高度是x时手的提力。（$x<l$）

利用质心运动定理求解

以绳子（整体体系）为研究对象，体系受到的合外力

$$F-mg+(l-x)\frac{m}{l}g=m\frac{d^2x_c}{dt^2}$$



当提起长度x时，绳子质心的坐标

$$x_c=\frac{\left[(l-x)\frac{m}{l}\times 0+x\frac{m}{l}\times\frac{x}{2}\right]}{m}=\frac{x^2}{2l}$$

$$\frac{dx_c}{dt}=\frac{1}{2l}2x\frac{dx}{dt}=\frac{x}{l}v_0$$

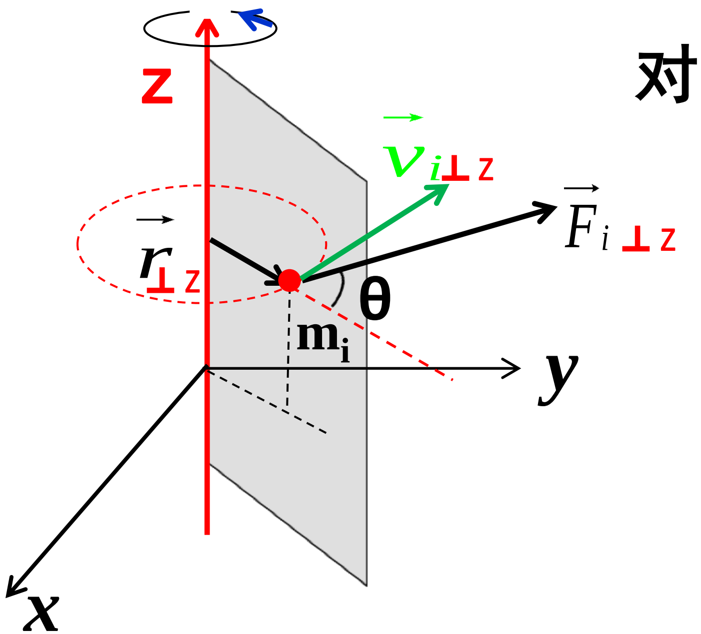
$$\frac{d^2x_c}{dt^2}=\frac{v_0}{l}\frac{dx}{dt}=\frac{v_0^2}{l}$$

$$F=\frac{m}{l}v_0^2+x\frac{m}{l}g$$

7.2 刚体定轴转动的角动量定理

一. 角动量定理

把刚体看作无限多质元构成的质点系



对z轴，质元m_i受到合外力的力矩

$$M_{i,z} = F_{i\perp} r_{i\perp} \cdot \sin\theta_i$$

$$\boxed{M_{i,z} = \frac{\mathrm{d}L_{i,z}}{\mathrm{d}t}} \qquad v_i = \omega r_{i\perp}$$

$$L_{i,z} = r_{i\perp} m_i v_{i\perp} = m_i r_{i\perp}^2 \omega$$

对z轴，刚体的力矩和角动量

$$M_{外,z} = \sum M_{i,z} = \sum F_{i\perp} r_{i\perp} \cdot \sin\theta_i$$

$$L_z = \sum_i L_{i,z} = (\sum_i m_i r_{i\perp}^2) \cdot \omega$$

刚体定轴转动的角动量定律 $M_{外,z}=\frac{dL_z}{dt}$

作用在刚体上的合外力的力矩等于刚体的总角动量对时间的变化率。

对z轴，刚体的力矩和角动量

$$M_{外,z}=\boxed{\sum M_{i,z}}=\sum F_{i\perp}r_{i\perp}\cdot\sin\theta_i$$

$$L_z=\boxed{\sum_i L_{i,z}}=(\sum_i m_i r_{i\perp}^2)\cdot\omega$$

$$M_{i,z}=\frac{\mathrm{d}L_{i,z}}{\mathrm{d}t}$$

小质元m_1：$M_{1,z}=\frac{\mathrm{d}L_{1,z}}{\mathrm{d}t}$

小质元m_2：$M_{2,z}=\frac{\mathrm{d}L_{2,z}}{\mathrm{d}t}$

⋮

小质元m_n：$M_{n,z}=\frac{\mathrm{d}L_{n,z}}{\mathrm{d}t}$

$$M_{1,z}+M_{2,z}+\cdots+M_{n,z}=\frac{\mathrm{d}L_{1,z}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}L_{2,z}}{\mathrm{d}t}+\cdots+\frac{\mathrm{d}L_{n,z}}{\mathrm{d}t}$$

$$\sum M_{i,z}=\frac{d}{dt}\left(L_{1,z}+L_{2,z}+\cdots+L_{n,z}\right)$$

$$M_{外,z}=\boxed{\sum M_{i,z}}=\frac{d\boxed{\left(\sum L_{i,z}\right)}}{dt}=\frac{dL_z}{dt}$$

