# Principi di sistemi elettrici

Lorenzo Minuz

March 2022

## Contents

# List of Figures



# List of Theorems

# List of Theorems

## List of Theorems

# 1 Leggi di Kirchhoff e grandezze elettriche

L'elettrotecnica non fa uso delle equazioni di Maxwell; pertanto queste equazioni saranno semplificate.
Prima di introdurre le leggi di Kirchhoff occorre dare delle definizioni di base.

**Definizione 1 (Bipolo elettrico)** *é costituito da una superficie chiusa (frontiera) dalla quale fuoriescono due conduttori (connessioni elettriche) aventi per estremi una coppia ordinata di morsetti che costituiscono una porta elettrica.*

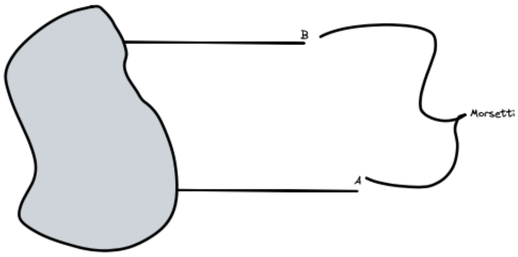



Figure 1: Bipolo elettrico

- *All'interno del bipolo transita potenza elettrica*
- *É fondamentale per l'elettrotecnica*
- *Non produce potenza elettrica*

Il bipolo ha l'obbiettivo di gestire gli scambi energetici (elettrici).

**Definizione 2 (Corrente elettrica)** *é la grandezza fisica che descrive sinteticamente il moto delle cariche elettriche. É la quantitá di carica che attraversa una superficie nell'unitá di tempo.*

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t}; \quad i(t) = \lim_{t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

- *La corrente ha un verso*
- *La corrente puó essere misurata con uno strumento: l'amperometro*

**Definizione 3 (Amperometro)** *uno strumento detto amperometro misura la grandezza algebrica corrente attraverso la sezione di un circuito elettrico. Tale corrente dipende in modo esclusivo dal conduttore considerato al quale si correla univocamente ed é dotata di segno.*

**Teorema 1 (Legge di Kirchhoff delle correnti)** *la somma algebrica delle correnti attraverso una superficie chiusa qualunque é identicamente nulla.*

$$\sum_j = i_j(t) = 0$$

La legge di Kirchhoff deriva dalla proprietá di conservazione della carica elettrica. Se $i$ é entrante allora la corrente é positiva, se, invece, é uscente allora la corrente sará negativa e se la corrente attraversa una superficie allora sará nulla.
Questa legge é una conseguenza della proprietá di conservazione della carica elettrica.

**Definizione 4 (Tensione elettrica o differenza di potenziale)** *la tensione $[V]$ é la grandezza fisica collegata alle forze che possono agire sulle cariche elettriche. Rappresenta il lavoro fatto per spostare una carica unitaria dal punto $A$ al punto $B$.*

$$V_{AB} = \frac{L_{AB}}{q} = V_A - V_B$$

- *La tensione si misura con il volmetro*
- *La tensione é fra due punti separati tra loro*

**Definizione 5 (Volmetro)** *tra due qualsiasi punti di un circuito elettrico uno strumento detto volmetro misura la grandezza algebrica tensione. Tale grandezza dipende in modo esclusivo dagli estremi considerati, mentre il percorso orientato tra i due estremi puó essere qualunque. La tensione é dotata di segno.*

**Teorema 2 (Legge delle tensioni)** *la somma algebrica delle tensioni ordinatamente misurabili lungo un percorso chiuso qualunque é identicamente nulla.*

$$\sum_j v_j(t) = 0$$

La posizione e le dimensioni dei bipoli nello spazio sono inessenziali. Conta solo il modo in cui gli elementi sono connessi tra loro, cioé la **topologia** dei circuiti. Si parla di topologia della rete e non di geometria perché le grandezze spaziali non hanno significato. Le leggi di Kirchhoff definiscono l'interazione fra le tensioni e le correnti presenti in un circuito e sono legate alla topologia del circuito, cioé dipendono da come i bipoli cono collegati fra loro.

**Definizione 6 (Topologia)** *la topologia di rete è il modello geometrico (grafo) finalizzato a rappresentare le relazioni di connettività, fisica o logica, tra gli elementi costituenti la rete stessa (detti anche nodi).*

**Definizione 7 (Potenza elettrica)** *la potenza elettrica esprime la rapiditá di accrescimento del lavoro. Il prodotto delle grandezze tensione e corrente identifica la grandezza algebrica potenza elettrica $[W]$.*

$$p(t) = v(t) \cdot i(t)$$

La potenza é una funzione non lineare.
La potenza elettrica puó essere misurata tramite l'utilizzo combinato di un volmetro e di un amperometro. É possibile compendiare i due strumenti in uno strumento unico: il wattometro.

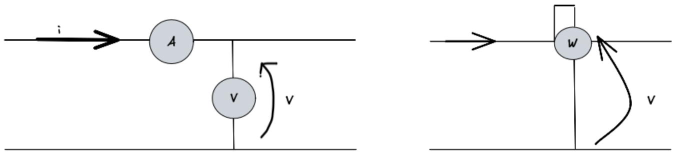



Figure 2: Schematizzazione wattometro

## 1.1 Ipotesi fondamentale per la teoria dei circuiti

I concetti di tensione, corrente e bipolo elettrico nei fenomeni elettromagnetici non sono sempre veri. La modellazione di un fenomeno elettromagnetico mediante bipoli caratterizzati da tensione e corrente univoche é valida soltanto se:

$$\lambda = \frac{c}{f} \gg d \tag{1}$$

- $\lambda$: lunghezza d'onda
- $f$: massima frequenza
- $c$: velocitá della luce
- $d$: massima dimensine lineare

La veridicitá di questa condizione é fondamentale per applicare la teoria dei circuiti. In questo modo si rende irrilevante la velocitá di propagazione del segnale.
Se queste ipotesi sono rispettate allora si avrá una **condizione di regime quasi stazionario**. Si parla di campi quasi stazionari per indicare i campi che non sono strettamente stazionari, ma per i quali le variazioni nel tempo non giocano un ruolo primario.

# 2 Leggi di Ohm e regime stazionario

Ora l'obbiettivo sará quello di definire gli elementi circuitali di una rete elettrica. Per fare ció si fará riferimento al primo principio della termodinamica applicato al bipolo:

$$\delta L_e + \delta L^* = dW + \delta Q \tag{2}$$

con $\delta L^*$: lavoro dei sistemi fisici integranti.

$$\delta L_e = p(t)dt = v(t) \cdot i(t)dt$$

$$v(t) \cdot i(t) + P^* = \frac{dW}{dt} + P \tag{3}$$

Tramite queste equazioni si possono dedurre le equazioni di Ohm del bipolo: cioé la tipologia dell'elemento circuitale che si sta considerando.

## 2.1 Generatore di tensione

Il generatore di tensione applica ai suoi morsetti una tensione identicamente eguale alla sua $fem$ (forza elettromotrice) quale sia la corrente erogata. In termini energetici il generatore di tensione rappresenta la potenza scambiata in modo invertibile, dal bipolo con i sistemi fisici integrati.

$$\delta L_e = \delta L^*$$
$$e = fem \quad [V]$$

$$v(t) = e(t)$$
$$v - e = 0 \quad \forall i(t)$$

Un esempio di generatore di tensione sono le batterie o le pile.

## 2.2 Generatore di corrente

Il generatore di corrente eroga ai suoi morsetti una corrente identicamente eguale alla corrente interna quale che sia la tensione applicata.

$$i(t) = a(t) \quad \forall v(t)$$

In termini energetici il generatore di corrente rappresenta la potenza scambiata in modo invertibile, dal bipolo con i sistemi fisici integrati.

$$p^*(t) = a(t) \cdot v(t)$$

Una cella fotovoltaica puó essere approssimata come un generatore di corrente.
La potenza messa in gioco dai generatori puó essere positiva, negativa o nulla: il generatore puó sia erogare che assorbire potenza.

## 2.3 Resistenza e Conduttanza

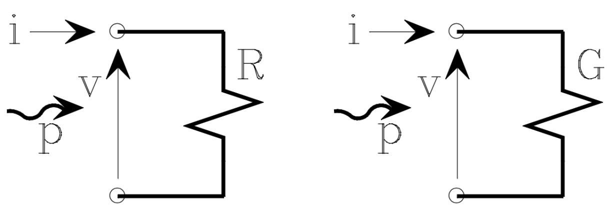



Figure 3: Resistenza e conduttanza

**Formula 1 (Tensione e corrente di un circuito con resistenza/conduttanza)**

$$v(t) = R \cdot i(t)$$

$$i(t) = G \cdot v(t)$$

In termini energetici il lavoro assorbito alla porta elettrica é internamente degradato in calore attraverso la frontiera del bipolo.
La potenza assorbita é sempre non negativa: il resistore puó solo assorbire potenza che viene degradata. $R$ e $G$ sono elementi passivi.

**Formula 2 (Potenza assorbita da una resistenza/conduttanza)**

$$p(t) = R \cdot i(t)^2$$

$$p(t) = G \cdot v(t)^2$$

**Definizione 8 (Corto circuito)** *Si dice corto circuito quando $v(t) = 0$ $\forall i(t)$. Si dice che un circuito é aperto quando: $i(t) = 0$ $\forall v(t)$*

## 2.4 Induttanza e condensatore

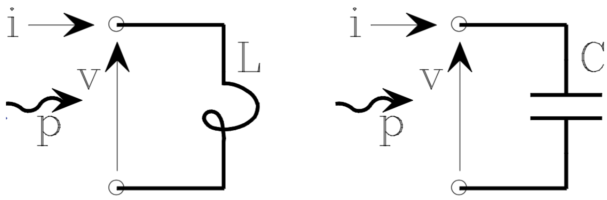



Figure 4: Induttanza e condensatore

**Formula 3 (Tensione ai capi di un'induttanza)**

$$v(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}$$

**Formula 4 (Corrente che attraversa un condensatore)**

$$i(t) = C \cdot \frac{dv(t)}{dt}$$

In termini energetici il lavoro assorbito alla porta elettrica é internamente accumulato sotto forma di energia nel campo magnetico (elettrico) nel bipolo. $L$ e $C$ sono elementi passivi.

# 3 Connessioni serie e parallelo e resistenza equivalente

Le reti sono costituite da un insieme di bipoli connessi fra loro. Le connessioni piú semplici sono quelle dette serie e parallelo.
Tutti i bipoli elementari possono essere connessi in serie e parallelo ma solo alcune configurazioni sono significative.
L'analisi delle connessioni serie e parallelo ha lo scopo di:

- Definire le relazioni di connessione
- Individuare i parametri totali da associarsi al bipolo risultante equivalente in funzione dei parametri dei singoli bipoli

**Definizione 9 (Bipoli equivalenti)** *Due bipoli sono equivalenti se hanno la stessa relazione caratteristica $v - i$: due bipoli tra loro equivalenti possono essere scambiati senza produrre alcun effetto sul resto del circuito.*

### 3.1 Connessione in serie

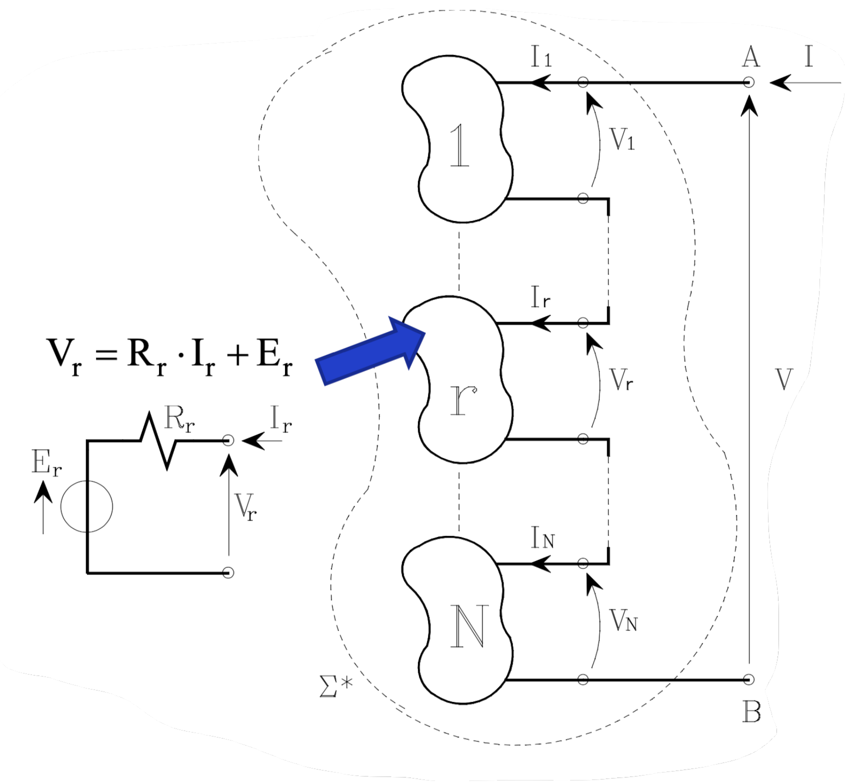



Figure 5: Connessione in serie

Relazioni di connessione:

$$\begin{cases} I_r = I \quad \forall r \\ \sum V_r = V \end{cases}$$

$$V = E_{tot} + R_{tot} \cdot I$$

$$E_{tot} = \sum E_r \tag{4}$$

**Formula 5 (Connessione in serie di $n$ resistenze)**

$$R_{tot} = \sum R_r \tag{5}$$

Nei bipoli collegati in serie, il terminale del primo bipolo e un terminale del secondo bipolo sono uniti in un nodo a cui sono collegati le componenti.
Posso sostituire $n$ generatori di tensione con un unico generatore (stessa cosa anche per le resistenze).

### 3.2 Connessione in parallelo

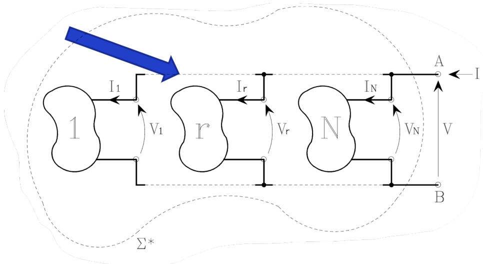



Figure 6: Connessione in parallelo

Relazioni di connessione:

$$\begin{cases} V_r = V \quad \forall r \\ \sum I_r = I \end{cases}$$

$$I = A_{tot} + G_{tot} \cdot V$$

$$A_{tot} = \sum A_r \tag{6}$$

**Formula 6 (Connessione in parallelo di $n$ resistenze)**

$$G_{tot} = \sum G_r \tag{7}$$

$n$ bipoli si dicono collegati in parallelo quando ciascuno dei terminali di un bipolo é collegato a uno dei terminali dell'altro.
Nel caso in cui avessi **due** resistenze in parallelo posso riscrivere $R_{tot}$ e $G_{tot}$ come:

$$G_{tot} = G_1 + G_2 \tag{8}$$

**Formula 7 (Resistenza equivalente di due resistenze in parallelo)**

$$R_{tot} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \tag{9}$$

### 3.3 Partitore di tensione

Permette di calcolare la singola tensione in un circuito con $n$ resistenze in serie.

$$I = \frac{E}{R_{tot}}$$

**Formula 8 (Partitore di tensione)**

$$V_r = R_r \cdot I = R_r \cdot \frac{E}{R_{tot}} \tag{10}$$

## 3.4 Partitore di corrente

Il partitore di corrente passante per ogni conduttanza in un circuito in parallelo.

$$V = \frac{A}{G_{tot}}$$

**Formula 9 (Partitore di corrente)**

$$I_r = G_r \cdot V = G_r \cdot \frac{A}{G_{tot}} \tag{11}$$

## 3.5 Trasformazioni stella triangolo

Esistono relazioni di equivalenza anche fra circuiti accessibili da tre o piú terminali.
La trasformazione stella/triangolo é particolarmente utile nella semplificazione dei circuiti.

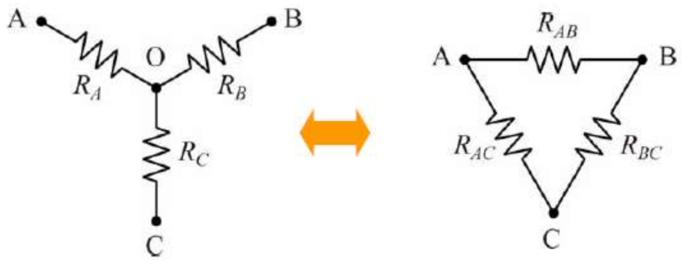



Figure 7: Trasformazione stella triangolo

Per la stella ciascuna resistenza equivalente corrisponde alla serie delle due resistenze che collegano la coppia di terminali. Per il triangolo ciascuna resistenza equivalente corrisponde al parallelo della resistenza che collega la coppia di terminali che la serie delle altre due resistenze. Per intercambiabile le trasformazioni stella e triangolo é comodo immaginare i due tripoli sovrapposti.

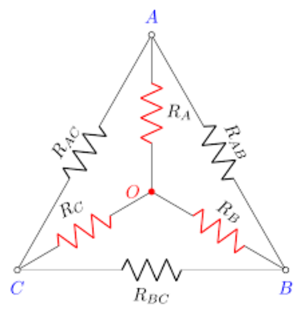



Figure 8: Stella Triangolo sovrapposti

Facendo ció é facile ricondursi alle seguenti formule:

$$\begin{array}{ll} G_{ac} = \frac{G_c G_a}{G_a + G_b + G_c} & R_a = \frac{R_{ab} R_{ac}}{R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}} \\ G_{ab} = \frac{G_a G_b}{G_a + G_b + G_c} & R_b = \frac{R_{ab} R_{bc}}{R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}} \\ G_{bc} = \frac{G_b G_c}{G_a + G_b + G_c} & R_c = \frac{R_{bc} R_{ac}}{R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}} \end{array}$$

# 4 Metodo di soluzione dei circuiti

## 4.1 Analisi di un circuito elettrico

L'analisi o risoluzione di un circuito elettrico significa: calcolare le tensioni ai capi di tutti i lati del circuito, calcolare le correnti in ogni lato del circuito.
I metodi di risoluzione delle reti elettiche si dividono in:

- Generali: quando non dipendono dalla particolare struttura della rete oggetto d'analisi
- Particolari: quando possono essere applicati solo ad una specifica classe di circuiti

I metodi piú utilizzati sono il metodo grafico (particolare) e il metodo algebrico (generale).

## 4.2 Metodo grafico e metodo algebrico

### 4.2.1 Metodo grafico

Questo metodo é particolare perché puó essere applicato solo a circuiti con topologia semplice ma é estremamente utile nella soluzione di circuiti non lineari.
Svolgimento del metodo:

1. Si divide il circuito in due parti
2. Si tracciano i grafici delle due parti del circuito e si trova l'intersezione tra le curve caratteristiche ottenute ($v = \pm r_i \cdot i \pm E$)

### 4.2.2 Metodo algebrico

Il metodo algebrico deve consentire di scrivere un numero di equazioni linearmente indipendenti pari al numero di incognite.

- In un circuito con $L$ lati, il numero di incognite é pari a una corrente ed una tensione per ogni lato
- Le $L$ equazioni linearmente indipendenti sono rappresentate da $L$ equazioni di Ohm scrivibili per gli $L$ lati

Un generico circuito ha $N$ nodi e quindi posso scrivere $N$ leggi delle correnti non tutte peró linearmente indipendenti. Alla fine quindi potró scrivere $N - 1$ equazioni linearmente idipendenti.
Dopo aver scritto queste equazioni si puó notare che mancano ancora $L - N + 1$ equazioni per ottenere un sistema in grado di ricavare tutte le incognite del problema. Le equazioni mancanti le posso ricavare applicando la legge delle correnti agli anelli del circuito.

**Definizione 10 (Maglia)** *insieme di lati che costituisce un percorso chiuso.*

**Definizione 11 (Anello)** *maglia che non contiene all'interno altre maglie.*

#### 4.2.3 Teorema di Tellegen

Il teorema di Tellegen é un metodo alternativo per risolvere i circuiti.
I circuiti elettrici devono soddisfare le proprietá implicite dei fenomeni elettromagnetici: la piú importante é la conservazione dell'energia. La conservazione dell'energia é espressa in termini di potenza.

