

Meccanica dei fluidi

Minuz Lorenzo

Settembre 2022

Contents

1	Richiami di meccanica del continuo	3
1.1	Sforzo	3
1.2	Stati di aggregazione	3
1.3	Proprietà dei materiali	3
1.3.1	Variazione di densità con temperatura fissa e pressione variabile	3
1.4	Gas	4
1.5	Dipendenza tra sforzo e deformazione	4
2	Statica dei fluidi	5
2.1	Sforzo in statica	5
2.2	Equazione indefinita dell'equilibrio statico	6
2.3	Legge di stevino	6
2.4	Spinte idrostatiche	7
2.4.1	Spinte su superfici piane	8
2.4.2	Centro di spinta	8
2.4.3	Spinte su superfici curve	9
3	Cinematica dei fluidi	10
3.1	Approccio lagrangiano	10
3.2	Approccio euleriano	10
3.3	Rappresentazione grafica del campo di moto	11
3.3.1	Tipo di moto	11
3.4	Equazione di continuità	12
3.5	Corrente di fluidi	12
3.6	Conservazione della quantità di moto	13
3.6.1	Equazione globale di equilibrio dinamico	14
3.7	Problema fluidodinamico	14
3.8	Teorema di Bernoulli	15
3.9	Velocità di efflusso	17
3.9.1	Estensione del teorema di Bernoulli a correnti	18
3.10	Applicazione del teorema di Bernoulli per moto in condotte	19
3.11	Applicazione del teorema di Bernoulli il laboratorio	20
4	Analisi di fluidi ideali	20
4.1	Applicazione del teorema di Backingham	21

5	Studio del numero di Reynolds nel caso di moto in condotte	23
5.1	Osservazioni sulla scabrezza	24
5.2	Osservazioni sperimentali sulla cadente energetica	24
6	Equazione di Navier-Stokes	25
6.1	Studio della reologia	26
6.2	Modello reologico: fluidi Newtoniani	28
6.2.1	Riscrittura del problema fluidodinamico	29
6.3	Analisi dell'equazione di Navier-Stokes	30
6.4	Soluzione analitica del problema fluidodinamico	30
6.5	Soluzione analitica del problema fluidodinamico per moto in condotte	31
6.5.1	Studio di un volume di fluido in condotta	31
6.6	Risoluzione delle NS nel caso generale	33
6.7	Forma globale delle RANS	36
6.8	Applicazione dell'equilibrio globale a moto in condotta turbolento	36

List of Theorems

1	Definizione (Comprimibilità)	3
2	Definizione (Densità)	3
3	Definizione (Peso specifico)	3
4	Definizione (Viscosità)	4
5	Definizione (Reologia)	5
6	Definizione (Centro di spinta)	8
7	Definizione (Corrente)	12
8	Definizione (Efflusso)	17
9	Definizione (Cadente energetica)	20
1	Teorema (Teorema di Buckingham)	21
10	Definizione (Numero di Reynolds)	23

1 Richiami di meccanica del continuo

Nella meccanica dei fluidi si andranno ad osservare i comportamenti dei fluidi nello spazio.

Un fluido può essere:

- Liquido
- Gas

La scala di osservazione della meccanica dei fluidi può essere:

- Discreta: definendo un sistema discreto
- Grande: definendo un sistema continuo
 - Il sistema continuo è essenziale
 - All'interno del sistema sono in gioco forze di massa e forze di superficie

1.1 Sforzo

Se su un'area ΔA si applica una forza $\vec{\Pi}$ si potrà calcolare lo sforzo come:

$$\bar{\Phi} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\Pi}}{\Delta A} = \frac{d\vec{\Pi}}{dA} \quad (1)$$

Il vettore sforzo dipende dall'orientamento della superficie, quindi è possibile scomporlo in due componenti:

τ : Sforzo tangenziale

σ : Sforzo normale

1.2 Stati di aggregazione

Nei fluidi le variazioni di volume sono legate dagli sforzi normali e sono dipendenti anche dalla comprimibilità.

Definizione 1 (Comprimibilità) *La comprimibilità è il rapporto tra forza e area. Nel caso dei liquidi è molto grande.*

Le variazioni di forma invece sono dipendenti dagli sforzi tangenziali.

1.3 Proprietà dei materiali

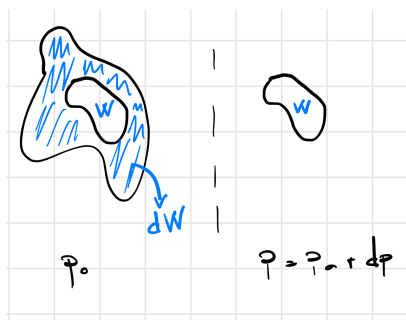
Definizione 2 (Densità)

$$\rho = \frac{Massa}{Volume} = \frac{m}{W} \quad (2)$$

Definizione 3 (Peso specifico)

$$\gamma = \frac{F_p}{W} = \frac{mg}{W} = \rho \cdot g \quad (3)$$

1.3.1 Variazione di densità con temperatura fissa e pressione variabile



Tramite osservazioni sperimentali si ottiene la relazione:

$$\frac{dW}{W} = -\frac{dp}{\varepsilon}$$

ε corrisponde alla deformazione.

Dato che la massa é costante allora la derivata della massa sarà nulla e di conseguenza:

$$\begin{aligned} d(\rho W) &= 0 \\ \rho dW + W d\rho &= 0 \\ \frac{dW}{W} &= -\frac{d\rho}{\rho} \\ \int_{p_0}^p \frac{dp}{\varepsilon} &= \int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} \rightarrow \frac{p - p_0}{\varepsilon} = \ln \rho - \ln \rho_0 \\ \rho &= \rho_0 e^{\frac{p - p_0}{\varepsilon}} \end{aligned}$$

1.4 Gas

In alcuni casi é possibile approssimare i gas come gas perfetti e quindi é valida la legge:

$$pW = nRT$$

Se T é costante allora $pW = \text{cost.}$ e quindi:

$$d(pW) = 0 = Wdp + pdW \rightarrow \frac{dW}{W} = -\frac{dp}{p} \quad (4)$$

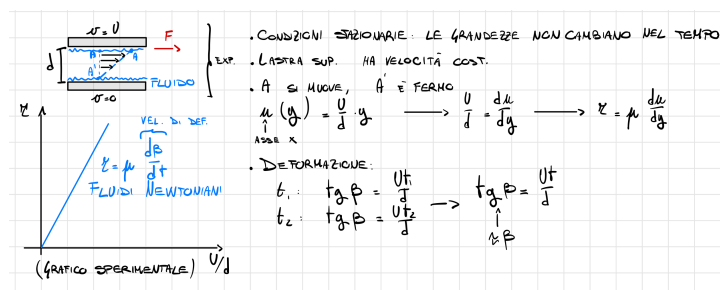
$$\frac{dp}{\varepsilon} = \frac{dp}{p} \quad (5)$$

1.5 Dipendenza tra sforzo e deformazione

La viscosità lega sforzo tangenziale e deformazione.

Definizione 4 (Viscosità)

$$\mu = \frac{\text{Forza}}{\text{Area}} \cdot \text{Tempo} \quad (6)$$



Il calcolo della deformazione é stato ottenuto per via sperimentale ed é possibile approssimare $\tan \beta \approx \beta$ in cui gli spostamenti sono infinitesimi.

In questo esperimento é possibile individuare la reologia tra sforzo e deformazione:

$$\tau = \mu \frac{U}{d} \quad (7)$$

$\frac{U}{d}$ corrisponde alla velocità di deformazione (osservata per via sperimentale).

Definizione 5 (Reologia) *Disciplina che studia le deformazioni dei fluidi in movimento.*

2 Statica dei fluidi

In statica i fluidi si trovano in quiete, quindi la velocità sarà pari a 0.

Fatta questa ipotesi si vuole andare a studiare il comportamento dello sforzo in statica.

2.1 Sforzo in statica

Per calcolare lo sforzo normale bisogna avvalersi del tetraedro di Cauchy.

Applicando l'equazione di equilibrio per un mezzo continuo si ha:

$$\sum \bar{F}_s + \sum \bar{F}_m = \bar{0} \quad (8)$$

Le forze di massa sono trascurabili dato che $m = \rho dV$ e quindi sono di un infinitesimo di ordine superiore. L'equazione di equilibrio pertanto diventa:

$$\bar{F}_s = \bar{\Phi}_n dA_n \bar{n} + \bar{\Phi}_x dA_x \bar{i} + \bar{\Phi}_y dA_y \bar{j} + \bar{\Phi}_z dA_z \bar{k} = \bar{0}$$

Esiste ora una relazione che lega la dA_n con dA_x , dA_y e dA_z .

$$dA_y = -dA_n \cos \alpha$$

Si ottiene quindi la relazione di Cauchy:

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{yx} & \Phi_{zx} \\ \Phi_{xy} & \Phi_{yy} & \Phi_{zy} \\ \Phi_{zx} & \Phi_{yz} & \Phi_{zz} \end{bmatrix}$$

Questo é un tensore simmetrico.

Nel caso specifico di sistema statico le velocità saranno nulle e gli sforzi tangenziali saranno anch'essi nulli quindi si otterrà che il tensore vale:

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{zz} \end{bmatrix}$$

Alla fine quindi si ha che:

$$\Phi_{xx} = \Phi_{yy} = \Phi_{zz} = |\Phi_n|$$

Lo sforzo normale può anche essere rappresentato dalla pressione e quindi il tensore degli sforzi può essere riscritto come:

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix} = p \cdot \bar{I} \quad (10)$$

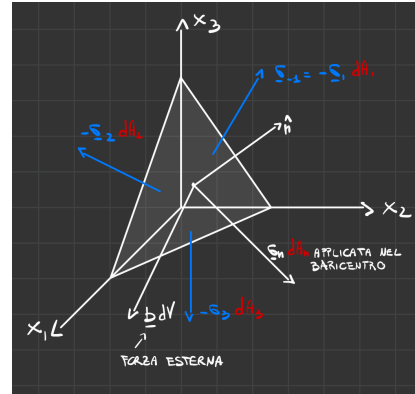


Figure 1: Tetraedro di Cauchy (9)

2.2 Equazione indefinita dell'equilibrio statico

$$\sum \bar{F}_m + \sum \bar{F}_s = \bar{0} \quad (11)$$

In questo caso le forze di massa non sono trascurabili dato che si sta prendendo in considerazione una superficie infinitesima e quindi l'ipotesi di mezzo continuo non è più valida.

L'equazione di equilibrio diventa quindi:

$$\sum \bar{F}_m = \rho \, dx \, dy \, dz \cdot \bar{f}$$

con \bar{f} che rappresenta la risultante delle forze di massa per unità di massa e ρ che rappresenta la densità.