定义 $J=\sum_i \Delta m_i r_{i\perp}^2$ —— 转动惯量

$$\boxed{L_z = J_z \cdot \omega}$$

$$\boxed{M_{外z} = J_z \alpha}$$ —转动定律

对z轴，刚体的力矩和角动量

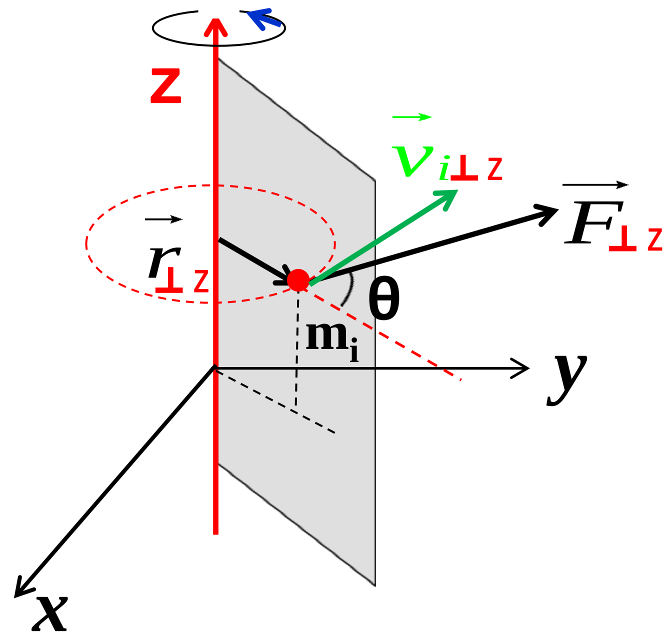
$$M_{外,z}=\sum M_{i,z}=\sum F_{i\perp} r_{i\perp}\cdot \sin\theta_i$$

$$L_z=\sum_i L_{i,z}=\boxed{\left(\sum_i m_i r_{i\perp}^2\right)}\cdot\omega$$

$$M_{i,z}=\frac{\mathrm{d}L_{i,z}}{\mathrm{d}t}$$

$$\left.\begin{array}{l} \\ \end{array}\right\} M_{外z}=\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}=J_z\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{M_{外z} = J_z\alpha}$$ —转动定律



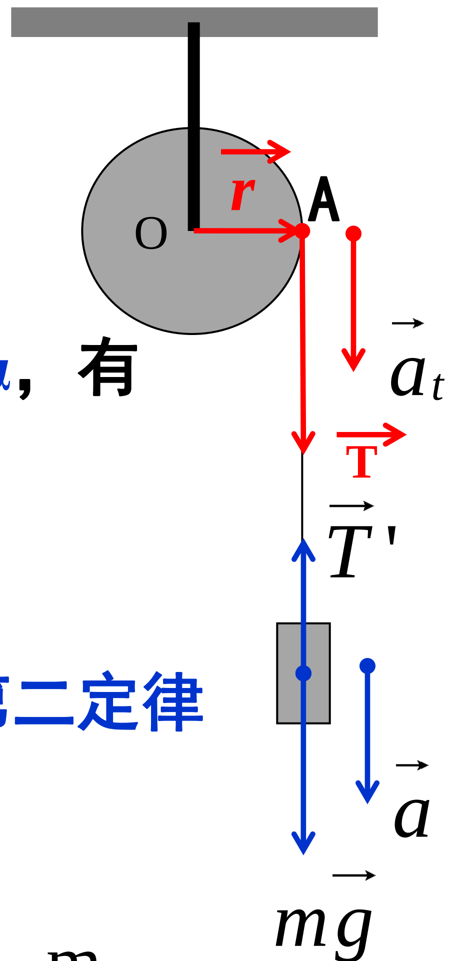
其中 $J = \sum_i \Delta m_i r_{i\perp}^2$

$$M_{外z} = \sum_i F_{i\perp} r_{i\perp} \cdot \sin\theta_i$$

在定轴情况下，可不写下标 z ，记作：

$$\begin{cases} \boxed{M = J\alpha} & \text{— 转动定律} \\ \boxed{F = ma} & \text{— 牛顿第二定律} \end{cases}$$