**Teorema 3 (Teorema di Tellegen)** *Data una rete che contiene $N_{gen}$ e $N_{load}$ carichi:*

$$\sum v_k(t) \cdot i_k(t) = \sum v_j(t) \cdot i_j(t) \quad \forall t \tag{12}$$

*La potenza dei generatori deve essere istantaneamente assorbita dai carichi.*

### 4.3 Corollario di Milmann

Il corollario di Milmann si applica a particolari tipi di reti elettriche.
**Ipotesi:** rete lineare costituita da un qualsiasi numero di lati connessi in parallelo da solo due nodi.
**Tesi:** é possibile scrivere la formula analitica che consente di calcolare la tensione incognita tra i due nodi $V_{AB}$. Tale formula viene scritta direttamente guardando la rete.

$$V_{AB} = \frac{\pm \sum \frac{E}{R} \pm A}{\sum \frac{1}{R}} \tag{13}$$

Al numeratore bisogna:

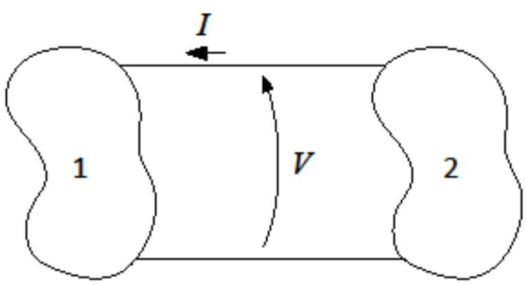
- Inserire la somma delle $fem$ associate ai generatori di tensione divise per la resistenza in serie; i contributi avranno segno positivo se le $fem$ sono dirette come la tensione incognita
- Inserire la somma delle correnti interne di tutti i generatori presenti; la corrente é positiva se punta al nodo $A$

Al denominatore bisogna invece:

- Inserire la somma dell'inverso della resistenza in serie ai generatori di tensione o in lati senza alcun generatore

### 4.4 Teorema di sostituzione

**Esempio 1** *Applicazione del teorema di sostituzione:* 1 *e* 2 *sono due parti generiche di una rete*




*elettrica e $V$ e $I$ rappresentano i valori di tensione e corrente esistenti tra le due parti del circuito.*

*Sostituendo 2 con un generatore di tensione con $fem$ pari a $V$, tutte le tensioni e le correnti in 1 rimangono invariate. Sostituendo 2 con un generatore di corrente interna pari a $I$, tutte le tensioni e le correnti in 1 rimangono invariate.*

Utilizzando questo teorema é quindi possibile sostituire una parte di rete con un generatore di tensione e/o di corrente con gli stessi valori di $I$ e $V$ della parte sostituita.

## 4.5 Disaccoppiamento con generatori di tensione e di corrente

Il generatore ideale di tensione consente di disaccoppiare la rete quando in parallelo a diverse parti della stessa rete. La legge delle tensioni rimane di fatto invariata anche separando la rete in due sotto circuiti. Ogni sotto circuito puó essere risolto separatamente. La corrente del generatore di tensione si ricava utilizzando la legge delle correnti.
Si puó procedere allo stesso modo utilizzando un generatore ideale di corrente. In questo caso la tensione ai capi del generatore sará ricavata utilizzando la legge delle tensioni.

## 4.6 Teorema di sovrapposizione

É possibile risolvere un circuito applicando il principio di sovrapposizione delle cause e degli effetti. Il circuito é risolvibile costruendo un sistema lineare contenente:

- Termini noti: forze e cause (generatori di tensione e di corrente)
- Incognite: risposte ed effetti (tensioni e correnti)
- Coefficienti: proprietá costitutive del sistema

Ciascuna tensione o corrente di un circuito lineare puó essere espressa come somma dei valori che essa assume quando nel circuito agisce un solo generatore alla volta (cioé come sovrapposizione degli effetti prodotti dai singoli generatori).
Questo metodo é molto utile nel caso in cui ci siano pochi generatori all'interno del circuito.
Il teorema di sovrapposizione non é valido per le potenze dato che sono legate da relazioni non lineari alle tensini ed alle correnti dei generatori.

## 4.7 Teoremi di Thevenin e Norton

**Teorema 4 (Teorema del generatore equivalente)** *un bipolo misto puó essere reso equivalente agli effetti esterni a due bipoli serie e parallelo, nel senso che questi risultano caratterizzati dal medesimo legame ingresso-uscita proprio del bipolo originario.*

I teoremi di Thevenin e Norton derivano da questo enunciato.

### 4.7.1 Teorema di Thevenin

**Ipotesi:** la rete su cui sono messi in evidenza i morsetti $A$ e $B$ é lineare.

**Teorema 5 (Teorema di Thevenin)** *La rete lineare puó essere sostituita da una rete equivalente costituita dalla serie di un generatore ideale di tensione e da un resistore. La tensione del generatore é la tensione ai capi dei morsetti $A$ e $B$ quando sono lasciati aperti, la resistenza é la resistenza equivalente vista dai morsetti $A$ e $B$ quando la rete é passivata.*

**Dimostrazione 5.1** *1. Si applica il principio di sostituzione e si sostituisce il bipolo $B$ con un generatore di corrente, di valore pari alla corrente effettiva $i$*

*2. Si applica il teorema di sovrapposizione. I generatori indipendenti presenti sono: i generatori interni ad $A$ , il generatore di corrente $i$. Si ottiene quindi la relazione:*

$$v = R_T i + v_T$$

*che rappresenta la relazione caratteristica del bipolo $A$. Essa coincide con la relazione caratteristica del circuito equivalente di Thevenin*

### 4.7.2 Teorema di Norton

**Ipotesi:** la rete in cui sono messi in evidenza i morsetti $A$ e $B$ é lineare.

**Teorema 6 (Teorema di Norton)** *La rete lineare puó essere sostituita da una rete equivalente costituita dal parallelo di un generatore ideale di corrente e da un conduttore. La corrente del generatore é la corrente tra i morsetti $A$ e $B$ quando sono chiusi in corto circuito, la conduttanza del conduttore é la conduttanza del corto circuito vista dai morsetti $A$ e $B$ quando la rete é passivata.*

La dimostrazione é molto simile a quella fatta per il teorema di Thevenin.
L'equivalenza é solo agli effetti esterni in termini di variabili di tensione-corrente e di potenza alla sola porta elettrica.

## 4.8 Teorema del massimo trasferimento di potenza

I generatori reali non possono fornire al carico una potenza infinita come invece viene assunto per i generatori ideali. Tendenzialmente si puó immaginare un generatore reale come un generatore ideale piú una resistenza che dissipa potenza.
Il teorema del massimo trasferimento di potenza stabilisce le condizioni che massimizzano la potenza ceduta da una sorgente reale (generatore reale) a un carico.
**Ipotesi:** la sorgente reale é lineare. La resistenza di carico é lineare a tempo invariante.

**Teorema 7 (Teorema del massimo trasferimento di potenza)** *La potenza trasferita al carico $R$ da un generatore reale di resistenza interna $R_s$ é massima quando la resistenza di carico eguaglia quella interna del generatore reale (o del suo equivalente di Thevenin)*

É molto comodo per la risoluzione degli esercizi applicare l'equivalente di Thevenin prima di utilizzare questo teorema.

**Dimostrazione 7.1** *Si osserva che la potenza é sempre maggiore o uguale a zero. Inoltre essa assume sempre valori finiti e presenta un massimo il cui valore puó essere determinato calcolando la derivata prima della potenza rispetto a $R$.*

$$\frac{dP}{dR} = E_s^2 \cdot \left[ \frac{(R_s + R)^2 - 2R(R_s + R)}{(R_s + R)^4} \right] = 0$$

$$R_s + R - 2R = 0 \longrightarrow R = R_s$$

Da questa dimostrazione si puó notare che la potenza massima trasferita al carico si ha per $R_s = R$ ed in tal caso é:

$$P_{max} = \frac{E_s^2}{4R_s}$$

### 4.8.1 Rendimento

Abbiamo giá dimostrato che non é possibile fornire al carico una potenza infinita. Pertanto ora ci si chiede: quanta della potenza che genero puó essere trasferita al carico?
Per rispondere a questa domanda bisogna introdurre il rendimento, ovvero il rapporto tra la potenza erogata al carico e la potenza generata dal generatore ideale.

$$\eta = \frac{P_e}{P_g} = \frac{P_e}{P_e + P_p} = \frac{RI^2}{RI^2 + R_s I^2} = \frac{R}{R + R_s}$$

Di solito i rendimenti accettabili nelle applicazioni sperimentali sono superiori a $0,9$.

| R [Ω] | I [A] | $p_g$ [W] | $p_e$ [$W$] | η [%] | V |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 2 | 4 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 2 | 1 | 50% | 1 |
| 3 | 0,5 | 1 | 0,75 | 75% | 1.5 |
| 4 | 0,4 | 0,8 | 0,64 | 80% | 1.6 |
| 9 | 0,2 | 0,4 | 0,36 | 90% | 1.8 |

Figure 9: Tabella rendimenti

I rendimenti bassi, tendenzialmente, si usano per distinguere la presenza e l'assenza di un segnale (es. telefonia).
Nelle applicazioni industriali invece é opportuno avere un'alta efficienza per disperdere meno energia possibile.

# 5 Campo di conduzione e resistore

Per introdurre il campo di conduzione e la resistivitá occorre formulare un esperimento concettuale. Si impone una tensione $V$ ad un bipolo. Data una tensione $V$ si ottiene un campo elettrico:

$$V = \int \mathbf{E} \cdot t dl$$

Nel momento in cui io ho un campo elettrico se le cariche all'interno del materiale allora avró anche una forza. In questo caso le cariche si trovano all'interno di un conduttore e quindi si muoveranno come in un fluido molto viscoso. Si avrá quindi una forza pari a:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

e la carica avrá una velocitá pari a ($\mathbf{u}$ : velocitá di carica):

$$\mathbf{u} = \mu\mathbf{E}$$

con $\mu$: mobilitá delle cariche (dipende dal conduttore). Il movimento di cariche da luogo alla densitá di corrente $\mathbf{J}$:

$$\mathbf{J} = \rho_L \mathbf{u} = \rho_L \mu \mathbf{E}$$

La densitá di corrente é legata al campo elettrico da $\sigma$ (conducibilitá elettrica) o da $\rho$ (resistivitá elettrica).

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \frac{1}{\rho}\mathbf{E} \tag{14}$$

Considerando un materiale come un tubo di flusso, per la densitá di corrente si ha:

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS$$

La resistivitá, inoltre, di conduttori, semiconduttori e isolanti dipende dalla temperatura.

## 5.1 Resistenza di un codunttore lineare

Si prenda in considerazione un conduttore di sezione costante con $\sqrt{S}$ molto minore della sua lunghezza e avente resistivitá $\rho$ uniforme entro il proprio volume. É possibile calcolare il potenziale come:

$$V = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{t} dl = El = \rho Jl = \rho \frac{I}{S} l = \rho \frac{l}{S} \cdot \mathbf{I}$$

La resistnza quindi risulterá definita come:

$$R = \frac{V}{I} = \rho \frac{l}{S} \tag{15}$$

essa quindi dipende dalle proprietá fisiche del materiale, sia quelle geometriche.
Il passaggio di corrente in un mezzo conduttore provoca dissipazione di potenza.

| Grandezze | CE |
|---|---|
| Grandezze locali | E |
| | J |
| | σ·E=J |
| Grandezze integrali | E·*l* =V |
| | J·S=I |
| Leggi di Ohm | V=R·I |
| | I=G·V |
| | E (fem) |
| | A (corrente interna) |
| Leggi di Kirchhoff | ΣV=0 |
| | ΣI=0 |

Figure 10: Riassunto campo elettrico

# 6 Campo magnetico, induttanza e mutuo conduttore

## 6.1 Campo di forza e campo magnetico

Per introdurre il campo magnetico occorre fare un esperimento concettuale.

**Esempio 2** *Si consideri un conduttore percorso da corrente in aria, l'ago di una bussola posto in prossimitá di questo modifica la sua posizione: questo sta ad indicare la presenza di un campo di forza nell'ambiente circostante il conduttore. Tale campo di forza dipende dalla corrente circolante nel conduttore e dalla forma del conduttore.*

Ogni conduttore percorso da corrente crea intorno a sé un campo magnetico in grado di far deviare dei piccoli aghi magnetici posti vicino al conduttore. Il campo magnetico si puó rappresentare graficamente utilizzando le linee di campo, che sono linee lungo le quali si orientano gli aghi magnetici.

**Come si orienta il campo magnetico?** Il campo magnetico prodotto da un conduttore rettilineo si rappresenta con delle linee di campo aventi la forma di circonferenze perpendicolari al conduttori con centro sul filo stesso.

- Il campo magnetico é inversamente proporzionale al raggio
- Il campo é presene per tutta la lunghezza del conduttore

Il campo magnetico lo si indica con la lettera $H$ $[\frac{A}{m}]$. Nel caso del conduttore rettilineo il campo magnetico sará pari a:

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

Ora si procederá ad introdurre la legge di Ampere.

**Formula 10 (Legge di Ampere)**

$$\oint_{\Gamma} \bar{H} \times \bar{t} dl = \sum_{k} \pm I_k \tag{16}$$

Dalla legge di Ampere, considerando una superficie $\Sigma$ avente per frontiera il clico $\Gamma$, per il teorema di Stokes si ottiene:

$$\oint_{\Gamma} \bar{H} \times \bar{t} dl = \int_{\Sigma} \bar{J}_{\sigma} \times \bar{n} dS \longrightarrow \int_{\Sigma} J_{\sigma} \times n dS = \sum_{k=1}^{N} I_k = I_{tot} = \mathcal{F}$$

che corrisponde alla corrente totale concatenata o anche definita forza magnetomotrice ($fmm$) $\mathcal{F}$ (indicata anche con la lettera $M$).
É possibile aumentare la corrente semplicemente andando a modificare la forma del conduttore. Per esempio prendiamo in considerazione:

- Spira: il conduttore viene piegato per formare una circonferenza. Il campo magnetico prodotto al centro della spira é dato dalla somma del campo prodotto da ogni suo elemento elementare cosí da ottenere un campo complessivo un po' piú intenso di quello dovuto al conduttore rettilineo

- Solenoide: insieme di spire affiancate. I campi magnetici prodotti dalle varie spire si sommano fra loro, generando un campo magnetico complessivo ancora piú intenso. Se il diametro delle spire é ridotto rispetto alla lunghezza del solenoide, il campo magnetico al suo interno risulta uniforme e puó essere espresso come:

  $$H \cdot l = I_{tot} = N \cdot I$$

  Si parla in tal caso di solenoide ideale. Riassumendo si puó dire che il campo magnetico dipende:

  - Dal numero di spire del solenoide
  - Dalla corrente che passa nel solenoide
  - Dalla lunghezza complessiva del circuito magnetico

Il solenoide è la geometria più utilizzata e l'unica che sarà richiesta negli esercizi.
Fatte queste osservazioni si puó notare che la forza magnetomotrice $\mathcal{F} = NI$ rappresenta la causa che produce il campo magnetico.

### 6.1.1 Campo magnetico del solenoide

Ora si introdurrá il concetto di induzione magnetica: $B$ $[T = \frac{Wb}{m^2}]$.

**Definizione 12 (Tubo di flusso)** *Il tubo di flusso é la porzione di spazio che racchiude il campo magnetico.*

**Definizione 13 (Flusso magnetico)** *Il flusso magnetico é uguale in qualsiasi sezione del tubo ed é definito come:*

$$\Phi = \int_S \bar{B} \times \bar{n} dS \approx B \cdot S \tag{17}$$

Il campo magnetico, in termini di qualitá della linea di campo, dipende dal materiale che costituisce il nucleo.

**Definizione 14 (Permeabilitá magnetica)** *La permeabilitá magnetica assoluta da un materiale $\mu$ esprime l'attitudine di un mezzo a polarizzarsi in seguito all'applicazione di un campo magnetico. Si indica con $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6}$ la permeabilitá magnetica dell'aria.*

Posso ora riscrivere la legge di Ampere andando ad inserire la definizione di flusso; si noteranno delle analogie con la definizione di forza magnetomotrice.

$$\begin{cases} \oint_\Gamma \bar{H} \times \bar{t} dl = \oint_\Gamma H \cdot l = \oint_\Gamma \frac{B}{\mu} \cdot l = \Phi \cdot \oint_\Gamma \frac{l}{\mu S} = \Phi \cdot \mathcal{R} \\ \oint_\Gamma \bar{H} \times \bar{t} dl = I_{tot} = N \cdot I = \mathcal{F} \end{cases}$$

Nel sistema scritto sopra si nota che é stata definita una nuova grandezza: detta riluttanza magnetica $[H^{-1}]$. É possibile indicarla anche con $\theta$.
Sempre dal sistema sopra si nota che $\mathcal{F}$ e $\mathcal{R}$ sono in relazione tra loro.

$$\mathcal{F} = \Phi \mathcal{R} \tag{18}$$

Dopo tutte queste osservazioni posso dire che i fenomeni magnetici sono trattati in termini delle grandezze integrai di flusso e di forza magnetomotrice. Si puó anche notare che ci sono parecchie analogia con l'analisi dei circuiti elettrici.

## 6.2 Rete magnetica

Viste le considerazioni sopra, ora l'obbiettivo é quello di andare a studiare le analogie che ci sono tra i circuiti elettrici e magnetici.
Come per le retti elettriche varranno le leggi di Kirchhoff (magnetiche)

$$\sum U = 0 \tag{19}$$

$$\sum \Phi = 0 \tag{20}$$

e le leggi di Ohm (magnetiche)

$$\mathcal{R} = \frac{l}{\mu S} = \theta \tag{21}$$

$$\mathcal{P} = \frac{1}{\mathcal{R}}$$

$$\mathcal{F} = N \cdot I\text{: Genratore di tensione} \tag{22}$$

$$U = \mathcal{F} - \mathcal{R}\Phi\text{: Relazione tra } U \text{ e } \Phi \tag{23}$$

### 6.2.1 Criterio generale di costruzione di una rete magnetica

1. Si tracciano le linee baricentriche associate ai vari tronchi
2. Suddivisi i vari lati in tratti omogenei a sezione costante, si associa a ciascuno di essi la corrispondente riluttanza
3. In ogni lato del grafo concatenato con un solenoide di N spire percorse dalla corrente $I$ si colloca un corrispondente generatore serie di $fmm$ orientata, a partire dall'assegnato senso di percorrenza del solenoide, secondo la regola della mano destra.

# 7 Analogie tra rete elettrica e rete magnetica

L'analogia tra reti elettriche e magnetiche, utilizzata per estendere l'analisi dei circuiti anche a queste ultime, é legata solo alla forma delle equazioni che governano i due fenomeni. Essa non coinvolge in alcun modo la fisica dei medesimi.
La differenza netta fra le due tipologie di reti é legata a:

- La fisica del fenomeno
- La natura del legame costitutivo
- Le condizioni al contorno

## 7.1 La fisica del fenomeno

In un circuito elettrico si ha un effettivo trasporto netto di una densitá volumetrica di carica, compiuto ad una certa velocitá. In un circuito magnetico invece, non si ha alcun movimento, ma solo una polarizzazione locale.
Da un punto di vista energetico:

- Il processo di conduzione é causa di una degradazione in calore
- L'accumulo di energia che é conservata nel mezzo nel quale si svolge il circuito magnetico viene integralmente restituita fino a quando il campo magnetico si estingue

## 7.2 Legame costitutivo

Tra i due legami costitutivi sussiste una differenza sostanziale. Mentre la relazione $J(E)$ puó in generale ritenersi con buona approssimazione, linare monodroma (ad ogni valore di $J$ corrisponde un valore di $E$), quella corrispondente $B(H)$ invece é costituita da un ciclo di isteresi, in generale non lineare e polidroma (ad ogni valore di $B$ corrispondono due valori di $H$).

## 7.3 Le condizioni al contorno

Per il campo di conduzione il rapporto tra la conducibilitá $\sigma_c$ di un conduttore e quella $\sigma_i$ di un isolante é compreso tra $10^{12}$ e $10^{19}$. Per il campo magnetico l'analogo rapporto tra la permeabilitá $\mu_c$ di un conduttore ferromagnetico e quella $\mu_i$ di un isolante magnetico, risulta compresa tra $10^3$ e $10^4$.
Mentre la superficie esterna di un conduttore puó costruire, nelle usuali applicazione, la parete laterale di un tubo di flusso del campo $J$, nel caso del campo magnetico é vero solo in prima approssimazione.

# 8 Reti magnetiche

## 8.1 Regime quasi stazionario magnetico

Le equazioni delle reti magnetiche risultano impiegabili solo nel caso in cui i solenoidi siano alimentati da una corrente impressa nota. Esse risultano applicabili anche quando si ha una tensione costante impressa in serie a una resistenza.
Nel caso di corrente impressa variabile nel tempo, verificala la condizione di Abraham, tutto quando detto sopra continua a valere in funzione del tempo.

