2 Ensembles

2.1 Formalisation

Définition 2.1 (Ensemble, élément, appartenance)

- *Un* ***ensemble*** *est une collection d'objets* _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ *, et* _ _ _ _ _ _ _ _ _ *.*
- *Les objets d'un ensemble sont appelés ses* _ _ _ _ _ _ _ *.*
- *Lorsque a est un élément d'un ensemble E, on dit que a* ***appartient à*** *E (ou E contient a), et on note $a \in E$.*
- *Lorsque E possède un nombre fini d'éléments, on appelle ce nombre son* _ _ _ _ _ _

Notations

- un ensemble se note entre accolades « { ... } »
- l'ensemble vide (ne contenant aucun élément) se note $\emptyset$

Exemples

- $\{1, 3, 5\}$
- {Jean, Jacques}
- $\{\{1, 2\}, \{2, 4\}\}$
- ...

Types de représentation

Un ensemble peut être défini :

- en _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ : on liste tous les éléments de l'ensemble.
- en _ : on liste le début d'une suite logique d'éléments en finissant par « ... » *(à éviter)*
- en _ On définit les éléments d'un ensemble comme ceux appartenant à un sur-ensemble E et vérifiant une certaine propriété (définie par P).

Ensembles classiques

- $\mathbb{N}$: ensemble des entiers naturels (positifs)
- $\mathbb{Z}$: ensemble des entiers relatifs
- $\mathbb{D}$: ensemble des nombres décimaux
- $\mathbb{Q}$: ensemble des nombres rationnels (de la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b entiers)
- $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels

Définition 2.2 *Soient E et F deux ensembles.*

On dit que E ***est inclus dans*** *F si tous les éléments de E appartiennent à F.*

On notera alors $E \subset F$, et on dira que E est une partie ou un sous-ensemble de F.

Exemples

Si E est un ensemble :

- $\emptyset \subset E$
- $E \subset E$
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$
- $\{1,3\} \subset \{1,2,3\}$

Définition 2.3 (Égalité ensembliste) *Soient E et F deux ensembles.*

On dit que $E = F$ si $E \subset F$ et $F \subset E$.

Exemples

- $\{1,3,4,6\}$ _ _ $\{3,4,1,6\}$
- $\{1,6,8\}$ _ $\{1,2,8,6\}$
- $\{1,1,2,3\}$ _ _ $\{3,1,2\}$

Définition 2.4 *Soient E et F deux ensembles.*

On dit que E et F sont _ _ _ _ _ _ _ *si $E \cap F = \emptyset$.*

Exemples

- $\{1,3,4,6\}$ et $\{2,4,5\}$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
- $\{1,2,3\}$ et $\{9,10,11\}$ _ _ _ _ _ _ _ _ _

2.2 Opérations ensemblistes

Définition 2.5 *Soient E et F deux sous-ensembles de Ω.*

- *l'* _ _ _ _ *de E et F, notée $E \cup F$ est l'ensemble :*

  _

- *l'* _ _ _ _ _ _ _ _ _ *de E et F, notée $E \cap F$ est l'ensemble :*

  _

- *le* _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ *de E dans Ω, noté $\bar{E}$ est l'ensemble :*

  _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Définition 2.6 *Les sous-ensembles non vides $A_1, A_2, \dots, A_p$ de E forment une* _ _ _ _ _ _ _ _ *de E si :*

- *ils sont* _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ ($A_i \cap A_j = \emptyset$ *pour tous* i, j *avec* $i \neq j$)
- *ils forment un* _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ *soit* $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_p = E$

Définition 2.7 *Soient E et F deux sous-ensembles de Ω.*

- *la* _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ *de E et F, notée* _ _ _ *est l'ensemble :*

  _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

- *la* _ *de E et F, notée* _ _ _ _ *est l'ensemble :*

  _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Sur un ensemble fini E et des sous-ensembles de E on a les résultats suivants :