È possibile prendere scomporre le forze di superficie sugli assi e riscriverle come:

Asse y:

$$p \, dx \, dz \hat{j} - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} dy \right) \hat{j} = - \frac{\partial p}{\partial y} dx \, dy \, dz$$

Ripetendo lo stesso procedimento anche per gli altri due assi si ottiene:

$$\begin{aligned} \rho \, dx \, dy \, dz \bar{f} - \frac{\partial p}{\partial x} dx \, dy \, dz - \frac{\partial p}{\partial y} dx \, dy \, dz - \frac{\partial p}{\partial z} dx \, dy \, dz &= 0 \\ \rho \bar{f} \left[\frac{\partial p}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \hat{k} \right] &= \bar{0} \\ \rho \bar{f} - \nabla p &= 0 \\ \rho \bar{f} &= \nabla p: \text{Equazione indefinita di equilibrio statico} \end{aligned}$$

Una volta ottenuta questa equazione è possibile formulare diverse ipotesi:

- Se il fluido è pesante:

$$\begin{aligned} \bar{f} &= -g \nabla z = -g \cdot [0 \, 0 \, 1]^T \\ -\rho g \cdot \nabla z &= \nabla p \longrightarrow -\gamma \cdot \nabla z = \nabla p \end{aligned}$$

- Se il fluido è incompressibile:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \rho = \text{cost.} \\ \gamma = \text{cost.} \end{cases} \\ -\nabla(\gamma z) &= \nabla p \\ \nabla z + \nabla \frac{p}{\gamma} &= 0 \\ \nabla \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) &= 0 \end{aligned}$$

2.3 Legge di stevino

Applicando le ipotesi di fluido pesante ed incompressibile all'equazione indefinita di equilibrio statico si ottiene la legge di stevino:

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{cost.} \quad (12)$$

dove z rappresenta la quota geodetica e $\frac{p}{\gamma}$ rappresenta l'altezza piezometrica; insieme queste due formano la quota piezometrica.

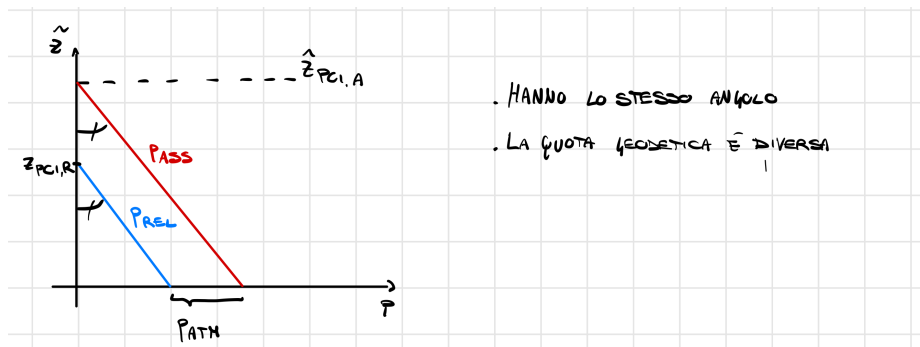
Considerazioni:

- Le superfici piane orizzontali sono isobare
- Se $p = 0$, $z = z_{PCI}$ che corrisponde alla quota dei carichi idrostatici dove la pressione si annulla
- Se z_{PCI} è nota allora è possibile calcolare la pressione in ogni punto applicando la legge di Stevino

$$p = (z_{PCI} - z) \gamma$$

- Posso definire la pressione relativa come:

$$p = p^* - p_{atm}$$



2.4 Spinte idrostatiche

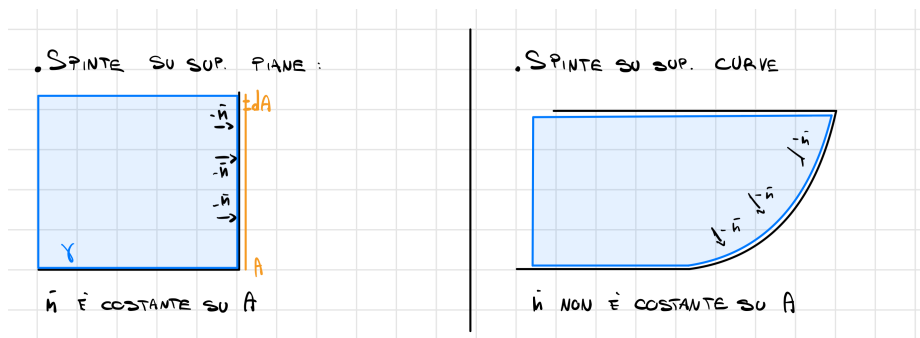


Figure 2: Spinte

Le spinte si esercitano sulla superficie di contatto tra solido e fluido o tra fluido e fluido. Sono definite come:

$$d\vec{S} = -d\vec{A} = p dA(-\vec{n})$$

$$\vec{S} = \int_A p dA(-\vec{n})$$

2.4.1 Spinte su superfici piane

Applicando la definizione di spinta si ha che:

$$\bar{S} = \int_A p(-\bar{n})dA = (-\bar{n}) \int_A p dA$$

Se la superficie é piana allora h é costante in tutti i punti, allora posso riscrivere la spinta come:

$$\bar{S} = (-\bar{n}) \int_A (\gamma h) dA$$

Se invece A é inclinato allora h varia a seconda della posizione e dall'angolo compreso tra la superficie inclinata e la superficie superiore.

$$\begin{aligned} \bar{S} &= -\bar{n} \int_A \gamma x \sin \alpha dA = -\bar{n} \gamma \sin \alpha \int_A x dA = \\ &= -\bar{n} \gamma \sin \alpha x_B A = -\bar{n} \gamma h_B A = -\bar{n} p_G A \end{aligned}$$

con h_B che corrisponde all'affondamento del baricentro e p_G che corrisponde alla pressione nel baricentro geometrico.

2.4.2 Centro di spinta

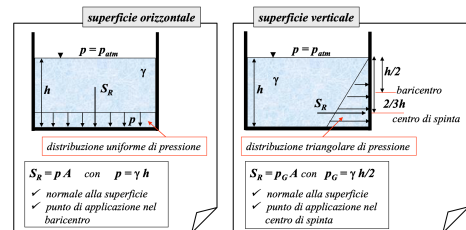
Definizione 6 (Centro di spinta) Il centro di spinta corrisponde al punto di applicazione della spinta.

Per l'equazione di equilibrio si ha che il momento debba essere costante in ogni punto. Prendendo per nota la coordinata x del centro di spinta si deve imporre l'equazione:

$$\int x |d\bar{S}| = x_{CS} |\bar{S}|$$

con x_{CS} che corrisponde al centro di spinta.

$$\begin{aligned} \int x |d\bar{S}| &= \int_A x p dA = \\ &= \int_A x h \gamma dA = \int_A x^2 \sin \alpha \cdot \gamma dA = \sin \alpha \cdot \gamma \int_A x^2 dA \end{aligned}$$



LA RISULTANTE DEI MOMENTI DELLE SPINTE DEVE ESSERE UGUALE AL MOMENTO NEL CENTRO DI SPINTA

TEOREMA (NO DIMO)

$$I_y = I_{y'} + x_1^2 A$$

Asse generico

$$\rightarrow I_y = I_{y'} + x_1^2 A$$

Eccentricità: e_y

Calcolo del momento d'inerzia:

$$\begin{aligned} \int x^2 dA &= \int (x_1 + x')^2 dA = \int x_1^2 dA + 2x_1 \int x' dA + \int x'^2 dA \\ &= x_1^2 A + 2x_1 \int x' dA + I_{y'} \end{aligned}$$

Ma $\int x' dA = 0$ perché x' è la coordinata rispetto all'asse generico che passa per il baricentro.

Quindi:

$$\int x^2 dA = x_1^2 A + I_{y'}$$

Confrontando con la formula del teorema di Steiner:

$$I_y = I_{y'} + x_1^2 A$$

Si verifica che la formula è corretta.

$$x_{CS} = \frac{I_B + x_B^2 A}{x_B A} = \frac{x_B^2 A}{x_B A} + \frac{I_B}{x_B A} = x_B + \frac{I_B}{x_B A} \quad (13)$$

$$y_{CS} = \frac{\int_A xy \, dA}{x_B A} = \frac{I_{xy}}{x_B A} \quad (14)$$

2.4.3 Spinte su superfici curve

Nel caso di spinte su superfici curve la definizione di spinta rimane invariata, però in questo caso il versore normale alla superficie non sarà più costante quindi dovrà rimanere all'interno dell'integrale.

Non si può quindi utilizzare la formula vista per le spinte su superfici piane.

Per calcolare la spinta si parte considerando l'equazione indefinita di equilibrio statico:

$$\rho \bar{f} = \nabla p$$

$$\int_W \rho \bar{f} \, dW = \int_W \nabla p \, dW$$

dove:

$$\int_W \rho \bar{f} \, dW = \int_W -\rho g \nabla z \, dW = \bar{G}: \text{Risultante delle forze di massa}$$

$$\int_W \nabla p \, dW = - \int_A p \cdot (\bar{n}) \, dA = -\bar{\Pi}: \text{Risultante delle forze di superficie}$$

L'equazione di equilibrio globale allora risulta:

$$\bar{G} + \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\Pi}_i = 0 \quad (15)$$

Per calcolare la spinta \bar{S} si costruisce un volume di controllo detto solido delle pressioni formato dalla superficie curva dove si vuole calcolare la spinta e circondato da n superfici piane.

L'area A_{AB} deve essere a contatto con gli stessi fluidi del sistema e la distribuzione delle pressioni deve essere la stessa del sistema reale.

Applicando ancora una volta l'equazione di equilibrio globale sul volume di controllo si ha:

$$\bar{G} + \bar{\Pi} = 0$$

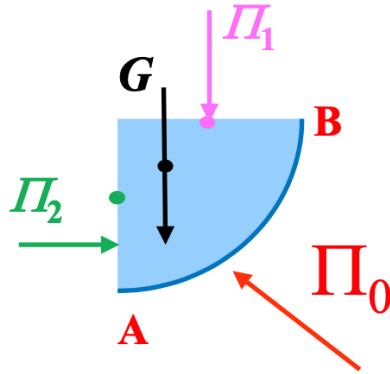
$$A_{TOT} = A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + A_4$$

$$\bar{G} + \bar{\Pi}_1 + \bar{\Pi}_2 + \bar{\Pi}_3 + \bar{\Pi}_4 + \bar{\Pi}_0 = 0$$

$$\bar{\Pi}_0 = -(\bar{G} + \bar{\Pi}_1 + \bar{\Pi}_2 + \bar{\Pi}_3 + \bar{\Pi}_4)$$

$$\bar{\Pi}_0 = \bar{S}$$

$$\bar{\Pi}_0 = - \int_A p \, dA (-\hat{n})$$



Solido delle pressioni Il solido delle pressioni viene utilizzato per calcolare i punti di applicazione della spinta.