**Condizione di Abraham**

$$\begin{cases} \sum \Phi(t) = \sum b(t)A = 0 \\ \sum u(t) = \sum h(t)l = 0 \\ Ni(t) = \{(t) = u(t)\mathcal{R}\Phi(t) \end{cases}$$

## 8.2 Induttanza

### 8.2.1 Legge di Faraday o dell'induzione elettromagnetica

Consente di individuare il legame tensione corrente.

**Teorema 8 (Legge di Faraday)** *Ai capi di una spira immersa in un campo magnetico si produce una $fem$ pari alla derivata rispetto al tempo del flusso del campo magnetico concatenato della spira.*

Questa legge é stata dedotta per via sperimentale.
La variazione del flusso puó essere causata dal movimento della spira, dal movimento delle sorgenti, dalla dipendenza rispetto al tempo delle correnti che producono il campo magnetico.

### 8.2.2 Induttanza e $fem$ indotta

Un qualsiasi circuito, quando é percorso da corrente produce un campo magnetico. Tale campo si concatena anche con il circuito stesso, il flusso concatenato con il circuito risulta:

$$\varphi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}} = \frac{Ni}{\mathcal{R}}\text{: flusso di campo} \tag{24}$$

$$\psi = N\varphi = \frac{N^2 i}{\mathcal{R}}\text{: Flusso concatenato} \tag{25}$$

Il flusso concatenato serve solo per determinare la $fem$ ai morsetti. Esso non é misurabile sperimentalmente.
Da cui segue l'induttanza $[H]$:

$$L = \frac{\psi}{i} = \frac{N^2}{\mathcal{R}} \tag{26}$$

Dal punto di vista delle tensioni ai capi del solenoide si ha:

$$e = -\frac{d\psi}{dt} = -\frac{N^2}{\mathcal{R}}\frac{di}{dt} \longrightarrow v = -e = L\frac{di}{dt} \tag{27}$$

L'induttanza dipende solo da fattori geometrici e/o dal mezzo e puó essere calcolata moltiplicando il quadrato del numero di spire del solenoide per la permeanza equivalente del circuito magnetico vista dal generatore che rappresenta il solenoide nella rete magnetica.

### 8.2.3 Potenza ed energia nell'induttanza

La potenza assorbita alla porta elettrica corrisponde alla rapiditá di variazione dell'energia nell'induttanza.

$$\delta L_e = dW \Longrightarrow p \cdot dt = dW \longrightarrow p = \frac{dW}{dt} = v \cdot i$$

$$W = \int pdt = L\int i \cdot \frac{di}{dt}dt = L\int idi = \frac{1}{2}LI^2 \geq 0 \tag{28}$$

In termini energetici il lavoro assorbito alla porta elettrica é interamente accumulato sotto forma di energia nel campo magnetico nel bipolo. L'energia associata ad un induttore non é legata alla forma della correntne ma solo al valore della corrente nell'istante di valutazione.

**Connessione in serie**

$$L_{eq} = L_1 + ... + L_N \tag{29}$$

**Connessione in parallelo**

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + ... + \frac{1}{L_N} \tag{30}$$

### 8.2.4 Auto e mutua induttanza

Questi fenomeni si verificano quando sono presenti due o piú avvolgimenti.

**Definizione 15 (Autoinduzione)** *Nel fenomeno di autoinduzione si ha la generazione di una $fem$ indotta sul circuito stesso prodotta dalla variazione della propria corrente.*

**Definizione 16 (Mutua induzione)** *Nel fenomeno di mutua induzione si hanno $fem$ indotte dalle variazioni di flusso create da un circuito (o avvolgimento) posto nelle vicinanze. L'effetto é tanto maggiore quanto é maggiore l'accoppiamento fra i circuiti interessati.*

Rappresentazione dell'effetto mutuo tra un avvolgimento ed un altro:

$$fem = e_{2M}(t) = \frac{d\Psi_{12}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\Psi_{12}(t)}{i_1(t)} \cdot i_1(t)\right) = L_{12} \cdot \frac{di_1(t)}{dt} \tag{31}$$

Si puó definire la mutua induttanza come:

$$L_M = L_{12} = \frac{\Psi_{21}}{i_2}|_{i_1=0}$$

con $\Psi_{21}$ che corrisponde al flusso concatenato all'avvolgimento 1 prodotto dalla corrente circolante nell'avvolgimento 2.
Quando circola corrente in entrambi gli avvolgimenti, i due contributi di flusso concatenati con gli avvolgimenti 1 e 2 possono essere calcolati nel modo seguente (ricavata tramite la sovrapposizione degli effetti):

$$\begin{pmatrix} \Psi_1 = \Psi_{11} + \Psi_{12} = L_1 i_1 + L_{21} i_2 \\ \Psi_2 = \Psi_{21} + \Psi_{22} = L_{12} i_1 + L_2 i_2 \end{pmatrix} \tag{32}$$

e le tensioni ai capi dei morsetti risulteranno:

$$\begin{cases} v_1(t) = \frac{d\Psi_1}{dt} = \frac{d}{dt}(L_1 \cdot i_1 + L_{21} \cdot i_2) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + L_M \frac{di_2(t)}{dt} \\ v_2(t) = \frac{d\Psi_2}{dt} = \frac{d}{dt}(L_{12} \cdot i_1 + L_2 \cdot i_2) = L_M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} \end{cases} \tag{33}$$

Queste due equazioni prendono il nome di **equazione di Ohm del mutuo induttore**.
L'equazione del mutuo induttore nel caso generale tiene conto del senso effettivo dell'interazione tra i due avvolgimenti.
Per ottenere l'effettivo senso della mutua induttanza occorre utilizzare la regola della mano destra. In alternativa é possibile utilizzare la regola dei morsetti contrassegnati:

1. Si scelga, in modo arbitrario, uno dei due morsetti e lo si contrassegni
2. Si inietti una corrente nel morsetto scelto e si individui con la regola del cavatappi il senso in cui il flusso che ne consegue circola
3. Si contrassegni ora con il medesimo simbolo il morsetto secondario in cui iniettare uno corrente per far circolare un flusso con lo stesso verso del precedente.
4. Se i due morsetti presi in considerazione hanno verso concorde allora si ha determinato il verso della mutua induttanza.

#### 8.2.5 Potenza ed energia nel mutuo induttore

In termini energetici il lavoro assorbito dalla porta elettrica é interamente accumulato sotto forma di energia nel campo magnetico nel quadripolo. Essa é pari a:

$$W = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 \pm L_M I_1 I_2 \tag{34}$$

| Grandezze | CE |
|---|---|
| Grandezze locali | E |
| | J |
| | σ·E=J |
| Grandezze integrali | E·*l* =V |
| | J·S=I |
| Leggi di Ohm | V=R·I |
| | I=G·V |
| | E (fem) |
| | A (corrente interna) |
| Leggi di Kirchhoff | ΣV=0 |
| | ΣI=0 |

Figure 11: Riassunto campo magnetico

# 9 Condensatore

Un condensatore consiste di due armature di materiale conduttore separate da un isolante ed é in grado di accumulare energia elettrica.
Il condensatore in regime stazionario ($v$ costante nel tempo) viene considerato come un circuito aperto.
La carica delle armature é proporzionale alla tensione ai loro capi attraverso il valore di capacitá del condensatore che si misura in Farad $[F]$:

$$q = C \cdot v$$
$$C = \varepsilon \frac{A}{d} \tag{35}$$

con $\varepsilon$ costante dielettrica (caratteristica del materiale) e $d$ distanza tra le armature.
$v(t)$ é la variabile di stato dei condensatori.

$$v(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt + v(t_0)$$

## 9.1 Potenza e energia del condensatore

$$p = v \cdot i = C \frac{dv}{dt} v \tag{36}$$

$$w = \int p dt = C \int v \frac{dv}{dt} dt = C \int v dv = \frac{1}{2} C V^2 \tag{37}$$

In termini energetici il lavoro assorbito alla porta elettrica é interamente accumulato sotto forma di energia nel campo elettrico nel bipolo. L'energia associata ad un condensatore ideale non é legata alla forma della tensione applicata ma solo al valore di tensione nell'istante di valutazione.

### 9.2 Connessioni dei condensatori

I condensatori in serie ed in parallelo si comportano come la conduttanza.

**Connessione in serie**

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + ... + \frac{1}{C_N} \tag{38}$$

**Connessioni in parallelo**

$$C_{eq} = C_1 + ... + C_N \tag{39}$$

# 10 Transitori

I transitori avvengono quando, in seguito a manovre di interruttori, la rete cambia configurazione. Le grandezze elettriche vengono ridistribuite per ogni singolo componente, dei termini corrispondenti al suo bilancio, cosí da portare la rete in una nuova condizione di bilancio energetico congruente con la nuova topologia della rete. In particolare la ridistribuzione dell'energia avviene negli induttori e nei condensatori (in grado di accumulare energia).
L'energia é una funzione di stato e come tale non puó subire discontinuitá. Le grandezze che presiedono ai processi di accumulo di energia nel circutio sono:

- La corrente di induttanza
$$W_\mu = \frac{1}{2}Li_L^2$$
- La tensione ai capi di una capacitá
$$W_\varepsilon = \frac{1}{2}Cv_C^2$$

La corrente di induttanza e la tensione ai capi della capacitá sono dette variabili di stato.
Le variabili di stato non possono subire discontinuitá e caratterizzano l'evoluzione dinamica di una rete elettrica. Tutte le altre grandezze del circuito sono dette variabili di rete. Per ribilanciare le variabili di rete occorre utilizzare i metodi visti in precedenza (LKT e leggi di Ohm).

**Definizione 17 (Interruttori)** *Gli interruttori sono variatori topologici che hanno lo scopo di modificare la configurazione di una rete.*

Un interruttore puó essere:

- Aperto
$$\begin{cases} t < t_0\text{: circuito aperto} \\ t \geq t_0\text{: corto circuito} \end{cases}$$
- Chiuso
$$\begin{cases} t < t_0\text{: corto circuito} \\ t \geq t_0\text{: circuito aperto} \end{cases}$$

L'obbiettivo di questo capitolo é mettere a punto un metodo analitico ed un metodo circuitale per studiare l'evoluzione delle grandezze elettriche di una rete lineare e tempo invariante del primo ordine durante un transitorio.

**Definizione 18 (Ordine di rete)** *L'ordine di una rete coincide con il numero di componenti che possono accumulare energia in modo autonomo e con l'ordine della derivata nell'equazione che descrive il circuito.*

In questo caso si andranno ad analizzare solo circuiti al primo ordine ovvero circuiti che presentano un solo condensatore o un solo induttore.

## 10.1 Modello differenziale

In un modello differenziale l'uscita dipende sia dai valori istantanei e contemporanei dell'ingresso (effetto $i$), sia dalla storia passata del sistema (causa $E$) stesso. Risolvendo il sistema nei due casi di interruttore aperto e chiuso ed applicando la definizione di induttanza o di condensatore (corrente/potenziale) in funzione del tempo si ottiene:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{E}{L} \tag{40}$$

che prende il nome di **equazione di stato della rete** ed é propria di un sistema lineare tempo invariante del primo ordine.
L'equazione differenziale deve essere associata ad una condizione iniziale nella sua variabile di stato $i(t = 0^+)$.
Nel caso dell'induttore, la corrente é la variabile di stato che non puó avere discontinuitá quindi essa assume il valore che aveva precedentemente. Quindi é possibile mettere a sistema l'equazione differenziale vista sopra con la condizione definita dalla variabile di stato.

$$\begin{cases} \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{E}{L} \\ i(0^+) = i(0^-) \end{cases} \tag{41}$$

## 10.2 Relazione generale

Introducendo $\tau_L = \frac{L}{R}$ all'interno dell'equazione differenziale si ha:

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau_L} i = \frac{E}{L}$$

Tale equazione ammette una soluzione del tipo:

$$i(t) = i_g(t) + i_p(t)$$

Risolvendo l'equazione differenziale si nota che la soluzione omogenea associata é:

$$i_g(t) = K \cdot e^{-\frac{t}{\tau_L}}$$

la soluzione particolare invece dipende dalla forzante e corrisponderá a:

$$i_p(t) = i(+\infty)$$

esso rappresenta anche il valore di $i$ quando il transitorio é terminato (questa soluzione puó essere determinata risolvendo il circuito dato a regime).
Alla fine quindi si otterrá la funzione:

$$i(t) = [i_0 - i(+\infty)] \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + i(+\infty) \tag{42}$$

La soluzione é costituita dalla sovrapposizione di due contributi: stato iniziale e stato dopo il transitorio (finale).

**Definizione 19 (Stabilitá di una rete)** *Si dice stabile un sistema che sta nel suo stato di equilibrio o che evolva a seguito di una perturbazione, spontaneamente verso un altro stato di equilibrio.*

Affinché un circuito sia stabile occorre che $\tau > 0$ e quindi che $R > 0$. Questo succede sempre quando la rete é composta da generatori e da resistori. Dopo $5\tau$ il transitorio é esaurito.

**Definizione 20 (Costante di tempo)** $\tau$ *é detta costante di tempo e misura la rapiditá di variazione del sistema.*

### 10.3 Metodo per ispezione

Il metodo per ispezione costituisce un metodo per l'identificazione dei quattro valori $x(0^-)$, $x(0^+)$, $x(+\infty)$, $\tau$.

1. La condizione in $0^-$ é considerata di regime stazionario. Essa é dedotta sostituendo l'induttore con un corto circuito ed il condensatore con un circuito aperto. In questo modo posso calcolare $i(0^-)$ e $v(0^-)$

2. La condizione in $0^+$ riguarda in modo esclusivo il calcolo della variabile di rete. Compiuta la manovra, all'induttore/condensatore viene sostituito un generatore di corrente/tensione. In questo caso le variabili di stato non variano al passaggio da $0^-$ a $0^+$

3. Per quanto riguarda la condizione di regime, $i(+\infty)$ e $v(+\infty)$ si calcolano cortocircuitando l'induttore e aprendo il condensatore

4. Per il calcolo della costante di tempo basterá calcolare la resistenza di Thevenin vista dai morsetti dell'elemento conservativo

**Casi particolari:** Avvalendosi del metodo topologico, é possibile ricondursi a configurazioni equivalenti e disaccoppiate per le quali valgono i metodi precedenti.

## 11 Regime sinusoidale permanente

**Funzione periodica** Una funzione periodica nel tempo con un periodo $T$ soddisfa la seguente condizione:

$$a(t_0 + T) = a(t_0) \quad \forall t_0$$

Posso inoltre definire la frequenza, ovvero quante volte la funzione si ripete in un secondo, come: $f = \frac{1}{T}$.
Il valore medio della funzione $a(t)$ é:

$$a_{ave} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} a(t)dt$$

Una funzione periodica con valore medio uguale a zero é chiamata alternata.

**Funzione sinusoidale** Una sinusoide é caratterizzata dalla seguente equazione generale:

$$x(t) = X_M \cos(\omega t + \varphi) = X_M \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

- $X_M$: ampiezza della sinusoide

- $\omega$: pulsazione $\longrightarrow \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$
- $\varphi$: sfasamento o fase (spostamento temporale dell'onda rispetto all'asse $y$)

**Definizione 21 (Valore efficace)** *Valore efficace di una sinusoide:*

$$X_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} (X_M \sin(\omega t + \varphi))^2 dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \frac{X_M^2}{2}(1 - \cos 2(\omega t + \varphi))dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{X_M^2}{2T}\int_{t_0}^{t_0+T} 1dt} = \frac{X_M}{\sqrt{2}}$$

*Il valore efficace di una corrente o di una tensione sinusoidale, é il valore di quella tensione e corrente costante che, applicate ai capi dello stesso resistore, provocano la dissipazione della stessa potenza media.*

In un piano complesso un punto rotante con velocitá angolare uniforme attorno all'origine con orbita circolare e con posizione iniziale per $t = 0$ pari a $\varphi$, é descritto dall'equazione:

$$\bar{x}(t) = X_M \cdot e^{j(\omega t + \varphi})$$

($j$ é la parte complessa)
Il legame tra il vettore rotante e le funzioni cosinusoidale e sinusoidale é dato dalla formula di Eulero (formula per convertire in forma esponenziale i numeri complessi).

## 11.1 Regime sinusoidale

In regime sinusoidale tutte le grandezze tensione e corrente, a regime, sono sinusoidali della stessa frequenza degli ingressi.

- La conversione di energia non elettrica in elettrica avviene principalmente per mezzo di macchine elettriche le cui grandezze elettriche sono trascurabili
- La trasmissione e la distribuzione dell'energia elettrica avviene sostanzialmente in regime sinusoidale
- La sinusoide é l'elemento base che si utilizza per l'analisi di reti funzionanti con ingressi variabili nel tempo anche se non sinusoidali

L'obbiettivo é mettere a punto gli strumenti e i metodi che consentono la risoluzione "semplice" di reti in regime sinusoidale.

## 11.2 Metodo dei fasori

La generica funzione sinusoidale $f(t) = F_M \sin(\omega t + \varphi)$ é legata al vettore rotante dall'espressione:

$$\bar{f}(t) = F_M \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = \sqrt{2}F \cdot e^{j(\omega t + \varphi)} = \sqrt{2}F \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}$$

La quantitá $Fe^{j\varphi}$ non dipende dal tempo e contiene due informazioni alla funzione sinusoidale:

- L'ampiezza in termini di valore massimo o efficace
- La fase

Questa grandezza prende il nome di **fasore** di una funzione sinusoidale $f(t)$. Il fasore contiene l'angolo di potenza e la posizione iniziale della funzione.

### 11.2.1 Fasore

Il fasore é un numero complesso. É scritto in forma binomiale o in forma esponenziale.

#### Proprietá

- Moltiplicazione per $k$: moltiplicare per una costante $k$ equivale a moltiplicare per $k$ il fasore corrispondente
- Addizione: la somma di due sinusoidi isofrequenziali é una sinusoidale con pulsazione pari a $\omega$ il cui fasore é la somma dei rispettivi fasori
- Derivazione: la derivata di una sinusoide di pulsazione $\omega$ e fasore $\bar{A}_M$ é una sinusoide alla stessa pulsazione e fasore $j\omega\bar{A}_M$
- Integrazione: l'integrale di una sinusoide di pulsazione $\omega$ e fasore $\bar{A}_M$ é una sinusoide alla stessa pulsazione e fasore $\frac{\bar{A}_M}{j\omega}$

**Esempio 3** *Si consideri una rete RCL con ingresso sinusoidale formata da un generatore di tensione, una resistenza, un'induttanza e un condensatore.*
*La legge di Kirchhoff delle tensioni é:*

$$\begin{cases} e(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) \\ Ri(t) + L\frac{d}{dt}i(t) + \frac{1}{C}\int i(t)dt = e(t) \end{cases}$$

*Essendo l'ingresso sinusoidale utilizzando l'identitá fasoriale si ha che:*

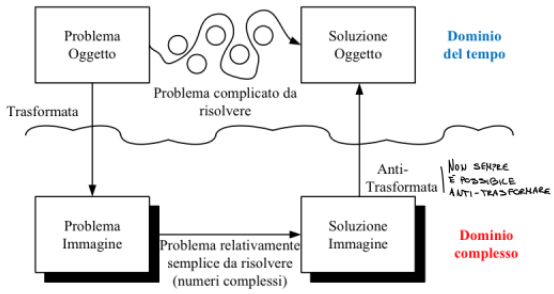
$$e(t) = \sqrt{2}Im\{\bar{E}e^{j\omega t}\}$$

*con il fasore* $\bar{E} = Ee^{j\alpha +}$
*Se la rete é lineare a tempo invariante, anche la corrente é sinusoidale e isofrequenziale con funzione d'ingresso:*

$$i(t) = \sqrt{2}Im\{\bar{I}e^{j\omega t}\}$$

*Posso sostituire i fasori nell'equazione integro differenziale per ottenere un'equazione algebrica con incognite appartenenti all'insieme dei numeri complessi.*

**Teorema 9 (Kennelly - Steinmetz)** *Qualunque problema relativo a reti lineari a tempo-invarianti stabili, sottoposte ad ingressi sinusoidali isofrequenziali, puó risolversi, relativamente alla soluzione di regime permanente, impiegando le stesse formule e gli stessi metodi propri del regime stazionario e sostituendo ordinariamente gli stessi ingressi stazionari con i fasori e gli operatori reali con quelli complessi rappresentativi dei legami integro differenziali.*




## 11.3 Forma fasoriale delle leggi delle tensioni e delle correnti

Le leggi di Kirchhoff e le equazioni di Ohm possono essere scritte in termini di fasori. La soluzione di un circuito puó essere ottenuta utilizzando tutti i metodi giá messi a punto per il regime stazionario.

$$\sum i_k(t) = 0 \longrightarrow \sum \bar{I}_k = 0 \tag{43}$$

$$\sum v_k(t) = 0 \longrightarrow \sum \bar{V}_k = 0 \tag{44}$$

## 11.4 Equazioni costitutive

**Resistenza**

$$\begin{cases} \bar{V} = R \cdot \bar{I} \\ \bar{I} = G \cdot \bar{V} \end{cases}$$

**Condensatori**

$$\begin{cases} \bar{V} = -j\frac{1}{\omega C} \cdot \bar{I} \\ \bar{I} = j\omega C \cdot \bar{V} \end{cases}$$

**Induttore**

$$\begin{cases} \bar{V} = j\omega L \cdot \bar{I} \\ \bar{I} = -j\frac{1}{\omega L} \cdot \bar{V} \end{cases}$$

### 11.4.1 Impedenza

Le equazioni costitutive dei tre elementi base hanno una struttura comune del tipo:

$$\bar{V} = \bar{Z} \cdot \bar{I}$$

L'equazione é chiamata equazione di Ohm in forma fasoriale e l'operatore complesso $\bar{Z}$ é chiamato impedenza (si misura in Ohm). L'operatore complesso si particolarizza per ogni componente nel modo seguente:

- Resistenza: $\bar{Z} = R$
- Condensatore: $\bar{Z} = -\frac{j}{\omega C}$
- Induttanza: $\bar{Z} = j\omega L$

La parte reale dell'impedenza é chiamata resistenza, mentre quella immaginaria é chiamata reattanza.
In forma esponenziale l'impedenza é:

$$\bar{Z} = Ze^{i\theta} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{Ve^{j\varphi_V}}{Ie^{j\varphi_I}} = \frac{V}{I}e^{\varphi_V - \varphi_I}$$

### 11.4.2 Ammettenza

Le relazioni tra i fasori della tensione e della corrente per il resistore, l'induttore e il condensatore sono casi particolari anche dell'equazione:

$$\bar{I} = \bar{Y} \cdot \bar{V}$$

Questa equazione é chiamata equazione di Ohm in forma fasoriale e l'operatore complesso $\bar{Y}$ é chiamato ammettenza, si misura in $S$:

$$\bar{Y} = G + jB = G + j(B_C + B_L) = Ye^{j\psi}$$

L'ammettenza puó anche essere definita come il reciproco dell'impedenza.

