



LGCIV 1032 - Structures en béton armé

Syllabus d'exercices

Professeur titulaire : Jean-François Cap – *jf.cap@groupseco.com*

Assistants : Christophe Bayart – *christophe.bayart@uclouvain.be*
Martin Steinmetz – *martin.steinmetz@uclouvain.be*

Version a.a. 2023-2024

Sur base du solutionnaire de Sébastien Goessens - version janvier 2019

Si vous trouvez des erreurs dans ce syllabus, n'hésitez pas à me contacter: *martin.steinmetz@uclouvain.be*

Contents

I	Énoncés des exercices	2
1	Exercice 1 : Effort Normal	3
2	Exercice 2 : Flexion simple	6
3	Exercice 3 : Flexion simple – poutre I et poutre T	10
4	Exercice 4 : Flexion composée	12
5	Exercice 5 : Effort tranchant	14
6	Exercice 6 : Flambement	19
7	Exercice 7 : ELS - États limites de service	21
8	Exercice 8 : Exercice complémentaire	23
II	Résolution des exercices	26
1	Effort Normal	27
2	Flexion simple	39
3	Flexion simple - poutre en I et poutre en T	79
4	Flexion composée	89
5	Effort tranchant	101
6	Flambement	112
7	ELS - États limites de service	119
8	Exercice complémentaire	128
III	Ressources	140

Partie I

Énoncés des exercices

1 Exercice 1 : Effort Normal

La structure étudiée est représentée sur les figures et plans repris ci-après.



Les arcs sont en forme de chaînette (cosinus hyperbolique) de sorte que des charges uniformément réparties verticales provoquent un état de compression simple (sans flexion ni effort tranchant).

On suppose que les arcs sont articulés à leur base.

On suppose que les réactions horizontales des arcs sont entièrement reprises par les tirants.

Matériaux

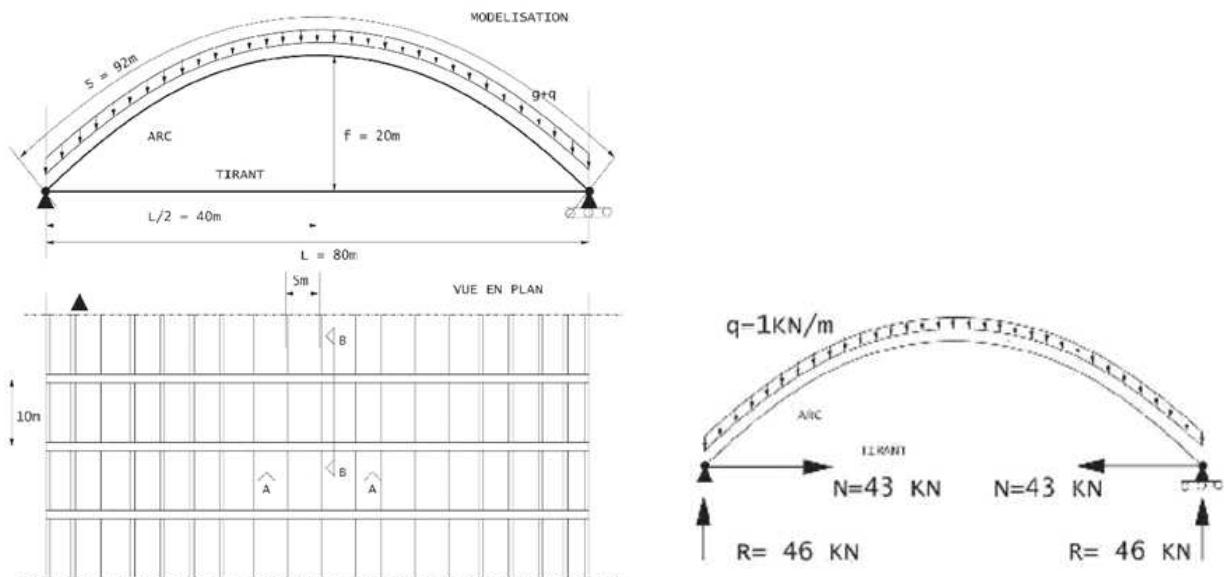
- Béton : C30/37 - Ciment CEM III/A 42,5 N - humidité relative (RH) = 50%
- Acier : BE500S

Sollicitations

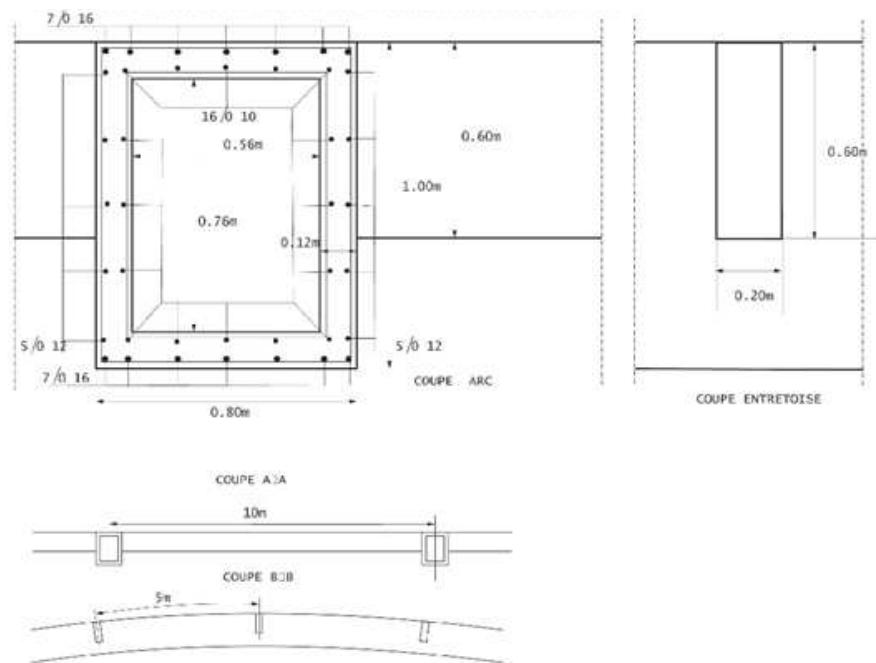
On suppose (pour les besoins de l'exercice) que l'arc n'est soumis qu'à des charges verticales uniformément réparties sur toute sa surface. En réalité une structure de ce type sera toujours sollicitée également par des charges dissymétriques et des efforts horizontaux (vent, ...). En plus, on suppose que toutes les charges sont appliquées à 28 jours.

- Actions permanentes :
 - Poids propre de la structure.
 - Poids propre de la toiture : $g = 0,5 \text{ kN/m}^2$ uniformément répartie.
- Actions variables :
 - Charge uniformément répartie : $q = 2 \text{ kN/m}^2$ ($\psi_0 = \psi_1 = 0,7$; $\psi_2 = 0,4$).

Plans et coupes de la structure



Détails de la structure



Énoncé

1. Quelles sont les charges qui sollicitent les arcs, pour les différentes combinaisons ELU et ELS ? (Pour simplifier les calculs, les charges ponctuelles seront transformées en charges linéaires réparties sur l'arc.)
2. Quelles sont les grandeurs des efforts normaux sollicitant dans les sections situées
 - aux pieds de l'arc ;
 - à la clef de l'arc ;
 - dans le tirant.

et les réactions verticales sur les fondations, pour les combinaisons suivantes :

- État Limite Ultime (ELU) - Combinaison fondamentale ;
 - États Limite de Service (ELS) - Combinaisons rare, fréquente et quasi-permanente.
3. Quel sera le raccourcissement de l'arc sous l'effet du retrait libre à long terme ?
 4. Quel sera le coefficient de fluage final (temps infini) de l'arc si l'on suppose que toutes les charges sont appliquées à 28 jours ?
 5. Quel sera le raccourcissement instantané et à long terme (temps infini) de l'arc sous l'effet de la combinaison quasi-permanente des charges, en supposant un effort moyen dans l'arc ?
$$N_{moyen} = \frac{(N_{pied} + N_{clef})}{2}$$
 6. Quelles sont les contraintes maximales en service à court terme et à long terme dans l'arc ? (Contraintes dans le béton et dans les armatures.)
 7. Quel est l'effort normal résistant de l'arc à l'ELU ?
 8. Quelle quantité d'armature faut-il prévoir dans les tirants pour satisfaire aux conditions de résistance à l'ELU ?
 9. Quelle sera la déformation maximum en service du tirant ainsi dimensionné (ELS rare) si l'on suppose le tirant entièrement fissuré ?
 10. Comment pourrait-on éviter de telles déformations ?

2 Exercice 2 : Flexion simple

La structure étudiée est représentée aux figures suivantes. Il s'agit d'un bâtiment comportant un étage. La structure est formée de dalles, de poutres et de colonnes en béton armé. Le plancher de l'étage est composé d'une dalle continue de béton armé de 19cm d'épaisseur, appuyée sur des poutres de rive et une poutre centrale en forme de Té.

Le but de cet exercice est de dimensionner les armatures de flexion de la dalle et de la poutre centrale.

Matériaux

- Béton : C25/30 ;
- Acier : BE500S.

Sollicitations

- Actions permanentes :
 - Poids propre de la dalle ;
 - Poids propre de la poutre ;
 - Charges fixes sur la dalle (hors poids propre) : $g = 1 \text{ kN/m}^2$ uniformément répartie.
- Actions variables :
 - Charge uniformément répartie : $q = 4 \text{ kN/m}^2$

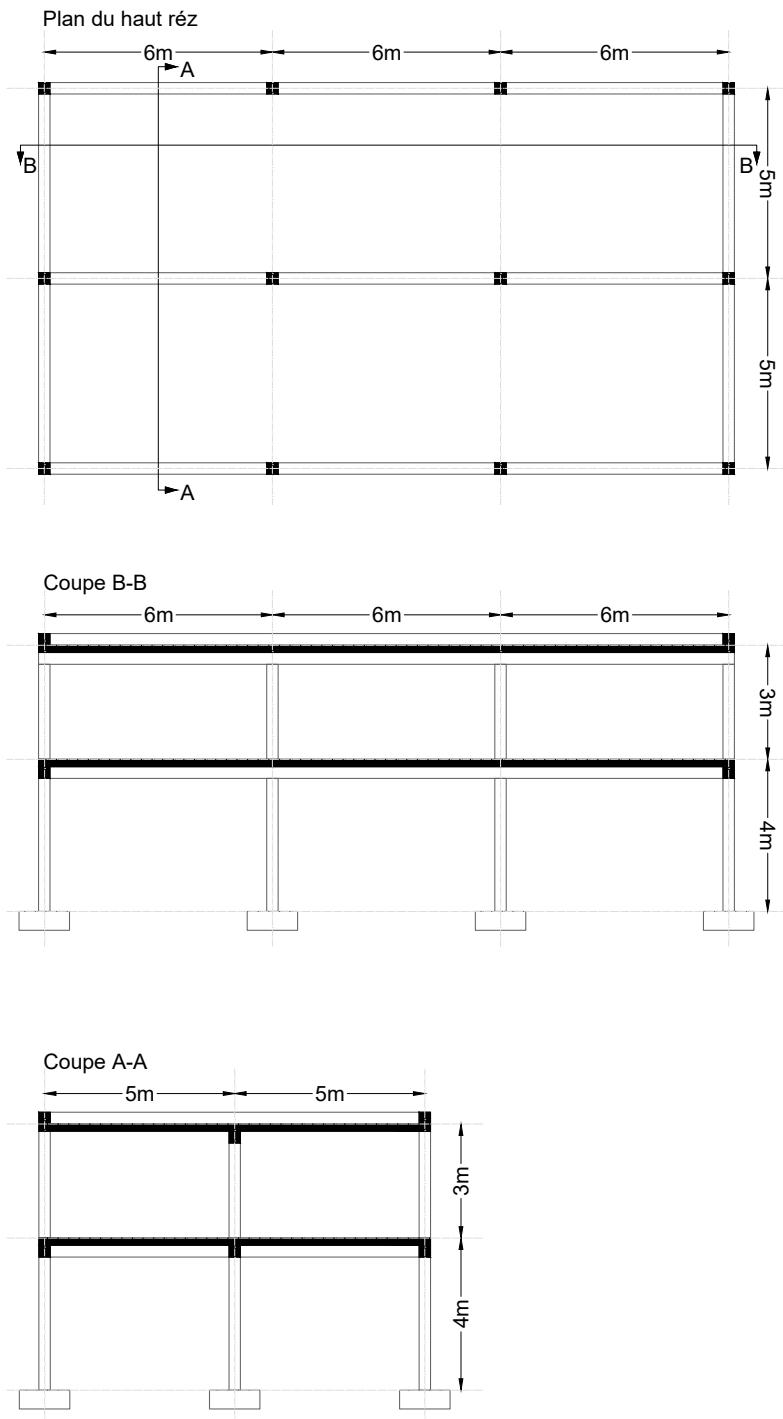
Notes

Le calcul du poids propre des éléments est réalisé en considérant que les éléments ont les dimensions suivantes :

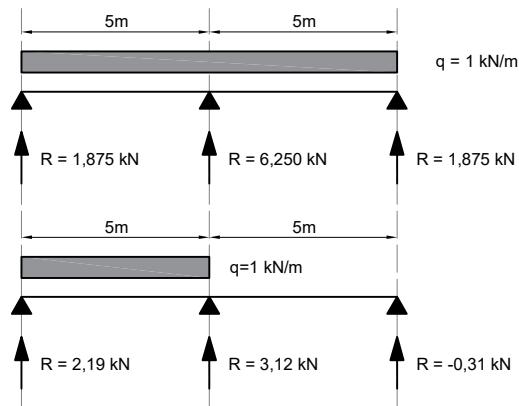
- La dalle à une épaisseur de 19 cm ;
- Les poutres ont une hauteur totale de 50 cm et une largeur (âme) de 30 cm ;
- Toutes les colonnes sont de section carrée de $30 \times 30 \text{ cm}^2$.

Pour les dalles, on considère que l'axe des armatures est situé à 3 cm de la surface du béton : $d = h - 3 \text{ cm}$. Pour les poutres, on considère que l'axe des armatures est situé à 4 cm de la surface du béton en partie supérieure et inférieure.

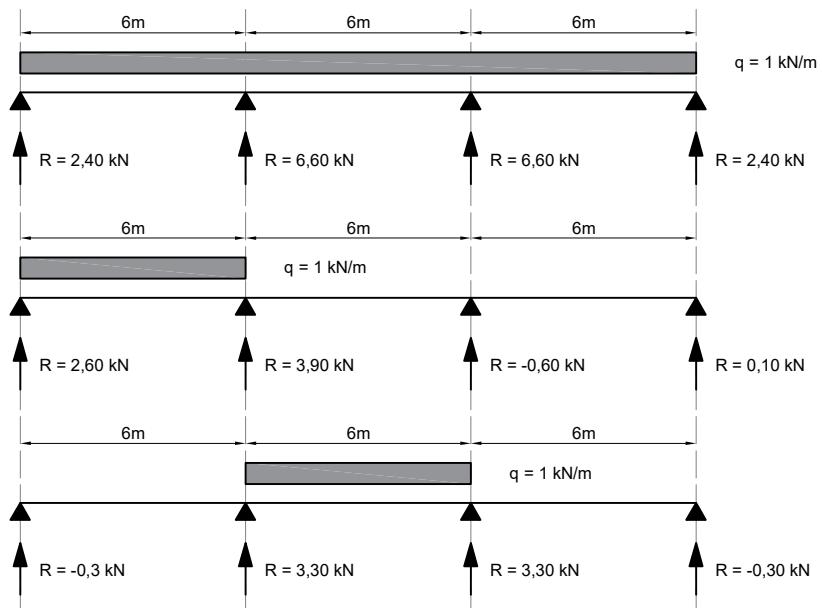
Plan et coupes de la structure



Réactions d'appui de la DALLE pour une charge répartie unitaire



Réactions d'appui de la POUTRE pour une charge répartie unitaire



Énoncé

1. Esquissez l'allure du diagramme des moments dans la dalle pour une charge linéaire répartie et le plan de ferraillage des armatures principales de flexion.
2. Quelles sont les sollicitations de flexion maximales dans la dalle (plancher de l'étage) à l'ELU dans les sections suivantes :
 - Moment maximum en travée ;
 - Moment maximum sur appui central ?
3. Quelles sont les sections d'armatures principales de flexion nécessaires en travée et sur appui ?
4. Quelle devrait être l'épaisseur minimale de la dalle pour satisfaire aux conditions de résistance à l'ELU ? (On souhaite satisfaire à la condition de capacité de rotation plastique minimale imposée par la norme : $\frac{x}{d} = \xi < 0,45$).
5. Quelles sont les charges linéaires qui sollicitent la poutre principale (axe 2) du plancher du premier étage à l'ELU ?
6. Esquissez l'allure du diagramme des moments dans la poutre pour une charge linéaire répartie et le plan de ferraillage des armatures principales de flexion.
7. Quelles sont les sollicitations de flexion maximales à l'ELU dans cette poutre aux sections suivantes :
 - en travée de rive ;
 - en travée centrale ;
 - sur appui?
8. Quelles sont les largeurs efficaces des ailes de la poutre en T aux sections suivantes :
 - en travée de rive ;
 - en travée centrale ;
 - sur appui ?
9. Quelles sont les armatures principales de flexion à prévoir dans la travée de rive de la poutre ?
10. Quelles sont les armatures principales de flexion à prévoir dans la travée centrale de la poutre ?
11. Les dimensions de la section en béton sont-elles suffisantes sur appui ?
12. Proposez trois solutions de dimensionnement de la section sur appui.

3 Exercice 3 : Flexion simple – poutre I et poutre T

La structure étudiée est une passerelle posée sur trois appuis. Celle-ci est formée d'une poutre caisson dont la section est donnée ci-dessous.

Le but de cet exercice est de dimensionner les armatures de flexion de cette poutre caisson.

Matériaux

- Béton : C40/50
- Acier : BE500S

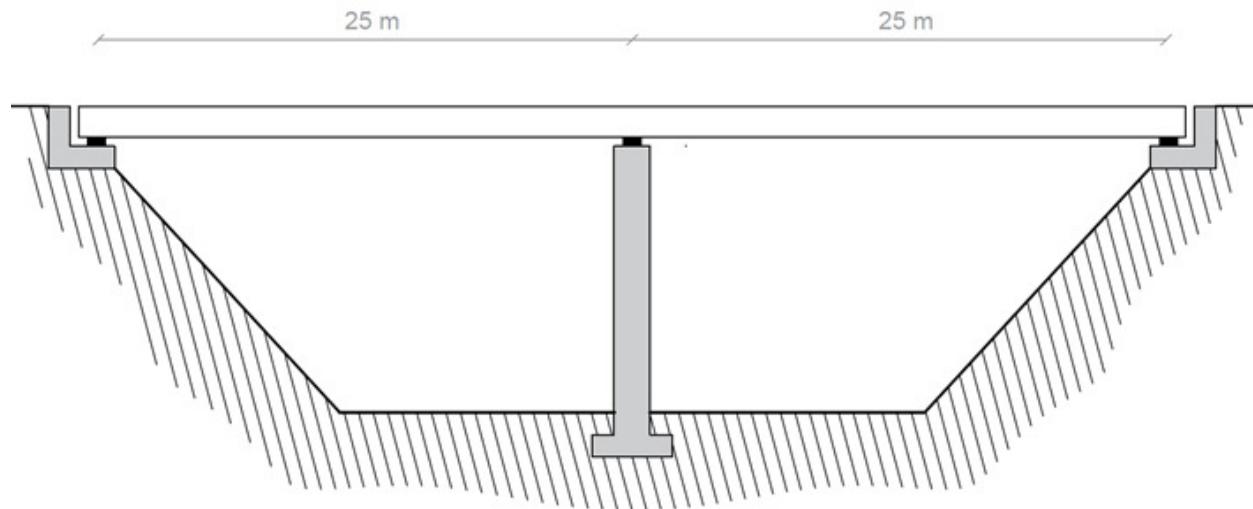
Sollicitations

- Actions permanentes :
 - Poids propre de la structure.
- Actions variables :
 - Charge uniformément répartie : $q = 2,45 \text{ kN/m}^2$.

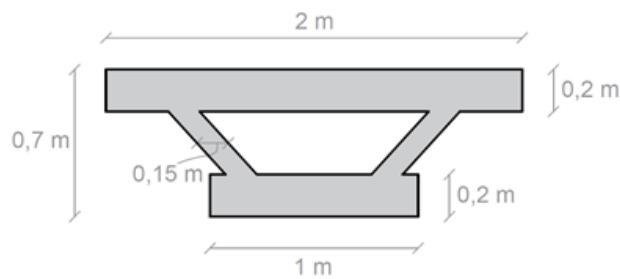
Notes

On impose un critère de rotation plastique minimal : $\frac{x}{d} \leq 0,45$, et on considère que le centre de gravité des armatures est placé à mi-épaisseur des semelles supérieures et inférieures de la section.

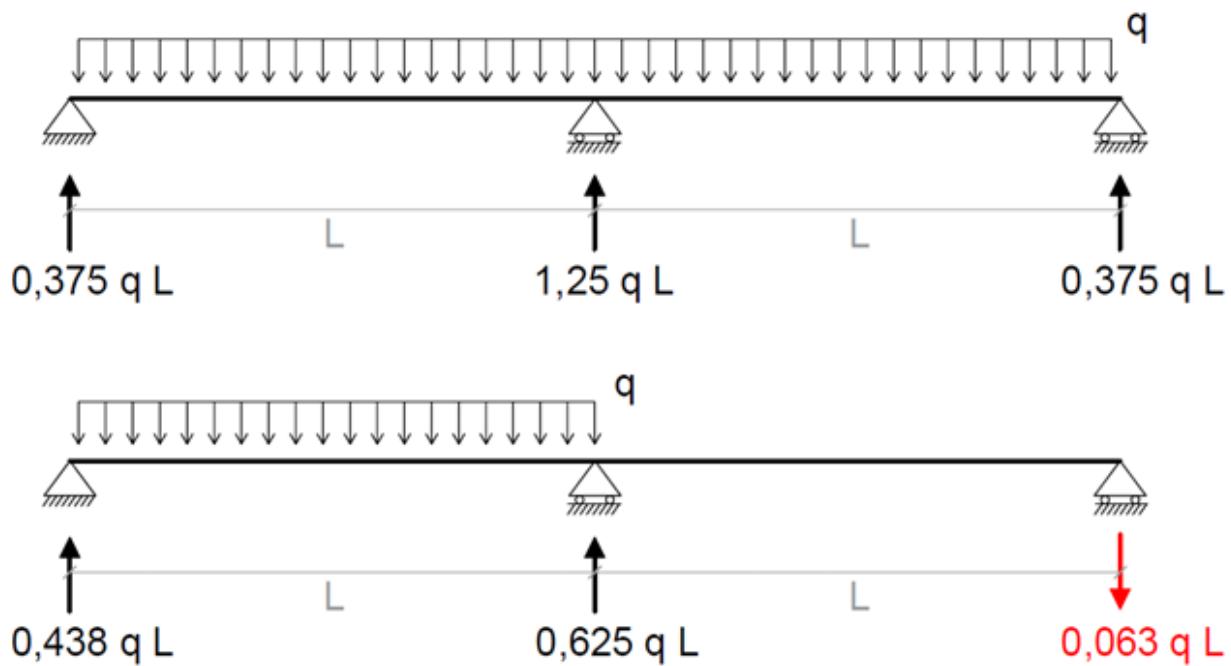
Coupe longitudinale



Coupe transversale



Réactions d'appui pour une charge répartie

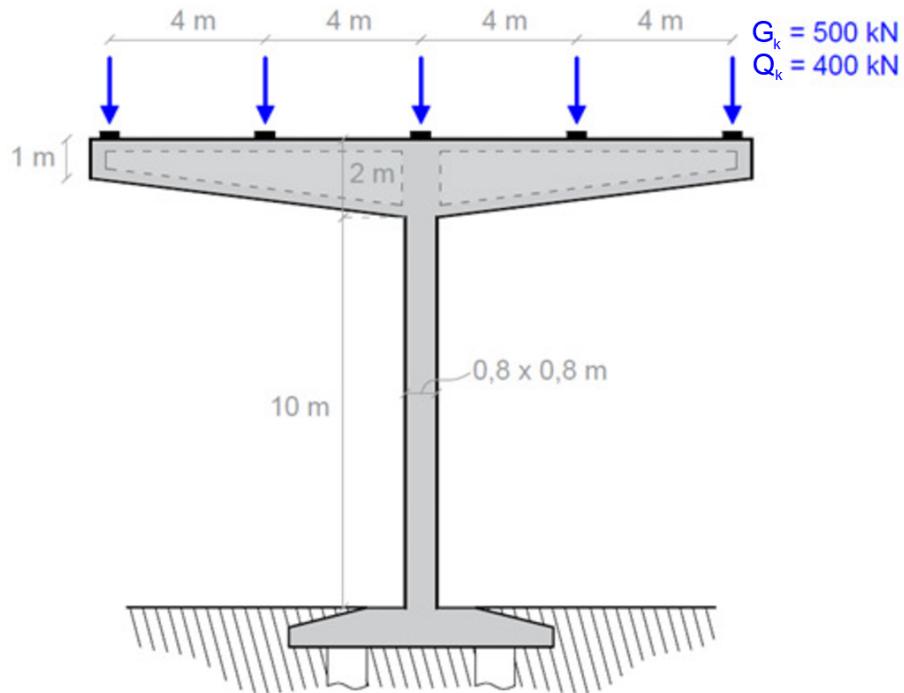


Énoncé

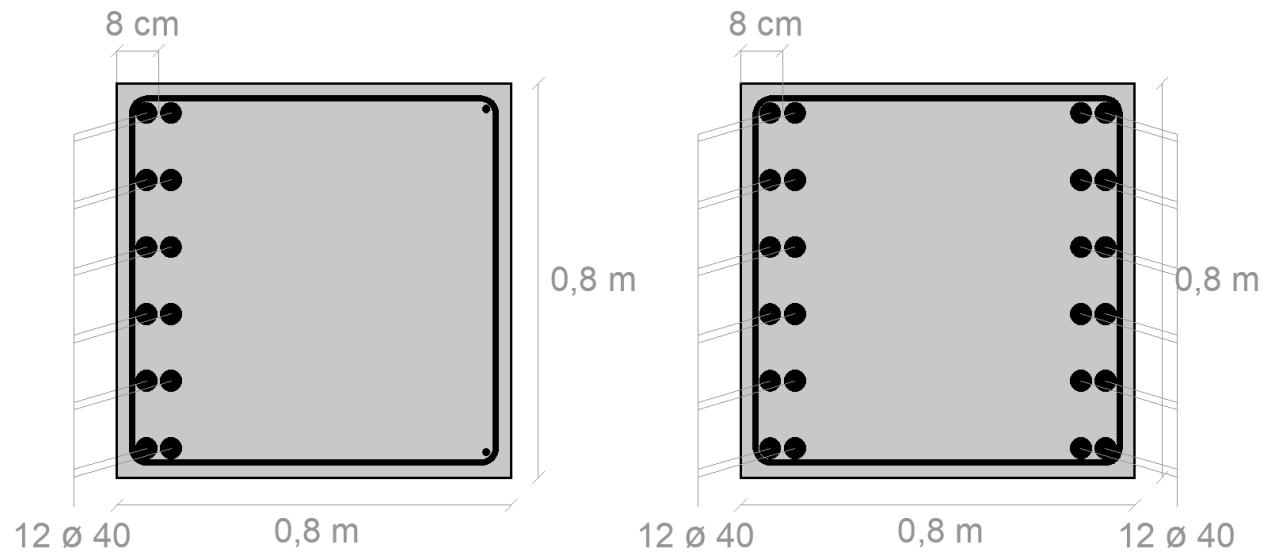
1. Dessinez l'enveloppe des moments dans la passerelle à l'ELU.
2. Quelles sont les sections d'armatures principales de flexion nécessaires en travée ?
3. Quelles sont les sections d'armatures principales de flexion nécessaires sur appui ?
4. Représentez le ferraillage de la passerelle (élévation et coupes).

4 Exercice 4 : Flexion composée

On souhaite dimensionner la colonne de l'appui central d'un pont représenté ci-dessous.



On propose deux sections pour la colonne :



Dans un premier temps, on s'occupe uniquement de la flexion composée (on néglige le flambement). Comme la section peut être soumise à de la flexion dans les deux sens, il faudra placer une armature symétrique. Cependant, pour le besoin de l'exercice, nous considérons dans un premier temps une section simplement armée (section de gauche).

Matériaux

- Béton : C40/50
- Acier : BE500S

Notes

La colonne est chargée après 7 jours et se trouvera dans une atmosphère à RH=80%

Sollicitations

On néglige le poids propre de la structure. On considère 5 charges ponctuelles avec chacune une composante fixe et une composante variable.

Énoncé

1. Dessinez le diagramme d'interaction des deux sections présentées ci-dessus. (Faire au minimum le calcul pour les états de déformation 1, 3, 4, 5 et 7.)
2. Calculez les efforts internes pour le cas de charge qui maximise l'effort normal dans la colonne.
3. Calculez les efforts internes pour le cas de charge qui maximise le moment dans la colonne.
4. Vérifiez à l'aide du diagramme d'interaction de la section symétriquement armée si celle-ci peut reprendre les couples (N, M).
5. Vérifiez la conclusion du point précédent par la méthode "Stress-Block".
6. Calculez au moyen des diagrammes d'interactions réduits la quantité d'armature nécessaire pour reprendre les efforts donnés.

5 Exercice 5 : Effort tranchant

La structure étudiée est celle présentée dans l'exercice 2. Il s'agit d'un bâtiment comportant un étage. La structure est formée de dalles, de poutres et de colonnes en béton armé. Le plancher de l'étage est composé d'une dalle continue en béton armé de 19cm d'épaisseur, appuyée sur des poutres de rive et une poutre centrale en forme de Té ($h=50\text{ cm}$ et $b_w = 30\text{cm}$).

Le but de cet exercice est de dimensionner les armatures d'effort tranchant de la dalle et de la poutre centrale.

Matériaux

- Béton : C25/30
- Acier : BE500S

Sollicitations

Sur base des charges déterminées à l'exercice 2 :

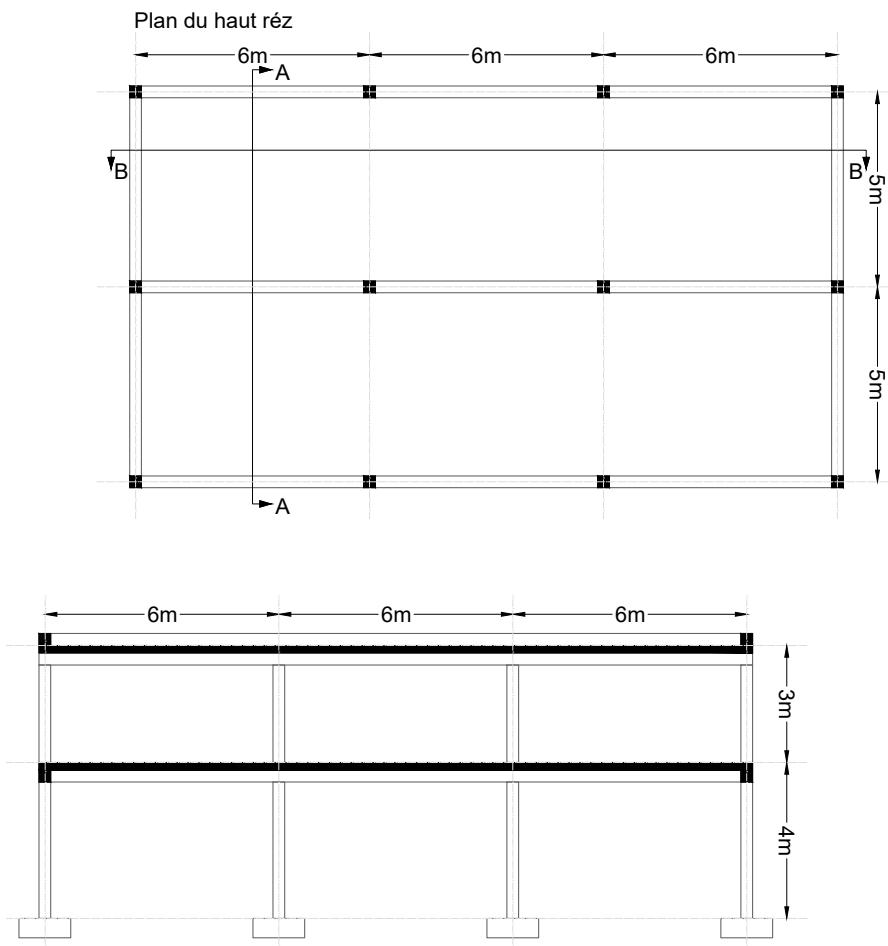
- Charge de design à l'ELU sur la dalle :
 - Actions permanentes : $G_d = 7,76 \text{ kN/m}/1\text{m}$
 - Actions variables : $Q_d = 6 \text{ kN/m}/1\text{m}$
- Charge de design à l'ELU sur la poutre centrale :
 - Actions permanentes : $G_d = 51,65 \text{ kN/m}$
 - Actions variables : $Q_d = 37,50 \text{ kN/m}$

Notes

Pour les dalles, on considère que l'axe des armatures est situé à 3 cm de la surface du béton : $d = h - 3 \text{ cm}$.

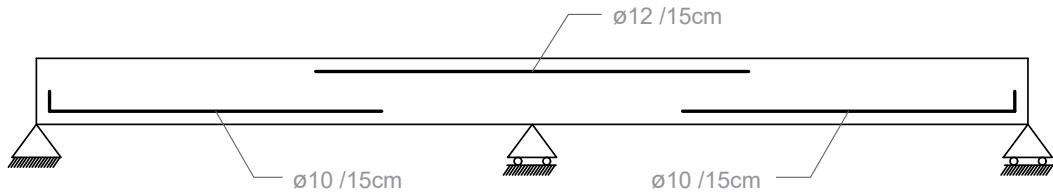
Pour les poutres, on considère que l'axe des armatures est situé à 4 cm de la surface du béton en partie supérieure et inférieure.

Plan et coupes de la structure

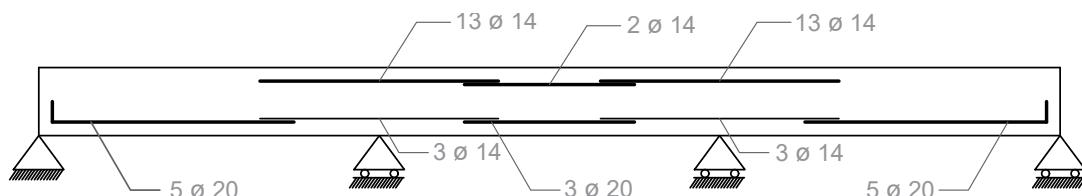


Ferraillage

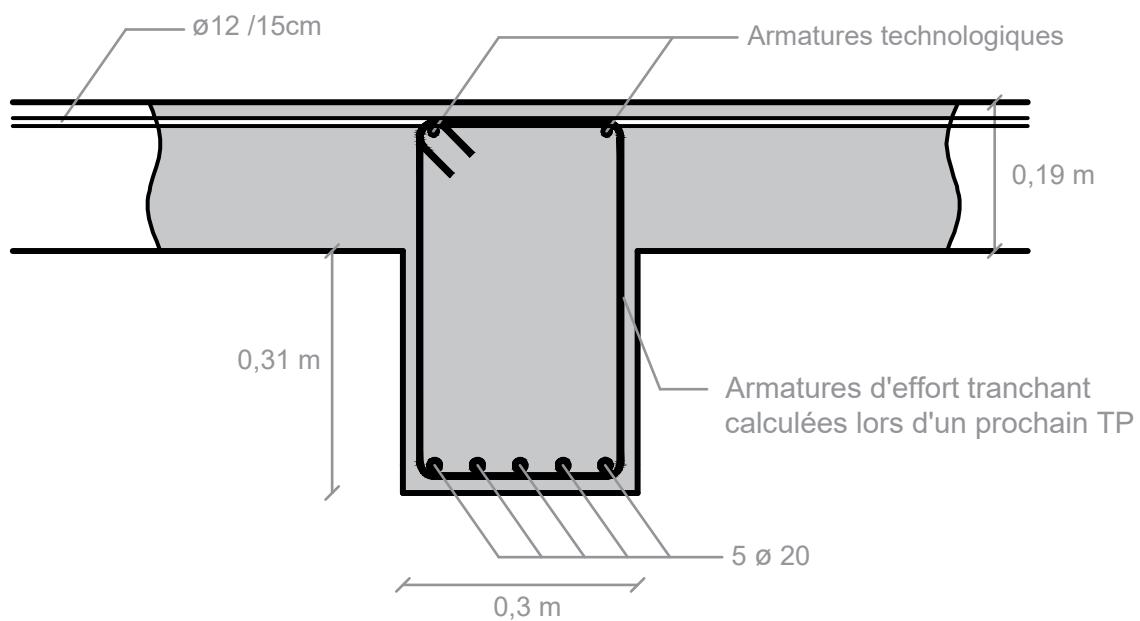
Les armatures principales de flexion dans la dalle sont :



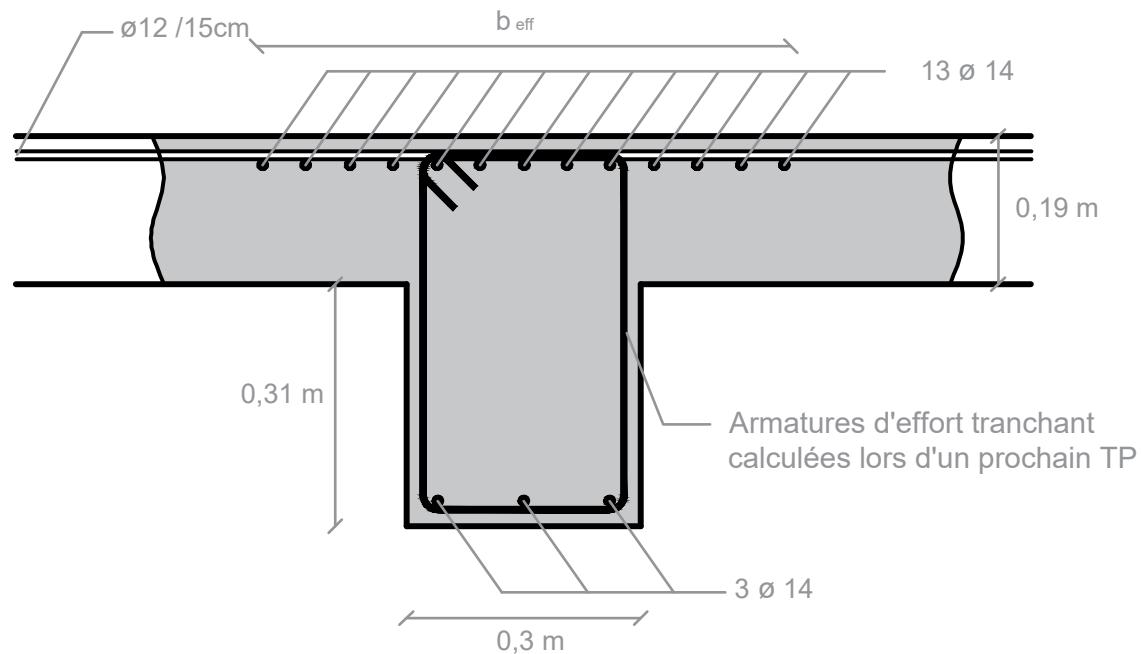
Les armatures principales de flexion dans la poutre centrale sont :



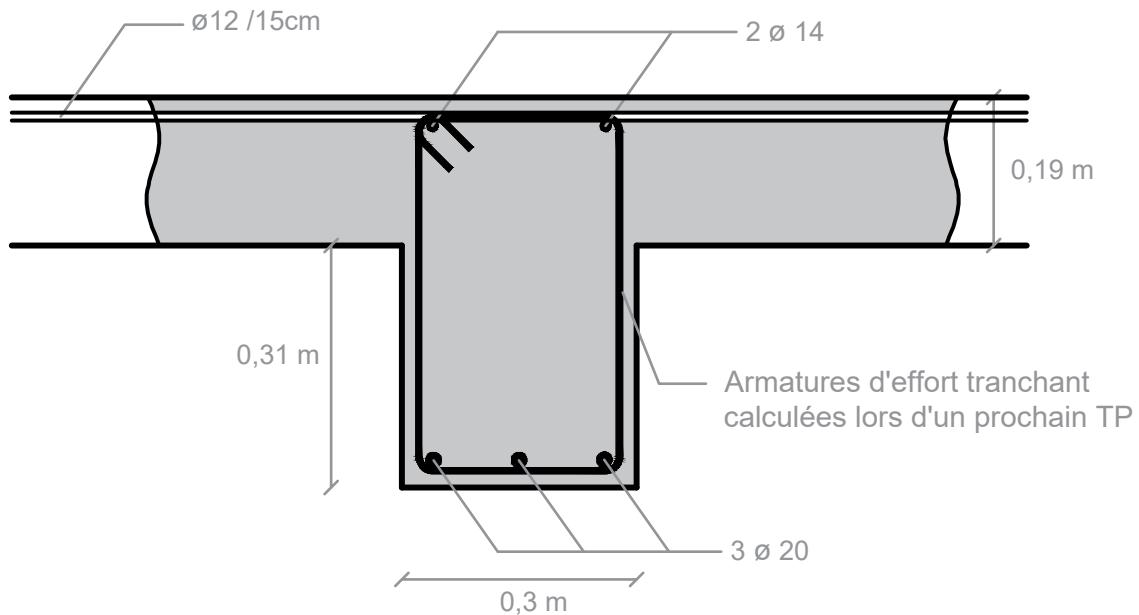
Section avec ferraillage de la poutre en travée de rive



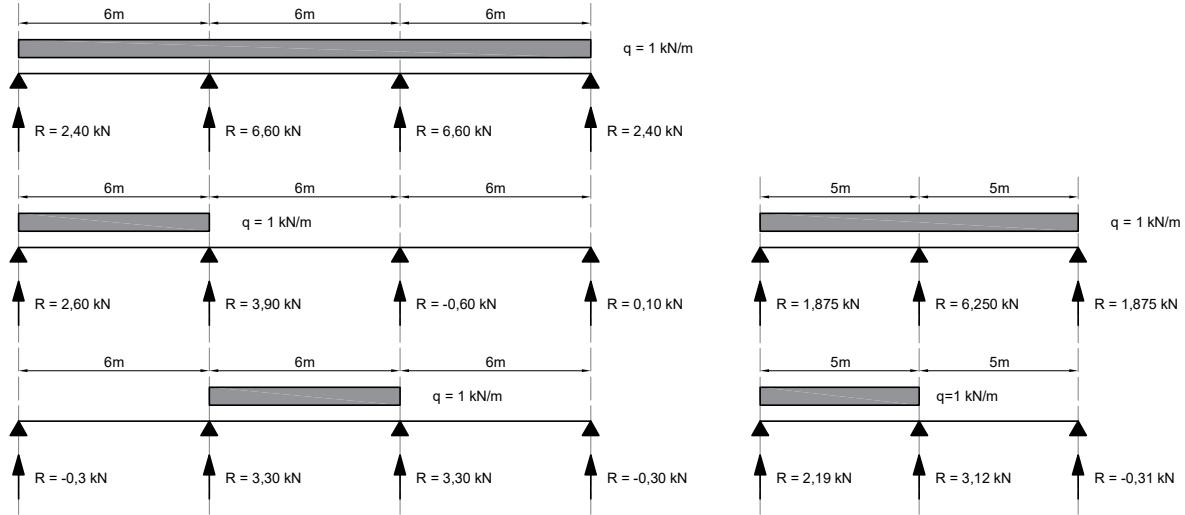
Section avec ferraillage de la poutre sur appuis centraux



Section avec ferraillage de la poutre en travée centrale



Réactions d'appui de la structure pour une charge répartie unitaire



Énoncé

1. Déterminez les sollicitations maximales à l'effort tranchant dans la dalle (plancher de l'étage) à l'ELU.
2. Déterminez les armatures d'effort tranchant nécessaires dans la dalle.
3. Déterminez les sollicitations maximales à l'effort tranchant dans la poutre centrale à l'ELU.
4. Déterminez les armatures d'effort tranchant nécessaires dans la poutre.
5. Dessinez le schéma complet du ferraillage de la poutre.

6 Exercice 6 : Flambement

La structure étudiée est celle présentée dans les exercices 2 et 4. Il s'agit d'un bâtiment comportant un étage. La structure est formée de dalles, de poutres et de colonnes en béton armé. Le plancher de l'étage est composé d'une dalle continue en béton armé, appuyée sur des poutres de rive et une poutre centrale en forme de Té.

Le but de cet exercice est de dimensionner les armatures à prévoir dans une des colonnes centrales.

Matériaux

- Béton : C25/30
- Acier : BE500S

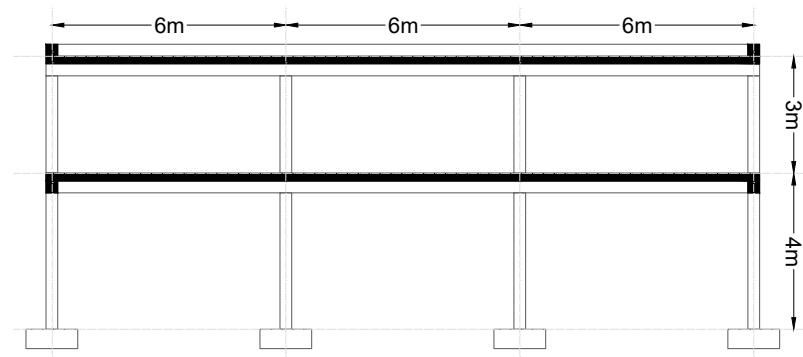
Sollicitations

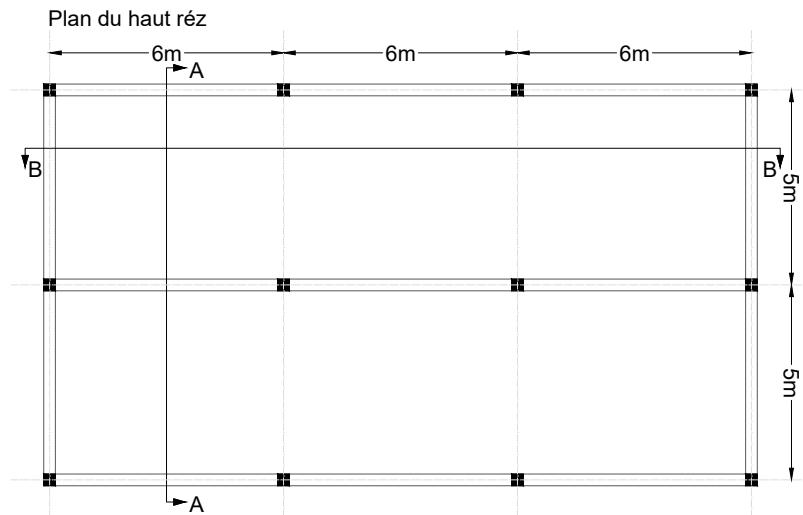
- Actions permanentes sur la poutre centrale :
 - Charges caractéristiques : $G_k=38,26 \text{ kN/m}$
 - Charges pondérées à l'ELU : $G_d=51,65 \text{ kN/m}$
- Actions variables sur la poutre centrale :
 - Charges caractéristiques : $Q_k=25 \text{ kN/m}$
 - Charges pondérées à l'ELU : $Q_d=37,50 \text{ kN/m}$ ($\psi_0 = \psi_1 = 0,7$; $\psi_2 = 0,4$)

Notes

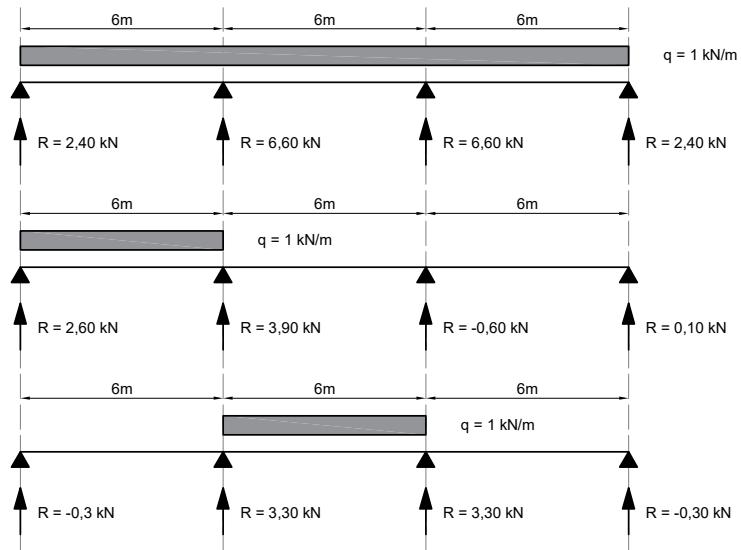
La colonne a une hauteur de 7 m (4 m + 3 m) et une section carrée de 30 cm × 30 cm. Comme le bâtiment sera contreventé, on considère la colonne articulée à chaque niveau. On considère que l'axe des armatures est situé à 4cm de la surface du béton. La colonne est chargée après 7 jours et se trouvera dans une atmosphère sèche (RH=50 %).

Plan et coupes de la structure





Réactions d'appui de la poutre pour une charge répartie unitaire



Énoncé

1. Calculez les sollicitations maximales sur la colonne centrale à l'ELU.
2. Calculez les élancements de la colonne (en tenant compte ou pas du matériau). Que concluez-vous de ces résultats pour ce qui est de la méthode de calcul ?
3. Calculez les excentricités de calcul.
4. Dimensionnez et dessiner le ferraillage de la colonne.

7 Exercice 7 : ELS - États limites de service

La structure étudiée est une poutre isostatique sur deux appuis distants de 8m. Le but de cet exercice est de vérifier si cette poutre est conforme aux critères des ELS (contraintes, fissuration et flèche).

