Formulario Analisi 2

Lorenzo Minuz

11 febbraio 2026

Indice

1 Spazi Metrici Euclidei e Topologia

1.1 Struttura Euclidea di $\mathbb{R}^n$

Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. Gli elementi sono vettori colonna $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$.

Definizione 1.1 (Prodotto Scalare Standard) *Il prodotto scalare (o interno) tra due vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ è definito come:*

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

Definizione 1.2 (Norma Euclidea) *La norma (o modulo) del vettore $\mathbf{x}$, indotta dal prodotto scalare, è:*

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$$

Teorema 1.1 (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz) *Per ogni coppia di vettori $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ vale la relazione:*

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|$$

Nota: L'uguaglianza vale se e solo se i due vettori sono linearmente dipendenti (paralleli).

1.2 Distanza e Topologia

La struttura metrica permette di definire la distanza e, di conseguenza, gli intorni fondamentali per la topologia.

Definizione 1.3 (Distanza Euclidea) *La distanza tra due punti $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ è definita come la norma del vettore differenza:*

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \left(\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2 \right)^{1/2}$$

Definizione 1.4 (Palla Aperta (Intorno sferico)) *Si definisce palla aperta (o disco aperto in $\mathbb{R}^2$) di centro $\mathbf{x}_0$ e raggio $r > 0$ l'insieme:*

$$B_r(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < r\}$$

Questo insieme costituisce l'intorno fondamentale per definire i concetti di limite, continuità e insiemi aperti.

2 Calcolo Differenziale in Più Variabili

2.1 Geometria Differenziale: Piani e Rette

Proposizione 2.1 (Piano Tangente al Grafico) *Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile nel punto $P_0(x_0, y_0)$. L'equazione del piano tangente al grafico $z = f(x, y)$ nel punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ è:*

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)(y - y_0)$$

Proposizione 2.2 (Piano Tangente a Superficie Implicita) *Sia S una superficie di livello definita da $F(x, y, z) = 0$ e sia $P_0(x_0, y_0, z_0)$ un punto regolare ($\nabla F(P_0) \neq \mathbf{0}$). L'equazione del piano tangente è data dall'ortogonalità col gradiente:*

$$\nabla F(P_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{P}_0) = 0$$

Esplicitamente:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(P_0)(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(P_0)(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(P_0)(z - z_0) = 0$$

Definizione 2.1 (Retta Normale) *La retta normale alla superficie $F(x, y, z) = 0$ nel punto P_0 è la retta passante per P_0 e parallela al vettore gradiente $\nabla F(P_0)$. Equazioni parametriche ($t \in \mathbb{R}$):*

$$\begin{cases} x = x_0 + t\frac{\partial F}{\partial x}(P_0) \\ y = y_0 + t\frac{\partial F}{\partial y}(P_0) \\ z = z_0 + t\frac{\partial F}{\partial z}(P_0) \end{cases}$$

2.2 Ottimizzazione Libera (Punti Stazionari)

Definizione 2.2 (Punto Stazionario o Critico) *Un punto P_0 si dice stazionario per f se il gradiente si annulla:*

$$\nabla f(P_0) = \mathbf{0} \iff \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 0 \end{cases}$$

Teorema 2.3 (di Fermat) *Se P_0 è un punto di estremo locale (massimo o minimo) per una funzione differenziabile f, allora P_0 è un punto stazionario ($\nabla f(P_0) = \mathbf{0}$).*

Proposizione 2.4 (Classificazione con Matrice Hessiana in $\mathbb{R}^2$) *Sia P_0 un punto stazionario. Si consideri la matrice Hessiana $H_f(P_0)$:*

$$H_f(P_0) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

Analizzando il determinante ($\det H$) e la traccia (o f_{xx}):

- ***Minimo Locale:*** *Se $\det(H) > 0$ e $f_{xx} > 0$.*
- ***Massimo Locale:*** *Se $\det(H) > 0$ e $f_{xx} < 0$.*
- ***Punto di Sella:*** *Se $\det(H) < 0$ (gli autovalori hanno segno discorde).*
- ***Caso Dubbio:*** *Se $\det(H) = 0$ (l'Hessiana non dà informazioni sufficienti, servono derivate superiori o studio locale).*

3 Calcolo Integrale in Più Variabili

3.1 Cambiamento di Variabili

Teorema 3.1 (Formula del Cambiamento di Variabili) *Sia $\Phi : U \subseteq \mathbb{R}^n \to X \subseteq \mathbb{R}^n$ un diffeomorfismo (invertibile, differenziabile con inversa differenziabile). Sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Allora:*

$$\int_X f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_U f(\Phi(\mathbf{u})) \cdot |\det J_\Phi(\mathbf{u})|\, d\mathbf{u}$$

dove $J_\Phi(\mathbf{u}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{u}}$ è la matrice Jacobiana della trasformazione.