- $Card(A \cup B) =$ _
- Si A et B sont disjoints alors $Card(A \cup B) =$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
- $Card(\overline{A}) =$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
- Si $A_1, A_2, \dots, A_p$ de E forment une partition de E, alors :

  _

Soient A et B deux sous-ensembles de Ω :

- $A \cup A =$ _
- $A \cap A =$ _
- $A \backslash A =$ _
- $A \Delta A =$ _
- $A \cup \Omega =$ _
- $A \cap \Omega =$ _
- $A \cup \emptyset =$ _ _
- $A \cap \emptyset =$ _
- Si $B \subset A$: $A \cup B =$ _
- Si $B \subset A$: $A \cap B =$ _ _

Définition 2.8 _ *, est constitué de tous les sous-ensembles de E.*

Exemple

L'ensemble des parties de $E = \{1, 4, 5\}$ est :

_ _

Propriété

Si E est de cardinal n, alors _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Définition 2.9 *Le **produit cartésien** de deux ensembles E et F est l'ensemble défini par :*

$$E \times F = \text{\_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_}$$

Un élément (x, y) d'un tel ensemble est appelé couple et vérifie :

$$(x, y) = (x', y') \iff x = x' \text{ et } y = y'$$

- Si $E = F$, on note le produit cartésien E^2 au lieu de $E \times E$
- Le produit cartésien de trois ensembles E, F et G est défini par :

$$E \times F \times G = (E \times F) \times G$$

  Ses éléments se nomment des triplets et se représentent sous la forme (x, y, z) avec $x \in E$, $y \in F$ et $z \in G$
- Plus généralement, on définit le produit cartésien de $n \geqslant 3$ ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$: Ses éléments se nomment des _ _ _ _ _ _ (ou tuples en python) et se représentent sous la forme $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ avec $x_i \in E_i$.

Propriété

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Le cardinal de l'ensemble E^p des p-uplets de E est _ _ .

Exemple

- Combien y a-t-il de numéros de téléphone commençant par 06 70 50 ?

  _
  _
  _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Définition 2.10 *Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel tel que $p \leq n$.*

Un _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ de E est un p-uplet d'éléments _ _ _ _ _ _ _ de E.
Une _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ de E est un n-arrangement.
Une _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ de E est une partie de E ayant p éléments.

Exemples

- Combien y a-t-il de résultats possibles pour un tiercé (avec ordre) sur une course opposant 20 chevaux ?
- Le nombre de résultats correspond au nombre de _ . Soit _ et, pour chacune de ces possibilités, _ et, pour chacun de ces couples, _ . Il y a donc _ _ _ _ _ _ _ _ _ résultats possibles.

Propriété

Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier naturel tel que $0 \leq p \leq n$.
Le nombre de p-arrangements de E est :

_ _

Le nombre de permutations est :

_ _ _ _ _

Pour chaque p-combinaison il existe $p!$ permutations possibles de ses éléments pour former des p-arrangements. A partir de la propriété précédente on peut donc en déduire la suivante :

Propriété

Le nombre de combinaisons de p éléments de E est :

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

- Ces coefficients C_n^p, aussi notés $\binom{n}{p}$, sont appelés coefficients binomiaux ou combinatoire de p éléments parmi n.
  Ils représentent le nombre de façons de choisir p objets parmi n. L'ordre n'importe pas dans la sélection effectuée et un objet ne peut être sélectionné deux fois (tirage simultané et sans remise).

- Chaque p-combinaison représente une partie de E et l'ensemble de ces p-combinaisons (avec $0 \leq p \leq n$) réalise un recouvrement de _ _ _ _ _ . Or on a énoncé précédemment le fait que _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ . On peut donc en déduire que :

_ _ _ _ _ _ _ _

2.3 Relations et fonctions

On considère 3 clients c_1, c_2 et c_3, achetant leurs fournitures chez 4 fournisseurs f_1, f_2, f_3 et f_4.

On note $C = \{c_1, c_2, c_3\}$ et $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$.