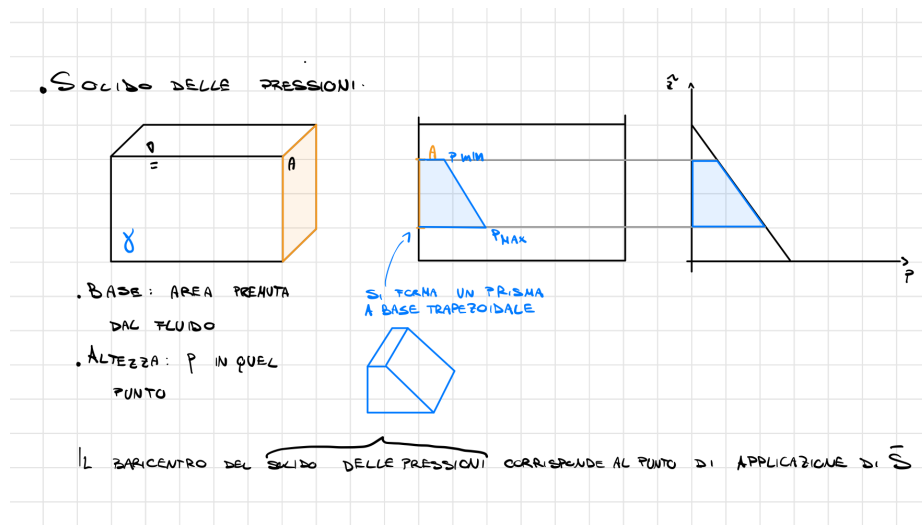
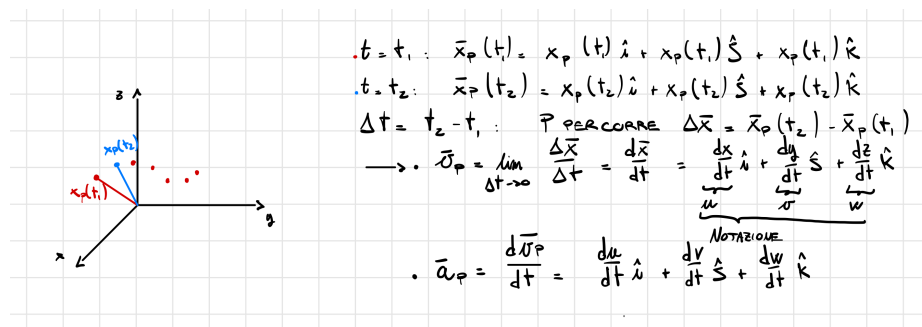


Figure 3: Solido delle pressioni

3 Cinematica dei fluidi

3.1 Approccio lagrangiano

Approccio per l'analisi del moto dei fluidi che consiste nell'osservare le posizioni di una particella fluida nel tempo.



3.2 Approccio euleriano

Un approccio diverso per la risoluzione dei problemi é l'approccio Euleriano. In questo caso ci si concentra su una regione fissa nello spazio e nel tempo. Si ottiene una distribuzione spaziale della velocità del fluido.

Questo tipo di distribuzione spaziale é definita da dei campi vettoriali e da dei campi scalari:

- Campi euleriani: campi vettoriali che descrivono il moto

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$$

$$\vec{a} = \vec{a}(x, y, z, t)$$

- Campi scalari

$$p = p(x, y, z, t)$$

$$\rho = \rho(x, y, z, t)$$

Una volta definiti questi campi é possibile calcolare l'accelerazione:

$$\begin{aligned}\vec{a}(x, y, z, t) &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} = \\ &= \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} u + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} w\end{aligned}$$

dove $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ corrisponde all'accelerazione locale (per un punto fissato nel tempo) e $\frac{\partial \vec{v}}{\partial x} u + \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} v + \frac{\partial \vec{v}}{\partial z} w$ é l'accelerazione convettiva.

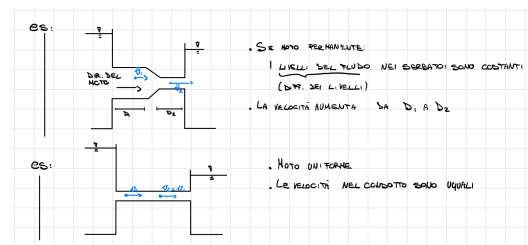
All'approccio euleriano si applicano:

- Il principio di conservazione della massa ovvero l'equazione di continuit 
- Il principio di conservazione della quantit  di moto ovvero l'equazione di equilibrio dinamico

3.3 Rappresentazione grafica del campo di moto

Il campo di moto é rappresentato graficamente da:

- Approccio Lagrangiano: traiettoria ovvero il luogo dei punti occupati da P nei diversi istanti di tempo
- Approccio Euleriano: linee di corrente sempre tangenti al vettore velocit  in un istante fissato



3.3.1 Tipo di moto

Il moto di un qualsiasi corpo pu  essere:

- Vario:

$$\vec{v} = \vec{v}(x, y, z, t)$$

- Stazionario: non c'  dipendenza dal tempo e di conseguenza la velocit  é in funzione solo della posizione.
 - C'  solo accelerazione convettiva
 - Le traiettorie e le linee di corrente coincidono

- Uniforme:

$$\vec{v} = \text{cost.}$$

3.4 Equazione di continuità

$$m_{ent} - m_{usc} = m_{t+dt} - m_t \quad (16)$$

Si procede ora andando a studiare l'equazione di continuità prendendo in considerazione ciò che accade sull'asse y sotto l'ipotesi di mezzo continuo.

$$\begin{aligned} m_{ent}^y &= v_A dt \, dx dz \cdot \rho_A \\ m_{usc}^y &= v_B dt \, dx dz \cdot \rho_B \end{aligned}$$

Per l'ipotesi di mezzo continuo:

$$\rho_B = \rho_A + \frac{\partial \rho}{\partial y} dy, \quad v_B = v_A + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

quindi si ottiene:

$$m_{ent} - m_{usc} = v_A dt \, dx dz \cdot \rho_A - v_A dt \, dx dz \cdot \rho_A + \frac{\partial \rho v}{\partial y} dy \, dx dz dt = \quad (17)$$

$$= \frac{\partial \rho v}{\partial y} dy \, dx dz dt \quad (18)$$

Allo stesso modo si ottengono delle equazioni simili anche sugli altri assi:

$$m_{ent} - m_{usc} = -\frac{\partial \rho u}{\partial x} dx \, dy dz dt \quad (19)$$

$$m_{ent} - m_{usc} = -\frac{\partial \rho w}{\partial z} dz \, dx dy dt \quad (20)$$

L'equilibrio globale quindi risulta:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v}) = 0 \quad (21)$$

Casi particolari

- Moto stazionario permanente:

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0 \rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \rightarrow \nabla \cdot (\rho \bar{v}) = 0$$

- Fluido incompressibile:

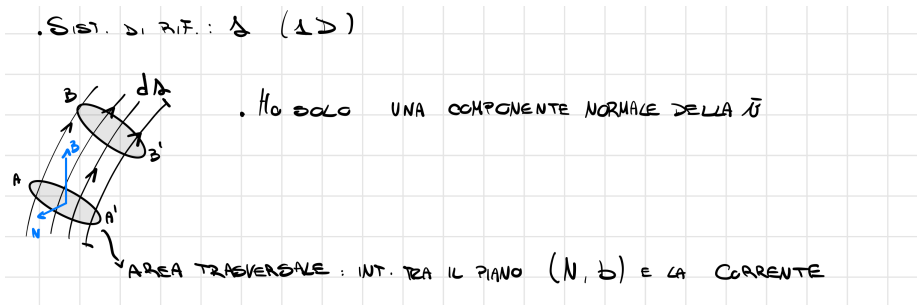
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \rightarrow \nabla \bar{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

3.5 Corrente di fluidi

Definizione 7 (Corrente) Moto organizzato in cui è possibile distinguere una direzione principale.

Nel caso di correnti l'equazione di conservazione della massa risulta:

$$\begin{aligned} Q_{mA} dt - Q_{mB} dt &= m_{t+dt} - m_t \\ \rho Q_{mA} dt - \left(\rho Q_{mA} + \frac{\partial \rho Q_{mA}}{\partial s} ds \right) dt &= \left(\rho A + \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} dt \right) ds - \rho A ds \\ \frac{\partial \rho Q_m}{\partial s} ds dt + \frac{\partial(\rho A)}{\partial t} ds dt &= 0 \end{aligned}$$



Casi particolari

- Moto stazionario:

$$\frac{\partial Q_m}{\partial t} = 0 \rightarrow Q_m = \text{cost.}$$

- Fluido incompressibile:

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = 0 \rightarrow Q = \text{cost.}$$

3.6 Conservazione della quantità di moto

L'equazione di conservazione della quantità di moto é anche detta equazione di equilibrio dinamico.

Non essendo in statica il fluido in questo momento si trova in moto e quindi sono presenti sforzi tangenziali. Di conseguenza il tensore degli sforzi risulta:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{\Phi}} &= [\bar{\Phi}_x, \bar{\Phi}_y, \bar{\Phi}_z] = \\ &= \begin{bmatrix} \Phi_{xx} & \Phi_{yx} & \Phi_{zx} \\ \Phi_{xy} & \Phi_{yy} & \Phi_{zy} \\ \Phi_{xz} & \Phi_{yz} & \Phi_{zz} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Le componenti diagonali sono dette sforzi normali, mentre le componenti tangenziali sono definite sforzi tangenziali.

Per definire l'equazione di equilibrio dinamico del sistema si va a calcolare l'equilibrio dinamico di un cubo infinitesimo tramite l'equazione:

$$\sum \bar{F}_m + \sum \bar{F}_s = m\bar{a} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \sum \bar{F}_{Si} &= (\bar{\Phi}_y)_A dx dz + (\bar{\Phi}_{-y})_B dx dz + (\bar{\Phi}_x)_C dy dz + (\bar{\Phi}_{-x})_D dy dz + (\bar{\Phi}_z)_E dx dy + (\bar{\Phi}_{-z})_F dx dy = \\ &= [(\bar{\Phi}_y)_A - (\bar{\Phi}_{-y})_B] dx dz + [(\bar{\Phi}_x)_C - (\bar{\Phi}_{-x})_D] dy dz + [(\bar{\Phi}_z)_E - (\bar{\Phi}_{-z})_F] dx dy = \\ &= - \left[\frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\Phi}_z}{\partial z} \right] dx dy dz: \text{Forze di superficie} \end{aligned}$$

$$\sum \bar{F}_m = \rho dx dy dz \bar{f}$$

$$m\bar{a} = \rho dx dy dz \cdot \bar{a}$$

Quindi l'equazione indefinita di equilibrio diventa:

$$\rho dx dy dz \cdot \bar{f} + \left[\frac{\partial \bar{\Phi}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\Phi}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\Phi}_z}{\partial z} \right] dx dy dz = \rho dx dy dz \cdot \bar{a} \quad (23)$$

$$\rho(\bar{f} - \bar{a}) = \nabla \bar{\Phi} \quad (24)$$

3.6.1 Equazione globale di equilibrio dinamico

Integrando l'equazione di equilibrio dinamico si ottiene l'equazione globale di equilibrio dinamico.

$$\int_W \rho \bar{f} dW - \int_W \rho \bar{a} dW - \int_W \nabla \bar{\Phi} dW = \bar{0} \quad (25)$$

con:

$$\int_W \rho \bar{f} dW: \text{Risultante delle forze di massa}$$

$\rho \cdot \bar{a}$ può essere riscritto utilizzando la definizione euleriana:

$$\rho \bar{a} = \rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} u + \rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} v + \rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} w$$

e applicando il principio di conservazione della massa si ha che:

$$\rho \bar{a} = \rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w \bar{v})$$

dove:

$$\begin{aligned} & \int_W \rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} dW \\ & \int_W \frac{\partial}{\partial x}(\rho u \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v \bar{v}) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w \bar{v}) dW = \int_A \rho v_n \bar{v} dA \\ & - \int_W \nabla \bar{\Phi} dW = - \left[- \int_A \bar{\Phi} \cdot \bar{n} dA = \int_A \bar{\Phi}_n dA \right] \end{aligned}$$

Alla fine quindi l'equazione globale di equilibrio dinamico risulta:

$$\bar{G} + \bar{\Pi} + \bar{I} + \bar{M} = \bar{0} \quad (26)$$

3.7 Problema fluidodinamico

Una volta definite le equazioni di conservazione della massa e della quantità di moto si ottiene il problema fluidodinamico composto da 5 equazioni e 10 incognite. Di conseguenza questo problema non é risolvibile. Se si prende però come ipotesi il caso di fluido ideale, allora il tensore degli sforzi sarà:

$$\bar{\Phi} = \begin{bmatrix} \Phi_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{zz} \end{bmatrix} = p \cdot \bar{I}$$

quindi in caso di fluido ideale il tensore avrà la stessa forma che in statica.