3.2 Sistemi di Coordinate Comuni

Di seguito sono riportate le trasformazioni più comuni e il valore assoluto del determinante dello Jacobiano ($|J|$) da inserire nell'integrale.

Definizione 3.1 (Coordinate Polari in $\mathbb{R}^2$) *Trasformazione $(x,y) \leftrightarrow (\rho,\theta)$:*

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}, \quad \text{con } \rho \geq 0,\ \theta \in [0,2\pi)$$

Jacobiano: $|J| = \rho$

Definizione 3.2 (Coordinate Cilindriche in $\mathbb{R}^3$) *Estensione delle polari allo spazio $(x,y,z) \leftrightarrow (\rho,\theta,z)$:*

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}, \quad \text{con } \rho \geq 0,\ \theta \in [0,2\pi),\ z \in \mathbb{R}$$

Jacobiano: $|J| = \rho$

Definizione 3.3 (Coordinate Sferiche in $\mathbb{R}^3$) *Trasformazione $(x,y,z) \leftrightarrow (\rho,\phi,\theta)$:*

$$\begin{cases} x = \rho\sin\phi\cos\theta \\ y = \rho\sin\phi\sin\theta \\ z = \rho\cos\phi \end{cases}, \quad \text{con} \begin{cases} \rho \geq 0 \\ \phi \in [0,\pi] \ \text{(colatitudine)} \\ \theta \in [0,2\pi) \ \text{(longitudine)} \end{cases}$$

Jacobiano: $|J| = \rho^2 \sin\phi$

3.3 Applicazioni Geometriche e Fisiche

Proposizione 3.2 (Volume dei Solidi di Rotazione) *Sia V il volume del solido ottenuto ruotando attorno all'asse z la regione sottesa dal grafico di una funzione (raggio) $r(z)$ per $z \in [z_{min}, z_{max}]$. Il volume è dato da:*

$$V = \pi \int_{z_{min}}^{z_{max}} [r(z)]^2 \, dz$$

(Metodo dei dischi, derivabile dagli integrali tripli in coordinate cilindriche).

Definizione 3.4 (Centro di Massa) *Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio con densità di massa uniforme (omogeneo). Le coordinate del centro di massa $(\bar{x}_{CM}, \bar{y}_{CM})$ sono:*

$$\bar{x}_{CM} = \frac{1}{Area(D)} \iint_D x \, dxdy, \quad \bar{y}_{CM} = \frac{1}{Area(D)} \iint_D y \, dxdy$$

Nota: Se la densità non è uniforme ($\delta(x,y)$), sostituire Area(D) con la Massa totale $M = \iint_D \delta \, dxdy$ e inserire δ negli integrali al numeratore.

4 Successioni e Serie di Funzioni

4.1 Convergenza Puntuale

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni definite su un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$.

Definizione 4.1 (Convergenza Puntuale) *Si dice che la successione f_n **converge puntualmente** a una funzione limite $f : A \to \mathbb{R}$ se, per ogni fissato $x \in A$, il limite della successione numerica $\{f_n(x)\}$ è pari a $f(x)$. In simboli:*

$$\forall x \in A, \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Ovvero:

$$\forall x \in A, \forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon, x) : \forall n > N, |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Nota 4.1 (Procedimento Operativo) *Per studiare la convergenza puntuale:*

1. *Si considera x come un parametro fisso.*
2. *Si calcola il limite $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.*
3. *Si determina il dominio A in cui tale limite esiste ed è finito.*

Nota 4.2 (Limiti della convergenza puntuale) *La convergenza puntuale è una condizione "debole". Anche se tutte le f_n sono continue, la funzione limite $f(x)$ potrebbe essere discontinua. Per preservare proprietà globali (continuità, integrabilità), è necessaria la **convergenza uniforme**.*

4.2 Serie di Potenze

Definizione 4.2 (Serie di Potenze) *Una serie di potenze centrata in x_0 è una serie di funzioni della forma:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

dove $\{a_n\}$ è una successione di coefficienti reali.