例： 如图，一个质量为M半径为R的定滑轮，上面绕一细绳，绳的一端固定在滑轮边上，另一端挂一质量为m的物体而下垂（忽略轴的摩擦），求物体下落的加速度。



解： **以滑轮为研究对象，根据转动定律M=Jα，有**

$$RT = J\alpha = \frac{1}{2}MR^2\alpha$$

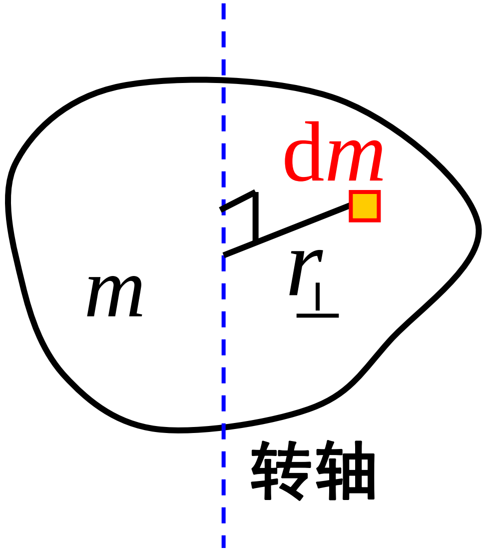
以质量为m的物体为研究对象，根据牛顿第二定律

$$mg - T = ma$$

且有 $a = R\alpha$ **因此得到** $a = \dfrac{m}{m + \dfrac{M}{2}}g$

7.2 刚体定轴转动的角动量定理

二. 刚体的转动惯量



质点系 $J = \sum \Delta m_i r_{i\perp}^2$

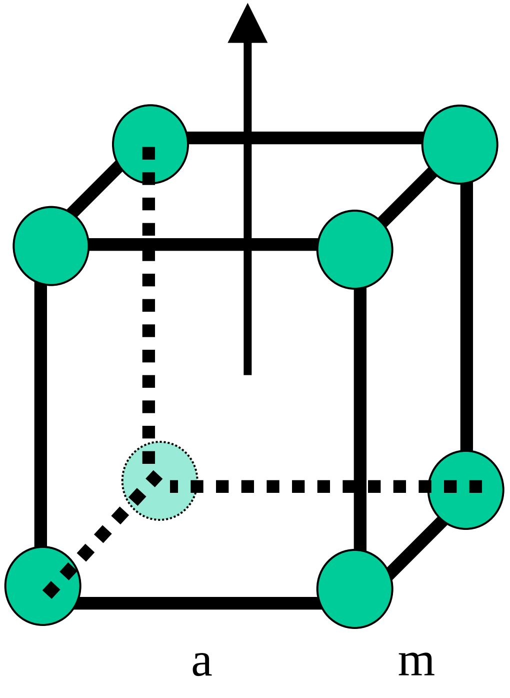
连续体 $J = \int_m r_\perp^2 \cdot \mathrm{d}\, m$

J 由质量对轴的分布决定 $\begin{cases} \text{总质量} \\ \text{质量分布} \\ \text{转轴} \end{cases}$

三. 常用的几种转动惯量表示式

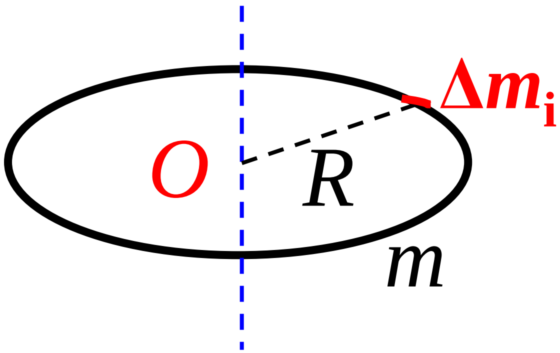
质点系 $J=\sum \Delta m_i r_{i\perp}^2$

(1)关于z轴的转动惯量?