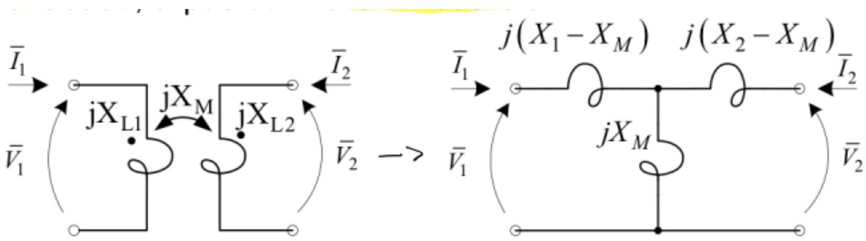
$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}}$$

## 11.5 Mutuo induttore in regime sinusoidale

La scrittura delle equazioni di Ohm per il mutuo induttore in regime sinusoidale segue le regole viste per le altre equazioni di Ohm.

$$\begin{cases} v_1(t) = L_1 \cdot \frac{di_1(t)}{dt} \pm L_M \cdot \frac{di_2(t)}{dt} \\ v_1(t) = L_2 \cdot \frac{di_2(t)}{dt} \pm L_M \cdot \frac{di_1(t)}{dt} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \bar{V}_1 = j\omega L_1 \bar{I}_1 \pm j\omega L_M \bar{I}_2 \\ \bar{V}_1 = j\omega L_2 \bar{I}_2 \pm j\omega L_M \bar{I}_1 \end{cases}$$

**Modello del doppio bipolo a T:** Nel caso i cui le due porte del mutuo induttore siano galvanicamente disconnesse e i morsetti contrassegnati siano affiancati, si puó utilizzare il modello a T: Con




il doppio bipolo a T il sistema si trasforma da un doppio bipolo magneticamente accoppiato a uno elettricamente accoppiato.

$$\bar{V}_1 = jX_1\bar{I}_1 + jX_M\bar{I}_2 + jX_M\bar{I}_1 - jX_M\bar{I}_1 = j(X_1 - X_M)\bar{I}_1 + jX_M(\bar{I}_1 + \bar{I}_2)$$

$$\bar{V}_2 = jX_M\bar{I}_1 + jX_2\bar{I}_2 + jX_M\bar{I}_2 - jX_M\bar{I}_2 = j(X_2 - X_M)\bar{I}_2 + jX_M(\bar{I}_1 + \bar{I}_2)$$

## 11.6 Connessioni canoniche

### 11.6.1 Connessione in serie

Grazie alla struttura algebrica delle equazioni di Ohm in forma fasoriale, per le impedenze si hanno le stesse regole viste per le resistenze.
Nel caso particolare della serie tra una resistenza e una induttanza:

$$\bar{Z}_{eq} = R + j\omega L Z_{eq} e^{j\varphi_z}$$
$$|\bar{Z}_{eq}| = Z_{eq} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$
$$\varphi_z = \arctan \frac{\omega L}{R}$$

### 11.6.2 Connessione in parallelo

Nel caso di connessione in parallelo di impedenza varranno ancore le regole viste per le resistenze.
Nel caso particolare di parallelo tra una resistenza e un condensatore:

$$\bar{Y}_{eq} = \frac{1}{R} + j\omega C = \bar{Y}_R + \bar{Y}_C$$
$$\bar{Z}_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\omega C} = \frac{R}{1 + j\omega RC} = \frac{-\frac{jR}{\omega C}}{R - \frac{j}{\omega C}}$$

## 11.7 Diagramma vettoriale

Con il metodo fasoriale tutte le grandezze sono espresse da numeri complessi costituiti da due valori. Queste grandezze possono essere rappresentate con vettori nel piano complesso.
Le leggi delle tensioni e delle correnti implicano di sommare quantitá vettoriali; ad esempio una legge delle tensioni del tipo: $\bar{V}_3 = \bar{V}_1 + \bar{V}_3$ puó essere rappresentata come un triangolo rettangolo avente come cateti $\bar{V}_1$ e $\bar{V}_2$ e come ipotenusa $\bar{V}_3$.

# 12 Bilancio energetico in regime sinusoidale permanente

Il trasferimento di potenza dalla sorgente al carico viene fatto in moltissime applicazioni in regime sinusoidale. Il regime sinusoidale l'espressione della potenza istantanea dei diversi componenti passivi é molto importante per capire come avviene fisicamente il processo di trasmissione della potenza. L'espressione finale della potenza nel dominio dei numeri complessi é ottenuta mediante alcune manipolazioni algebriche della formula generale del dominio di campo.

## 12.1 Potenza istantanea

La potenza istantanea é data dal prodotto della tensione e della corrente alla porta del bipolo.

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) \longrightarrow \frac{\delta L_e}{dt} = \frac{\delta L^* + \delta Q}{dt} + \frac{dW}{dt}$$

dove:

$$\begin{cases} v(t) = \sqrt{2} V \sin(\omega t + \theta_V) \\ i(t) = \sqrt{2} I \sin(\omega t + \theta_I) \end{cases}$$

Esplicitando quindi il prodotto si ha che la potenza é:

$$p(t) = 2VI \sin(\omega t + \theta_V) \sin(\omega t + \theta_I) = VI[\cos(\theta_V - \theta_I) - \cos(2\omega t + \theta_V + \theta_I)] =$$

$$= VI\cos\varphi - VI\cos(2\omega t + \theta_V + \theta_I) = Re\{\bar{V}\underline{I}\} - Re\{\overline{VI}e^{j2\omega t}\}$$

[NB: $\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$]
Nella definizione di potenza sopra riportata compare un termine costante nel tempo, ovvero: $VI\cos\varphi$ e un termine a frequenza doppia rispetto a quella di rete e a valor medio nullo, ovvero: $VI\cos(2\omega t + \theta_V + \theta_I)$.
Dal punto di vista grafico tali risultati si interpretano con i diagrammi polari e cartesiani.
La potenza media dipende dai valori efficaci di tensione e corrente e dal loro sfasamento e corrisponderá a:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = VI\cos\varphi$$

Una volta definita la potenza media posso riscrivere la potenza istantanea come:

$$p(t) = P - VI\cos(2\omega t + \theta_V + \theta_I)$$

Per la convenzione degli utilizzatori quando una potenza é positiva essa entra nel bipolo e si dice assorbita mentre quando una potenza é negativa essa uscirá dal bipolo e sará generata. Questo implica la possibilitá da parte del bipolo sia di dissipare che di accumulare energia.
La potenza media non é sufficiente a caratterizzare la potenza assorbita da un bipolo misto qualsiasi. Occorre particolarizzare ulteriormente l'espressione della potenza istantanea.

$$p(t) = VI\cos\varphi - VI\cos(2\omega t + \theta_V + \theta_I) = VI\cos\varphi - VI\cos(2\omega t + \theta_V + \theta_I + \theta_I - \theta_I) =$$

$$= VI\cos\varphi - VI\cos(2\omega t + 2\theta_I\varphi) =$$

$$= VI\cos\varphi\{1 - \cos 2(\omega t + \theta_I)\} + VI\sin\varphi\sin 2(\omega t + \theta_I) = p_a(t) + p_r(t)$$

[NB: $\cos(\alpha+\beta) = [\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \cos\beta]$ con $\alpha = \varphi$ e $\beta = 2\omega t + 2\theta_I$]
dove $p_a(t)$ é la potenza attiva istantanea mentre $p_r(t)$ é la potenza reattiva istantanea ed ha valor medio nullo.
La potenza attiva corrisponde a quella trovata per il resistore ed é associabile al termine unidirezionale del bilancio energetico. La potenza reattiva corrisponde a quella trovata per $L$ e $C$: é espressione di scambi alterni di energia tra il circuito ed i campi elettrico e/o magnetico; é associabile nel bilancio stesso al termine conservativo.

## 12.2 Comportamento energetico dei singoli bipoli

### 12.2.1 Resistore

La potenza istantanea é costituita dalla sola potenza attiva istantanea; essa é sempre positiva in accordo con la definizione $p(t) = Ri(t)^2$. Nei resistori la potenza assorbita viene dissipata in calore e non vi é alcun accumulo di energia.
La definizione di potenza é ricavabile sostituendo:

$$i(t) = \sqrt{2}I\sin(\omega t) \text{ e } v(t) = Ri(t)$$

nella definizione di potenza data precedentemente.

### 12.2.2 Condensatore

Nei condensatori la potenza media assorbita é nulla: la potenza viene alternativamente immagazzinata nel campo dielettrico (carica) e restituita alla sorgente (scarica).
La definizione di potenza é ricavabile sostituendo:

$$v(t) = -\sqrt{2}V\cos(\omega t) \text{ e } i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} = \sqrt{2}\omega CV\sin(\omega t) = \sqrt{2}I\sin(\omega t)$$

nell'equazione $p(t) = v(t) \cdot i(t)$.

### 12.2.3 Induttore

Negli induttori la potenza media assorbita é nulla: la potenza viene alternativamente immagazzinata nel campo magnetico (carica) e restituita alla sorgente (scarica).
Posso ricondurmi alla potenza sostituendo nell'equazione $p(t) = v(t) \cdot i(t)$:

$$i(t) = \sqrt{2}I\sin(\omega t) \text{ e } v(t) = L\frac{di(t)}{dt} = \sqrt{2}\omega LI\cos(\omega t)$$

## 12.3 Potenza attiva e reattiva

$$p(t) = P_a(t) + p_r(t) = P\{1 - \cos 2(\omega t + \theta_I)\} + Q\sin 2(\omega t + \theta_I)$$

- $P = IV_f = VI\cos\varphi$: potenza attiva. É il valore medio della potenza istantanea e rappresenta il lavoro elettrico trasmesso. Il suo segno é riconducibile al senso di trasmissione del lavoro elettrico, esso si coordina nel modo usuale alle altre convenzioni di segno rispetto alle quali si esprimono i fasori $V$ e $I$.

- $Q = IV_q = VI\sin\varphi$: potenza reattiva. É il valore massimo della potenza reattiva istantanea. Essa é interpretabile come l'ampiezza della rapiditá di variazione delle energie scambiate dal circuito coi campi elettrico e/o magnetico.

$P$ e $Q$ caratterizzano completamente il bilancio energetico in corrente alternata sinusoidale esprimendo sia il termine unidirezionale sia il termine conservativo.

## 12.4 Potenza complessa

La potenza complessa sintetizza in forma fasoriale il complesso di informazioni necessarie e sufficienti per l'analisi energetica in regime sinusoidale permanete.

$$\bar{S} = \bar{A} = \bar{V}\underline{I} = Ve^{j\theta_V}Ie^{-j\theta_I} = VIe^{j(\theta_V - \theta_I)} = Se^{j\varphi} = P + jQ \quad [VA]$$

La potenza complessa é indipendente dalla scelta dell'origine dei tempi e quindi dal riferimento assunto.

### 12.4.1 Potenza apparente e cimento termico

La potenza apparente esprime il cimento termico del componente cui é associata in quanto:

- Al valore della corrente sono legate le perdite nel campo di conduzione presente nell'apparecchiatura $\longrightarrow$ Corrente nominale

- Il valore efficace della tensione qualifica l'insieme di provvedimenti da assumere per un corretto isolamento della apparecchiatura elettrica, soprattutto allo scopo di assicurare la sicurezza dell'esercizio $\longrightarrow$ Tensione nominale

**Definizione 22 (Potenza apparente)** *La potenza apparente é la massima elongazione della potenza istantanea attorno al suo valor medio. Sul piano energetico, costituisce la massima potenza attiva elaborabile, a paritá di tensione e corrente efficaci, dal bipolo.*

**Definizione 23 (Fattore di potenza)** *Il rapporto tra la potenza attiva $P$ e quella apparente $S$ a una porta elettrica é chiamato fattore di potenza.*

$$\cos\varphi = \frac{P}{S}$$

Un basso fattore di potenza implica una maggiore potenza apparente e maggiori perdite per trasmettere la stessa potenza attiva $P$.

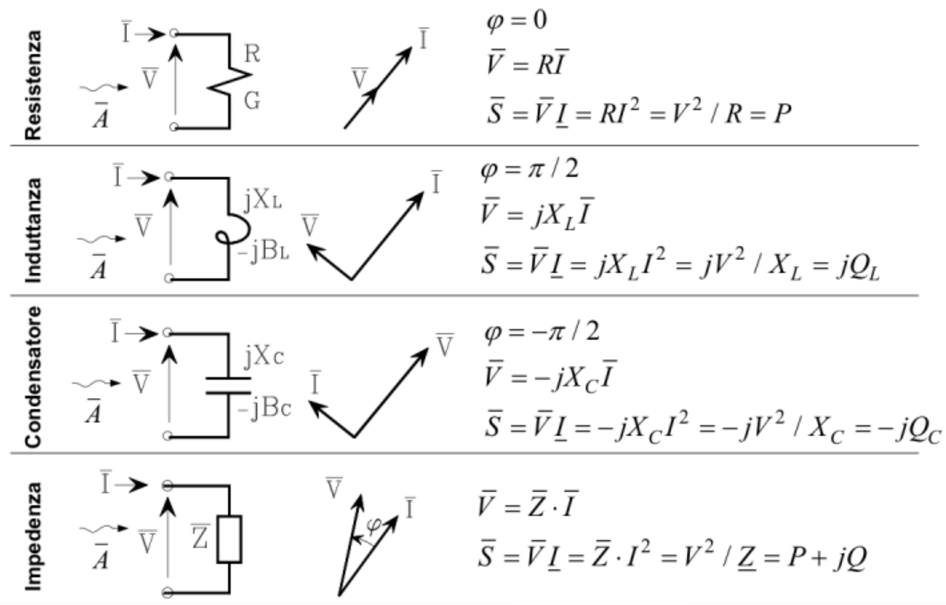



Figure 12: Schema potenze per i componenti circuitali

# 13 Convenzione di segno delle potenze

É improprio parlare di potenza reattiva assorbita o erogata perché in ogni caso $Q$ esprime soltanto l'ampiezza di una sinusoide a frequenza doppia e dunque a valor medio nullo. Tale espressione é usata per comoditá di linguaggio. Date le convenzioni di poter ottenere $Q > 0$, si riguarderá l'induttore come utilizzatore di potenza reattiva e il condensatore come generatore della medesima.

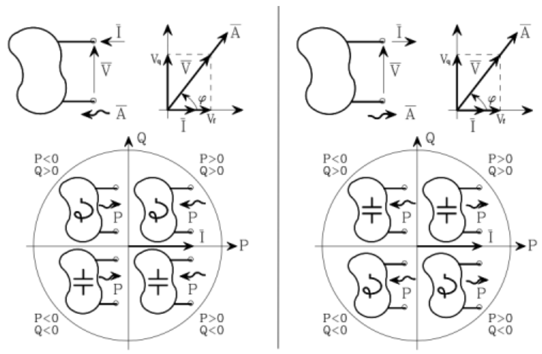


Figure 13: Convenzione di segno potenze

## 13.1 Massimo trasferimento di potenza

Dato un generico circuito $AC$ si vuole determinare qual é il valore dell'impedenza $\bar{Z}_L = R_L + jX_L$ che da luogo al massimo trasferimento di potenza.
Il circuito attivo puó essere sostituito con il suo equivalente di Thevenin caratterizzato da: $\bar{V}_{TH}$, $\bar{Z}_{TH} = R_{TH} + jX_{TH}$. La corrente che fluisce nel circuito sará:

$$\bar{I} = \frac{\bar{V}_{TH}}{\bar{Z}_{TH} + \bar{Z}_L}$$

La potenza attiva fornita dal carico coincide con quella da esso assorbita e risulta:

$$P = R_L \cdot I^2 = R_L \cdot \frac{V_{TH}^2}{(R_{TH} + R_L)^2 + (X_{TH} + X_L)^2}$$

Per trovare il massimo trasferimento di potenza occorre fare la derivata rispetto a $\bar{Z}_L$ e quindi rispetto a $R_{TH}$ e $X_{TH}$ della potenza e imporle uguali a zero.
Svolgendo i calcoli si otterrá che le derivate sono uguali a zero per: $\bar{Z}_L = R_{TH} - jX_{TH} = \underline{Z}_{TH}$.

## 13.2 Corollario di Boucherot

La conservazione in una rete elettrica delle potenze riletta in regime sinusoidale permanente con l'ausilio del teorema di Kannelly-Stainmetz si traduce nella relazioen complessa seguente:

$$\sum_{k=1}^{N} \bar{V}_k \cdot \underline{I}_k = \sum_{k=1}^{N} \bar{S}_k = 0$$

che si traduce come:

$$\sum_{k=1}^{N} P_k = 0; \quad \sum_{k=1}^{N} Q_k = 0$$

Grazie a questo corollario é possibile trattare $\bar{S}$, $P$ e $Q$ come se fossero potenze istantanee ed effettuare per ciascuna di esse il bilancio energetico nel circuito considerato. Dal punto di vista applicativo Boucherot rappresenta un metodo di soluzione non fasoriale di reti in $AC$ applicabile quando sono noti:

- Lo stato energetico in una sezione
- La tensione o la corrente della medesima
- Il senso di trasmissione del lavoro elettrico

Per applicare il corollario di Bouchero si procederá nel modo seguente:

1. Suddividere il circuito in sezioni contenenti ciascuna impedenza di tipo solo serie o parallelo
2. Per ogni sezione si determinano le potenze attive, reattive e complesse
3. Si procede sezione dopo sezione componendo le potenze per determinare la tensione o la corrente

# 14 Linea elettrica

Tutte le utenze sono connesse alla sorgente mediante una linea elettrica. La lunghezza di tale linea é solitamente non trascurabile pertanto essa non é un corto circuito. Una possibile rappresentazione é quella costituita dalla serie di resistenza e induttanza.
Le utenze civili e industriali sono tipicamente assimilabili a carichi ohmico-induttivi. Essi assorbono quindi potenza dalla rete con un triangolo delle potenze del tipo:

- Potenza attiva $P$ assorbita positiva
- Potenza reattiva $Q$ assorbita positiva

Una linea elettrica é caratterizzata da:

- Corrente di linea: $\bar{I} = \frac{\bar{E}}{\bar{Z}_{linea}+\bar{Z}_{carico}} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}_{carico}}, \quad I = \frac{\sqrt{P_{carico}^2+Q_{carico}^2}}{V}$
- Potenza attiva e reattiva di linea: $P_{linea} = R_{linea} \cdot I^2, \quad Q_{linea} = X_{linea} \cdot I^2$
- Caduta di potenza fasoriale : $\Delta\bar{V} = \bar{E} - \bar{V} = \bar{Z}_{linea} \cdot \bar{I}$
- Rendimento della trasmissione: $\eta = \frac{P_{carico}}{P_{generata}} = \frac{P_{carico}}{P_{carico}+P_{linea}}$

## 14.1 Caduta di tensione industriale

Si definisce caduta di tensione il numero reale:

$$\Delta V = |\bar{E}| - |\bar{V}|$$

cioé la differenza tra i moduli delle tensioni a inizio e fine linea. Gli apparecchi utilizzatori sono molto sensibili al modulo della tensione di alimentazione, mentre non risentono affatto il problema di un eventuale sfasamento elevato tra tensione e corrente. Il calcolo della $\Delta V$ puó essere condotto:

- Con un metodo esatto, facendo uso dei numeri complessi
- Con un metodo approssimato, piú utilizzato nella realtá
- Con il procedimento di Boucherot

### 14.1.1 Metodo approssimato

In termini di diagramma fasoriale:

$$E = \bar{OP} = \bar{OC'} \approx \bar{OC}$$

$$\bar{OC} = V + I \cdot (R_{liena}\cos\varphi + X_{linea}\sin\varphi)$$

dato che $\Delta V = \bar{OC} - V$ e $\bar{BC} \approx \bar{BC'}$ allora si ottiene:

$$\Delta V \approx I \cdot (R_{linea}\cos\varphi + X_{linea}\sin\varphi) \qquad [V]$$

La $\Delta V$ dipende dal modulo della corrente e dallo sfasamento tra tensione e corrente in arrivo alla linea.