Teorema 4.1 (Raggio di Convergenza) *Esiste un numero $R \in [0, +\infty]$, detto **raggio di convergenza**, tale che la serie converge assolutamente per $|x - x_0| < R$. Per calcolare R, si pone $L = \lim_{n\to\infty}(criterio)$.*

- ***Criterio della Radice:*** $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$
- ***Criterio del Rapporto:*** $L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$

Il raggio R è dato da:

$$R = \begin{cases} \frac{1}{L} & se\ 0 < L < +\infty \\ +\infty & se\ L = 0 \\ 0 & se\ L = +\infty \end{cases}$$

Teorema 4.2 (Proprietà di Convergenza) *Data una serie di potenze con raggio $R > 0$:*

1. ***Convergenza Puntuale:*** *La serie converge per ogni* $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.
2. ***Convergenza Uniforme (e Totale):*** *La serie converge uniformemente in ogni intervallo compatto* $[x_0 - k, x_0 + k]$ *contenuto strettamente nell'intervallo di convergenza (con* $0 < k < R$*).*
3. ***Comportamento al bordo:*** *In* $x = x_0 \pm R$ *la convergenza va verificata singolarmente.*

4.3 Teoremi di Passaggio (Convergenza Uniforme)

Questi teoremi permettono di scambiare l'operazione di limite (serie) con quelle di integrale e derivata.

Teorema 4.3 (Integrazione per serie) *Sia* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *una serie di funzioni continue che* ***converge uniformemente*** *alla somma* $S(x)$ *nell'intervallo* $[a, b]$*. Allora è possibile integrare termine a termine:*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

Teorema 4.4 (Derivazione per serie) *Sia* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ *una serie di funzioni derivabili in* $[a, b]$*. Se:*

1. *La serie* $\sum f_n(x)$ *converge in almeno un punto* $x_0 \in [a, b]$*;*
2. *La serie delle derivate* $\sum f_n'(x)$ ***converge uniformemente*** *in* $[a, b]$*;*

Allora la serie originale converge uniformemente a una funzione derivabile $S(x)$ *e vale:*

$$\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n(x)$$

4.4 Studio della Convergenza Uniforme

Per determinare l'insieme di convergenza uniforme, occorre distinguere tra successioni e serie di funzioni.

4.4.1 Caso 1: Successioni di Funzioni $\{f_n\}$

La definizione di convergenza uniforme richiede che la "distanza massima" tra f_n e la funzione limite f tenda a zero.

Proposizione 4.5 (Criterio del Supremum) *Una successione* f_n *converge uniformemente a* f *in un insieme* I *se e solo se:*

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0$$

Procedimento Operativo:

1. **Calcolo del limite puntuale:** Trovare $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ e il dominio A.
2. **Funzione differenza:** Scrivere la funzione distanza $g_n(x) = |f_n(x) - f(x)|$.
3. **Calcolo del Supremum (M_n):** Per ogni n, calcolare l'estremo superiore di $g_n(x)$ nell'insieme I di interesse.
   - Spesso si studia la derivata $g_n'(x)$ per trovare i massimi locali.
   - Si valutano anche gli estremi dell'intervallo I.
4. **Limite del Supremum:** Calcolare $\lim_{n\to\infty} M_n$.
   - Se il limite è $0 \implies$ C'è convergenza uniforme in I.
   - Se il limite è $\neq 0$ (o non esiste) $\implies$ Non c'è convergenza uniforme in tutto I.

Nota 4.3 *Se la convergenza uniforme fallisce su tutto il dominio A, spesso si restringe l'indagine a sottoinsiemi compatti (es. $[a,b] \subset A$) per verificare se vi è convergenza uniforme locale.*

4.4.2 Caso 2: Serie di Funzioni $\sum f_n$

Per le serie, il metodo più efficace è verificare la Convergenza Totale, che implica quella uniforme.

Teorema 4.6 (Criterio di Weierstrass o M-test) *La serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge totalmente (e quindi uniformemente e assolutamente) in un insieme I se esiste una successione numerica $\{M_n\}$ a termini positivi tale che:*

1. *$|f_n(x)| \leq M_n$ per ogni $x \in I$ (maggiorazione uniforme);*
2. *La serie numerica $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge.*

Procedimento Operativo:

1. Calcolare $M_n = \sup_{x\in I} |f_n(x)|$ (usando le derivate come per le successioni).
2. Studiare la convergenza della serie numerica $\sum M_n$.
3. Se $\sum M_n$ converge $\implies$ La serie di funzioni converge uniformemente in I.
4. *Attenzione:* Se $\sum M_n$ non converge, la convergenza totale fallisce, ma potrebbe ancora esserci convergenza uniforme (condizione sufficiente ma non necessaria). In tal caso, si deve studiare il resto n-esimo della serie (più complesso).

5 Serie di Fourier

5.1 Definizione e Coefficienti

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione periodica di periodo T (integrabile sull'intervallo). Definiamo la **pulsazione** (o frequenza angolare) fondamentale:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Definizione 5.1 (Coefficienti di Fourier) *I coefficienti dello sviluppo in serie trigonometrica sono definiti come:*

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\,dx \tag{1}$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\cos(k\omega x)\,dx \quad (k \geq 1) \tag{2}$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x)\sin(k\omega x)\,dx \quad (k \geq 1) \tag{3}$$

Definizione 5.2 (Sviluppo in Serie di Fourier) *La serie associata alla funzione $f(x)$ è data da:*

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega x) + b_k \sin(k\omega x)]$$

Nota 5.1 (Convergenza Puntuale) *Se f è regolare a tratti, la serie converge puntualmente.*

- *Dove f è continua: $S_f(x) = f(x)$.*
- *Nei punti di discontinuità x_0: la serie converge alla media dei limiti destro e sinistro:*

$$S_f(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

5.2 Proprietà di Simmetria

Le simmetrie della funzione $f(x)$ semplificano il calcolo dei coefficienti.