A questo punto il problema fluidodinamico diventa:

NOTE	EQUAZIONE	NUMERO	INCOGNITE
Cons. MASSA:	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$	1	ρ, u, v, w
Cons. Q.M.:	$\rho(\vec{f} - \vec{a}) = \nabla \bar{\phi}$	3	$\rho, u, v, w, \bar{\phi}$
Eq. di STATO:	$\rho = \rho(p, T) \rightarrow \rho = \rho(p)$	1	$\rho, p = \frac{1}{2}(\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz})$
		5	10

EQ. di EULERO	
$\nabla \bar{\phi} = \nabla p \vec{I} = \nabla p = \rho(\vec{f} - \vec{a})$	
$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0$	5 EQ. \leftrightarrow 5 INC.
$\rho = \rho(p, T) \rightarrow \rho = \rho(p)$	

3.8 Teorema di Bernoulli

Ipotesi

1. Fluido ideale:

$$\bar{\Phi} = p\vec{I}$$

$$\rho(\vec{f} - \vec{a}) = \nabla p$$

2. Fluido pesante:

$$\vec{f} = -g\nabla z$$

$$\rho g \nabla z - \rho \vec{a} = \nabla p$$

3. Fluido incompressibile:

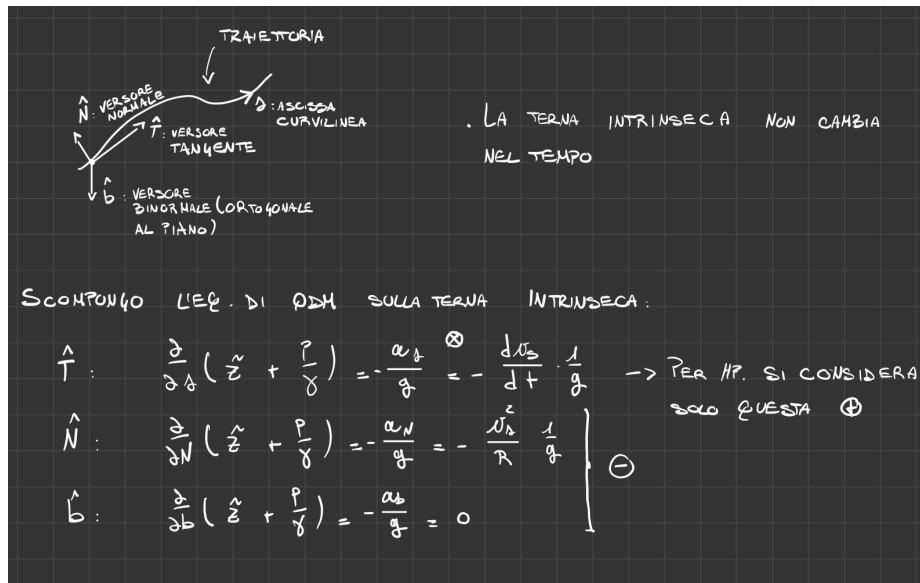
$$\rho = \text{cost.}$$

L'equazione di equilibrio dinamico, secondo le ipotesi fatte, diventa quindi:

$$\nabla(\gamma z) + \nabla p = -\rho \vec{a}$$

$$\nabla(z + \frac{p}{\gamma}) = -\rho \frac{\vec{a}}{\gamma}$$

$$\nabla(z + \frac{p}{\gamma}) = -\frac{\vec{a}}{g}$$



Considerando solo la prima equazione, posso ricavare l'accelerazione come:

$$\begin{aligned}
 \bar{a} &= \frac{d}{dt} \bar{v} = \frac{d}{dt} (v_s \hat{T}) = \\
 &= \frac{dv_s}{dt} \hat{T} + \frac{d\hat{T}}{dt} v_s = \\
 &= a_s \hat{T} + \frac{v_s^2}{R} \hat{N}
 \end{aligned}$$

Quindi l'equazione della quantità di moto diventa:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s} \left(\tilde{z} + \frac{p}{\gamma} \right) = -\frac{\bar{a}}{g} = -\frac{\partial v_s}{\partial t} \cdot \frac{1}{g} - \frac{v_s}{g} \cdot \frac{\partial v_s}{\partial s} \\ \bar{v}_s = \bar{v}_s(s(t), t) \end{cases} \quad (27)$$

Alle ipotesi fatte in precedenza é possibile aggiungerne una quarta:

- Moto stazionario permanente:

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} = 0$$

Ora l'equazione di conservazione della massa diventa quindi:

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\tilde{z} + \frac{p}{\gamma} \right) = -\frac{1}{g} \left(v_s \cdot \frac{\partial v_s}{\partial s} \right) = -\frac{1}{g} \frac{1}{2} \frac{\partial v_s^2}{\partial s} \quad (28)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\tilde{z} + \frac{p}{\gamma} + \frac{v_s^2}{2g} \right) = 0 : \text{Teorema di Bernoulli} \quad (29)$$

dove:

\bar{z} : Quota geodetica

$\frac{p}{\gamma}$: Altezza piezometrica

$\frac{v_s^2}{2g}$: Altezza cinetica

Osservazioni Moltiplicando tutti i termini del teorema di Bernoulli per mg si ottiene:

$$mg \cdot H = \underbrace{mg \bar{z}}_{E \text{ POTENZIALE GRAVITAZIONALE}} + \underbrace{mg \frac{p}{\gamma}}_{W \rho g \frac{p}{\rho g} = W p : E \text{ DI PRESSIONE}} + \underbrace{mg \frac{v_s^2}{2g}}_{\frac{1}{2} m v^2 = E \text{ CINETICA}}$$

Se si considera la componente normale dell'equazione della quantità di moto si osserva che:

$$\frac{\partial}{\partial N} \left(\bar{z} + \frac{p}{\gamma} \right) = - \frac{\sigma_n^z}{\rho R} : \text{LA QUOTA PIEZOMETRICA DEVE ESSERE VERSO IL CENTRO DI CURVATURA}$$

SE TRAIETTORIA RETTILINEA:

$$\frac{\partial}{\partial N} \left(\bar{z} + \frac{p}{\gamma} \right) = 0$$

$\rightarrow \bar{z} + \frac{p}{\gamma}$ È COST. SU TUTTO IL PIANO

3.9 Velocità di efflusso

Definizione 8 (Efflusso) *Passaggio di un fluido dall'interno di un recipiente, attraverso un foro o un condotto.*

Obiettivo Calcolare la velocità di efflusso sotto le ipotesi del teorema di Bernoulli.

$$H = \tilde{z} + \frac{p}{\gamma} + \frac{v_s^2}{2g} = cost.$$

$$\tilde{z}_a + \frac{p_a}{\gamma} + \frac{v_{sa}^2}{2g} = \tilde{z}_b + \frac{p_b}{\gamma} + \frac{v_{sb}^2}{2g}$$

$v_a = 0$ dato che il punto A è lontano dal foro e si può considerare fermo, inoltre la pressione in B può essere considerata nulla dato che nel punto B il fluido è in caduta libera e quindi la pressione si può anch'essa considerare nulla. Pertanto la velocità in B sarà:

$$v_{sb} = \sqrt{2g(\tilde{z}_a - \tilde{z}_b)} = \sqrt{2gh}$$

Alla fine si otterrà una portata di efflusso pari a:

$$Q_{eff} = \int_A v dA = v_{sb} A_{eff} \quad (30)$$

3.9.1 Estensione del teorema di Bernoulli a correnti

Obiettivo Analizzare una corrente sotto le ipotesi del teorema di Bernoulli.

Se il moto è permanente le linee di corrente corrispondono alle traiettorie. Per la singola particella H è costante lungo s .

Per le ipotesi 3 e 4 si ha che:

$$\frac{\partial}{\partial s} Q = 0$$

Quindi anche la portata è costante lungo s e per l'ipotesi 3 anche γ è costante lungo la traiettoria.

Definendo ora la potenza meccanica come:

$$dP = \gamma H dQ$$

$$P = \int dP = \int_A \gamma H v_s dA =$$

$$= \int_A \gamma \left(\tilde{z} + \frac{p}{\gamma} \right) v_s dA + \int_A \gamma \frac{v_s^3}{2g} dA$$

è possibile aggiungere una quinta ipotesi:

- Corrente rettilinea (lineare/gradualmente variata)

È possibile ridefinire la potenza meccanica come:

$$P = \gamma \left(\tilde{z} + \frac{p}{\gamma} \right) \int_A v_s dA =$$

$$= \gamma \left(\tilde{z} + \frac{p}{\gamma} \right) Q + \alpha \gamma \frac{v_m^2}{2g} \cdot v_m A =$$

$$= \gamma \left(\tilde{z} + \frac{p}{\gamma} \right) Q + \alpha \gamma \frac{v_m^2}{2g} \cdot Q$$

dove α corrisponde ad un coefficiente di ragguglio delle potenze cinetiche ed é calcolato come:

$$\alpha = \frac{\gamma \int \frac{v_s^3}{2g} dA}{\gamma \frac{v_m^3}{2g} A} \quad (31)$$

Riassunto:

$$P = \gamma \left[\tilde{z} + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{V_m^2}{2g} \right] Q = \gamma H_m Q = \text{cost. lungo } s \quad (32)$$

3.10 Applicazione del teorema di Bernoulli per moto in condotte

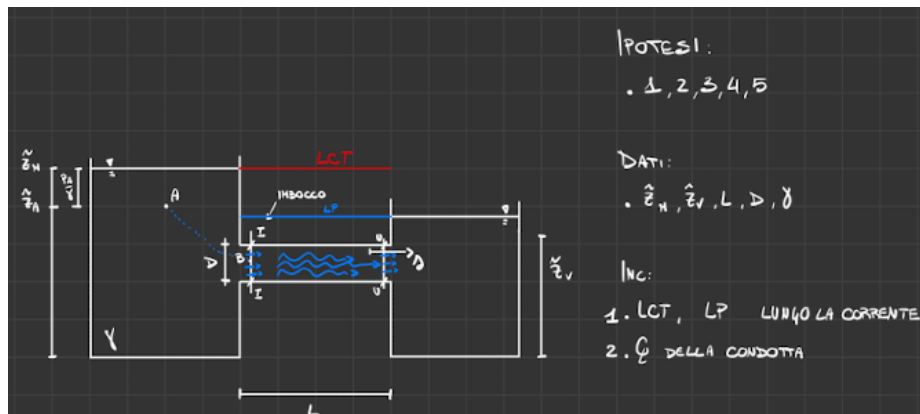


Figure 4: Moto in condotte

- Calcolo LCP e LP: Per l'ipotesi 1 la linea dei carichi totale é orizzontale. Applicando il teorema di Bernoulli si ha:

$$\tilde{z}_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{v_{SA}^2}{2g} = \tilde{z}_B + \frac{p_B}{\gamma} + \frac{v_{SB}^2}{2g}$$

dove $\frac{v^2}{2g}$ é trascurabile dato che la velocità nel punto A é circa 0. É quindi possibile riscrivere l'equazione come:

$$\tilde{z} + \frac{p}{\gamma} = H_m - \alpha \frac{v_m^2}{2g}$$

Ora bisogna definire la pendenza di LP. Sapendo che V_m é costante lungo s allora:

$$Q = \int_A v_s dA = V_m A_{trasv}: \text{velocità costante per HP.3}$$

e ora é possibile verificare che anche α é costante lungo s :