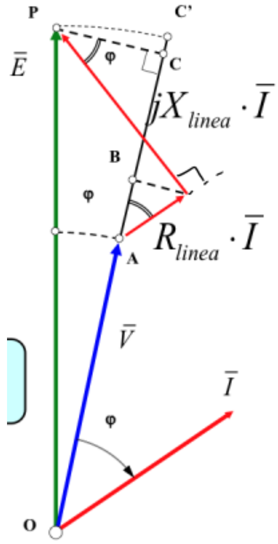



Figure 14: Metodo approssimato

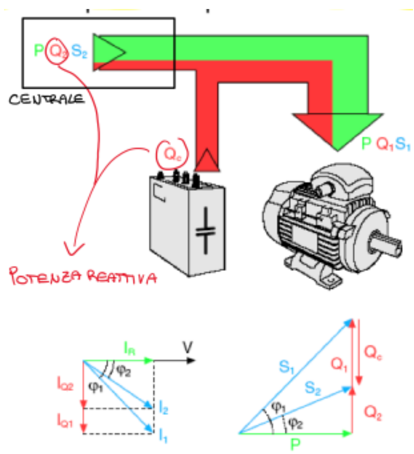
## 14.2 Il rifasamento

Rifasare significa agire per incrementare il fattore potenza fornendo localmente la potenza reattiva $Q_c$ necessaria al fine di ridurre, a pari potenza attiva $P$ richiesta e di tensione $V$, il valore della corrente e quindi la potenza di transizione nella linea elettrica.
I vantaggi principali del rifasamento sono:

- Migliorare l'utilizzazione delle macchine elettriche
- Migliorare l'utilizzazione delle condutture
- Riduzione delle perdite
- Riduzione della caduta di tensione

Noto il fattore potenza dell'impianto e quello che si vuole ottenere é possibile determinare la potenza reattiva necessaria della batteria di condensatori per ottenere il rifasamento:

$$Q_c = (\tan\varphi_1 - \tan\varphi_2) \cdot P = K \cdot P$$



# 15 Reti trifase

Vantaggi della tecnologia trifase:

- Assenza nei casi usuali di potenza fluttuante
- Trasmissione più economica della potenza
- Utilizzazione più razionale del materiale attivo nelle macchine elettriche

Dato che l'applicazione pratica dei sistemi trifase avviene in condizioni di regime sinusoidale, l'analisi del sistema trifase e del tripolo viene proposta direttamente con il formalismo fasoriale.
L'elemento base dei sistemi trifase è il tripolo. Esso è caratterizzato da:

- Terna delle tensioni trifase spiccate dal centro arbitrario $O$ detto concentro e dirette verso i mosetti del tripolo
- Terna delle tensioni di linea definibili tra i morsetti del tripolo. Una terna che presenta tale caratteristica è detta pura per definizione. Le tensioni di linea si dicono anche tensioni concatenate
- Terna di correnti di linea ciascuna riferita a un morsetto del tripolo. Anch'essa è una terna pura per definizione

La terna delle tensioni di fase invece non è in generale pura e il valore della somma delle tre tensioni di fase dipende dalla scelta del centro stella. Se esiste un centro stella tale per cui la somma delle tensioni di fase è uguale a zero tale centro stella è detto centro teorico. In tal caso il centro $O$ costituisce il baricentro del triangolo.
Il legame tra tensione di fase e tensione di linea è il seguente:

$$\begin{cases} \bar{E}_1 - \bar{E}_2 = \bar{V}_{12} \\ \bar{E}_2 - \bar{E}_3 = \bar{V}_{23} \\ \bar{E}_3 - \bar{E}_1 = \bar{V}_{31} \end{cases}$$

## 15.1 Potenza associata al tripolo

La potenza istantanea in un tripolo è:

$$p(t) = \sum e_k(t) \cdot i_k(t) = e_1(t) \cdot i_1(t) + e_2(t) \cdot i_2(t) + e_3(t) \cdot i_3(t)$$

Per ciascun termine può essere eseguita l'analisi già esposta per il monofase. Si ha quindi:

$$p(t) = Re\left\{\sum \bar{E}_k \underline{I}_k\right\} - Re\left\{\bar{E}_k \bar{I}_k e^{j2\omega t}\right\} = P + p_{2f}(t)$$

$Re\left\{\bar{E}_k \bar{I}_k e^{j2\omega t}\right\}$: termine oscillatne a frequenza doppia; $Re\left\{\sum \bar{E}_k \underline{I}_k\right\} = \frac{1}{T}\int p(t)dt = \sum E_k I_k \cos\varphi_k$: potenza media.
Richiamando quanto esposto per il regime sinusoidale monofase, per il trifase si ha:

$$\bar{S} = P + jQ = \bar{E}_1 \underline{I}_1 + \bar{E}_2 \underline{I}_2 \bar{E}_3 \underline{I}_3 \text{: potenza complessa } [VA]$$

$$P = Re\{\bar{S}\} = \sum P_k = \sum E_k I_k \cos\varphi_k \text{: potenza media o attiva } [W]$$

$$Q = Im\{\bar{S}\} = \sum Q_k = \sum E_k I_k \sin\varphi_k \text{: potenza reattiva } [VAr]$$

**Teorema 10 (Teorema di Aron)** *La potenza puó essere calcolata/misurata utilizzando due wattmetri.*

## 15.2 Sistema simmetrico

**Definizione 24 (Terna simmetrica)** *Una terna simmetrica é una terna in cui le grandezze sono caratterizzate da stessa ampiezza e uguale sfasamento.*

Nel caso in cui le terne di tensione e correnti sono simmetriche si ha:

$$\begin{cases} V = V_{12} = V_{23} = V_{31} \\ E_1 = E_2 = E_3 = E \\ V = \sqrt{3}E \\ I = I_1 = I_2 = I_3 \end{cases}$$

La relazione $V = \sqrt{3}E$ é data da:

$$\frac{V}{2} = E\cos\frac{\pi}{6} = E\frac{\sqrt{3}}{2} \longrightarrow V = \sqrt{3}E$$

I fasori in ogni terna sono tra loro sfasati di $\frac{2\pi}{3}$. $\varphi$ é lo sfasamento tra la tensione di fase $\bar{E}$ e la corrente di linea $\bar{I}$ mentre la tensione di linea $\bar{V}$ anticipa di $\frac{\pi}{6}$ la tensione di fase (ecco da dove arriva la relazione vista sopra).
Introducendo l'operatore di rotazione $e^{j\frac{2\pi}{3}} = \bar{a}$ per il quale si ha:

$$\begin{cases} \bar{a}^0 = \bar{a}^3 = \bar{a}^6 = ... = 1 \\ \bar{a}^1 = \bar{a}^4 = \bar{a}^7 = ... = \bar{a} = e^{j\frac{2\pi}{3}} \\ \bar{a}^2 = \bar{a}^5 = \bar{a}^8 = ... = \bar{a}^2 = e^{j\frac{4\pi}{3}} = e^{-j\frac{2\pi}{3}} \end{cases}$$

Le terne simmetriche si possono quindi esprimere come:

$$\begin{cases} \bar{E}_1 = \bar{E} \\ \bar{E}_2 = \bar{\alpha}^2 \cdot \bar{E} \\ \bar{E}_3 = \alpha \cdot \bar{E} \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{V}_{12} = \bar{V} \\ \bar{V}_{23} = \bar{\alpha}^2 \cdot \bar{V} \\ \bar{V}_{31} = \bar{\alpha} \cdot \bar{V} \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{I}_1 = \bar{I} \\ \bar{I}_2 = \bar{\alpha}^2 \cdot \bar{I} \\ \bar{I}_3 = \bar{\alpha} \cdot \bar{I} \end{cases}$$

### 15.2.1 Cosa succede alla potenza?

Si studiará solo il termine a frequenza doppia.
Se le terne di corrente e di tensione sono simmetriche la potenza fluttuante si annulla e la potenza istantanea coincide con la potenza attiva.

$$p_{2f}(t) = p(t) - P = Re\left\{\sum \bar{E}_k \cdot \bar{I}_k e^{j2\omega t}\right\} = Re\left\{(\bar{E} \cdot \bar{I} + \bar{\alpha}^2\bar{E} \cdot \bar{\alpha}^2\bar{I} + \bar{\alpha}\bar{E} \cdot \bar{\alpha}\bar{I})e^{j2\omega t}\right\} =$$

$$= Re\left\{e^{j2\omega t}(1 + \bar{\alpha}^4 + \bar{\alpha}^2) \cdot \bar{E} \cdot \bar{I}\right\} = 0$$

$$p(t) = P = 3EI\cos\varphi = \sqrt{3}VI\cos\varphi$$

La forma scritta sopra é detta **formula promiscua**: $V$ ed $I$ sono grandezze di linea, mentre $\varphi$ é lo sfasamento tra la tensione di fase e la corrente di linea.

## 15.3 Connessioni delle sorgenti

**Connessione a stella Y:** un generatore trifase puó essere ottenuto connettendo tre generatori monofase in un punto comune: nel caso di generatori di tensione si ha una terna detta a stella.
Le tensioni di fase sono direttamente misurabili se il punto $O$ é accessibile. Le tensioni di linea sono sempre misurabili tra due diversi terminali.

**Connessioni a triangolo D o $\Delta$** Un generatore trifase puó essere ottenuto connettendo tre generatori monofase in cui i terminali sono collegati a due a due in un punto comune (triangolo); non esiste un punto comune ai tre generatori.
Le tensioni di fase non sono direttamente misurabili non essendoci il punto O; le tensioni di linea sono sempre misurabili tra due diversi terminali. Per passare dalla configurazione a stella a quella

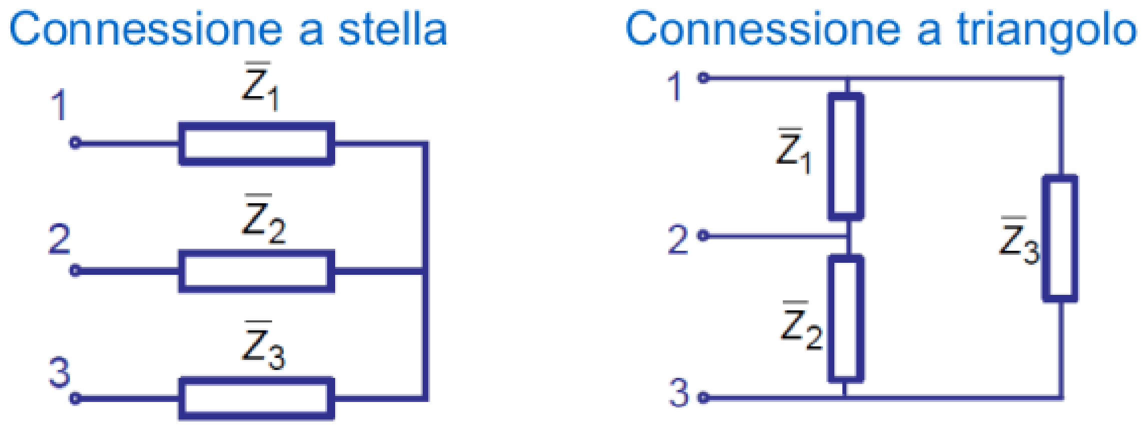



Figure 15: Trifase Stella-Triangolo

triangolo e viceversa occorre utilizzare le formule viste per le resistenze in regime stazionario.
Se le tre impedenze sono uguali (in ampiezza e fase) il carico é detto equilibrato.

### 15.4 Materializzazione di un centro teorico

La materializzazione di un centro teorico puó essere compiuta in due modi differenti:

1. Terna simmetrica di $fem$ imposta da generatori di tensione connessi a stella tra i tre fili (o morsetti) del sistema trifase e il centro stella $O$. In tal caso il sistema risulta:

$$\begin{cases} \bar{V}_{f,k} = \bar{E}_k \quad k = 1,2,3 \\ \sum \bar{V}_{f,k} = \sum \bar{E}_k = \bar{E} + \bar{\alpha}^2 \bar{E} + \bar{\alpha}\bar{E} = \bar{E}(1 + \bar{\alpha}^2 + \bar{\alpha}) = 0 \end{cases}$$

   la somma di $\alpha$ é nulla per definizione. In questo casoi il centro stella $O$ materializza il centro teorico.

2. Terna di impedenze uguali (sistema equilibrato) connesse a stella tra i tre fili (o morsetti) del sistema trifase e il centro stella $O$

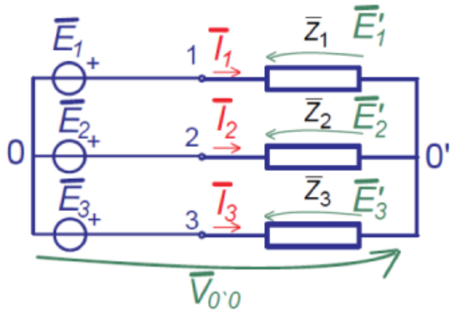
$$\begin{cases} \bar{V}_{f,k} = \bar{Z} \cdot \bar{I}_k \quad k = 1,2,3 \\ \sum \bar{V}_{f,k} = \bar{Z}\bar{I}_1 + \bar{Z}\bar{I}_2 + \bar{Z}\bar{I}_3 = \bar{Z} \sum I_k = 0 \end{cases}$$

   ció che nuovamente identifica il centro teorico.

Un sistema simmetrico ed equilibrato é caratterizzato dal fatto che tutti i centri stella sono teorici e allo stesso potenziale.

## 15.5 Circuito Y-Y

Connettendo un generatore trifase a stella con un carico trifase a stella si ottiene un circuito trifase piú semplice. La tensione tra i due centri stella puó essere calcolata direttamente con il Corollarrio



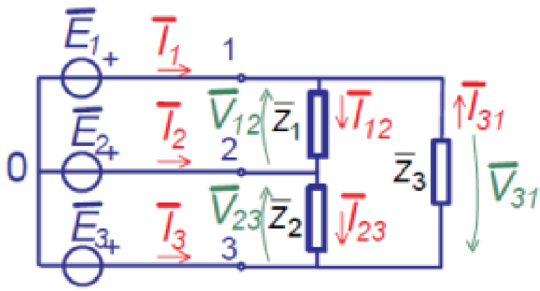

di Millmann e da questa ricavare tutte le tensioni e correnti della rete trifase.

$$\bar{V}_{O'O} = \frac{\frac{\bar{E}_1}{\bar{Z}_1} + \frac{\bar{E}_2}{\bar{Z}_2} + \frac{\bar{E}_3}{\bar{Z}_3}}{\frac{1}{\bar{Z}_1} + \frac{1}{\bar{Z}_2} + \frac{1}{\bar{Z}_3}}$$

La tensione tra i due centri stella sará diversa da zero.

## 15.6 Circuito Y-Δ

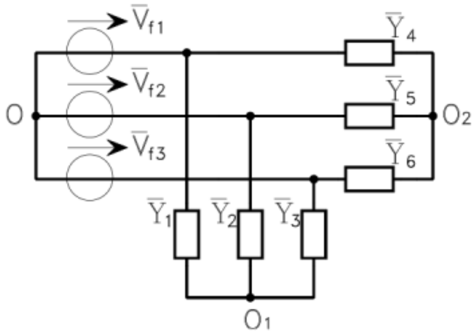
Connettendo un generatore trifase con un carico trifase a triangolo si ottiene un altro circuito trifase. Ogni impedenza é alimentata dalla tensione di linea imposta dal generatore trifase. Le correnti $I_{jk}$




sono chiamate correnti di fase, le $I_n$ sono chiamate correnti di linea.

## 15.7 Circuito Y-2Y

Connettendo un generatore trifase a stella con 2 carichi trifase a stella si ottiene il circuito trifase: La struttura é data dalla connessione di due circuiti simili al caso Y-Y in cui il generatore trifase



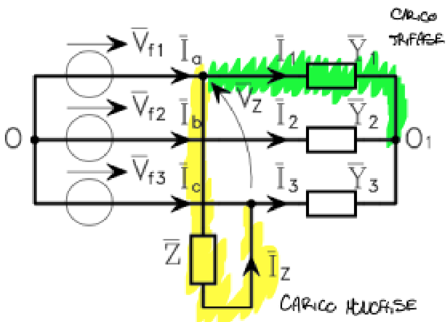

é unico: tre lati connessi in parallelo tra i centro $O$ e $O_2$, e altri tre lati connessi in parallelo tra i centri $O$ e $O_1$.
La tensione tra $O$-$O_1$ e 0-$O_2$ puó essere calcolata avvalendosi del Corollario di Millmann come:

$$\bar{V}_{O_1,O} = \frac{\sum \bar{Y}_k \bar{V}_{f,k}}{\sum \bar{Y}_k}$$

$$\bar{V}_{O_2,O} = \frac{\sum \bar{Y}_{k+3} \cdot \bar{V}_{f,k}}{\sum \bar{Y}_{k+3}}$$

## 15.8 Circuito Y-Y e carico monofase

La rete trifase é ottenuta connettendo un generatore trifase a Y, un carico a Y e un carico monofase tra le fasi 1 e 3. Vi puó essere anche un quarto filo connesso tra i due centri stella della rete.




Se la rete é dissimmetrica nelle tensioni e sbilanciata nei carichi si ha:

$$\bar{V}_{O'O} = \frac{\sum \bar{Y}_k \bar{V}_{f,k}}{\sum \bar{Y}_k}$$

La presenza di un carico sbilanciato da luogo ad una differenza di potenziale tra i due centri stella. Tale tensione puó essere annullata inserendo un nuovo conduttore che collega i due centri stella: tale

conduttore é detto neutro.
In questo caso il quarto conduttore (corto circuito):

- Impone ai due centri stella del carico e del generatore di avere lo stesso potenziale
- Implica la circolazione di una corrente nel conduttore tra i due centri stella pari a: $\bar{I}_0 = \sum I_k$
- Implica l'aggiunta di un filo e quindi del costo ad esso sotteso

## 15.9 Sistemi trifase simmetrici ed equilibrati

**Circuito Y-Y:** Se la terna delle tensioni è simmetrica ed il carico è equilibrato si ha:

$$\bar{V}_{O'O} = \frac{\frac{\bar{E}_1}{\bar{Z}} + \frac{\bar{E}_2}{\bar{Z}} + \frac{\bar{E}_3}{\bar{Z}}}{\frac{1}{\bar{Z}} + \frac{1}{\bar{Z}} + \frac{1}{\bar{Z}}} = 0$$

La tensione tra i due centri stella è nulla conseguentemente la tensione applicata a ognuna delle impedenze del carico è pari a quella della sorgente corrispondente. Poichè il generatore è simmetrico e il carico è bilanciato i centri stella sono teorici e allo stesso potenziale.
Dato che i due centri stella sono allo stesso potenziale ciascuna fase può essere studiata separatamente. La rete trifase, quindi, può essere studiata basandosi sul suo monofase equivalente.

**Circuito Y-2Y:** Poichè $O$, $O'_1$ e $O'_2$ sono allo stesso potenziale, anche in questo caso il circuito può essere studiato avvalendosi del monofase equivalente.