Matériaux

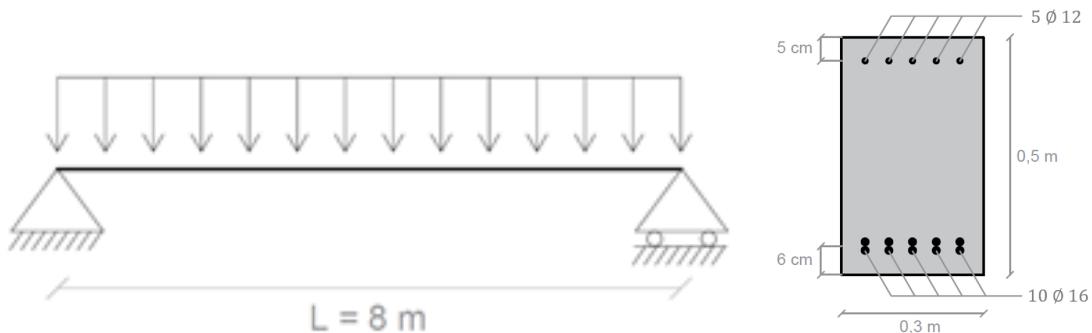
- Béton : C40/50
- Acier : BE500S (barre haute adhérence)

Sollicitations

- Actions permanentes sur la poutre centrale :
 - Charges caractéristiques (longue durée) : $G_k = 15 \text{ kN/m}$
- Actions variables sur la poutre centrale :
 - Charges caractéristiques (longue durée) : $Q_k = 15 \text{ kN/m}$ ($\psi_0 = \psi_1 = 0,7$; $\psi_2 = 0,4$)

Notes

On considère un coefficient de fluage $\varphi_{eff} = 2$ et une classe d'exposition XC3.



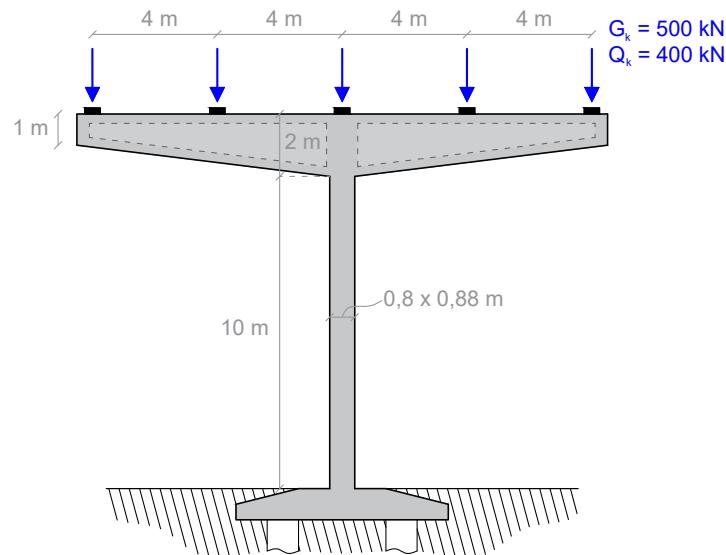
Énoncé

1. Calculez les caractéristiques mécaniques de la section non fissurée ($y_{G,I}$ et I_I).
2. Calculez les caractéristiques mécaniques de la section fissurée ($y_{G,II}$ et I_{II}).
Pour la suite de l'exercice, considérer la section fissurée à long terme.
3. Vérifiez la limitation des contraintes à l'ELS_{rare}.

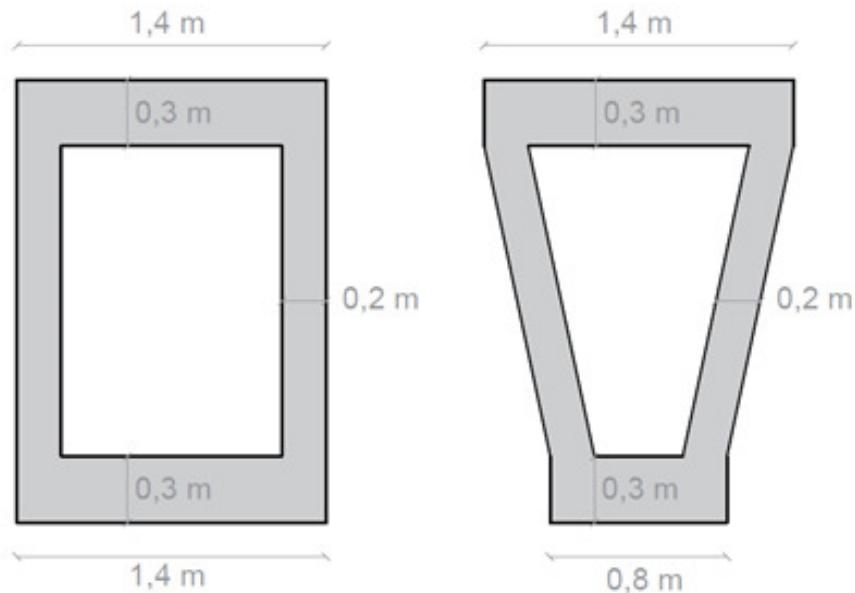
4. Vérifiez la limitation des contraintes à l' $ELS_{quasi-permanent}$.
5. Calculez l'ouverture des fissures à l' $ELS_{quasi-permanent}$.
6. Vérifiez la maîtrise de la fissuration SANS calcul direct.
7. Vérifiez la flèche SANS calcul explicite.
8. Calculez la flèche de manière explicite : méthode simplifiée.
9. Calculez la flèche de manière explicite : en tenant compte du retrait.
10. Calculez la flèche de manière explicite : calcul par intégration numérique.

8 Exercice 8 : Exercice complémentaire

Soit la structure étudiée et dimensionnée à l'exercice 4 :



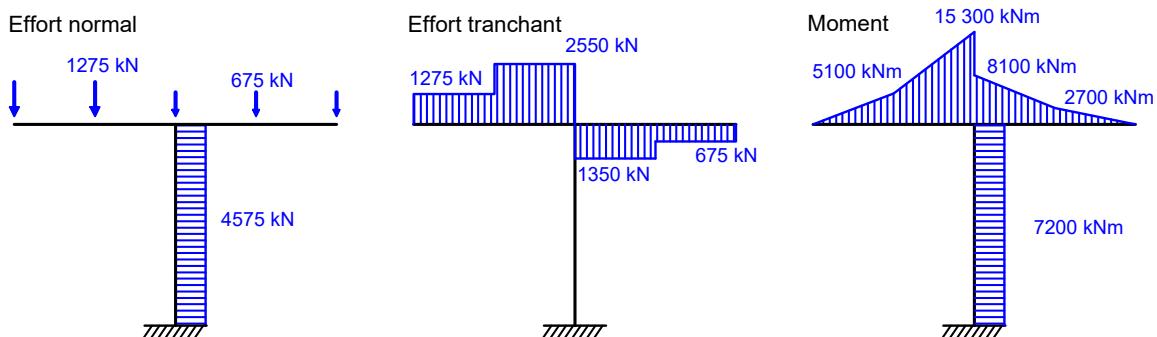
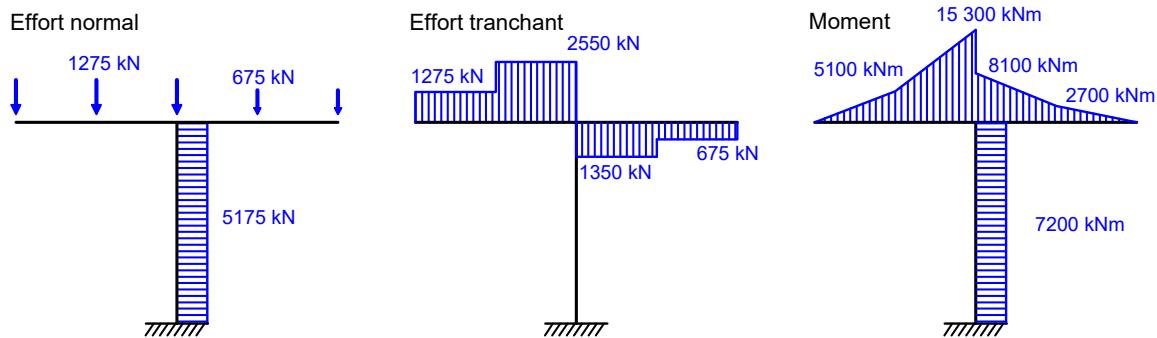
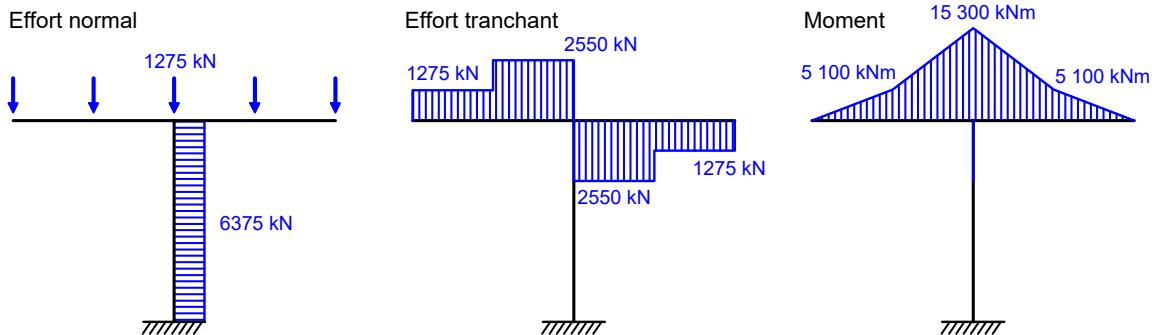
Deux sections sont envisagées pour la poutre à inertie variable :



Matériaux

- Béton : C40/50
- Acier : BE500S

Sollicitations - 3 cas de charge



Notes

La colonne est chargée après 7 jours et se trouvera dans une atmosphère à RH=80 %. On impose un critère de rotation plastique minimal : $\frac{x}{d} \leq 0,35$. On considère que le centre de gravité des armatures est placé à mi épaisseur des semelles supérieures et inférieures de la section.

Énoncé

1. Calculez les armatures de flexion dans la poutre (au nu de la colonne) pour la section rectangulaire.
2. Calculez les armatures de flexion dans la poutre pour la section avec $b_{inf}=0,8$ m.
3. Calculez les armatures d'effort tranchant dans toute la poutre pour la section avec $b_{inf}=0,8$ m.
4. Calculez les effets du 2^e ordre en pied de colonne (en se basant sur la section calculée à l'exercice 4) dans le plan de sollicitation uniquement.
5. Dessinez le ferraillage de la structure.

Partie II

Résolution des exercices

1 Effort Normal

1.1 Quelles sont les charges qui sollicitent les arcs, pour les différentes combinaisons ELU et ELS ?

- Les charges permanentes

Connaissant le poids volumique du béton armé $\gamma = 25 \text{ kN/m}^3$, on peut calculer :

Le poids propre de l'arc :

$$A_{c, arc} \times \gamma = [(1 \times 0,8) - (0,76 \times 0,56)] \text{ m}^3 \times 25 \text{ kN/m}^3 = 9,36 \text{ kN/m}$$

Le poids propre des entretoises :

$$(V_{entretoise} \times \gamma)/entre-axe = \frac{[0,6 \times 0,2 \times 10] \text{ m}^3 \times 25 \text{ kN/m}^3}{5 \text{ m}} = 6 \text{ kN/m}$$

Le poids de la toiture :

$$charge \ totale/entre-axe = \frac{0,5 \text{ kN/m}^2 \times 5 \text{ m} \times 10 \text{ m}}{5 \text{ m}} = 5 \text{ kN/m}$$

Nous avons donc une charge permanente linéaire totale

$$G_k = 20,36 \text{ kN/m}$$

Note: le poids propre ponctuel des entretoises est considéré reparti dans cet exercice

- Les charges variables

Charge répartie :

$$charge \ totale/entre-axe = \frac{2 \text{ kN/m}^2 \times 5 \text{ m} \times 10 \text{ m}}{5 \text{ m}} = 20 \text{ kN/m}$$

Nous avons donc une charge variable linéaire totale

$$Q_k = 20 \text{ kN/m}$$

Ces chargements caractéristiques doivent être pondérés aux combinaisons d'états limites ultime et de service suivants :

$$ELU_{rare} : \gamma_G \times G_k + \gamma_{Q1} \times Q_{k1} = 1,35 \times 20,36 \text{ kN/m} + 1,5 \times 20 \text{ kN/m} = 57,49 \text{ kN/m}$$

$$ELS_{rare} : G_k + Q_{k,1} = 20,36 \text{ kN/m} + 1 \times 20 \text{ kN/m} = 40,36 \text{ kN/m}$$

$$ELS_{fréq.} : G_k + \Psi_{1,1} \times Q_{k1} = 20,36 \text{ kN/m} + 0,7 \times 20 \text{ kN/m} = 34,36 \text{ kN/m}$$

$$ELS_{q.-p.} : G_k + \Psi_{2,1} \times Q_{k1} = 20,36 \text{ kN/m} + 0,4 \times 20 \text{ kN/m} = 28,36 \text{ kN/m}$$

Commentaire sur les états limites

Dans la démarche du calcul aux états limites qui est suivie dans ce cours, deux vérifications auront lieu successivement dans la procédure de dimensionnement :

- les calculs à la rupture: vérifications d'États Limites Ultimes [E.L.U.]
- les calculs en service, c'est à dire dans le domaine d'utilisation habituelle de la structure: vérification d'États Limites de Service [E.L.S.]

Ces deux états de calcul sont liés à des combinaisons de charge donc l'expression générale est sous la forme suivante:

$$\gamma_G \times G_k + \gamma_P \times P_k + A_d + \gamma_{Q,1} \times \Psi_{Q,1} \times Q_{k,1} + \sum_{i>1}^n \gamma_{Q,i} \times \Psi_{Q,i} \times Q_{k,i} \quad (\text{C: 191\&194/664})$$

Les coefficients k étant là pour rappeler qu'il s'agit de valeurs caractéristiques, avec :

- G_k les actions permanentes (poids propre, finitions) ;
- P_k la précontrainte (matière du cours LGCIV2032) ;
- A_d l'action accidentelle supplémentaire éventuelle ;
- $Q_{k,1}$ l'action variable principale ;
- $Q_{k,i}$ les actions variables d'accompagnement ;
- γ_{xy} les coefficients de sécurité partiels ;
- $\Psi_{Q,i}$ les coefficients partiels de combinaison lié au type de chargement (Ψ_0 valeur d'accompagnement ; Ψ_1 valeur fréquente ; Ψ_2 valeur quasi-permanente) .

État limite ultime

Deux grands types de combinaisons aux ELU existent (C: 191/664) :

- ELU_{rare} : les combinaisons fondamentales, établies pour les sollicitations habituellement rencontrées par la structure, ne tenant pas compte de charges accidentelles.
- $ELU_{accidentel}$: les combinaisons accidentelles, établies pour des cas exceptionnels (séismes, explosions, incendies, tornades, ...)

Le dimensionnement par rapport à toutes ces combinaisons ELU consistera à vérifier que les sollicitations $[S_{Ed}]$ qu'elles induisent restent inférieures à l'effort résistant $[S_{Rd}]$ de la structure:

$$S_{Ed} \leq S_{Rd} \quad (\text{C: 192/664})$$

Dans le cas d'une seule charge variable, et en l'absence de précontrainte et de charges accidentnelles, on trouve l'expression simplifiée suivante :

$$\gamma_G \times G_k + \gamma_{Q1} \times Q_{k1} = 1,35 \times G_k + 1,5 \times Q_{k,1}$$

Le choix d'une valeur maximale ou minimale de coefficient pondérateur pour une charge donnée sera fonction du type de sollicitation que cette charge exercera sur la structure :

- Si elle produit un effet favorable pour l'équilibre du système ou pour une contrainte donnée, c'est une valeur de γ minimale qui sera choisie pour être du côté de la sécurité par rapport à son action favorable.

- Si elle sollicite la structure de manière négative, la valeur choisie pour γ sera maximale.

État limite de service

trois grands types de combinaisons aux ELS existent (C: 194/664) :

- ELS_{rare} : Toutes les charges sont présentes simultanément, et permet de calculer la sollicitation maximale que peut rencontrer une structure en service. Par exemple, un pont avec embouteillage par vent de force 8 lorsqu'il y a de la neige.
- $ELS_{quasi-permanent}$: Les charges permanentes et un pourcentage des charges d'exploitation seront présentes la plupart du temps, et permet de calculer les déformations dues au fluage. . Par exemple, le pont avec en moyenne une vingtaine de voitures dessus.
- $ELS_{fréquent}$: Il est également utile de considérer une situation intermédiaire qui prend en compte des charges que l'on retrouve fréquemment sur la structure.

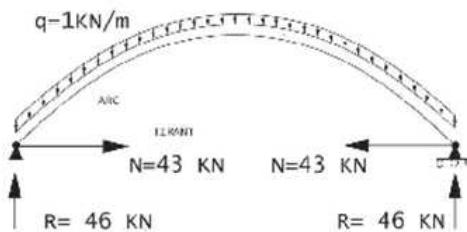
Le dimensionnement par rapport à toutes ces combinaisons ELS consistera à vérifier que les sollicitations $[S_{Ed}]$ qu'elles induisent restent inférieures à un effet sur la structure $[S_{Cd}]$:

$$S_{Ed} \leq S_{Cd} \quad (\text{C: 193/664})$$

1.2 Quelles sont les grandeurs des efforts normaux sollicitant dans les différentes sections et les réactions verticales sur les fondations, pour les combinaisons ELU et ELS?

Pour déterminer ces efforts internes ainsi que les réactions d'appuis, on utilisera les données fournies à la figure suivante, qui sont suffisantes pour lever l'hyperstatique.

On remarquera que la forme de chaînette est la forme funiculaire du chargement, l'arc est donc uniquement comprimé.



Pour une charge unitaire nous avons :

- **dans le tirant :**

- L'effort est donné directement dans la figure : $N_{tirant} = -43 \text{ kN}$

- **dans l'arc :**

- L'effort à la clef de l'arc = - effort dans le tirant = $N_{arc} = 43 \text{ kN}$
- Aux pieds de l'arc, par équilibre des forces (combinaison vectorielle de l'effort dans le tirant et de la réaction d'appui): $N_{pied} = \sqrt{R^2 + N^2} = N_{pied} = 63 \text{ kN}$

Pour obtenir les valeurs correspondant aux différents cas de charge ELU et ELS, on multiplie les valeurs obtenues ci-dessus par les charges par mètre courant calculées dans la première partie de l'exercice :

	Charge	Arc		Tirant	Réaction
	$q [kN/m]$	$N_{pied} [kN]$	$N_{clef} [kN]$	$N_{tirant} [kN]$	$R_V [kN]$
Cas unitaire	1	63	43	-43	46
ELU_{rare}	57,48	3621	2472	-2472	2644
ELS_{rare}	40,36	2543	1736	-1736	1857
$ELS_{freq.}$	34,36	2165	1478	-1478	1581
$ELS_{q.-p.}$	28,36	1787	1220	-1220	1305

1.3 Quel sera le raccourcissement de l'arc sous l'effet du retrait libre à long terme ?

Le **retrait libre** ε_{cs} est l'addition du retrait de dessiccation ε_{cd} et du retrait endogène ε_{ca} :

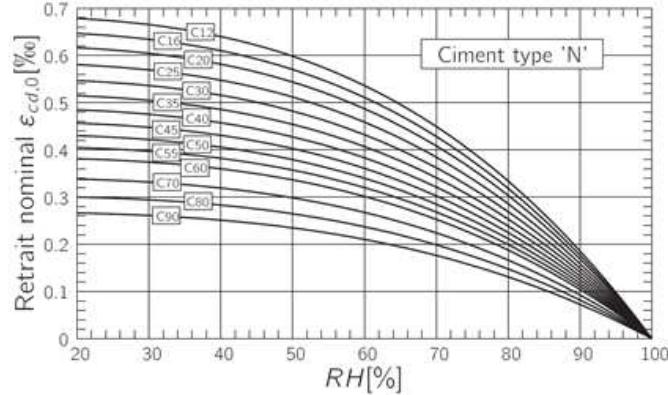
$$\varepsilon_{cs} = \varepsilon_{cd} + \varepsilon_{ca} \quad (\text{F: 30/481})$$

- Le **retrait de dessiccation** ε_{cd} est lié à la migration lente de l'eau à travers le béton durci qui est fonction de l'humidité extérieure et de la géométrie de la section. Après un temps infini, ce retrait vaut :

$$\varepsilon_{cd}(\infty) = k_h \times \varepsilon_{cd,0} \quad (\text{F: 31/481})$$

Avec :

- Le retrait nominal $\varepsilon_{cd,0}$ déterminée à l'aide du diagramme suivant, sachant que $RH = 50\%$ et que nous avons un béton C30/37 (F: 32/481) : $\varepsilon_{cd,0} = 0,048\%$



- Le coefficient k_h dépend du rayon moyen de la pièce h_0 qui vaut :

$$h_0 = \frac{2A_c}{u} = \frac{2 \times ([1 \times 0,8] - [0,56 \times 0,76]) \ m^2}{2 \times [1 + 0,8 + 0,56 + 0,76] \ m} = 0,12 \ m = 120 \ mm$$

Avec :

- A_c valant l'aire de la section
- u valant le périmètre en contact avec l'atmosphère. Dans le cas présent, nous pouvons raisonnablement poser que la section est en contact avec l'aire par toutes ses faces (intérieures et extérieures) avec l'atmosphère en raison de la difficulté de rendre la section étanche due à la présence probable de percements technologiques (conduites, etc.) dans les arcs.

h_0 [mm]	k_h
100	1.0
200	0.85
300	0.75
≥ 500	0.70

La valeur k_h est obtenue à partir du tableau en effectuant une interpolation linéaire entre les valeurs données :

$$k_h = \left[(0,85 - 1) \times \frac{120 - 100}{200 - 100} \right] + 1 = 0,97$$

Le retrait de dessiccation ε_{cd} vaut donc :

$$\varepsilon_{cd} = k_h \times \varepsilon_{cd,0} = 0,97 \times 0,048 = 0,047\%$$

- Le **retrait endogène** ε_{ca} provient de la réaction chimique entre l'eau et le ciment lors du durcissement. Variant en fonction de la classe de résistance du béton, il est directement obtenu au moyen de l'expression :

$$\varepsilon_{ca} = 2,5 \times (f_{ck} - 10) \times 10^{-6} = 2,5 \times (30 - 10) \times 10^{-6} = 0,005 \% \quad (\text{F: 33/481})$$

Avec $f_{ck} = 30 \text{ MPa}$ pour un béton C30/37

La valeur du **retrait libre total** ε_{cs} vaut donc :

$$\varepsilon_{cs} = \varepsilon_{cd} + \varepsilon_{ca} = 0,047 + 0,005 = 0,052 \%$$

Le retrait provoque donc un raccourcissement total de l'arc de :

$$\Delta L_\infty = \varepsilon_s \times L = 0,00052 \times 92 \text{ m} = 0,0478 \text{ m} = \textcolor{blue}{47,8 \text{ mm} \approx 5 \text{ cm}}$$

1.4 Quel sera le coefficient de fluage final (temps infini) de l'arc si l'on suppose que toutes les charges sont appliquées à 28 jours ?

Sur base des données suivantes :

Le rayon moyen de la section $h_0 = 120 \text{ mm}$

L'humidité relative $RH = 50 \%$

la classe de résistance du béton $C30/37$

Comme toutes les charges sont appliquées à 28 jours, on trouve, par interpolation des valeurs fournies dans le tableau suivant, le coefficient de fluage final qui vaut (F: 22-23/481):

Béton C30/37	Fluage à long terme $\varphi(\infty, t_0)$. (ciment de type 'N')					
âge t_0 du béton au moment du chargement en jours	rayon moyen $2 \cdot A_c/u$ en [mm]					
	50	150	600	50	150	600
	Atmosphère sèche (intérieur) RH = 50%			Atmosphère humide (extérieur) RH = 80%		
1	5.9	4.9	4.0	3.8	3.4	3.0
3	4.9	4.0	3.2	3.1	2.8	2.5
7	4.1	3.4	2.8	2.7	2.4	2.1
28	3.2	2.6	2.1	2.1	1.8	1.6
90	2.6	2.1	1.7	1.6	1.5	1.3
365	1.9	1.6	1.3	1.3	1.1	1.0

$$\varphi(\infty, t_0) = \varphi_0 = 3,2 + \frac{3,2 - 2,6}{50 - 150} \times (120 - 50) = 2,78$$

1.5 Quel sera le raccourcissement instantané et à long terme de l'arc sous l'effet de la combinaison quasi-permanente des charges, en supposant un effort moyen dans l'arc ?

Pour le calcul du raccourcissement, on considère un effort moyen dans l'arc de :

$$N_{moyen} = \frac{N_{pied} + N_{clef}}{2}$$

Qui vaut, pour la combinaison $ELS_{quasi-permanent}$: $N_{moyen} = \frac{1787+1220}{2} = 1503,5 \text{ kN}$

- **À court terme :**

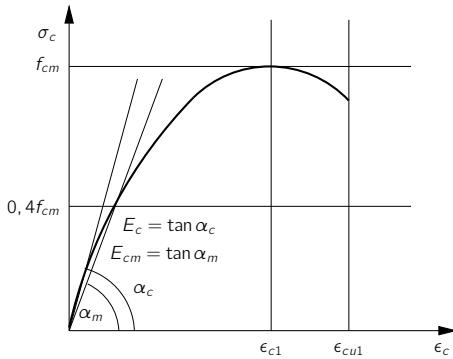
- **Si on néglige les armatures :**

Par la loi de Hooke, la déformation à court terme en compression simple vaut :

$$\varepsilon_{c,i} = \frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{N_{moyen}}{E_c \times A_c}$$

Le module de Young du béton E_c vaut :

$$E_c = 1,05 \times E_{cm} = 1,05 \times 22 \times k \times \left(\frac{f_{cm}}{10} \right)^{0,3} \quad (\text{C: 83/664})$$



Granulats	k
quartzite	1,0
calcaire	0,9
grès	0,7
basalte	1,2
porphyre	1,1

Avec $f_{cm} = f_{ck} + 8 = 38 \text{ MPa}$ (C: 72/664) et n'ayant pas d'informations complémentaires concernant le type de granulat, nous choisissons un coefficient $k = 1$, ce qui nous donne :

$$E_c = 1,05 \times 32,84 \text{ GPa} = 34,478 \text{ GPa}$$

La déformation à court terme vaut donc :

$$\varepsilon_{c,i} = \frac{N_{moyen}}{E_c \times A_c} = \frac{1503,5 \text{ kN}}{34,478 \text{ GPa} \times 0,3744 \text{ m}^2} = 0,116 \text{ mm/m}$$

Le raccourcissement de l'arc à court terme (en négligeant les armatures) vaut donc :

$$\Delta L = \varepsilon_{c,i} \times L = 0,116 \text{ mm/m} \times 92 \text{ m} = 10,67 \text{ mm}$$

- **En tenant compte des armatures :**

Par la loi de Hooke, la déformation à court terme vaut :

$$\varepsilon_{c,i} = \frac{N_{moyen}}{E_c \times A_c + E_s \times A_s} = \frac{1503,5 \text{ kN}}{34,48 \text{ GPa} \times 0,3744 \text{ m}^2 + E_s \times A_s} = 0,108 \text{ mm/m}$$

Avec : $E_s = 200 \text{ GPa}$ et $A_s = 16 \varnothing 10 + 10 \varnothing 12 + 14 \varnothing 16 = 12,57 + 11,31 + 28,15 = 52,02 \text{ cm}^2$

Le raccourcissement de l'arc à court terme (en tenant compte des armatures) vaut donc :

$$\Delta L = \varepsilon_{c,i} \times L = 0,108 \text{ mm/m} \times 92 \text{ m} = 9,94 \text{ mm}$$

- **À long terme :**

- **Si on néglige les armatures :**

La déformation à long terme est la somme de la déformation initiale et de la déformée de fluage (F: 21/481) :

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{c,\sigma} &= \varepsilon_{c,i} + \varepsilon_{c,c} \\
&= \varepsilon_{c,i} + \varphi(\infty, t_0) \times \varepsilon_{c,i} \\
&= \varepsilon_{c,i} \times (1 + \varphi) \\
&= 0,116 \times (1 + 2,78) \\
&= 0,438 \text{ mm/m}
\end{aligned}$$

Le raccourcissement de l'arc à long terme (en négligeant les armatures) vaut donc :

$$\Delta L_\infty = \varepsilon_{c,\sigma} \times L = 0,438 \text{ mm/m} \times 92 \text{ m} = 40,3 \text{ mm}$$

- **En tenant compte des armatures.**

Appliquer directement le coefficient de fluage à la déformation instantanée de l'arc implique que l'acier et le béton fluent de la même manière, ce qui n'a aucun sens physique puisque l'acier est insensible au fluage.

Il nous faut donc bien supposer que seul le béton flue, ce qui signifie que seul son module de Young sera affecté sur la charge à long terme.

La formule de la déformée devient :

$$\varepsilon_{c,\sigma} = \frac{N_{moyen}}{\frac{E_c}{1+\varphi_0} \times A_c + E_s \times A_s} = \frac{1503,5 \text{ kN}}{\frac{34,478 \text{ GPa}}{1+2,78} \times 0,3744 \text{ m}^2 + E_s \times A_s} = 0,337 \text{ mm/m}$$

Le raccourcissement de l'arc à long terme (en tenant compte des armatures) vaut donc :

$$\Delta L_\infty = \varepsilon_{c,\sigma} \times L = 0,337 \text{ mm/m} \times 92 \text{ m} = 31 \text{ mm}$$

Nous voyons donc qu'à long terme l'armature a pour effet de diminuer sensiblement l'effet du fluage

$$31 \text{ mm} < 40,3 \text{ mm}$$

1.6 Quels sont les contraintes maximales en service à court terme et à long terme dans l'arc ?

Afin de pouvoir calculer les contraintes dans l'arc nous procédons à une homogénéisation de la section en béton armé. Pour ce faire nous transformons la section d'acier en une section équivalente de béton au moyen du coefficient d'équivalence, rapport des modules de Young des deux matériaux :

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_c}$$

En notant ρ le pourcentage d'armature :

$$\rho = \frac{A_s}{A_c}$$

En supposant que la déformation est identique dans l'acier et dans le béton, la déformation de la section soumise à un effort normal N vaut :

$$\varepsilon_s = \varepsilon_c = \varepsilon = \frac{N}{A_c \times E_c + A_s \times E_s} \quad (\text{C: 237/664})$$

On peut calculer les contraintes dans le béton et dans l'acier :

$$\begin{aligned} \sigma_c &= \varepsilon \times E_c = \frac{N}{A_c + \alpha_e \times A_s} = \frac{N}{A_c + \alpha_e \times \rho \times A_c} = \frac{N}{A_c (1 + \alpha_e \rho)} \\ \sigma_s &= \alpha_e \times \sigma_c \end{aligned}$$

Le module de Young de l'acier vaut :

$$E_s = 200 \text{ GPa}$$

Comme nous l'avons vu précédemment, afin de tenir compte du fluage, les modules de Young du béton à court et à long terme seront différents :

$$E_{c, \text{court terme}} = 1,05 \times E_{cm} = 34,478 \text{ GPa}$$

$$E_{c, \text{long terme}} = \frac{E_{c, \text{court terme}}}{1 + \varphi_0} = \frac{34,478 \text{ GPa}}{1 + 2,78} = 9,12 \text{ GPa}$$

On peut donc calculer le rapport α_e à court et à long terme :

$$\alpha_{e, \text{ct}} = \frac{200}{34,478} = 5,8$$

$$\alpha_{e, \text{lt}} = \frac{200}{9,12} = 21,93$$

Enfin, nous avons le pourcentage d'armature ρ :

$$\rho = \frac{A_s}{A_c} = \frac{52,02 \text{ cm}^2}{3744 \text{ cm}^2} = 0,014$$

Considérant l'effort maximal N dans l'arc pour les trois ELS on obtient les contraintes suivantes :

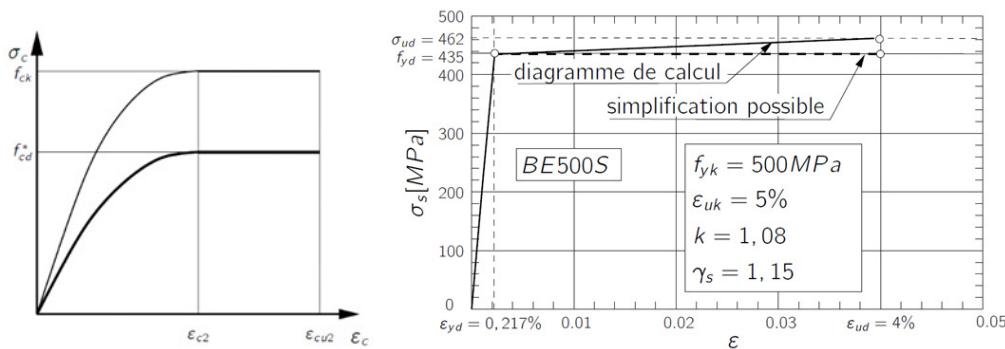
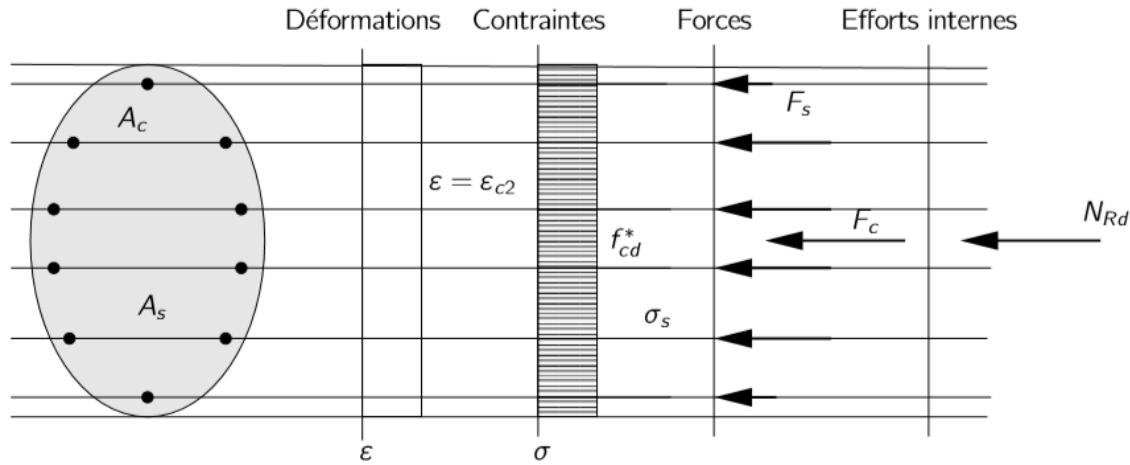
Combinaison	N [kN]	Court terme		Long terme	
		σ_c [N/mm^2]	σ_s [N/mm^2]	σ_c [N/mm^2]	σ_s [N/mm^2]
ELS_{rare}	2543	6,3	36,4	5,2	114
$ELS_{fréquent}$	2165	5,3	31,0	4,4	97
$ELS_{q.-p.}$	1787	4,4	25,6	3,7	80

On observe que le fluage provoque un "transfert" d'effort du béton vers les armatures.

1.7 Quel est l'effort normal résistant de l'arc à l'ELU ?

A l'ELU, la rupture sera provoquée par écrasement du béton, et comme nous sommes dans un cas de compression simple, $\varepsilon_c = \varepsilon_{c2} = 0,2\%$ (C: 235-240/664). Dans le cas d'un béton C30/37, la contrainte dans le béton σ_c pour une déformation ε_{c2} vaut :

$$\sigma_c = f_{cd}^* = \alpha_{cc} \times \frac{f_{ck}}{\gamma_c} = 0,85 \times \frac{30}{1,5} = 17 \text{ MPa} \quad (\text{C: 81/664})$$



Par adhérence entre l'acier et le béton, la déformation des armatures ε_s vaut $\varepsilon_{c2} = 0,2\%$. L'armature est toujours dans son domaine élastique ($\varepsilon_s \leq 0,217\%$), la loi de Hooke est encore applicable. La contrainte dans les armatures vaut alors :

$$\sigma_s = E_s \times \varepsilon_s = 200 \text{ GPa} \times 0,002 = 400 \text{ MPa}$$

Ces deux contraintes permettent de calculer les efforts de compression et de traction dans l'acier et le béton :

$$F_c = A_c \times \sigma_c = 0,3744 \text{ m}^2 \times 17 \text{ MPa} = 6364,8 \text{ kN}$$

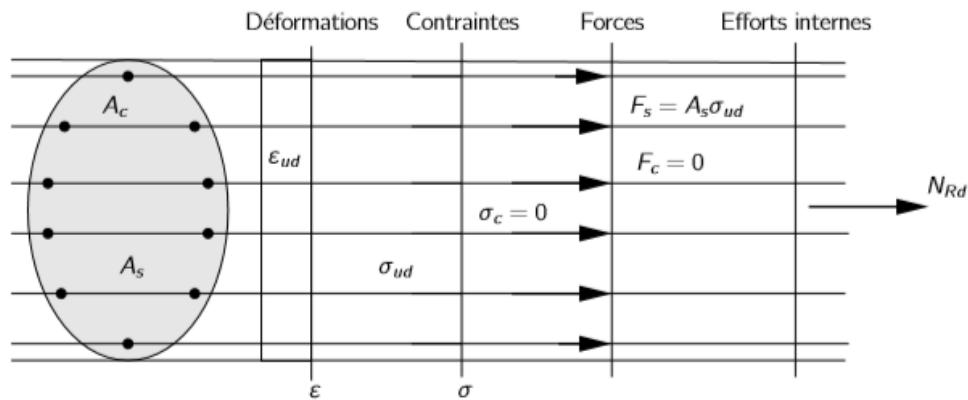
$$F_s = A_s \times \sigma_s = 0,0052 \text{ m}^2 \times 400 \text{ MPa} = 2080 \text{ kN}$$

On obtient la résistance ultime en sommant les efforts dans les armatures et le béton :

$$N_{Rd} = F_s + F_c = 6364,8 \text{ kN} + 2080 \text{ kN} = 8444,8 \text{ kN}$$

1.8 Quelle quantité d'armature faut-il prévoir dans les tirants pour satisfaire aux conditions de résistance à l'ELU ?

Le tirant est en béton armé et est sollicité en traction. À la rupture, le béton étant fissuré, seul l'acier reprendra l'effort de traction (C: 247-249/664).



Considérant un effort dans le tirant $N_{tirant} = -2471,9 \text{ kN}$ à l'ELU, et sachant que la résistance de design d'un acier BE 500 S vaut :

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = \frac{500 \text{ MPa}}{1,15} = 435 \text{ MPa}$$

La section d'acier des tirants devra valoir au minimum :

$$A_s = \frac{N_{tirant}}{f_{yd}} = \frac{2472 \text{ kN}}{435 \text{ MPa}} = 56,8 \text{ cm}^2$$

Ce qui, en ferrailage, signifie (par arc) :

$$29 \varnothing 16 = 58,31 \text{ cm}^2$$

$$19 \varnothing 20 = 59,69 \text{ cm}^2$$

$$12 \varnothing 25 = 58,90 \text{ cm}^2$$

1.9 Quelle sera la déformation maximum en service du tirant ainsi dimensionné (ELS rare) si l'on suppose le tirant entièrement fissuré ?

Sachant qu'à l' ELS_{rare} , l'effort dans le tirant vaut 1736 kN , repris par $12 \varnothing 25 = 58,9 \text{ cm}^2$, et connaissant le module de Young de l'acier ($E_s = 200 \text{ GPa}$), on peut calculer l'allongement du tirant à partir la loi de Hooke :

$$\Delta L = L \times \varepsilon = L \frac{\sigma}{E_s} = \frac{N \times L}{A_s \times E_s} = \frac{1736 \text{ kN} \times 80 \text{ m}}{58,9 \text{ cm}^2 \times 200 \text{ GPa}} = 11,79 \text{ cm}$$

1.10 Comment pourrait-on éviter de telles déformations ?

Un tel allongement du tirant est probablement inadmissible pour différentes raisons :

- effet des déplacements sur les fondations
- contrôle de la géométrie de l'arc
- ...

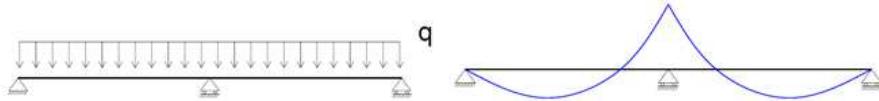
Si on désire éviter de telles déformations, on peut :

- augmenter la section d'acier, puisque l'allongement lui est inversement proportionnel
- précontraindre le tirant, afin de faire participer la raideur du béton

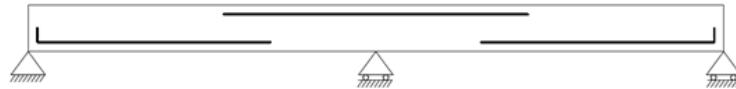
2 Flexion simple

2.1 Esquissez l'allure du diagramme des moments dans la dalle pour une charge linéaire répartie et le plan de ferraillage des armatures principales de flexion.

Soit une dalle continue sur trois appuis soumis à une charge linéaire, le diagramme des moments prend la forme suivante :



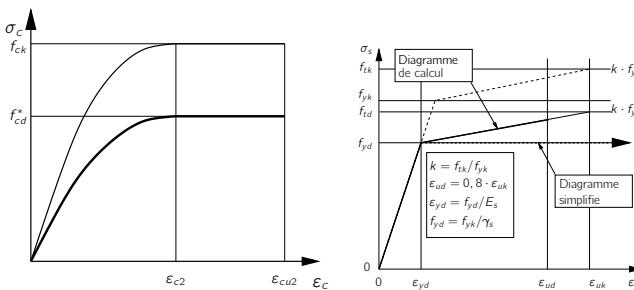
Comme le béton résiste peu à la traction, il sera nécessaire de prévoir des armatures de flexion aux endroits où la fibre inférieure (moment positif) ou la fibre supérieure (moment négatif) sera en traction. Le dessin des armatures principales de flexion aura donc l'allure suivante :



Ces armatures seront calculées dans la suite de l'exercice. En fin d'exercice, il conviendra de compléter ce diagramme en indiquant les quantités de barres d'armatures nécessaires calculées. Des étriers (armatures transversales) devront également être ajoutés pour reprendre l'effort tranchant. Ces armatures seront calculées dans l'exercice 5.

La détermination du moment résistant ultime de sections droites de béton armé (ou de béton précontraint) s'appuie sur les hypothèses suivantes (F : 212/481) :

- Les sections planes restent planes (théorème de Bernoulli, applicable si $(l/h) \geq 2$).
- Les armatures adhérentes subissent les mêmes déformations que le béton adjacent (en moyenne).
- La résistance en traction du béton est négligée.
- Les contraintes dans le béton et les armatures se déduisent des diagrammes contrainte-déformation de calcul.



2.2 Quelles sont les sollicitations de flexion maximales dans la dalle (plancher de l'étage) à l'ELU ?

Note : L'ensemble des calculs sont effectués par mètres courant de dalle.

Calcul des charges sur la dalle

- Les charges permanentes :

Connaissant le poids volumique du béton armé $\gamma = 25 \text{ kN/m}^3$, on peut calculer :

Le poids de la dalle :

$$A_{c, \text{dalle}} \times \gamma = 0,19 \text{ m} \times 1 \text{ m} \times 25 \text{ kN/m}^3 = 4,75 \text{ kN/m}$$

La surcharge permanente :

$$\text{charge repartie} \times \text{largeur} = 1 \text{ kN/m}^2 \times 1 \text{ m} = 1,00 \text{ kN/m}$$

Nous avons donc une charge permanente linéaire totale :

$$G_k = 5,75 \text{ kN/m}$$

- Les charges variables :

Charge répartie :

$$\text{charge repartie} \times \text{largeur} = 4 \text{ kN/m}^2 \times 1 \text{ m} = 4,00 \text{ kN/m}$$

Nous avons donc une charge variable linéaire totale :

$$Q_k = 4,00 \text{ kN/m}$$

Ce qui nous donne les charges de calcul (design) suivantes à l'ELU :

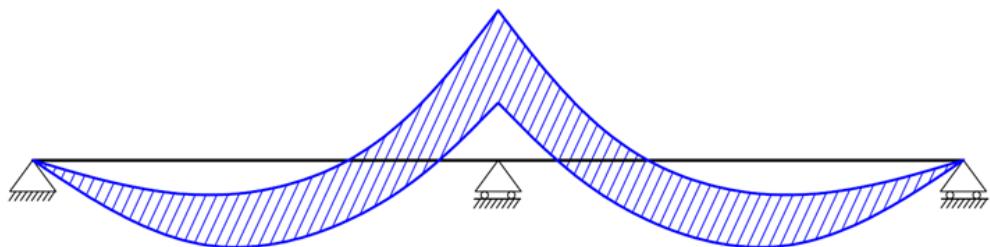
$$G_d = 1,35 \times G_k = 1,35 \times 5,75 \text{ kN/m} = 7,76 \text{ kN/m}$$

$$Q_d = 1,5 \times Q_k = 1,5 \times 4 \text{ kN/m} = 6 \text{ kN/m}$$

Calcul des moments maximaux

Comme nous sommes en présence d'une structure hyperstatique supportant une charge variable, il convient de calculer l'enveloppe des moments.

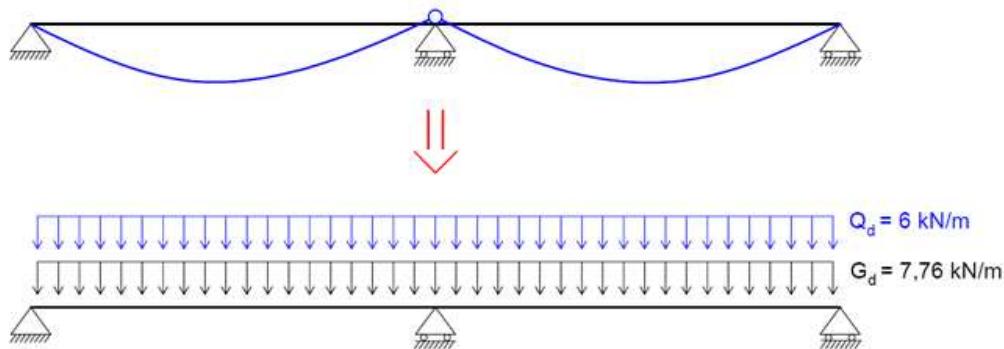
L'enveloppe des moments sur la structure aura la forme suivante :



Afin de calculer les valeurs minimales et maximales des moments de flexion sur l'appui central et en travée, il faudra trouver, pour chaque cas, la position des charges variables Q_d . En effet, en fonction de sa position, une charge variable peut avoir un effet favorable ou défavorable sur la structure.

- Sur appui central :

Un bref examen de la ligne d'influence du moment au niveau de l'appui central nous donne les zones où il faut appliquer les charges variables pour maximiser le moment en cet endroit :

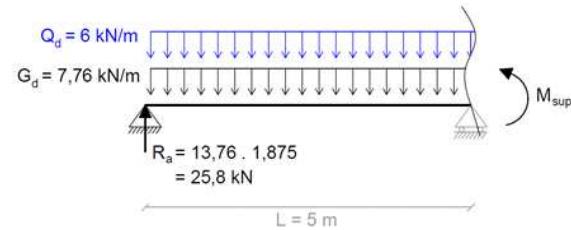


On appliquera donc la charge variable Q_d sur l'ensemble de la structure pour calculer le moment maximum sur appui.

Note : Pour la charge permanente, nous sommes toujours obligés de la considérer (de par sa nature permanente) comme appliquée sur l'ensemble de la structure, même si elle peut parfois avoir un effet favorable sur l'effort interne calculé.

On trouve la valeur du moment $M_{max, appui} = M_{sup}$ en pratiquant une coupure et en équilibrant les moments :

$$M_{sup} = R_a \times L - \frac{(G_d + Q_d) L^2}{2}$$

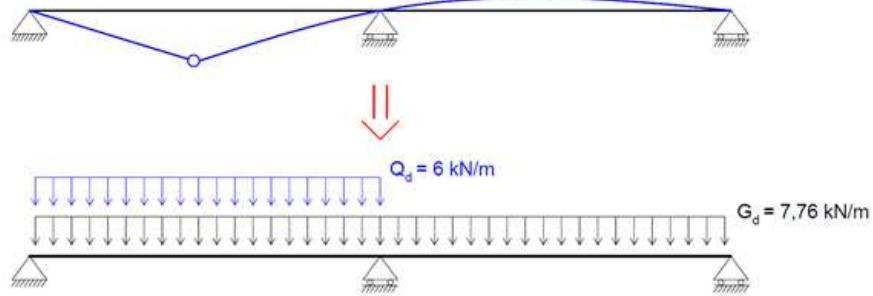


Avec réaction d'appui à gauche $R_a = (G_d + Q_d) \times 1,875 = 25,8 \text{ kN}$ calculée au moyen du diagramme pour une charge unitaire donnée dans l'énoncé. Le moment maximum sur appui vaut donc :

$$M_{sup} = 25,8 \text{ kN} \times 5 \text{ m} - \frac{13,76 \text{ kN/m} \times 5^2 \text{ m}^2}{2} = -43 \text{ kNm}$$

- En travée :

Un bref examen de la ligne d'influence du moment au niveau de la travée nous donne les zones où il faut appliquer les charges variables pour maximiser le moment en cet endroit :



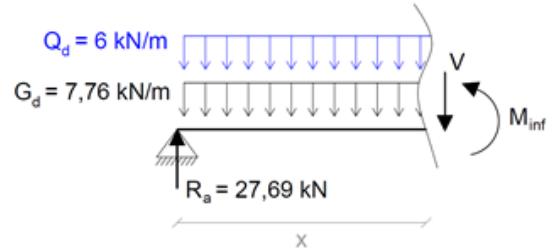
Dans ce cas-ci, on appliquera donc la charge variable Q_d uniquement sur la première travée pour calculer le moment maximum en travée.

Avant de pouvoir calculer le moment maximum en travée $M_{max, travée} = M_{inf}$ il est nécessaire de déterminer l'emplacement exact de ce maximum. Le moment sera maximum lorsque sa dérivée, à savoir l'effort tranchant, sera nul.

L'équation de l'effort tranchant en fonction de x vaut :

$$V(x) = R_a - (Q_d + G_d) \times x$$

La réaction R_a est obtenue au moyen des diagramme donnant les réactions d'appui pour une charge unitaire fournis dans l'énoncé.