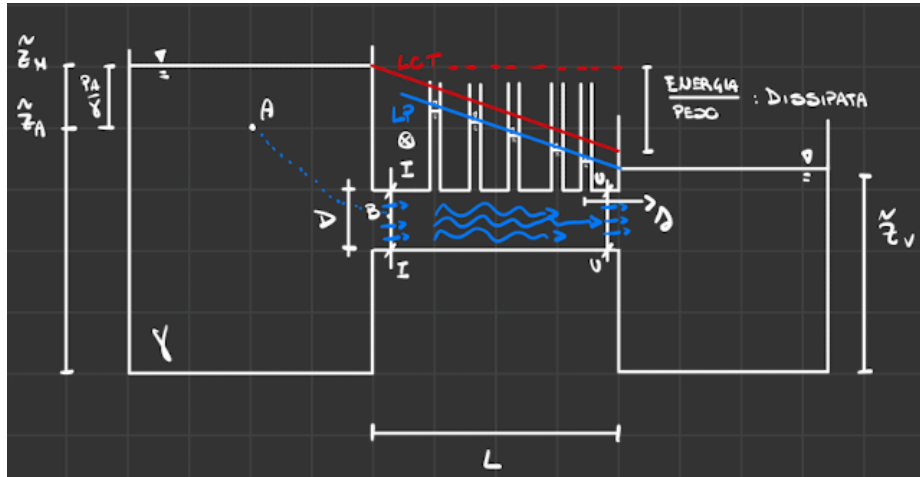
$$\alpha = \frac{\gamma \int_A \frac{v_s^3}{2g} dA}{\gamma \frac{v_m^3}{2g} A_{trasv}} = \text{cost. per HP 4}$$

- Calcolo della portata della condotta:

$$V_m = \sqrt{\frac{2g(\tilde{z}_M - \tilde{z}_V)}{\alpha}}$$

$$Q = V_m A$$

3.11 Applicazione del teorema di Bernoulli il laboratorio



Definizione 9 (Cadente energetica) La cadente energetica corrisponde all'inclinazione della linea dei carichi totali relativa ad una massa di fluido in movimento.

$$J = \frac{dH_m}{ds} \quad (33)$$

Nel caso reale si avrà che:

$$H_{m_I} = H_{m_U} + JL$$

$$\tilde{z}_{m_I} = \tilde{z}_V + \alpha \frac{V_m^2}{2g} + JL$$

$$V_m = \sqrt{2g \frac{(\tilde{z}_{m_I} - \tilde{z}_V - JL)}{\alpha}}$$

dato che adimensionalmente $J \cdot L = [\text{Altezza}]$.

4 Analisi di fluidi ideali

In questo capitolo si vuole andare a definire la cadente J mediante una legge empirica.

Per via sperimentale si nota che:

$$\left(\bar{z}_a + \frac{p_a}{\gamma}\right) - \left(\bar{z}_b + \frac{p_b}{\gamma}\right) = lJ$$

$$\frac{\Delta p}{l} = \gamma \cdot J: \text{Relazione sperimentale}$$

$$\frac{\Delta p}{l} = f(V_m, \rho, \mu, D, r)$$

dove μ é la viscosità e r é la rugosità.

Per determinare la legge empirica occorre applicare il teorema di Buckingham.

Teorema 1 (Teorema di Buckingham) Sia $g_0 = f(g_1, g_2, \dots, g_n)$, scelgo un sottoinsieme delle variabili di controllo di k elementi (tali che siano dimensionalmente indipendenti) allora posso ridurre di k unità il numero di grandezze di controllo che devono variare nella sperimentazione.

Nel caso della cadente $k = 3$.

Per applicare il teorema si procederà in questo modo:

1. Analisi dimensionale prendendo come dimensioni fondamentali:

- Massa
- Lunghezza
- Tempo

2. Terna di variabili di controllo dimensionalmente indipendenti:

$$\{g_1, g_2, g_3\}$$

3. Calcolare gruppi adimensionali associati a tutte le grandezze:

$$\begin{aligned} [g_0] &= [g_1]^{\alpha_0} [g_2]^{\beta_0} [g_3]^{\gamma_0} \rightarrow \pi_0 = \frac{g_0}{g_1^{\alpha_0} g_2^{\beta_0} g_3^{\gamma_0}} \\ &\vdots \\ [g_N] &= [g_1]^{\alpha_N} [g_2]^{\beta_N} [g_3]^{\gamma_N} \rightarrow \pi_N = \frac{g_0}{g_1^{\alpha_N} g_2^{\beta_N} g_3^{\gamma_N}} \end{aligned}$$

4. Formulazione adimensionale:

$$\pi_0 = f^*(\pi_4, \dots, \pi_n)$$

5. Si torna alla forma adimensionale:

$$g_0 = g_1^{\alpha_0} g_2^{\beta_0} g_3^{\gamma_0} \cdot f^*(\pi_4, \dots, \pi_N)$$

4.1 Applicazione del teorema di Buckingham

Analisi dimensionale:

$$\left[\frac{\Delta p}{l} \right] = \frac{\text{sforzo}}{\text{Lunghezza}} = \frac{\frac{\text{forza}}{\text{area}}}{\text{lunghezza}} = \frac{\frac{MLT^{-2}}{L^2}}{L} = ML^{-2}T^{-2}$$

$$[V_m] = LT^{-1}$$

$$[\rho] = ML^{-3}$$

$$[\mu] = ML^{-1}T^{-1}$$

$$[D] = L$$

$$[r] = L$$

Terna di valori di controllo:

$$\{V_m, \rho, D\}$$

Gruppi adimensionali:

$$\pi_0 = \frac{\frac{\Delta p}{l}}{V_m^{\alpha_0} \rho^{\beta_0} D^{\gamma_0}} \rightarrow \left[\frac{\Delta p}{l} \right] = [V_m]^{\alpha_0} [\rho]^{\beta_0} [D]^{\gamma_0}$$

$$MT^{-2}L^{-2} = (L^{\alpha_0}T^{-\alpha_0})(M^{\beta_0}L^{-3\beta_0})(L^{\gamma_0})$$

$$\begin{cases} \beta_0 = 1 \\ \alpha_0 = 2 \\ \gamma_0 = -1 \end{cases}$$

$$\pi_0 = \frac{\frac{\Delta p}{l}}{\frac{V_m^2 \rho}{D}}$$

Si procede in maniera simile anche per gli altri gruppi adimensionali:

$$\pi_4 = \frac{\mu}{V_m^{\alpha_4} \rho^{\beta_4} D^{\gamma_4}}$$

$$MT^{-1}L^{-1} = L^{\alpha_4}T^{-\alpha_4}M^{\beta_4}L^{-3\beta_4}L^{\gamma_4}$$

$$\begin{cases} \alpha_4 = 1 \\ \beta_4 = 1 \\ \gamma_4 = 1 \end{cases}$$

$$\pi_4 = \frac{\mu}{V_m \rho D}$$

$$\pi_5 = \frac{\mu}{V_m^{\alpha_5} \rho^{\beta_5} D^{\gamma_5}}$$

$$\begin{cases} \alpha_5 = 0 \\ \beta_5 = 0 \\ \gamma_5 = 1 \end{cases}$$

$$\pi_5 = \frac{\mu}{D}$$

Ora posso calcolare la forma adimensionale:

$$\frac{\frac{\Delta p}{l}}{\frac{V_m^2 \rho}{D}} = f^* \left(\frac{\mu}{V_m \rho D}, \frac{\mu}{D} \right) \quad (34)$$

A questo punto posso tornare alla forma adimensionale:

$$\begin{aligned} \frac{J \gamma}{\frac{V_m^2 \rho}{D}} &= \frac{J g}{\frac{V_m^2}{D}} = f^* \left(\frac{\mu}{V_m \rho D}, \frac{\mu}{D} \right) \\ J &= \frac{V_m^2}{2gD} 2f^* \left(\frac{\mu}{V_m \rho D}, \frac{\mu}{D} \right) = \\ &= \frac{V_m^2}{2gD} \cdot \lambda: \text{Formula di Darcy-Weisbach} \end{aligned}$$

λ sta ad indicare l'indice di resistenza.

Definizione 10 (Numero di Reynolds) *É possibile definire il numero di Reynolds come:*

$$Re = \frac{V_m \rho D}{\mu} \quad (35)$$

Il numero di Reynolds indica il regime di moto di un fluido.

Tramite una serie di esperimenti, Reynolds ha notato che:

- Per valori bassi di Re ci si trova in regime di moto laminare dove:
 - Il moto é adimensionale
 - Il moto é parallelo all'asse
 - Il moto é stazionario
- Per Re alti il moto si dirà a regime stazionario:
 - Il moto é caotico
 - Moto tridimensionale
 - Moto non stazionario

5 Studio del numero di Reynolds nel caso di moto in condotte

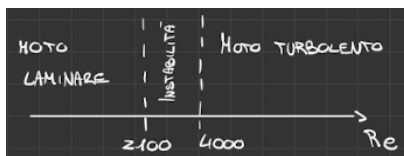


Figure 5: Regime di moto

Tramite una serie di esperimenti é possibile andare a studiare il comportamento di un fluido al variare di Re .

