1 Logique

1.1 Premières définitions

Définition 1.1 *Une* _ *est une variable ($p, q, r_1, \dots$) pouvant prendre la valeur VRAI ou la valeur FAUX.*

Notations

- *La valeur de vérité VRAI peut aussi se noter : V, T (True), 1*
- *La valeur de vérité FAUX peut aussi se noter : F (Faux ou False), 0*

Définition 1.2 *Une* _ *est une expression construite à partir de* _ *, de* _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ *et des* _

Exemple : « p », « p ET 1 », « (p_1 OU (NON p_2)) $\Rightarrow p_3$ » ...

Connecteurs logiques

Les formules propositionnelles peuvent être combinées pour en obtenir de nouvelles en utilisant des **opérateurs logiques**, appelés **connecteurs logiques**
Les connecteurs logiques les plus classiques sont :

- _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
- _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
- _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
- _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
- _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Définition 1.3 (Valuation d'un ensemble de variable) *Étant donné des variables propositionnelles p_1, p_2, ..., p_n, une **valuation** de ces variables correspond à l'assignation d'une valeur de vérité (VRAI ou FAUX) à chacune de ces variables.*

Exemple

Soient p_1, p_2, p_3, des valuations possibles pour ces variables sont :

- $p_1 : 1$, $p_2 : 0$, $p_3 : 1$,
- $p_1 : 0$, $p_2 : 1$, $p_3 : 1$, ...

Définition 1.4 (Valeur d'une formule) *La **valeur de** $F(p_1, p_2, \dots, p_n)$ pour une valuation des variables p_1, p_2, ... p_n est la valeur de vérité de $F(p_1, p_2, \dots, p_n)$ obtenue en remplaçant les variables par leur valeur dans la valuation.*

Définition 1.5 *Une **table de vérité** d'une formule $F(p_1, \ldots, p_n)$ est un tableau représentant la valeur de F pour toutes les valuations de $p_1, \ldots, p_n$.*

Ce tableau comporte plusieurs colonnes :

- *une par variable propositionnelle (p_1, ..., p_n)*
- *une pour la formule ($F(p_1, \ldots, p_n)$)*
- *éventuellement d'autres pour simplifier le calcul de la formule.*

p_1	p_2	...	p_n	$F(p_1, p_2, \ldots, p_n)$
0	*0*	...	*0*	...
0	*0*	...	*1*	...
...	...	...	...	...

S'il y a n variables, il y aura _ *valuations, donc* _ _ *lignes.*

1.2 Sémantique des connecteurs logiques

La **négation** d'une formule p, notée $\neg p$ (ou NON(p), NOT(p)), est définie par la table de vérité :

p	$\neg p$
0	_
1	_

Exemples

- Si p : « $0 = 1$ », la valeur de vérité de $\neg p$ est _____
- Si p : « $1 = 1$ », la valeur de vérité de $\neg p$ est _____

La **conjonction** de deux formules p et q, notée $p \wedge q$ (ou p ET q, p AND q), est définie par la table de vérité :

p	q	$p \wedge q$
0	0	_
0	1	_
1	0	_
1	1	_

Exemples

- Si p : « $1 = 1$ » et q : « $2 = 2$ », $p \wedge q$ est _____
- Si p : « $0 = 1$ » et q : « $1 = 2$ », $p \wedge q$ est _____
- Si p : « $0 = 1$ » et q : « $2 = 2$ », $p \wedge q$ est _____

La **disjonction** de deux formules p et q, notée $p \vee q$ (ou p OU q, p OR q), est définie par la table de vérité :

p	q	$p \vee q$
0	0	_
0	1	_
1	0	_
1	1	_

✎ Exemples

- Si p : « $1 = 1$ » et q : « $2 = 2$ », $p \vee q$ est _ _ _ _ _
- Si p : « $0 = 1$ » et q : « $1 = 2$ », $p \vee q$ est _ _ _ _ _
- Si p : « $0 = 1$ » et q : « $2 = 2$ », $p \vee q$ est _ _ _ _ _

La formule p **implique** q, notée $p \Rightarrow q$ (ou « Si p alors q »), est définie par la table de vérité :