## 15.10 Caduta di tensione e rendimento

Il sistema trifase è molto utilizzato per il trasporto dell'energia a grandi distanze. Le linee di trasmissione sono quasi tutte trifase e si caratterizzano in termini di caduta di tensione e di rendimento.
In un sistema trifase per esprimere le cadute di tensione si utilizzano di solito le tensioni di linea, per cui si può scrivere:

$$\Delta V \approx \sqrt{3}I(R_{linea}\cos\varphi + X_{linea}\sin\varphi) = \frac{P \cdot R_{linea} + Q \cdot X_{linea}}{V}$$

dove $V$ e $I$ sono grandezze di linea e $\varphi$ è lo sfasamento tra $E$ e $I$ del carico trifase, $R_{linea}$ e $X_{linea}$ sono la resistenza e la reattanza di linea di ciascuna fase.
Il rendimento della linea trifase risulta:

$$\eta = \frac{P}{P_{gen}} = 1 - \frac{\Delta P}{P_{gen}} = \frac{1}{\frac{P+\Delta P}{P}} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta P}{P}}$$

$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{R_{linea}P}{V^2\cos^2\varphi}$$

Il termine $\frac{\Delta P}{P}$ è inversamente proporzionale al quadrato della tensione di linea $V$ e al quadrato del fattore di potenza. Per ottenere grandi potenze a grandi distanze è quindi necessario elevare la tensione di trasmissione. All'aumentare della potenza reattiva assorbita dal carico aumentando sia le perdite che la caduta di tensione. Per trasportare grandi potenze a grandi distanze è necessario elevare il fattore di potenza.

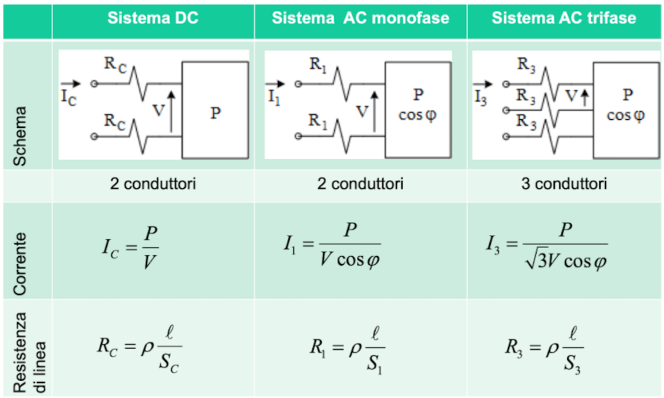
# 16 La trasmissione dell'energia

L'energia elettrica é il vettore preferito per l'energia. L'energia elettrica presenta il problema della difficoltà di accumulo in quantità significativa e con rendimenti accettabili.
La posizione delle unità di generazione è condizionata da numerosi vincoli, tra cui:

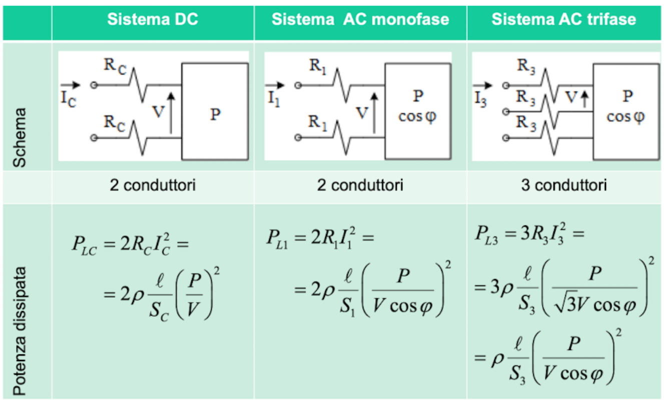
- Necessitá di salti idraulici per le centrali idroelettriche
- Approvvigionamento di combustibile
- Necessitá di acqua in quantitá per il raffreddamento
- Impatto ambientale

Inoltre é necessaria una rete di trasmissione che interconnetta le centrali tra loro e con i carichi stessi.
In questo capitolo verranno comprati tra loro i sistemi monofase e trifase in termini di volume di materiale conduttivo impiegato assegnato un valore di rendimento della trasmissione.

- Il confronto viene fatto alimentando un carico avente potenza attiva $P$, tensione di linea $V$ e fattore di potenza $\cos\varphi$
- Successivamente vengono comparati il sistema trifase e quello in corrente continua



| | Sistema DC | Sistema AC monofase | Sistema AC trifase |
|---|---|---|---|
| Schema | $I_C$, $R_C$, $R_C$, V, P — 2 conduttori | $I_1$, $R_1$, $R_1$, V, P cos φ — 2 conduttori | $I_3$, $R_3$, $R_3$, $R_3$, V, P cos φ — 3 conduttori |
| Corrente | $I_C = \frac{P}{V}$ | $I_1 = \frac{P}{V\cos\varphi}$ | $I_3 = \frac{P}{\sqrt{3}V\cos\varphi}$ |
| Resistenza di linea | $R_C = \rho\frac{\ell}{S_C}$ | $R_1 = \rho\frac{\ell}{S_1}$ | $R_3 = \rho\frac{\ell}{S_3}$ |



| | Sistema DC | Sistema AC monofase | Sistema AC trifase |
|---|---|---|---|
| Schema | $I_C$, $R_C$, $R_C$, V, P — 2 conduttori | $I_1$, $R_1$, $R_1$, V, P cos φ — 2 conduttori | $I_3$, $R_3$, $R_3$, $R_3$, V, P cos φ — 3 conduttori |
| Potenza dissipata | $P_{LC} = 2R_C I_C^2 = 2\rho\frac{\ell}{S_C}\left(\frac{P}{V}\right)^2$ | $P_{L1} = 2R_1 I_1^2 = 2\rho\frac{\ell}{S_1}\left(\frac{P}{V\cos\varphi}\right)^2$ | $P_{L3} = 3R_3 I_3^2 = 3\rho\frac{\ell}{S_3}\left(\frac{P}{\sqrt{3}V\cos\varphi}\right)^2 = \rho\frac{\ell}{S_3}\left(\frac{P}{V\cos\varphi}\right)^2$ |

## 16.1 Confronto tra i sistemi di trasmissione dell'energia monofase e trifase

Confronto a pari costo di esercizio: a paritá di perdite (condizioni di rendimento) valutare il minor costo di impianto.
A paritá di potenza trasmessa la sezione dei conduttori di linea monofase é doppia di quella della linea trifase. La sezione dei cavi in trifase deve essere il doppio di quella dei trifase. Inoltre si nota anche che il volume del trifase é il 25 % in meno del monofase, di conseguenza il trifase costerá il 25 % in meno del monofase.
Per verificare la veridicitá di queste condizioni vedere tabelle (16).

## 16.2 Confronto tra sistemi di trasmissione dell'energia in corrente continua e trifase

Si procederá ad una valutazione analoga a quella vista nella sezione sopra.
A paritá di potenza trasmessa e di perdite di linea il rapporto tra il volume del materiale conduttore neccessario nel caso di sistemi trifase e quello di un sistema in continua dipende dal fattore di potenza.
Confronto a pari costo di esercizio:

$$\frac{V_{condC}}{V_{cond3}} = \frac{4}{3}\cos^2\varphi$$

$$V_C = V_3 \text{ per } \cos^2\varphi = \frac{3}{4} \longrightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$$

per $\varphi < \frac{\pi}{6}$ quindi conviene la trasmissione AC trifase. Per $\varphi > \frac{\pi}{6} \longrightarrow V_C < V_3$ quindi conviene la trasmissione in corrente continua.

## 16.3 Ulteriori parametri per la trasmissione dell'energia

Nella scelta del sistema di trasmissione sono da considerare anche altri parametri, quali:

- La tensione di linea
- La manipolazione dei parametri tensione e corrente
- L'impiego presso le utenze

A pari di potenza attiva trasportata, si ha una corrente inversamente proporzionale alla tensione di linea. Maggiori tensioni consentono una riduzione della corrente di linea: le tensioni degli elettrodotti hanno valori sempre più elevati, ma si hanno problemi con:

- L'isolamento dei conduttori di linea, fra loro e nei confronti dei tralicci di sostegno (nonché dell'ambiente circostante)
- L'interfacciamento con i generatori e con gli utilizzatori

### 16.3.1 Isolamento

Per quanto riguarda l'isolamento, si usano catene di isolanti fatti di campane con lunghezza proporzionale alla tensione di isolamento richiesta. Il limite é dato da parametri meccanici e di ingombro dell'elettrodo.

In termini di isolamento risulta favorita la linea in continua: la tensione che compare nell'espressione della potenza attiva in CC é anche la tensione massima da considerare ai fini dell'isolamento. In corrente alternata, invece, la tensione di isolamento deve tenere conto del valore massima.
Se la tensione di esercizio in continua aumenta del 40 % la corrente si riduce dello stesso valore. A pari potenza trasportata, le perdite diventano la metá.

# 17 Macchine elettriche

**Definizione 25 (Macchine elettriche)** *Le macchine elettriche sono dispositivi atti a convertire energia elettrica in energia meccanica (o viceversa) o a modificare i parametri di tensione e corrente.*

- *Motori: da energia elettrica a energia meccanica*
- *Generatori: da energia meccanica a elettrica*
- *Trasformatori: conversione dei parametri dell'energia elettrica*

Le macchine elettriche si suddividono in due famiglie:

- Macchine rotanti: costituite da tutte le macchine in cui vi sono parti meccaniche in movimento
- Macchine statiche: costituite da tutte le macchine in cui non vi sono parti meccaniche in movimento (es. trasformatori)

## 17.1 Principi di funzionamento di delle macchine

Il funzionamento di tutte le macchine elettriche si basa sull'interazione tra campi magnetici prodotti da circuiti elettrici, chiamati avvolgimenti, all'interno della macchina. Tutte le macchine sono reversibili ovvero:

- La stessa macchina rotante puó funzionare sia da motore che da generatore
- Lo stesso trasformatore puó funzionare da elevatore di tensione o da abbassatore di tensione

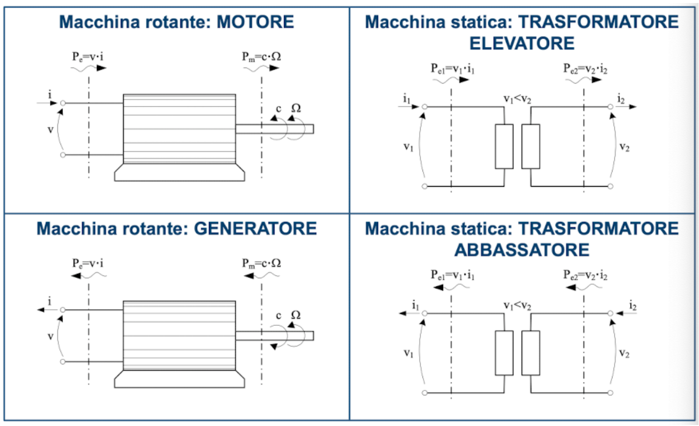



Figure 16: Reversibilitá delle macchine elettriche

## 17.2 La fisica delle macchine statiche

Le macchine statiche (trasformatori) si basano sul principio dell'induzione (legge di Faraday): **la forza elettromotrice indotta su un circuito elettrico (spira) é pari all'opposto della variazione temporale del flusso del campo magnetico attraverso la superficie delimitata dallo stesso circuito magnetico.**

$$fem(t) = -\frac{d\Phi_B(t)}{dt}$$

$$\Phi_B = \iint_S \bar{B} \cdot \bar{n} dA = \iint_S B \cos\alpha \cdot dA$$

## 17.3 Il trasformatore

**Definizione 26 (Trasformatore)** *Il trasformatore é un componente magneto-elettrico composto da:*

- *Due avvolgimenti di filo di rame smaltato elettricamente isolati fra loro e con diverso numero di spire, sui quali sono applicate rispettivamente le tensioni da trasformare e trasformate, e nei quali circolano correnti primarie e secondarie*
- *Un nucleo di materiale ferromagnetico laminato, il cui compito é quello di massimizzare, confinare e convogliare il flusso del campo magnetico*

Il trasformatore si basa sulla legge dell'induzione elettromagnetica. Esso puó essere solo in regime variabile (il flusso deve variare nel tempo), non puó funzionare in DC.
Il trasformatore é in grado di adattare la tensione (e di conseguenza la corrente) tra i diversi sistemi elettrici, permettendone la connessione e la gestione ottimale dai punti di vista tecnici ed economici.
Accanto all'applicazione strettamente energetica i trasformatori sono utilizzati per:

- Garantire isolamento galvanico tra i circuiti
- Per misurare tensioni e correnti elevate negli impianti

Generalitá e necessitá del suo impiego:

- Generazione: dimensionamento delle macchine di centrale basato su compromesso tecnico- economico. All'aumentare della tensione si riducono le perdite ma aumenta l'onere per l'isolamento degli avvolgimenti: $10 - 15\ kV$ è il punto di ottimo.
- Trasmissione (caratterizzata da potenze elevate): le sezioni dei conduttori delle linee elettriche devono essere contenute per ragioni economiche e per ragioni meccaniche. Per trasportare potenze elevate é necessario elevare la tensione, questo é detto limite di corrente
- Distribuzione: la distribuzione é caratterizzata da potenze minori, che a livello di tensione puó essere ridotto per ridurre gli oneri di realizzazione degli impianti
- Utilizzazione: per motivi di sicurezza e per ragioni costitutive la tensione di alimentazione degli apparecchi utilizzatori deve essere contenuta entro qualche centinaio di Volt

## 17.4 Nomenclatura

Nomenclatura degli avvolgimenti in base al numero di spire:

- L'avvolgimento con il maggior numero di spire é chiamato avvolgimento di alta tensione ed é immediatamente identificabile in quanto é quello realizzato con in conduttori di sezione piú piccola
- L'avvolgimento con il minor numero di spire é chiamato avvolgimento di bassa tensione, ed é immediatamente identificabile in quanto é realizzato con i conduttori di sezione piú grande

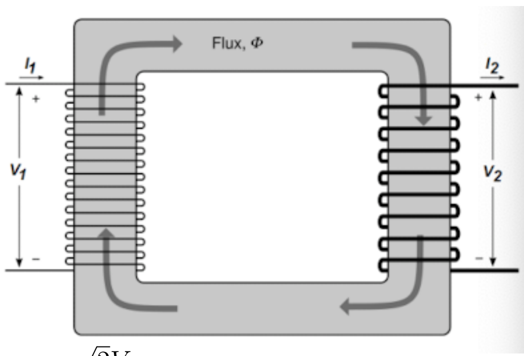
Nomenclatura degli avvolgimenti in base al verso della potenza elettrica:

- L'avvolgimento collegato alla tensione da trasformatore é chiamato avvolgimento primario. Il primario é l'avvolgimento dal quale il trasformatore assorbe potenza elettrica
- L'avvolgimento sul quale si rende disponibile la tensione trasformata é chiamato avvolgimento secondario. Il secondario é l'avvolgimento dal quale il trasformatore eroga potenza elettrica.

Essendo una macchina reversibile, l'attribuzione degli aggettivi primario e secondario non é univoca e non corrisponde ad alcun fatto costruttivo, a differenza della nomenclatura alta tensione e bassa tensione.

## 17.5 Principio di funzionamento

Il principio di funzionamento del trasformazione é implicito nella legge di Faraday.
Lo si andrá a studiare facendo riferimento ad un trasformazione ideale quindi senza perdite. Nella figura si considera l'avvolgimento 1 con una tensione sinusoidale del tipo:




$$v_1(t) = \sqrt{2}V_1 \sin(\omega t)$$

L'avvolgimento di alta tensione é formato da $N_1$ spire collegate in serie, quindi su ogni spira sará presente una tensione:

$$v_{1,spira}(t) = \frac{\sqrt{2}V_1}{N_1} \sin(\omega t)$$

dalla legge dell'induzione posso ora ricavare il flusso

$$\Phi_B(t) = -\int_{\infty}^{t} v_{1,spira}(\tau)d\tau = \frac{\sqrt{2}V_1}{\omega N_1} \cos(\omega t)$$

Il flusso prodotto dall'avvolgimento 1 circola nel nucleo ferromagnetico e si concatena all'avvolgimento 2.
L'avvolgimento 2 é composto da una serie $N_2$ spire collegate in serie, quindi la tensione totale ai capi dell'avvolgimento 2 sará:

$$v_2(t) = N_2 \cdot v_{2,spira}(t) = \frac{N_2}{N_1} \cdot \sqrt{2}V_1 \sin(\omega t) = \frac{N_2}{N_1} \cdot v_1(t) = \sqrt{2}V_2 \sin(\omega t)$$

Il rapporto tra le ampiezze (e quindi tra i valori efficaci) delle tensioni, che prende il nome di rapporto di trasformazione $k$, é uguale al rapporto tra il numero di spire:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{N_1}{N_2} = k$$

### 17.5.1 Relazione tra le correnti

Considerando il circuito magnetico con permeabilitá infinita si ha:

$$\begin{cases} \mathcal{F}_1 = N_1 \cdot i_1(t) \\ \mathcal{F}_2 = N_2 \cdot i_2(t) \end{cases}$$

$$\mathbf{F}_1 - \mathcal{F}_2 = 0 \longrightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{k}$$

Il rapporto tra le ampiezze (e quindi tra i valori efficaci) delle due correnti é uguale all'inverso del rapporto tra il numero di spire.

### 17.5.2 Potenza

In termini di potenza si ha:

$$S_1 = V_1 \cdot I_1 = \frac{N_1}{N_2} V_2 \cdot \frac{N_2}{N_1} I_2 = V_2 \cdot I_2 = S_2$$

In un trasformatore ideale non vi sono perdite, di conseguenza tutta la potenza assorbita da una porta elettrica viene erogata all'altra porta elettrica.
La trasmissione dell'energia elettrica dal primario al secondario avviene per accoppiamento magnetico-elettrico: i due avvolgimenti sono galvanicamente separati, ovvero tra essi non vi é alcuna connessione metallica in grado di condurre una corrente dal primario al secondario.

## 17.6 Modello del trasformatore reale

Identificazione della non idealitá

- La potenza reattiva entrante nella macchina é superiore alla potenza reattiva uscente
- In una struttura induttiva, la potenza reattiva é legata all'accumulo energetico all'interno di un campo magnetico. Nel trasformatore l'accumulo di energia magnetica é localizzato:
  - nel nucleo della macchina, in quando la permeabilitá magnetica del fatto non é infinita
  - Nel campo magnetico che si genera nell'aria intorno agli avvolgimenti e non entra nel nucleo ferromagnetico (flusso disperso)

**Definizione 27 (Flusso disperso)** *Si ha un flusso disperso perché:*

- *Il ferro non ha permeabilitá magnetica infinita*
- *Le spire sono aderenti, in ogni loro punto, al nucleo ferromagnetico*
- *Una parte del flusso prodotto da un avvolgimento non si concateno con l'altro avvolgimento, e quindi produce in esso alcuna* $fem$

### 17.6.1 Metodo delle induttanze di campo

L'analisi del mutuo induttore é legata al criterio adottato per partizionarne il legame costitutivo flusso-corrente. La procedura non é univoca e quindi puó far comparire termini di natura diversa. I metodi solitamente adottati sono:

- Metodo delle induttanze o di Maxwell: di natura fisico-matematica, ignora a priori ogni legame con il campo interno ed assicura la sola equivalenza elettrica agli effetti estremi
- Metodo di campo o di Steinmetz: di imposizione ingegneristica, aggiunge al precedente metodo la rappresentazione circuitale del campo magnetico interno, cosí da pervenire ad una simultanea equivalenza agli effetti interni

L'elaborazione dei due metodi avviene distinguendo per essi i due casi:

- Avvolgimenti tra loro confrontabili ($N_1 = N_2$)
- Avvolgimenti non confrontabili ($N_1 \neq N_2$)

**Metodo di Maxwell:** applica la sovrapposizione e scompone i flussi concatenati in auto flussi e mutui-flussi:

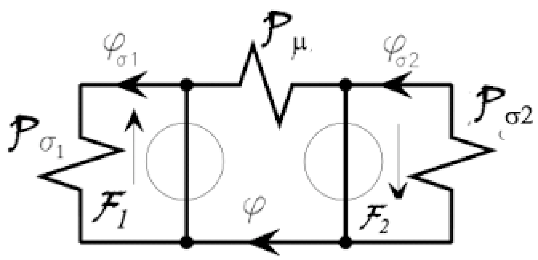
$$\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\psi_1|_{i_2=0}\\ \psi_2|_{i_1=0}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\psi_1|_{i_1=0}\\ \psi_2|_{i_2=0}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}L_1 & L_M\\ L_M & L_2\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}i_1\\ i_2\end{bmatrix}$$

Le auto e mutue induttanze risultano:

$$\begin{cases} L_M = N_1 N_2 \mathcal{P}_m \\ L_1 = N_1^2 \mathcal{P}_{11} \\ L_2 = N_2^2 \mathcal{P}_{22} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} L_d = L_M & : \text{Induttanza derivata} \\ L_{s1} = L_1 - L_M & : \text{Induttanza serie} \\ L_{s2} = L_2 - L_M & : \text{Induttanza serie} \end{cases}$$

Il metodo di Maxwelle é estremamente utile per l'analisi del mutuo induttore. Per la progettazione, sintesi, é necessario invece conoscere e modellizzare la distribuzione del campo magnetico "interno".