Tramite l'esperienza si nota che l'indice di resistenza λ é indipendente da $\frac{r}{D}$ e quindi vale:

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (36)$$

Allo stesso modo variando solo $\frac{r}{D}$ si ottiene che:

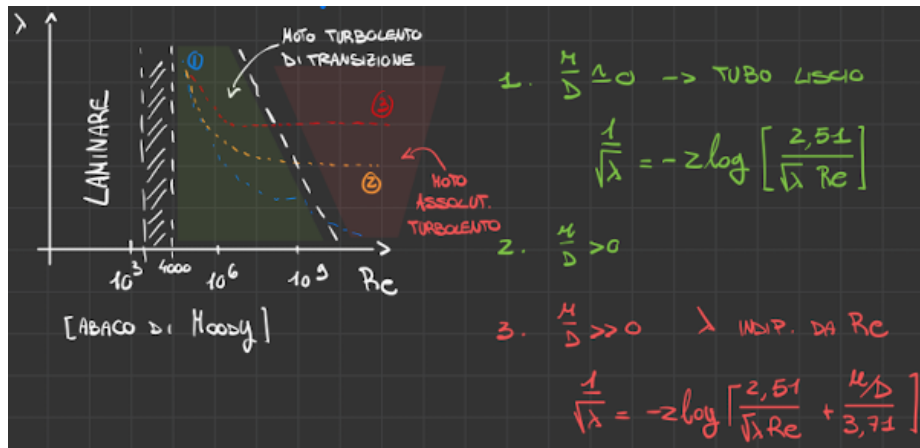
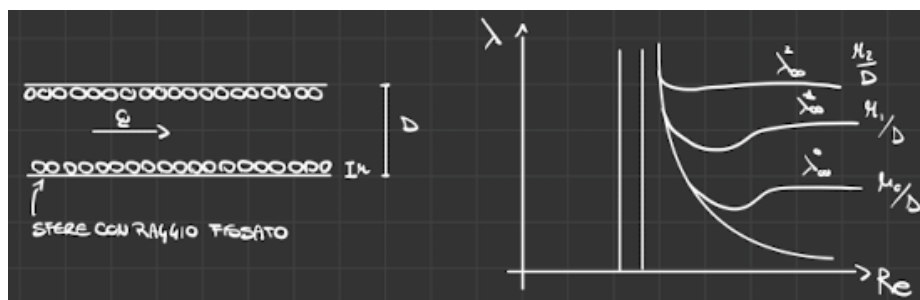


Figure 6: Abaco di Moody

5.1 Osservazioni sulla scabrezza

Tramite osservazioni sperimentali si può notare che varie approssimazioni di scabrezza non forniscono una stima sufficientemente precisa. Per risolvere il problema si può fabbricare una scabrezza artificiale:

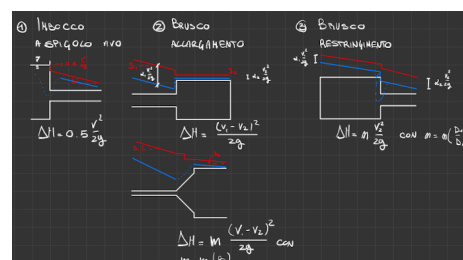


È possibile quindi ottenere un valore finito di λ per un Re molto grande.

5.2 Osservazioni sperimentali sulla cadente energetica

Tramite altre osservazioni sperimentali si è osservato che la cadente energetica J varia in base alla geometria della condotta andando a variare di conseguenza le perdite locali del sistema.

I risultati in figura sono stati ottenuti per via sperimentale andando a ridurre il sistema mediante il teorema di Buckingham procedendo nel modo seguente:



$$\begin{aligned}
\Delta p_{loc} &= f(V_m, \rho, \mu, D, r, \text{forma}) \\
&\quad \{V_m, \rho, D\} \\
\pi_0 &= \frac{\Delta p_{loc}}{V_m^{\alpha_0} \rho^{\beta_0} D^{\gamma_0}} = \frac{\Delta p_{loc}}{\rho V_m^2} \\
\pi_4 &= \frac{\mu}{\rho V_m D} \\
\pi_5 &= \frac{r}{D} \\
\frac{\Delta p_{loc}}{\rho V_m^2} &= f^* \left(Re, \frac{r}{D}, \text{forma} \right)
\end{aligned}$$

Osservazioni:

- $\frac{\Delta p_{loc}}{\rho V_m^2}$ é indipendente da $\frac{r}{D}$
- Re dipende solo dalla forma

Si nota anche che:

$$\begin{aligned}
\Delta p_{loc} &= \rho V_m^2 K \\
\Delta H_{loc} &= \frac{\Delta p_{loc}}{\gamma} = \frac{\rho V_m^2}{\gamma} K = \frac{V_m^2}{2g} K'
\end{aligned}$$

Si può quindi dire che le perdite locali sono proporzionali all'altezza cinetica.

6 Equazione di Navier-Stokes

Equazioni del problema fluidodinamico:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho V) &= 0: \text{Conservazione della massa} \\
\rho(\bar{f} - \bar{a}) &= \nabla \bar{\phi}: \text{Conservazione della quantità di moto} \\
\rho &= \rho(p, T) \approx \rho(p): \text{Equazione di stato}
\end{aligned}$$

Il sistema non fornisce la soluzione al problema. Per risolvere il sistema, occorre aggiungere una reologia per risolvere il problema fluidodinamico.

$$H_{m_e} = H_{m_u} + JL + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta H_{loc}: \text{Reologia di fluido reale} \quad (37)$$

L'equazione scritta sopra é stata ottenuta per via sperimentale.

6.1 Studio della reologia

$$\begin{aligned}\nabla \bar{v} &= \bar{\bar{v}} \\ \bar{v} &= \frac{1}{2} (\bar{v} + \bar{v}^T) + \frac{1}{2} (\bar{v} - \bar{v}^T) = \\ &= \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}}_{\bar{D}: \text{Velocità di deformazione}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 \end{bmatrix}}_{\bar{\bar{\Omega}}: \text{Rotazioni rigide}}\end{aligned}$$

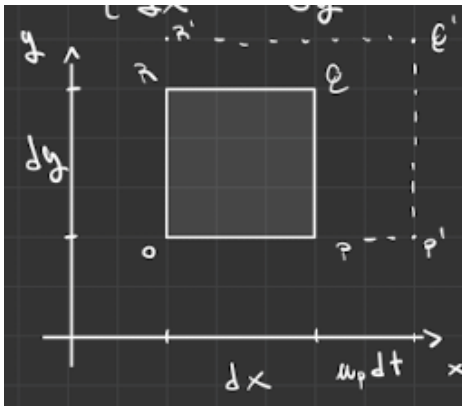
Le componenti diagonali dei tensori hanno diversi effetti sulla particella fluida. Per questa ragione si andranno ad imporre come nulle le varie componenti diagonali dei tensori per andare a studiarne gli effetti.

Come primo caso si vogliono imporre come nulle le componenti diagonali del tensore \bar{D} .

Componenti diagonali di \bar{D}

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$



$$\begin{aligned}V_0 &= (0, 0) \\ V_P &= \left(u_0 + \frac{\partial u}{\partial x} dx, v_0 + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx, 0 \right) \\ V_R &= \left(0, \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \\ V_Q &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx, \frac{\partial v}{\partial y} dy \right)\end{aligned}$$

Come si può notare si ha una deformazione lineare, di conseguenza c'è solo una variazione di area.

Calcolo delle deformazioni lineari:

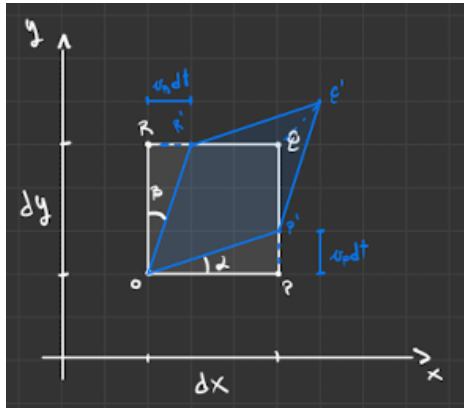
$$\underbrace{\frac{OP' - OP}{OP}}_{\text{Deformazione}} = \frac{u_P dt}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx dt}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} dt$$

Velocità di deformazione:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{dt}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Componenti extradiagonali di \bar{D}

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$



$$V_O = (0, 0)$$

$$V_P = \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx, \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) = (0, v_P)$$

$$V_R = \left(\frac{\partial u}{\partial y} dy, \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) = (u_R, 0)$$

$$V_Q = (u_R, v_P)$$

In questo caso ci sono variazioni di forma nella particella fluida. Non ci sono invece variazioni di volume dato che le aree rimangono uguali nel caso in cui ci siano angoli infinitesimi.

Si può dimostrare infatti che gli angoli α e β in figura, per variazioni infinitesime, sono uguali.

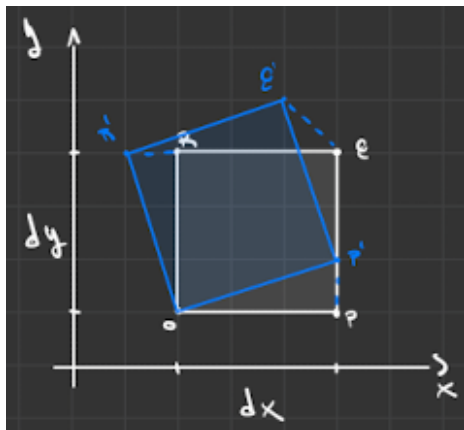
$$\begin{cases} d\alpha = \tan \alpha = \frac{PP'}{OP} = \frac{V_P dt}{dx} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx dt}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} dt \\ d\beta = \tan \beta = \frac{RR'}{OR} = \frac{u_R dt}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y} dt \end{cases}$$

$$d\alpha = d\beta$$

Componenti extradiagonali di Ω

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

j



$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$V_P = -u_R$$

$$d\alpha = d\beta$$

In questo caso si ha una rotazione rigida. Non ci sono variazioni di area e di volume

6.2 Modello reologico: fluidi Newtoniani

Condizioni del modello reologico:

1. $\bar{\Phi} = g(\bar{\bar{D}})$: Lo sforzo dipende solo dalla velocità di deformazione
2. Se $\bar{v} = 0$ allora $\bar{\Phi} = p\bar{I}$:

$$\bar{\Phi} = p\bar{I} + f(\bar{\bar{D}}) \text{ con } f(0) = 0$$
3. Il modello é indipendente dal sistema di riferimento
4. $f(\bar{\bar{D}})$ lineare in $\bar{\bar{D}}$

Ipotesti del modello reologico:

$$p = \frac{1}{3} tr(\bar{\Phi})$$

É possibile scrivere la reologia come:

$$\begin{aligned} \bar{\Phi} &= p\bar{I} + a\bar{\bar{D}} + b[tr(\bar{\bar{D}})]\bar{I} \\ \Phi_{xx} &= p + aD_{xx} + b(D_{xx} + D_{yy} + D_{zz}) \\ \Phi_{yy} &= 0 + aD_{yy} + 0 \end{aligned}$$

Relazione tra sforzi tangenziali e viscosità:

$$\frac{F}{A} = \tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

Dal modello reologico si ha:

$$\begin{cases} -\Phi_{yx} = \Phi_{-yx} = -aD_{yx} = -a\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

$\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ nel caso in cui la corrente sia parallela all'asse x.