Comme la charge Q_d n'est pas appliquée sur toute la structure, on trouve la réaction d'appui en sommant le cas d'un chargement complet avec G_d et le cas d'un chargement partiel avec Q_d . On obtient :

$$R_a = 1,875 \times G_d + 2,19 \times Q_d = 1,875 \times 7,76 \text{ kN} + 2,19 \times 6 \text{ kN} = 27,69 \text{ kN}$$

En calculant $V(x) = 0$, on trouve :

$$V(x) = 27,69 \text{ kN} - (13,76 \text{ kN/m}) \times x = 0 \Rightarrow x = 2,01 \text{ m}$$

On trouve alors la valeur du moment maximum en travée $M_{max,travée} = M_{inf}$ en pratiquant une coupure à la distance x de l'appui et en équilibrant les moments :

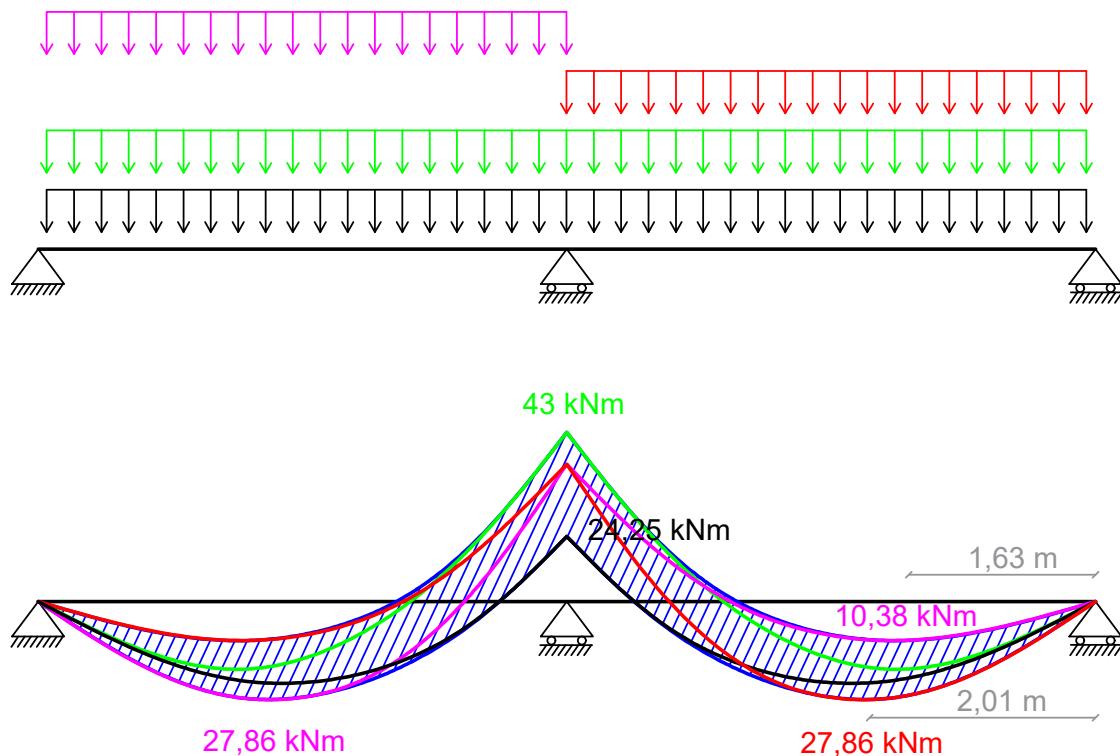
$$\sum M_{x=2,01 \text{ m}} = 0 \Rightarrow M_{inf} = R_a \times x - \frac{(G_d + Q_d) \times x^2}{2}$$

$$M_{inf} = 27,69 \text{ kN} \times 2,01 \text{ m} - \frac{13,76 \text{ kN/m} \times 2,01^2 \text{ m}^2}{2} = 27,86 \text{ kNm}$$

Rappelons que ces valeurs sont calculées par 1 mètre de dalle.

L'enveloppe des moments est générée à partir des différents diagrammes liés à la variation des charges sur la dalle :

- Charges variables sur la travée de gauche
- Charges variables sur la travée de droite
- Charges variables sur les deux travées
- On ne tient compte que de la charge permanente



2.3 Quelles sont les sections d'armatures principales de flexion nécessaires en travée et sur appui ?

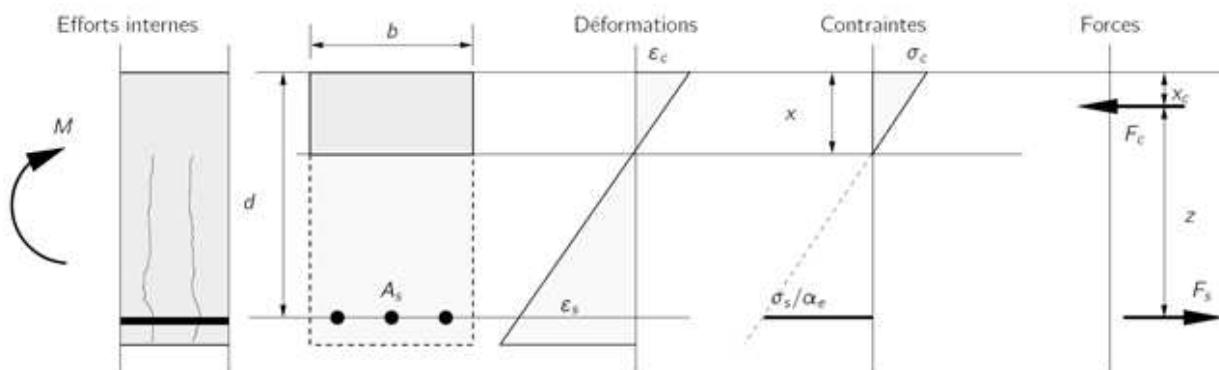
- Par la formule simplifiée (C : 253-258/664) :

Il est toujours intéressant d'utiliser la formule simplifiée, basée sur distribution élastique des contraintes, avant de se lancer dans un calcul de dimensionnement plus compliqué.

Cette méthode manuelle, simple et rapide, nous donnera une bonne approximation de la solution au problème posé et permettra de vérifier l'exactitude des réponses obtenues par des méthodes plus compliquées dont on ne maîtrise pas toujours l'ensemble de tous les paramètres (calculs itératifs, utilisation de tableaux, applications de méthodes numériques, ...)

Le principe de cette méthode consiste à supposer que le bras de levier z entre la résultante des efforts de compression dans le béton F_c et la force dans l'acier F_s vaut :

$$z = 0,9 \times d$$



Connaissant le moment sollicitant M_{Ed} ainsi que la résistance de l'acier f_{yd} , et en supposant que l'acier est dans sa phase plastique lors de la rupture, on obtient directement la section d'acier nécessaire :

$$F_s = A_s \times f_{yd} = \frac{M_{Ed}}{z} \Rightarrow A_s = \frac{M_{Ed}}{z \times f_{yd}} = \frac{M_{Ed}}{0,9 \times d \times f_{yd}}$$

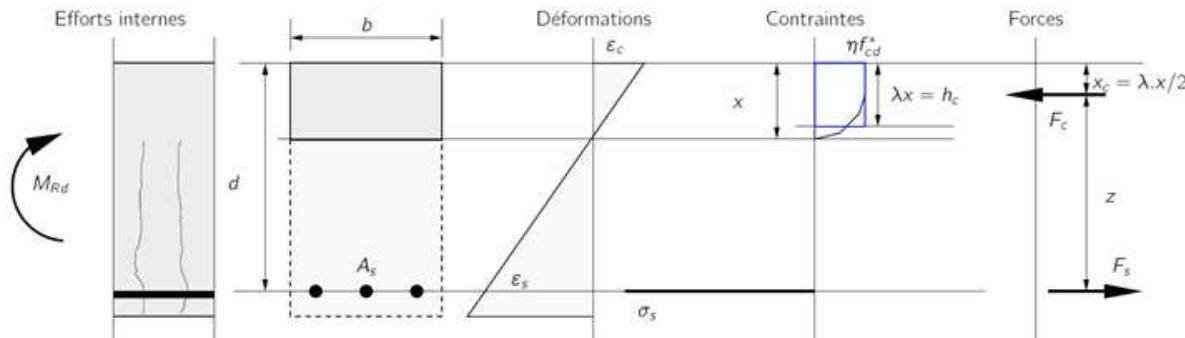
Nous avons donc pour un mètre de dalle :

$$\text{Sur appui : } A_s = \frac{43 \text{ kNm}}{0,9 \times 0,16 \text{ m} \times 435 \text{ MPa}} = 6,86 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$\text{En travée : } A_s = \frac{27,86 \text{ kNm}}{0,9 \times 0,16 \text{ m} \times 435 \text{ MPa}} = 4,45 \text{ cm}^2/\text{m}$$

- Par la méthode "Stress-block" (C : 308-316/664) :

Les moments sollicitant en travée et sur appui sont connus, par contre on ne connaît pas le niveau x de la fibre neutre et donc la valeur du bras de levier z .



Par un petit processus itératif, il est possible de calculer la valeur de x et ainsi de trouver la quantité d'armature A_s nécessaire à la reprise du moment.

On prend comme hypothèse que l'acier et le béton soient plastifiés : $|\varepsilon_s| \geq 0,217\%$ et $\varepsilon_c \geq 0,2\%$). Cette hypothèse devra être vérifiée à la fin. Le processus de calcul est le suivant :

1. On pose une première valeur de z : $z = 0,9 \times d$
2. On peut alors calculer F_c : $F_c = \frac{M_{Ed}}{z}$
3. On en déduit la valeur de x ou de h_c : $h_c = \frac{F_c}{b \times f_{cd}^*}$
4. Cela permet de recalculer un nouveau bras de levier z_1 : $z_1 = d - \frac{h_c}{2}$
5. Finalement on recommence le même processus avec la nouvelle valeur de z_1 .

Ce processus itératif converge assez rapidement, une ou deux itérations suffisent en général pour avoir une valeur suffisamment précise du bras de levier. Connaissant la valeur du bras de levier z on peut alors calculer F_s la force de traction dans les armatures :

$$F_s = \frac{M_{Ed}}{z} = F_c$$

En supposant que les armatures soient plastifiées lors de la rupture de l'élément ($\sigma_s = f_{yd}$ si $|\varepsilon_s| \geq 0,217\%$), on peut alors calculer la quantité d'armatures de flexion nécessaire :

$$A_s = \frac{F_s}{\sigma_s}$$

Nous avons donc :

Sur appui :

On pose :

$$z_0 = 0,9 \times d = 0,9 \times 0,16 \text{ m} = 0,144 \text{ m}$$

On calcul :

$$F_c = \frac{M}{z_0} = \frac{43 \text{ kNm}}{0,144 \text{ m}} = 296,55 \text{ kN}$$

$$h_{c,0} = \frac{F_c}{b \times f_{cd}^*} = \frac{296,55 \text{ kN}}{1 \text{ m} \times 14,167 \text{ MPa}}$$

$$h_{c,0} = 0,0209 \text{ m}$$

$$z_0 = 0,9 \times d = 0,9 \times 0,16 \text{ m} = 0,144 \text{ m}$$

$$F_c = \frac{M}{z_0} = \frac{27,86 \text{ kNm}}{0,144 \text{ m}} = 193,47 \text{ kN}$$

$$h_{c,0} = \frac{F_c}{b \times f_{cd}^*} = \frac{193,47 \text{ kN}}{1 \text{ m} \times 14,167 \text{ MPa}}$$

$$h_{c,0} = 0,0137 \text{ m}$$

On recalcule une nouvelle valeur du bras de levier z :

$$z_1 = d - \frac{h_c}{2} = 0,16 \text{ m} - \frac{0,0209 \text{ m}}{2}$$

$$z_1 = 0,150 \text{ m}$$

$$z_1 = d - \frac{h_c}{2} = 0,16 \text{ m} - \frac{0,0137 \text{ m}}{2}$$

$$z_1 = 0,153 \text{ m}$$

Après plusieurs itérations on obtient :

$$F_c = 286,67 \text{ kN}$$

$$h_{c,1} = 0,0202 \text{ m}$$

$$z_2 = 0,15 \text{ m}$$

$$F_c = 182,09 \text{ kN}$$

$$h_{c,1} = 0,0129 \text{ m}$$

$$z_2 = 0,154 \text{ m}$$

$$F_c = 286,67 \text{ kN}$$

$$h_{c,2} = 0,0202 \text{ m}$$

$$z_3 = 0,15 \text{ m}$$

$$F_c = 180,91 \text{ kN}$$

$$h_{c,2} = 0,0128 \text{ m}$$

$$z_3 = 0,154 \text{ m}$$

On vérifie le critère de rotation plastique minimal (C : 290/664) :

$$\xi = \frac{x}{d} = 0,16 < 0,45 \Rightarrow OK \quad \xi = \frac{x}{d} = 0,1 < 0,45 \Rightarrow OK$$

On peut alors calculer la section d'armature par mètre de dalle :

$$F_s = \frac{M}{z} = \frac{43 \text{ kNm}}{0,15 \text{ m}} = 286,67 \text{ kN} \quad F_s = \frac{M}{z} = \frac{27,86 \text{ kNm}}{0,154 \text{ m}} = 180,91 \text{ kN}$$

$$A_s = \frac{F_s}{\sigma_s} = \frac{286,67 \text{ kN}}{435 \text{ MPa}} = 0,00066 \text{ m}^2 \quad A_s = \frac{F_s}{\sigma_s} = \frac{180,91 \text{ kN}}{435 \text{ MPa}} = 0,00042 \text{ m}^2$$

$$A_s = 6,6 \text{ cm}^2/\text{m} \quad A_s = 4,2 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Attention, il convient de vérifier que les hypothèses de départ de la méthode sont bien respectées, et le cas échéant il faut les réadapter et recommencer le calcul.

Pour prendre l'hypothèse de plastification des armatures et du béton, il faut vérifier que la déformation de l'acier $|\varepsilon_s| \geq 0,217\%$ et que la déformation du béton $\varepsilon_c \geq 0,2\%$. Lors de la rupture, deux situations peuvent se produire :

- Soit le béton en compression atteint sa limite de résistance ($\varepsilon_c \geq 0,35\%$)
- Soit l'acier en traction atteint sa limite de résistance ($|\varepsilon_s| \geq 4\%$).

Vérifions dans un premier temps que lors d'une rupture par excès de compression dans le béton, les armatures soient également plastifiées. Si $\varepsilon_c = 0,35\%$, on peut calculer ε_s :

Sur appui :

$$|\varepsilon_s| = \varepsilon_c \times \frac{d-x}{x}$$

$$= 0,35 \frac{0,16 \text{ m} - 0,025 \text{ m}}{0,025 \text{ m}}$$

$$= 1,89 \%$$

En travée :

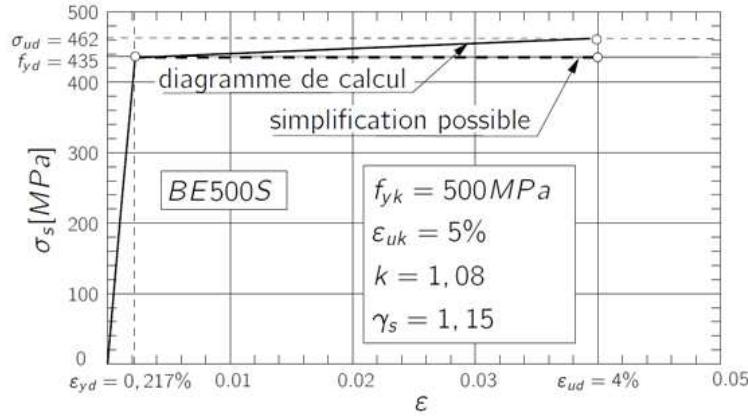
$$|\varepsilon_s| = \varepsilon_c \times \frac{d-x}{x}$$

$$= 0,35 \frac{0,16 \text{ m} - 0,016 \text{ m}}{0,016 \text{ m}}$$

$$= 3,15 \%$$

Comme $\varepsilon_{yd} = 0,217\% < |\varepsilon_s| < 4\% = \varepsilon_{ud}$, l'hypothèse de plastification de l'acier est bien vérifiée et on a une rupture du béton avant l'acier : le béton sera toujours plastifié à la rupture, il n'est pas nécessaire de vérifier la deuxième hypothèse.

Jusqu'à présent, on a considéré un comportement simplifié du diagramme de calcul de l'acier ($\sigma_s = f_{yd}$). Pour réduire la quantité d'acier d'armature, on peut tenir compte de l'augmentation de résistance de l'acier au-dessus de la limite élastique (prise en compte de la branche inclinée du diagramme contrainte/déformation de l'acier.)



Sur appui :

On calcule la contrainte dans l'armature :

$$\begin{aligned} \sigma_s &= f_{yd} + (k - 1) \times f_{yd} \times \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{uk} - \varepsilon_{yd}} & \sigma_s &= f_{yd} + (k - 1) \times f_{yd} \times \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{uk} - \varepsilon_{yd}} \\ &= 435 \text{ MPa} + (0,08) \times 435 \text{ MPa} \times \frac{1,89 - 0,217}{5 - 0,217} & &= 435 \text{ MPa} + (0,08) \times 435 \text{ MPa} \times \frac{3,15 - 0,217}{5 - 0,217} \\ &= 447,17 \text{ MPa} & &= 456,34 \text{ MPa} \end{aligned}$$

On peut donc recalculer A_s :

$$A_s = \frac{F_s}{\sigma_s} = \frac{286,67 \text{ kN}}{447,17 \text{ MPa}} = 6,4 \text{ cm}^2/\text{m} \quad A_s = \frac{F_s}{\sigma_s} = \frac{180,91 \text{ kN}}{456,34 \text{ MPa}} = 3,96 \text{ cm}^2/\text{m}$$

- **Par la méthode du moment réduit (C : 296-306/664) :** Cette troisième méthode de calcul se base sur des abaques de dimensionnement adimensionnalisé.

Sur appui :

En travée :

Calcul du moment réduit :

$$\mu_{Rd} = \frac{M_{Ed}}{b \times d^2 \times f_{cd}^*}$$

$$= \frac{43 \text{ kNm}}{1 \times 0,16^2 \text{ m}^2 \times 14,167 \text{ MPa}} = 0,119$$

$$\mu_{Rd} = \frac{M_{Ed}}{b \times d^2 \times f_{cd}^*}$$

$$= \frac{27,86 \text{ kNm}}{1 \times 0,16^2 \text{ m}^2 \times 14,167 \text{ MPa}} = 0,0768$$

On vérifie le critère de rotation plastique minimal :

$$\mu_{Rd} < \mu_{Rd, lim} = 0,296 \Rightarrow OK$$

$$\mu_{Rd} < \mu_{Rd, lim} = 0,296 \Rightarrow OK$$

On trouve alors le ω correspondant au moyen du tableau suivant (F : 223/481) :

Béton :	C12 à C50	$\gamma_c = 1,5$	$\alpha_{cc} = 0,85$
Acier :	BE500S	$\gamma_s = 1,15$	$f_{yk} = 500 \text{ MPa}$ $k = 1,08$ $\varepsilon_{ud} = 4\%$

μ_{Rd}	ω	x/d	z/d	$\varepsilon_c [\%]$	$\varepsilon_s [\%]$	$\sigma_s [\text{MPa}]$	μ_{Rd}	ω	x/d	z/d	$\varepsilon_c [\%]$	$\varepsilon_s [\%]$	$\sigma_s [\text{MPa}]$
0.01	0.009	0.024	0.991	1.00	-40,00	-462	0.19	0.211	0.264	0.890	3.50	-9.78	-440
0.02	0.019	0.036	0.987	1.50	-40,00	-462	0.20	0.224	0.279	0.884	3.50	-9.02	-440
0.03	0.029	0.046	0.983	1.95	-40,00	-462	0.21	0.237	0.296	0.877	3.50	-8.34	-439
0.04	0.038	0.057	0.978	2.40	-40,00	-462	0.22	0.251	0.312	0.870	3.50	-7.71	-439
0.05	0.048	0.067	0.973	2.87	-40,00	-462	0.23	0.264	0.329	0.863	3.50	-7.14	-438
0.06	0.058	0.077	0.968	3.35	-40,00	-462	0.24	0.278	0.346	0.856	3.50	-6.61	-438
0.07	0.069	0.090	0.963	3.50	-35,48	-459	0.25	0.293	0.364	0.849	3.50	-6.12	-438
0.08	0.080	0.103	0.957	3.50	-30,41	-455	0.26	0.307	0.382	0.841	3.50	-5.67	-437
0.09	0.091	0.117	0.951	3.50	-26,46	-452	0.27	0.322	0.400	0.833	3.50	-5.25	-437
0.10	0.102	0.131	0.946	3.50	-23,30	-450	0.28	0.338	0.419	0.826	3.50	-4.86	-437
0.11	0.114	0.145	0.940	3.50	-20,72	-448	0.29	0.353	0.438	0.818	3.50	-4.49	-436
0.12	0.125	0.159	0.934	3.50	-18,56	-447	0.30	0.369	0.458	0.809	3.50	-4.15	-436
0.13	0.137	0.173	0.928	3.50	-16,73	-445	0.31	0.386	0.478	0.801	3.50	-3.82	-436
0.14	0.149	0.188	0.922	3.50	-15,17	-444	0.32	0.403	0.499	0.792	3.50	-3.52	-436
0.15	0.161	0.202	0.916	3.50	-13,81	-443	0.33	0.420	0.520	0.783	3.50	-3.23	-436
0.16	0.173	0.217	0.910	3.50	-12,61	-442	0.34	0.439	0.542	0.774	3.50	-2.95	-435
0.17	0.185	0.232	0.903	3.50	-11,56	-442	0.35	0.457	0.565	0.765	3.50	-2.69	-435
0.18	0.198	0.248	0.897	3.50	-10,62	-441	0.36	0.477	0.589	0.755	3.50	-2.44	-435
0.19	0.211	0.264	0.890	3.50	-9,78	-440	0.37	0.497	0.614	0.745	3.50	-2,20	-435

$$\mu_{Rd} = 0,119 \rightarrow \omega = 0,125$$

$$\mu_{Rd} = 0,0768 \rightarrow \omega = 0,079$$

On peut alors calculer directement la section d'armature nécessaire à la reprise du moment sachant que $\omega = \frac{A_s \times f_{yd}}{b \times d \times f_{cd}^*}$:

$$A_s = \omega \times b \times d \times \frac{f_{cd}^*}{f_{yd}}$$

$$= 0,125 \times 1 \text{ m} \times 0,16 \text{ m} \times \frac{14,167 \text{ MPa}}{435 \text{ MPa}}$$

$$= 6,51 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$A_s = \omega \times b \times d \times \frac{f_{cd}^*}{f_{yd}}$$

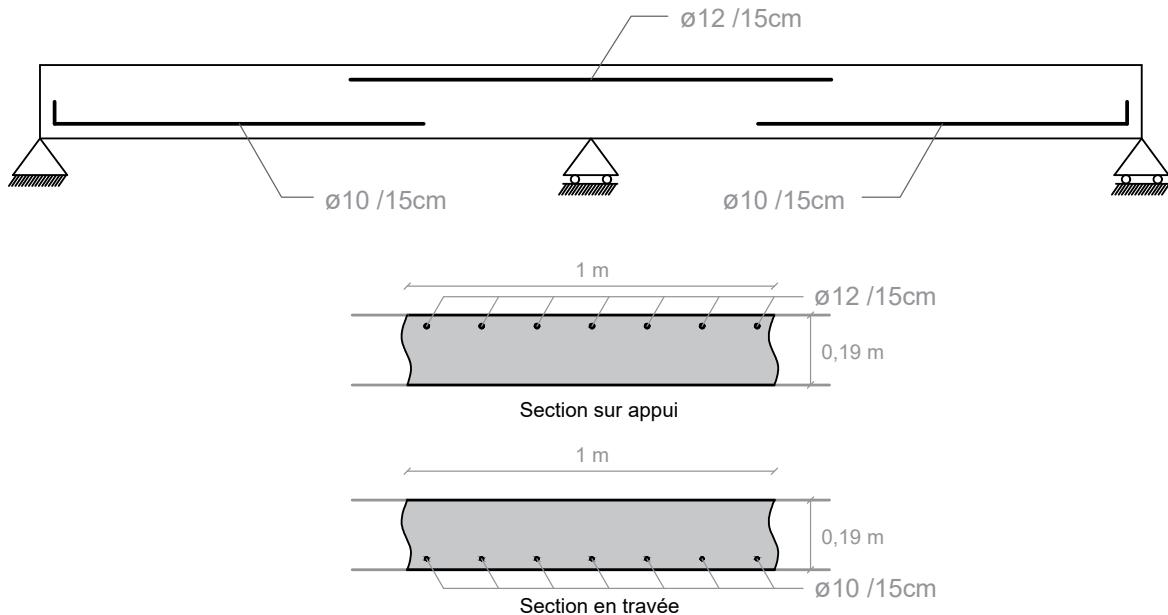
$$= 0,079 \times 1 \text{ m} \times 0,16 \text{ m} \times \frac{14,167 \text{ MPa}}{435 \text{ MPa}}$$

$$= 4,12 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Cette armature pourrait être composée de :

Treillis soudés de $\varnothing 12/15\text{cm}$ ($7,54 \text{ cm}^2/\text{m}$) Treillis soudés de $\varnothing 10/15\text{cm}$ ($5,24 \text{ cm}^2/\text{m}$)

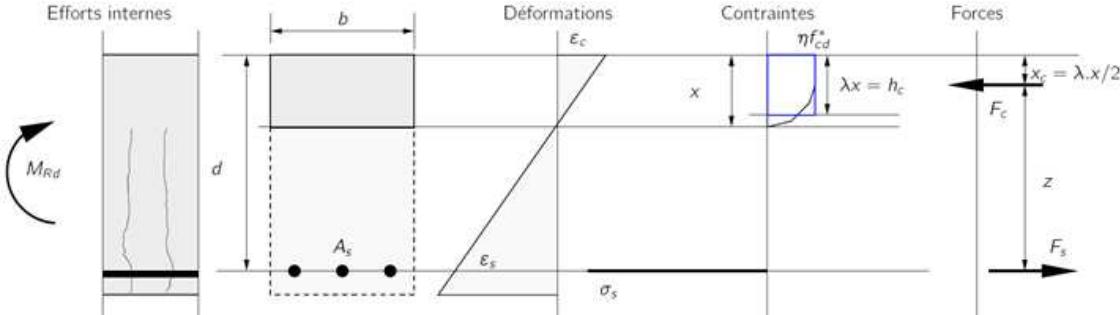
Section avec ferraillage de reprise des efforts de flexion pour un mètre de dalle :



2.4 Quelle devrait être l'épaisseur minimale de la dalle pour satisfaire aux conditions de résistance à l'ELU ?

Le moment sollicitant maximal la dalle vaut 43 kNm à l'appui sur la poutre centrale. L'épaisseur minimale de la dalle sera obtenue avec la hauteur de béton comprimé limitée à $\frac{x}{d} = 0,45$ (critère de rotation plastique minimale).

- Par la méthode "Stress-block" (C : 308-316/664) :



La valeur de F_c vaudra le produit de la contrainte dans le béton plastifié $\sigma_c = f_{cd}^*$ par la surface de béton comprimé $h_c \times b$ à la contrainte σ_c , ce qui donne :

$$F_c = h_c \times b \times f_{cd}^*$$

Le moment vaudra :

$$M_{Rd} = M_{Ed} = 43 \text{ kNm} = F_c \times z$$

Comme $h_c = 0,8 \times x$ et $x = 0,45 \times d$ on a :

$$\begin{aligned} 43 \text{ kNm} &= [h_c \times b \times f_{cd}^*] \times [z] \\ &= [0,8 \times x \times b \times f_{cd}^*] \times [d - 0,4 \times x] \\ &= [0,8 \times 0,45 \times d \times 1 \text{ m} \times 14,167 \text{ MPa}] \times [d - 0,4 \times 0,45 \times d] \\ &= d \times [5,1] \times d \times [1 - 0,18] \\ &= d^2 \times [4,182] \end{aligned}$$

On peut donc calculer la hauteur effective de la section :

$$d^2 = \frac{43 \text{ kNm}}{4182} \rightarrow d = \sqrt{\frac{43}{4182}} = \sqrt{0,01} = 0,101 \text{ m}$$

On trouve l'épaisseur minimale de la dalle h_{min} en ajoutant à la hauteur effective d la distance e entre l'axe de l'armature et la fibre extérieure. On arrondit ensuite le résultat obtenu au centimètre supérieur :

$$h_{min} = d + e = 10,1 \text{ cm} + 3 \text{ cm}$$

$$h_{min} = 14 \text{ cm}$$

- **Par la méthode du moment réduit ($F : 215/481$) :**

Le moment réduit correspondant à un $\xi = \frac{x}{d} = 0,45$ vaut $\mu_{Rd} = 0,296$

Connaissant l'expression de μ_{Rd} :

$$\mu_{Rd} = \frac{M_{Ed}}{b \times d^2 \times f_{cd}^*}$$

On peut en déduire la valeur de d :

$$d = \sqrt{\frac{M_{Ed}}{\mu_{Rd} \times b \times f_{cd}^*}} = \sqrt{\frac{43 \text{ kNm}}{0,296 \times 1 \text{ m} \times 14,167 \text{ MPa}}} = 0,101 \text{ m}$$

On trouve l'épaisseur minimale de la dalle h_{min} en ajoutant à la hauteur effective d la distance e entre l'axe de l'armature et la fibre extérieure. On arrondit ensuite le résultat obtenu au centimètre supérieur :

$$h_{min} = d + e = 10,1 \text{ cm} + 3\text{cm}$$

$$h_{min} = 14 \text{ cm}$$

2.5 Quelles sont les charges linéaires qui sollicitent la poutre principale (axe 2) du plancher du premier étage à l'ELU ?

Sur base des charges de la dalles calculées au point 2, il est possible de faire la descente de charges :

- **Les charges permanentes :**

Le poids propre de la dalle et les charges fixes qui lui sont appliquées sont transmises à la poutre centrale. La charge permanente sur la poutre vaudra la réaction d'appui central (par mètre) de la dalle hyperstatique sur trois appuis (voir énoncé) + le poids propre de la poutre.

Connaissant le poids volumique du béton armé $\gamma = 25 \text{ kN/m}^3$, on peut calculer :

Le poids propre de la poutre :

$$A_{c, \text{poutre}} \times \gamma = 0,3 \times [0,5 - 0,19] \times 25 \text{ kN/m}^3 = 2,33 \text{ kN/m}$$

Les charges transmises par la dalle :

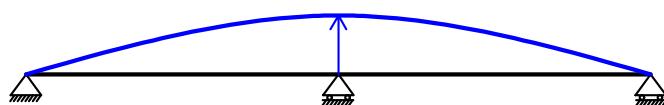
$$\text{réaction d'appui linéaire} = 5,75 \text{ kN/m} \times 6,25 = 35,94 \text{ kN/m}$$

Nous avons donc une charge permanente totale

$$G_k = 38,26 \text{ kN/m}$$

- **Les charges variables:**

Après analyse de la ligne d'influence de l'appui central de la dalle, nous pouvons conclure que la poutre centrale sera chargée de manière maximale si la charge variable est appliquée sur les deux travées.



Les charges transmises par la dalle :

$$\text{réaction d'appui linéaire} = 4 \text{ kN/m} \times 6,25$$

Nous avons donc une charge permanente totale

$$= 25 \text{ kN/m}$$

$$Q_k = 25 \text{ kN/m}$$

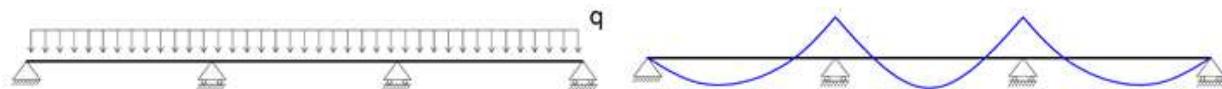
Ce qui nous donne les charges de calcul suivantes à l'ELU :

$$G_d = 1,35 \times G_k = 1,35 \times 38,26 = 51,65 \text{ kN/m}$$

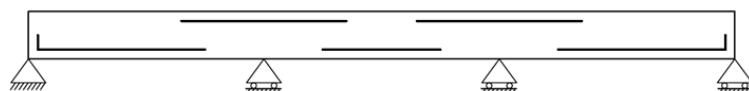
$$Q_d = 1,5 \times Q_k = 1,5 \times 25 = 37,5 \text{ kN/m}$$

2.6 Esquissez l'allure du diagramme des moments dans la poutre pour une charge linéaire répartie et le plan de ferraillage des armatures principales de flexion.

Soit une poutre continue sur quatre appuis soumise à une charge linéaire, le diagramme des moments prend la forme suivante :



Comme le béton ne résiste pas à la traction, il sera nécessaire de prévoir des armatures de flexion aux endroits où la fibre inférieure (moment positif) ou la fibre supérieure (moment négatif) sera en traction. Le plan d'armatures principales de flexion aura donc l'allure suivante :

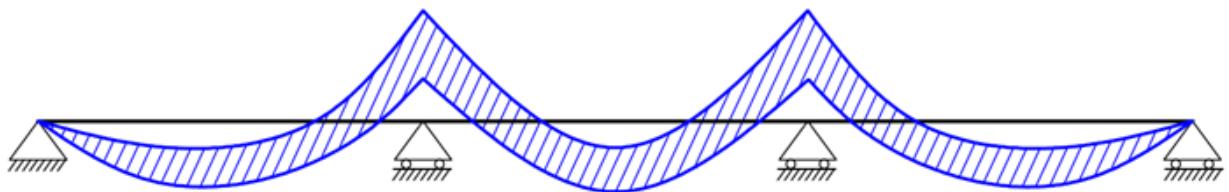


Ces armatures seront calculées dans la suite de l'exercice. En fin d'exercice, il conviendra de compléter ce diagramme en indiquant les quantités de barres d'armatures nécessaires calculées. Des étriers (armatures transversales) devront également être ajoutés pour reprendre l'effort tranchant. Ces armatures seront calculées dans l'exercice 5.

2.7 Quelles sont les sollicitations de flexion maximales à l'ELU dans cette poutre ?

Comme nous sommes en présence d'une structure hyperstatique supportant une charge variable, il convient de calculer l'enveloppe des moments.

L'enveloppe des moments sur la structure aura l'allure suivante :



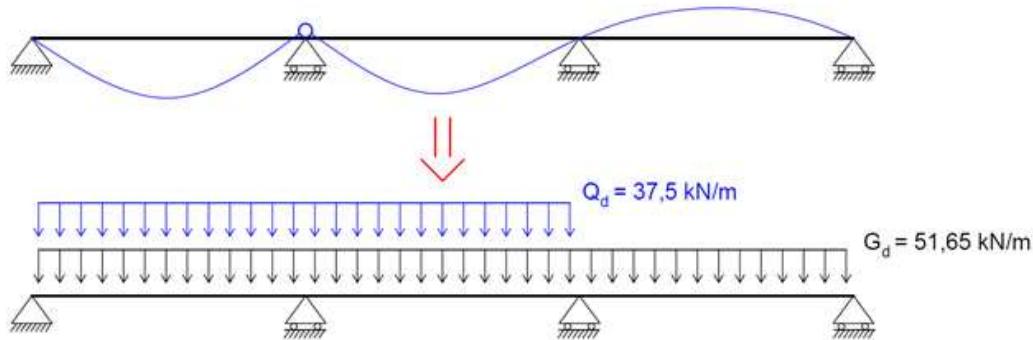
Afin de calculer les valeurs minimales et maximales des moments de flexion sur l'appui central et en travée, il faudra trouver, pour chaque cas, la position des charge variables Q_k sur la structure.

Il conviendra également de vérifier qu'il n'y aura pas un moment négatif au niveau de la travée centrale. Le cas échéant, il faudra prévoir des armatures supérieures à cet endroit.

Calcul des moments maximaux

- Sur appuis centraux :

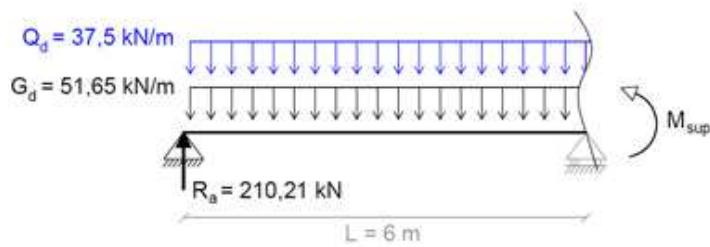
Un bref examen de la ligne d'influence du moment au niveau de l'un des deux appuis intérieurs nous donne les zones où il faut appliquer les charges variables pour maximiser le moment à cet endroit :



On appliquera donc la charge variable Q_d sur les deux travées de part et d'autre de l'appui pour calculer le moment maximum à cet endroit.

On trouve la valeur du moment maximal sur appui M_{sup} en pratiquant une coupure et en équilibrant les moments :

$$\sum M = 0 \Rightarrow M_{sup} = R_a \times L - \frac{(G_d + Q_d) L^2}{2}$$



La réaction d'appui est calculée au moyen du diagramme pour une charge unitaire donné dans l'énoncé. Comme la charge Q_d n'est appliquée que sur les deux premières travées, on trouve la réaction d'appui en sommant le cas d'un chargement complet avec G_d et les cas de chargement partiels avec Q_d . On obtient :

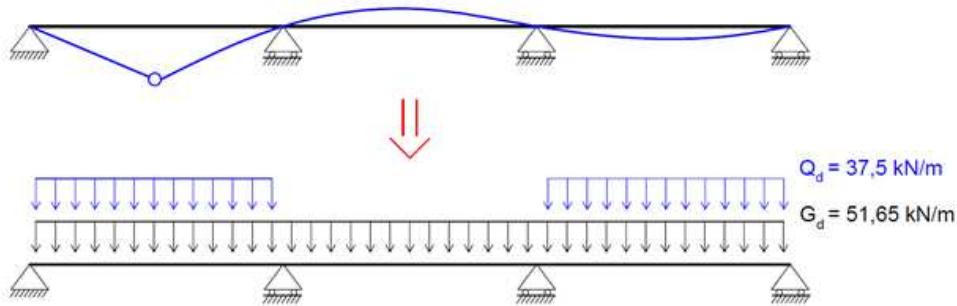
$$R_a = 2,4 \times G_d + 2,6 \times Q_d - 0,3 \times Q_d = 2,4 \times 51,6 \text{ kN} + 2,3 \times 37,5 \text{ kN} = 210,21 \text{ kN}$$

Le moment maximum sur appui vaut donc :

$$M_{sup} = 210,21 \text{ kN} \times 6 \text{ m} - \frac{89,15 \text{ kN/m} \times 6^2 \text{ m}^2}{2} = -343 \text{ kNm}$$

- **En travée de rive:**

Un bref examen de la ligne d'influence du moment au niveau de la travée de rive nous donne les zones où il faut appliquer les charges variables pour maximiser le moment à cet endroit :



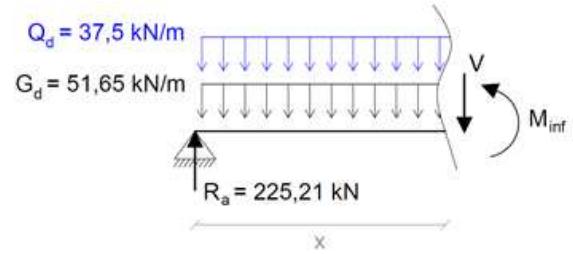
Dans ce cas-ci, on appliquera donc la charge variable Q_d sur les deux travées extérieures pour calculer le moment maximum en travée de rive.

Avant de pouvoir calculer le moment maximum en travée de rive M_{inf} il est nécessaire de déterminer l'emplacement exact de ce maximum. Le moment sera maximum lorsque sa dérivée, à savoir l'effort tranchant, sera nul.

L'équation de l'effort tranchant en fonction de x vaut :

$$V(x) = R_a - (Q_d + G_d) \times x$$

La réaction R_a est obtenue au moyen des diagrammes donnant les réactions d'appui pour une charge unitaire fournis dans l'énoncé.



Comme la charge Q_d n'est appliquée que sur les deux travées extérieures, on trouve la réaction d'appui en sommant le cas d'un chargement complet avec G_d et les cas de chargement partiels avec Q_d . On obtient :

$$R_a = 2,4 \times G_d + 2,6 \times Q_d + 0,1 \times Q_d = 2,4 \times 51,65 \text{ kN} + 2,7 \times 37,5 \text{ kN} = 225,21 \text{ kN}$$

En calculant $V(x) = 0$, il est possible de déterminer la position du moment maximal :

$$V(x) = 225,21 \text{ kN} - x \times 89,15 \text{ kN/m} = 0 \Rightarrow x = 2,53 \text{ m}$$

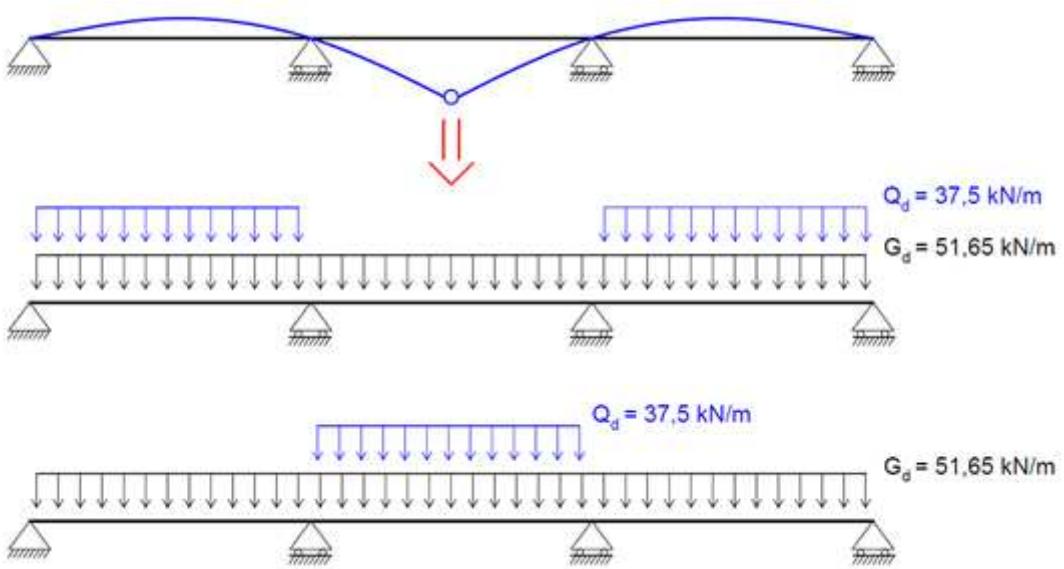
On trouve alors la valeur du moment maximum en travée de rive M_{inf} en pratiquant une coupure à la distance x de l'appui et en équilibrant les moments :

$$\sum M_{x=2,53} = 0 \Rightarrow M_{inf} = R_a \times x - \frac{(G_d + Q_d) \times x^2}{2}$$

$$M_{inf} = 225,21 \text{ kN} \times 2,53 \text{ m} - \frac{89,15 \text{ kN/m} \times 2,53 \text{ m}}{2} = 284 \text{ kNm}$$

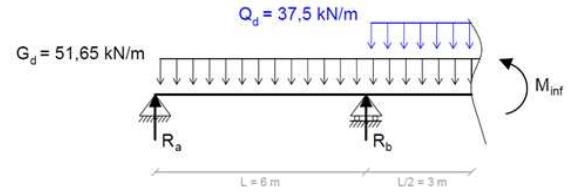
- **En travée centrale :**

Un bref examen de la ligne d'influence du moment au centre de la travée centrale de la poutre, nous donne les zones où il faut appliquer les charges variables pour maximiser le moment à cet endroit :



Dans ce cas-ci, il est nécessaire d'envisager les deux chargements ci-dessus. L'un donnera le moment maximal lorsque la fibre inférieure est tendue, l'autre donnera peut-être un moment négatif (fibre supérieure tendue).

On commence par le cas où seule la travée centrale supporte la charge variable. On trouve la valeur du moment maximum en travée centrale M_{inf} en pratiquant une coupure et en équilibrant les moments :



$$\sum M = 0 \Rightarrow M_{inf} = R_a \left(L + \frac{L}{2} \right) + R_b \left(\frac{L}{2} \right) - \frac{Q_d \left(\frac{L}{2} \right)^2}{2} - \frac{G_d \left(L + \frac{L}{2} \right)^2}{2}$$

Les réactions d'appui sont calculées au moyen du diagramme pour une charge unitaire donné dans l'énoncé. Comme la charge Q_d n'est appliquée que sur la travée centrale, on trouve la réaction d'appui en sommant le cas d'un chargement complet avec G_d et le cas de chargement partiel avec Q_d . On obtient :

$$R_a = 2,4 \times G_d - 0,3 \times Q_d = 2,4 \times 51,65 \text{ kN} - 0,3 \times 37,5 \text{ kN} = 112,71 \text{ kN}$$

$$R_b = 6,6 \times G_d + 3,3 \times Q_d = 6,6 \times 51,65 \text{ kN} + 3,3 \times 37,5 \text{ kN} = 464,64 \text{ kN}$$

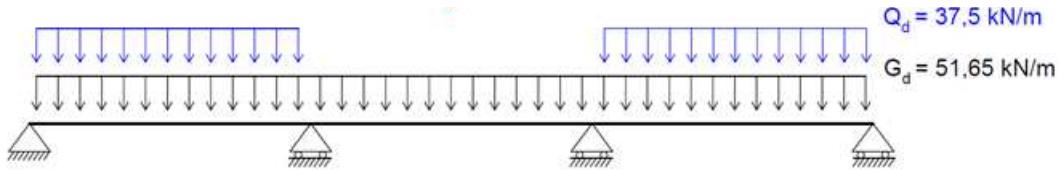
Le moment maximum en travée centrale vaut donc :

$$M_{inf} = R_a \times \left(L + \frac{L}{2} \right) + R_b \times \left(\frac{L}{2} \right) - \frac{Q_d \times \left(\frac{L}{2} \right)^2}{2} - \frac{G_d \times \left(L + \frac{L}{2} \right)^2}{2}$$

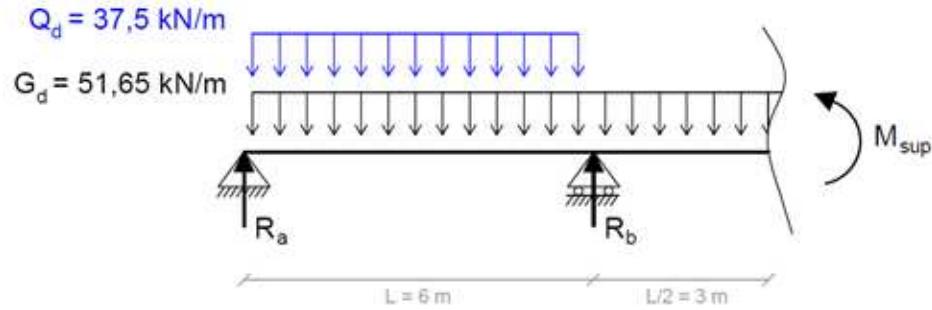
$$M_{inf} = 112,71 \cdot (6+3) + 464,64 \cdot (3) - \frac{37,5 \cdot (3)^2}{2} - \frac{51,65 \cdot (6+3)^2}{2}$$

$$M_{inf} = 147,7 \text{ kNm}$$

Il convient ensuite d'envisager le second cas de charge :



Une coupe dans la structure nous permet de calculer le moment M_{sup} .



$$R_a = 2,4 \times G_d + 2,6 \times Q_d + 0,1 \times Q_d = 2,4 \times 51,65 \text{ kN} + 2,7 \times 37,5 \text{ kN} = 225,21 \text{ kN}$$

$$R_b = 6,6 \times G_d + 3,9 \times Q_d - 0,6 \times Q_d = 6,6 \times 51,65 \text{ kN} + 3,3 \times 37,5 \text{ kN} = 464,64 \text{ kN}$$

Le moment vaut donc :

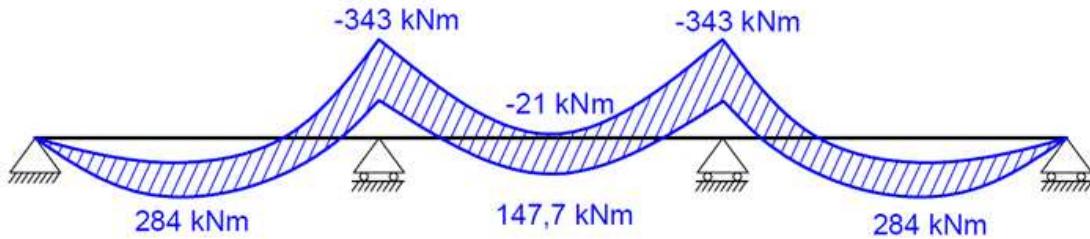
$$M_{sup} = R_a \times \left(L + \frac{L}{2} \right) + R_b \times \left(\frac{L}{2} \right) - Q_d \times L^2 - \frac{G_d \times \left(L + \frac{L}{2} \right)^2}{2}$$

$$= 225,21 \text{ kN} \times 9 \text{ m} + 464,64 \text{ kN} \times 3 \text{ m} - 37,5 \text{ kN/m} \times 6^2 \text{ m}^2 - \frac{51,65 \text{ kN/m} \times 9^2 \text{ m}^2}{2}$$

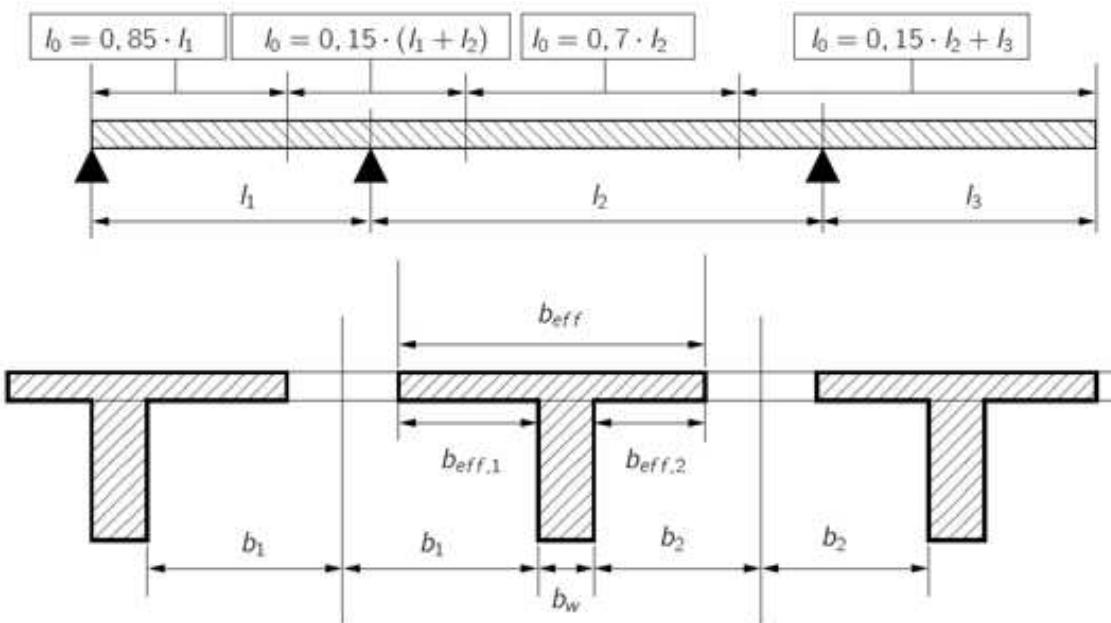
$$M_{sup} = -21,015 \text{ kNm}$$

Ce moment tend donc la fibre supérieure !