**Metodo di Steinmetz:** si basa sulla scomposizione del flusso comune (solitamente circolante nel circuito magnetico principale) e flussi dispersi (solitamente circolanti in aria).
La rete magnetica corrispondente é:




Le permeanze magnetiche viste dai due avvolgimenti risultano:

$$\mathcal{P}_{11} = \mathcal{P}_{\sigma 1} + \mathcal{P}_\mu$$
$$\mathcal{P}_{22} = \mathcal{P}_{\sigma 2} + \mathcal{P}_\mu$$

Induttanze di dispersione magnetiche:

$$L_1 = N_1^2 \mathcal{P}_{11} = N_1^2 \mathcal{P}_{\sigma_1} + N_1^2 \mathcal{P}_\mu = l_{\sigma_1} + L'_\mu$$

$$L_2 = N_2^2 \mathcal{P}_{22} = N_2^2 \mathcal{P}_{\sigma_2} + N_2^2 \mathcal{P}_\mu = l_{\sigma_2} + L''_\mu$$

$$L_M = N_1 N_2 \mathcal{P}_m = N_1 N_2 \mathcal{P}_\mu$$

dove:

- $l_{\sigma_1}$ e $l_{\sigma_2}$ sono induttanze di dispersione
- $L'_\mu$ e $L''_\mu$ sono induttanze di magnetizzazione primaria e secondaria

### 17.6.2 Legame tra metodo di Maxwelle e metodo di Steinmetz

Nel caso di $N_1 = N_2$ il metodo di Maxwell e quello di Steinmetz sono equivalenti. L'induttanza derivata é di tipo magnetizzante per cui gli elementi serie, pari alla differenza tra le induttanze proprie degli avvolgimenti e l'induttanza magnetizzante, costituiscono le induttanze di dispersione. Nel caso $N_1 \neq N_2$ le induttanze serie non essendo esprimibili come differenza tra le induttanze propria e magnetizzante del solenoide, non riportano alle permeanze di dispersione viste dall'avvolgimento corrispondente. Esse non sono pertanto di dispersione. L'induttanza derivata non costituisce l'induttanza di magnetizzazione.

$$l_d = N_1 N_2 \mathcal{P}_\mu = L_M$$

Nei casi pratici si ha $N_1 \neq N_2$: solo cosí é possibile abbassare/elevare la tensione.

### 17.6.3 Identificazione della non idealitá

Il trasformatore reale non é una macchina perfetta, di conseguenza vi sono fenomeni che modificano il comportamento fino ad ora descritto. Come tutte le macchine reali, il trasformatore ha un rendimento inferiore ad 1 in quanto é sede di perdite di potenza attiva:

- Perdite nei conduttori degli avvolgimenti a causa della resistivitá non nulla del materiale.
  La corrente che circola negli avvolgimenti (primario e secondario) produce riscaldamento per effetto Joule. Se ne tiene conto inserendo nel circuito equivalente un opportuno valore di resistenza che tiene conto di entrambi gli avvolgimenti.
- Perdite del nucleo ferromagnetico a causa di isteresi e correnti parassite.
  Le correnti parassite sono causate dalla variazione del campo magnetico che attraversa il nucleo ferromagnetico, che è di materiale conduttore e si riducono riducendo la superficie della "spira equivalente" ed aumentando la resistività del materiale ferromagnetico, per questo motivo il nucleo dei trasformatori è realizzato con lamierini di ferro al silicio impilati uno sull'altro.

### 17.6.4 Avvolgimenti non confrontabili

Il modello completo del trasformatore si ottiene mettendo in conto:

- Le perdite mediante una resistenza opportuna in serie a ciascun solenoide
- Le perdite nel ferro connettendo in parallelo all'ingresso del solenoide una conduttanza o una resistenza

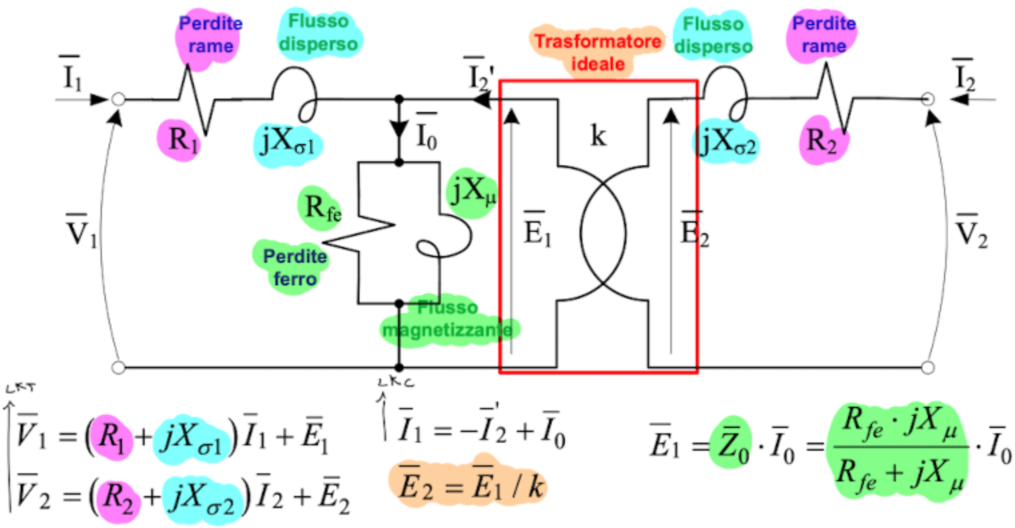



Figure 17: Trasformatore

### 17.6.5 Modelli ridotti

Nelle usuali applicazioni tecniche si utilizzano i modelli ridotti. Ogni modello costruibile si basa comunque su ragionevoli approssimazioni, per cui i risultati ottenuti sono in tutti i casi sufficientemente precisi.
I parametri dei modelli ridotti vengono calcolati imponendo la condizione che le potenze attive e reattiva non cambiano trasportando le resistenze e le reattanze da una parte all'altra del trasformatore ideale di rapporto di spire $k$.

## 17.7 Identificazione del modello di targa

### 17.7.1 Dati nominali

Le tensioni nominali ($V_{1n}$, $V_{2n}$) sono le tensioni di progetto magneto elettrico del componente. Esse sono indotte negli avvolgimenti a frequenza nominale in corrispondenza all'induzione sinusoidale $B_M$ fissata nel nucleo ferromagnetico in sede di calcolo. Le tensioni nominali richiamano le informazioni seguenti:

- Determinano il numero di spire
- Il loro rapporto fornisce direttamente il rapporto di spire $k$
- La loro ampiezza rappresenta il valore massimo di tensione che é consentito applicare all'avvolgimento corrispondente senza superare i limiti previsti per le perdite nel ferro e per le correnti di eccitazione

Le correnti nominali ($I_{1n}$, $I_{2n}$) rappresentano la massima corrente che puó essere erogata dall'avvolgimento corrispondente usato come secondario senza superare i limiti previsti per le perdite nel rame e le cadute di tensione.
Oltre a questi sono dati nominali la frequenza nominale e le potenze apparenti associate alle due diverse porte.

### 17.7.2 Prova a vuoto

La prova a vuoto si realizza alimentando a tensione nominale uno dei due avvolgimenti e lasciando aperto l'altro.
Lo scopo della prova a vuoto é calcolare $R$ e $X$ che costituiscono l'impedenza a vuoto $Z_0$. Per fare ció si misurano la tensione di alimentazione, la corrente, la potenza a vuoto e la tensione secondaria.
Un trasformatore ideale, quando l'avvolgimento secondario é a vuoto assorbe una corrente nulla.
Le grandezze calcolabili dalla prova a vuoto sono:

$$\begin{cases} V_{1n} \\ V_{2_0} \\ I_0 \\ P_0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \frac{V_{1n}}{V_{2_0}} = k \\ \frac{P_0}{V_{1n} I_0} = \cos\varphi \\ \frac{P_0}{V_{1n}^2} = G_{fe} \\ \sqrt{\left(\frac{I_0}{V_{1n}}\right)^2 - G_{fe}^2} = B_\mu \end{cases}$$

Valori percentuali:

$$p_0\% = \frac{P_0}{S_N} \cdot 100$$
$$i_0\% = \frac{I_0}{I_N} \cdot 100$$

### 17.7.3 Prova in corto circuito

La prova in corto circuito si realizza chiudendo in corto i morsetti di un avvolgimento ed alimentando l'altro con una tensione ridotta ad un valore tale da comportare la circolazione delle correnti nominali delle due bobine.
Lo scopo della prova é misurare gli elementi in serie del circuito equivalente del trasformatore. Si misurano le tensioni di alimentazione, la corrente e la potenza del circuito.
Per far circolare una corrente nel primario di una trasformatore reale in corto circuito é necessario applicare la primario stesso una tensione $V_k$ detta di corto circuito ridotta di alcuni punti percentuali rispetto alla tensione nominale.
Impressa la $V_{1k}$, le grandezze calcolabili della prova in corto sono:

$$\begin{cases} I_{1n} \\ V_{1k} \\ P_k \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \frac{P_k}{V_{1k} I_{1n}} = \cos\varphi_k \\ \frac{P_k}{I_{1n}^2} = R_k \\ \sqrt{\left(\frac{V_{1k}}{I_{1n}}\right)^2 - R_k^2} = X_k \end{cases}$$

### 17.7.4 Dati di targa

Il trasformatore é identificato dai dati riportati sulla sua targa. Gli otto parametri presentati sono necessari e sufficienti per risalire alla sua rete equivalente e dedurne le corrispondenti condizioni di funzionamento. Gli elementi circuitali adottati sono riferiti ai dati di avvolgimento della porta di cui é messa in conto la tensione $V_n$, unico elemento variabile in tali relazioni.

| | | |
|---|---|---|
| Dati nominali | Potenza nominale | $S_n$ |
| | Frequenza nominale | $f_n$ |
| | Tensione primaria nominale | $V_{1n}$ |
| | Tensione secondaria nominale | $V_{2n}$ |
| Risultati di prove | A vuoto | $P_{on}\%$ |
| | | $I_o\%$ |
| | In c.cto | $P_{kn}\%$ |
| | | $V_k\%$ |

# 18 Impianti di distribuzione dell'energia elettrica

## 18.1 Il cortocircuito

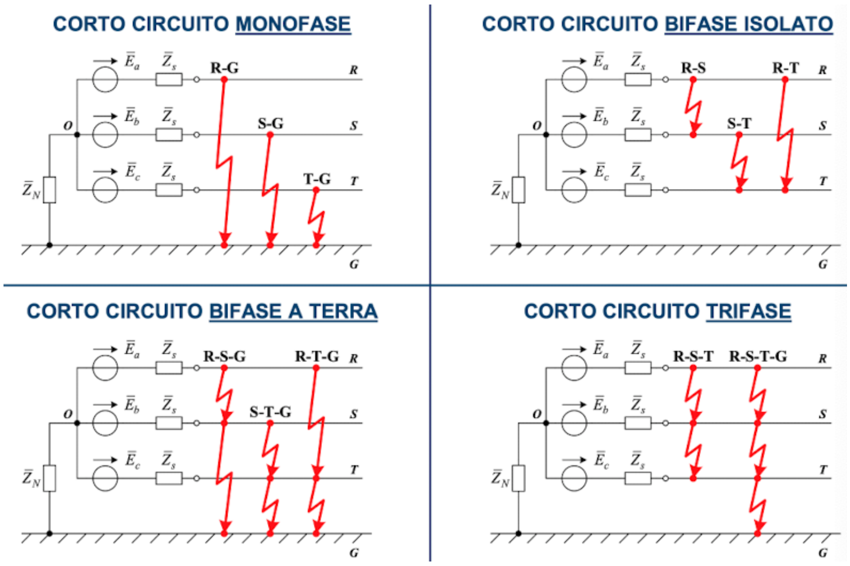
Un sistema elettrico complesso é caratterizzato da impianti di produzione, da linee di trasmissione AT (alta tensione), da linee di distribuzione MT (media tensione) e BT (bassa tensione) e da impianti di distribuzione civile e industriale che alimentano le rispettive utenze.
I diversi componenti che formano il sistema elettrico sono costituiti da circuiti di materiale conduttore (parti attive del circuito). Il terreno, modellizabile come un semispazio infinito a conducibilitá elettrica non nulla, interagisce con i sistemi elettrici.

**Definizione 28 (Cortocircuito)** *Il cortocircuito é un contatto accidentale, diretto oppure tramite l'interposizione di una impedenza di basso valore ohmico, tra due punti del circuito a potenziale differente.*

Il corto circuito tra parti attive di un sistema elettrico determina una drastica riduzione dell'impedenza equivalente vista dal generatore di tensione. Esso produce simultaneamente i seguenti effetti:

- Forte aumento della corrente
- Forte riduzione della tensione

il contributo del carico al corto circuito é trascurabile.




Ipotesi iniziale per l'analisi delle configurazioni di guasto: l'alimentazione del sistema trifase é costituita da una terna simmetrica di generatori di tensione.

- Il guasto trifase é un guasto simmetrico e puó essere studiato utilizzando il circuito monofase equivalente
- Tutte le altre tipologie di guasto (monofase, bifase e bifase a terra) sono guasti dissimmetrici. Essi richiedono la modellizzazione completa di tutto il sistema trifase

In tutti i casi di guasto che non interessano il terreno, il corto circuito causa sempre elevate correnti e variazione del profilo di tensione nel sistema elettrico. In tutti i casi di guasto che interessano il terreno il corto circuito puó causare alternativamente:

- Elevate correnti e variazione del profilo di tensione
- Aumento del potenziale verso terra e correnti di guasto trascurabili

In tutti i casi di guasto a terra, l'intensitá delle correnti ed il potenziale verso terra delle fasi dei sistemi elettrici, dipendono dallo dallo stato del neutro, ovvero dalla tipologia di connessione tra sistema elettrico ed il terreno.

- Neutro a terra $Z_n$ = corto circuito (reti AAT, AT, BT)
- Neutro isolato $Z_n$ = circuito aperto (storico reti MT e reti BT con elevata cotinuitá di servizio)
- Neutro a terra con resistenza $Z_n = R$
- Neutro a terra con bobina di Petersen $Z_n = j\omega L$ (Reti MT)

Il cortocircuito corrisponde sempre alla perdita dell'isolamento in un certo punto della rete. A seconda se la condizione di perdita dell'isolamento perdura nel tempo oppure si estingue rapidamente, si distinguono due categorie di cortocircuiti:

- Cortocircuiti permanenti: quando la perdita dell'isolamento é durevole nel tempo

- Cortocircuiti transitori: quando la condizione di isolamento si ripristina artificialmente e/o autoripristina a segue di altri fenomeni fisici

Le conseguenze di un cortocircuito sono molteplici e dipendono: dalla tipologia di cortocircuito e/o dallo stato del neutro nel sistema trifase. Conseguenze del cortocircuito:

1. Rapida sopraelevazione della temperatura dei conduttori, per effetto Joule
2. Elevate forze elettrodinamiche (Lorentz): due conduttori percorsi da correnti equiverse si attraggono con una forza che é proporzionale al prodotto del valore istantaneo delle correnti nei due conduttori
3. Riduzione della tensione in tutti i nodi della rete, proporzionalmente alla distanza dal nodo di cortocircuito
4. Aumento della tensione verso terra delle fasi sane e sollecitazione anomala dei sistemi di isolamento

Le cause principali di cortocircuito sono:

- Negli impianti elettrici il deterioramento meccanico o elettrico di un isolante
- Nelle linee in cavo (interrate): l'invecchiamento dell'isolante, le sollecitazioni meccaniche, cause accidentali o infiltrazioni di umiditá

Nelle linee aeree le cause piú frequenti di perdita dell'isolamento sono:

- Sovratensioni di origine atmosferica
- Nebbia
- Sovratensioni di origine interna
- Caduta di corpi estranei sui conduttori
- Crescita di alberi sotto la linea
- Eventi atmosferici, quali vento o neve
- Rottura meccanica dei conduttori o degli isolatori

### 18.1.1 Criteri di eliminazione di un cortocircuito

Un cortocircuito deve essere eliminato nel modo piú rapido e selettivo possibile, in quanto esso puó comportare effetti dannosi per la continuitá del servizio e puó danneggiare e/o anticipare l'invecchiamento dei componenti impiantistici.

- Rapiditá: prima che si creino disservizi significativi agli utenti collegati
- Selettivitá: isolare solo la parte guasta del sistema

### 18.1.2 Risposta dinamica

Dal punto di vista della teoria delle reti, un cortocircuito rappresenta una variazione di topologia di un circuito elettrico in cui sono presenti elementi dinamici. A fronte di un cortocircuito, la rete si porta al nuovo regime sinusoidale di funzionamento, detto regime permanente di cortocircuito, solo dopo che si é estinto il regime di transitorio, dovuto alla risposta dinamica del sistema elettrico.
Se il cortocircuito avviene lontano dai generatori, l'andamento della corrente é quello tipico di un transitorio RL. Nel caso in cui il corto circuito avvenga vicino ai generatori, la corrente di guasto assume un andamento piú articolato e dovuto alle dinamiche interne dei generatori. Alla componente unidirezionale si somma uno smorzamento della corrente a regime.

# 19 Linee elettriche di bassa tensione

Il modello elettrotermico di un cavo considera un conduttore senza isolamento esterno.

- Modello elettrico: in un conduttore di resisttivitá $\rho(\theta_c)$, lunghezza $l$ e sezione $S$ percorso da una corrente di valore efficace $I$, per effetto Joule viene prodotta una potenza termica data da:

$$P_C = R(\theta_c) \cdot I^2 = \frac{\rho(\theta_c) \cdot l}{S} \cdot I^2$$

- Modello termico: l'energia termica immersa nel sistema $P_C \cdot dt$ deve eguagliare la somma dell'energia termica ceduta all'ambiente $P_{diss} \cdot dt$ e della variazione dell'energia termica accumulata all'interno del conduttore $dQ$

$$P_C dt = dQ + P_{diss} dt$$

  - $dQ = c_s(\theta_c) m d\theta_c$
  - $P_{diss} = h(\theta_c) A(\theta_c - \theta_a)$

  L'equazione di bilancio energetico quindi varrá:

$$\frac{\rho(\theta_c) \cdot l}{S} \cdot I^2 = c_s(\theta_c) m \frac{d\theta_c}{dt} + h(\theta_c) A(\theta_c - \theta_a)$$

Il problema elettrotermico é sempre indipendente dal cavo.
Nel caso semplificato e valido per piccoli salti termici, in cui sia resistivitá che coefficiente di scambio termico possono essere ritenuti costanti, la sovratemperatura di regime é data da:

$$\theta_c - \theta_a \approx \frac{\rho}{2\pi^2 r^3 h} \cdot I^2$$

La temperatura $\theta_c$ del conduttore deve essere compatibile con il tipo di materiale isolante che riveste il conduttore stesso. I materiali isolanti subiscono un'ossidazione (che degrada il materiale) tanto piú intensa quanto maggiore é la temperatura. La durata della vita dell'isolante diminuisce all'aumentare della temperatura.
Per ogni tipo di isolante é definita una temperatura $\theta_s$ che non deve essere superata, nel servizio ordinario, per assicurare al avo una conveniente durata. Tale temperatura $\theta_s$ prende il nome di massima temperatura di servizio. Il problema diventa quindi: determinare la massima corrente che puó circolare nel cavo affinché la sua temperatura non superi la massima temperatura di servizio.
Sostituendo $\theta_c$ con $\theta_s$ nell'equazione del modello elettrotermico a regime si ricava la portata del cavo

$I_z$, cioé il piú elevato valore di corrente che il cavo puó trasmettere, a regime termico ed in condizioni di installazione determinate, senza che sia superata la massima temperatura di servizio:

$$I_z = \pi \sqrt{\frac{2r^3 h(\theta_s) \cdot (\theta_s - \theta_a)}{\rho(\theta_s)}}$$

La formula ottenuta é comunque basata su un modello approssimato. Essa infatti include le seguenti ipotesi:

- Non tiene conto dell'effetto pelle
- Non tiene conto delle perdite dielettriche nell'isolante
- Non tiene conto della potenza termica dissipata per irraggiamento
- Non tiene conto dell'effetto del riscaldamento di un conduttore sugli altri
- Non tiene conto dello spessore dell'isolante e, di conseguenza, della sua resistenza termica

Questa formula permette inoltre di quantificare i fenomeni fisici principali che avvengono nel sistema cavo percorso da corrente elettrica.
$I_z$ puó anche essere riscritto come:

$$I_z = \pi \sqrt{\frac{2h(\theta_s) \cdot (\theta_s - \theta_a)}{\rho(\theta_s)}} \cdot r^{\frac{3}{2}}$$

## 19.1 Calcolo della portata in condizioni definite

I modelli termici precedentemente sviluppati non sono direttamente applicabili a condizioni di posa reali in quanto risulta difficoltoso definire il valore del coefficienti di scambio termico. Al fine di determinare la portata nelle condizioni di posa si utilizzano tabelle e opportuni coefficienti correttivi, definiti dalla norma CEI 64-8.