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	_
0	1	_
1	0	_
1	1	_

✎ Exemples

- Si p : « $0 = 1$ » et q : « $1 = 2$ », $p \Rightarrow q$ est _ _ _ _ _
- Si p : « $1 = 1$ » et q : « $1 = 2$ », $p \Rightarrow q$ est _ _ _ _ _
- Si p : « $0 = 1$ » et q : « $2 = 2$ », $p \Rightarrow q$ est _ _ _ _ _
- Si p : « $1 = 1$ » et q : « $2 = 2$ », $p \Rightarrow q$ est _ _ _ _ _

La formule p **équivaut à** q, notée $p \Leftrightarrow q$, est définie par la table de vérité :

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	_
0	1	_
1	0	_
1	1	_

✎ Exemples

- Si p : « $0 = 1$ » et q : « $1 = 2$ », $p \Leftrightarrow q$ est _ _ _ _ _
- Si p : « $0 = 1$ » et q : « $2 = 2$ », $p \Leftrightarrow q$ est _ _ _ _ _
- Si p : « $1 = 1$ » et q : « $2 = 2$ », $p \Leftrightarrow q$ est _ _ _ _ _

✎ Traduire en formule propositionnelle

On pose :

- R la variable valant VRAI si « Je suis bien reposé » (et FAUX sinon)
- P la variable valant VRAI si « Je suis performant en cours »
- B la variable valant VRAI si « Je suis à l'aise dans mes baskets »

Les énoncés suivants peuvent alors être traduits en formules logiques :

- La phrase « *Il faut que je sois reposé pour pouvoir être performant en cours et à l'aise dans mes baskets* » peut être traduite par : __________
- La phrase « *Je ne suis pas bien reposé ou pas à l'aise dans mes baskets* » peut être traduite par : _______

1.3 Manipulation des formules logiques

Formule bien formée

On dit qu'une formule est **bien formée** syntaxiquement lorsque :

- c'est une variable (p, q, r_1, ...)
- c'est une valeur de vérité (1 ou 0)
- elle est de la forme :
  — ______
  — ______
  — _______
  — _______
  — ___

  avec A et B des formules bien formées.

Remarque : La valeur associée à une formule bien formée peut être obtenue sans ambigüité à partir d'une valuation. Dans le cas contraire des ambigüités peuvent apparaître notamment en cas de parenthèses manquantes. On pourra néanmoins parfois omettre les parenthèses sur quelques connecteurs sans que ceci n'engendre de problème quant à l'évaluation de la formule.

Par exemple pour pouvoir dire que $A \vee B \vee C$ est vraie il suffit que l'une des formules A, B ou C soit vraie, l'ordre de considération des opérateurs $\vee$ n'influe pas sur la valeur de la formule globale.

Exemples

- $r \Rightarrow (q\wedge)$ est _ _ _ _ _ _ _ _ _
- La formule $1 \vee 0 \wedge 0$ est _ _ _ _ _ _ _ _ _ . Par ailleurs elle est ambigüe : elle peut être interprétée de plusieurs façons :
  — _
  — _
- La formule $((p \wedge q) \vee \neg p)$ est _ _ _ _ _ _ _ _ _ . Elle ne serait pour autant pas ambigüe en la présentant ainsi : $(p \wedge q) \vee \neg p$. Pour retirer les dernières parenthèses sans qu'il n'y ait ambigüité il faut par contre définir des priorités aux opérateurs.

Donner des priorités aux opérateurs

On considère généralement les priorités opératoires suivantes :

- _
- _

Définition 1.6 (Formule satisisfiable)

- *Une formule est dite* ***satisfiable*** *lorsqu'il existe une valuation de ses variables qui rende la formule vraie.*
- *Une formule est dite* ***insatisfiable*** *lorsqu'il n'existe pas de valuation de ses variables qui la rende vraie : elle est tout le temps fausse, on dit aussi que c'est une* ***contradiction****.*

Définition 1.7 *Une* ***tautologie*** *est une formule dont la valeur de vérité est VRAI quelle que soit la valeur de vérité de ses variables.*

Exemples

- $p \wedge \neg p$ est _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
- $\neg p \vee p$ est _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _
- $p \wedge \neg q$ est _ _ _ _ _ _ _ _

Définition 1.8 *Soient 2 formules $F_1(p_1, \ldots, p_n)$ et $F_2(p_1, \ldots, p_n)$.*

On dit que F_1 et F_2 sont ***logiquement équivalentes*** *si quelle que soit la valuation de p_1, …, p_n, les valeurs de vérité de F_1 et F_2 sont égales.*

On écrit alors $F_1 \equiv F_2$.