L'enveloppe des moments dans la poutre vaut donc :



2.8 Quelles sont les largeurs efficaces des ailes de la poutre en T ?



La largeur participante b_{eff} de la poutre en T peut être prise égale à (C : 264-265/664) :

$$\sum b_{eff,i} + b_w < b$$

Avec :

$$\begin{aligned} b_{eff,1} &= b_{eff,2} = b_{eff,i} \\ b_{eff,i} &= 0,2 \times b_i + 0,1 \times l_0 \\ &\leq 0,2 \times l_0 \end{aligned}$$

et :

$$b_{eff,i} \leq b_i = 2,35 \text{ m}$$

- **En travée de rive :**

La distance entre deux points de moment nul :

$$l_0 = 0,85 \times L = 0,85 \times 6 \text{ m} = 5,1 \text{ m}$$

La largeur efficace :

$$b_{eff} = 2 \times b_{eff,i} + b_w = 2,26 \text{ m} < 2,35 \text{ m} \times 2 + 0,3 \text{ m} = 5 \text{ m}$$

Avec : $b_{eff,i} = 0,2 \times 2,35 \text{ m} + 0,1 \times 5,1 \text{ m} = 0,98 < 0,2 l_0 = 1,02 \text{ m}$

- **En travée centrale :**

La distance entre deux points de moment nul :

$$l_0 = 0,7 \times L = 0,7 \times 6 \text{ m} = 4,2 \text{ m}$$

La largeur efficace :

$$b_{eff} = 2 \times b_{eff,i} + b_w = 2 \times 0,84 \text{ m} + 0,3 \text{ m} = 1,98 \text{ m} < 2,35 \text{ m} \times 2 + 0,3 \text{ m} = 5 \text{ m}$$

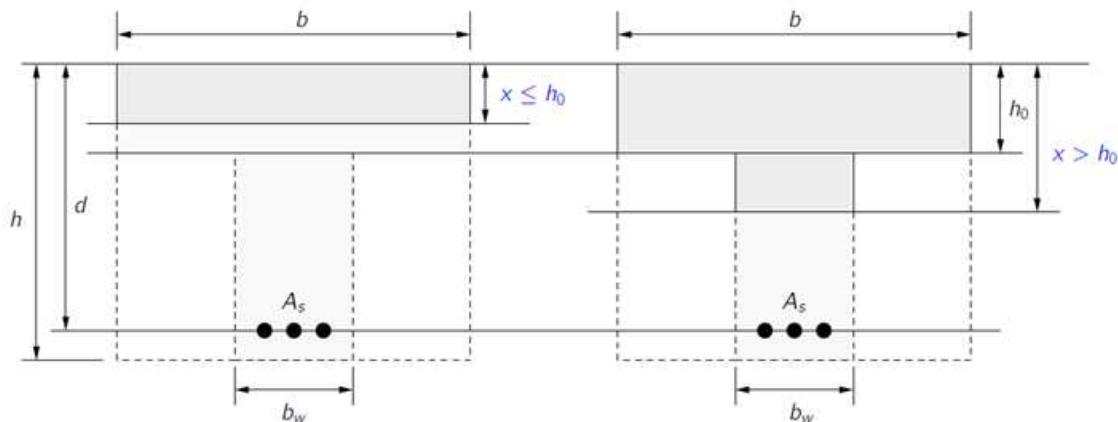
avec $b_{eff,i} = 0,2 \times 2,35 \text{ m} + 0,1 \times 4,2 \text{ m} = 0,89 \text{ m} > 0,2 \times l_0 = 0,84 \text{ m}$

- **Sur appui central :**

A cet endroit, c'est la partie inférieure de la poutre qui est en compression. Il n'est donc pas nécessaire de calculer la largeur efficace ($b_{eff} = 1,02 \text{ m}$ avec $l_0 = 1,8 \text{ m}$).

2.9 Quelles sont les armatures principales de flexion à prévoir dans la travée de rive de la poutre ?

Deux cas sont possibles dans le calcul d'une poutre en T, à savoir, un cas où la fibre neutre se trouve dans la table de compression de la largeur b_{eff} , et un cas où la fibre neutre se trouve dans l'âme de largeur b_w (C : 271/664).



Le cas où la fibre neutre se trouve dans la table de compression peut être assimilé au simple calcul d'une poutre rectangulaire de largeur égale à la largeur efficace b_{eff} , car le béton situé sous cette fibre neutre est fissuré à la rupture et est donc négligé dans le modèle de calcul choisi.

Dans le cas contraire, le calcul devient itératif avec un modèle considérant les contributions respectives de l'âme et des deux ailes de la poutre.

- Par la méthode simplifiée (C : 253-258/664) :

On fait usage de la formule simplifiée, supposant un bras de levier $z = 0,9 \times d$:

$$A_s = \frac{M_{Ed}}{z \times f_{yd}} = \frac{M_{Ed}}{0,9 \times d \times f_{yd}}$$

On peut en tirer l'effort de compression dans le béton :

$$F_c = \frac{M_{inf}}{0,9 \times d} = \frac{284 \text{ kNm}}{0,9 \times 0,46 \text{ m}} = 685,990 \text{ kN}$$

La hauteur de béton comprimé qui correspond à cette valeur de F_c est obtenue par la formule de la méthode stress-block, en prenant comme hypothèse que l'axe neutre est dans la table de compression :

$$x = \frac{F_c}{b_{eff} \times 0,8 \times f_{cd}^*} = \frac{685,99 \text{ kN}}{2,26 \text{ m} \times 0,8 \times 14,167 \text{ MPa}} = 0,0268 \text{ m}$$

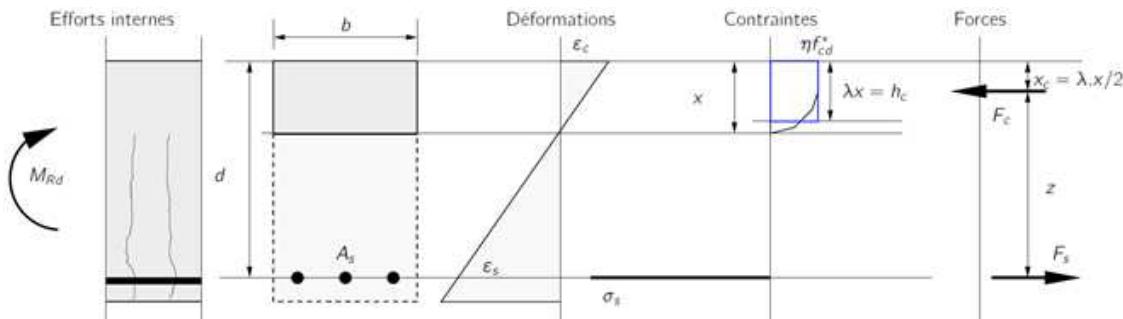
$x = 2,7 \text{ cm} < 19 \text{ cm} \Rightarrow$ l'axe neutre est bien dans la table de compression.

L'armature inférieure vaut donc :

$$A_{s, inf} = \frac{284 \text{ kNm}}{0,9 \times 0,46 \text{ m} \times 435 \text{ GPa}} = 15,77 \text{ cm}^2$$

- Par la méthode "Stress-block" (C : 308-316/664) :

Le moment sollicitant M_{inf} est connu. Par contre, on ne connaît pas le niveau x de la fibre neutre.



Par un processus itératif, il est possible de calculer la valeur de x et ainsi de trouver la quantité d'armature $A_{s, \text{inf}}$ nécessaire à la reprise du moment. On prend comme hypothèse que l'acier et le béton soient plastifiés. Le processus de calcul est le suivant :

1. On pose que la fibre neutre se trouve dans la table de compression (ce qui nous permet de considérer pour le calcul une poutre rectangulaire de largeur b_{eff}).
2. On pose une première valeur du bras de levier : $z_0 = 0,9 \times d$
3. On peut alors calculer F_c : $F_c = \frac{M}{z}$
4. On en déduit la valeur de x ou de h_c : $h_c = \frac{F_c}{b \times f_{cd}^*}$
On vérifie que la fibre neutre se trouve bien dans la table de compression. Si c'est le cas on continue le processus, sinon on recommence en considérant une poutre en T.
5. Cela permet de recalculer un nouveau bras de levier z_1 : $z_1 = d - \frac{h_c}{2}$
6. Finalement on recommence le même processus avec la nouvelle valeur de z_1 .

Ce processus itératif converge assez rapidement, une ou deux itérations suffisent en général pour avoir une valeur suffisamment précise du bras de levier. On pose donc :

$$z_0 = 0,9 \times d = 0,9 \times 0,46 \text{ m} = 0,414 \text{ m}$$

On calcul :

$$F_c = \frac{M_{Ed}}{z_0} = \frac{284 \text{ kNm}}{0,414 \text{ m}} = 685,99 \text{ kN}$$

$$h_c = \frac{F_c}{b_{\text{eff}} \times f_{cd}^*} = \frac{685,99 \text{ kN}}{2,26 \text{ m} \times 14,167 \text{ MPa}} = 0,0214 \text{ m}$$

On regarde où se situe l'axe neutre :

$$x = \frac{h_c}{0,8} = 0,0268 \text{ m} < 0,19 \text{ m}$$

L'axe neutre est bien dans la table de compression, on peut donc continuer le calcul avec une poutre rectangulaire.

On recalcule une nouvelle valeur du bras de levier z_1 :

$$z_1 = d - \frac{h_c}{2} = 0,46 \text{ m} - \frac{0,0214 \text{ m}}{2} = 0,449 \text{ m}$$

Après plusieurs itérations on obtient :

$$F_{c,2} = 632,1 \text{ kN} \quad h_{c,2} = 0,0197 \text{ m} \quad z_2 = 0,45 \text{ m}$$

$$F_{c,3} = 630,9 \text{ kN} \quad h_{c,3} = 0,0197 \text{ m} \quad z_3 = 0,45 \text{ m}$$

On peut alors calculer la section d'armature :

$$F_s = \frac{M_{inf}}{z_3} = \frac{284 \text{ kNm}}{0,45 \text{ m}} = 630,93 \text{ kN}$$

$$A_{s, inf} = \frac{F_s}{\sigma_s} = \frac{630,93 \text{ kN}}{435 \text{ MPa}} = 0,00145 \text{ m}^2 = 14,5 \text{ cm}^2$$

On vérifie le critère de rotation plastique minimal :

$$\xi = \frac{x}{d} = \frac{0,0246}{0,46} = 0,054 < 0,45 \Rightarrow OK$$

Attention, il convient de vérifier que les hypothèses de départ de la méthode sont bien respectées, et le cas échéant il faut les réadapter et recommencer le calcul.

Il faut vérifier les l'hypothèse de plastification des armatures et du béton : $|\varepsilon_s| \geq 0,217 \%$ et $\varepsilon_c \geq 0,2 \%$. Lors de la rupture, deux situations peuvent se produire :

- Soit le béton en compression atteint sa limite de résistance ($\varepsilon_c \geq 0,35 \%$).
- Soit l'acier en traction atteint sa limite de résistance ($|\varepsilon_s| \geq 4 \%$).

Dans le premier cas, ($\varepsilon_c = 0,35 \%$) on peut calculer ε_s :

$$|\varepsilon_s| = \varepsilon_c \times \frac{d - x}{x} = 0,35 \% \times \frac{0,46 \text{ m} - 0,0246 \text{ m}}{0,0246 \text{ m}} = 6,19 \%$$

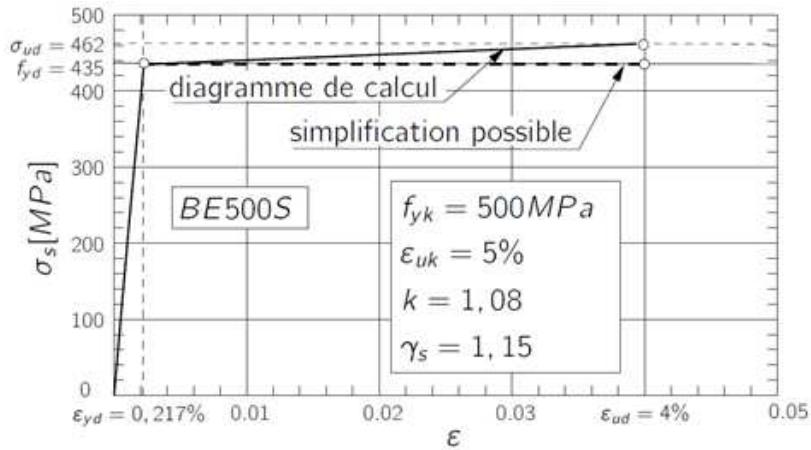
Cette valeur de déformation est bien supérieur à l'allongement maximal lors de la rupture de l'acier, $|\varepsilon_s| = 4 \%$. Cela n'étant pas possible, nous serons donc dans une situation où l'acier est à la rupture et non le béton comprimé. L'hypothèse de plastification des armatures est donc vérifiée. Il est alors possible de calculer l'état de déformation du béton.

Si $|\varepsilon_s| = 4 \% = |\varepsilon_{ud}|$, on peut calculer :

$$|\varepsilon_c| = |\varepsilon_s| \times \frac{x}{d - x} = 4 \% \times \frac{0,0246 \text{ m}}{0,46 \text{ m} - 0,0246 \text{ m}} = 0,226 \%$$

Le béton est bien plastifié.

Pour réduire la quantité d'acier d'armature, on peut tenir compte de l'augmentation de résistance de l'acier au-dessus de la limite élastique (prise en compte de la branche inclinée du diagramme contrainte/déformation de l'acier.)



On peut calculer la contrainte dans l'armature :

$$\begin{aligned}\sigma_s &= f_{yd} + (k - 1) \times f_{yd} \times \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{uk} - \varepsilon_{yd}} \\ &= 435 \text{ MPa} + 0,08 \times 435 \text{ MPa} \times \frac{4 - 0,217}{5 - 0,217} = 462,52 \text{ MPa}\end{aligned}$$

On peut donc recalculer $A_{s, inf}$:

$$A_{s, inf} = \frac{F_s}{\sigma_s} = \frac{630,93 \text{ kN}}{462 \text{ MPa}} = 13,6 \text{ cm}^2$$

Cette armature pourrait être composée de : 3 Ø 25 ou 5 Ø 20

- Par la méthode du moment réduit (C : 296-306/664) :

Comme la section peut être considérée rectangulaire, on peut également utiliser la méthode du moment réduit.

Calcul du moment réduit (F : 223/481) :

$$\mu_{Rd} = \frac{M_{Ed}}{b_{eff} \times d^2 \times f_{cd}^*} = \frac{284 \text{ kNm}}{2,26 \text{ m} \times 0,46^2 \text{ m}^2 \times 14,167 \text{ MPa}} = 0,042$$

Béton :	C12 à C50	$\gamma_c = 1,5$	$\alpha_{cc} = 0,85$
Acier :	BE500S	$\gamma_s = 1,15$	$f_{yk} = 500 \text{ MPa}$ $k = 1,08$ $\varepsilon_{ud} = 4\%$

μ_{Rd}	ω	x/d	z/d	$\varepsilon_c [\%]$	$\varepsilon_s [\%]$	$\sigma_s [\text{MPa}]$
0.01	0.009	0.024	0.991	1.00	-40.00	-462
0.02	0.019	0.036	0.987	1.50	-40.00	-462
0.03	0.029	0.046	0.983	1.95	-40.00	-462
0.04	0.038	0.057	0.978	2.40	-40.00	-462
0.05	0.048	0.067	0.973	2.87	-40.00	-462
0.06	0.058	0.077	0.968	3.35	-40.00	-462
0.07	0.069	0.090	0.963	3.50	-35.48	-459
0.08	0.080	0.103	0.957	3.50	-30.41	-455
0.09	0.091	0.117	0.951	3.50	-26.46	-452
0.10	0.102	0.131	0.946	3.50	-23.30	-450
0.11	0.114	0.145	0.940	3.50	-20.72	-448
0.12	0.125	0.159	0.934	3.50	-18.56	-447
0.13	0.137	0.173	0.928	3.50	-16.73	-445
0.14	0.149	0.188	0.922	3.50	-15.17	-444
0.15	0.161	0.202	0.916	3.50	-13.81	-443
0.16	0.173	0.217	0.910	3.50	-12.61	-442
0.17	0.185	0.232	0.903	3.50	-11.56	-442
0.18	0.198	0.248	0.897	3.50	-10.62	-441
0.19	0.211	0.264	0.890	3.50	-9.78	-440

μ_{Rd}	ω	x/d	z/d	$\varepsilon_c [\%]$	$\varepsilon_s [\%]$	$\sigma_s [\text{MPa}]$
0.19	0.211	0.264	0.890	3.50	-9.78	-440
0.20	0.224	0.279	0.884	3.50	-9.02	-440
0.21	0.237	0.296	0.877	3.50	-8.34	-439
0.22	0.251	0.312	0.870	3.50	-7.71	-439
0.23	0.264	0.329	0.863	3.50	-7.14	-438
0.24	0.278	0.346	0.856	3.50	-6.61	-438
0.25	0.293	0.364	0.849	3.50	-6.12	-438
0.26	0.307	0.382	0.841	3.50	-5.67	-437
0.27	0.322	0.400	0.833	3.50	-5.25	-437
0.28	0.338	0.419	0.826	3.50	-4.86	-437
0.29	0.353	0.438	0.818	3.50	-4.49	-436
0.30	0.369	0.458	0.809	3.50	-4.15	-436
0.31	0.386	0.478	0.801	3.50	-3.82	-436
0.32	0.403	0.499	0.792	3.50	-3.52	-436
0.33	0.420	0.520	0.783	3.50	-3.23	-436
0.34	0.439	0.542	0.774	3.50	-2.95	-435
0.35	0.457	0.565	0.765	3.50	-2.69	-435
0.36	0.477	0.589	0.755	3.50	-2.44	-435
0.37	0.497	0.614	0.745	3.50	-2.20	-435

On trouve alors le ω correspondant au moyen du tableau suivant :

$$\mu_{Rd} = 0,042 \rightarrow \omega = 0,04$$

On vérifie le critère de rotation plastique minimal :

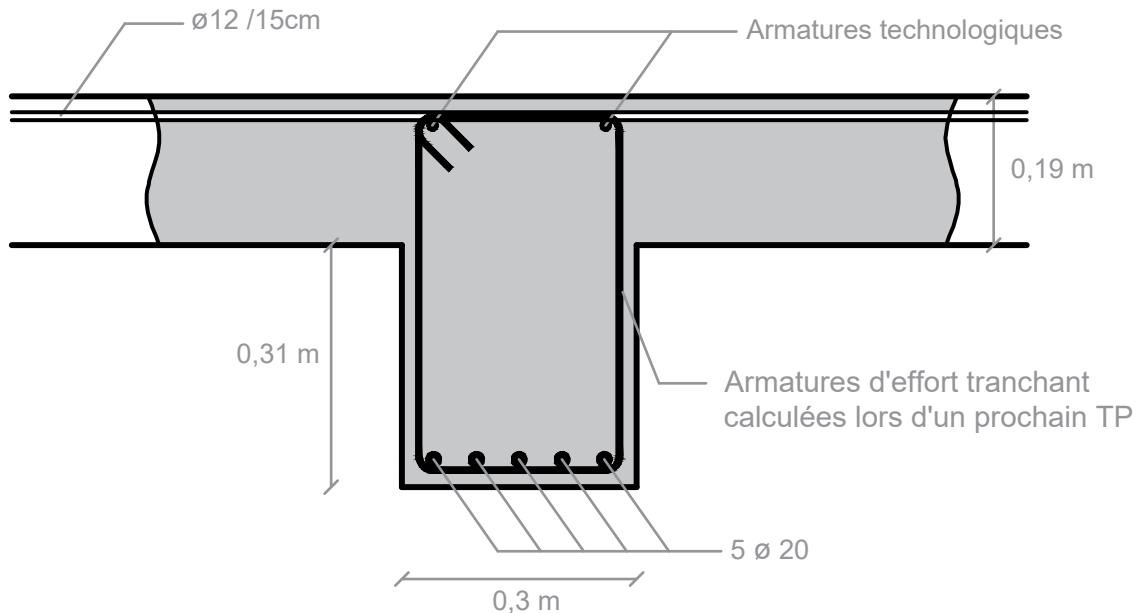
$$\mu_{Rd} = 0,042 < \mu_{Rd, lim} = 0,296 \Rightarrow OK$$

On peut alors calculer directement la section d'armature nécessaire à la reprise du moment :

$$A_s = \omega \times b_{eff} \times d \times \frac{f_{cd}^*}{f_{yd}} = 0,04 \times 2,26 \text{ m} \times 0,46 \text{ m} \times \frac{14,167 \text{ MPa}}{435 \text{ MPa}} = 13,54 \text{ cm}^2$$

Cette armature pourrait être composée de : 3 Ø 25 ou 5 Ø 20

Section avec ferraillage de la poutre en travées de rive



2.10 Quelles sont les armatures principales de flexion à prévoir dans la travée centrale de la poutre ?

En fonction du chargement, on remarque que l'enveloppe des diagrammes des moments possède des valeurs négatives et positives au centre de la travée. Il faut donc prendre en compte que le moment peut tendre la fibre inférieure comme la fibre supérieure.

1) La fibre inférieure est tendue :

- Par la méthode simplifiée (C : 253-258) :

Postulons que l'état de déformation est proche de la droite 3 du diagramme des pivots. On peut ainsi faire usage de la formule simplifiée, supposant un bras de levier $z = 0,9 \times d$:

$$A_{s, \text{inf}} = \frac{M_{Ed}}{z \times f_{yd}} = \frac{M_{Ed}}{0,9 \times d \times f_{yd}} = \frac{147,7 \text{ kNm}}{0,9 \times 0,46 \text{ m} \times 435 \text{ MPa}} = 8,2 \text{ cm}^2$$

- Par la méthode "Stress-block" (C : 308-316/664) :

Le moment sollicitant M_{inf} est connu, par contre on ne connaît pas le niveau x de la fibre neutre. Le processus de calcul est le même que celui expliqué pour le calcul de la travée de rive.

On pose donc :

$$z_0 = 0,9 \times d = 0,9 \times 0,46 \text{ m} = 0,414 \text{ m}$$

On calcul :

$$F_c = \frac{M_{Ed}}{z_0} = \frac{147,7 \text{ kNm}}{0,414 \text{ m}} = 356,76 \text{ kN}$$

$$h_c = \frac{F_c}{b_{eff} \times f_{cd}^*} = \frac{356,76 \text{ kN}}{1,98 \text{ m} \times 14,167 \text{ MPa}} = 0,0127 \text{ m}$$

On regarde où se situe l'axe neutre :

$$x = \frac{h_c}{0,8} = 0,0159 \text{ m} < 0,19 \text{ m}$$

⇒ l'axe neutre est bien dans la table de compression, on peut donc continuer le calcul avec une poutre « rectangulaire ».

On recalcule une nouvelle valeur du bras de levier z_1 :

$$z_1 = d - \frac{h_c}{2} = 0,46 \text{ m} - \frac{0,0127 \text{ m}}{2} = 0,454 \text{ m}$$

Après plusieurs itérations on obtient :

$$F_{c,2} = 325,588 \text{ kN} \quad h_{c,2} = 0,0116 \text{ m} \quad z_2 = 0,454 \text{ m}$$

$$F_{c,3} = 325,19 \text{ kN} \quad h_{c,3} = 0,0116 \text{ m} \quad z_3 = 0,454 \text{ m}$$

On peut alors calculer la section d'armature :

$$F_s = \frac{M_{inf}}{z_3} = \frac{147,7 \text{ kNm}}{0,45 \text{ m}} = 325,19 \text{ kN}$$

$$A_{s, \text{inf}} = \frac{F_s}{\sigma_s} = \frac{325,19 \text{ kNm}}{435 \text{ MPa}} = 0,000747 \text{ m}^2 = 7,47 \text{ cm}^2$$

On vérifie le critère de rotation plastique minimal :

$$\xi = \frac{x}{d} = \frac{0,01449}{0,46} = 0,0315 < 0,45 \Rightarrow OK$$

Attention, il convient de vérifier que les hypothèses de départ de la méthode sont bien respectées, et le cas échéant il faut les réadapter et recommencer le calcul.

Il faut vérifier les l'hypothèse de plastification des armatures et du béton : $|\varepsilon_s| \geq 0,217\%$ et $\varepsilon_c \geq 0,2\%$. Lors de la rupture, deux situations peuvent se produire :

- Soit le béton en compression atteint sa limite de résistance ($\varepsilon_c \geq 0,35\%$).
- Soit l'acier en traction atteint sa limite de résistance ($|\varepsilon_s| \geq 4\%$).

Dans le premier cas, ($\varepsilon_c = 0,35\%$) on peut calculer ε_s :

$$|\varepsilon_s| = \varepsilon_c \times \frac{d - x}{x} = 0,35\% \times \frac{0,46 \text{ m} - 0,0145 \text{ m}}{0,0145 \text{ m}} = 10,75\%$$

Cette valeur de déformation est bien supérieur à l'allongement maximal lors de la rupture de l'acier, $|\varepsilon_s| = 4\%$. Cela n'étant pas possible, nous serons donc dans une situation où l'acier est à la rupture et non le béton comprimé. L'hypothèse de plastification des armatures est donc vérifiée. Il est alors possible de calculer l'état de déformation du béton.

Si $|\varepsilon_s| = 4\% = |\varepsilon_{ud}|$, on peut calculer :

$$|\varepsilon_c| = \varepsilon_s \times \frac{x}{d - x} = 4 \times \frac{0,0145 \text{ m}}{0,46 \text{ m} - 0,0145 \text{ m}} = 0,13\%$$

Dans ce cas, on constate que la deuxième hypothèse n'est pas respecté car le béton n'est pas plastifié ($\varepsilon_c \leq 0,2\%$). On ne peut pas utiliser la méthode "Stress-Block". Dans cette situation, on peut toujours utiliser la méthode du "Moment réduit" qui prend directement en compte la résistance réelle du béton. Comme on est certain que l'axe neutre ne descendra pas dans l'âme, on peut faire le calcul avec une section de largeur b_{eff} .

• **Par la méthode du moment réduit (C : 296-306/664) :**

Calcul du moment réduit :

$$\mu_{Rd} = \frac{M_{Ed}}{b_{eff} \times d^2 \times f_{cd}^*} = \frac{147,7 \text{ kNm}}{1,98 \text{ m} \times 0,46^2 \text{ m}^2 \times 14,167 \text{ MPa}} = 0,025$$

On vérifie le critère de rotation plastique minimal :

$$\mu_{Rd} = 0,025 < \mu_{Rd,lim} = 0,296 \Rightarrow OK$$

On trouve alors le ω correspondant au moyen du tableau suivant (F : 223/481) :

Béton :	C12 à C50	$\gamma_c = 1,5$	$\alpha_{cc} = 0,85$
Acier :	BE500S	$\gamma_s = 1,15$	$f_{yk} = 500 \text{ MPa}$
$k = 1,08$ $\varepsilon_{ud} = 4\%$			
μ_{Rd}	ω	x/d	z/d
0.01	0.009	0.024	0.991
0.02	0.019	0.036	0.987
0.03	0.029	0.046	0.983
0.04	0.038	0.057	0.978
0.05	0.048	0.067	0.973
0.06	0.058	0.077	0.968
0.07	0.069	0.090	0.963
0.08	0.080	0.103	0.957
0.09	0.091	0.117	0.951
0.10	0.102	0.131	0.946
0.11	0.114	0.145	0.940
0.12	0.125	0.159	0.934
0.13	0.137	0.173	0.928
0.14	0.149	0.188	0.922
0.15	0.161	0.202	0.916
0.16	0.173	0.217	0.910
0.17	0.185	0.232	0.903
0.18	0.198	0.248	0.897
0.19	0.211	0.264	0.890
μ_{Rd}	ω	x/d	z/d
0.19	0.211	0.264	0.890
0.20	0.224	0.279	0.884
0.21	0.237	0.296	0.877
0.22	0.251	0.312	0.870
0.23	0.264	0.329	0.863
0.24	0.278	0.346	0.856
0.25	0.293	0.364	0.849
0.26	0.307	0.382	0.841
0.27	0.322	0.400	0.833
0.28	0.338	0.419	0.826
0.29	0.353	0.438	0.818
0.30	0.369	0.458	0.809
0.31	0.386	0.478	0.801
0.32	0.403	0.499	0.792
0.33	0.420	0.520	0.783
0.34	0.439	0.542	0.774
0.35	0.457	0.565	0.765
0.36	0.477	0.589	0.755
0.37	0.497	0.614	0.745

$$\mu_{Rd} = 0,025 \rightarrow \omega = 0,024$$

On peut alors calculer directement la section d'armature nécessaire à la reprise du moment :

$$A_s = \omega \times b_{eff} \times d \times \frac{f_{cd}^*}{f_{yd}} = 0,024 \times 1,98 \text{ m} \times 0,46 \text{ m} \times \frac{14,167 \text{ MPa}}{435 \text{ MPa}} = 7,12 \text{ cm}^2$$

Cette armature pourrait être composée de : 3 Ø 20

Il faut encore s'assurer que l'axe neutre est bien dans la table supérieure :

$$\mu_{Rd} = 0,025 \rightarrow x/d = 0,041 \Rightarrow x = 0,041 \times 0,46 = 0,019 \text{ m} < h_0$$

2) La fibre supérieure est tendue :

Le moment a prendre est relativement faible mais nécessite toute de même une vérification.

- Par la méthode du moment réduit (C : 296-306/664) :

Calcul du moment réduit :

$$\mu_{Rd} = \frac{M_{Ed}}{b_{eff} \times d^2 \times f_{cd}^*} = \frac{21 \text{ kNm}}{0,3 \text{ m} \times 0,46^2 \text{ m}^2 \times 14,167 \text{ MPa}} = 0,024$$

On vérifie le critère de rotation plastique minimal :

$$\mu_{Rd} = 0,024 < \mu_{Rd, lim} = 0,296 \Rightarrow OK$$

On trouve alors le ω correspondant au moyen du tableau suivant :

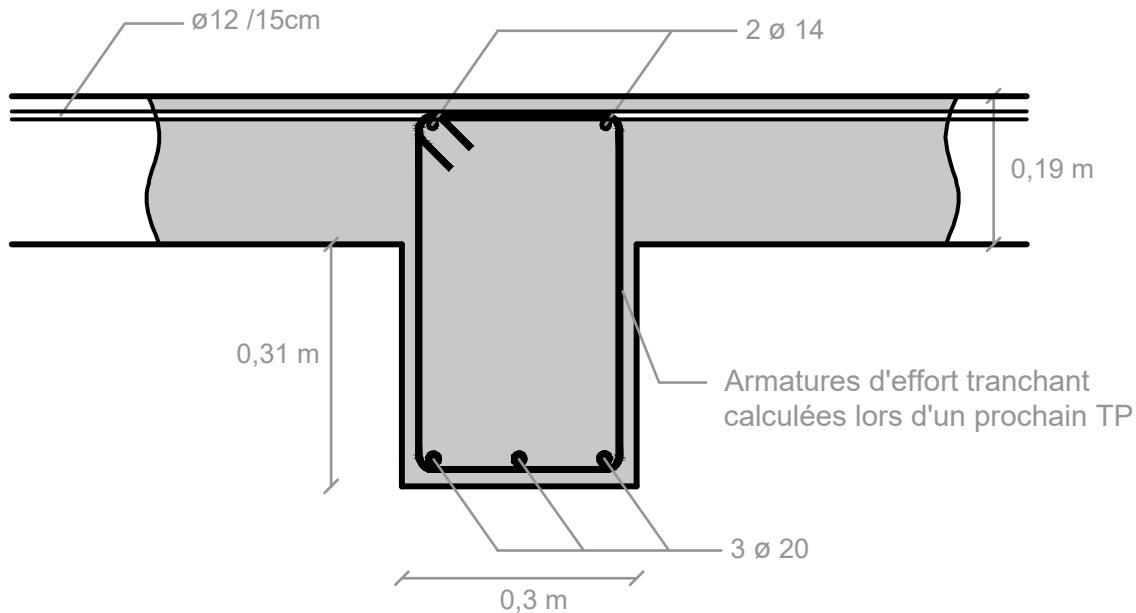
$$\mu_{Rd} = 0,024 \rightarrow \omega = 0,023$$

On peut alors calculer directement la section d'armature nécessaire à la reprise du moment :

$$A_s = \omega \times b_w \times d \times \frac{f_{cd}^*}{f_{yd}} = 0,023 \times 0,3 \text{ m} \times 0,46 \text{ m} \times \frac{14,167 \text{ MPa}}{435 \text{ MPa}} = 1,04 \text{ cm}^2$$

Cette armature pourrait être composée d'au minimum : **$2 \varnothing 10$**

Section avec ferraillage de la poutre en travée centrale



2.11 Les dimensions de la section en béton sont-elles suffisantes sur appui ?

Pour savoir si la section est suffisante, il faut vérifier que le critère de rotation plastique minimal imposé par la norme est respecté. Cela revient à limiter la hauteur de la zone de béton comprimé de telle sorte que $x \leq 0,45 \times d$.

- Par la méthode simplifiée :

Dans un premier temps, estimons la hauteur de béton armé nécessaire par la méthode simplifiée. Cette formule présuppose un bras de levier $z = 0,9 d$. On peut en tirer l'effort dans le béton :

$$F_c = \frac{M_{sup}}{0,9 \times d}$$

$$F_c = \frac{343 \text{ kNm}}{0,9 \times 0,46 \text{ m}} = 828,5 \text{ kN}$$

La hauteur de béton comprimé qui correspond à cette valeur de F_c est obtenue par la formule de la méthode "stress-block" :

$$x = \frac{F_c}{b \times 0,8 \times f_{cd}^*} = \frac{828,5 \text{ kN}}{0,3 \text{ m} \times 0,8 \times 14,167 \text{ MPa}} = 0,244 \text{ m}$$

On obtient donc comme valeur de ξ :

$$\xi = \frac{x}{d} = 0,53 > 0,45$$

⇒ Le critère n'est donc PAS respecté, il va falloir modifier la section de la poutre.

Note : L'hypothèse du bras de levier $z = 0,9 \times d$ n'est pas correcte dans ce cas. Le bras de levier sera en réalité plus faible. Cela aura pour effet d'augmenter la valeur de la force $F_c = \frac{M_{Ed}}{z}$, ce qui nous donnera une hauteur de béton comprimée encore plus importante. Nous sommes donc sûr que les dimensions de la section ne sont pas suffisantes.

- Par la méthode du moment réduit :

On calcul le moment réduit :

$$\mu_{Rd} = \frac{M_{Ed}}{b \times d^2 \times f_{cd}^*} = \frac{343 \text{ kNm}}{0,3 \text{ m} \times 0,46^2 \text{ m}^2 \times 14,167 \text{ MPa}} = 0,38$$

$$\mu_{Rd} = 0,38 > \mu_{Rd, lim} = 0,296$$

⇒ Le critère de rotation plastique minimal n'est donc PAS respecté !! Cette valeur de μ_{Rd} nous donne $\xi = \frac{x}{d} = 0,614 > 0,45$.

2.12 Proposez trois solutions de dimensionnement de la section sur appui.

Trois solutions sont envisagées pour satisfaire le critère de rotation plastique :

1. Modification de la section ;
2. Augmentation de la classe de résistance du béton ;
3. Ajout d'armatures de compression.

1) Modification de la section :

Si on n'a pas de contraintes particulières en ce qui concerne la section, il est possible d'augmenter la largeur ou la hauteur de la poutre. On préférera, dans la mesure du possible, augmenter la hauteur de l'élément car cela est beaucoup plus efficace qu'augmenter sa largeur.

Le calcul de la hauteur minimale de la poutre pour respecter le critère de rotation plastique minimal se fait de la même manière qu'au point 4 de cet exercice.

• Par la méthode "Stress-block" (C : 308-316/664) :

La valeur de F_c vaudra le produit de la contrainte dans le béton plastifié $\sigma_c = f_{cd}^*$ par la surface de béton comprimé $h_c \times b$ à la contrainte σ_c , ce qui donne :

$$F_c = h_c \times b \times f_{cd}^*$$

Le moment vaudra le produit de la force F_c par le bras de levier z :

$$M_{Ed} = M_{sup} = 343 \text{ kNm} = F_c \times z$$

Comme $h_c = 0,8 \times x$ et $x = 0,45 \times d$ on a :

$$\begin{aligned} 343 \text{ kNm} &= (h_c \times b \times f_{cd}^*) \times z \\ &= (0,8 \times x \times b \times f_{cd}^*) \times (d - 0,4 \times x) \\ &= [0,8 \times 0,45 \times d \times 0,3 \text{ m} \times 14,167 \text{ MPa}] \times [d - 0,4 \times 0,45 \text{ d}] \\ &= d \times 1530 \text{ kN/m} \times d \times (1 - 0,18) \\ &= d^2 \times 1254,63 \text{ kN/m} \end{aligned}$$

On peut donc calculer la valeur de d :

$$d^2 = \frac{343 \text{ kNm}}{1254,63 \text{ kN/m}} \rightarrow d = \sqrt{\frac{343 \text{ kNm}}{1254,63 \text{ kN/m}}} = \sqrt{0,27 \text{ m}^2} = 0,523 \text{ m}$$

On trouve l'épaisseur minimale de la dalle h_{min} en ajoutant à la hauteur effective d la distance e entre l'axe de l'armature et la fibre extérieure. On arrondit ensuite le résultat obtenu au centimètre supérieur :

$$h_{min} = d + e = 52,2 \text{ cm} + 4 \text{ cm} = 57 \text{ cm}$$

Connaissant la nouvelle hauteur de la poutre, on peut calculer les armatures de flexion nécessaires. En première approximation, on utilisera la méthode simplifiée. Comme cette fois-ci l'état de déformation à la rupture est connu, on considère pour le calcul simplifié un bras de levier $z = 0,85 \times d$ ($C : 258/664$). On peut ainsi faire usage de la formule simplifiée :

$$A_s = \frac{M_{Ed}}{0,85 \times d \times f_{yd}}$$

L'armature inférieur vaut donc :

$$A_{s,sup} = \frac{343 \text{ kNm}}{0,85 \times 0,53 \text{ m} \times 435 \text{ MPa}}$$

$$A_{s,sup} = 17,50 \text{ cm}^2$$

- **Par la méthode du moment réduit (F : 215/481) :**

Le moment réduit correspondant à un $\xi = \frac{x}{d} = 0,45$ vaut $\mu_{Rd} = 0,296$

Connaissant l'expression de μ_{Rd} :

$$\mu_{Rd} = \frac{M_{Ed}}{b \times d^2 \times f_{cd}^*}$$

On peut en déduire la valeur de d :

$$d = \sqrt{\frac{M_{sup}}{\mu_{Rd} \times b \times f_{cd}^*}} = \sqrt{\frac{343 \text{ kNm}}{0,296 \times 0,3 \text{ m} \times 14,167 \text{ MPa}}} = 0,522 \text{ m}$$

On trouve l'épaisseur minimale de la dalle h_{min} en ajoutant à la hauteur effective d la distance e entre l'axe de l'armature et la fibre extérieure. On arrondit ensuite le résultat obtenu au centimètre supérieur :

$$h_{min} = d + e = 52,2 \text{ cm} + 4 \text{ cm} = 57 \text{ cm}$$

Connaissant la hauteur effective de la poutre, on peut calculer les armatures de flexion nécessaires sur base du nouveau moment réduit :

$$\mu_{Rd} = \frac{M_{Ed}}{b \times d^2 \times f_{cd}^*} = \frac{343 \text{ kN}}{0,3 \text{ m} \times 0,53^2 \text{ m}^2 \times 14,167 \text{ MPa}} = 0,287$$

On trouve alors le ω correspondant au moyen du tableau ci-dessous (F : 223/481) :

Béton :	C12 à C50	$\gamma_c = 1,5$	$\alpha_{cc} = 0,85$
Acier :	BE500S	$\gamma_s = 1,15$	$f_{yk} = 500 \text{ MPa}$ $k = 1,08$ $\varepsilon_{ud} = 4\%$

μ_{Rd}	ω	x/d	z/d	$\varepsilon_c [\%]$	$\varepsilon_s [\%]$	$\sigma_s [\text{MPa}]$	μ_{Rd}	ω	x/d	z/d	$\varepsilon_c [\%]$	$\varepsilon_s [\%]$	$\sigma_s [\text{MPa}]$
0.01	0.009	0.024	0.991	1.00	-40,00	-462	0.19	0.211	0.264	0.890	3,50	-9,78	-440
0.02	0.019	0.036	0.987	1,50	-40,00	-462	0.20	0.224	0.279	0.884	3,50	-9,02	-440
0.03	0.029	0.046	0.983	1,95	-40,00	-462	0.21	0.237	0.296	0,877	3,50	-8,34	-439
0.04	0.038	0.057	0.978	2,40	-40,00	-462	0.22	0.251	0,312	0,870	3,50	-7,71	-439
0.05	0.048	0,067	0,973	2,87	-40,00	-462	0.23	0,264	0,329	0,863	3,50	-7,14	-438
0.06	0,058	0,077	0,968	3,35	-40,00	-462	0.24	0,278	0,346	0,856	3,50	-6,61	-438
0.07	0,069	0,090	0,963	3,50	-35,48	-459	0.25	0,293	0,364	0,849	3,50	-6,12	-438
0.08	0,080	0,103	0,957	3,50	-30,41	-455	0.26	0,307	0,382	0,841	3,50	-5,67	-437
0.09	0,091	0,117	0,951	3,50	-26,46	-452	0.27	0,322	0,400	0,833	3,50	-5,25	-437
0.10	0,102	0,131	0,946	3,50	-23,30	-450	0.28	0,338	0,419	0,826	3,50	-4,86	-437
0.11	0,114	0,145	0,940	3,50	-20,72	-448	0.29	0,353	0,438	0,818	3,50	-4,49	-436
0.12	0,125	0,159	0,934	3,50	-18,56	-447	0.30	0,369	0,458	0,809	3,50	-4,15	-436
0.13	0,137	0,173	0,928	3,50	-16,73	-445	0.31	0,386	0,478	0,801	3,50	-3,82	-436
0.14	0,149	0,188	0,922	3,50	-15,17	-444	0.32	0,403	0,499	0,792	3,50	-3,52	-436
0.15	0,161	0,202	0,916	3,50	-13,81	-443	0.33	0,420	0,520	0,783	3,50	-3,23	-436
0.16	0,173	0,217	0,910	3,50	-12,61	-442	0.34	0,439	0,542	0,774	3,50	-2,95	-435
0.17	0,185	0,232	0,903	3,50	-11,56	-442	0.35	0,457	0,565	0,765	3,50	-2,69	-435
0.18	0,198	0,248	0,897	3,50	-10,62	-441	0.36	0,477	0,589	0,755	3,50	-2,44	-435
0.19	0,211	0,264	0,890	3,50	-9,78	-440	0.37	0,497	0,614	0,745	3,50	-2,20	-435

$$\mu_{Rd} = 0,28 \rightarrow \omega = 0,338$$

On peut alors calculer directement la section d'armature nécessaire à la reprise du moment, sachant que $\omega = \frac{A_s f_{yd}}{b d f_{cd}^*}$:

$$A_s = \omega \times b \times d \frac{f_{cd}^*}{f_{yd}} = 0,338 \times 0,3 \text{ m} \times 0,53 \text{ m} \times \frac{14,167}{435} = 17,5 \text{ cm}^2$$

Cette armature pourrait être composée de : 4 Ø 25

2) Augmentation de la classe de résistance du béton :

Bien que ce choix soit rarement le plus économique, il est possible de considérer un béton plus résistant pour le calcul de la poutre. Pour trouver la résistance minimale nécessaire, le principe est exactement le même que celui expliqué au point précédent ; on isolera simplement f_{cd}^* au lieu de d .

Ce qui nous donne :

- Par la méthode du moment réduit (C : 296-306/664) :

Le moment réduit correspondant à un $\xi = \frac{x}{d} = 0,45$ vaut $\mu_{Rd, lim} = 0,296$ Connaissant l'expression de μ_{Rd} :

$$\mu_{Rd} = \frac{M_{Ed}}{b \times d^2 \times f_{cd}^*}$$

On peut en déduire la valeur de f_{cd}^* :

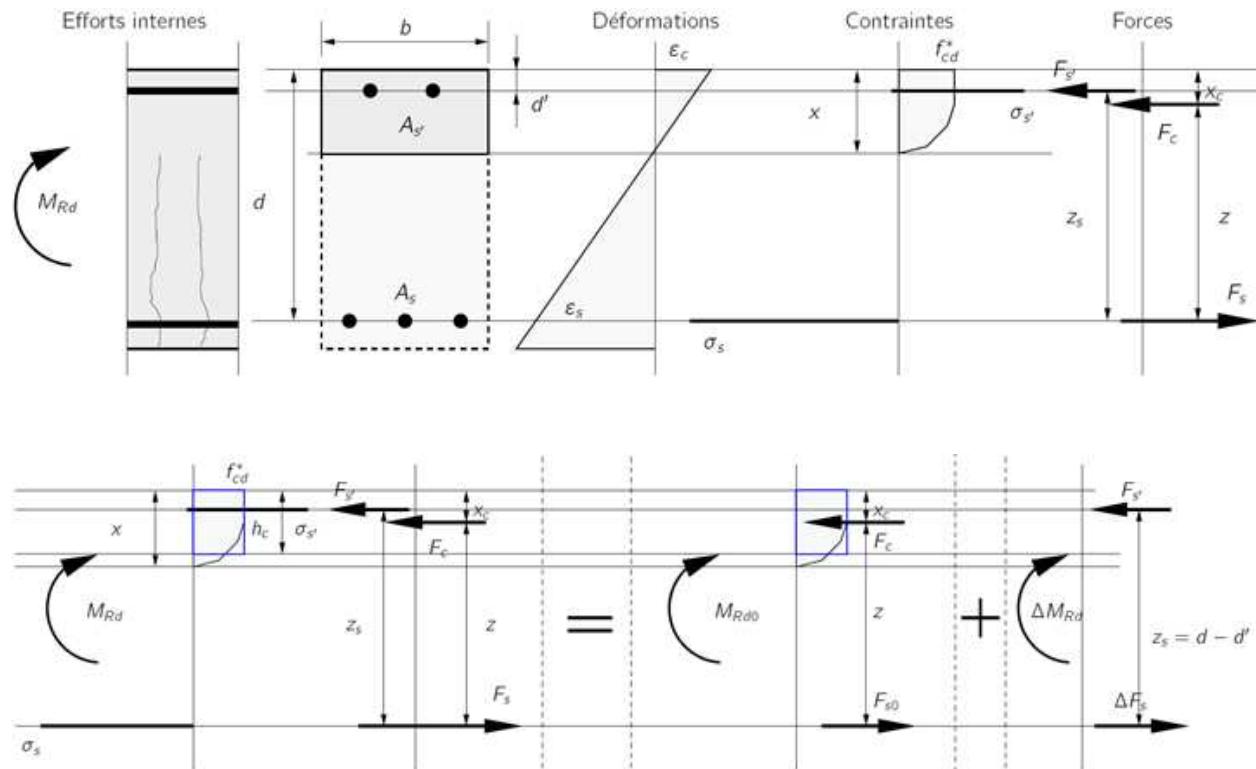
$$f_{cd}^* = \frac{M_{sup}}{b \times d^2 \times \mu_{Rd, lim}} = \frac{343 \text{ kNm}}{0,3 \text{ m} \times 0,46^2 \text{ m}^2 \times 0,296} = 18,254 \text{ MPa}$$

$$\rightarrow f_{ck} = 1,5 \times \frac{f_{cd}^*}{0,85} = 32,2 \text{ MPa}$$

Ce qui correspond à un béton de classe C35/45.

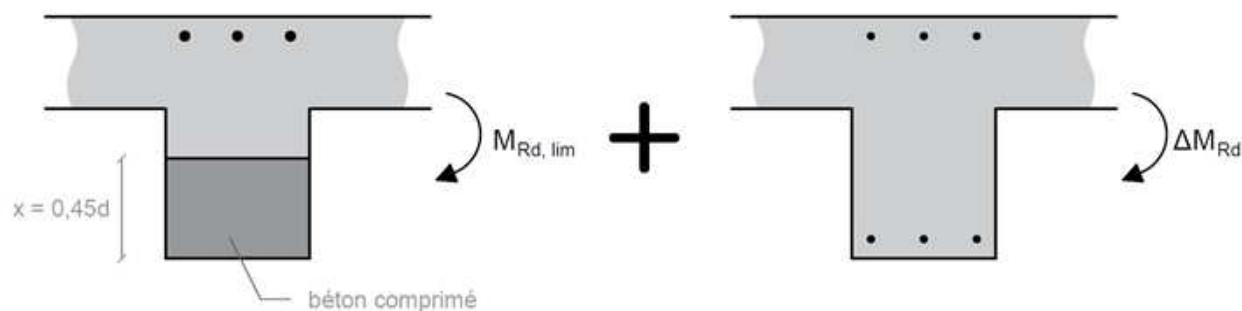
3) Mise en place d'armatures de compression (C : 318-319/664) :

Le principe des armatures de compression consiste à ajouter une certaine quantité d'armatures dans la zone de béton comprimé pour reprendre une partie de la force de compression pour diminuer la hauteur de béton comprimé.



Pour résoudre ce type de problème on sépare le problème en deux cas. Une section de béton simplement armé reprendra le moment maximum qui lui sera autorisé sans dépasser le minimum de capacité de rotation plastique imposé par la norme, et le reste du moment sera repris par une armature d'acier symétrique haut et bas.