Alla fine quindi si ottiene che:

$$a = -2\mu$$

Posso riscrivere la reologia come:

$$\bar{\Phi} = p\bar{I} - 2\mu\bar{\bar{D}} + b(tr\bar{\bar{D}})\bar{I}$$

A questo punto posso quindi andare a calcolarmi anche il valore di b andando a definire la traccia dell'equazione sopra.

$$\begin{aligned} tr(\bar{\Phi}) &= 3p = 3p - 2\mu + 3b(tr\bar{\bar{D}}) \\ (-2\mu + 3b)tr\bar{\bar{D}} &= 0 \\ b &= \frac{2}{3}\mu \end{aligned}$$

6.2.1 Riscrittura del problema fluidodinamico

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v}) = 0 \\ \rho (\bar{f} - \bar{a}) = \nabla \cdot \bar{\bar{\Phi}} \\ \rho = \rho(p) \\ p = \frac{1}{3} tr(\bar{\bar{\Phi}}) \end{cases}$$

Ora quindi é possibile andare a riscrivere $\nabla \bar{\bar{\Phi}}$ come:

$$\begin{aligned} \nabla \bar{\bar{\Phi}} &= \nabla \left[p \bar{I} + \frac{2}{3} \mu (\nabla \bar{v}) \bar{I} - 2\mu \bar{\bar{D}} \right] = \\ &= \nabla p + \frac{2}{3} \mu \cdot \nabla (\nabla \cdot \bar{v}) - 2\mu (\nabla \bar{\bar{D}}) = \\ &= \nabla p + \frac{2}{3} \mu \cdot \nabla (\nabla \cdot \bar{v}) - 2\mu \left(\frac{1}{2} \nabla (\nabla \cdot \bar{v}) + \frac{1}{2} \nabla \cdot (\nabla \bar{v}) \right) = \\ &= \nabla p + \left(\frac{2}{3} \mu - \mu \right) \nabla (\nabla \cdot \bar{v}) - \mu \nabla^2 \bar{v} \end{aligned}$$

L'operatore ∇^2 é definito come laplaciano.

Ora posso scrivere la seconda equazione del problema fluidodinamico come:

$$\rho (\bar{f} - \bar{a}) = \nabla p - \frac{1}{3} \mu \nabla (\nabla \cdot \bar{v}) - \mu \nabla^2 \bar{v}$$

Se il fluido é incomprilile:

$$\begin{aligned} \rho &= \text{cost.} \\ \nabla \cdot \bar{v} &= 0 \\ \rho (\bar{f} - \bar{a}) &= \nabla p - \mu \nabla^2 \bar{v} \end{aligned}$$

Se il fluido é pesante e incomprilile:

$$\begin{aligned} f &= -g \nabla z \\ \rho &= \text{cost.} \\ \begin{cases} \nabla \bar{v} = 0 \\ \rho (-g \nabla z - \bar{a}) = \nabla p - \mu \nabla^2 \bar{v} \end{cases} & \text{Equazioni di Navier-Stokes} \end{aligned}$$

Le incognite del sistema sono: (u, v, w, p)

Definisco l'accelerazione come:

$$\begin{aligned} \bar{a} &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \cdot \bar{v} \end{aligned}$$

Il termine $\bar{v} \cdot \nabla \cdot \bar{v}$ é un termine non lineare che rende quindi il sistema non risolvibile in determinate condizioni.

6.3 Analisi dell'equazione di Navier-Stokes

In assenza di moto si ha che:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho} \nabla p &= -g \nabla \tilde{z} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \cdot \bar{v} &= \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 v - \frac{1}{\rho} v - \frac{1}{\rho} \nabla (p - p_{\text{idro}}) \\ \rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v} \cdot \nabla \cdot \bar{v} &= \mu \nabla^2 v - p_E\end{aligned}$$

Ora si procede con la scomposizione del sistema in tre equazioni scalari:

$$\begin{aligned}x : \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_E}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ y : \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_E}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\ z : \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_E}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right)\end{aligned}$$

6.4 Soluzione analitica del problema fluidodinamico

Ipotesi:

- Moto stazionario
- Moto laminare ($\bar{v} = (u, 0)$)
- Pressione costante lungo asse x
- Moto piano (2D, $w = 0$, $\frac{\partial}{\partial z} = 0$)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \\ \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_E}{\partial y} \end{cases}$$

Condizioni al contorno:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(0) = 0 \\ u(b) = U: \text{Velocità lastra in movimento} \end{cases}$$

Soluzione del problema:

$$\begin{aligned}u(y) &= C_1 y + C_2 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= C_1 \\ C_2 &= 0 \\ U = C_1 b &\rightarrow C_1 = \frac{U}{b} \\ u(y) &= \frac{U}{b} y: \text{Funzione spostamento}\end{aligned}$$

6.5 Soluzione analitica del problema fluidodinamico per moto in condotte

Ipotesi:

- Fluido Newtoniano, incompribile e pesante
- Moto stazionario: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- Moto laminare: traiettorie parallele all'asse della condotta e velocità lineare

$$\bar{v} = (u, 0, 0) = u\hat{i}$$

Osservazioni:

- Moto uniforme:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

- Simmetria cilindrica: $u = u(r)$
- Corrente lineare: in ogni sezione trasversale la quota piezometrica é costante:

$$\tilde{z} + \frac{p}{\gamma} = \text{cost.}$$

Analisi delle quote piezometriche:

$$\left(\tilde{z}_{G_1} + \frac{p_{G_1}}{\gamma} \right) - \left(\tilde{z}_{G_2} + \frac{p_{G_2}}{\gamma} \right) = JL$$

$$p_{G_1} - p_{G_2} = (\tilde{z}_{G_2} - \tilde{z}_{G_1})\gamma + JL\gamma$$

In base alle ipotesi posso quindi scrivere la forma globale dell'equazione di Navier-Stokes:

$$\bar{G} + \bar{I} + \bar{M} = \int_W \nabla p dW - \int_W \mu \nabla^2 \bar{v} dW$$

$$\bar{G} + \bar{I} + \bar{M} = \underbrace{- \int_A p \bar{n} dA}_{\text{Teo. Grad.}} + \underbrace{\int_A \mu (\nabla \bar{v} \cdot \bar{n}) dA}_{\text{Teo. Div.}}$$

$$\bar{G} + \bar{I} + \bar{M} + \bar{\Pi}_p + \bar{\Pi}_\mu = \bar{0}$$

con \bar{M} : flusso di quantità di moto, \bar{I} : inerzie locali e \bar{G} : risultante delle forze di massa.

6.5.1 Studio di un volume di fluido in condotta

In questo caso é possibile andare ad applicare l'equazione globale di Navier-Stokes:

$$\bar{G} + \underbrace{\bar{I}}_{=0} + \bar{M} + \bar{\Pi}_p + \bar{\Pi}_\mu = \bar{0}$$

$\bar{I} = 0$ per ipotesi.

Ora si procederà andando a definire ogni singola forza:

$$\vec{G} = -\gamma W \nabla \tilde{z} = -\gamma (\pi r^2 L) \nabla \tilde{z}$$

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \int_{A_1} \rho \underbrace{\bar{v}}_{u\hat{i}} \underbrace{(\bar{v}\hat{n}_1)}_u dA + \int_{A_2} \rho \underbrace{\bar{v}}_{u\hat{i}} \underbrace{(\bar{v}\hat{n}_2)}_{-u} dA + \int_{A_0} \rho \underbrace{\bar{v}}_{u\hat{i}} \underbrace{(\bar{v}\hat{n}_0)}_{=0} dA = \\ &= \int_{A_1} \rho u^2 dA \hat{i} + \int_{A_2} (-\rho u^2) dA \hat{i} + \bar{0} = \bar{0} \end{aligned}$$

Non ci sono vlussi di quantità di moto.

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_p &= \int_{A_1} p \hat{n}_1 dA + \int_{A_2} p \hat{n}_1 dA + \int_{A_0} p \hat{n}_0 dA = \\ &= \hat{i} p_{G_1} A_1 - \hat{i} p_{G_2} A_2 + \Pi_{p_0} = \\ &= \hat{i} (\pi r^2) \left(JL\gamma + \gamma \underbrace{L \sin \alpha}_{\tilde{z}_{G_1} - \tilde{z}_{G_2}} \right) + \Pi_{p_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_\mu &= \int_{A_1} -\mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial n_1} dA + \int_{A_2} -\mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial n_2} dA + \int_{A_0} -\mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial n_0} dA = \\ &= \int_{A_1} -\mu \frac{\partial u}{\partial x} dA + \int_{A_2} -\mu \left(-\frac{\partial u}{\partial x} \hat{i} \right) dA + \int_{A_0} -\mu \frac{\partial u}{\partial n_0} dA = \\ &= \mu \int_{A_0} \frac{\partial u}{\partial r} \hat{i} dA = \mu \frac{\partial u}{\partial r} (2\pi r L) \hat{i} \end{aligned}$$

Forma globale:

$$-(\gamma \pi r^2 L) \nabla \tilde{z} + (JL\gamma + \gamma L \sin \alpha) \pi r^2 \hat{i} + \Pi_{p_0} + \mu \frac{\partial u}{\partial r} (2\pi r L) \hat{i} = \bar{0}$$

Posso ora scomporre questa equazione nelle proprie componenti cartesiane in particolare quella relativa al versore \hat{i} ottenendo quindi una sola equazione differenziale al primo ordine:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{J\gamma}{2\mu} r \\ u(R) = 0 \end{cases} \\ &\begin{cases} u(r) = -\frac{J\gamma}{2\mu} \frac{r^2}{2} + C_1 \\ 0 = -\frac{J\gamma}{2\mu} \frac{R^2}{2} + C_1 \end{cases} \\ &u(r) = \frac{J\gamma}{4\mu} (R^2 - r^2) \end{aligned}$$

Ora, dato che conosco la velocità di deformazione posso andare a riscrivere il tensore degli sforzi:

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\Phi}} &= p\bar{\bar{I}} - 2\mu\bar{\bar{D}} = \\ &= \begin{bmatrix} p - 2\mu D_{xx} & -2\mu\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial r}\right) & -2\mu\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \\ -2\mu\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial r}\right) & p - 2\mu D_{yy} & 0 \\ -2\mu\left(\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial r}\right) & 0 & p - 2\mu D_{zz} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} p & \frac{1}{2}J\gamma_r & \frac{1}{2}J\gamma_r \\ \frac{1}{2}J\gamma_r & p & 0 \\ \frac{1}{2}J\gamma_r & 0 & p \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Inoltre, visto che adesso é nota la funzione $u(r)$ posso verificare che:

$$J = \frac{64}{Re} \frac{V_m^2}{2gD}$$

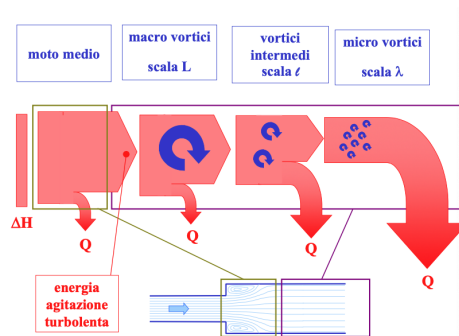
$$\begin{aligned}V_m &= \frac{1}{A_1} \int_{A_1} u(r) dA = \frac{1}{2} V_{\max} = \frac{1}{2} \frac{J\gamma}{4\mu} R^2 = \frac{J\gamma}{32\mu} D^2 = \\ &= \frac{J\rho g}{32\mu} D^2 \\ J &= \frac{32\mu}{D^2\rho g} V_m = \frac{64\mu}{2\rho g D} \frac{V_m}{D} \frac{V_m}{V_m} = \frac{64}{Re} \frac{V_m^2}{2gD}\end{aligned}$$

6.6 Risoluzione delle NS nel caso generale

É possibile andare a risolvere le equazioni di Navier-Stokes per via analitica andando a risolvere un sistema di equazioni differenziali non lineari, questa risoluzione però é impraticabile nel caso generale.