Cette situation peut être décrite par :

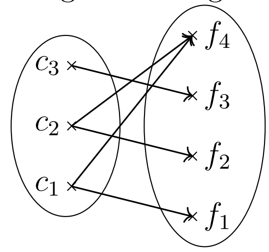
- un tableau simple :

Clients	c_1	c_2	c_3
Fournisseurs	f_1, f_4	f_2, f_4	f_3

- une partie de $C \times F$:

$$\{(c_1, f_1), (c_1, f_4), (c_2, f_2), (c_2, f_4), (c_3, f_3)\}$$

- un diagramme sagittal :



Cette situation illustre une **relation binaire** de C vers F.

Définition 2.11 *Une* _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ $\mathscr{R}$ *(ou* _ _ _ _ _ _ _ *) entre deux ensembles E et F est un sous-ensemble S du produit cartésien $E \times F$.*

_ _

✎ Exemples

- Sur les ensembles $E = \{1, 4, 7\}$ et $F = \{2, 5, 6\}$, la relation $\leqslant$ (au sens classique) entre E et F est représentée par :

_ _

- Sur une promotion : la relation « Un étudiant x a l'enseignant y en TD de maths discrètes. »

Remarque : la plupart des relations que nous manipulerons seront définies ***sur*** *un même ensemble. i.e. on aura $E = F$*

Définition 2.12 *Soit $\mathscr{R}$ une relation définie sur E. $\mathscr{R}$ est dite :*

- _ _ _ _ _ _ *lorsque* _ _ _ _ _ _ _ _ _
- _ _ _ _ _ _ _ *lorsque* _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
- _ _ _ _ _ _ _ _ *lorsque* _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
- _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ *lorsque* _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
- _ _ _ _ _ _ _ *lorsque* _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

✎ Vrai ou Faux ?

Sur $\mathbb{R}$:

- $\leqslant$ est réflexive ? : _ _ _
- $\leqslant$ est irréflexive ? : _ _ _ _
- $\leqslant$ est symétrique ? : _ _ _ _
- $\leqslant$ est anti-symétrique ? : _ _ _ _
- $\leqslant$ est transitive ? : _ _ _

Définition 2.13 *Soit E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation sur E.*

On dit que $\mathscr{R}$ est une _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ *si elle est :*

- _ _ _ _ _ _
- _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
- *et* _ _ _ _ _ _ _

Lorsque E possède une relation d'ordre, on dit qu'il est _ _ _ _ _ _ _

Exemple

- $\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.

Applications

- La notion de croissance n'est définie que sur des ensembles ordonnés.
- Les notions de minimum et de maximum n'existent que sur des ensembles ordonnés.

Définition 2.14 *Soit E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation sur E.*

On dit que $\mathscr{R}$ est une _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ *si elle est :*

- _ _ _ _ _ _
- _ _ _ _ _ _ _ _
- *et* _ _ _ _ _ _ _

Exemple

- L'appartenance à un même groupe de TD est une relation d'équivalence sur l'ensemble des étudiants de la promotion.

Définition 2.15 *Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Pour tout $x \in E$, on appelle* ____
L'ensemble des classes d'équivalence modulo $\mathscr{R}$ est appelé ______________________
; on le note $E_{/\mathscr{R}}$.

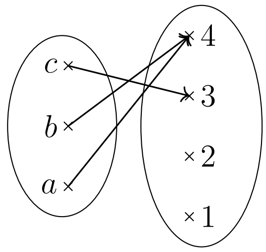
$E_{\mathscr{R}}$ est naturellement ______________

Définition 2.16 *Soit A et B deux ensembles.*

Une _______ *de A vers B est une relation binaire entre A et B pour laquelle* _____ _________ *est en relation avec un* ______________

Représentation sagittale

On pose f la fonction définie par : $\{(a,4),(b,4),(c,3)\}$
On peut la représenter par le diagramme sagittal :