Proposizione 5.1
- *Se f è **pari** ($f(-x) = f(x)$):*
  - *$b_k = 0$ per ogni k (la serie contiene solo termini coseno e la costante).*
  - *$a_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos(k\omega x)\,dx$.*
- *Se f è **dispari** ($f(-x) = -f(x)$):*
  - *$a_k = 0$ per ogni k (la serie contiene solo termini seno).*
  - *$b_k = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin(k\omega x)\,dx$.*

Proposizione 5.2 *Se si calcola un integrale tra $-L$ e L di due funzioni trigonometriche con frequenze diverse che "stanno bene" nell'intervallo (cioè multipli della frequenza fondamentale), si può scrivere 0 immediatamente per la proprietà di ortogonalità. Se sono uguali, il risultato è metà della lunghezza dell'intervallo (se le funzioni sono normalizzate).*

5.3 Energia e Convergenza L^2

Teorema 5.3 (Identità di Parseval) *Se f è a quadrato sommabile ($f \in L^2$), l'energia del segnale nel dominio del tempo è uguale alla somma delle energie delle componenti armoniche:*

$$\underbrace{\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2\,dx}_{\textit{Potenza media del segnale}} = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2)$$

Proposizione 5.4 (Disuguaglianza di Bessel) *Per qualsiasi approssimazione troncata all'ordine N, l'energia della serie è sempre minore o uguale all'energia della funzione:*

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 \, dx$$

6 Curve e Superfici

6.1 Curve $\gamma(t)$

Lunghezza arco di curva ($t \in [a, b]$):

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt$$

Integrale di linea di I specie (scalare):

$$\int_\gamma f \, ds = \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\| \, dt$$

6.2 Superfici

Area di una superficie parametrica $\sigma(u, v)$:

$$\text{Area}(\Sigma) = \iint_D \|\sigma_u \times \sigma_v\| \, dudv$$

Area superficie di rotazione (profilo $f(u)$ ruota attorno asse u):

$$A = 2\pi \int_a^b |f(u)|\sqrt{1 + (f'(u))^2} \, du$$

6.3 Ottimizzazione Vincolata (Moltiplicatori di Lagrange)

Teorema 6.1 (Moltiplicatori di Lagrange) *Siano $f, g \in C'(\mathbb{R}^2)$ e (x_0, y_0) punto di estremo vincolato di f sul vincolo*

$$g(x, y) = 0.$$

Se (x_0, y_0) è regolare per il vincolo, cioè $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$, allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$, detto moltiplicatore di Lagrange, tale che

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0).$$

Per ottimizzare $f(x, y)$ con vincolo $g(x, y) = 0$:
Lagrangiana: $\mathcal{L}(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$
Sistema:

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \partial_x f - \lambda \partial_x g = 0 \\ \partial_y f - \lambda \partial_y g = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

6.3.1 Ricerca di Massimi e Minimi Assoluti su Insiemi Compatti

Per il Teorema di Weierstrass, se f è continua su un insieme D chiuso e limitato, esistono sempre il massimo e il minimo assoluto. La ricerca si articola in tre fasi:

1. **Studio dell'interno ($\mathring{D}$):** Si cercano i punti stazionari risolvendo $\nabla f(x, y) = 0$. Si considerano solo i punti che cadono all'interno del dominio.
2. **Studio della frontiera (∂D):** Si cercano i candidati sui bordi del dominio. Si può procedere tramite:
   - **Parametrizzazione:** Se il bordo è semplice (es. i lati di un quadrato), si sostituisce l'equazione del bordo in f riducendosi a una funzione di una sola variabile.
   - **Moltiplicatori di Lagrange:** Se il bordo è espresso da $g(x, y) = 0$.
3. **Punti non derivabili e vertici:** Si includono sempre i "punti angolosi" del dominio (gli spigoli) e i punti dove la funzione non è derivabile.

Nota 6.1 (Conclusione (Confronto):) *Non è necessario lo studio locale (Hessiana). Si calcola il valore di f in tutti i punti candidati trovati: il valore maggiore è il **Massimo Assoluto**, il minore è il **Minimo Assoluto**.*

6.4 Come verificare se una parametrizzazione descrive un insieme

Sia dato un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ e una funzione

$$\phi : U \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Vogliamo stabilire se ϕ è una *parametrizzazione* dell'insieme A.

