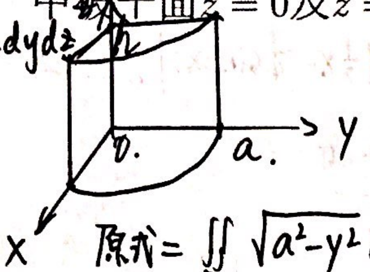
7. 计算下列对坐标的曲面积分:

(1) $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ $(a>0)$在第一卦限中被平面$z=0$及$z=h$ $(h>0)$所截出部分曲面块的前侧.

$dxdy = -x_z dydz = 0$

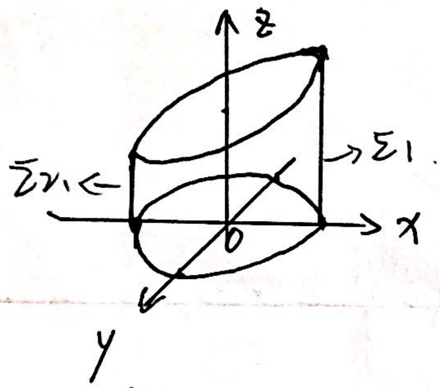


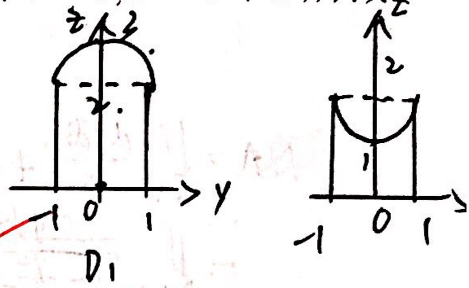
$$原式 = \iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{a^2-y^2}\,dydz + 0.$$

$$= \int_0^a \sqrt{a^2-y^2}\,dy \int_0^h dz = \frac{1}{4}\pi a^2 h.$$

(2) $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 Σ 是圆柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0, z=x+2$ 所截下的部分,取外侧.

$x = \pm\sqrt{1-y^2}$.





$$\iint\limits_{\Sigma} x\,dydz$$

$$= \iint\limits_{\Sigma_1} x\,dydz + \iint\limits_{\Sigma_2} x\,dydz$$

$$= \iint\limits_{D_1} \sqrt{1-y^2}\,dydz - \iint\limits_{D_2} (-\sqrt{1-y^2})\,dydz$$

$$= \int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\,dy \int_0^{\sqrt{1-y^2}+2} dz$$

$$+ \int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\,dy \int_0^{2-\sqrt{1-y^2}} dz$$

$$= \int_{-1}^{1} 4\sqrt{1-y^2}\,dy$$

$$= 8\int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy$$

$$= 8\cdot\frac{1}{4}\pi = 2\pi$$

(3) $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 下半球面$z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$的下侧.

$$原式 = -\iint\limits_{D_{xy}} 1\cdot\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$$

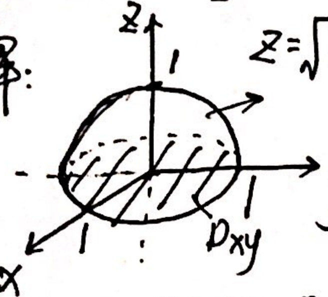
$$= -\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^2 dr$$

$$= -2\pi\cdot\frac{1}{3}$$

$$= -\frac{2}{3}\pi$$

(4) $\iint\limits_{\Sigma} yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$，$z \geq 0$ 的外侧.

解:



$z=\sqrt{1-x^2-y^2}$

$P=0,\ Q=yz,\ R=2$

$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$

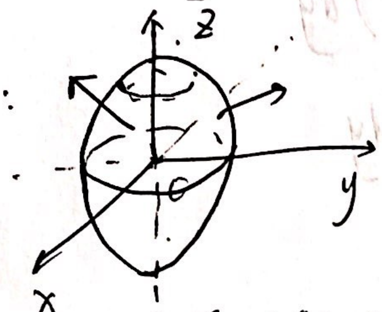
$\therefore$ 原积分 $=\iint\limits_{D_{xy}}\left(-0\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-yz\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+2\right)dxdy$

$=\iint\limits_{D_{xy}}(y^2+2)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2\sin^2\theta\cdot rdr+2\iint\limits_{D_{xy}}dxdy$

$=\frac{\pi}{4}+2\pi=\frac{9}{4}\pi.$

(5) $\iint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x}$, 其中 Σ 是椭球面 $x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$的外侧.

解:



$\because \Sigma$ 关于 y轴、z轴、x轴均对称

$\therefore \iint\limits_{\Sigma}\frac{dydz}{x}=2\iint\limits_{\Sigma}\frac{dydz}{x}$

$=2\iint\limits_{D_{yz}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}}}dydz$

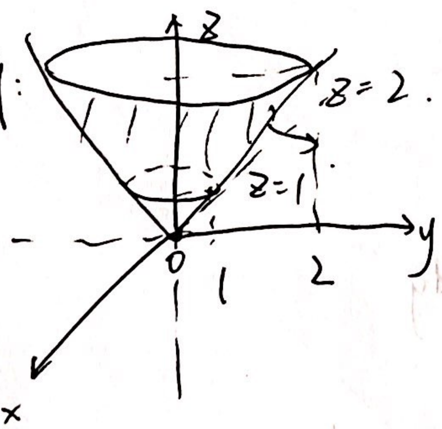
$=2\int_{-2}^{2}dy\int_{-\sqrt{9-\frac{9y^2}{4}}}^{\sqrt{9-\frac{9y^2}{4}}}\frac{6dz}{\sqrt{36-9y^2-4z^2}}$

$=4\times3\pi\int_0^2dy$

$=24\pi.$

(6) $\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}y\mathrm{d}z - x\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被 $z=1, z=2$ 所截部分的外侧.

解:



$\because z_x'=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$z_y'=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\therefore$ 原积分 $=\iint\limits_{\Sigma}\left(\frac{-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+x^2+y^2\right)dxdy$

$=-\iint\limits_{D}(x^2+y)dxdy$

$=-\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2\rho^3d\rho$

$=-\frac{15}{2}\pi.$