Nous avons donc :



- Par la méthode "Stress-block" (C : 320-321/664) :

La valeur de F_c vaudra le produit de la contrainte dans le béton plastifié $\sigma_c = f_{cd}^*$ par la surface de béton comprimé $h_c \times b$ à la contrainte σ_c , ce qui donne :

$$F_c = h_c \times b \times f_{cd}^*$$

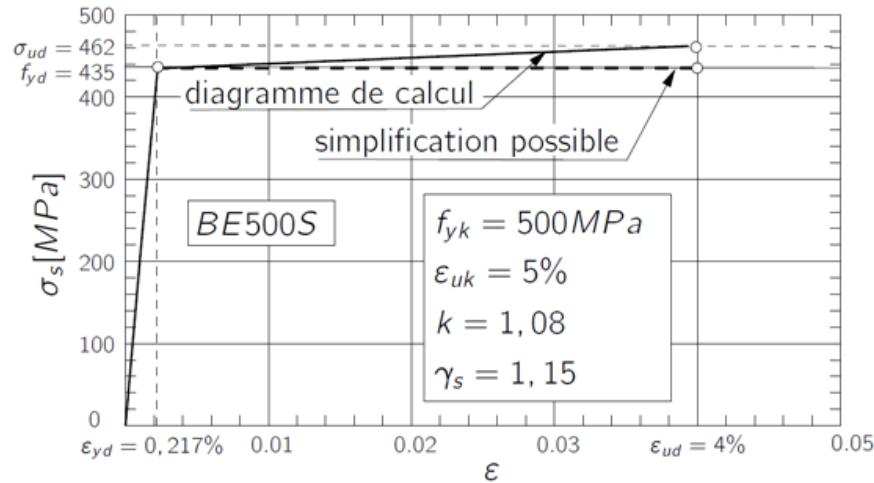
Le moment pouvant être repris par la section simplement armée vaudra le produit de la force F_c par le bras de levier z :

$$M_{Rd, lim} = F_c \times z$$

Comme $h_c = 0,8 \times x$ et $x = 0,45 \times d = 0,207$ on a :

$$\begin{aligned} M_{Rd, lim} &= (h_c \times b \times f_{cd}^*) \times z \\ &= (0,8 \times x \times b \times f_{cd}^*) \times (d - 0,4 \times x) \\ &= (0,8 \times 0,207 \text{ m} \times 0,3 \text{ m} \times 14,167 \text{ MPa}) \times (0,46 \text{ m} - 0,4 \times 0,207 \text{ m}) \\ &= 265,48 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Connaissant l'état de déformation imposé ($\varepsilon_c = 0,35 \%$, $\frac{x}{d} = 0,45$) et la position des armatures ($d = 0,46 \text{ m}$, $d' = 0,04 \text{ m}$), on peut calculer la déformation de celles-ci et en tirer les contraintes dans l'acier. On peut alors tenir compte de l'augmentation de résistance de l'acier au-dessus de la limite élastique (prise en compte de la branche inclinée du diagramme $\sigma - \varepsilon$ de l'acier.)



Les déformations dans les armatures valent :

$$|\varepsilon_s| = \varepsilon_c \times \frac{d - x}{x} = 0,35 \times \frac{0,46 \text{ m} - 0,207 \text{ m}}{0,207 \text{ m}} = 0,428 \%$$

$$|\varepsilon'_s| = \varepsilon_c \times \frac{d' - x}{x} = 0,35 \times \frac{0,04 \text{ m} - 0,207 \text{ m}}{0,207 \text{ m}} = 0,282 \%$$

Les contraintes dans les armatures valent donc :

$$\sigma_s = f_{yd} + (k - 1) \times f_{yd} \times \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{uk} - \varepsilon_{yd}}$$

$$\sigma_s = 435 \text{ MPa} + 0,08 \times 435 \text{ MPa} \times \frac{0,428 - 0,217}{5 - 0,217} = 436,53 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_s = 435 \text{ MPa} + 0,08 \times 435 \text{ MPa} \times \frac{0,282 - 0,217}{5 - 0,217} = 435,47 \text{ MPa}$$

La quantité d'armatures A_s nécessaire pour reprendre le moment $M_{Rd, lim}$ vaut :

$$A_s = \frac{M_{Rd, lim}}{z \times \sigma_s} = \frac{265,48 \text{ kNm}}{0,377 \text{ m} \times 436,53 \text{ MPa}} = 16,13 \text{ cm}^2$$

On peut calculer le reste du moment qui doit être repris par les armatures A_s haut ET bas :

$$\Delta M_{Rd} = M_{Ed} - M_{Rd, lim} = 343 - 265,48 = 77,52 \text{ kNm}$$

On trouve alors les armatures A'_s :

$$A'_{s, inf} = \frac{\Delta M_{Rd}}{z' \times \sigma'_s} = \frac{\Delta M_{Rd}}{(d - d') \times \sigma'_s} = \frac{77,52 \text{ kNm}}{0,42 \text{ m} \times 435,47 \text{ MPa}} = 4,24 \text{ cm}^2$$

$$A'_{s, sup} = \frac{\Delta M_{Rd}}{z' \times \sigma_s} = \frac{\Delta M_{Rd}}{(d - d') \times \sigma_s} = \frac{77,52 \text{ kNm}}{0,42 \text{ m} \times 436,53 \text{ MPa}} = 4,23 \text{ cm}^2$$

Nous avons donc comme armatures totales dans la poutre :

$$A_{s, sup} = A_s + A'_{s, sup} = 16,12 + 4,23 = 20,37 \text{ cm}^2$$

$$A_{s, inf} = A'_{s, inf} = 4,24 \text{ cm}^2$$

- **Par la méthode du moment réduit (C : 296-306/664) :**

Le moment maximal pouvant être repris par la section simplement armée est trouvé au moyen du $\mu_{Rd, lim} = 0,296$. Sachant que :

$$\mu_{Rd} = \frac{M_{Rd, lim}}{b \times d^2 \times f_{cd}^*} = 0,296$$

On trouve alors le $M_{Rd, lim}$:

$$M_{Rd, lim} = \mu_{Rd, lim} \times b \times d^2 \times f_{cd}^* = 0,296 \times 0,3 \text{ m} \times 0,46^2 \text{ m}^2 \times 14,167 \text{ MPa} = 266,2 \text{ kNm}$$

Au $\mu_{Rd,lim} = 0,296$ correspond un $\omega = 0,363$, ce qui nous donne directement la quantité d'armature A_s nécessaire :

$$A_s = \omega \times b \times d \times \frac{f_{cd}^*}{f_{yd}} = 0,363 \times 0,3 \text{ m} \times 0,46 \text{ m} \times \frac{14,167}{435} = 16,31 \text{ cm}^2$$

On peut calculer le reste du moment qui doit être repris par les armatures A_s haut ET bas :

$$\Delta M_{Rd} = M_{Ed} - M_{Rd, lim} = 343 - 266,2 = 76,8 \text{ kNm}$$

On calcule ensuite le moment réduit correspondant :

$$\mu_{Rd} = \frac{\Delta M_{Rd}}{b \times d^2 \times f_{cd}^*} = \frac{76,8 \text{ kNm}}{0,3 \text{ m} \times 0,46^2 \text{ m}^2 \times 14,167 \text{ MPa}} = 0,085$$

Béton :	C12 à C50	$\gamma_c = 1,5$	$\alpha_{cc} = 0,85$
Acier :	BE500S	$\gamma_s = 1,15$	$f_{yk} = 500 \text{ MPa}$ $k = 1,08$ $\varepsilon_{ud} = 4\%$

μ_{Rd}	ω	x/d	z/d	$\varepsilon_c [\%]$	$\varepsilon_s [\%]$	$\sigma_s [\text{MPa}]$	μ_{Rd}	ω	x/d	z/d	$\varepsilon_c [\%]$	$\varepsilon_s [\%]$	$\sigma_s [\text{MPa}]$
0.01	0.009	0.024	0.991	1.00	-40.00	-462	0.19	0.211	0.264	0.890	3.50	-9.78	-440
0.02	0.019	0.036	0.987	1.50	-40.00	-462	0.20	0.224	0.279	0.884	3.50	-9.02	-440
0.03	0.029	0.046	0.983	1.95	-40.00	-462	0.21	0.237	0.296	0.877	3.50	-8.34	-439
0.04	0.038	0.057	0.978	2.40	-40.00	-462	0.22	0.251	0.312	0.870	3.50	-7.71	-439
0.05	0.048	0.067	0.973	2.87	-40.00	-462	0.23	0.264	0.329	0.863	3.50	-7.14	-438
0.06	0.058	0.077	0.968	3.35	-40.00	-462	0.24	0.278	0.346	0.856	3.50	-6.61	-438
0.07	0.069	0.090	0.963	3.50	-35.48	-459	0.25	0.293	0.364	0.849	3.50	-6.12	-438
0.08	0.080	0.103	0.957	3.50	-30.41	-455	0.26	0.307	0.382	0.841	3.50	-5.67	-437
0.09	0.091	0.117	0.951	3.50	-26.46	-452	0.27	0.322	0.400	0.833	3.50	-5.25	-437
0.10	0.102	0.131	0.946	3.50	-23.30	-450	0.28	0.338	0.419	0.826	3.50	-4.86	-437
0.11	0.114	0.145	0.940	3.50	-20.72	-448	0.29	0.353	0.438	0.818	3.50	-4.49	-436
0.12	0.125	0.159	0.934	3.50	-18.56	-447	0.30	0.369	0.458	0.809	3.50	-4.15	-436
0.13	0.137	0.173	0.928	3.50	-16.73	-445	0.31	0.386	0.478	0.801	3.50	-3.82	-436
0.14	0.149	0.188	0.922	3.50	-15.17	-444	0.32	0.403	0.499	0.792	3.50	-3.52	-436
0.15	0.161	0.202	0.916	3.50	-13.81	-443	0.33	0.420	0.520	0.783	3.50	-3.23	-436
0.16	0.173	0.217	0.910	3.50	-12.61	-442	0.34	0.439	0.542	0.774	3.50	-2.95	-435
0.17	0.185	0.232	0.903	3.50	-11.56	-442	0.35	0.457	0.565	0.765	3.50	-2.69	-435
0.18	0.198	0.248	0.897	3.50	-10.62	-441	0.36	0.477	0.589	0.755	3.50	-2.44	-435
0.19	0.211	0.264	0.890	3.50	-9.78	-440	0.37	0.497	0.614	0.745	3.50	-2.20	-435

Au $\mu_{Rd} = 0,085$ correspond un $\omega = 0,085$ (F : 223/481), on peut donc calculer la quantité d'armature A'_s nécessaire :

$$A'_s = \omega \times b \times d \times \frac{f_{cd}^*}{f_{yd}} = 0,085 \times 0,3 \text{ m} \times 0,46 \text{ m} \times \frac{14,167 \text{ MPa}}{435 \text{ MPa}} = 3,8 \text{ cm}^2$$

Nous avons donc comme armatures totales dans la poutre :

$$A_{s, sup} = A_s + A'_s = 20,11 \text{ cm}^2$$

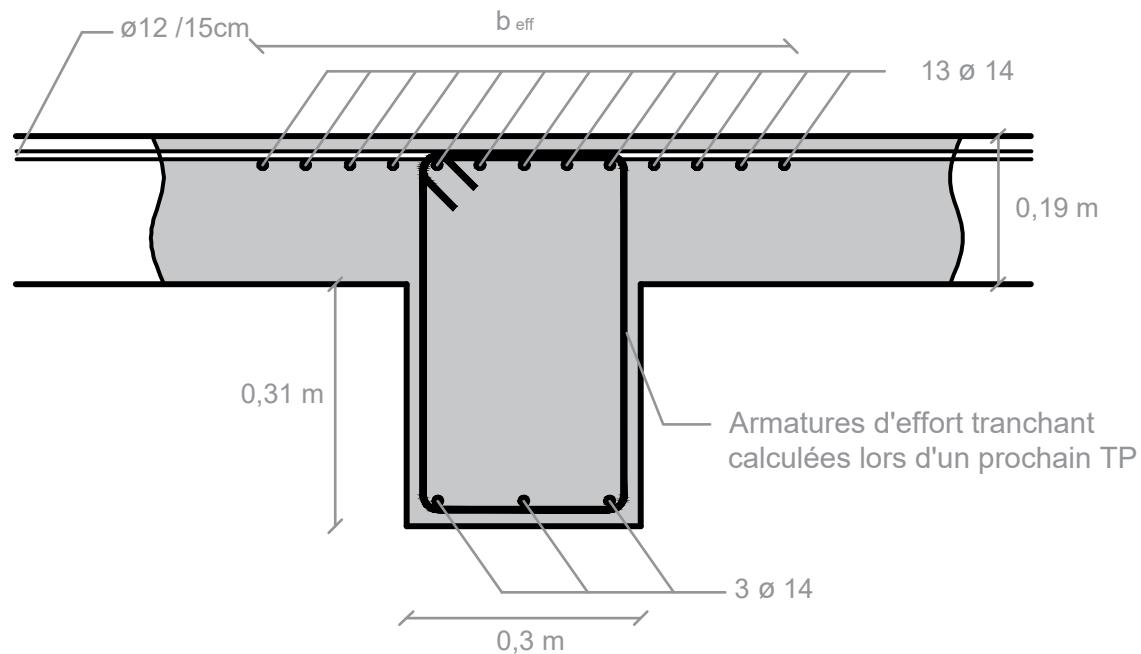
$$A_{s, inf} = A'_s = 3,8 \text{ cm}^2$$

Cette armature pourrait être composée de :

En supérieur : 13 Ø 14 ou 10 Ø 16 ou 7 Ø 20 ou 5 Ø 25

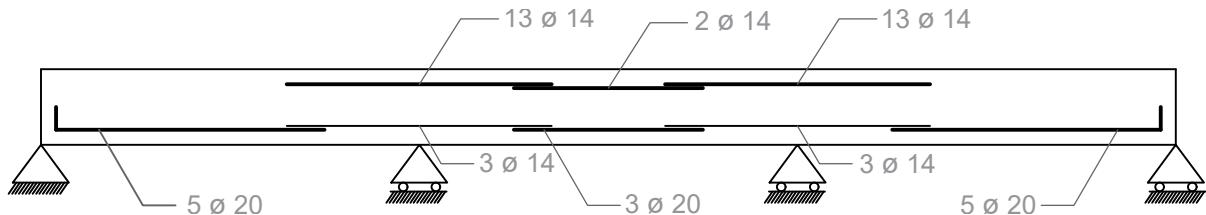
En inférieur : 3 Ø 14

Section avec ferraillage de la poutre sur appuis centraux



Plan du ferraillage après calcul

Pour le plan de ferraillage, nous considérons, sur appui, le cas avec armatures de compression. Nous avons donc :

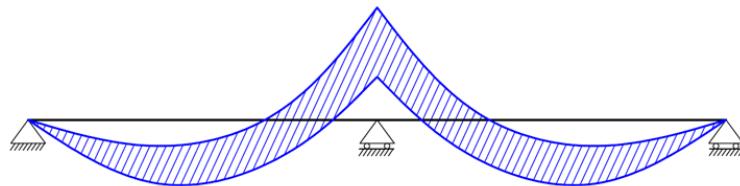


Note : Il conviendra d'ajouter des armatures d'effort tranchant, calculées dans un prochain exercice.

3 Flexion simple - poutre en I et poutre en T

3.1 Dessinez l'enveloppe des moments dans la passerelle à l'ELU.

La structure étudiée est une poutre hyperstatique sur trois appuis. L'enveloppe des moments aura l'allure suivante:



Dans ce cas de figure, il faut déterminer quatre valeurs de moment: Max/min en travée et Max/min sur l'appui central.

Calcul des charges sur la passerelle

- Les charges permanentes :

Connaissant le poids volumique du béton armé $\gamma = 25 \text{ kN/m}^3$, on peut calculer :

Le poids de la passerelle :

$$A_{c, \text{passerelle}} \times \gamma = 0,69 \text{ m}^2 \times 25 \text{ kN/m}^3 = 4,75 \text{ kN/m}$$

Nous avons donc une charge permanente linéaire totale : $G_k = 5,75 \text{ kN/m}$

- Les charges variables :

Charge répartie :

$$\text{charge repartie} \times \text{largeur} = 2,45 \text{ kN/m}^2 \times 2 \text{ m} = 4,9 \text{ kN/m}$$

Nous avons donc une charge variable linéaire totale : $Q_k = 4,9 \text{ kN/m}$

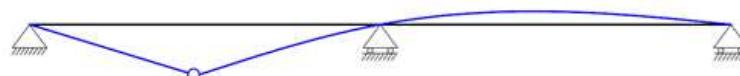
Ce qui nous donne les charges de design suivantes à l'ELU :

$$G_d = 1,35 \times G_k = 1,35 \times 17,25 \text{ kN/m} = 23,29 \text{ kN/m}$$

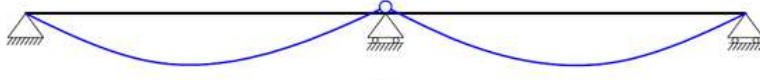
$$Q_d = 1,5 \times Q_k = 1,5 \times 4,9 \text{ kN/m} = 7,35 \text{ kN/m}$$

A partir de l'analyse des lignes d'influences des moments sur appuis et en travée, on peut déterminer les cas de charges pour minimiser ou maximiser les moments recherchés :

1. Pour maximiser (/minimiser) le moment en travée de gauche, il faut appliquer la charge variable uniquement sur la travée de gauche (/droite).



2. La charge variable doit être appliquée sur toute la passerelle pour maximiser le moment sur l'appui centrale. Pour minimiser ce moment, aucune charge variable doit être prise en compte.

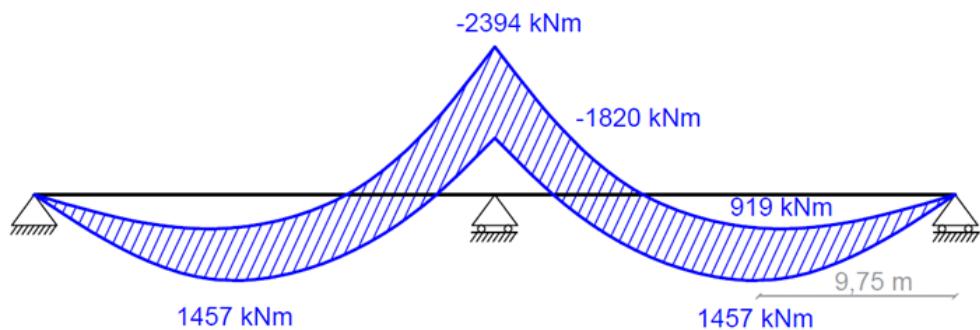


La charge permanente sera, de par sa nature, appliquée sur les deux travées.

On détermine les réactions d'appuis

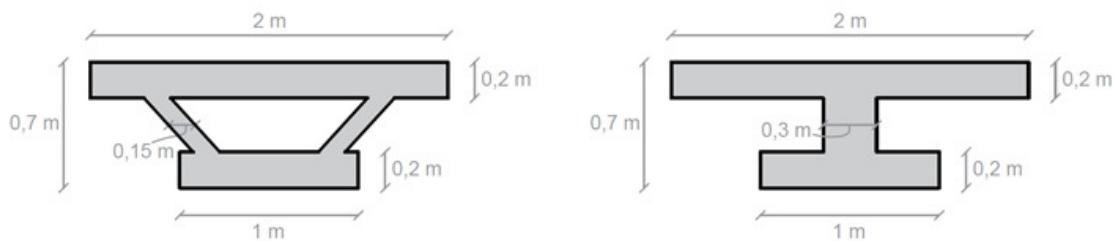
À partir de celles-ci, il est possible de déterminer les moments caractéristiques :

cas	$R_{rive,g}$	R_{centre}	$R_{rive,d}$		M_{sup}	M_{inf}
1	298,83 kN	842,66 kN	206,77 kN	Appui	-2394 kNm	-1820 kNm
2	287,25 kN	957,5 kN	287,25 kN	Travée	1457 kNm à 9,75 m	919 kNm à 8,88 m



3.2 Quelles sont les sections d'armatures principales de flexion nécessaires en travée ?

Du point de vue de la FLEXION, il est équivalent (et plus simple d'un point de vue calcul) de considérer la section équivalente en I. Cette simplification ne peut pas être faite pour un calcul en torsion de l'élément ou dans le calcul des efforts rasants.



On effectue un premier calcul en supposant que l'axe neutre reste dans la membrure supérieure (il conviendra de vérifier cette hypothèse ; si ce n'est pas le cas, il faudra effectuer un calcul de poutre en T).

- **Par la méthode simplifiée (C: 253-258/664):**

Il est toujours intéressant d'utiliser la formule simplifiée avant de se lancer dans un calcul de dimensionnement plus compliqué.

$$z_0 = 0,9 \times d = 0,9 \times (0,7 - 0,2/2) \text{ m} = 0,54 \text{ m}$$

$$F_s = F_c = \frac{M}{z_0} = \frac{1457 \text{ kNm}}{0,54 \text{ m}} = 2698,15 \text{ kN} \Rightarrow A_s = \frac{F_s}{f_{yd}} = \frac{2698,15 \text{ kN}}{435 \text{ MPa}} = 62 \text{ cm}^2$$

Il conviendra de vérifier cette valeur avec une méthode de calcul plus précise (« stress-block » ou « moment réduit »).

- **Par la méthode "Stress block" (C: 308-316/664):**

$$z_0 = 0,9 \times d = 0,54 \text{ m} \Rightarrow F_c = \frac{M}{z_0} = \frac{1457 \text{ kNm}}{0,54 \text{ m}} = 2698,15 \text{ kN}$$

$$h_c = \frac{F_c}{f_{cd}^* \times b} = \frac{2698,15 \text{ kN}}{22,66 \text{ MPa} \times 2 \text{ m}} = 0,059 \text{ m} < h_0 = 0,2 \text{ m}$$

On calcule z_1 et on effectue une seconde itération :

$$z_1 = d - \frac{h_c}{2} = 0,6 \text{ m} - \frac{0,059 \text{ m}}{2} = 0,5705 \text{ m}$$

$$\Rightarrow F_c = \frac{M}{z_1} = \frac{1457 \text{ kNm}}{0,5705 \text{ m}} = 2553,9 \text{ kN}$$

$$h_c = \frac{F_c}{f_{cd}^* \times b} = \frac{2553,9 \text{ kNm}}{22,66 \text{ MPa} \times 2 \text{ m}} = 0,056 \text{ m} < h_0 = 0,2 \text{ m} \Rightarrow OK$$

La compression reste dans la membrure supérieure. On peut donc calculer la hauteur de béton comprimée :

$$x = \frac{h_c}{0,8} = 0,07 \text{ m}$$

On vérifie alors le critère de rotation plastique $x/d \leq 0,45$:

$$\frac{x}{d} = \frac{0,07}{0,6} = 0,117 < 0,45 \Rightarrow OK$$

On calcule la quantité d'armature de flexion nécessaire :

$$F_s = 2553,9 \text{ kN}$$

$$A_s = \frac{F_s}{f_{yd}} = \frac{2553,9 \text{ kN}}{435 \text{ MPa}} = 58,71 \text{ cm}^2$$

- **Par la méthode du moment réduit (C: 296-306/664) :**

On calcul le moment réduit connaissant les dimensions géométriques et le moment en travée ($F : 222/481$).

$$\mu_{Rd} = \frac{M_{travée, Max}}{b \times d^2 \times f_{cd}^*} = \frac{1457 \times 10^6 \text{ Nmm}}{2000 \text{ mm} \times (600 \text{ mm})^2 \times 22,66 \text{ N/mm}^2} = 0,0893$$

Ce qui, par interpolation linéaire, donne $\omega = 0,0902$ et permet de déterminer l'aire d'armature:

$$A_s = \omega \times b \times d \times \frac{f_{cd}^*}{f_{yd}} = 56,4 \text{ cm}^2$$

On vérifie alors le critère de rotation plastique. Pour la méthode du moment réduit, il suffit de s'assurer que μ_{Rd} est inférieure ou égale à 0,296. Il faut encore s'assurer que l'axe neutre est bien dans la table supérieure:

$$\mu_{Rd} = 0,0893 \Rightarrow x/d = 0,117 \Rightarrow x = 0,117 \times 0,6 = 0,07 \text{ m} < h_0$$

En travée, l'armature longitudinale minimale dans la membrure inférieure (en traction) correspond à : [18 Ø 20](#), [12 Ø 25](#) ou [10 Ø 28](#)

3.3 Quelles sont les sections d'armatures principales de flexion nécessaires sur appui ?

Comme la section ne change pas de dimensions, on peut garder la même simplification de section et faire les calculs avec une section en I. En comparaison au calcul en travée, on remarque deux complications supplémentaires :

1. Le moment de flexion est plus important en travée que sur appui, ce qui induit une compression plus importante dans le béton
2. La surface de la membrure comprimée (inférieure) est plus petite que dans le calcul en travée.

On effectue un premier calcul en supposant que l'axe neutre reste dans la membrure inférieure (il conviendra de vérifier cette hypothèse ; si ce n'est pas le cas, il faudra effectuer un calcul de poutre en T).

- **Par la méthode simplifiée (C: 253-258/664):**

Il est toujours intéressant d'utiliser la formule simplifiée avant de se lancer dans un calcul de dimensionnement plus compliqué.

$$z_0 = 0,9 \times d = 0,54 \text{ m}$$

$$F_s = F_c = \frac{M}{z_0} = \frac{2394 \text{ kNm}}{0,54 \text{ m}} = 4433,33 \text{ kN}$$

$$A_s = \frac{F_s}{f_{yd}} = \frac{4433,33 \text{ kN}}{435 \text{ MPa}} = 102 \text{ cm}^2$$

Il conviendra de vérifier cette valeur avec une méthode de calcul plus précise (« stress-block » ou « moment réduit »).

- Par la méthode "Stress block" (C: 308-316/664) :

$$z_0 = 0,9 \times d = 0,54 \text{ m} \Rightarrow F_c = \frac{M}{z_0} = \frac{2394 \text{ kNm}}{0,54 \text{ m}} = 4433,33 \text{ kN}$$

$$h_c = \frac{F_c}{f_{cd}^* \times b} = \frac{4433,33 \text{ kN}}{22,66 \text{ MPa} \times 1 \text{ m}} = 0,196 \text{ m} < h_0 = 0,2 \text{ m}$$

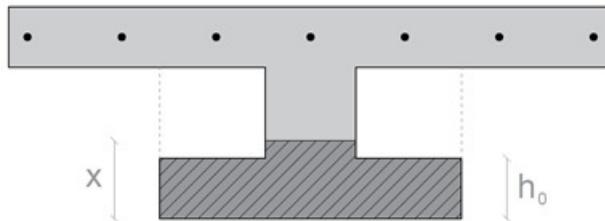
On recalcule z_1 et on effectue une seconde itération :

$$z_1 = d - \frac{h_c}{2} = 0,6 \text{ m} - \frac{0,196 \text{ m}}{2} = 0,502 \text{ m}$$

$$\Rightarrow F_c = \frac{M}{z_1} = \frac{2394 \text{ kNm}}{0,502 \text{ m}} = 4766,97 \text{ kN}$$

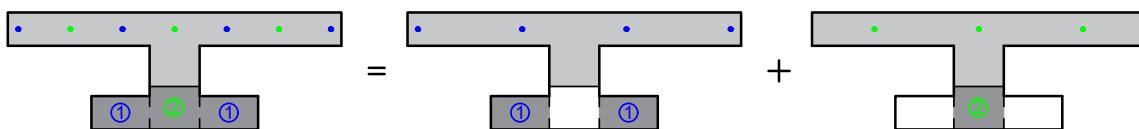
$$h_c = \frac{F_c}{f_{cd}^* \times b} = \frac{4766,97 \text{ kN}}{22,66 \text{ MPa} \times 1 \text{ m}} = 0,21 \text{ m} > h_0 = 0,2 \text{ m}$$

La compression ne reste pas dans la membrure inférieure donc il faut faire un calcul avec une section en T.



Calcul des armatures pour une section en T :

Dans le cas d'une section en T, il faut séparer la section en deux parties. Une première composée des deux ailes (section [1]) et une seconde d'une poutre rectangulaire (section [2]) de largeur égale à l'âme (notée b_w).



1) Calcul des armatures pour la section [1]

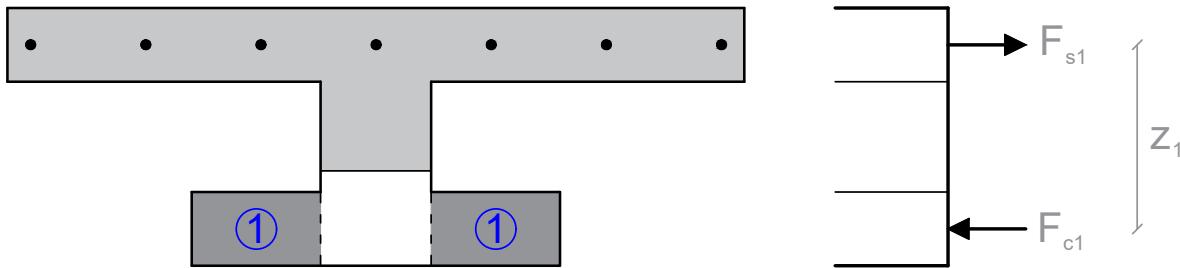
Pour la section [1], on considère dans ce cas que le béton est plastifié sur toute la hauteur de la semelle inférieure (notée h_0). Dans un premier temps, on détermine la compression applicable sur les ailes inférieures (les deux aires en grise foncé section [1]).

$$F_{c1} = A_c \times f_{cd}^* = (b - b_w) \times h_0 \times f_{cd}^* = (1 - 0,3) \text{ m} \times 0,2 \text{ m} \times 22,6 \text{ MPa} = 3173,33 \text{ kN}$$

$$A_{s1} = \frac{F_{c1}}{435 \text{ MPa}} = 72,95 \text{ cm}^2$$

Le moment transmissible M_1 sur cette section est calculé à partir du bras de levier z_1 déterminable directement car la position de l'armature et la position de la résultante des contraintes de compression dans les ailes ($F_{c,1}$) ne varient pas.

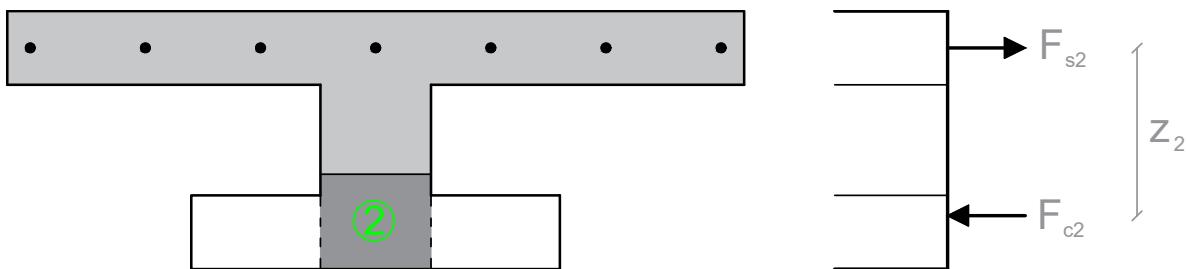
$$z_1 = \left(d - \frac{h_0}{2} \right) = 0,5 \text{ m} \Rightarrow M_1 = F_{c1} \times z_1 = 1586,67 \text{ kNm}$$



2) Calcul des armatures pour la section [2]

Le moment restant à reprendre par l'âme (section [2]) vaut donc :

$$M_2 = M_{tot} - M_1 = M_{tot} - F_{c1} z_1 = 2394 \text{ kNm} - 1586,67 \text{ kNm} = 807,33 \text{ kNm}$$



Pour cette section, la position de la résultante des forces de compression dans le béton varie. Il faudra donc utiliser une méthode de calcul pour déterminer le bras de levier z_2 et l'aire d'armature longitudinale nécessaire.

- Par la méthode "Stress block" (C: 308-316/664) :

$$z_2 = 0,9 \times d = 0,54 \text{ m} \Rightarrow F_{c2} = \frac{M_2}{z_2} = \frac{807,33 \text{ kNm}}{0,54 \text{ m}} = 1495,05 \text{ kN}$$

$$h_c = \frac{F_{c2}}{f_{cd}^* \times b_w} = \frac{1495,05 \text{ kN}}{22,66 \text{ MPa} \times 0,3 \text{ m}} = 0,22 \text{ m}$$

On recalcule z_2 et on effectue une seconde itération :

$$z_2 = d - \frac{h_c}{2} = 0,6 \text{ m} - \frac{0,22 \text{ m}}{2} = 0,49 \text{ m}$$

$$F_{c2} = \frac{M_2}{z_2} = \frac{807,33 \text{ kNm}}{0,49 \text{ m}} = 1647,39 \text{ kN}$$

$$h_c = \frac{F_{c2}}{f_{cd}^* \times b} = \frac{1647,39 \text{ kN}}{22,66 \text{ MPa} \times 0,3 \text{ m}} = 0,24 \text{ m}$$

Après plusieurs itérations, on obtient :

$$F_{c2} = 1695,95 \text{ kN} \Rightarrow h_c = 0,25 \text{ m} > h_0 = 0,2 \text{ m}$$

Ce qui nous montre bien que la hauteur de béton comprimée est bien plus grande que la hauteur de la semelle inférieure. Les calculs n'ont pas été inutiles. On peut donc calculer la hauteur de béton comprimée :

$$x = \frac{h_c}{0,8} = 0,31 \text{ m}$$

On vérifie alors le critère de rotation plastique $x/d \leq 0,45$:

$$\frac{x}{d} = 0,52 > 0,45 \Rightarrow \text{PAS OK}$$

Ce critère n'est pas respecté, il va donc falloir ajouter des armatures de compression pour limiter la hauteur de béton comprimé. De cette manière, il est possible de respecter le critère de rotation plastique pour la section rectangulaire [2].

Avant de déterminer la quantité d'armature de compression, il faut d'abord déterminer le moment résistant de la section [2] rectangulaire qui respecte le critère de rotation plastique.

2.A) Calcul du moment résistant de la section [2]

On impose $x/d = 0,45$.

- Par la méthode du moment réduit (C: 296-306/664):

Le moment maximal pouvant être repris par la section [2] simplement armée est trouvé au moyen du $\mu_{Rd, lim} = 0,296$. Sachant que :

$$\mu_{Rd} = \frac{M_{Rd,2}}{b \times d^2 \times f_{cd}^*} = 0,296$$

On trouve alors :

$$M_{Rd,2} = \mu_{Rd, lim} \times b \times d^2 \times f_{cd}^* = 0,296 \times 0,3 \text{ m} \times 0,6^2 \text{ m}^2 \times 22,6 \text{ MPa} = 724,62 \text{ kNm}$$

Au $\mu_{Rd, lim}$ correspond un $\omega = 0,363$ (F: 222/481), ce qui nous donne directement la quantité d'armature nécessaire :

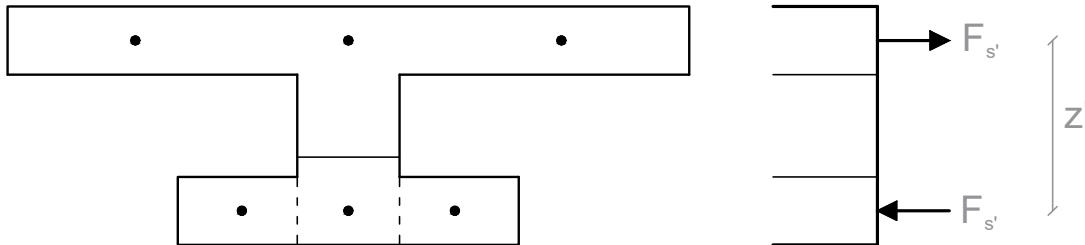
$$A_{s2} = \omega \times b \times d \times \frac{f_{cd}^*}{f_{yd}} = 34,05 \text{ cm}^2$$

2.B) Calcul des armatures de compression

On peut calculer le reste du moment qui doit être repris par les armatures supplémentaires :

$$\Delta M_{Rd} = M_2 - M_{Rd,2} = 807,13 - 724,62 = 82,51 \text{ kNm}$$

Pour équilibrer ce moment, il faut que la force de compression en partie inférieure soit équilibrée par la même force en traction en partie supérieure.



Connaissant la position des armatures tendue et comprimée, le bras de levier des armatures de compression se calcule sans itération :

$$z' = h - 2 \times \frac{e}{2} = 0,5 \text{ m}$$

On peut calculer :

$$F'_s = \frac{\Delta M_{Rd}}{z'} = \frac{82,51 \text{ kNm}}{0,5 \text{ m}} = 165,02 \text{ kN}$$

$$A'_s = \frac{165,02 \text{ kN}}{435 \text{ MPa}} = 3,79 \text{ cm}^2$$

Ces armatures de compression mises dans la semelle inférieure doivent AUSSI être équilibrées par des armatures en traction en semelle supérieure.

Récapitulatif des quantités d'armatures sur appui

Pour reprendre le moment total sur appui, on sollicite :

- En compression (partie inférieure): le béton (semelle inférieure et une partie de l'âme) et des armatures de compression (A'_s)
- En traction (partie supérieure): des armatures de traction qui équilibrent la partie de béton comprimée ($A_{s1} + A_{s2}$) + des armatures de traction qui équilibrent les armatures de compression (A'_s)

Les armatures totales dans la section seront donc de :

$$A_{s, \text{sup}} = A_{s1} + A_{s2} + A'_s = 72,95 + 34,05 + 3,79 = 110,79 \text{ cm}^2$$

$$A_{s, \text{inf}} = A'_s = 3,79 \text{ cm}^2$$

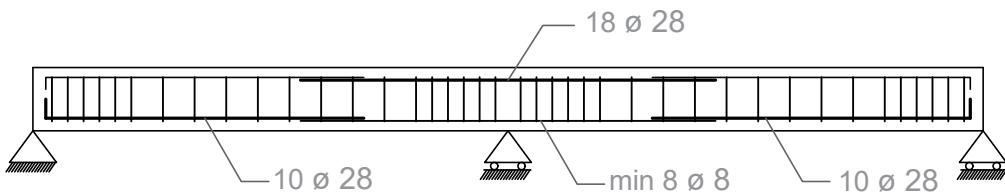
Cette armature pourrait être composée d'au minimum :

En supérieur : 14 Ø 32 ou 23 Ø 25 ou 18 Ø 28

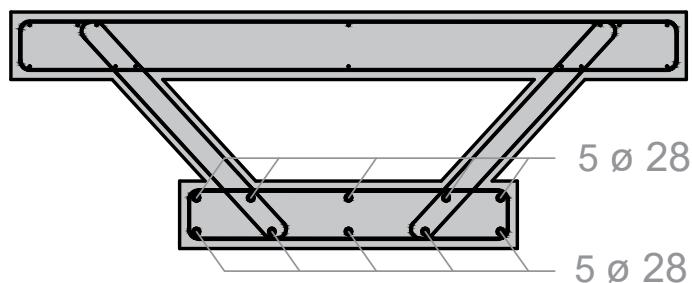
En inférieur : 4 Ø 12 ou 5 Ø 10 ou 8 Ø 8

3.4 Représentez le ferrailage de la passerelle (élévation et coupes).

Elévation :

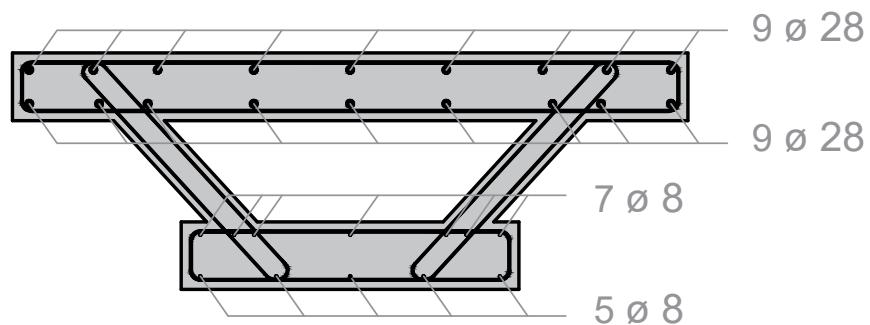


Section en travée :



On remarque la présence de barre d'armature technologique en partie supérieure pour solidariser les étriers ensemble.

Section sur appui central :



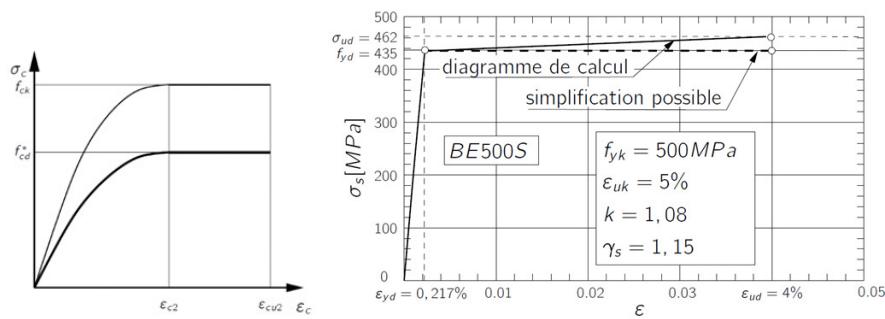
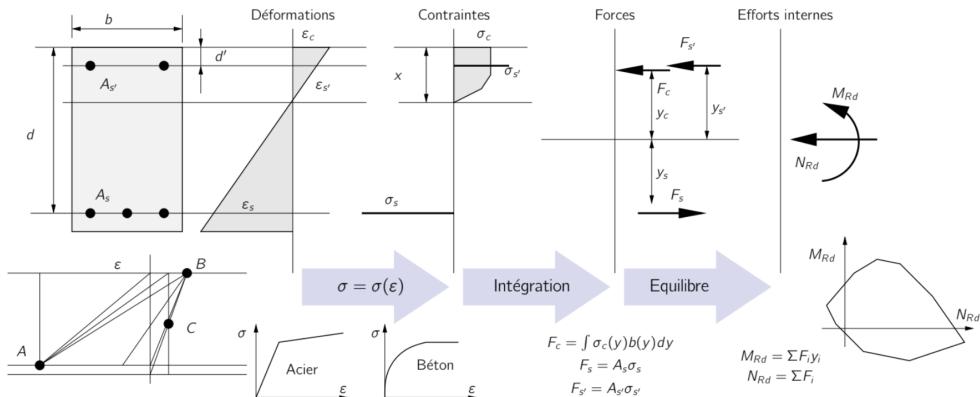
4 Flexion composée

4.1 Dessinez le diagramme d'interaction des deux sections présentées ci-dessus.

Pour dessiner le diagramme d'interaction, la démarche est la suivante (C : 364/664):

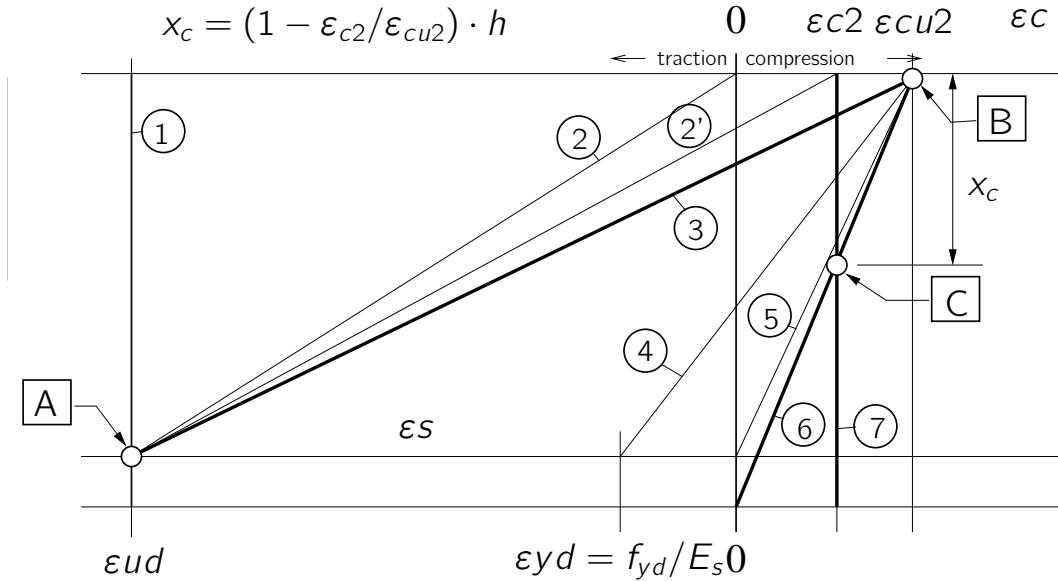
1. Choisir un état de déformation (ε_c et ε_s) correspondant à un état de rupture possible.
2. Calculer, sur base des diagrammes contraintes/déformations de calcul, les forces F_c et F_s (et F'_s) (pour F_c , on peut prendre, quand cela est nécessaire, l'hypothèse du "stress-block" pour simplifier le calcul).
3. Calculer l'effort normal résistant dans la section : $N_{Rd} = F_c + F_s (+F'_s)$ (attention aux signes).
4. Calculer le moment de flexion résistant dans la section : $M_{Rd} = F_c \times y_c + F_s \times y_s \times (+F'_s \times y'_s)$ (attention aux signes).
5. Tracer sur un graphique l'ensemble des couples (N, M) correspondant à un état de rupture.

Recommencez la démarche pour un autre état de déformation



1) Choisir un état de déformation

On se base sur le diagramme suivant pour choisir les états de déformation à la rupture (C : 365/664):



A partir d'un état de déformation, on définit ε_s et ε_c sur le diagramme.

S'il y a présence d'armature du côté de la zone comprimée de béton, la déformation dans ces barres ε'_s est calculée en fonction de ε_s , de ε_c et leurs positions d' par triangle semblables :

$$\frac{x - d'}{d} = \frac{\varepsilon'_s}{|\varepsilon_c| + |\varepsilon_s|} \Rightarrow \varepsilon'_s = \frac{|\varepsilon_s| + |\varepsilon_c|}{d}(x - d')$$

Note : si la section est complètement tendue ou complètement comprimée, on a $\varepsilon_c = \varepsilon_s = \varepsilon'_s$.

2) Calculer les forces dans le béton et les armatures *Les efforts dans le béton :*

A partir de ε_c et ε_s , on peut calculer la position de l'axe neutre x , la hauteur de béton comprimé h_c puis la force résistante du béton comprimé F_c :

$$\frac{x}{d - x} = \frac{\varepsilon_c}{|\varepsilon_s|} \Rightarrow x = \frac{d \times \varepsilon_c}{\varepsilon_s + \varepsilon_c}$$

$$h_c = 0,8 \times x$$

$$F_c = \begin{cases} f_{cd}^* \times \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^2 \right] \times h_c \times b & \text{si } \varepsilon_c < \varepsilon_{c2} = 0,2\% \quad (\text{entre les états 2 et 2'}) \\ f_{cd}^* \times h_c \times b & \text{sinon (entre les états 2' et 7).} \end{cases}$$

Note : si $\varepsilon_c = \varepsilon_s$, la section est soit complètement tendue ($x = h_c = 0$), soit complètement comprimée ($x = h_c = h$).

Les efforts dans les armatures:

Connaissant les déformations dans les armatures, on peut alors déterminer l'effort normal sur base de la contrainte dans l'acier (diagramme de calcul) :

$$\sigma_s = \begin{cases} E \times \varepsilon_s & \text{si } 0 \leq |\varepsilon_s| \leq 0,217\% \quad (\text{Loi de Hooke}) \\ f_{yd} + (k - 1) \times f_{yd} \times \frac{|\varepsilon_s| - \varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{uk} - \varepsilon_{yd}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\sigma'_s = \begin{cases} E \times \varepsilon'_s & \text{si } 0 \leq |\varepsilon'_s| \leq 0,217\% \quad (\text{Loi de Hooke}) \\ f_{yd} + (k - 1) \times f_{yd} \times \frac{|\varepsilon'_s| - \varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{uk} - \varepsilon_{yd}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans le cas d'un acier BE500S : $f_{yd} = 435 \text{ MPa}$, $k = 1,08$, $\varepsilon_{yd} = 0,217\%$ et $\varepsilon_{uk} = 5\%$

Puis :

$$F_s = \sigma_s \times A_s \quad \& \quad F'_s = \sigma'_s \times A'_s$$

Note : le résultat est négatif si l'armature est tendue !

3) Calculer l'effort normal résistant dans la section

L'effort normal résistant n'est rien d'autre que la résultante des forces de traction et de compression sur la section :

$$N_{Rd} = F_c + F_s (+F'_s)$$

Note : Par convention, les forces en traction sont négatives !

4) Calculer le moment de flexion résistant dans la section

La position des forces résultantes :

Après avoir calculé les résultantes des forces pour les différents matériaux, il faut déterminer la position de ces forces par rapport au centre de gravité de la section (point d'application de N_{Rd} et M_{Rd}).

Pour les armatures, le calcul est direct :

$$y_s = d - \frac{h}{2} \quad \text{et} \quad y'_s = \frac{h}{2} - d'$$

Pour le béton, la force résultante passe par le centre de gravité des contraintes. On peut simplifier le développement en considérant que la répartition des contraintes (en forme de parabole-rectangle) est équivalente à un bloc de contrainte rectangulaire de hauteur h_c .

Dans ce cas :

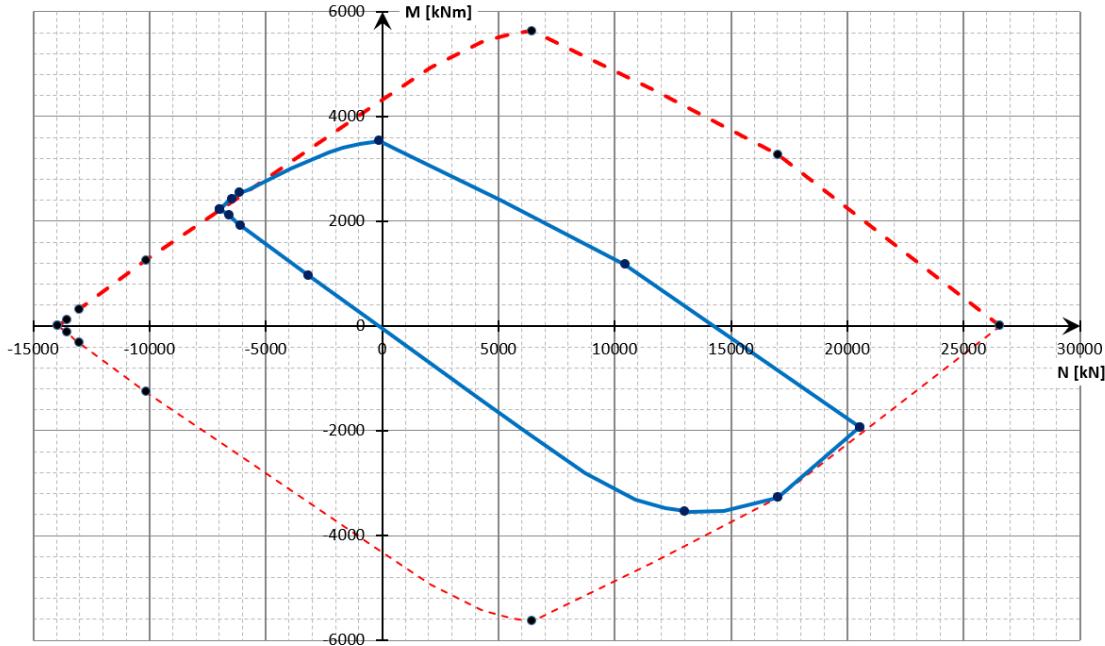
$$y_c = \frac{h}{2} - \frac{h_c}{2}$$

Le moment résistant :

Le moment résistant varie en fonction du sens des forces et leurs positions par rapport au centre de gravité. Par convention, le moment sera positif quand il tendra la fibre inférieure :

$$M_{Rd} = F_c \times y_c + F_s \times y_s \times (+F'_s \times y'_s)$$

5) Tracer sur un graphique l'ensemble des couples (N , M) correspondant à un état de rupture.