1. Definizione fondamentale La funzione ϕ è una parametrizzazione di A se e solo se

$$A = \phi(U).$$

Questo equivale a verificare le due inclusioni:

$$\phi(U) \subseteq A \qquad \text{e} \qquad A \subseteq \phi(U).$$

2. Verifica dell'inclusione $\phi(U) \subseteq A$ Si prende un punto generico dell'immagine:

$$\phi(u), \quad u \in U,$$

e si verifica che soddisfi tutte le condizioni che definiscono l'insieme A.

- Se A è definito da equazioni, si sostituisce $\phi(u)$ nelle equazioni.
- Se A è definito da disequazioni, si verifica che esse siano rispettate.

Se questa verifica fallisce, ϕ *non* parametrizza A.

3. Verifica dell'inclusione $A \subseteq \phi(U)$ Si prende un punto arbitrario $x \in A$ e si dimostra che:

$$\exists\, u \in U \quad \text{tale che} \quad \phi(u) = x.$$

Questo è il passaggio più delicato e richiede in genere:

- risolvere il sistema $\phi(u) = x$;
- oppure esprimere esplicitamente i parametri in funzione delle coordinate di x;
- oppure usare argomenti geometrici.

Se esistono punti di A non ottenibili come immagine di ϕ, allora la funzione parametrizza solo una *parte* dell'insieme.

4. Controllo del dominio dei parametri Il dominio U gioca un ruolo cruciale:

- un dominio troppo piccolo può non coprire tutto l'insieme;
- un dominio più grande può far ripetere più volte gli stessi punti.

Ripetere i punti non è un problema, ma non coprirne alcuni sì.

5. Regolarità (se richiesta) Se il problema lo richiede, si verifica anche che la parametrizzazione sia *regolare*.

- Per curve ($k = 1$):
$$\phi'(t) \neq 0 \quad \forall t \in U.$$
- Per superfici o insiemi di dimensione k:
$$\operatorname{rank}(D\phi(u)) = k \quad \forall u \in U.$$

La regolarità non è necessaria per essere una parametrizzazione, ma è spesso richiesta nei teoremi.

7 Forme differenziali, Campi Vettoriali e Operatori

7.1 Operatori Differenziali

Siano $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo scalare e $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vettoriale differenziabili.

Definizione 7.1 (Gradiente) *Il gradiente di f, indicato con ∇f, è un campo vettoriale definito da:*

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

Definizione 7.2 (Divergenza) *La divergenza di $\mathbf{F}$, indicata con div$\mathbf{F}$ o $\nabla \cdot \mathbf{F}$, è un campo scalare definito da:*

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

Definizione 7.3 (Rotore) *Il rotore di* $\mathbf{F}$*, indicato con* $\text{rot}\mathbf{F}$ *o* $\nabla \times \mathbf{F}$*, è un campo vettoriale definito formalmente dal determinante:*

$$\nabla \times \mathbf{F} = \det \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Proposizione 7.1 (Identità Differenziali) *Valgono le seguenti identità vettoriali (sotto ipotesi di regolarità* C^2*):*

- $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$ *(Il rotore di un gradiente è nullo).*
- $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$ *(La divergenza di un rotore è nulla).*

7.2 Forme Differenziali e Campi Associati

Definizione 7.4 (Forma Differenziale Lineare) *Una 1-forma differenziale* ω *in* $\mathbb{R}^3$ *è definita come:*

$$\omega = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

Il campo vettoriale associato alla forma è $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$*.*

7.3 Chiusura ed Esattezza

Definizione 7.5 (Forma Esatta) *Una forma* ω *si dice* ***esatta*** *(o il campo* $\mathbf{F}$ ***conservativo****) nel dominio* D *se esiste una funzione scalare* U *(detta potenziale) tale che:*

$$\nabla U = \mathbf{F} \quad (\textit{ovvero } dU = \omega)$$

Teorema 7.2 (Proprietà delle Forme Esatte) *Se* ω *è esatta con potenziale* U*:*

1. *L'integrale di linea dipende solo dagli estremi* A *e* B*:*

$$\int_\gamma \omega = U(B) - U(A)$$

2. *L'integrale lungo una qualsiasi curva chiusa* γ *è nullo:*

$$\oint_\gamma \omega = 0$$

Definizione 7.6 (Forma Chiusa) *Una forma* ω *si dice* ***chiusa*** *(o il campo* $\mathbf{F}$ ***irrotazionale****) se:*

- *In* $\mathbb{R}^3$*:* $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$.
- *In* $\mathbb{R}^2$ *(con* $\omega = Pdx + Qdy$*):* $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.