(2)细圆环：

对于过圆心，垂直于圆环所在平面的转轴，其转动惯量

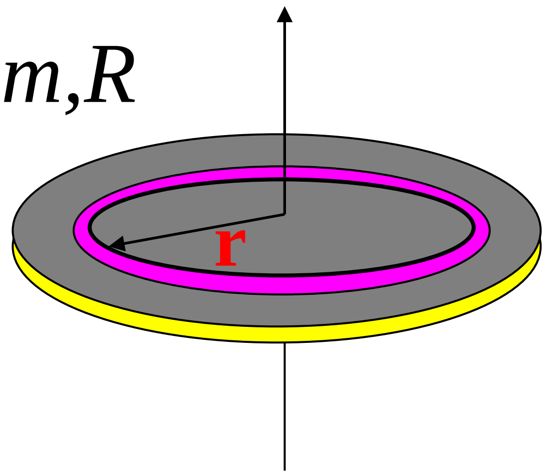


$$J_o=\sum \Delta m_i R^2=R^2\sum \Delta m_i$$

$$\boxed{J_O=mR^2}$$

(3)均匀圆盘：

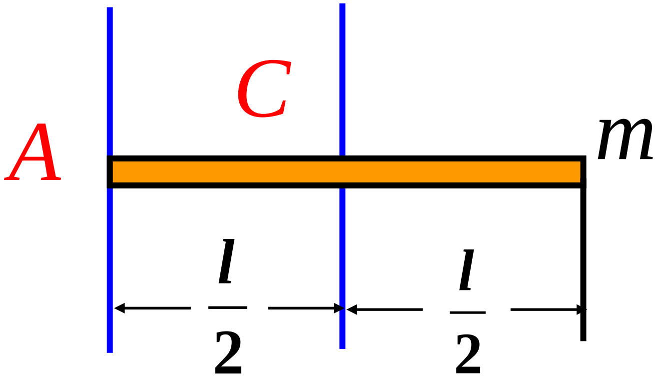
取半径是r——r+dr的圆环面，其质量dm，则



$$J=\int r^2 dm=\int_0^R r^2\sigma\, 2\pi r dr=\frac{\pi\sigma R^4}{2}=\frac{1}{2}mR^2$$

$$\boxed{J_C=\frac{1}{2}mR^2}$$

(4)均匀细杆：

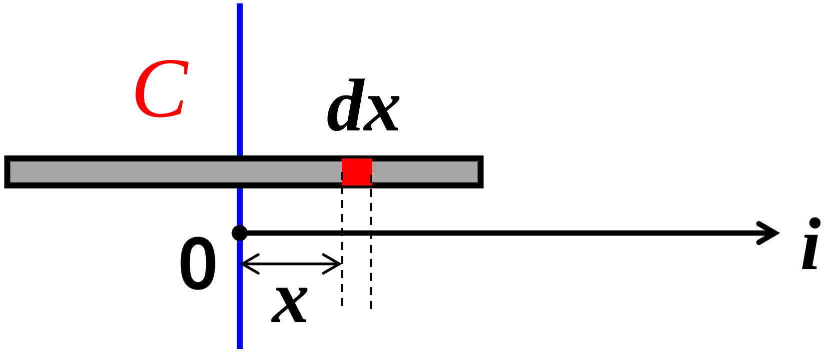


$$J_C = \frac{1}{12} m l^2$$

$$J_A = \frac{1}{3} m l^2$$

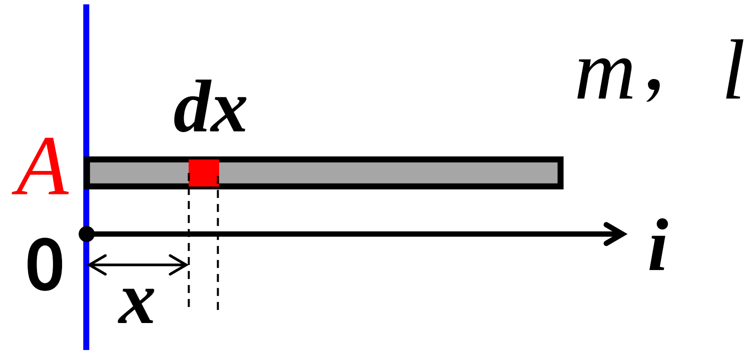
(4)均匀细杆：

m，l



$$J_C = \int x^2 dm = \int x^2 dx\lambda = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx\lambda = \frac{1}{12} ml^2$$

(4)均匀细杆：



$$J_C = \int x^2 dm = \int x^2 dx\lambda = \int_0^l x^2 dx\lambda = \frac{1}{3}ml^2$$