Section simplement armée (diagramme bleu) : résultats pour différents états de déformation dans le cas où les armatures sont en traction :

	ε_s [%]	ε_c [%]	x [m]	h_c [m]	F_c [kN]	ε'_s [%]	σ'_s [MPa]	F'_s [kN]	σ_s [MPa]	F_s [kN]	N [kN]	y_c [m]	y'_s [m]	y_s [m]	M [kNm]
7	0,2	0,2	0,80	0,80	14506,7	0,20	400,0	0,0	400,0	6031,9	20538,5	0,00	0,32	0,32	-1930,2
5	0	0,35	0,72	0,576	10444,8	0,31	435,7	0,0	0,0	10444,8	0,11	0,32	0,32	1169,8	
	-0,1	0,35	0,56	0,448	8123,7	0,30	435,6	0,0	-200,0	-3015,9	5107,8	0,18	0,32	0,32	2394,9
	-0,2	0,35	0,458	0,367	6646,7	0,29	435,5	0,0	-400,0	-6031,9	614,8	0,22	0,32	0,32	3370,7
4	-0,217	0,35	0,444	0,356	6447,4	0,29	435,5	0,0	-435,0	-6559,6	-112,2	0,22	0,32	0,32	3531,8
	-0,3	0,35	0,388	0,31	5624,1	0,28	435,4	0,0	-435,6	-6568,6	-944,5	0,24	0,32	0,32	3479,4
	-0,4	0,35	0,336	0,269	4874,2	0,27	435,4	0,0	-436,3	-6579,3	-1705,1	0,27	0,32	0,32	3400,0
	-0,5	0,35	0,296	0,237	4300,8	0,26	435,3	0,0	-437,0	-6590,1	-2289,3	0,28	0,32	0,32	3319,1
	-1	0,35	0,187	0,149	2707,9	0,20	400,0	0,0	-440,6	-6643,9	-3936,0	0,33	0,32	0,32	3007,0
	-1,5	0,35	0,136	0,109	1976,0	0,14	288,9	0,0	-444,2	-6697,7	-4721,7	0,35	0,32	0,32	2826,0
	-2	0,35	0,107	0,086	1555,6	0,09	177,8	0,0	-447,7	-6751,5	-5195,9	0,36	0,32	0,32	2716,0
	-3	0,35	0,075	0,06	1091,2	-0,02	-44,4	0,0	-454,9	-6859,2	-5767,9	0,37	0,32	0,32	2598,6
3	-4	0,35	0,058	0,046	840,4	-0,13	-266,7	0,0	-462,0	-6966,8	-6126,4	0,38	0,32	0,32	2546,1
	-4	0,25	0,042	0,034	614,4	-0,22	-435,0	0,0	-462,0	-6966,8	-6352,4	0,38	0,32	0,32	2464,7
2'	-4	0,2	0,034	0,027	497,4	-0,27	-435,4	0,0	-462,0	-6966,8	-6469,4	0,39	0,32	0,32	2421,5
	-4	0,15	0,026	0,021	353,9	-0,31	-435,7	0,0	-462,0	-6966,8	-6612,9	0,39	0,32	0,32	2367,3
	-4	0,05	0,009	0,007	56,4	-0,40	-436,3	0,0	-462,0	-6966,8	-6910,4	0,40	0,32	0,32	2251,7
2	-4	0	0,00	0,00	0,0	-0,44	-436,6	0,0	-462,0	-6966,8	-6966,8	0,40	0,32	0,32	2229,4
1	-4	-4	0,00	0,00	0,0	-4,00	-462,0	0,0	-462,0	-6966,8	-6966,8	0,40	0,32	0,32	2229,4

Section simplement armée (diagramme bleu) : résultats pour différents états de déformation dans le cas où les armatures sont en compression

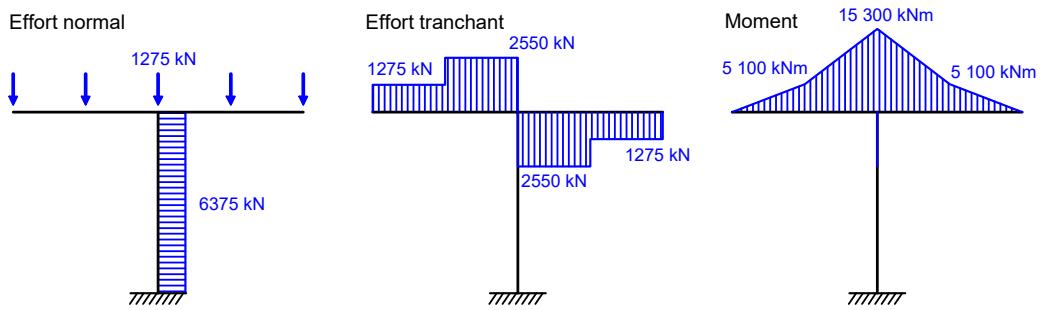
	ε_s [%]	ε_c [%]	x [m]	h_c [m]	F_c [kN]	ε'_s [%]	σ'_s [MPa]	F'_s [kN]	σ_s [MPa]	F_s [kN]	N [kN]	y_c [m]	y'_s [m]	y_s [m]	M [kNm]
7	0,2	0,2	0,80	0,80	14506,7	0,20	400,0	6031,9	400,0	0,0	20538,5	0,00	0,32	0,32	-1930,2
5	0	0,35	0,72	0,576	10444,8	0,31	435,7	6569,8	0,0	0,0	17014,6	0,11	0,32	0,32	-3272,1
	-0,1	0,35	0,56	0,448	8123,7	0,30	435,6	6568,6	-200,0	0,0	14692,3	0,18	0,32	0,32	-3531,7
	-0,2	0,35	0,458	0,367	6646,7	0,29	435,5	6567,4	-400,0	0,0	13214,1	0,22	0,32	0,32	-3542,1
4	-0,217	0,35	0,444	0,356	6447,4	0,29	435,5	6567,2	-435,0	0,0	13014,6	0,22	0,32	0,32	-3534,3
	-0,3	0,35	0,388	0,31	5624,1	0,28	435,4	6566,2	-435,6	0,0	12190,3	0,24	0,32	0,32	-3478,7
	-0,4	0,35	0,336	0,269	4874,2	0,27	435,4	6565,0	-436,3	0,0	11439,2	0,27	0,32	0,32	-3395,4
	-0,5	0,35	0,296	0,237	4300,8	0,26	435,3	6563,8	-437,0	0,0	10864,6	0,28	0,32	0,32	-3310,7
	-1	0,35	0,187	0,149	2707,9	0,20	400,0	6031,9	-440,6	0,0	8739,8	0,33	0,32	0,32	-2811,2
	-1,5	0,35	0,136	0,109	1976,0	0,14	288,9	4356,3	-444,2	0,0	6332,4	0,35	0,32	0,32	-2076,8
	-2	0,35	0,107	0,086	1555,6	0,09	177,8	2680,8	-447,7	0,0	4236,4	0,36	0,32	0,32	-1413,4
	-3	0,35	0,075	0,06	1091,2	-0,02	-44,4	-670,2	-454,9	0,0	421,0	0,37	0,32	0,32	-189,2
3	-4	0,35	0,058	0,046	840,4	-0,13	-266,7	-4021,2	-462,0	0,0	-3180,9	0,38	0,32	0,32	970,1
	-4	0,25	0,042	0,034	614,4	-0,22	-435,0	-6560,2	-462,0	0,0	-5945,8	0,38	0,32	0,32	1863,9
2'	-4	0,2	0,034	0,027	497,4	-0,27	-435,4	-6565,0	-462,0	0,0	-6067,6	0,39	0,32	0,32	1908,7
	-4	0,15	0,026	0,021	353,9	-0,31	-435,7	-6569,8	-462,0	0,0	-6215,8	0,39	0,32	0,32	1964,4
	-4	0,05	0,009	0,007	56,4	-0,40	-436,3	-6579,3	-462,0	0,0	-6522,9	0,40	0,32	0,32	2083,0
2	-4	0	0,00	0,00	0,0	-0,44	-436,6	-6584,1	-462,0	0,0	-6584,1	0,40	0,32	0,32	2106,9
1	-4	-4	0,00	0,00	0,0	-4,00	-462,0	-6966,8	-462,0	0,0	-6966,8	0,40	0,32	0,32	2229,4

Section symétriquement armée (diagramme rouge) : résultats pour différents états de déformation

	ε_s [%]	ε_c [%]	x [m]	h_c [m]	F_c [kN]	ε'_s [%]	σ'_s [MPa]	F'_s [kN]	σ_s [MPa]	F_s [kN]	N [kN]	y_c [m]	y'_s [m]	y_s [m]	M [kNm]
7	0,2	0,2	0,80	0,80	14506,7	0,20	400,0	6031,9	400,0	6031,9	26570,4	0,00	0,32	0,32	0,0
5	0	0,35	0,72	0,576	10444,8	0,31	435,7	6569,8	0,0	0,0	17014,6	0,11	0,32	0,32	3272,1
	-0,1	0,35	0,56	0,448	8123,7	0,30	435,6	6568,6	-200,0	-3015,9	11676,4	0,18	0,32	0,32	4496,8
	-0,2	0,35	0,458	0,367	6646,7	0,29	435,5	6567,4	-400,0	-6031,9	7182,2	0,22	0,32	0,32	5472,3
4	-0,217	0,35	0,444	0,356	6447,4	0,29	435,5	6567,2	-435,0	-6559,6	6454,9	0,22	0,32	0,32	5633,3
	-0,3	0,35	0,388	0,31	5624,1	0,28	435,4	6566,2	-435,6	-6568,6	5621,7	0,24	0,32	0,32	5580,6
	-0,4	0,35	0,336	0,269	4874,2	0,27	435,4	6565,0	-436,3	-6579,3	4859,9	0,27	0,32	0,32	5500,8
	-0,5	0,35	0,296	0,237	4300,8	0,26	435,3	6563,8	-437,0	-6590,9	4274,5	0,28	0,32	0,32	5419,5
	-1	0,35	0,187	0,149	2707,9	0,20	400,0	6031,9	-440,6	-6643,9	2095,9	0,33	0,32	0,32	4937,2
	-1,5	0,35	0,136	0,109	1976,0	0,14	288,9	4356,3	-444,2	-6697,7	-365,3	0,35	0,32	0,32	4220,1
	-2	0,35	0,107	0,086	1555,6	0,09	177,8	2680,8	-447,7	-6751,5	-2515,1	0,36	0,32	0,32	3573,9
	-3	0,35	0,075	0,06	1091,2	-0,02	-44,4	-670,2	-454,9	-6859,2	-6438,1	0,37	0,32	0,32	2384,1
3	-4	0,35	0,058	0,046	840,4	-0,13	-266,7	-4021,2	-462,0	-6966,8	-10147,6	0,38	0,32	0,32	1259,3
	-4	0,25	0,042	0,034	614,4	-0,22	-435,0	-6560,2	-462,0	-6966,8	-12912,6	0,38	0,32	0,32	365,5
2'	-4	0,2	0,034	0,027	497,4	-0,27	-435,4	-6565,0	-462,0	-6966,8	-13034,4	0,39	0,32	0,32	320,7
	-4	0,15	0,026	0,021	353,9	-0,31	-435,7	-6569,8	-462,0	-6966,8	-13182,6	0,39	0,32	0,32	264,9
	-4	0,05	0,009	0,007	56,4	-0,40	-436,3	-6579,3	-462,0	-6966,8	-13489,7	0,40	0,32	0,32	146,4
2	-4	0	0,00	0,00	0,0	-0,44	-436,6	-6584,1	-462,0	-6966,8	-13550,9	0,40	0,32	0,32	122,5
1	-4	-4	0,00	0,00	0,0	-4,00	-462,0	-6966,8	-462,0	-6966,8	-13933,6	0,40	0,32	0,32	0,0

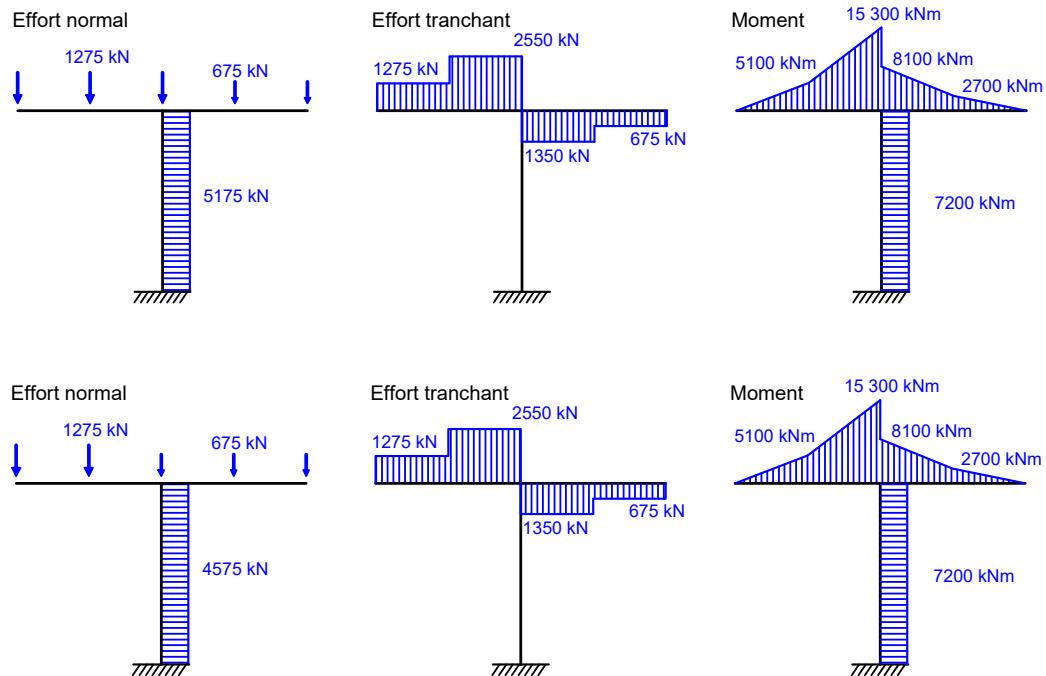
4.2 Calculez les efforts internes pour le cas de charge qui maximise l'effort normal dans la colonne.

Pour maximiser l'effort normal dans la colonne, il faut appliquer les charges variables sur l'ensemble de la poutre supérieure. De part sa nature permanente, les charges permanentes sont appliquées partout.



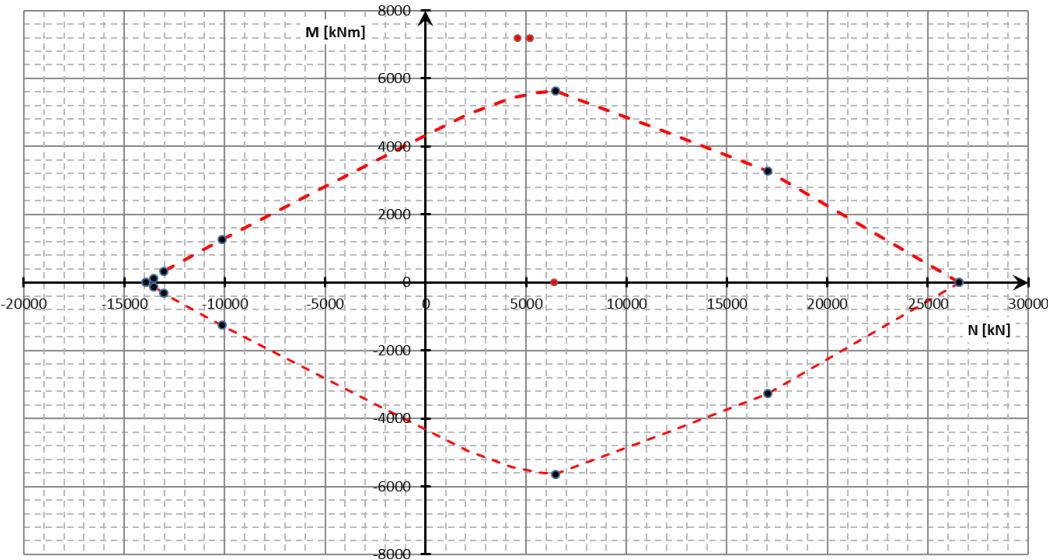
4.3 Calculez les efforts internes pour le cas de charge qui maximise le moment dans la colonne.

Pour maximiser le moment dans la colonne, il faut appliquer les charges variables sur les parties de gauche ou de droite de la poutre supérieure. Au niveau la charge centrale, la charge variable ne génère pas de moment dans le colonne mais ajoute (ou non) de la compression additionnelle. Les deux cas de figures doivent donc être étudiés.



4.4 Vérifiez à l'aide du diagramme d'interaction de la section symétriquement armée si celle-ci peut reprendre les couples (N, M).

Le couple (N, M) (6 375 kN ; 0 kNm) se trouve bien à l'intérieur du diagramme d'interaction, par contre les couples (5 175 kN ; 7 200 kNm) et (4 575 kN ; 7 200 kNm) se trouvent en dehors. La section proposée n'est donc pas suffisante pour reprendre les efforts présents dans la structure.



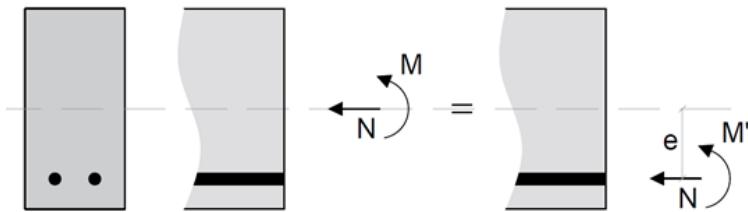
4.5 Vérifiez la conclusion du point précédent par la méthode "Stress-Block".

On peut représenter une sollicitation de flexion composée (N, M) exprimé au niveau du centre de gravité sous la forme du couple de valeurs (N, e) où l'excentricité e de l'effort N par rapport au centre de gravité est définie par la relation : $e = \frac{M}{N}$

- **Par la méthode "Stress-Block" (C : 381-383/664):** Lorsque l'on exprime le couple (M, N) représentant la sollicitation de flexion composée d'une section, il faut toujours spécifier le niveau de référence y_0 absolu par rapport auquel cette sollicitation est exprimée. Il en est de même si l'on exprime la sollicitation sous la forme d'effort normal excentré (N, e)

Dans le but de simplifier les calculs, il est souvent pratique d'exprimer les sollicitations de flexion composées par rapport au niveau de la nappe d'armatures tendues. Un couple (N, M) exprimé par rapport au centre de gravité de la section devient donc (N, M'), avec :

$$M' = M + N \left(d - \frac{h}{2} \right)$$

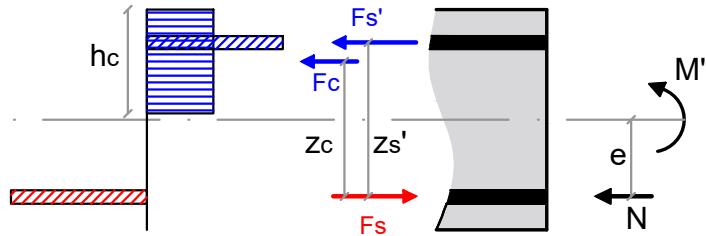


Pour chaque couple sur-sollicitant, nous calculons :

$$(5\ 175 \text{ kN} ; 7\ 200 \text{ kNm})$$

$$(4\ 575 \text{ kN} ; 7\ 200 \text{ kNm})$$

$$\begin{aligned} M' &= 7200 \text{ kNm} + 5175 \text{ kN} \times (0,72 \text{ m} - 0,4 \text{ m}) & M' &= 7200 \text{ kNm} + 4575 \text{ kN} \times 0,32 \text{ m} \\ &= 8856 \text{ kNm} & &= 8664 \text{ kNm} \end{aligned}$$



Grâce cette astuce mathématique, il est maintenant possible d'utiliser la méthode "Stress-Block" pour déterminer la hauteur de béton comprimé ainsi que les efforts dans les armatures en parties supérieures et inférieures. L'effort réel dans l'armature tendue vaudra en réalité: $F_s - N$.

Connaissant la quantité d'armature en partie supérieure, on peut déterminer le moment résistant M_{Rd} généré par cette armature de compression en supposant qu'elle soit plastifiée (hypothèse à vérifier à la fin).

$$M_{Rd} = A'_s \times f_{yd} \times z'_s = 4198 \text{ kNm}$$

$$M_{Rd} = A'_s \times f_{yd} \times z'_s = 4198 \text{ kNm}$$

$$M_{r\text{esiduel}} = M' - M_{Rd} = 4658 \text{ kNm}$$

$$M_{r\text{esiduel}} = M' - M_{Rd} = 4466 \text{ kNm}$$

Le moment résiduel est déterminé vu que le moment repris par l'armature de compression est inférieur au moment M' . Ce moment résiduel doit alors être repris par le béton en compression. Pour cela, on utilise la méthode "Stress-Block" :

On pose $z_0 = 0,9 \times d = 0,9 \times 0,72 \text{ m} = 0,648 \text{ m}$

$$F_c = \frac{M_{résiduel}}{z_{c,0}} = \frac{4658 \text{ kNm}}{0,648 \text{ m}} = 7188,3 \text{ kN} \quad F_c = \frac{M_{résiduel}}{z_{c,0}} = \frac{4466 \text{ kNm}}{0,648 \text{ m}} = 6892 \text{ kN}$$

$$h_c = \frac{F_c}{f_{cd}^* \times b} = \frac{7188,3 \text{ kN}}{22,6 \text{ MPa} \times 0,8 \text{ m}} = 0,40 \text{ m} \quad h_c = \frac{F_c}{f_{cd}^* \times b} = \frac{6892 \text{ kN}}{22,6 \text{ MPa} \times 0,8 \text{ m}} = 0,38 \text{ m}$$

On recalcule $z_{c,1}$ et on effectue une seconde itération :

$$z_{c,1} = d - \frac{h_c}{2} = 0,72 \text{ m} - \frac{0,40 \text{ m}}{2} = 0,52 \text{ m} \quad z_{c,1} = d - \frac{h_c}{2} = 0,72 \text{ m} - \frac{0,38 \text{ m}}{2} = 0,53 \text{ m}$$

$$F_c = \frac{M_{résiduel}}{z_1} = \frac{4658 \text{ kNm}}{0,52 \text{ m}} = 8926,9 \text{ kN} \quad F_{c,2} = \frac{M_{résiduel}}{z_1} = \frac{4466 \text{ kNm}}{0,53 \text{ m}} = 8427 \text{ kN}$$

$$h_{c,2} = \frac{F_{c,2}}{f_{cd}^* \times b} = \frac{8926,9 \text{ kN}}{22 \text{ MPa} \times 0,8 \text{ m}} = 0,493 \text{ m} \quad h_{c,2} = \frac{F_{c,2}}{f_{cd}^* \times b} = \frac{8427 \text{ kN}}{22 \text{ MPa} \times 0,8 \text{ m}} = 0,465 \text{ m}$$

Après plusieurs itérations (8), voici les résultats :

$$z_{c,8} = 0,408 \text{ m}$$

$$z_{c,8} = 0,443 \text{ m}$$

$$F_c = 11409 \text{ kN}$$

$$F_c = 10087 \text{ kN}$$

$$h_c = 0,629 \text{ m}$$

$$h_c = 0,556 \text{ m}$$

$$x = 0,786 \text{ m}$$

$$x = 0,695 \text{ m}$$

Sur base de la position de l'axe neutre, il est possible de déterminer la déformation de l'armature en traction :

$$|\varepsilon_s| = \varepsilon_c \times \frac{d-x}{x} = -0,029 \%$$

$$|\varepsilon_s| = \varepsilon_c \times \frac{d-x}{x} = 0,0125 \% << 0,217 \%$$

Armature comprimée = section sous-dimensionnée!

Pour le cas $M'=4466 \text{ kNm}$, l'armature est en phase élastique et sa contrainte résistante doit être calculée sur base de la loi de Hooke :

$$\sigma_s = \varepsilon_s \times E_s = 0,000125 \times 200 \text{ GPa} = 25 \text{ MPa}$$

L'effort maximal que l'acier peut reprendre en traction vaut :

$$F_{s,Rd} = A_s \times \sigma_s = 377 \text{ kN}$$

C'est force résistante est largement inférieure à la force appliquée en traction au niveau de l'armature tendue pour équilibrer les forces de compression :

$$F_{s,Rd} = 377 \text{ kN} << F_c + F'_{s,c} - N_{Ed} = 12071 \text{ kN}$$

4.6 Calculez au moyen des diagrammes d'interactions réduits la quantité d'armature nécessaire pour reprendre les efforts donnés.

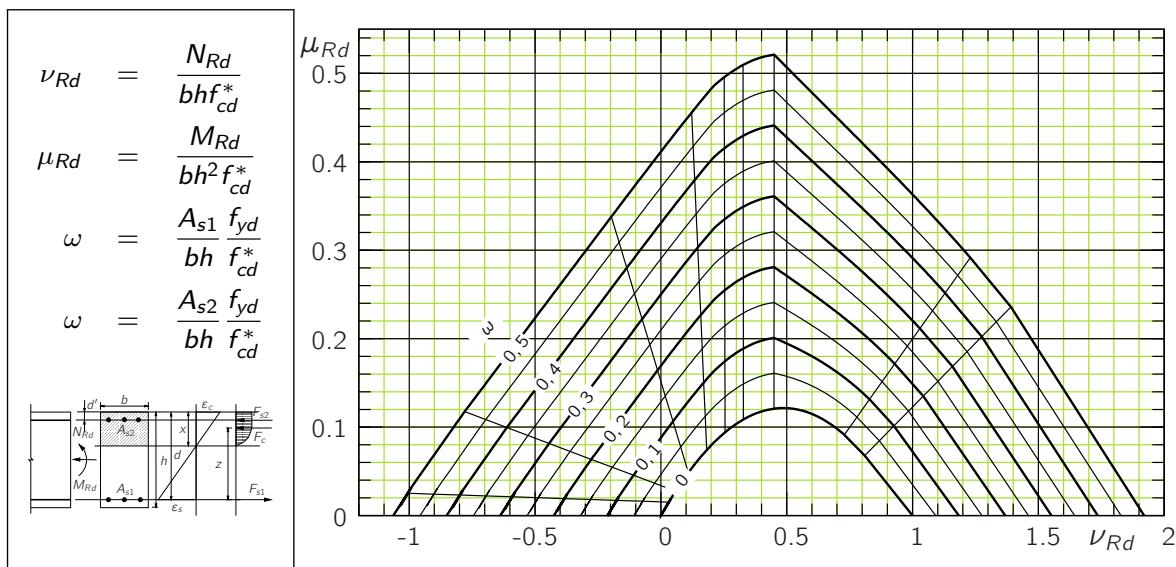
Le diagramme d'interaction réduit permet de calculer facilement une section soumise à la flexion composée, qu'elle soit simplement ou doublement armée. Il convient juste de choisir le diagramme d'interaction réduit adapté (C : 366-369/664).

Pour utiliser le diagramme, il faut reporter les valeurs du moment réduit et de l'effort normal réduit sur le graphique. Cela permet de trouver la valeur de la quantité d'armature réduite qui permet de calculer la quantité d'armature à placer dans la section.

$$\mu_{Rd} = \frac{M_{Rd}}{b h^2 f_{cd}^*} = \frac{7200}{0,8 \times 0,8^2 \times 22\,666} = 0,62$$

$$\nu_{Rd} = \frac{N_{Rd}}{b h f_{cd}^*} = \frac{5175 \text{ (ou } 4575)}{0,8 \times 0,8 \times 22666} = 0,357 \text{ (ou } 0,315)$$

Les points $(0, 357 ; 0, 62)$ et $(0, 315 ; 0, 62)$ se trouvent en dehors du diagramme ci-dessous (F : 236/481). Cela signifie simplement que les dimensions de la section ne sont pas suffisantes et que même avec le pourcentage d'armature maximal dans la section, celle-ci n'est pas suffisante pour reprendre les efforts donnés.



Il faudra donc calculer les nouvelles dimensions pour la section. Nous allons calculer une nouvelle hauteur h pour la section et garder la largeur de 0,8 m.

Calcul de la hauteur minimale de la section

Pour l'effort normal réduit $\nu_{Rd} = 0,357$ (ou 0,315, le moment réduit maximal (correspondant à une quantité d'armature réduite $\omega = 0,5$) vaut $\mu_{Rd} = 0,51$.

Sachant que :

$$\mu_{Rd} = \frac{M_{Rd}}{b \times h^2 \times f_{cd}^*}$$

On peut recalculer :

$$h = \sqrt{\frac{M_{Rd}}{b \times \mu_{Rd} \times f_{cd}^*}} = \sqrt{\frac{7200 \text{ kNm}}{0,8 \text{ m} \times 0,51 \times 22,66 \text{ MPa}}} = 0,88 \text{ m}$$

Comme h a changé, on recalcule l'effort normal réduit pour vérifier que l'on est toujours dans le diagramme.

$$\nu_{Rd} = \frac{N_{Rd}}{b \times h \times f_{cd}^*} = \frac{5175 \text{ kNm} (\text{ou } 4575 \text{ kNm})}{0,8 \text{ m} \times 0,88 \text{ m} \times 22,666 \text{ MPa}} = 0,324 (\text{ou } 0,287)$$

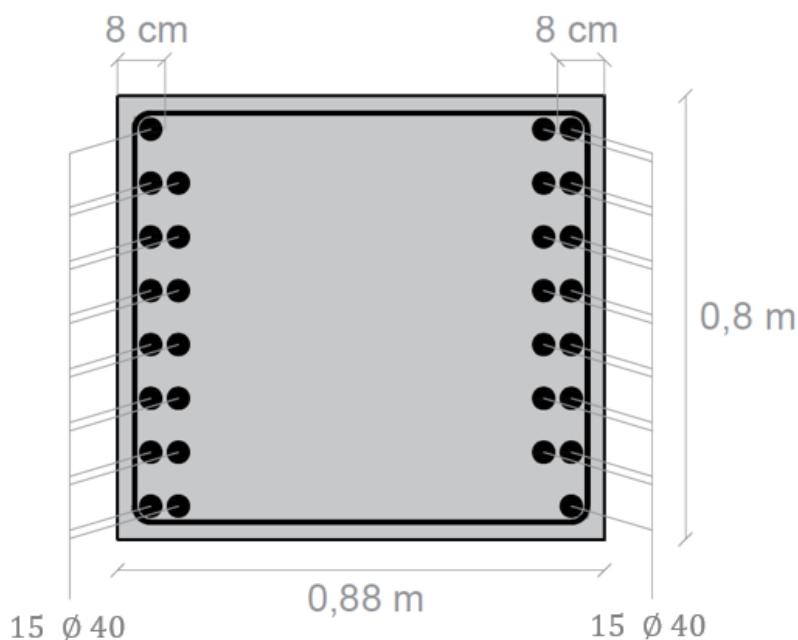
Calcul de la quantité d'armature de la section

On peut donc calculer la quantité d'armature :

$$A_s = A'_s = \frac{\omega \times b \times h \times f_{cd}^*}{f_{yd}} = \frac{0,5 \times 0,8 \text{ m} \times 0,88 \text{ m} \times 22,666 \text{ MPa}}{435000 \text{ MPa}} = 183,4 \text{ cm}^2$$

Cela correspond à une armature de 15 Ø 40

Nous avons donc la section suivante pour la colonne du pont :



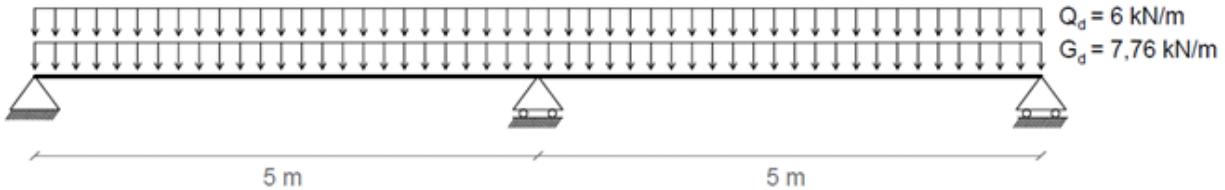
Il aurait pu être plus judicieux (et probablement plus économique) de prévoir une section de béton plus importante, par exemple 0,8 x 1m et diminuer ainsi la quantité d'armatures.

$$\mu_{Rd} = 0,397 ; \nu_{Rd} = 0,285 ; \omega = 0,36 ; A_s = 150,01 \text{ cm}^2 \Rightarrow 12 \varnothing 40$$

5 Effort tranchant

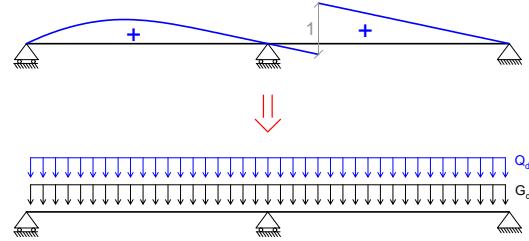
5.1 Déterminez les sollicitations maximales à l'effort tranchant dans la dalle (plancher de l'étage) à l'ELU.

L'ensemble des calculs sont effectués par mètre courant de dalle. Les charges sur la dalle sont les suivantes et ont été déterminées dans l'exercice 2. Elles sont pondérées à l'ELU car le calcul de l'effort tranchant se fait à la rupture :



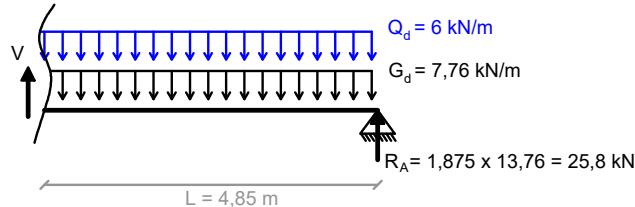
L'effort tranchant sera maximal au nu d'un appui. Sur une poutre appuyée sur trois appuis, la réaction d'appui centrale est plus que deux fois plus grande que les réactions de rive. C'est pourquoi on s'intéressera uniquement à la zone proche de l'appui.

Un bref examen de la ligne d'influence de l'effort tranchant au niveau de l'appui central nous donne les zones où il faut appliquer les charges variables pour maximiser l'effort tranchant en cet endroit. On appliquera donc la charge variable Q_d sur l'ensemble de la structure pour calculer l'effort tranchant maximal sur l'appui central.



Pour la charge permanente, il convient de toujours la considérer (de par sa nature permanente) comme appliquée sur l'ensemble de la structure, même si elle peut parfois avoir un effet "favorable" sur l'effort interne calculé.

On trouve la valeur de l'effort tranchant V_{max} en pratiquant une coupure et en équilibrant les forces verticales. La section critique se situe au nu de l'appui central à 30/2 cm de l'axe de l'appui :



La réaction d'appui R_A est calculée au moyen du diagramme pour une charge unitaire donné dans l'énoncé. L'effort tranchant maximal sur appui central vaut donc :

$$\sum F_v = 0 \rightarrow V_{max} = -R_A + (G_d + Q_d) \quad (L = 0, 15)$$

$$V_{max} = -25,8 \text{ kN} + 13,76 \text{ kNm} \times 4,85 \text{ m} = 40,94 \text{ kN}$$

5.2 Déterminez les armatures d'effort tranchant nécessaires dans la dalle.

1) Calcul de l'effort tranchant résistant sans armatures $V_{Rd,c}$:

Calculons la valeur de l'effort tranchant résistant sans armatures $V_{Rd,c}$ pour déterminer la nécessité de placer des étriers dans la dalle :

$$V_{Rd,c} = \left[MAX \left[C_{Rd,c} \times k \times (100 \times \rho_l \times f_{ck})^{1/3} ; v_{min} \right] + 0,15 \times \sigma_{cp} \right] \times b_w \times d \quad (\text{C: 418/664})$$

Avec : $b_w = 1 \text{ m}$; $f_{ck} = 25 \text{ MPa}$; $\gamma_c = 1,5$; $d = h - 0,04 \text{ m} = 0,15 \text{ m}$; $\sigma_{cp} = 0$; $A_{sl} = \emptyset 12/15 \text{ cm} = 7,54 \text{ cm}^2$

$$C_{Rd,c} = \frac{0,18}{\gamma_c} = 0,12 \quad (\text{C : 418/664})$$

$$k = min[1 + \sqrt{200 / d \text{ (en mm)}} ; 2] = min[2, 12 ; 2] = 2 \quad (\text{C : 419/664})$$

$$\rho_l = min \left[\frac{A_{sl}}{b_w \times d} ; 0,02 \right] = min [0,00471 ; 0,02] = 0,00471 \quad (\text{C : 420/664})$$

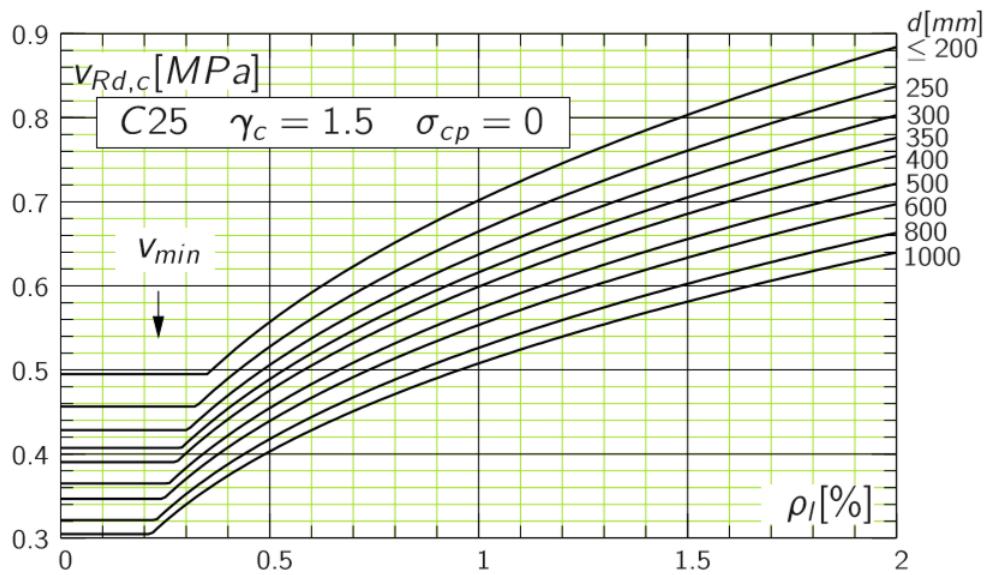
$$v_{min} = 0,035 \times k^{3/2} \times f_{ck}^{1/2} \quad (\text{C : 418/664})$$

$$V_{Rd,c} = \left[0,12 \times 2 \times (100 \times 0,00471 \times 25 \text{ MPa})^{1/3} + 0,15 \times 0 \right] \times 1000 \text{ mm} \times 160 \text{ mm} = 87,36 \text{ kN}$$

L'annexe belge de l'Eurocode 2 nous permet d'augmenter l'effort tranchant résistant d'un facteur 1,25. On vérifie le critère d'effort tranchant résistant pour les dalles $V_{Sd} \leq 1,25 \times V_{Rd,c}$:

$$40,94 \text{ kN} \leq 1,25 \times 87,36 \text{ kN} \rightarrow \text{Pas besoin d'étriers dans la dalle}$$

Cette conclusion peut aussi être faite, à partir de la contrainte de cisaillement, en utilisant le diagramme suivant (C : 421-422/664) :



$$v_{Rd,c} = 0,56 \text{ MPa}$$

$$V_{Rd,c} = v_{Rd,c} \times b_w \times d = 0,56 \text{ MPa} \times 1 \text{ m} \times 0,16 \text{ m} = 89,6 \text{ kN}$$

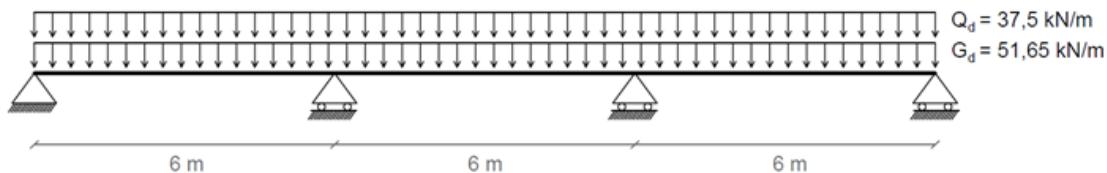
Comme $V_{Sd} \leq 1,25 \times V_{Rd,c}$, Il ne faut pas prévoir d'étrier dans la dalle.

Dans le cas contraire, il faudrait théoriquement ajouter des étriers. Malheureusement, ajouter des étriers dans une dalle est très compliqué vu sa largeur. On préféra jouer sur d'autres paramètres qui augmente l'effort tranchant résistant pour éviter de devoir en mettre. On peut donc (C : 410/664) :

- Augmenter l'épaisseur de la dalle ($d \nearrow$)
- Augmenter la quantité d'armature tendue longitudinale ($A_{sl} \nearrow$)
- Augmenter de classe de résistance du béton ($f_{ck} \nearrow$)
- Précontraindre la dalle ($\sigma_{cp} \nearrow$)

5.3 Déterminez les sollicitations maximales à l'effort tranchant dans la poutre centrale à l'ELU.

Les charges sur la poutre centrale sont les suivantes et ont été déterminées à l'exercice 2 :

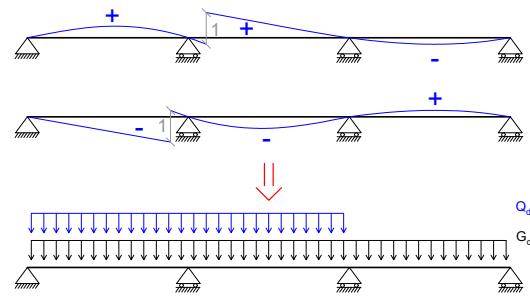


La charge permanente de 51,65 kN/m tient compte de poids propre de la dalle, de la poutre et de la surcharge de 1 kN/m.

On effectue le calcul pour un des deux appuis centraux. Cette fois-ci, en raison de la position non symétrique de l'appui, sur la poutre, il est difficile de déterminer de quel côté de l'appui l'effort tranchant est le plus critique. Il faut donc analyser les deux situations.

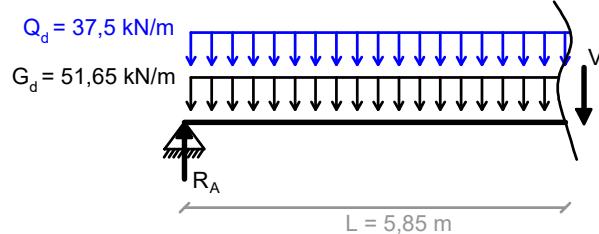
Par contre, comme indiqué sur les lignes d'influences ci-contre, il faut appliquer les charges variables uniquement sur les deux premières travées pour maximiser l'effort tranchant, côté intérieur comme extérieur de l'appui intermédiaire de gauche.

Il est nécessaire de calculer la valeur de l'effort tranchant de chaque côté de l'appui afin de déterminer l'effort dimensionnant.



- **Du côté extérieur de l'appui (travée de rive) :**

On trouve la valeur de l'effort tranchant V_{max} en pratiquant une coupure et en équilibrant les forces verticales :



La réaction d'appui est calculée au moyen du diagramme pour une charge unitaire donné dans l'énoncé.

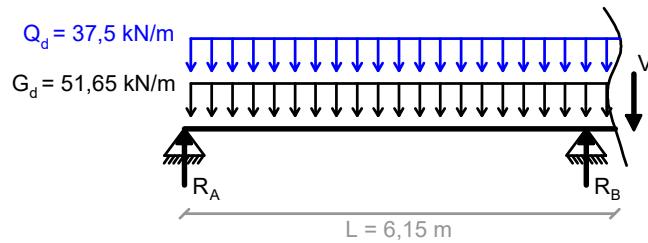
$$R_A = G_d \times 2,4 + Q_d \times 2,6 - G_d \times 0,3 = 210,21 \text{ kN}$$

L'effort tranchant maximal du côté extérieur de l'un des appuis centraux vaut donc :

$$\sum F_v = 0 \rightarrow V_{max} = R_A - (G_d + Q_d) \times (L - 0,15)$$

$$V_{ext} = 210,21 \text{ kN} - 89,15 \text{ kN/m} \times (6 \text{ m} - 0,15 \text{ m}) = -311,3 \text{ kN}$$

- Du côté intérieur de l'appui (travée centrale) :



$$R_B = G_d \times 6,6 + Q_d \times 7,2 = 610,89 \text{ kN}$$

L'effort tranchant maximal du côté intérieur de l'un des appuis centraux vaut donc :

$$V_{int} = R_A + R_B - (G_d + Q_d) \times (L + 0,15) = 272,8 \text{ kN}$$

La section critique se trouve donc à l'extérieur de l'appui intermédiaire.

5.4 Déterminez les armatures d'effort tranchant nécessaires dans la poutre.

- 1) Calcul de l'effort tranchant résistant sans armatures $V_{Rd,c}$:

$$V_{Rd,c} = \left[MAX \left[C_{Rd,c} \times k \times (100 \times \rho_l \times f_{ck})^{1/3} ; v_{min} \right] + 0,15 \times \sigma_{cp} \right] \times b_w \times d \quad (\text{C: 418/664})$$

Avec : $b_w = 0,3 \text{ m}$; $f_{ck} = 25 \text{ MPa}$; $\gamma_c = 1,5$; $d = 0,46 \text{ m}$; $A_{sl} = 5 \emptyset 25 = 24,54 \text{ cm}^2$; $\sigma_{cp} = 0$

$$C_{Rd,c} = \frac{0,18}{\gamma_c} = 0,12 \quad (\text{C : 418/664})$$

$$k = min[1 + \sqrt{200 / d} \text{ (en mm)} ; 2] = min[1,66 ; 2] = 1,66 \quad (\text{C : 419/664})$$

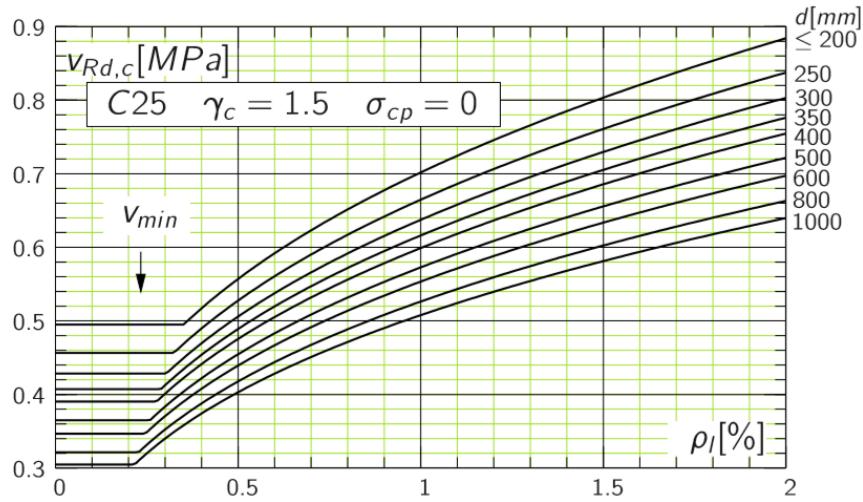
$$\rho_l = min \left[\frac{A_{sl}}{b_w \times d} ; 0,02 \right] = min [0,0178 ; 0,02] = 0,0178 \quad (\text{C : 420/664})$$

$$v_{min} = 0,035 \times k^{3/2} \times f_{ck}^{1/2} \quad (\text{C : 418/664})$$

$$V_{Rd,c} = \left[0,12 \times 1,66 \times (100 \times 0,0178 \times 25 \text{ MPa})^{1/3} + 0,15 \times 0 \right] \times 300 \text{ mm} \times 460 \text{ mm} = 97,35 \text{ kN}$$

Comme $V_{Sd} = 311,3 \text{ kN} > V_{Rd,c} = 97,35 \text{ kN}$, il faudra prévoir des armatures d'effort tranchant dans la poutre centrale.

Cette conclusion peut aussi être faite, à partir de la contrainte de cisaillement, en utilisant le diagramme suivant (C : 422/664):



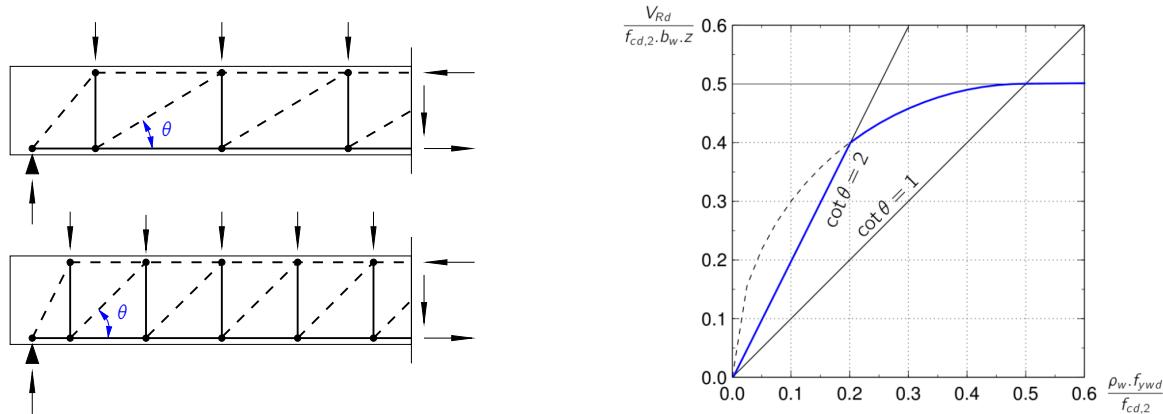
$$v_{Rd,c} = 0,7 \text{ MPa}$$

$$V_{Rd,c} = v_{Rd,c} \times b_w \times d = 96,6 \text{ kN}$$

Comme $V_{Sd} = 311,3 \text{ kN} > V_{Rd,c} = 96,6 \text{ kN}$, il faudra prévoir des armatures d'effort transversal dans la poutre centrale.

2) Détermination de l'inclinaison des bielles :

En se basant sur le théorème statique de la plasticité on peut évaluer la résistance de l'élément au moyen d'un modèle plastique formé de bielles (béton comprimé) et de tirants (armatures en acier), dans notre cas un treillis (C : 424-425/664).