Méthode

Pour montrer que deux formules F_1 et F_2 sont équivalentes, on peut créer une table de vérité **commune** :

- une colonne par variable présente dans F_1 **ou** F_2 (il peut y avoir plus de variables dans l'une des formules).
- une colonne pour F_1, une pour F_2.
- éventuellement d'autre pour simplifier les calculs.

Si les colonnes de F_1 et F_2 sont identiques, alors les formules sont équivalentes : $F_1 \equiv F_2$

Est-ce que les formules $F_1 : p \wedge (q \vee \neg p)$ et $F_2 : p \wedge q$ sont équivalentes ?

p	q	$q \vee \neg p$	F_1	F_2
0	0	_ _	_	_
0	1	_ _	_	_
1	0	_ _	_	_
1	1	_ _	_	_

_ _

Est-ce que les formules $F_1 : q \vee (p \wedge \neg r)$ et $F_2 : p \vee q$ sont équivalentes ?

p	q	r	$p \wedge \neg r$	F_1	F_2
0	0	0	_ _	_	_
0	0	1	_ _	_	_
0	1	0	_ _	_	_
0	1	1	_ _	_	_
1	0	0	_ _	_	_
1	0	1	_ _	_	_
1	1	0	_ _	_	_
1	1	1	_ _	_	_

_ _

Synthèse d'un ensemble de contraintes logiques Pauline, Quentin, Roméo et Julie forment un groupe d'amis depuis longue date. Mais les relations entre se sont un peu compliquées avec le temps. Aussi quand Julie prévoit de faire une soirée, on peut aisément en déduire les choses suivantes :

- Si Julie n'invite pas Pauline alors Quentin et Roméo seront invités.
- Si Quentin est invité alors ni Pauline ni Roméo ne seront invités.

Peut-on déterminer qui sera invité ?

Les propositions p, q et r représentent respectivement le fait que Pauline, Quentin et Roméo soient invités. La situation peut être résumée en 2 formules :

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \text{ et } \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Pour résoudre le problème, il faut trouver une valuation de p, q et r telle que ces 2 formules soient vraies.

On peut résoudre ce problème par une table de vérité :

p	q	r	F_1 : _________	F_2 : __________	$F_1 \wedge F_2$
0	0	0	_	__	_
0	0	1	_	__	_
0	1	0	_	__	_
0	1	1	_	__	_
1	0	0	_	__	_
1	0	1	_	__	_
1	1	0	_	__	_
1	1	1	_	__	_

On remarque que les deux formules sont vraies simultanément pour 2 valuations :

- p : _ , q : _ , r :
- p : _ , q : _ , r :

On peut donc affirmer que ____

1.4 Propriétés des opérateurs

Définition 1.9 (associativité) *On dit qu'un opérateur $*$ est **associatif** si quels que soient a, b et c, on a :*

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Exemples

- $+$ et $\times$ sont associatifs : $(1 + 2) + 3 = 1 + (2 + 3) = 6$
- $\wedge$ et $\vee$ sont associatifs
- $-$ n'est pas associatif : $(1 - 2) - 3 = -4 \neq 1 - (2 - 3) = 2$

Conséquence

Lorsque qu'un opérateur $*$ est associatif, la formule $a*b*c$ n'est pas bien formée, mais donnera toujours le même résultat quel que soit l'ordre considéré pour l'usage de l'opérateur.

Définition 1.10 (commutativité) *On dit qu'un opérateur $*$ est **commutatif** si quels que soient a et b, on a :*

- - - - - - - - - -

Exemple

- $+$ et $\times$ sont commutatifs : $4 \times 5 = 5 \times 4$
- $\wedge$ et $\vee$ sont commutatifs
- $-$ n'est pas commutatif : $4 - 5 = -1 \neq 5 - 4 = 1$

Définition 1.11 (distributivité) *On dit qu'un opérateur $*$ est **distributif** par rapport à $\circ$ (ou se **distribue** sur $\circ$) si quels que soient a, b et c, on a :*

- -

Exemple

- $\times$ se distribue sur $+$ et sur $-$: $4 \times (5 - 2) = (4 \times 5) - (4 \times 2)$
- $+$ ne se distribue pas sur $\times$: $6 + (5 \times 2) \neq (6 + 5) \times (6 + 2)$
- $\wedge$ se distribue sur $\vee$ et $\vee$ se distribue sur $\wedge$ (on le démontrera en TD)

Lois de De Morgan

Soient p et q deux variables propositionnelles, alors :