Lemma 7.3 (Lemma di Poincaré) *Se il dominio* D *è* ***semplicemente connesso****, allora ogni forma chiusa definita su* D *è anche esatta.*

$$\textit{Chiusa su } D_{s.c.} \implies \textit{Esatta}$$

7.3.1 Procedimento Generale per la Ricerca della Primitiva

Data una forma differenziale $\omega = A(x,y)dx + B(x,y)dy$ esatta, si segue il seguente algoritmo:

1. **Integrazione Parziale:** Si integra la funzione $A(x,y)$ rispetto alla variabile x. Si ottiene una prima espressione della primitiva $F(x,y)$ che include una funzione arbitraria $g(y)$ (che funge da costante rispetto a x):
$$F(x,y) = \int A(x,y)\,dx + g(y)$$
2. **Derivazione rispetto all'altra variabile:** Si deriva l'espressione di $F(x,y)$ appena ottenuta rispetto alla variabile y:
$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int A(x,y)\,dx\right) + g'(y)$$
3. **Confronto e Determinazione di $g'(y)$:** Si pone la derivata parziale trovata uguale alla componente $B(x,y)$ della forma differenziale:
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\int A(x,y)\,dx\right) + g'(y) = B(x,y)$$
Da questa uguaglianza si isola $g'(y)$. Poiché la forma è esatta, i termini contenenti x si cancelleranno, lasciando $g'(y)$ come funzione della sola y.
4. **Calcolo di $g(y)$:** Si integra $g'(y)$ rispetto a y per trovare $g(y)$:
$$g(y) = \int g'(y)\,dy + C$$
5. **Scrittura della Primitiva Finale:** Si sostituisce $g(y)$ nell'espressione iniziale di $F(x,y)$ per ottenere la famiglia di primitive:
$$F(x,y) = \text{Risultato} + C$$

7.4 Teoremi Integrali

Teorema 7.4 (Teorema di Gauss-Green nel piano) *Sia $D \subset \mathbb{R}^2$ un dominio semplice e ∂D^+ la sua frontiera percorsa in senso antiorario. Allora:*
$$\oint_{\partial D^+} (Pdx + Qdy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$
Teorema 7.5 (Teorema della Divergenza (Gauss)) *Sia $V \subset \mathbb{R}^3$ un volume limitato da una superficie chiusa ∂V, orientata con la normale esterna $\hat{n}$. Allora:*
$$\iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \hat{n}\,dS = \iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{F})\,dxdydz$$
(Il flusso attraverso la superficie chiusa è uguale all'integrale della divergenza nel volume).

Teorema 7.6 (Teorema del Rotore (Stokes)) *Sia Σ una superficie orientata aperta con bordo $\partial\Sigma$. Se l'orientazione del bordo è coerente con la normale $\hat{n}$ (regola della mano destra), allora:*
$$\oint_{\partial\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_\Sigma (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \hat{n}\,dS$$
(La circuitazione lungo il bordo è uguale al flusso del rotore attraverso la superficie).

8 Equazioni differenziali (ODE)

8.1 Equazioni del I Ordine

Lineare: $y' + a(t)y = b(t)$.
Formula risolutiva:

$$y(t) = e^{-A(t)} \left(\int b(t)e^{A(t)}dt + c \right), \quad \text{con } A(t) = \int a(t)dt$$

Variabili separabili: $y' = g(t)h(y) \implies \int \frac{1}{h(y)}dy = \int g(t)dt$.

8.2 Equazioni del II Ordine Lineari a Coeff. Costanti

$$ay'' + by' + cy = f(t)$$

Omogenea associata ($ay'' + by' + cy = 0$):
Risolvere $ar^2 + br + c = 0$.

1. $\Delta > 0$ ($r_1 \neq r_2$): $y_h(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$
2. $\Delta = 0$ ($r_1 = r_2 = r$): $y_h(t) = c_1 e^{rt} + c_2 t e^{rt}$
3. $\Delta < 0$ ($r = \alpha \pm i\beta$): $y_h(t) = e^{\alpha t}(c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t))$

Soluzione particolare y_p (Metodo somiglianza):

- Se $f(t) = P_n(t)$, provare $y_p = Q_n(t)$.
- Se $f(t) = e^{\lambda t}$, provare $y_p = Ae^{\lambda t}$ (moltiplicare per t o t^2 se λ è radice caratteristica).
- Se $f(t) = \cos(\omega t)$ o $\sin(\omega t)$, provare $y_p = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$.

Soluzione generale: $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$.

9 Misura di Lebesgue

9.1 Insiemi di Misura Nulla

La teoria della misura di Lebesgue generalizza il concetto di lunghezza, area e volume. Un concetto cardine è quello di "insieme trascurabile" o di misura nulla.