In alternativa si può procedere per via analitica andando a dividere il sistema (la condotta) in una griglia composta dal numero più alto di punti possibili per poi andare a calcolare una soluzione approssimata utilizzando le serie numeriche.

In caso di moto turbolento occorrerà però andare ad analizzare la teoria della turbolenza.



Mano a mano che il tempo passa e il fluido scorre all'interno della condotta, si produrranno dei vortici alle estremità della sezione angolare della condotta. Questi vortici andranno, di conseguenza, a produrre vortici sempre più piccoli.

Secondo la teoria di Kolmogorov esiste una relazione tra la scala minima e la scala massima dei vortici:

$$\frac{\eta}{L} = Re^{-\frac{3}{4}}$$

Ciò significa che se Re aumenta avrò vortici sempre più piccoli.

Procedendo con il calcolo della soluzione analitica occorre quindi dividere la condotta in una griglia di passo:

$$\frac{L}{\eta} = Re^{\frac{3}{4}}$$

e di conseguenza anche per le altre dimensioni spaziali si avrà lo stesso passo.

A questo punto si avrà una griglia tridimensionale composta da

$$N = N_x N_y N_z = Re^{\frac{9}{4}}: \text{Punti in un istante di tempo}$$

In questo modo si avrà la distribuzione del fluido in un unico istante di tempo. Per avere la soluzione generale occorrerà andare a moltiplicare il tutto per il numero di istanti di tempo totali.

$$N_t = \frac{T}{\Delta t} = Re^{\frac{3}{4}}$$

Quindi alla fine si avranno:

$$N_t \cdot N = Re^3$$

equazioni da risolvere per avere una soluzione analitica.

È possibile andare ora a verificare la messa in pratica di questa teoria andando ad inserire dei dati numerici:

$$\mu = 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$\rho = 10^3 \frac{\text{Kg}}{\text{m}^3}$$

$$D = 0,1 \text{ m}$$

$$V_m = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A questo punto si calcola Re :

$$Re = \frac{\rho V_m D}{\mu} = 10^5$$

e di conseguenza il numero totale delle equazioni da risolvere sarà:

$$N_{tot} = 10^{15}$$

È evidente che anche in questo caso molto semplice la risoluzione del problema resta impraticabile.

Per risolvere effettivamente il problema occorre utilizzare le grandezze medie dei dati a disposizione andando a definire la media alla Reynolds come:

$$\langle \bar{v} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \nabla(x, y, z, t) dt$$

Posso anche andare a riscrivere la funzione velocità come:

$$\bar{v} = \bar{v}(x, y, z, t) = \langle \bar{v} \rangle + \underbrace{\bar{v}'(x, y, z, t)}_{\text{Fluttuazione}}$$

Si può notare che il valor medio di \bar{v}' é nullo andando ad applicare la definizione stessa di valor medio.

$$\frac{1}{T} \int_0^T \bar{v}' dt = \frac{1}{T} \int_0^T \bar{v} dt - \frac{1}{T} \int_0^T \langle \bar{v} \rangle dt = 0$$

Andando ad inserire la velocità media nelle equazioni di Navier-Stokes si ottiene:

Equazione di continuità:

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot \bar{v} \rangle &= 0 \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial x} v \right\rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial}{\partial x} \bar{v} dt = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T} \int_0^T \bar{v} dt = \frac{\partial}{\partial x} \langle \bar{v} \rangle \\ \nabla \cdot \left[\frac{1}{T} \int_0^T \bar{v} dt \right] &= \nabla \langle \bar{v} \rangle \end{aligned}$$

Equazione di NS:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \rho \bar{v} \cdot \nabla \bar{v} &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \bar{v} - g \nabla \bar{z} \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{v}) + \nabla \cdot (\rho \bar{v} \bar{v}) &= -\nabla p + \mu \nabla^2 \bar{v} - g \nabla \bar{z} \end{aligned}$$

Riscrivo $\nabla \rho \bar{v} \bar{v}$ come valor medio:

$$\begin{aligned} \langle \nabla \rho \bar{v} \bar{v} \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T (\rho \bar{v} \bar{v}) dt = \nabla \cdot \int_0^T (\rho \bar{v} \bar{v}) dt \\ &= \frac{1}{T} \nabla \int_0^T \rho (\langle \bar{v} \rangle + \bar{v}') (\langle \bar{v} \rangle \bar{v}') dt = \\ &= \frac{1}{T} \nabla \left[\int_0^T \rho \langle \bar{v} \rangle \langle \bar{v} \rangle dt + \int_0^T \langle \bar{v} \rangle \bar{v}' dt + \int_0^T \rho \bar{v}' \langle \bar{v} \rangle dt + \int_0^T \rho \bar{v}' \bar{v}' dt \right] = \\ &= \nabla [\rho \langle \bar{v} \rangle \langle \bar{v} \rangle + \langle \rho \bar{v}' \bar{v}' \rangle] \end{aligned}$$

alla fine l'equazione di NS risulta:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \rho \bar{v} \rangle + \nabla \rho \langle \bar{v} \bar{v} \rangle + \nabla \langle \rho \bar{v}' \bar{v}' \rangle = -\nabla \langle p \rangle + \mu \nabla^2 \langle \bar{v} \rangle - g \nabla \bar{z}$$

Riscrivendo il sistema in forma compatta:

$$\begin{cases} \nabla \langle \bar{v} \rangle = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \langle \rho \bar{v} \rangle + \nabla \rho \langle \bar{v} \bar{v} \rangle + \nabla \langle \rho \bar{v}' \bar{v}' \rangle = -\nabla \langle p \rangle + \mu \nabla^2 \langle \bar{v} \rangle - g \nabla \bar{z} \end{cases}$$

si può notare che ora il sistema é composto da 4 equazioni e 10 incognite.

Per risolvere questo sistema occorre introdurre una terza equazione, una relazione. La relazione é data dalla funzione:

$$\bar{\Phi} = f \left(\begin{matrix} \langle \bar{v} \rangle \\ \langle p \rangle \end{matrix} \right)$$

6.7 Forma globale delle RANS

La forma globale delle RANS si ottiene integrando le equazioni viste nel paragrafo precedente. Si ottengono quindi i seguenti risultati:

$$\begin{aligned}
 - \int_W \frac{\partial}{\partial t} (\rho < \bar{v} >) dW &= < \bar{I} > < \bar{G} > = -\gamma W \nabla \bar{z} \\
 < \bar{M} > &= \int_A \rho < \bar{v} > < \bar{v} > \cdot \bar{n} dA \\
 < \bar{\Pi}_p > &= \int_A < p > \bar{n} dA \\
 < \bar{\Pi}_\mu > &= - \int_A \mu \frac{\partial < \bar{v} >}{\partial n} dA - \int_W \nabla \bar{\Phi}_{Re} dW = \int_A \bar{\Phi}_{Re} \bar{n} dA = \int_A \rho < \bar{v}' > < \bar{v}' > \bar{n} dA = \\
 &= \int_A \rho < \bar{v}' (\bar{v}' \bar{n}) > dA = \bar{M}'
 \end{aligned}$$

Alla fine quindi la forma globale completa sarà:

$$< \bar{I} > + \bar{G} + < \bar{M} > + < \bar{\Pi}_p > + < \bar{\Pi}_\mu > + \bar{M}' = 0$$

6.8 Applicazione dell'equilibrio globale a moto in condotta turbolento

Anche nel caso turbolento si ha la stessa regolarità di $< \bar{v} >$ che in moto laminare.

Ipotesi:

- Moto stazionario: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- $< \bar{v} > = (< u >, 0, 0)$
- Moto uniforme: $\frac{\partial < u >}{\partial x} = 0$
- Simmetria radiale: $< u > = < u > (r)$
- Moto medio corrente laminare: $\bar{z} + \frac{p}{\gamma} = \text{cost. nel piano} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\bar{z} + \frac{p}{\gamma} \right) = - < J >$

Fatte queste ipotesi si definiscono ora i vari termini che compongono l'equazione globale:

$$\begin{aligned}
 < \bar{I} > &= 0 \\
 < \bar{M}_1 > &= \int_{A_1} \rho < \bar{v} > (< \bar{v} > \cdot \bar{n}) dA = \int_{A_1} \rho < u > < u > \hat{i} dA \\
 < \bar{M}_2 > &= - < \bar{M}_1 > \\
 < \bar{M}_0 > &= 0 \\
 < \bar{\Pi}_{\mu_1} > &= - \int_A \mu \frac{\partial < \bar{v} >}{\partial n_1} dA = 0 \\
 < \bar{\Pi}_{\mu_2} > &= < \bar{\Pi}_{\mu_1} > = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{G} &= -\gamma W \nabla \tilde{z} = -\gamma \pi r^2 L \nabla \tilde{z} \longrightarrow G_x = -\gamma \pi r^2 L \sin \alpha \\
< \bar{\Pi}_{p_1} > &= < \bar{\Pi}_{p_2} = [< J > L \gamma + \gamma L \sin \alpha] \pi r^2 \hat{i} \\
< \bar{\Pi}_{\mu_0} &= - \int_{A_0} \mu \frac{\partial < \bar{v} >}{\partial n_0} dA = \mu \frac{\partial < u >}{\partial r} 2\pi r L \hat{i} \\
< \bar{M}'_1 > &= \int_{A_1} \rho < \bar{v}' v'_{n_1} > dA = \int_{A_1} \rho < \bar{v}' u' > dA \\
< \bar{M}'_2 > &= \int_{A_2} \rho < \bar{v}' v'_{n_2} > dA = - \int_{A_2} \rho < \bar{v}' u' > dA \\
< \bar{M}_0 > &= \int_{A_0} \rho < \bar{v}' v'_{n_0} > dA = \rho < u' v_{n_0} > 2\pi r L \hat{i}
\end{aligned}$$

A questo punto posso quindi scrivere l'equazione globale di equilibrio come:

$$\begin{aligned}
\underbrace{-|\tilde{G}| \sin \alpha + |< \bar{\Pi}_{p_1} >| - |< \bar{\Pi}_{p_2} >| - |< \bar{\Pi}_{\mu_0} >| - |\bar{M}'_0|}_{= < J > \gamma L (\pi r^2)} &= \underbrace{(\tau_{visc} + \tau_{turb}) 2\pi r L}_{(\tau_{visc} + \tau_{turb}) 2\pi r L} \\
\tau_{visc} + \tau_{turb} &= \frac{1}{2} J \gamma r
\end{aligned}$$

Lo sforzo tangenziale sara' in funzione del raggio della condotta, quindi:

$$\begin{cases} r = 0 \longrightarrow \tau_{tot} = 0, \quad \tau_{visc} = -\mu \frac{\partial < u >}{\partial r} = 0 \\ r = R \longrightarrow \tau_{turb} = \rho < u' v'_{n_0} > = 0 \end{cases}$$

E' possibile ora andare ad integrare l'equazione per la condotta:

$$\begin{aligned}
\int_r^R -\mu \frac{\partial < u >}{\partial r} dr - \int_r^R \rho < u' v'_{n_0} > dr &= \int_r^R \frac{1}{2} < J > \gamma \cdot r dr \\
< u > (r) &= \frac{1}{4\mu} < J > \gamma [R^2 - r^2] - \int_r^R \frac{\rho}{\mu} < u' v'_{n_0} > dr
\end{aligned}$$