Dans un premier temps, le dimensionnement consiste à choisir un angle θ d'inclinaison des bielles tel que $V_{Sd} \leq V_{Rd, max}$. La valeur de θ va influencer la quantité d'armature transversale nécessaire et est déterminée par la procédure suivante (C : 436/664) :

- On calcule $V_{Rd, \max}$ avec $\cot \theta = 2$ pour obtenir une quantité minimale d'armatures et on vérifie :

$$V_{Sd} \leq V_{Rd, \max} = v \times f_{cd} \times \frac{\cot \theta + \cot \alpha}{1 + \cot^2 \theta} \times b_w \times z \times \alpha_{cw}$$

Avec : $v = 0,6 \times \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right)$; $\cot \theta = 2$; $\cot \alpha = 0$ (étriers droits); $z \approx 0,9 \times d$; $\alpha_{cw} = 1$

Si cette condition est remplie, on peut conserver cet angle et poursuivre le dimensionnement.

- Si $V_{Sd} > V_{Rd, \max} (\cot \theta = 2)$, il faut trouver un $\cot \theta$ tel que $V_{Rd, \max} = v_{Sd}$ au moyen de :

$$1 \leq \cot \theta = \xi + \sqrt{\xi^2 - 1} < 2 \quad \text{avec} \quad \xi = \frac{z \times b_w \times f_{cd} \times v}{2 \times V_{sd}}$$

- $V_{sd} \geq V_{Rd, \max} (\cot \theta = 1)$, il faut modifier la section de béton ou utiliser des étriers inclinés ($\alpha \neq 90^\circ$).

Appliquons la procédure à la poutre centrale, en sa section critique :

$$V_{Rd, \max} (\cot \theta = 2) = 0,4 \times b_w \times z \times f_{cd, 2}$$

Avec : $f_{cd, 2} = v \times f_{cd} = 9 \text{ MPa}$, $v = 0,6 \times \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right)$ et $z \approx 0,9 \times d = 414 \text{ mm}$

Ce qui nous donne :

$$V_{Rd, \max} = 447,1 \text{ kN} \leq V_{Sd} \rightarrow \cot \theta = 2 \text{ OK}$$

3) Calcul des armatures d'effort tranchant (étriers) :

Comme $V_{Sd} = 311,3 \text{ kN} < V_{Rd, \max} = 447,12 \text{ kN}$, les bielles résistent avec une inclinaison correspondant à $\cot \theta = 2$. On peut donc calculer les armatures nécessaires avec cette inclinaison θ (C : 441/664).

$$\frac{A_s}{s} = \frac{V_{Ed}}{z \times f_{ywd} \times \cot \theta} = \frac{313,3 \text{ kN}}{0,414 \text{ m} \times 435 \text{ MPa} \times 2} = 8,7 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Un étrier Ø8 a une section d'environ $2 \times 0,5 \text{ cm}^2$. Il faut donc placer un étrier Ø8 tous les 11 cm (arrondi à l'unité inférieure).

4) Calcul de l'armature minimale d'effort tranchant

Dans les cas des poutres, même dans les sections où $V_{Sd} \leq V_{Rd, c}$, il faut convient de prévoir un nombre minimum d'étriers pour éviter une rupture fragile :

$$\frac{A_{sw, \min}}{s} = \frac{0,08 \times \sqrt{f_{ck}}}{f_{yk}} \times b_w \times \sin(\alpha) = 2,4 \text{ cm}^2/\text{m} \quad (\text{C : 442/664})$$

Sachant qu'un étrier à cadre unique Ø8 présente donc une section A_{sw} d'environ 1 cm^2 , l'espacement maximum entre deux étriers est donc de :

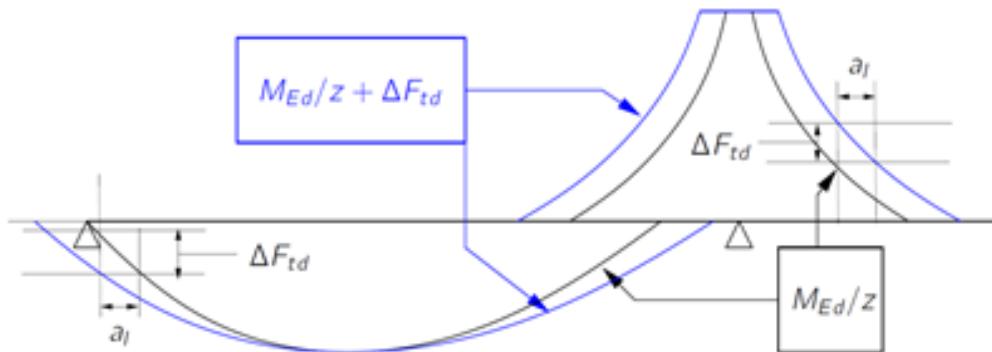
$$\frac{1 \text{ m}}{2,4} = 41 \text{ cm}$$

5) Calcul des efforts dans les armatures longitudinales :

Le modèle de bielles (béton) et tirants (étriers et armatures longitudinales) introduit de la traction supplémentaire dans les armatures longitudinales ΔF_{td} . Une méthode simple et rapide permet de prendre en compte directement cet apport de traction additionnel à celui causé par le moment.

On introduit la force dans les armatures supérieures à l'appui intermédiaire :

$$\Delta F_{td} = V_{Ed} \times \frac{\cot \theta - \cot \alpha}{2} = 311,3 \text{ kN} \quad (\text{C : 444-445/664})$$



En pratique, ceci peut être pris en compte en décalant la courbe enveloppe des moments d'une distance a_l (règle de décalage) :

$$a_l = z \times \frac{\cot \theta - \cot \alpha}{2} = 0,9 \times \frac{d^2}{2} = 0,9 \times 460 \text{ mm} = 414 \text{ mm} \quad (\text{C : 446/664})$$

L'armature correspondante doit être ancrée au-delà du nu des appuis centraux d'une distance :

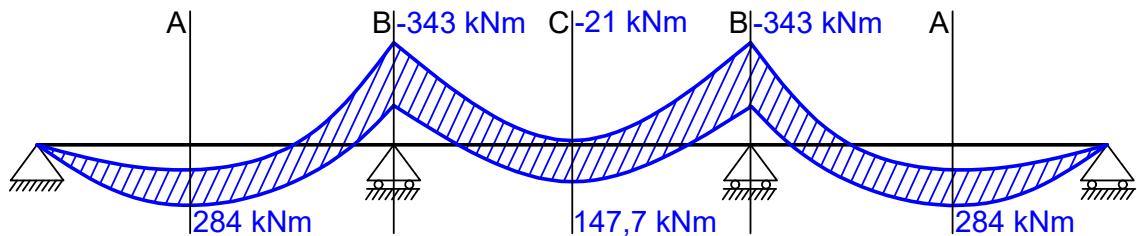
$$a_l + l_b = z \times \frac{\cot \theta}{2} + 40 \times \emptyset_l = 414 \text{ mm} + 40 \times \emptyset_l$$

Avec la longueur d'ancrage standard de l'armature l_b .

En effet, quand l'enveloppe des moments tendant la fibre supérieure devient nulle en travée, il ne faudrait théoriquement ancrer les armatures longitudinales d'une longueur l_b . En réalité, à cause du décalage, certaine quantité d'armature longitudinale A_s doit être ancrée davantage ($a_l + l_b$) pour reprendre l'effort ΔF_{td} :

$$A_s = \frac{\Delta F_{td}}{f_{yd}} = \frac{311,3 \text{ kN}}{435 \text{ N/mm}^2} = 7,16 \text{ cm}^2$$

5.5 Dessinez le schéma complet du ferrailage de la poutre.



SECTION A

Armature supérieure : armatures technologiques

Armature inférieure : $13,6 \text{ cm}^2 \rightarrow 9 \varnothing 14 \text{ ou } 7 \varnothing 16 \text{ ou } 5 \varnothing 20$

SECTION B

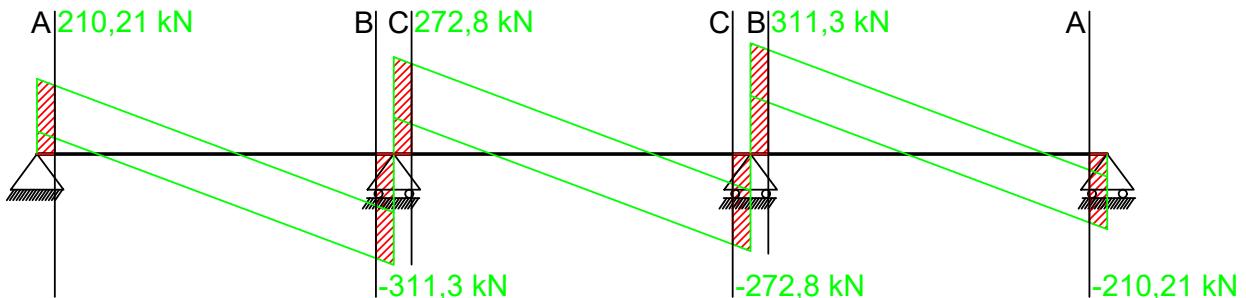
Armature supérieure : $19,91 \text{ cm}^2 \rightarrow 13 \varnothing 14 \text{ ou } 10 \varnothing 16 \text{ ou } 7 \varnothing 20 \text{ ou } 5\varnothing 25$

Armature inférieure : $3,6 \text{ cm}^2 \rightarrow 3 \varnothing 14 \text{ ou } 2 \varnothing 16$

SECTION C

Armature supérieure : $1,02 \text{ cm}^2 \rightarrow 2 \varnothing 10 \text{ ou } 2 \varnothing 14$

Armature inférieure : $7,03 \text{ cm}^2 \rightarrow 5 \varnothing 14 \text{ ou } 4 \varnothing 16 \text{ ou } 3 \varnothing 20$



SECTION A

Étriers : $5,88 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow \varnothing 8 / 17 \text{ cm}$

SECTION B

Étriers : $8,64 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow \varnothing 8 / 11 \text{ cm}$

SECTION C

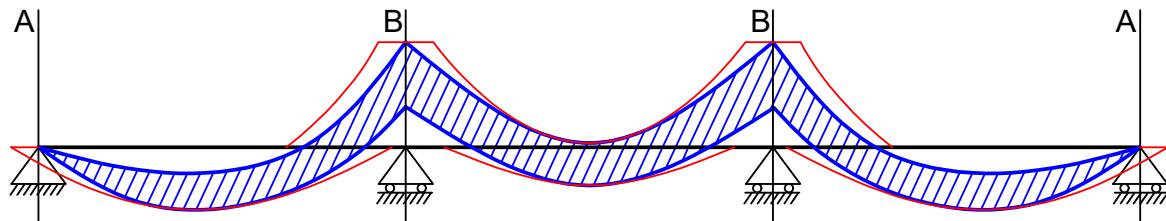
Étriers : $7,57 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow \varnothing 8 / 13 \text{ cm}$

Autres paramètres de dimensionnement

- Quantité minimale d'étriers :

$$\frac{A_{sw, \min}}{s} = 2,4 \text{ cm}^2/\text{m} \rightarrow \emptyset 8/41 \text{ cm}$$

- Décalage de la courbe enveloppe des moments d'une distance a_l lié l'effort de traction additionnel dans la barre d'armature longitudinale:



SECTION A

$$\Delta F_{td} = 211,8 \text{ kN} \rightarrow 4,87 \text{ cm}^2 \rightarrow 4 \emptyset 14 \text{ ou } 3 \emptyset 16 \text{ ou } 2 \emptyset 20$$

SECTION B

$$\Delta F_{td} = 311,3 \text{ kN} \rightarrow 7,16 \text{ cm}^2 \rightarrow 5 \emptyset 14 \text{ ou } 4 \emptyset 16 \text{ ou } 3 \emptyset 20$$

Disposition techniques

- Espace minimum des armatures longitudinales :

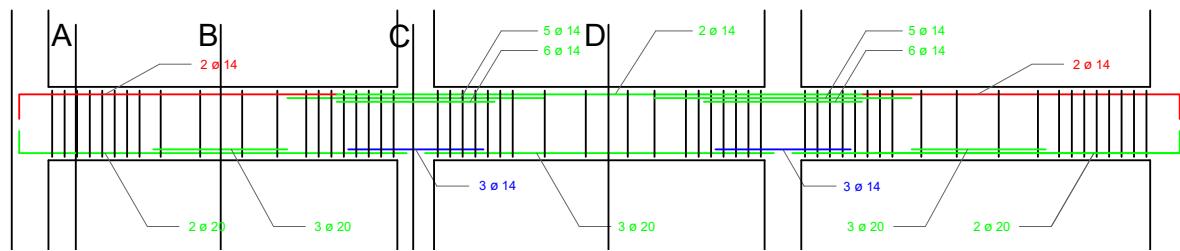
$$e = \max(\emptyset_s, \emptyset_{granulat} + 5 \text{ mm}, 20 \text{ mm})$$

- Sur les appuis intermédiaires, il faut répartir la section totale $A_{s,sup}$ des armatures tendues sur la largeur efficace b_{eff} (ici $b_{eff, appui} = 1,02 \text{ m}$).
- Choix du diamètre des armatures: il convient d'éviter d'utiliser trop de diamètres différents et des valeurs trop proches entre elles pour risquer une confusion sur chantier.
- Longueur d'ancre pour les armatures longitudinales $\approx 40 \times \emptyset_l$.
- Espace longitudinal maximal entre armatures d'effort tranchant :

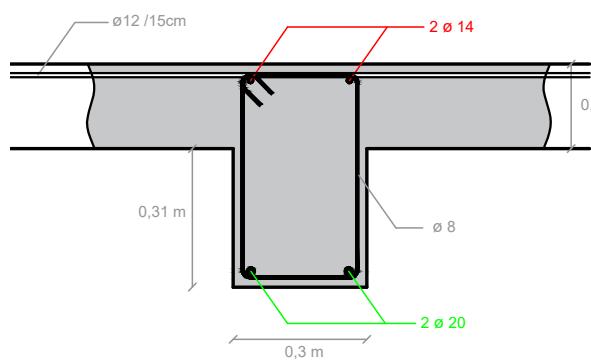
$$s_{e, \max} = 0,75 \times d \times (1 + \cot \alpha)$$

- Ajouter des armatures technologiques pour fixer les étriers.

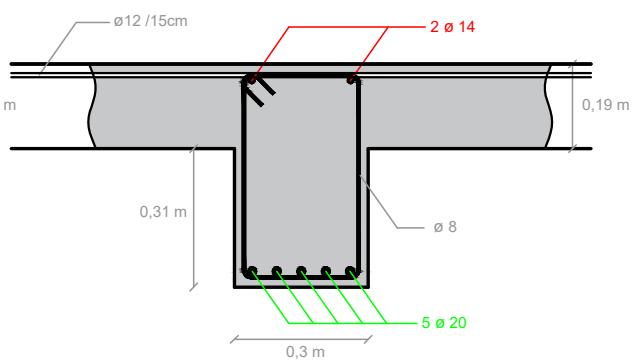
Ferraillage de la poutre



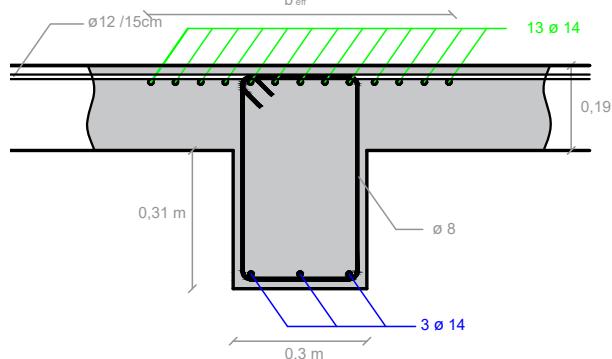
Coupe A



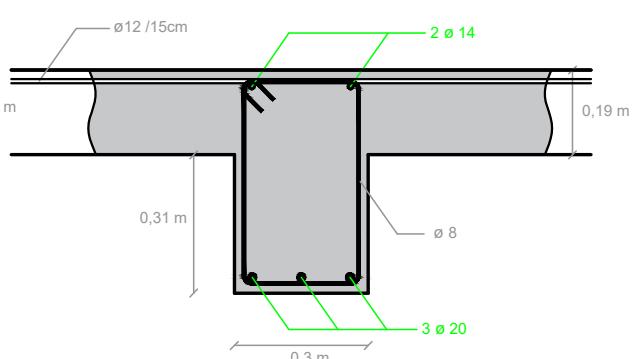
Coupe B



Coupe C



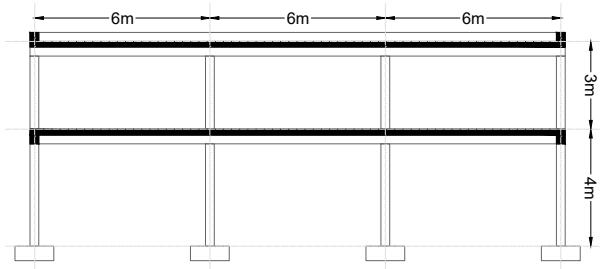
Coupe D



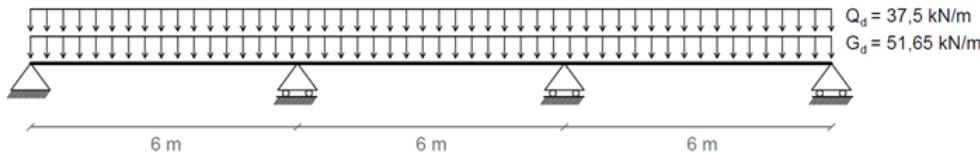
6 Flambement

6.1 Calculez les sollicitations maximales sur la colonne centrale à l'ELU.

Dans le cadre de cet exercice, nous nous intéressons uniquement aux colonnes supportant la poutre centrale car elles seront les plus sollicitées, en comparaison à celles de rive.



Les charges sur la poutre centrale sont les suivantes et déterminées lors de l'exercice 2 :



Note : le charge permanente de 51,65 kN/m tient compte du poids propre de la dalle, du poids propre de la poutre et de la surcharge de 1 kN/m^2 .

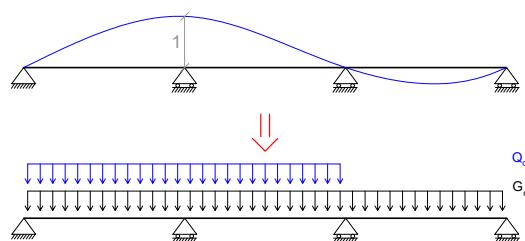
Un bref examen de la ligne d'influence de la réaction verticale de l'un des appuis centraux nous donne les zones où il faut appliquer les charges variables pour maximiser la réaction d'appui à cet endroit. On appliquera donc la charge variable Q_d comme indiqué sur le schéma ci-dessous :

On peut donc calculer l'effort normal maximal dans la colonne :

$$N_{max} = 6,6 \times G_d + 3,9 \times Q_d + 3,3 \times Q_d$$

$$N_{max} = 610,89 \text{ kN}$$

Si on étudie la colonne du rez-de-chaussée, il faut doubler cette charge pour déterminer la charge verticale sur cette colonne. Cette hypothèse suppose que les charges permanentes et variables sont identiques sur les étages du bâtiment.



6.2 Calculez les élancements de la colonne (en tenant compte ou pas du matériau). Que concluez-vous de ces résultats pour ce qui est de la méthode de calcul ?

L'élancement λ est la sensibilité au flambement d'un élément et elle dépend de sa longueur, de ses types d'appui et des dimensions de sa section transversale (aire et inertie). L'élancement géométrique est donné par la formule :

$$\lambda = \frac{L_0}{i_c} \quad (\text{C : } 527/664)$$

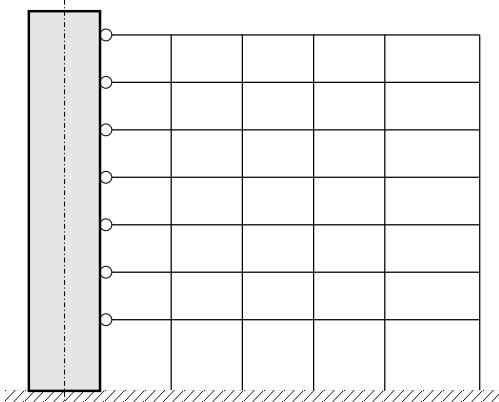
Avec : le rayon de giration $i_c = \sqrt{I_c/A_c}$ et la longueur de flambement L_0 .

On prend comme hypothèse que le bâtiment est contreventé et que les déplacements globaux horizontaux sont faibles. On peut considérer l'élément critique le plus sujet au flambement comme un élément isolé (le flambement d'ensemble est négligé).

Quelle partie de la colonne considérer ?

Dans ce cas, on étudiera la partie inférieure de la colonne car elle subit (deux fois) plus de charge et possède la longueur de flambement la plus importante. Pour rappel, on considère que les deux parties de la colonne sont supposées bi-articulées aux extrémités. L'élément étudié aura un L_0 valant donc 4 m (et de section $30 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$).

Nous avons donc :



$$\lambda = \frac{L_0}{i_c} = \frac{400 \text{ cm}}{\sqrt{\frac{67500 \text{ cm}^2}{900 \text{ cm}^2}}} = 46,19 \geq 30 \rightarrow \text{on ne peut pas négliger le flambement}$$

En effet, plus l'élancement est élevé, plus la sensibilité au flambement est importante :

$\lambda \leq 30$	colonne peu élancée ou trapue
$30 \leq \lambda \leq 70$	colonne modérément élancée
$70 \leq \lambda \leq 140 - 200$	colonne très élancée

En pratique cependant, seuls les éléments suffisamment élancés ET soumis à des efforts de compression élevés doivent être dimensionnés en tenant compte des effets du second ordre. En effet, le comportement des éléments comprimés en béton armé dépend à la fois de non-linéarités géométriques et de non-linéarités matérielles, le seul critère d'élancement

géométrique n'est pas suffisant pour estimer leur sensibilité aux effets du second ordre. Il est nécessaire de tenir compte de la valeur de l'effort normal pour tenir compte des non-linéarités matérielles.

On utilise donc le paramètre :

$$\lambda \times \sqrt{n} \quad \text{avec l'effort normal réduit } n = \frac{N_{Sd}}{A_c \times f_{cd}^*}$$

$$\lambda \times \sqrt{n} = 46,19 \sqrt{\frac{2 \times 610,89 \text{ kN}}{0,3^2 \text{ m}^2 \times 14,166 \text{ MPa}}} = 45,22$$

En effectuant des tests numériques on peut montrer que les effets du second ordre deviennent significatifs pour des valeurs de $\lambda \times \sqrt{n}$ supérieures à 20. Et la norme permet de négliger les effets du second ordre si :

$$\lambda \leq \lambda_{\lim} = \frac{20 \times A \times B \times C}{\sqrt{n}} \quad (\text{C : } 535/664)$$

Avec :

- $A = 1/(1,2 \times \varphi_{ef})$; si φ_{ef} n'est pas connu : $A = 0,7$.
 - φ_{ef} est le coefficient de fluage effectif.
- $B = \sqrt{1 + 2 \times \omega}$; si ω n'est pas connu : $B = 1,1$.
 - ω est le ratio mécanique d'armatures $= (A_s/A_c) \times (f_{yd}/f_{cd})$
- $C = 1,7 - r_m$; si r_m n'est pas connu : $C = 0,7$
 - $r_m = M_{01}/M_{02}$; rapport des moments d'extrémité tel que $|M_{01}| \leq |M_{02}|$
 - $r_m = 1$ ($C = 0,7$) si l'élément est non-contreventé ou si les moments de flexions sont dus de manière prépondérante à des charges transversales ou aux imperfections.

Nous avons donc :

$$\lambda_{\lim} = \frac{20 \times A \times B \times C}{\sqrt{n}} = \frac{20 \times 0,7 \times 1,1 \times 0,7}{0,9789}$$

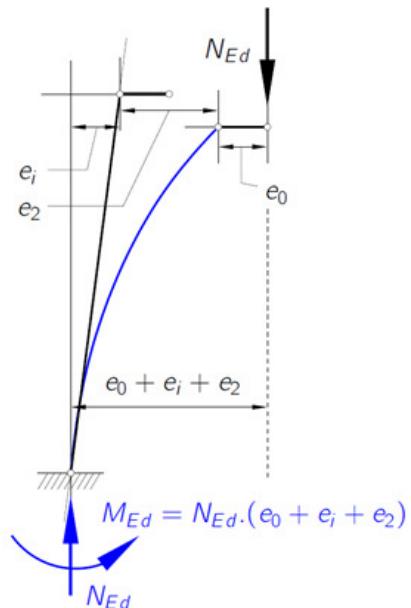
$$\lambda = 46,19 \gg \lambda_{\lim} = 11,012$$

On ne peut donc pas négliger les effets du second ordre !

6.3 Calculez les excentricités de calcul.

Effectuer le calcul d'une colonne au flambelement consiste à calculer les excentricités e_0 , e_i et e_2 pour ensuite dimensionner la colonne en flexion composée.

1. e_0 correspond à l'excentricité "réelle" de la charge verticale.
2. e_i correspond à l'excentricité due aux imperfections géométriques.
3. e_2 correspond à l'excentricité du second ordre.



1) L'excentricité "réelle" e_0 :

Dans ce cas-ci, $e_0 = 0$ car la charge est théoriquement placée au centre de la colonne.

2) L'excentricité due aux imperfections géométriques e_i :

$$e_i = \theta_i \times \frac{L_0}{2} \quad (\text{C : } 538/664)$$

Avec :

$$\frac{1}{200} \geq \theta_i = \frac{2}{\sqrt{L}} \times \frac{1}{200} \geq \frac{1}{300}$$

$$\theta_i = \frac{2}{\sqrt{4}} \times \frac{1}{200} = 0,005 = \frac{1}{200}$$

$$\rightarrow e_i = 0,005 \times \frac{4 \text{ m}}{2} = 0,01 \text{ m}$$

3) L'excentricité du second ordre e_2 :

$$e_2 = \frac{1}{r} \times \frac{L_0^2}{c} \quad (\text{C : } 555/664)$$

Avec :

- La courbure estimée : $\frac{1}{r} = K_r \times K_\varphi \times \frac{1}{r_0}$

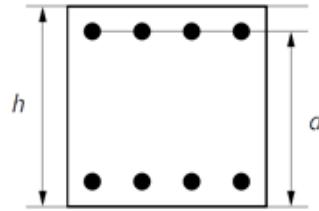
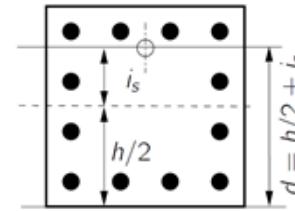
- Le coefficient dépendant de la distribution de la courbure : $c = \pi^2 \approx 10$
- La courbure correspondante à un effort normal pour M_{Rd} maximum : $\frac{1}{r_0} = \frac{2 \times \varepsilon_{yd}}{0,9 \times d}$

Si toutes les armatures ne sont pas concentrées sur toutes les faces de la section, on peut prendre :

$$d = \frac{h}{2} + i_s$$

N'ayant pas encore d'information sur la position des armatures, on commence avec $d = h - e$. On adaptera au besoin le calcul par après.

$$\frac{1}{r_0} = \frac{2 \times 2,17 \%}{0,9 \times (0,3 m - 0,04 m)} = 0,01855 1/m$$



- Le coefficient de correction de la courbure dépendant de l'effort normal et du pourcentage d'armatures longitudinales :

$$K_r \approx \frac{1 + \omega - n}{0,6 + \omega} \leq 1$$

Avec : $\omega = \frac{A_s \times f_{yd}}{A_c \times f_{cd}^*}$

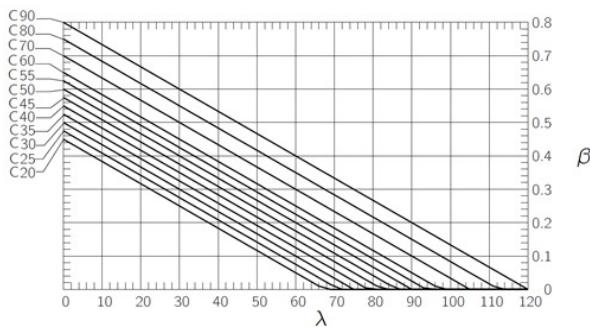
Comme nous ne connaissons pas A_s , prendre $K_r = 1$ est du côté de la sécurité.

- Le coefficient de correction de la courbure tenant compte du fluage :

$$K_\varphi = 1 + \beta \times \varphi_{ef}$$

Avec : $\beta = 0,35 + \frac{f_{ck}}{200} - \frac{\lambda}{150} = 0,167$

On peut aussi trouver β à l'aide du diagramme ci-contre.



Le coefficient de fluage effectif se calcule de la manière suivante :

$$\varphi_{ef} = \frac{M_{0,qp}}{M_{0,Ed}} \times \varphi(\infty, t_0)$$

$$M_{0,Ed} = N_{Ed} \times e_i = 2 \times 610,89 kN \times 0,01 m = 12,22 kNm$$

$$N_{qp} = 2 \times [6,6 \times G_k + (3,9 + 3,3) \times Q_k \times 0,4] = 648,5 \text{ kN}$$

$$M_{0, qp} = N_{qp} \times e_i = 6,49 \text{ kNm}$$

Le coefficient de fluage peut être trouvé grâce au tableau suivant, sachant que :

$$h_0 = 2 \times \frac{A_c}{u} = 2 \times \frac{300 \text{ mm} \times 300 \text{ mm}}{4 \times 300 \text{ mm}} = 150 \text{ mm}$$

On suppose un chargement à $t_0 = 7 \text{ jours}$.

Béton C25/30		Fluage à long terme $\varphi(\infty, t_0)$, (ciment de type 'N')					
âge t_0 du béton au moment du chargement en jours		rayon moyen $2 \cdot A_c/u$ en [mm]					
		50	150	600	50	150	600
		Atmosphère sèche (intérieur) $RH = 50\%$			Atmosphère humide (extérieur) $RH = 80\%$		
1		6.3	5.2	4.2	4.1	3.7	3.3
3		5.1	4.2	3.5	3.4	3.0	2.7
7		4.4	3.6	3.0	2.9	2.6	2.3
28		3.4	2.8	2.3	2.2	2.0	1.8
90		2.7	2.2	1.8	1.8	1.6	1.4
365		2.1	1.7	1.4	1.3	1.2	1.1

$$\varphi(\infty, t_0) = 3,6$$

$$\varphi_{ef} = \frac{M_{0, qp}}{M_{0, Ed}} \times \varphi(\infty, t_0) = \frac{6,49 \text{ kNm}}{12,22 \text{ kNm}} \times 3,6 = 1,915$$

$$K_\varphi = 1 + \beta \times \varphi_{ef} = 1 + 0,167 \times 1,915 = 1,32$$

On peut donc calculer e_2 , l'excentricité du second ordre :

$$e_2 = \frac{1}{r} = K_r \times K_\varphi \times \frac{1}{r_0} \times \frac{L_0^2}{c} = 1 \times 1,32 \times 0,01855 \text{ 1/m} \times \frac{4^2 \text{ m}^2}{10} = 0,04 \text{ m}$$

Nous avons donc une excentricité totale de (C : 543/664):

$$e_{tot} = e_0 + e_i + e_2 = 0 \text{ m} + 0,01 \text{ m} + 0,04 \text{ m} = 0,05 \text{ m}$$

$$M_{Ed} = N_{Ed} \times e_{tot} = 1221,78 \text{ kN} \times 0,05 \text{ m} = 61,1 \text{ kNm}$$

Pour que la colonne résiste au flambement, elle devra pouvoir reprendre le couple (N, M):

$$(1221,78 \text{ kN} ; 61,1 \text{ kNm})$$

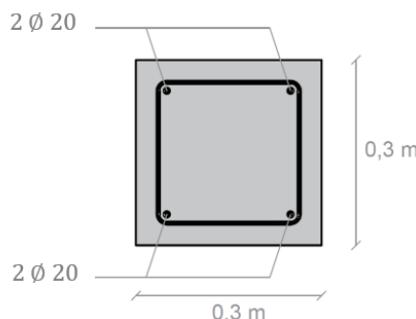
6.4 Dimensionnez et dessiner le ferraillage de la colonne.

Connaissant les efforts sur la colonne, il est possible de déterminer le ferraillage nécessaire en utilisant les diagrammes car la section est symétriquement armée ($F : 236/481$).

$$\mu_{Rd} = \frac{M}{b \times h^2 \times f_{cd}^*} = 0,16$$

$$\nu_{Rd} = \frac{N}{b \times h \times f_{cd}^*} = 0,958$$

Le diagramme nous donne : $\omega = 0,2$



Dispositions constructives pour les colonnes (NIT 260)

- Barres longitudinales :

- Minium = $A_s \geq 0,10 \times \frac{N_{Rd}}{f_{yd}} = 2,81 \text{ cm}^2$
- Maximum = $A_s \leq 4\% \times A_c = 36 \text{ cm}^2$

$\emptyset \geq \emptyset 12$ ($\emptyset 8$ pour les colonnes préfabriquées)

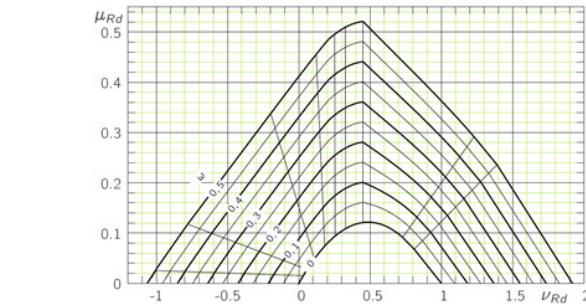
$A_s \geq 0,2\% \times A_c = 1,8 \text{ cm}^2$

- Armatures d'effort tranchant :

Théoriquement, il n'y a pas d'effort tranchant dans la colonne, en raison du moment constant sur la hauteur (flexion pure). Cependant, un minimum d'étriers est requis pour prendre en compte certains cas de charge horizontaux accidentelles. En plus, les étriers permettent de confiner le béton et de diminuer la longueur de flambement des barres d'armatures longitudinales dans la colonne.

Diamètre :

$\geq \emptyset 5$ pour des barres de treillis
$\geq \emptyset 6$ si $12 \leq \emptyset_l \leq 20$
$\geq \emptyset 8$ si $25 \leq \emptyset_l \leq 32$
$\geq \emptyset 10$ si $\emptyset_l = 40 \text{ mm}$
$\geq \emptyset 12$ si $\emptyset_l = 50 \text{ mm}$
$\geq \emptyset_{long}/4$



On peut déterminer le ferraillage correspondant :

$$A_s = A'_s = \omega \times b \times h \times \frac{f_{cd}^*}{f_{yd}} = 5,9 \text{ cm}^2$$

$$\rightarrow A_{s,tot} = 11,72 \text{ cm}^2$$

On placera donc une armature de $1 \emptyset 20$ dans chaque coin de la section.

7 ELS - États limites de service

7.1 Calculez les caractéristiques mécaniques de la section non fissurée ($y_{G,I}$ et I_I)

Le niveau du centre de gravité par rapport à la fibre supérieure de la section non-fissurée $y_{G,I}$ vaut (C : 346/664) :

$$y_{G,I} = \frac{b \times h^2 / 2 + \alpha_e \times A_s \times d + \alpha_e \times A'_s \times d'}{b \times h + \alpha_e \times A_s + \alpha_e \times A'_s}$$

Avec : $b = 0,30\text{ m}$, $h = 0,50\text{ m}$, $d = 0,44\text{ m}$, $d' = 0,05\text{ m}$ et le coefficient d'équivalence effectif $\alpha_e = E_s/E_{c,eff}$.

Pour un béton C40/50, E_{cm} vaut 35,2 GPa et on suppose que le coefficient de fluage effectif vaut 2. On a donc :

$$\begin{aligned} E_{c,eff} &= \frac{E_{cm}}{1 + \varphi_{eff}} = \frac{35,2\text{ GPa}}{1 + 2} = 11,7\text{ GPa} \\ \alpha_e &= \frac{E_s}{E_{c,eff}} = \frac{200\text{ GPa}}{11,7\text{ GPa}} = 17,03 \end{aligned}$$

En introduisant ces valeurs dans l'expression précédente, on trouve :

$$y_{G,I} = 0,275\text{ m}$$

L'inertie de la section non-fissurée I_I vaut :

$$\begin{aligned} I_I &= b \times h^3 / 12 + b \times h \times (h/2 - y_{G,I})^2 + \alpha_e \times A_s \times (y_{G,I} - d)^2 + \alpha_e \times A'_s \times (y_{G,I} - d')^2 \\ &= 0,00458\text{ m}^4 \end{aligned}$$

7.2 Calculez les caractéristiques mécaniques de la section fissurée ($y_{G,II}$ et I_{II}).

Le niveau du centre de gravité de la section fissurée qui est également le niveau de l'axe neutre est obtenu au moyen de l'expression (C : 346/664) :

$$y_{G,II} = x = \frac{b \times x^2 / 2 + \alpha_e \times A_s \times d + \alpha_e \times A'_s \times d'}{b \times x + \alpha_e \times A_s + \alpha_e \times A'_s}$$

Après quelques itérations on trouve :

$$y_{G,II} = x = 0,209 \text{ m}$$

I_{II} est l'inertie de la section fissurée :

$$\begin{aligned} I_{II} &= b \times x^3 / 12 + b \times x \times (h/2 - x)^2 + \alpha_e \times A_s \times (x - d)^2 + \alpha_e \times A'_s \times (x - d')^2 \\ &= 0,00295 \text{ m}^4 \end{aligned}$$

7.3 Vérifiez la limitation des contraintes à l'ELS_{rare}.

Le moment maximum à mi travée vaut :

$$M = q \times \frac{L^2}{8} = 30 \text{ kN/m} \times \frac{8^2 \text{ m}^2}{8} = 240 \text{ kNm}$$

Avec la charge linéaire sous combinaison caractéristique : $q = G_k + Q_k = 15 \text{ kN/m} + 15 \text{ kN/m} = 30 \text{ kN/m}$

On s'assure que la contrainte dans l'armature ne dépasse pas la contrainte limite (C : 590/664) :

$$\sigma_s = \alpha_e \times \frac{M}{I_{II}} \times (d - x) = 17,03 \times \frac{240 \text{ kNm}}{0,00295 \text{ m}^4} \times (0,44 \text{ m} - 0,209 \text{ m})$$

$$\sigma_s = 320 \text{ MPa} \leq 0,8 \times f_{yk} = 400 \text{ MPa}$$

On fait de même pour la contrainte de compression dans le béton vaut (C : 589/664) :

$$\sigma_c = \frac{M}{I_{II}} \times x = \frac{240 \text{ kNm}}{0,00295 \text{ m}^4}$$

$$\sigma_c = 17 \text{ MPa} \leq 0,6 \times f_{ck} = 24 \text{ MPa}$$

Sachant que la charge linéaire qui correspond à la combinaison caractéristique des charges vaut $q = G_k + Q_k = 15 \text{ kN/m} + 15 \text{ kN/m} = 30 \text{ kN/m}$, générant un moment maximum à mi travée de $M = q \times \frac{L^2}{8} = 30 \text{ kN/m} \times \frac{8^2 \text{ m}^2}{8} = 240 \text{ kNm}$

Notons que si l'on fait un calcul à court terme (supposez $\varphi = 0$), la contrainte dans le béton est bien entendu beaucoup plus grande. Dans ce cas, les caractéristiques de la section fissurées sont :

$$\alpha_e = 5,67 \quad x = 0,144 \text{ m} \quad I_{II} = 0,00159 \text{ m}^4$$

On obtient alors :

$$\sigma_c = \frac{M}{I_{II}} x = \frac{240 \text{ kNm}}{0,00159 \text{ m}^4} \times 0,144 \text{ m} = 21,7 \text{ MPa} \leq 0,6 \times f_{ck} = 24 \text{ MPa}$$

7.4 Vérifiez la limitation des contraintes à l' $ELS_{quasi-permanent}$.

Le moment maximum à mi travée vaut :

$$M_{qp} = q_{qp} \times \frac{L^2}{8} = 21 \text{ kN/m} \times \frac{8^2 \text{ m}^2}{8} = 168 \text{ kNm}$$

Avec la charge linéaire sous combinaison quasi-permanente : $q_{qp} = G_k + \psi_2 \times Q_k = 15 \text{ kN/m} + 0,4 \times 15 \text{ kN/m} = 21 \text{ kN/m}$

On s'assure que La contrainte de compression dans le béton ne dépasse pas la contrainte limite (C : 589/664) :

$$\sigma_c = \frac{M}{I_{II}} \times x = \frac{168 \text{ kNm}}{0,00295 \text{ m}^4} \times 0,209 \text{ m} = 11,9 \text{ MPa} < 0,45 \times f_{ck} = 18 \text{ MPa}$$

7.5 Calculez l'ouverture des fissures à l' $ELS_{quasi-permanent}$.

Supposant la classe d'exposition correspond à XC3, l'ouverture des fissures doit être limitée à 0,3 mm sous la combinaison quasi-permanente des charges. L'ouverture des fissures est calculée au moyen de l'expression (C : 613/664) :

$$W_k = s_{r, max} \times (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm})$$

Avec :

- La déformation $\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}$ est évaluée au moyen de la formule (C : 614/664) :

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = MAX \left[\frac{\sigma_s}{E_s} - k_t \times \frac{f_{ct,eff}}{E_s \times \rho_{s,eff}} \times (1 + \alpha_e \times \rho_{s,eff}) ; 0,6 \times \frac{\sigma_s}{E_s} \right]$$

- La contrainte de traction dans l'armature tendue sous charge quasi-permanente vaut :

$$\sigma_s = \alpha_e \times \frac{M}{I_{II}} \times (d - x) = 17,03 \times \frac{168 \text{ kNm}}{0,00295 \text{ m}^4} \times (0,44 \text{ m} - 0,209 \text{ m}) = 224 \text{ MPa}$$

- Dans le cas d'un chargement de longue durée k_t vaut : $k_t = 0,4$
- Pour un béton C40/50 : $f_{ct,eff} = f_{ctm} = 3,51 \text{ MPa}$
- Le pourcentage effectif d'armatures tendues est calculé comme suit : $\rho_{s,eff} = \frac{A_s}{h_{c,eff} \times b}$. La hauteur de l'aire de béton effectivement tendue autour des armatures vaut :

$$h_{c,eff} = 2,5 \times (h - d) = 2,5 \times 0,06 \text{ m} = 0,15 \text{ m}$$

On a donc :

$$\rho_{s,eff} = \frac{A_s}{h_{c,eff} \times b} = \frac{2010 \text{ mm}^2}{300 \text{ m} \times 150 \text{ m}} = 4,4 \%$$

On obtient donc :

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = MAX \left[\frac{224 \text{ MPa}}{200 \text{ GPa}} - \frac{0,4 \times 3,51 \text{ MPa}}{200 \text{ GPa} \times 4,4 \%} \times (1 + 17,03 \times 4,4 \%) ; 0,67 \% \right]$$

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = MAX [0,84 \% ; 0,67 \%] = 0,84 \%$$

- L'espacement final maximal entre fissures est calculé au moyen de l'expression (C : 616/664) :

$$S_{r, max} = 3,4 \times c + 0,425 \times k_1 \times k_2 \frac{\phi}{\rho_{s,eff}}$$

- L'enrobage des armatures $c = 5 \text{ cm}$.
- $k_1 = 0,8$ pour des barres à haute adhérence.
- $k_2 = 0,5$ en flexion simple.

On obtient donc :

$$S_{r, max} = 3,4 \times 0,05 \text{ m} + 0,425 \times 0,8 \times 0,5 \times \frac{0,016 \text{ m}}{0,044} = 0,23 \text{ m}$$

L'ouverture maximale des fissures vaut donc :

$$W_k = S_{r, max} (\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) = 0,23 \text{ m} \times 0,00084 = 0,19 \text{ mm} < 0,3 \text{ mm}$$

7.6 Vérifiez la maîtrise de la fissuration SANS calcul direct.

Le diamètre maximal ϕ_s autorisé est obtenu au moyen de l'expression (F : 428/481) :

$$\phi_s = \phi_s^* \times \frac{f_{ct, eff}}{2,9} \times \frac{k_c h_{cr}}{2 \times (h - d)}$$

Avec :

- Le diamètre maximale ϕ_s^* est donné par le tableau suivant (en interpolant pour la valeur de σ_s) (F : 427/481) :

σ_s contrainte de l'acier [MPa]	160	200	240	280	320	360	400	450
ϕ_s^* diamètre maximal des barres [mm]	$W_k = 0,4 \text{ mm}$	40	32	20	16	12	10	8
	$W_k = 0,3 \text{ mm}$	32	25	16	12	10	8	6
	$W_k = 0,2 \text{ mm}$	25	16	12	8	6	5	4

Pour $\sigma_s = 224 \text{ MPa} \implies \phi_s^* \approx 20 \text{ mm}$

- $k_c = 0,4$ pour la flexion simple.
- La hauteur de béton tendu juste avant la fissuration $h_{cr} = h - y_{G,I} = 0,50\ m - 0,275\ m = 0,225\ m$.
- $f_{ct,eff} = 3,51\ MPa$ pour du C40/50.

On obtient donc :

$$\phi_s = 20\ m \times \frac{3,51\ MPa}{2,9\ MPa} \times \frac{0,4 \times 0,225\ m}{2 \times 0,06\ m} = 18,1\ mm$$

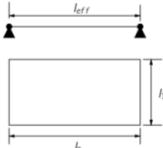
Étant entendu que le diamètre de l'armature de traction prévue est inférieure au diamètre de l'armature minimale requise pour contrôler la fissuration, du fait que :

$$\phi_s = 18,1\ mm > \phi_{sl} = 16\ mm$$

On aurait donc pu se passer du calcul explicite de l'ouverture des fissures.

7.7 Vérifiez la flèche SANS calcul explicite.

Sachant que la poutre est fortement sollicitée ($\rho = A_s/b \times d = 1,52\% \simeq 1,5\%$), le tableau des rapports l/d limites indique une valeur limite de 14 (F : 439/481) :

Rapport portée/hauteur utile – valeurs limites de l_{eff}/d , l_1/d ou l_2/d				
Système structural	K	Béton fortement sollicité $\rho = 1,5\%$	Béton faiblement sollicité $\rho = 0,5\%$	
Poutre sur appuis simples, dalles sur appuis simples portant dans une ou deux directions	 $1,0$	14	20	

On calcule le rapport l/d de la poutre :

$$l/d = \frac{8\ m}{0,44\ m} = 18,2 > 14$$

La limite est dépassée.

Si on utilise la formule complète de l/d limite (F : 442/481) :

$$\frac{l}{d} = \begin{cases} K \times \left(\frac{310}{\sigma_s} \right) \times \left[11 + 1,5 \times \sqrt{f_{ck}} \times \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right) + 3,2 \times \sqrt{f_{ck}} \times \left(\frac{\rho_0}{\rho} - 1 \right)^{3/2} \right] & \text{si } \rho \leq \rho_0 \\ K \times \left(\frac{310}{\sigma_s} \right) \times \left[11 + 1,5 \times \sqrt{f_{ck}} \times \left(\frac{\rho_0}{\rho - \rho'} \right) + \frac{1}{12} \times \sqrt{f_{ck}} \times \sqrt{\frac{\rho'}{\rho_0}} \right] & \text{si } \rho > \rho_0 \end{cases}$$

Avec :

- $\rho_0 = \sqrt{f_{ck}}/1000 = \sqrt{40 \text{ MPa}}/1000 = 0,63 \%$
- $\rho = MAX \left[\frac{A_s}{b \times d} = 1,52\% ; \rho_0 \right]$
- $\rho' = \frac{A'_s}{b \times d} = \frac{565 \text{ mm}^2}{300 \text{ mm} \times 440 \text{ mm}} = 0,43 \%$
- $K = 1,0$
- La contrainte dans les armatures tendues : $\sigma_s = \alpha_e \times \frac{M_{ELS, rare}}{I_{II}} \times (d - x) = 17,03 \times \frac{240 \text{ kNm}}{0,00295 \text{ m}^4} \times (0,44 \text{ m} - 0,209 \text{ m}) = 320 \text{ MPa}$

En introduisant tous les paramètres dans la formule précédente on obtient :

$$\frac{l}{d} = K \times \left(\frac{310}{\sigma_s} \right) \times \left[11 + 1,5 \times \sqrt{f_{ck}} \times \left(\frac{\rho_0}{\rho - \rho'} \right) + \frac{1}{12} \times \sqrt{f_{ck}} \times \sqrt{\frac{\rho'}{\rho_0}} \right]$$

$$= 1,0 \times \frac{310 \text{ MPa}}{320 \text{ MPa}} \left[11 + 1,5 \times \sqrt{40 \text{ (MPa)}} \times \left(\frac{0,63}{1,52 - 0,43} \right) + \frac{1}{12} \times \sqrt{40 \text{ (MPa)}} \times \sqrt{\frac{0,43}{0,63}} \right] = 16,4$$

Cette limite est dépassée :

$$l/d = 18,2 > 16,4$$

On doit donc faire un calcul explicite de la flèche.