Definizione 9.1 (Insieme di Misura Nulla) *Un sottoinsieme $E \subset \mathbb{R}$ si dice di **misura nulla** (o ha misura di Lebesgue zero), e si scrive $m(E) = 0$, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una successione di intervalli aperti limitati $\{I_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che:*

1. *E è contenuto nell'unione degli intervalli:*

$$E \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k$$

2. *La somma delle lunghezze degli intervalli è minore di ε:*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |I_k| < \varepsilon$$

Proposizione 9.1 (Proprietà degli insiemi di misura nulla) *Valgono le seguenti proprietà:*

- ***Insiemi Numerabili:*** *Ogni insieme costituito da una quantità numerabile di punti (es. $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$) ha misura nulla.*
- ***Unione Numerabile:*** *L'unione numerabile di insiemi di misura nulla è ancora un insieme di misura nulla.*
$$m(E_n) = 0 \, \forall n \implies m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0$$
- ***Sottoinsiemi:*** *Ogni sottoinsieme di un insieme di misura nulla ha misura nulla.*

9.2 La nozione di "Quasi Ovunque"

In analisi matematica, spesso non è necessario che una proprietà valga in *ogni* punto, ma è sufficiente che le eccezioni siano trascurabili.

Definizione 9.2 (Quasi Ovunque - q.o.) *Si dice che una proprietà o condizione $P(x)$ vale* ***quasi ovunque*** *(abbreviato q.o. o a.e. dall'inglese almost everywhere) in un insieme D, se l'insieme dei punti in cui la proprietà* ***non*** *vale ha misura nulla.*

$$P(x) \text{ vale q.o. in } D \iff m(\{x \in D : P(x) \text{ è falsa}\}) = 0$$

Nota 9.1 (Esempio) *Due funzioni f, g si dicono uguali quasi ovunque ($f = g$ q.o.) se l'insieme $\{x : f(x) \neq g(x)\}$ ha misura zero. Per l'integrale di Lebesgue, due funzioni uguali q.o. hanno lo stesso integrale.*

10 Integrale di Lebesgue

10.1 Costruzione e Definizione

L'integrale di Lebesgue estende l'integrale di Riemann, permettendo di integrare una classe molto più ampia di funzioni e gestendo meglio i passaggi al limite.

Definizione 10.1 (Costruzione) *L'integrale viene costruito in passaggi successivi:*

1. ***Funzioni Semplici:*** *Combinazioni lineari di funzioni indicatrici di insiemi misurabili ($\phi = \sum c_i \chi_{E_i}$).*
2. ***Funzioni Positive:*** *L'integrale di $f \geq 0$ è l'estremo superiore degli integrali delle funzioni semplici $0 \leq \phi \leq f$.*
3. ***Funzioni di segno qualunque:*** *Si scompone $f = f^+ - f^-$. Se entrambi gli integrali sono finiti, f si dice* ***sommabile*** *(o integrabile secondo Lebesgue).*

Definizione 10.2 (Funzione M-semplice) *Una funzione M-semplice (o semplicemente funzione semplice) è una funzione misurabile che assume un numero finito di valori distinti, espressa come combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche di insiemi misurabili (della σ-algebra).*

Una funzione M-semplice è misurabile e la sua immagine ha cardinalità finita.

10.2 Proprietà dell'Integrale

Siano f, g funzioni sommabili su un insieme misurabile E e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Proposizione 10.1 (Proprietà Fondamentali)

- ***Linearità:*** $\int_E (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int_E f\, d\mu + \beta \int_E g\, d\mu$.
- ***Monotonia:*** *Se* $f \leq g$ *q.o., allora* $\int_E f\, d\mu \leq \int_E g\, d\mu$.
- ***Valore Assoluto:*** $|\int_E f\, d\mu| \leq \int_E |f|\, d\mu$.
- ***Insensibilità agli insiemi nulli:*** *Se* $f = g$ *q.o., allora* $\int_E f\, d\mu = \int_E g\, d\mu$.

10.3 Teoremi di Passaggio al Limite

Questi teoremi costituiscono il vantaggio principale della teoria di Lebesgue rispetto a quella di Riemann.