## 19.2 Sovracorrenti nelle linee BT

**Definizione 29 (Sovracorrente)** *Per sovracorrente si intende ogni corrente superiore alla portata del cavo; le sovracorrenti possono essere causate da un sovraccarico o da un corto circuito.*

**Definizione 30 (Corrente di sovraccarico)** *La corrente di sovraccarico é una sovracorrente che si stabilisce in un cortocircuito elettrico sano. Le cause di un sovraccarico possono essere:*

- *Presenza di motori a rotore bloccato (motore elettrico in fase di avviamento)*
- *Utilizzatore di un circuito al di lá del coefficiente di contemporaneitá*

**Definizione 31 (Corrente di cortocircuito)** *La corrente di cortocircuito é una sovracorrente prodotta da un guasto d'impedenza trascurabile tra due parti del circuito, che presentano una differenza di potenziale nel servizio normale, ad esempio tra due conduttori di fase.*

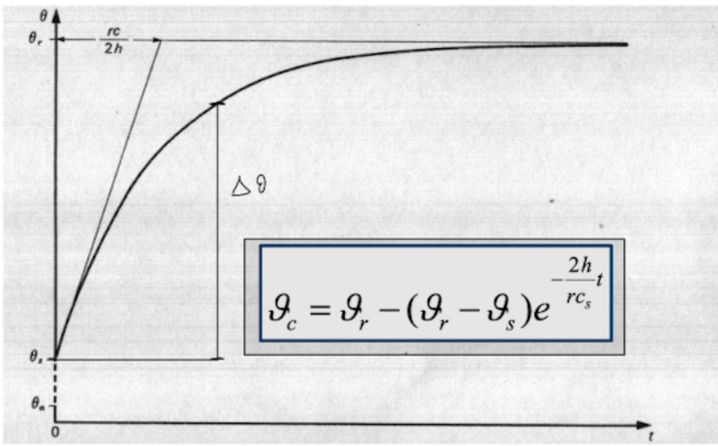
Al verificarsi di una sovracorrente aumenta la temperatura del cavo; se la sovracorrente perdura per un tempo sufficientemente lungo, il cavo raggiunge, attraverso un transitorio termico, una nuova temperatura di regime superiore alla massima temperatura di servizio $\theta_s$. Per analizzare il comportamento termico del cavo durante il transitorio é necessario risolvere l'equazione differenziale che descrive il comportamento elettrotermico del cavo.

$$\frac{\rho(\theta_c)}{\pi r^2} \cdot I^2 = c_s(\theta_c) \cdot m_l \frac{d\theta_c}{dt} + h(\theta_c) \cdot (2\pi r) \cdot (\theta_c - \theta_a)$$

Per ottenere un risultato semplice ed in forma chiusa, si assume, in prima grossolana approssimazione, che $\rho$, $h$ e $c_s$ siano costanti con la temperatura. Questo é vero per salti termici non troppo elevati.
La soluzione dell'equazione differenziale é:

$$\theta_c(t) = \left[\theta_s - \theta_a - \frac{\rho}{2h\pi^2 r^3} \cdot I^2\right] e^{-\frac{2h}{cr}t} + \frac{\rho}{2h\pi^2 r^3} \cdot I^2 + \theta_a$$

- Il termine di regime é:$\theta_r = \frac{\rho}{2h\pi^2 r^3} \cdot I^2 + \theta_a$
- La costante di tempo del transitorio é: $\tau = \frac{cr}{2h}$




Nella realtá, i coefficienti dell'equazione differenziale non sono costanti, ma variabili con la temperatura ed il calcolo della temperatura $\theta_c$ del conduttore é piú complesso.
Una volta stabilita la relazione tra l'evento di sovracorrente $(I, t)$ e la sollecitazione termica $(\theta, t)$, occorre stabilire se la sollecitazione termica é tollerabile. Poiché ogni sollecitazione termica corrisponde a una perdita di vita del cavo rispetto a quella attesa $(\theta_c = \theta_s)$, si tratta di stabilire quale sia la perdita di vita accettabile.
Convenzionalmente, si ritiene tollerabile una perdita di vita del cavo del 10% per l'insieme degli eventi di sovracorrente che possono prodursi durante l'intera vita del cavo. Se si suppone che il cavo possa essere soggetto a non più di 100 eventi di sovracorrente, ne consegue come accettabile una perdita di vita dello 0,1% per ogni singolo evento di sovracorrente. Una sovracorrente $I$ che duri il tempo $t$ é tollerabile se porta ad una temperatura minore o uguale a quella corrispondente allo stesso tempo $t$ sulla retta dello 0,1% della durata di vita.


### 19.2.1 Sollecitazione termica di un cavo in condizioni di cortocircuito

Il cortocircuito é un evento di guasto caratterizzato da valori di corrente estremamente elevati. É necessario un dispositivo di protezione che sia in grado di:

- Interrompere e richiudere la corrente presunta di cortocircuito
- Aprire il circuito in un tempo sufficientemente breve per la protezione termica del cavo

L'equazione differenziale di bilancio termico, sotto queste ipotesi, diventa un'equazione a variabili separabili:

$$\frac{\rho(\theta_c)}{\pi r^2} \cdot I^2 dt = c_s \pi r^2 dt$$

Indicando la sezione del conduttore con $S = \pi r^2$, ed integrando tra l'istante di corto circuito ($t = 0$) e l'istante di intervento della protezione $t_i$ si ottiene:

$$\int I^2 dt = c_s S^2 \int \frac{d\theta_c}{\rho(\theta_c)}$$

In considerazione della forte escursione termica la resistività $\rho$ non può essere considerata costante con la temperatura. Per rendere il calcolo più semplice, si utilizza che la relazione che fornisce la $\rho$ ad una data temperatura rispetto alla $\rho$ a 0°C. In questo modo, il salto termico coincide con la temperatura.
La soluzione dell'equazione differenziale é:

$$\int I^2 dt = \frac{cS^2}{\alpha\rho(0\ °C} \cdot \ln \frac{1 + \alpha\theta_f}{1 + \alpha\theta_i}$$

Supponendo che all'istante iniziale di cortocircuito si trovi alla massima temperatura di servizio $\theta_i = \theta_s$, deve essere soddisfatta la condizione:

$$\int I^2 dt = \frac{cS^2}{\alpha\rho(0\ °C} \cdot \ln \frac{1 + \alpha\theta_f}{1 + \alpha\theta_s} = K^2 S^2$$

Tutti i termini a destra del segno di uguaglianza sono noti. Si definisce:

$$K^2 = \frac{c}{\alpha\rho(0\ °C} \cdot \ln \frac{1 + \alpha\theta_f}{1 + \alpha\theta_s}$$

Riscrivendo in forma compatta:

$$\int I^2 dt \leq K^2 S^2$$

- $\int I^2 dt$: Integrale di Joule, l'energia specifica o energia specifica passante. Esso rappresenta l'energia sviluppata dalla corrente di cortocircuito su un conduttore di resistenza unitaria. Energia passante perché è rappresentativa dell'energia che fluisce attraverso il dispositivo di protezione, prima che questo interrompa la corrente di cortocircuito.
- $K^2 S^2$: Indica l'energia specifica tollerabile in condizioni adiabatiche da un cavo costituito da un certo materiale conduttore $(c, \rho, \alpha)$, di sezione $S$, isolato con un determinato isolante $(\theta_f)$ e avente temperatura iniziale definita $(\theta_i = \theta_s)$.L'energia specifica tollerabile dal cavo in condizioni adiabatiche:
  - Aumenta con il quadrato della sezione: all'aumentare della sezione diminuisce, con la resistenza, il calore prodotto dalla corrente e aumenta la capacità termica del cavo
  - Non dipende dalle condizioni di posa del cavo, proprio perché è trascurabile lo scambio termico con l'ambiente circostante.

## 19.3 Apparecchi di protezione

Le sovracorrenti in un circuito possono essere dovute ad un sovraccarico o ad un corto circuito.

**Definizione 32 (Sovraccarico)** *Condizione tipica di un circuito elettricamente sano ed interessato da una corrente non troppo maggiore di quella nominale.*

**Definizione 33 (Corto circuito)** *E' dovuto ad un contatto di impedenza trascurabile tra due parti in tensione (condizione di guasto).*

- *Comporta sollecitazioni sia meccaniche che termiche molto intense*
- *Provoca archi elettrici che possono innescare incendi*

In condizioni di sovraccarico è necessario interrompere la sovracorrente entro un tempo non superiore a quello che corrisponde ad una riduzione della vita utile dello 0,1% del cavo. Per fare ciò si utilizzano degli apparecchi di protezione:

- Interruttori automatici magneto-termici
- Fusibili a relè termici accoppiati a cotattori

**Definizione 34 (Tempo di intervento)** *Tempo che intercorre tra l'istante in cui la corrente raggiunge il valore di funzionamento degli sganciatori e l'istante in cui i contatti sono separati su tutti i poli.*

### 19.3.1 Interruttore automatico

Gli sganciatori possono essere di due tipi:

- Termici
- Magnetici

**Definizione 35 (Corrente convenzionale di non intervento)** *La corrente convenzionale di non intervento ($I_{nf}$) è quel valore specificato di corrente che non provoca, in condizioni determinate, l'intervento dell'interruttore per un intervallo di tempo convenzionale pari ad un'ora.*

**Definizione 36 (Corrente convenzionale di intervento)** *La corrente convenzionale di intervento ($I_f$) è quel valore specifico di corrente che provoca, in condizioni determinate, l'intervento dell'interruttore entro un intervallo di tempo convenzionale pari ad un'ora.*

Condizioni di limitazione di una corrente di cortocircuito:

- La corrente di cortocircuito presunta é la corrente che circolerebbe nel circuito se ciascun polo del dispositivo di protezione fosse chiuso
- Il potere di limitazione di un interruttore automatico rappresenta la sua capacitá o meno di lasciar passare, in occasione di un cortocircuito una corrente limitata reale o inferiore alla corrente di cortocircuito presunta (intervento istantaneo)

#### 19.3.2 Fusibile

**Definizione 37 (Fusibile)** *Un fusibile è un dispositivo costituito da un filamento che, se percorso da correnti superiori alla nominale, fonde ed apre il circuito.*

Il tempo di intervento di un fusibile è tanto piccolo quando più grande è la corrente.

**Definizione 38 (Tempo prearco)** *Il tempo prearcco è il tempo che intercorre tra l'istante di inizio della sovracorrente e l'istante in cui ha inizio l'arco di interruzione.*

Anche per i fusibili di definiscono le correnti convenzionali di non fusione e di fusione con significato analogo a quello indicato per gli interruttori automatici.

### 19.4 Coordinamento cavo - Dispositivi di protezione

**Definizione 39 (Corrente di impiego)** *Si definisce corrente di impiego ($I_b$) del circuito la corrente da prendere in considerazione per la scelta dei componenti del circuito.*

La corrente nominale del dispositivo di protezione deve essere perció non inferiore alla corrente d'impiego del circuito.

$$I_b \leq I_n$$

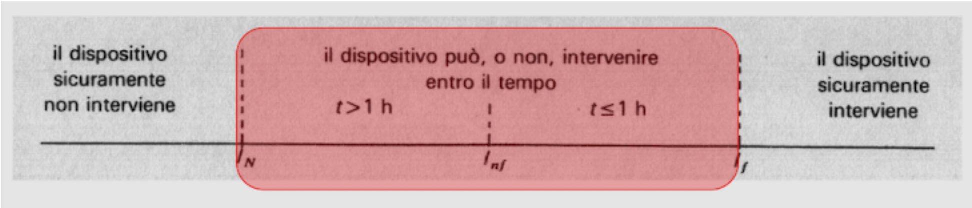
Il dispositivo di protezione contro sovraccarico non dovrebbe consentire il permanere di correnti superiori alla portata del cavo $I_z$:

$$I_n \leq I_z$$

Deve quindi valere la disequazione:

$$I_b \leq I_n \leq I_z$$

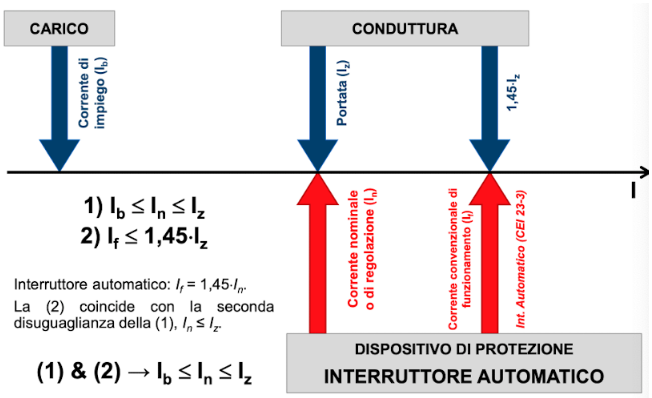
Di fatto il dispositivo interviene in modo certo solo per correnti uguali o superiori alla corrente convenzionale di intervento $I_f$.
Esiste una zona di incertezza di intervento della protezione:
Condizione di minima protezione: $I_n = I_z$. Le correnti comprese tra $I_n$ e $I_f$ costituiscono un sovraccarico per il cavo e potrebbero non essere mai interrotte.
Condizione di massima protezione: $I_f = I_z$. Qualunque corrente superiore alla portata $I_z$ provoca il sicuro intervento della protezione. Esiste un intervallo di correnti che potrebbero essere tollerate dalla conduttura, ma che potrebbero essere interrotte dal dispositivo di protezione.
Condizione di compromesso: $I_n < I_z < I_f$. L'intervallo di correnti compreso tra $I_n$ e $I_f$ é diviso in due parti: un primo intervallo di correnti non sfruttabili ed un secondo intervallo di correnti che

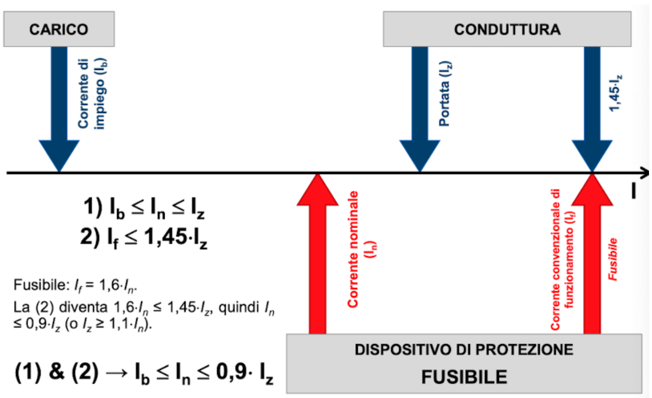



potrebbero essere non protette.
Un dispositivo di protezione delle condutture contro il sovraccarico é scelto secondo le norme, quando soddisfa entrambe le condizioni:

- $I_b \leq I_n \leq I_z$: condizione di coordinamento tra cavo e dispositivo di protezione
- $I_f \leq 1,45 I_z$: compromesso normativo che fissa il massimo valore di $I_f$ in funzione di $I_z$

Queste condizioni non sono indipendenti fra di loro.



### 19.4.1 Condizioni di corto circuito

Una conduttura é protetta da eventi di corto circuito se l'energia passante é non superiore all'energia specifica tollerabile.

$$\int I^2 dt \leq K^2 \cdot S^2$$

Il dispositivo di protezione deve garantire la protezione del cavo in ogni condizione di cortocircuito.

# 20 Dimensionamento delle linee in BT

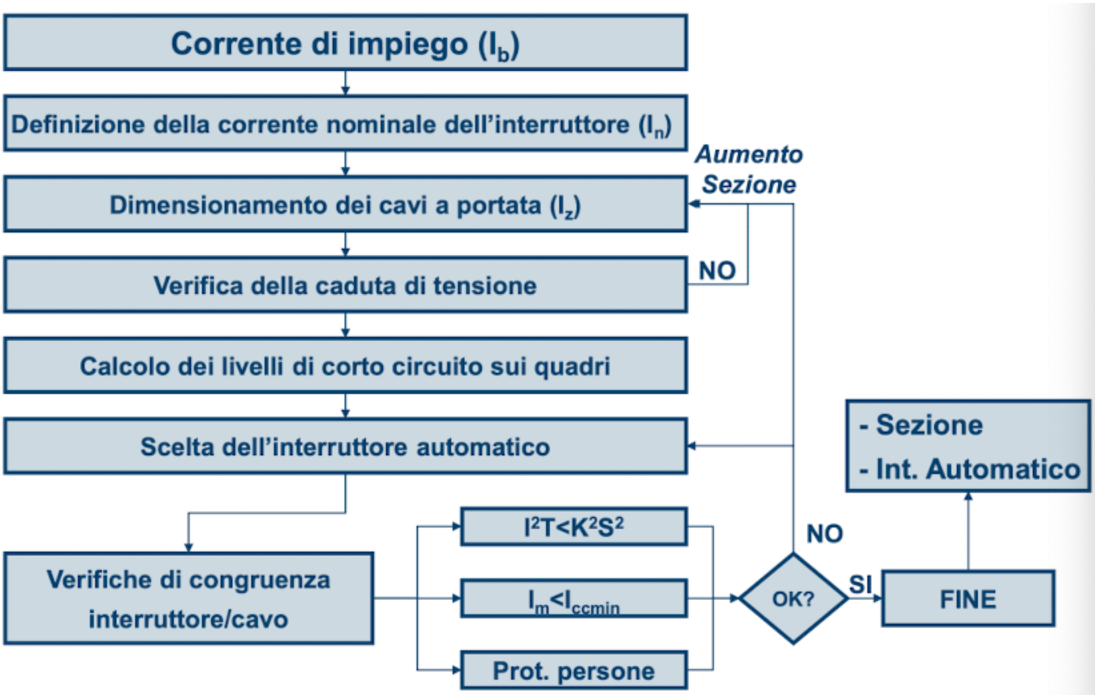



Figure 18: Algoritmo di dimensionamento

1. **Corrente di impiego:** Per determinare i valori della corrente di impiego é necessario partire da una prima analisi riguardante il censimento e la disposizione topografica dei carichi.
   Il fattore di utilizzazione $k_u = \frac{P}{P_n}$ considera la condizione di funzionamento media di un carico. Il fattore di contemporaneitá si applica a condutture che alimentano piú carichi e tiene in considerazione, in modo statistico, il fatto che non tutti i carichi saranno alimentati contemporaneamente.

$$k_c = \frac{P}{\sum P_i}$$

2. **Definizione della corrente nominale dell'interruttore:** Data la corrente di impiego $I_b$, si determina la corrente $I_n$ dell'interruttore rispettando la disequazione:

$$I_b \leq I_n$$

La massima corrente continuativa per l'interruttore in condizioni di esercizio é impostata con la temperatura dello sganciatore, e prende il nome di corrente di regolazione termica ($I_r$). Ai fini del dimensionamento e della verifica di coordinamento con questo tipo di interruttori, nelle disequazioni si sostituisce $I_n$ con $I_r$.

3. **Dimensionamento dei cavi a portata** Le portate dei cavi sono fornite dai produttori per condizioni ben determinate in termini di:

   - Temperatura ambiente di riferimento: $\theta = 30°C$
   - Una sola conduttura caricata
   - Una determinata condizione di posa

   La normativa prevede l'utilizzo di tabelle e coefficienti correttivi per tenere in considerazione tutti i fattori che spostano le condizioni di posa reali da quelle ideali.

4. **Verifica della caduta di tensione** La norma CEI 64-8 raccomanda una caduta di tensione tra l'origine dell'impianto ed ogni apparecchio utilizzatore non superiore al 4% della tensione nominale del sistema.
   Per ogni conduttura si utilizza la formula per il calcolo della caduta di tensione industriale:

$$\Delta V = kI_bL(r\cos\varphi + x\sin\varphi) \quad \Delta v = \frac{\Delta v}{V_n}$$

5. **Calcolo dei livelli di corto circuito sui quadri** La conoscenza dei livelli di cortocircuito in un sistema BT é necessaria per:

   - Determinare i poteri di interruzione e chiusura degli interruttori da installare
   - Verificare la tenuta elettrodinamica degli elementi dell'impianto
   - Verificare la tenuta termica dei cavi
   - Determinare la regolazione dei relé di protezione

   Per il calcolo delle correnti di guasto ci si mette nel caso peggiore in cui il sistema elettrico é esercito da una tensione superiore al 5% della tensione nominale