- - - - - - - - - - - - - -

et

- - - - - - - - - - - - - -

Démonstration :

p	q	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
0	0	_	_	_	_
0	1	_	_	_	_
1	0	_	_	_	_
1	1	_	_	_	_

Équivalences de l'implication

Soient p et q deux variables propositionnelles, alors :

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

et

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

*(équivalence de la **contraposée**)*

Démonstration :

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p \vee q$	$\neg q \Rightarrow \neg p$
0	0	_	_ _	_ _
0	1	_	_ _	_ _
1	0	_	_ _	_ _
1	1	_	_ _	_ _

Simplifications classiques

Soit p une variable propositionnelle :

- $\neg\neg p \equiv$ _
- $p \wedge 0 \equiv$ _
- $p \wedge 1 \equiv$ _
- $p \wedge p \equiv$ _
- $p \wedge \neg p \equiv$ _

- $p \vee 0 \equiv$ _
- $p \vee 1 \equiv$ _
- $p \vee p \equiv$ _
- $p \vee \neg p \equiv$ _
- $p \Rightarrow p \equiv$ _ _

Définition 1.12 (Forme normale disjonctive) *Une formule est en **forme normale disjonctive** lorsqu'elle est exprimée par une **disjonction de conjonctions** de variables (ou négation de variables).*

Exemples

- $(p \wedge q \wedge \neg r) \vee p \vee (\neg q \wedge r)$ est en forme normale disjonctive.
- $\neg(p \wedge q) \vee r$ n'est pas en forme normale disjonctive (le $\neg$ ne porte pas sur une seule variable).

Définition 1.13 (Forme normale conjonctive) *Une formule est en **forme normale conjonctive** lorsqu'elle est exprimée par une **conjonction de disjonctions** de variables (ou négation de var.).*

Exemple

- $(p \vee q) \wedge p \wedge (\neg q \vee \neg p)$ est en forme normale conjonctive.

1.5 Logique des prédicats

Définition 1.14 (proposition) *Une **proposition** est un énoncé :*

- *ayant un sens,*
- *dont on peut dire avec certitude qu'il est vrai ou qu'il est faux.*

✎ Exemples

- « *Grand* », « *8* » , « *x+1* » : -
- « $2 = 6$ » : -
- « $p \Rightarrow q$ » : -
- « $x+5 > 1$ » : -

Définition 1.15 (quantificateur) *Le symbole ∀ signifie « pour tout », ou « quel que soi(en)t » et est appelé **quantificateur universel**.*

*Le symbole ∃ signifie « il existe » et est appelé **quantificateur existentiel**.*

Exemples

- « $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 0$ » se lit : « pour tout x réel, $x^2 > 0$ »
- « $\exists n \in \mathbb{N},\ n^2 = n$ » se lit : « il existe un entier n tel que $n^2 = n$ »

Univers implicite

Lorsque la situation est sans ambiguïté, on peut omettre de préciser l'ensemble d'appartenance des variables :

$$\forall x, (x \text{ pair } \Rightarrow x + 1 \text{ impair})$$

Définition 1.16 (prédicat) *Un* ***prédicat*** *est un énoncé sans valeur de vérité, dans lequel intervient au moins une variable, et qui devient une proposition par ajout de quantificateurs.*

Une variable introduite par un quantificateur est dite ***liée****.*

✎ Exemples

- $x > 9$ --
- $2x + 3 = y$ ---
- $8x^2 + 2$ ---

Ambiguïté

La formule $\forall x,\ P(x) \Rightarrow Q$ est ambiguë : elle peut être interprétée comme :

$$(\forall x,\ P(x)) \Rightarrow Q \text{ ou } \forall x,\ (P(x) \Rightarrow Q)$$

Si $P(x)$ est le prédicat : « x est pair » :

- $(\forall x,\ P(x))$ est FAUX (dans $\mathbb{N}$), donc $(\forall x,\ P(x)) \Rightarrow Q$ sera toujours VRAI quel que soit la valeur de vérité de Q.
- Mais $\forall x,\ (P(x) \Rightarrow Q)$ ne sera VRAI que si Q est VRAI.

Attention !

Pensez à toujours bien placer vos parenthèses !