Teorema 10.2 (Convergenza Monotona (Beppo Levi)) *Sia* $\{f_n\}$ *una successione di funzioni misurabili non negative tali che:*

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n \leq \dots \quad \text{(successione crescente)}$$

Allora, posto $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$*:*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu = \int \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) d\mu = \int f\, d\mu$$

Teorema 10.3 (Lemma di Fatou) *Sia* $\{f_n\}$ *una successione di funzioni misurabili non negative* ($f_n \geq 0$)*. Allora:*

$$\int \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu$$

Teorema 10.4 (Convergenza Dominata (Lebesgue)) *Sia* $\{f_n\}$ *una successione di funzioni misurabili. Se valgono le ipotesi:*

1. ***Convergenza q.o.:*** $f_n(x) \to f(x)$ *quasi ovunque;*
2. ***Dominazione:*** *Esiste una funzione* g *sommabile* ($\int g < \infty$) *tale che* $|f_n(x)| \leq g(x)$ *q.o. per ogni* n*;*

Allora f *è sommabile e vale il passaggio al limite sotto il segno di integrale:*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\, d\mu = \int f\, d\mu$$

10.4 Confronto tra Riemann e Lebesgue

Teorema 10.5 (Coerenza) *Se una funzione limitata* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *è integrabile secondo Riemann, allora è integrabile anche secondo Lebesgue e i due integrali coincidono.*

Teorema 10.6 (Criterio di Lebesgue per l'integrabilità di Riemann) *(Anche detto Teorema di Vitali-Lebesgue). Sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione limitata.* f *è integrabile secondo Riemann se e solo se l'insieme dei suoi punti di discontinuità ha misura di Lebesgue nulla (cioè* f *è continua quasi ovunque).*

Nota 10.1 *Una funzione può essere integrabile secondo Lebesgue ma non secondo Riemann (es. la funzione di Dirichlet, indicatrice dei razionali).*

11 Spazi Funzionali e Metrici

11.1 Spazi Metrici

Un ambiente fondamentale per l'analisi è lo spazio metrico, definito da un insieme X e una funzione distanza $d : X \times X \to \mathbb{R}$.

Definizione 11.1 (Metriche Notevoli in $\mathbb{R}^n$) *Dati due vettori* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *e* $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$*:*

- ***Metrica Euclidea*** *(d_2)**:*** *La classica distanza "in linea d'aria".*

$$d_E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

- ***Metrica Manhattan*** *(d_1* ***o Taxicab):*** *La somma delle differenze assolute (percorsi su una griglia).*

$$d_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$$

- ***Metrica Discreta:*** *Una metrica definibile su qualsiasi insieme X:*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & se\ x = y \\ 1 & se\ x \neq y \end{cases}$$

Definizione 11.2 (Metriche equivalenti) *Siano d_1 e d_2 due metriche definite sullo stesso insieme X. Esse si dicono equivalenti se esistono due costanti reali positive c e C tali che, per ogni coppia di punti $x, y \in X$, valga la seguente doppia disuguaglianza:*

$$c \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq C \cdot d_1(x, y)$$

Proposizione 11.1 *Due metriche si dicono equivalenti se danno luogo alla stessa famiglia di aperti.*

Definizione 11.3 (Spazio Metrico Completo) *Uno spazio metrico (X, d) si dice* ***completo*** *se ogni successione di Cauchy in X converge a un elemento appartenente a X.*
(Intuitivamente: lo spazio "non ha buchi", tutti i limiti delle successioni che si stringono esistono nello spazio).

11.2 Spazi Normati e di Banach

Uno **Spazio Normato** è uno spazio vettoriale su cui è definita una norma $\|\cdot\|$ (lunghezza del vettore). La norma induce una metrica: $d(x, y) = \|x - y\|$.

Proposizione 11.2 (Disuguaglianza Triangolare Inversa) *In ogni spazio normato vale:*

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

Definizione 11.4 (Spazio di Banach) *Uno spazio di Banach è uno spazio normato che è* ***completo*** *rispetto alla metrica indotta dalla norma.*

11.3 Spazi di Hilbert

Definizione 11.5 (Spazio di Hilbert) *Uno spazio di Hilbert è uno spazio vettoriale dotato di un* ***prodotto scalare*** $\langle x, y\rangle$*, che risulta* ***completo*** *rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare stesso:*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

Esempio classico: Lo spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ *o lo spazio* L^2*.*

11.4 Gli Spazi $L^p(E)$

Sia E un insieme misurabile secondo Lebesgue. Gli spazi L^p sono famiglie fondamentali di spazi di Banach.

Definizione 11.6 (Norma L^p) *Per* $1 \leq p < \infty$*, la norma è definita come:*

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f(x)|^p \, dx\right)^{1/p}$$

- **Spazio $L^1(E)$:** Funzioni sommabili (integrabili in modulo).
- **Spazio $L^2(E)$:** Funzioni a quadrato sommabile.
  - È l'unico spazio L^p che è anche uno **Spazio di Hilbert**.
  - Prodotto scalare: $\langle f, g\rangle = \int_E f(x)g(x)\, dx$.
- **Spazio $L^\infty(E)$:** Funzioni limitate quasi ovunque.

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}_{x\in E}|f(x)| = \inf\{C \geq 0 : |f(x)| \leq C \text{ q.o.}\}$$