7.8 Calculez la flèche de manière explicite : méthode simplifiée.

La flèche peut être obtenue au moyen de l'expression (F : 458/481) :

$$f = k \times l^2 \times (1/r)$$

Avec :

- $k = \frac{5}{48}$
- La courbure finale est obtenue par interpolation (F : 458/481) :

$$(1/r) = \zeta \times (1/r)_{II} + (1 - \zeta) \times (1/r)_I$$

Avec :

- Le coefficient d'interpolation ζ vaut (F : 458/481) :

$$\zeta = 1 - \beta \times \left(\frac{M_{cr}}{M} \right)^2 = 1 - 0,5 \times \left(\frac{71,3 \text{ kNm}}{168 \text{ kNm}} \right)^2 = 0,91$$

$$* \text{ Le moment à mi-travée : } M = q_{qp} \times \frac{l^2}{8} = 21 \times \frac{8^2 \text{ m}^2}{8} = 168 \text{ kNm}$$

- * La charge quasi-permanente : $q_{qp} = G_k + \psi_2 \times Q_k = 15 \text{ kN/m} + 0,4 \times 15 \text{ kN/m} = 21 \text{ kN/m}$
- * Le moment de fissuration $M_{cr} = f_{ctm} \times \frac{I_I}{h-y_{G,I}} = 3,51 \times \frac{0,00458 \text{ m}^4}{0,50 \text{ m} - 0,275 \text{ m}} = 71,3 \text{ kNm}$
- * $f_{ctm} = 3,51 \text{ MPa}$ pour un béton C40/50.
- * Si l'on prend pour β la valeur pour un chargement de longue durée : $\beta = 0,5$
- La courbure à mi-travée dans le cas fissuré et non-fissuré :

$$(1/r)_I = \frac{M}{I_I \times E_{c,eff}} = \frac{168 \text{ kNm}}{0,00458 \text{ m}^4 \times 11740 \text{ MPa}} = 3,12 \%/\text{m}$$

$$(1/r)_{II} = \frac{M}{I_{II} \times E_{c,eff}} = \frac{168 \text{ kNm}}{0,00295 \text{ m}^4 \times 11740 \text{ MPa}} = 4,85 \%/\text{m}$$

La courbure finale vaut donc :

$$\begin{aligned} (1/r) &= \zeta \times (1/r)_{II} + (1-\zeta) \times (1/r)_I = 0,91 \times 4,85 \%/\text{m} + (1-0,91) \times 3,12 \%/\text{m} \\ &= 4,69 \%/\text{m} \end{aligned}$$

On obtient :

$$f = k \times l^2 \times (1/r) = \frac{5}{48} \times 8^2 \text{ m}^2 \times 4,69 \%/\text{m} = 31 \text{ mm}$$

Ceci correspond à un rapport f/l de

$$\frac{f}{l} = \frac{31 \text{ mm}}{8000 \text{ mm}} = \frac{1}{256} < \frac{1}{250}$$

7.9 Calculez la flèche de manière explicite : en tenant compte du retrait.

Le retrait provoque donc une flèche complémentaire :

$$f_{cs} = k \times l^2 \times (1/r)_{cs} = \frac{1}{8} \times 8^2 \times \frac{0,93}{1000} = 0,007 \text{ m} = 7 \text{ mm}$$

Avec :

- $k = \frac{1}{8}$
- on utilise l'expression (F : 457/481) :

$$(1/r)_{cs} = \varepsilon_{cs} \times \alpha_e \times \frac{S}{I}$$

- La valeur du retrait libre ε_{cs} est obtenue par (F : 30-33/481) :

$$\varepsilon_{cs} = \varepsilon_{cd} - \varepsilon_{ca}$$

- * Le retrait de dessiccation ε_{cd} vaut :

$$\varepsilon_{cd} = k_h \times \varepsilon_{cd,0}$$

Le rayon moyen de la pièce vaut :

$$h_0 = \frac{2 \times A_c}{u} = \frac{2 \times 0,30 \text{ m} \times 0,50 \text{ m}}{2 \times (0,30 \text{ m} + 0,50 \text{ m})} = 0,19 \text{ m}$$

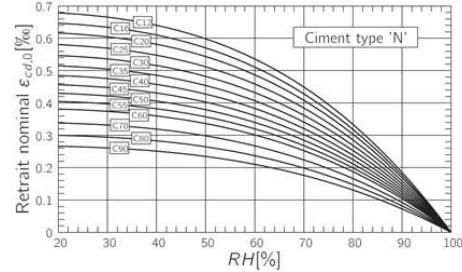
$h_0 [\text{mm}]$	k_h
100	1.0
200	0.85
300	0.75
≥ 500	0.70

La valeur de k_h est obtenue à partir du tableau:

$$k_h = 0,85$$

La valeur de $\varepsilon_{cd,0}$ peut être trouvée dans le diagramme:

$$\varepsilon_{cd,0} = 0,44 \%$$



Le retrait de dessiccation ε_{cd} vaut donc :

$$\varepsilon_{cd} = k_h \times \varepsilon_{cd,0} = 0,85 \times 0,44 \% = 0,37 \%$$

- * Le retrait endogène est obtenu au moyen de l'expression :

$$\varepsilon_{ca} = 2,5 \times (f_{ck} - 10) \times 10^{-6} = 2,5 \times (40 \text{ (MPa)} - 10) \times 10^{-6} = 0,075 \%$$

Le retrait libre total vaut donc :

$$\varepsilon_{cs} = \varepsilon_{cd} + \varepsilon_{ca} = 0,37 + 0,075 = 0,45 \%$$

- Les moments statiques des armatures en conditions fissurée et non-fissurée valent :

$$S_I = A_s \times (d - y_{G,I}) + A'_s \times (d' - y_{G,I}) = 0,000218 \text{ m}^3$$

$$S_{II} = A_s \times (d - y_{G,II}) + A'_s \times (d' - y_{G,II}) = 0,00383 \text{ m}^3$$

Les courbures correspondantes sont :

$$(1/r)_{cs,I} = \varepsilon_{cs} \times \alpha_e \times \frac{S_I}{I_I} = 0,45 \times 17,03 \times \frac{0,000218 \text{ m}^3}{0,00458 \text{ m}^3} = 0,36 \%/\text{m}$$

$$(1/r)_{cs,II} = \varepsilon_{cs} \times \alpha_e \times \frac{S_{II}}{I_{II}} = 0,45 \times 17,03 \frac{0,000383 \text{ m}^3}{0,00295 \text{ m}^3} = 0,99 \%/\text{m}$$

La courbure finale due au retrait vaut :

$$\begin{aligned} (1/r)_{cs} &= \zeta \times (1/r)_{cs,II} + (1 - \zeta) \times (1/r)_{cs,I} \\ &= 0,91 \times 0,99 \%/\text{m} + (1 - 0,91) \times 0,36 \%/\text{m} = 0,93 \%/\text{m} \end{aligned}$$

La flèche complémentaire vaut donc :

$$f_{cs} = k \times l^2 \times (1/r)_{cs} = \frac{1}{8} \times 8^2 \text{ m}^2 \times 0,93 \% / \text{m} = 7 \text{ mm}$$

La flèche totale (charge + retrait) vaut donc :

$$f = 31 + 7 = 38 \text{ mm}$$

Ce qui correspond à un rapport f/l de :

$$\frac{f}{l} = \frac{38 \text{ mm}}{8000 \text{ mm}} = \frac{1}{210} > \frac{1}{250}$$

On voit que la limite de 1/250 est dépassée si l'on prend en compte le retrait.

7.10 Calculez la flèche de manière explicite : calcul par intégration numérique.

On peut vérifier les résultats obtenus en calculant les éches par intégration numérique (F : 460/481) :

$$f = \sum_{i=1}^n \Delta f_i = \sum_{i=1}^n (1/r)_i \times m_j^* \times \Delta x_i$$

En divisant la poutre en 8 tronçons de 1 mètre on obtient les résultats suivants :

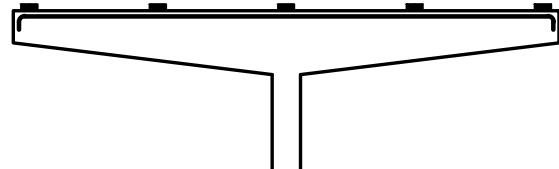
i	x_i	M_i	$M_{cr,i}$	m_i^*	$(1/r)_{I,i}$	$(1/r)_{II,i}$	ζ_i	$(1/r)_i$	Δf_i
	m	kNm	kNm	m	%/m	%/m		%/m	mm
1	0,50	39,38	71,31	0,25	1,10	2,13	0,00	1,10	0,27
2	1,50	102,38	71,31	0,75	2,27	3,95	0,76	3,54	2,66
3	2,50	144,38	71,31	1,25	3,05	5,16	0,88	4,91	6,13
4	3,50	165,38	71,31	1,75	3,44	5,77	0,91	5,55	9,72
5	4,50	165,38	71,31	1,75	3,44	5,77	0,91	5,55	9,72
6	5,50	144,38	71,31	1,25	3,05	5,16	0,88	4,91	6,13
7	6,50	102,38	71,31	0,75	2,27	3,95	0,76	3,54	2,66
8	7,50	39,38	71,31	0,25	1,10	2,13	0,00	1,10	0,27
								f =	37,56

On n'observe pas de différence significative par rapport au calcul précédent.

8 Exercice complémentaire

8.1 Calculez les armatures de flexion dans la poutre (au nu de la colonne) pour la section rectangulaire.

En analysant le diagramme des moments de flexion quelque soit le cas de chargement, on constate que la fibre supérieure de la section sera tendue : il faut donc placer les barres d'armatures principales en flexion dans la semelle supérieure.



- **Méthode « Stress-block »**

On prend, dans un premier temps, l'hypothèse que la section est rectangulaire pleine pour faciliter les calculs. En effet, si l'âme n'est pas comprimée, cette hypothèse reste valable.

Si cette hypothèse n'est pas vérifiée, il faudra considérer une section équivalente en I avec des semelles inférieure et supérieure de 1,4 m de large.

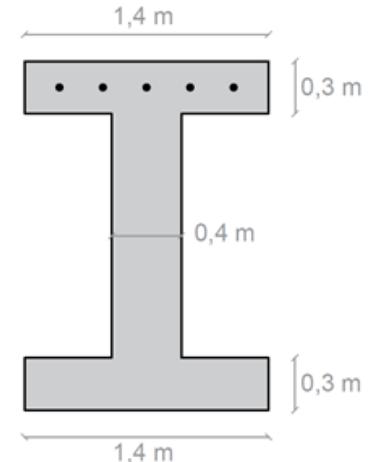
Le moment sollicitant, pondéré à l'ELU, est de 15300 kNm quel que soit le cas de charge. On commence la première itération en partant du bras de levier de la formule simplifiée :

$$z_0 = 0,9 \times d = 0,9 \times (2 \text{ m} - 0,15 \text{ m}) = 1,665 \text{ m}$$

$$F_c = \frac{M}{z_0} = 9189,19 \text{ kN}$$

$$h_c = \frac{F_c}{b \times f_{cd}^*} = 0,29 \text{ m}$$

$$z_1 = d - \frac{h_c}{2} = 1,7 \text{ m}$$



Après plusieurs itérations :

$$z = 1,71 \text{ m} ; x = 0,352 \text{ m} ; h_c = 0,28 \text{ m} ; F_c = F_s = 8952,95 \text{ kN}$$

On vérifie l'hypothèse de départ de position de l'axe neutre dans la semelle inférieure :

$$x = 0,352 \text{ m} > h_0 = 0,3 \text{ m} \text{ MAIS } h_c = 0,28 \text{ m} < h_0 = 0,3 \text{ m}$$

⇒ OK pas besoin de faire un calcul de poutre en T.

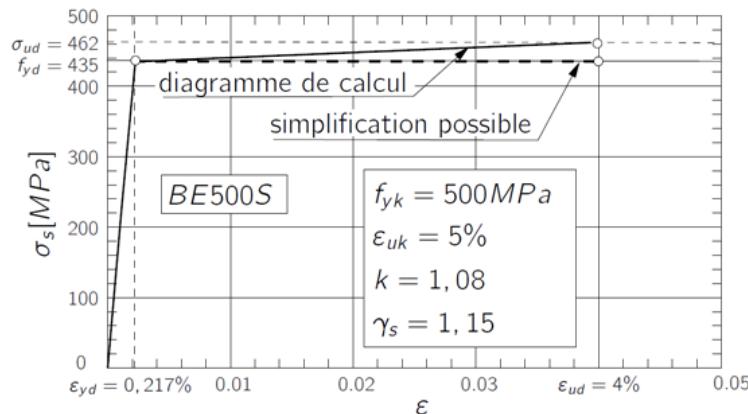
On vérifie également le critère de rotation plastique :

$$x/d = 0,19 < 0,35 \Rightarrow \text{OK}$$

On peut donc calculer l'armature :

$$A_s = \frac{F_s}{f_{yd}} = \frac{8952,95 \text{ kN}}{435 \text{ MPa}} = 205,8 \text{ cm}^2$$

Dans une optique de limitation de la quantité d'armature, on peut déterminer la quantité d'armature à partir du diagramme de calcul de l'acier :



En prenant comme hypothèse qu'une rupture du béton en compression intervient avant la rupture de l'acier, la déformation dans les armatures vaut :

$$|\varepsilon_s| = \varepsilon_c \times \frac{d - x}{x} = 0,35 \% \times \frac{1,85 \text{ m} - 0,352 \text{ m}}{0,352 \text{ m}} = 1,49 \%$$

Cette déformation est supérieure à la limite élastique et inférieure à la déformation à la rupture, notre hypothèse est donc correcte. Les contraintes dans les armatures valent donc :

$$\begin{aligned} \sigma_s &= f_{yd} + (k - 1) \times f_{yd} \times \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_{yd}}{\varepsilon_{uk} - \varepsilon_{yd}} \\ \sigma_s &= 435 \text{ MPa} + 0,08 \times 435 \text{ MPa} \times \frac{1,49 - 0,217}{5 - 0,217} = 444 \text{ MPa} \end{aligned}$$

On peut donc calculer la quantité d'armature :

$$A_s = \frac{F_s}{\sigma_s} = \frac{8952,95 \text{ kN}}{444 \text{ MPa}} = 201,6 \text{ cm}^2$$

Ce qui nous donne : 17 Ø40 ou 26 Ø32

- **Méthode du moment réduit**

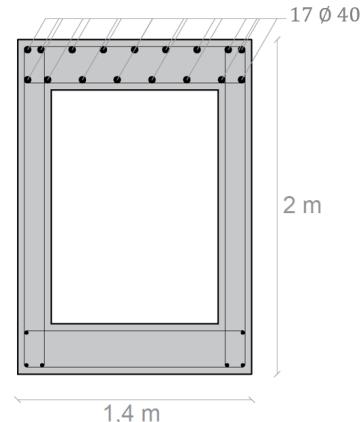
On calcule le moment réduit correspondant :

$$\mu_{Sd} = \frac{M_{Sd}}{b \times d^2 \times f_{cd}^*} = \frac{15300 \text{ kNm}}{1,4 \text{ m} \times 1,85^2 \text{ m}^2 \times 22,667 \text{ MPa}}$$

Au $\mu_{Sd} = 0,1409$ correspond un $\omega = 0,15$, on peut donc calculer la quantité d'armature A_s nécessaire :

$$A_s = \omega \times b \times d \times \frac{f_{cd}^*}{f_{yd}}$$

$$= 0,15 \times 1,4 \text{ m} \times 1,85 \text{ m} \times \frac{22,666 \text{ MPa}}{435 \text{ MPa}} = 202,6 \text{ cm}^2$$



Ce qui nous donne également : **17 Ø40** ou **26 Ø32**

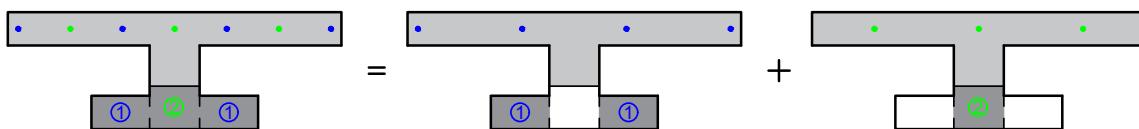
8.2 Calculez les armatures de flexion dans la poutre pour la section avec $b_{inf}=0,8 \text{ m}$.

Dans un premier temps, on considère la section en I équivalente avec $b_{inf} = 0,8 \text{ m}$. A partir de la formule simplifiée, nous déterminons une hauteur de béton comprimée pour déterminer la position de l'axe neutre :

$$z = 0,9 \times d = 0,9 \times (2 \text{ m} - 0,15 \text{ m}) = 0,9 \times 1,85 \text{ m} = 1,665 \text{ m}$$

$$F_c = \frac{M}{z} = 9189,19 \text{ kN} \quad h_c = \frac{F_c}{b \times f_{cd}^*} = 0,51 \text{ m}$$

Donc $h_c > h_0$, il convient de faire un calcul de poutre en T avec une âme de largeur $b_w = 0,4 \text{ m}$:



Section 1 :

$$F_{c1} = f_{cd}^* \times h_0 \times (b_{inf} - b_w) = 2720 \text{ kN}$$

$$z_1 = 1,7 \text{ m} \Rightarrow M_1 = 4623,86 \text{ kNm}$$

$$A_{s1} = \frac{2720 \text{ kN}}{435 \text{ MPa}} = 62,53 \text{ cm}^2$$

Section 2 :

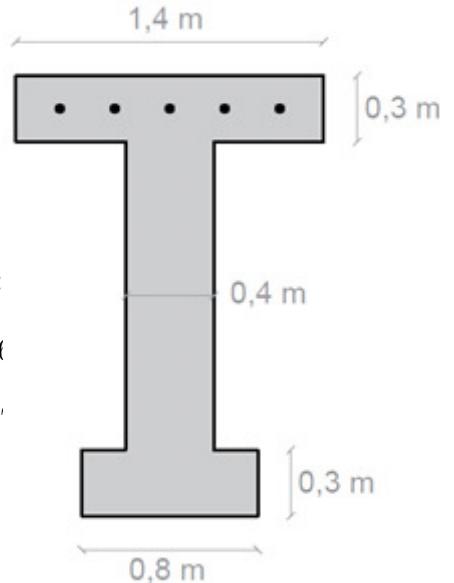
- Méthode « stress-block » sur la section $0,4 \times 2 \text{ m}^2$:

$$M_2 = M_{tot} - M_1 = 15300 \text{ kNm} - 4623,86 \text{ kNm} = 10676 \text{ kNm}$$

$$z = 0,9 \times d = 1,665 \text{ m} \Rightarrow F_c = 6412 \text{ kN} \Rightarrow h_c = 0,70'$$

$$\Rightarrow x = 0,88 \text{ m} \Rightarrow \frac{x}{d} = 0,475 \gg 0,35$$

Le critère de rotation plastique n'est pas respecté. : il faut ajouter des armatures de compression !



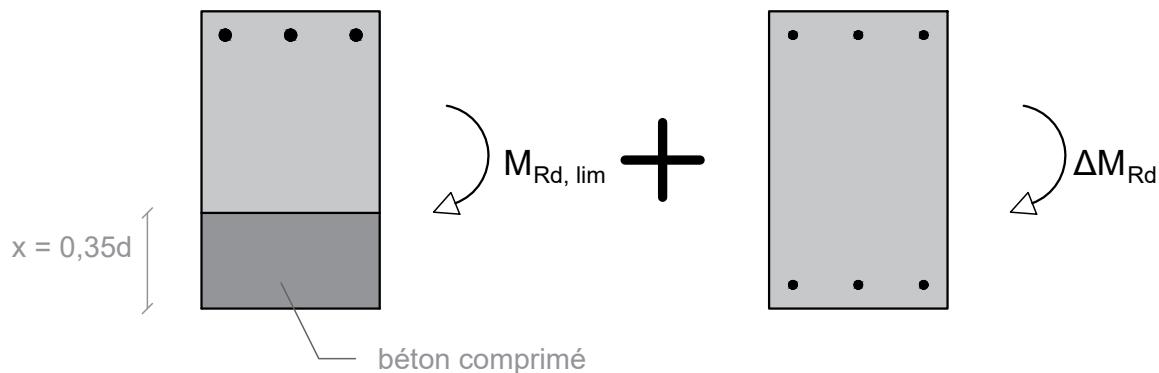
○ Calcul du moment résistant maximum :

Dans un premier temps, il faut déterminer le moment résistant de la section tout en assurant une capacité de rotation plastique. Pour cela, on utilise la méthode du moment réduit en posant $\frac{x}{d} = 0,35$.

$$\Rightarrow \mu_{lim} = 0,242 \text{ & } \omega_{lim} = 0,281$$

$$M_{Rd, lim} = \mu_{lim} \times b \times d^2 \times f_{cd}^* = 0,242 \times 0,4 \text{ m} \times 1,85^2 \text{ m}^2 \times 22,66 \text{ MPa} = 7509,2 \text{ kNm}$$

$$A_{s2} = \frac{\omega_{lim} \times b \times d \times f_{cd}^*}{f_{yd}} = 0,281 \times 0,4 \text{ m} \times 1,85 \text{ m} \times \frac{22,666 \text{ MPa}}{435 \text{ MPa}} = 108,35 \text{ cm}^2$$



- **Calcul des armatures de compression :** Le moment résiduel à reprendre par les armatures de compressions vaut :

$$\Delta M_{Rd} = M_2 - M_{Rd, lim} = 3166,94 \text{ kNm} \& z' = 2 \text{ m} - (2 \times 0,15 \text{ m}) = 1,7 \text{ m}$$

$$A'_s = \frac{F'_s}{f_{yd}} = \frac{M}{z' \times f_{yd}} = \frac{3166,94 \text{ kN}}{1,7 \text{ m} \times 435 \text{ MPa}} = 42,83 \text{ cm}^2$$

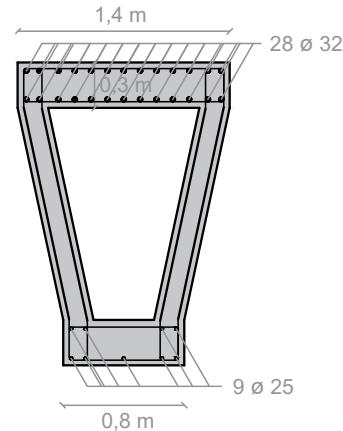
Les armatures totales dans la section seront donc de :

$$\begin{aligned} A_{s,sup} &= A_{s1} + A_{s2} + A'_s = 62,53 + 108,35 + 42,83 \\ &= 213,71 \text{ cm}^2 \\ A_{s,inf} &= A'_s = 42,83 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Cette armature pourrait être composée de :

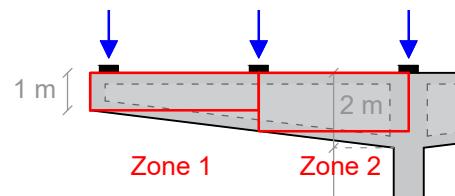
En supérieur : 18 Ø40 ou 28 Ø 32

En inférieur : 9 Ø25



8.3 Calculez les armatures d'effort tranchant dans toute la poutre pour la section avec $b_{inf}=0,8 \text{ m}$.

La poutre supérieure doit être divisée en deux zones en fonction de l'effort tranchant à devoir reprendre. Dans chaque cas, on prendra comme hauteur minimale de la zone comme hauteur résistante (Zone 1 : $h=1 \text{ m}$; Zone 2 : $h=1,5 \text{ m}$). La première zone est sollicitée au maximum par 1275 kN et la seconde au maximum par 2550 kN.



1) Vérification de la résistance des bielles :

La quantité minimale d'armatures sera obtenue en choisissant un angle θ d'inclinaison pour les bielles correspondant à $\cot \theta = 2$. Vérifions la résistance à la compression des bielles pour cette inclinaison.

$$V_{Rd, max} = v \times f_{cd} \times \frac{\cot \theta + \cot \alpha}{1 + \cot^2 \theta} \times b_w \times z$$

Avec :

- $v = 0,6 \times \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) = 0,6 \times \left(1 - \frac{40 \text{ MPa}}{250 \text{ MPa}}\right) = 0,504$
- $\cot \theta = 2$
- $\cot \alpha = 0$ (*étriers droits*)
- $z = z_{Rd, lim} = d - \frac{0,8 \times (0,35 \times d)}{2} = 0,86 \times d = 0,731 \text{ m}$

On obtient :

$$V_{Rd, max} = 0,504 \times \frac{40 \text{ MPa}}{1,5} \times \frac{2+0}{1+4} \times 0,4 \text{ m} \times 0,731 \text{ m} = 1571,9 \text{ kN}$$

Comme $V_{Sd} = 1275 \text{ kN} < V_{Rd, max} = 1571,9 \text{ kN}$, les bielles résistent avec une inclinaison correspondant à $\cot \theta = 2$.

2) Calcul des armatures d'effort tranchant (étriers) :

On peut donc calculer les armatures nécessaires avec cette inclinaison θ .

$$\frac{A_s}{s} = \frac{V_{Ed}}{z \times f_{ywd} \times \cot \theta} = \frac{1275 \text{ kN}}{0,731 \text{ m} \times 435 \text{ MPa} \times 2} = 20,1 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Vu la géométrie de la section, il y aura deux étriers (un dans chaque âme). Deux étriers de deux brins de Ø10 ont une section de $4 \times 0,78 \text{ cm}^2$. Il faut donc placer une paire d'étriers Ø10 tous les 15 cm .

3) Calcul des armatures minimales :

Dans les cas des poutres, même dans les sections où $V_{Sd} \leq V_{Rd, c}$, il faut convient de prévoir un nombre minimum d'étriers pour éviter une rupture fragile :

$$\frac{A_{sw, min}}{s} = \frac{0,08 \times \sqrt{f_{ck}}}{f_{yk}} \times b_w \times \sin(\alpha) = 4,1 \text{ cm}^2/\text{m} \quad (\text{C : } 442/664)$$

Sachant que deux étriers Ø10 présente une section A_{sw} d'environ $3,12 \text{ cm}^2$, l'espacement maximum entre deux étriers est donc de :

$$\frac{1 \text{ m}}{1,32} = 76 \text{ cm}$$

ZONE 2

1) Vérification de la résistance des bielles :

La quantité minimale d'armatures sera obtenue en choisissant un angle θ d'inclinaison pour les bielles correspondant à $\cot\theta = 2$. Vérifions la résistance à la compression des bielles pour cette inclinaison.

$$V_{Rd,max} = v \times f_{cd} \times \frac{\cot \theta + \cot \alpha}{1 + \cot^2 \theta} \times b_w \times z$$

Avec :

- $v = 0,6 \times \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) = 0,6 \times \left(1 - \frac{40 \text{ MPa}}{250 \text{ MPa}}\right) = 0,504$
- $\cot \theta = 2$
- $\cot \alpha = 0$ (*étriers droits*)
- $z = z_{Rd, lim} = d - \frac{0,8 \times (0,35 \times d)}{2} = 0,86 \times d = 1,161 \text{ m}$

On obtient :

$$V_{Rd, max} = 0,504 \times \frac{40 \text{ MPa}}{1,5} \times \frac{2+0}{1+4} \times 0,4 \text{ m} \times 1,161 \text{ m} = 2497 \text{ kN}$$

Comme $V_{Sd} = 2550 \text{ kN} > V_{Rd, max} = 2497 \text{ kN}$, il faut augmenter l'inclinaison des billes.

Dans ce cas, il faut trouver un $\cot \theta$ tel que $V_{Rd, max} = v_{Sd}$ au moyen de :

$$1 \leq \cot \theta = \xi + \sqrt{\xi^2 - 1} < 2 \quad \text{avec} \quad \xi = \frac{z \times b_w \times f_{cd} \times v}{2 \times V_{sd}}$$

Ce qui nous donne $\cot \theta = \xi + \sqrt{\xi^2 - 1} = 1,92$ avec $\xi = (1,161 \text{ m} \times 0,4 \text{ m} \times 26,67 \text{ MPa} \times 0,504)/(2 \times 2550 \text{ kN}) = 1,22$

2) Calcul des armatures d'effort tranchant (étriers) :

On peut donc calculer les armatures nécessaires avec cette inclinaison θ .

$$\frac{A_s}{s} = \frac{V_{Ed}}{z \times f_{ywd} \times \cot \theta} = \frac{2550 \text{ kN}}{1,161 \text{ m} \times 435 \text{ MPa} \times 1,92} = 26,2 \text{ cm}^2/\text{m}$$

Vu la géométrie de la section, il y aura deux étriers. Deux étriers de deux brins de Ø10 ont une section de $4 \times 0,78 \text{ cm}^2$. Il faut donc placer une paire d'étriers Ø10 tous les 11 cm (un dans chaque âme).

3) Calcul des armatures minimales :

Dans les cas des poutres, même dans les sections où $V_{Sd} \leq V_{Rd, c}$, il faut convient de prévoir un nombre minimum d'étriers pour éviter une rupture fragile :

$$\frac{A_{sw, min}}{s} = \frac{0,08 \times \sqrt{f_{ck}}}{f_{yk}} \times b_w \times \sin(\alpha) = 4,1 \text{ cm}^2/\text{m} \quad (\text{C : 442/664})$$

Sachant que deux étriers Ø10 présente une section A_{sw} d'environ $3,12 \text{ cm}^2$, l'espacement maximum entre deux étriers est donc de :

$$\frac{1 \text{ m}}{1,32} = 76 \text{ cm}$$

8.4 Calculez les effets du 2^e ordre en pied de colonne (en se basant sur la section calculée à l'exercice 4) dans le plan de sollicitation uniquement.

Dans le cadre de cet exercice, nous ne dimensionnerons la colonne au flambement que dans son plan de chargement. Dans un second temps, il faudrait vérifier que la section est suffisante pour éviter la rupture par flambement dans le plan perpendiculaire au plan de chargement.

1) Calcul de l'élancement :

Rappelons qu'il y a trois cas de charge critiques. En fonction du chargement, on a soit le couple (5175 kN ; 7200 kNm) (cas de charge 1), le couple (4575 kN ; 7200 kNm) (cas de charge 2) ou le couple (6375 kN ; 0 kNm) (cas de charge 3). Le flambement est causé par un excès de compression et un élancement trop important. L'élancement géométrique est donné par la formule : $\lambda = \frac{L_0}{i}$

Avec le rayon de giration $i = \sqrt{I_c/A_c}$ et, comme la colonne est considérée comme encastrée en pieds, $L_0 = 24 \text{ m}$. Nous avons donc :

$$\lambda = \frac{L_0}{i} = \frac{24}{\sqrt{\frac{0,04543 \text{ m}^4}{0,704 \text{ m}^2}}} = 94,48 \Rightarrow \text{on ne peut pas négliger le flambement}$$

$$\lambda \times \sqrt{n} \quad \text{avec l'effort normal réduit } n = \frac{N_{Sd}}{A_c \times f_{cd}^*}$$

$$\lambda \times \sqrt{n} = 94,48 \times \sqrt{\frac{6375 \text{ kN}}{0,8 \text{ m} \times 0,88 \text{ m} \times 22,66 \text{ MPa}}} = 59,71$$

$$\lambda = 94,48 \gg \lambda_{lim} = \frac{20 \times A \times B \times C}{\sqrt{n}} = \frac{20 \times 0,7 \times 1,1 \times 0,7}{0,4} = 17,1$$

On ne peut donc pas négliger les effets du second ordre !

2) Calcul de l'excentrement dû au second ordre :

Effectuer le calcul d'une colonne au flambement consiste à calculer les excentricités e_0 , e_i et e_2 pour ensuite dimensionner la colonne en flexion composée.

- Excentricité initiale : $e_0 = 0$

Note : pour le troisième cas de charge, il est possible de prendre $e_0 \neq 0$ et de considérer le couple (5175 kN ; 0 kNm) sans affecter les résultats finaux.

- Excentricité due aux imperfections géométriques : $e_i = \theta_i \times \frac{L_0}{2}$

Avec :

$$\begin{aligned} \frac{1}{200} &\geq \theta_i = \frac{2}{\sqrt{L}} \times \frac{1}{200} \geq \frac{1}{300} \\ \theta_i &= \frac{2}{\sqrt{12 \text{ m}}} \times \frac{1}{200} = 0,0032 < \frac{1}{300} \Rightarrow \theta_i = \frac{1}{300} \\ \Rightarrow e_i &= \frac{1}{300} \times \frac{24 \text{ m}}{2} = 0,04 \text{ m} \end{aligned}$$

- Excentricité due aux effets du second ordre : $e_2 = \frac{1}{r} \times \frac{L_0^2}{c}$

Avec :

- $\frac{1}{r} = K_r \times K_\varphi \times \frac{1}{r_0}$
- $\frac{1}{r_0} = \frac{2 \times \varepsilon_{yd}}{0,9 \times d} = \frac{2 \times 2,17\%}{0,9 \times (0,88 \text{ m} - 0,08 \text{ m})} = 0,00603$
- $c \approx 10$
- $K_r \approx \frac{1+\omega-\nu}{0,6+\omega} \leq 1$; avec $\omega = \frac{A_s \times f_{yd}}{A_c \times f_{cd}^*}$

Prendre $K_r = 1$ est du côté de la sécurité, ne connaissant pas la valeur de ω

- K_φ est un coefficient tenant compte du fluage : $K_\varphi = 1 + \beta \times \varphi_{ef}$
- $\beta = MAX[0,35 + \frac{f_{ck}}{200} - \frac{\lambda}{150}; 0] = MAX[0,35 + \frac{40 \text{ MPa}}{200 \text{ MPa}} - \frac{94,48}{150} = -0,08; 0] = 0$
- Le fluage effectif varie du type de chargement : $\varphi_{ef} = \frac{M_{0,qp}}{M_{0,Ed}} \times \varphi(\infty, t_0)$ En supposant un chargement à $t_0 = 7$ jours pour RH=80 %, avec $h_0 = \frac{2 \times A_c}{u} = 419 \text{ mm}$.

Béton C40/50	Fluage à long terme $\varphi(\infty, t_0)$, (ciment de type 'N')					
âge t_0 du béton au moment du chargement en jours	rayon moyen $2 \cdot A_c/u$ en [mm]					
	50	150	600	50	150	600
	Atmosphère sèche (intérieur) RH = 50%			Atmosphère humide (extérieur) RH = 80%		
1	5.6	4.5	3.6	3.5	3.0	2.7
3	4.6	3.7	2.9	2.8	2.5	2.2
7	3.9	3.1	2.5	2.4	2.1	1.9
28	3.0	2.4	1.9	1.9	1.6	1.4
90	2.4	1.9	1.5	1.5	1.3	1.2
365	1.8	1.5	1.2	1.1	1.0	0.9

On détermine le coefficient de fluage par interpolation linéaire : $\varphi(\infty, t_0) = 2,02$

Pour les cas de charges, le coefficient de fluage effectif varie. Par contre, comme le coefficient β est nul, le fluage n'a pas d'impact sur l'excentricité du second ordre.

On peut donc calculer e_2 , l'excentricité du second ordre :

$$e_2 = \frac{1}{r} \times \frac{L_0^2}{c} = \frac{1}{r} \times \frac{L_0^2}{c} = 0,00603 \times \frac{24^2 m^2}{10} = 0,352$$

Nous avons donc une excentricité totale de :

$$e_{tot} = e_0 + e_i + e_2 = 0 + 0,04 + 0,352 = 0,392$$

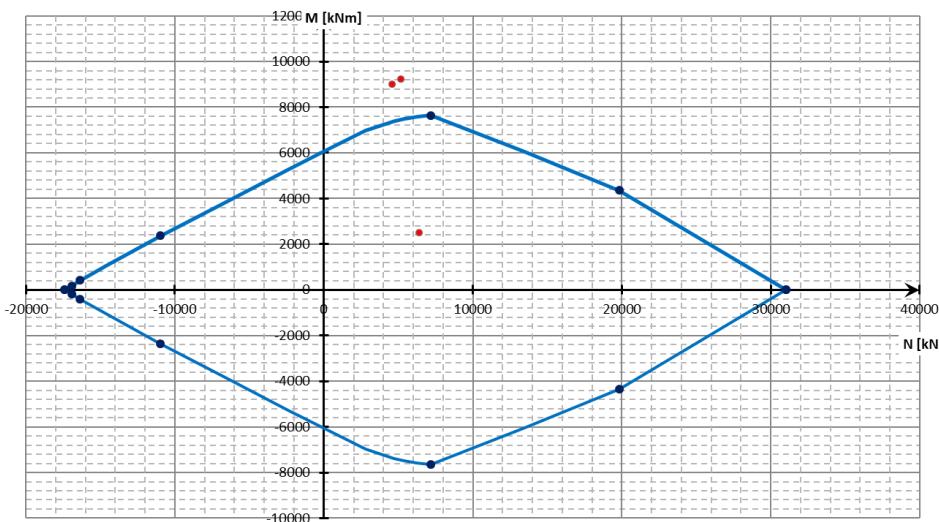
1. $M_{Ed, 1} = 7200 + 5175 \times 0,392 = 9227,5 \text{ kNm}$
2. $M_{Ed, 2} = 7200 + 4575 \times 0,392 = 8993,4 \text{ kNm}$
3. $M_{Ed, 3} = 0 + 6375 \times 0,392 = 2497,6 \text{ kNm}$

3) Vérification du dimensionnement de la colonne :

Pour que la colonne résiste au flambement, elle devra pouvoir reprendre les couples :

1. (5175 kN ; 9227,5 kNm)
2. (4575 kN ; 8993,4 kNm)
3. (6375 kN ; 2497,6 kNm)

Le dimensionnement sans tenir compte du flambement fait lors de l'exercice 4 n'est, sans surprise, pas suffisant pour reprendre le moment additionnel généré par le calcul au second ordre. En effet, nous avions déjà remarqué que l'élancement de la colonne était important et qu'on ne pouvait pas négliger le phénomène de flambement. En plus cette section a été dimensionnée pour minimiser ses dimensions à partir de l'effort (5175 kN ; 7200 kNm).



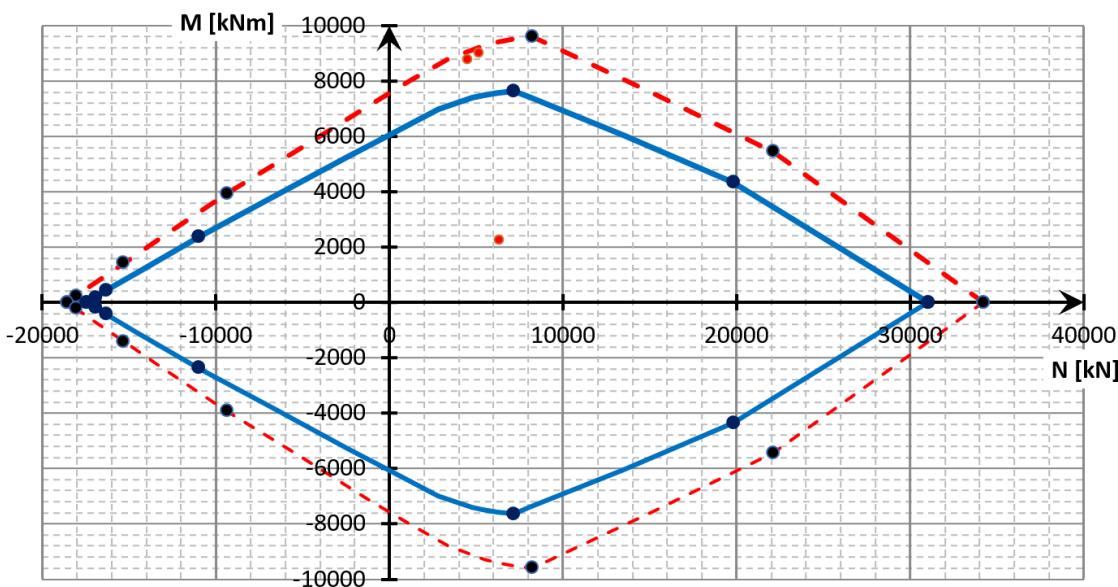
4) Calcul de la nouvelle colonne :

Malheureusement, le dimensionnement pour tenir compte du flambement n'est pas immédiat car un changement de section (et donc l'élancement) modifie l'excentrement généré au second ordre via le paramètre $1/r$.

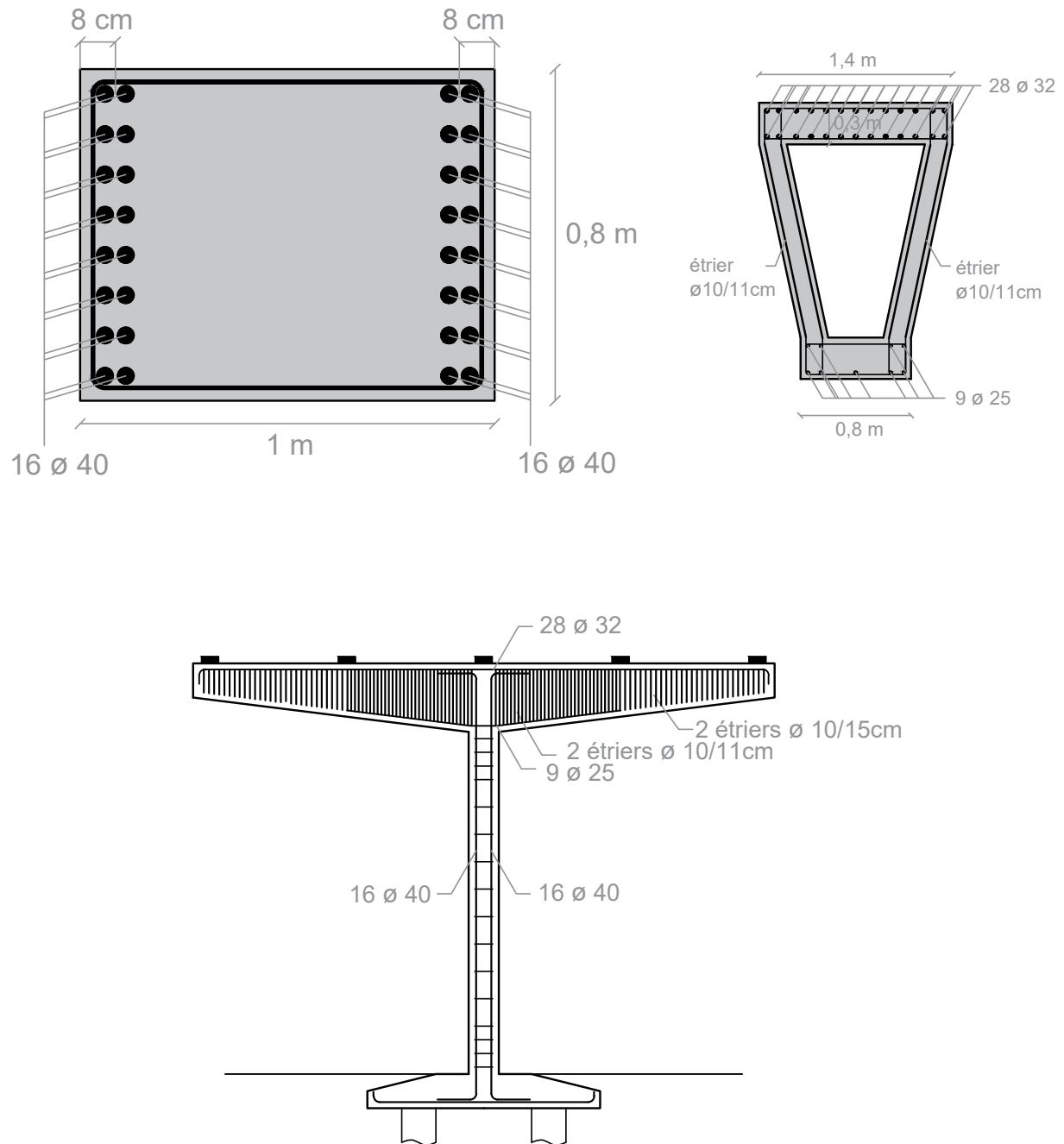
Par itération, il est possible de trouver une section tel que les efforts additionnels induits par le flambement soient repris. Pour limiter cette section, il faut prendre en compte le fait qu'en augmentant la hauteur, on diminue l'élancement et le paramètre $1/r_0$ et donc le moment du second ordre.

On aboutit à une solution : la section $A_c = 1000 \times 800 \text{ mm}^2$ avec 16Ø40 disposé symétriquement de chaque côté. Cette section résiste aux couples (N, M):

1. (5175 kN ; 8990 kNm)
2. (4575 kN ; 8782,5 kNm)
3. (6375 kN ; 2205,1 kNm)



8.5 Dessinez le ferraillage de la structure.



Partie III

Ressources

Dispositions technologiques (issu de la NIT 260)

Ancrages et recouvrements

Longueurs d'ancrages

Pour les longueurs d'ancrage, on donnera ici les valeurs correspondant aux conditions de bonne adhérence de l'acier au béton. Pour les autres cas, on se référera à la NIT 260. Le tableau suivant illustre pour un acier BE500S la valeur de l_b :

En général: $\phi(\text{mm})$	Classe de résistance du béton						
	C20/25	C25/30	C30/37	C35/45	C40/50	C45/55	C50/60
	$= 47 \times \phi$	$= 40 \times \phi$	$= 36 \times \phi$	$= 32 \times \phi$	$= 29 \times \phi$	$= 27 \times \phi$	$= 25 \times \phi$
6	29	25	22	20	18	17	16
8	38	33	29	26	24	22	21
10	48	41	37	32	30	28	26
12	57	49	44	39	36	33	31
16	76	65	58	52	48	44	41
20	95	81	73	64	59	55	51
25	119	101	91	80	74	68	64
32	152	129	116	103	94	87	81
40	206	175	158	139	128	119	110

Longueurs de recouvrements

Pour les longueurs de recouvrement, on donnera ici les valeurs correspondant aux conditions de bonne adhérence de l'acier au béton. Pour les autres cas, on se référera à la NIT 260. Le tableau suivant illustre pour un acier BE500S la valeur de l_b :

En général: $\phi(\text{mm})$	Classe de résistance du béton						
	C20/25	C25/30	C30/37	C35/45	C40/50	C45/55	C50/60
	$= 71 \times \phi$	$= 60 \times \phi$	$= 54 \times \phi$	$= 48 \times \phi$	$= 44 \times \phi$	$= 41 \times \phi$	$= 38 \times \phi$
6	430	360	330	290	260	240	230
8	570	480	440	380	350	330	300
10	710	600	540	480	440	410	380
12	850	730	650	580	530	490	460
14	990	850	760	670	620	570	530
16	1130	970	870	770	710	650	610
20	1420	1210	1090	960	880	820	760
25	1770	1510	1360	1200	1100	1020	950
32	2270	1930	1740	1540	1410	1310	1210
40	3080	2630	2360	2090	1920	1770	1650

Espacements maximum

Espacement transversal minimal des barres

$$\begin{cases} \geq \emptyset \text{ max barres} \\ \geq 20 \text{ mm} \\ \geq \emptyset \text{ granulat} + 5 \text{ mm si } \emptyset \text{ granulat} > 32 \text{ mm} \end{cases}$$

Espacement maximal entre lits d'armatures horizontaux pour raidir un étrier

$\approx 20 - 30 \text{ cm}$

Colonnes

Dimensions minimales

- colonne coulée en place : min 20x20 cm
- colonne préfabriquée : min 14x14 cm

En pratique, ces valeurs issues de la norme ne sont pas toujours respectées. On verra souvent sur chantier des colonnes coulées en place qui font 14 ou 19cm (dimensions liées aux dimensions standard des blocs de maçonnerie). Il faudra redoubler de prudence au flambement, mais également à la section de barres prescrites car l'espace laissé libre au béton est réduit. Il faudra bien vérifier l'absence de nid de poule (gravier sans liant).

Barres longitudinales min/max

$$\text{Le minimum des barres vaut} \begin{cases} \emptyset \geq \emptyset 12 (\emptyset 8 \text{ si préfabriqué}) \\ A_s \geq 0,10 \times N_{Ed}/f_{yd} \\ A_s \geq 0,002 \times A_c \end{cases} \quad \text{Et le max. toléré} \begin{cases} 4\% \text{ hors recouvr.} \\ 8\% \text{ en recouvr.} \end{cases}$$

diamètre et espacement des étriers

$$\begin{array}{l} \text{Diamètre :} \\ \begin{cases} \geq \emptyset 5 \text{ pour des barres de treillis} \\ \geq \emptyset 6 \text{ si } 12 \leq \emptyset_l \leq 20 \\ \geq \emptyset 8 \text{ si } 25 \leq \emptyset_l \leq 32 \\ \geq \emptyset 10 \text{ si } \emptyset_l = 40 \text{ mm} \\ \geq \emptyset 12 \text{ si } \emptyset_l = 50 \text{ mm} \\ \geq \emptyset_{long}/4 \\ \leq 15 \times \emptyset_{long} \end{cases} \\ \text{Et espacement:} \begin{cases} \leq \text{la plus petite dimension de la colonne} \\ \leq 300 \text{ mm} \end{cases} \end{array}$$

Remarque : dans les sections au-dessus et au-dessous d'une poutre ou d'une dalle, jusqu'à une distance égale à la plus grande dimension de la section transversale de la colonne, ces valeurs limites doivent être multipliées par un facteur 0,6.

Dalles

Epaisseur minimale d'une dalle

50 mm

Barres longitudinales min/max en traction

Le minimum des barres est $\begin{cases} \geq 0,6 \times b_t \times d / f_{yd} \\ \geq 0,15\% \times b_t \times d \\ \geq \text{contrôle fissuration} \end{cases}$ et le max. toléré $\begin{cases} 4\% \text{ hors recouvrement} \\ 8\% \text{ en recouvrement} \end{cases}$

Espacement des barres en tractions (concentrées dans les zones de moments maximal)

$$\begin{cases} \leq 1,5 \times h \\ \leq 250 \text{ mm} \end{cases}$$

Poutres

barres longitudinales min /max en traction

Le minimum des barres est $\begin{cases} \geq 0,6 \times b_t \times d / f_{yd} \\ \geq 0,15\% \times b_t \times d \\ \geq \text{contrôle fissuration} \end{cases}$ Et b_t = largeur de la section tendue

Et le maximum de barres toléré $\begin{cases} 4\% \text{ hors recouvrement} \\ 8\% \text{ en recouvrement} \end{cases}$

Diamètre et espacement des étriers

Espacement longitudinal étriers : l'espacement maximal entre les armatures d'effort tranchant dans le sens longitudinal est égal à $0,75 \times d$

Espacement transversal : l'espacement maximal dans le sens transversal entre les éléments d'une même série d'armatures d'effort tranchant est $0,75 \times d$ (avec un maximum de 600 mm).

Autres

Pour : les armatures secondaires transversales (nécessaires dans les zones de frette, dans les zones de recouvrements, dans les dalles, etc..), les armatures de peau pour la microfissuration, les armatures de torsion, les voiles et autres cas non repris dans ce résumé, nous vous renvoyons à la norme.

Aciers : diamètres commerciaux (C : 134/664)

Section des barres en cm^2

ϕ en mm	cff en cm	Nombre de barres												ϕ en mm		
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13		
6	1.9	0.28	0.57	1.13	1.41	1.70	1.98	2.26	2.54	2.83	3.11	3.39	3.68	3.96	0.222	
8	2.5	0.50	1.01	1.51	2.01	2.51	3.02	3.52	4.02	4.52	5.03	5.53	6.03	6.53	7.04	0.395
10	3.1	0.79	1.57	2.36	3.14	3.93	4.71	5.50	6.28	7.07	7.85	8.64	9.42	10.21	11.00	0.617
12	3.8	1.13	2.26	3.39	4.52	5.65	6.79	7.92	9.05	10.18	11.31	12.44	13.57	14.70	15.83	0.888
14	4.4	1.54	3.08	4.62	6.16	7.70	9.24	10.78	12.32	13.85	15.39	16.93	18.47	20.01	21.55	1.210
16	5.	2.01	4.02	6.03	8.04	10.05	12.06	14.07	16.08	18.10	20.11	22.12	24.13	26.14	28.15	1.580
20	6.3	3.14	6.28	9.42	12.57	15.71	18.85	21.99	25.13	28.27	31.42	34.56	37.70	40.84	43.98	2.470
25	7.9	4.91	9.82	14.73	19.63	24.54	29.45	34.36	39.27	44.18	49.09	54.00	58.90	63.81	68.72	3.850
28	8.8	6.16	12.32	18.47	24.63	30.79	36.95	43.10	49.26	55.42	61.58	67.73	73.89	80.05	86.21	4.830
32	10.1	8.04	16.08	24.13	32.17	40.21	48.25	56.30	64.34	72.38	80.42	88.47	96.51	104.55	112.59	6.310
40	12.6	12.57	25.13	37.7	50.27	62.83	75.40	87.96	100.53	113.1	125.66	138.23	150.8	163.36	175.93	9.860