Définition 1.17 (Portée d'une variable) *On appelle* **portée** *d'une variable, l'étendue au sein de laquelle cette variable est liée.*

Exemple

$$(\forall x \in \mathbb{R}, (\underbrace{x^2 + 1 > 0.5}_{\text{portée de } x})) \wedge (\forall y \in \mathbb{R}, (\underbrace{2 > -y^2}_{\text{portée de } y}))$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \underbrace{\exists y \in \mathbb{R}, \underbrace{2x + 1 = y}_{\text{portée de } y}}_{\text{portée de } x} \ :$$ *(dans ce cas, y dépend de x, on pourrait écrire y_x)*

$$(\forall x \in \mathbb{R}, (\underbrace{2x^2 > 8}_{\text{portée de } x})) \vee (\forall x \in \mathbb{R}, (\underbrace{6x > 3x}_{\text{portée de } x})) \ :$$ *(dans ce cas, les x sont différents, on pourrait écrire x_1, x_2)*

- La valeur de vérité d'une formule dépend du sens donné aux prédicats :

$$\forall x, (pair(x) \Rightarrow doux(x))$$

- Certaines formules sont vraies indépendamment du sens donné aux prédicats.

$$\forall x, (P(x) \vee \neg P(x))$$

- Certaines formules sont fausses indépendamment du sens donné aux prédicats.

$$\forall x, (P(x) \wedge \neg P(x))$$

Négation de quantificateurs

- $\neg(\forall x, P(x)) \equiv$ _ _ _ _ _ _ _ _ _
- $\neg(\exists x, P(x)) \equiv$ _ _ _ _ _ _ _ _ _

✎ Exemple

Calcul de la négation de « tous les entiers sont pairs » :

$$\neg(\forall x \in \mathbb{N}, pair(x)) \equiv \text{ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_ \_}$$

_ _

Élimination du quantificateur

- $\forall x, P \equiv \ P$ (si x n'apparaît pas dans P)
- $\exists x, P \equiv \ P$ (si x n'apparaît pas dans P)

Permutations de quantificateurs identiques

- $\forall x, \forall y, P(x,y) \equiv \forall y, \forall x, P(x,y)$
- $\exists x, \exists y, P(x,y) \equiv \exists y, \exists x, P(x,y)$

Attention !

On ne peut pas permuter des quantificateurs différents !

« quel que soit $x \in \mathbb{R}$, il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que $y > x$ » : - - - - - - - - - - - - - - - - - - -

- -

« il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $y > x$ » : - - - - - - - - - - - - - - - - -

- -

Distribution du quantificateur

- $\forall x,\ (P(x) \wedge Q(x)) \equiv$ _________________
- $\exists x,\ (P(x) \vee Q(x)) \equiv$ _________________

Attention !

On ne peut pas distribuer :

- $\forall$ sur $\vee$
- $\exists$ sur $\wedge$

Contre-exemple

On pose $P(x)$: « x est pair » et $I(x)$: « x est impair ».

- $\forall x \in \mathbb{N},\ (P(x) \vee I(x))$: _________________________________
- Mais $(\forall x \in \mathbb{N},\ P(x)) \vee (\forall x \in \mathbb{N},\ I(x))$: ______
- $\exists x \in \mathbb{N},\ (P(x) \wedge I(x))$: ______
- Mais $(\exists x \in \mathbb{N},\ P(x)) \wedge (\exists x \in \mathbb{N},\ I(x))$: ______

Changement de portée du quantificateur

- $\forall x,\ (P(x) \wedge Q) \equiv\ (\forall x,\ P(x)) \wedge Q$ (si x n'apparaît pas dans Q)
- $\exists x,\ (P(x) \wedge Q) \equiv\ (\exists x,\ P(x)) \wedge Q$ (si x n'apparaît pas dans Q)
- $\forall x,\ (P(x) \vee Q) \equiv\ (\forall x,\ P(x)) \vee Q$ (si x n'apparaît pas dans Q)
- $\exists x,\ (P(x) \vee Q) \equiv\ (\exists x,\ P(x)) \vee Q$ (si x n'apparaît pas dans Q)

Pour montrer que deux formules sont équivalentes, on peut les transformer jusqu'à que leurs formes soient identiques.

Exemples de transformations :

- Décomposer $\Leftrightarrow$ en deux $\Rightarrow$.
- Décomposer $A \Rightarrow B$ en $B \vee \neg A$.
- Distribuer la négation sur les connecteurs et quantificateurs.
- Éliminer les doubles négations.
- Simplifier $(A \wedge A, \ldots)$.
- Exploiter la commutativité, associativité, distributivité des connecteurs.