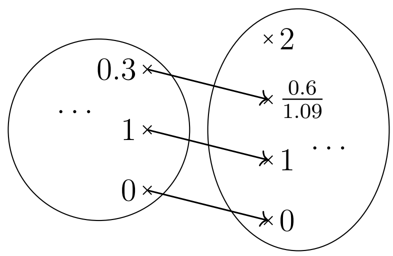
Exemple : la fonction f définie par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{2x}{x^2+1} \end{array}$$

peut être représentée par la liste de couples :

$$\{(0, \frac{2\times 0}{0^2+1} = 0), (1, \frac{2\times 1}{1^2+1} = 1), (0.3, \frac{0.6}{1.09}), \ldots\}$$

ou par le diagramme sagittal :



Soit A et B deux ensembles et f une fonction de A vers B.

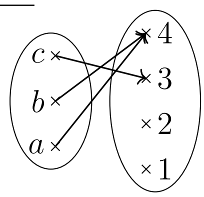
- A est appelé _______ ou _________________ de f
- B est appelé __________ ou ________________ de f

Supposons $a \in A$, $b \in B$ et $f(a) = b$.

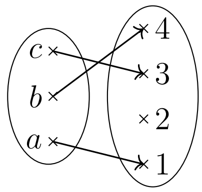
- b est ______ de a par f
- a est ___________ de b par f

Définition 2.17 *Soit f une fonction de A vers B.*
On dit que f est _______ *lorsque tout élément de B a* __________________ *par f.*
En logique, cela se traduit par : __________________________

Exemples



Injective ? : _____



Injective ? : ____

Soit f la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 3n^2 + 2n + 5 \end{array}$$

Montrons que f est injective : ______________________________________

____

____

____

Soit f la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n^2 + 4 \end{array}$$

Montrons que f n'est **pas** injective : ____

____

____

____

Propriété

Soient p et n des entiers tels que $0 \leq p \leq n$. Alors, pour tout ensemble E de cardinal p et tout ensemble F de cardinal n, le nombre d'injections de E dans F est égal à A_n^p.

Exemple

- Un porte manteau comporte 5 patères. De combien de façons peut-on y accrocher 3 manteaux différents (avec au plus un manteau par patère car sinon il risque d'y en avoir un qui se retrouve par terre) ?
- Notons $F = \{a; b; c; d; e\}$ les 5 patères. Chaque solution peut se voir comme un 3-arrangement de l'ensemble F (par exemple, (b, a, d) signifie : manteau n°1 sur b, manteau n°2 sur a et manteau n°3 sur d), ou comme une _____________ de l'ensemble $E = \{1; 2; 3\}$ vers l'ensemble F. Il y a donc ___________ possibilités.

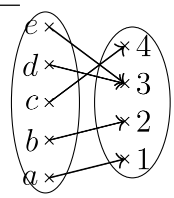
Définition 2.18 *Soit f une fonction de A vers B.*

On dit que f est ________ lorsque tout élément de B a __________________ par f.

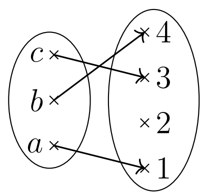
En logique, cela se traduit par :

____

Exemples



Surjective ? : _____



Surjective ? : _____

Soit f la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & \begin{cases} -2n & \text{si } n \leqslant 0 \\ 2n-1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Montrons que f est surjective : __________

- ____________________________________
- ______________________________________

____

Prouver la surjectivité d'une fonction (2)

Soit f la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & 2n+3 \end{array}$$

Montrons que f n'est **pas** surjective : ______________________________

____

____

____

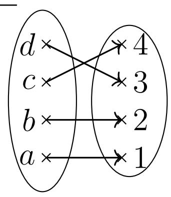
Définition 2.19 *Soit f une fonction de A vers B.*

On dit que f est _______ lorsqu'elle est ____________________ .

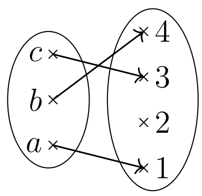
En logique, cela se traduit par :

____

Exemples



Bijective ? : ____



Bijective ? : _____