

# Appunti Fisica dei Plasmi

Lorenzo Minuz

10 gennaio 2026

## Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione alla fisica dei plasmi</b>	<b>4</b>
1.1	Descrizione Statistica di un Gas Ionizzato	4
1.1.1	Distribuzione Statistica di Boltzmann	4
1.1.2	Degenerazione degli Stati Energetici	4
1.1.3	Conteggio degli Stati e Spazio delle Fasi	5
1.2	Equilibrio di Ionizzazione e l'Equazione di Saha	5
1.3	Distribuzione delle Velocità nei Plasmi	6
1.3.1	Energia Cinetica Media	7
1.4	Schermatura di Debye	7
1.4.1	Il Modello dello Schermo di Debye	8
1.4.2	L'Equazione di Poisson-Boltzmann	8
1.4.3	Soluzione e Significato Fisico	8
1.5	I Criteri per un Buon Plasma	9
1.6	Esercizi	10
<b>2</b>	<b>Descrizione a Singola Particella: Moto delle Cariche in un Plasma</b>	<b>15</b>
2.1	Moto di una Particella Carica in Campi Magnetici	15
2.1.1	Conservazione dell'Energia Cinetica	15
2.1.2	Moto di Deriva in Presenza di una Forza Esterna	16
2.1.3	Moto in Campi Magnetici Non Uniformi: L'Approssimazione del Girocentro	18
2.2	Confinamento del plasma	19
2.2.1	Problemi del Confinamento Toroidale	19
2.2.2	Stellaratore	20
2.2.3	Tokamak	20
2.3	Invarianti Adiabatici	21
2.3.1	Introduzione al Problema: Pendolo a Lunghezza Variabile	21
2.3.2	Lagrangiana di una Particella Carica in un Campo Elettromagnetico	22
2.3.3	L'Invariante Adiabatico: Il Momento Magnetico ( $\mu$ )	23
2.3.4	Il Principio dello Specchio Magnetico	23
2.4	Invarianti Adiabatici e Moto delle Particelle	26
2.4.1	Il Primo Invariante Adiabatico: Momento Magnetico ( $\mu$ )	26
2.4.2	Il Secondo Invariante Adiabatico: Invariante Longitudinale ( $J$ )	27
2.4.3	Il Terzo Invariante Adiabatico: Flusso Magnetico ( $\Phi$ )	28
2.5	Dalla Singola Particella alla Descrizione del Plasma	28
2.6	Due Approcci alla Descrizione del Plasma	29
2.7	Esercizi	29

<b>3</b>	<b>Descrizione del plasma come un fluido carico</b>	<b>35</b>
3.1	Validità dell'approccio fluido	35
3.2	Derivazione delle Equazioni Fluidi	35
3.2.1	Equazione di Continuità (Conservazione della Massa)	36
3.2.2	Equazione del Momento (Legge di Newton)	36
3.2.3	Equazione di Stato (Chiusura del sistema)	38
3.3	Derive Fluidi e Deriva Diamagnetica	38
3.4	Il Modello a Due Fluidi (Two-Fluid Model)	38
3.5	Magnetoidrodinamica (MHD) a singolo fluido	39
3.5.1	Ipotesi del modello	39
3.5.2	Variabili a singolo fluido	39
3.5.3	Equazioni MHD fondamentali	39
3.5.4	Classificazione MHD	40
3.5.5	Riepilogo Sistema MHD	41
3.6	Esercizi	41
<b>4</b>	<b>Equilibri in Magnetoidrodinamica</b>	<b>44</b>
4.1	Il Modello MHD	44
4.1.1	Variabili del modello	44
4.1.2	Equazioni fondamentali	45
4.2	Equilibrio Statico e Forze Magnetiche	45
4.3	Configurazioni di Pinch	47
4.3.1	$\theta$ -pinch	47
4.3.2	Z-pinch	48
4.3.3	Screw Pinch	50
4.4	Teorema del Flusso Congelato (Legge di Gelo)	52
4.5	Effetti Toroidali e Instabilità	52
4.6	Onde nei Plasmi e Analisi Spettrale	52
4.6.1	Onde Elettromagnetiche nel Vuoto	53
4.7	Esercizi	53
<b>5</b>	<b>Elementi di onde nei plasmi</b>	<b>56</b>
5.1	Proprietà delle onde elettromagnetiche nel vuoto	56
5.1.1	Richiami matematici: Serie di Fourier	56
5.1.2	Passaggio al continuo: Trasformata di Fourier	57
5.1.3	Pacchetti d'onda e principio di indeterminazione	58
5.2	Onde piane nel vuoto	58
5.2.1	Derivazione dell'equazione delle onde	58
5.2.2	Soluzione ad onda piana	59
5.3	Mezzi dispersivi e sovrapposizione di onde	60
5.3.1	Determinazione dei coefficienti dalle condizioni iniziali	60
5.3.2	Velocità di Fase e di Gruppo	60
5.4	Onde nei plasmi (Modello a due fluidi, $B=0$ )	61
5.4.1	Linearizzazione delle equazioni di Maxwell	61
5.4.2	Onde Longitudinali (Elettrostatiche)	62
5.4.3	Analisi dei Regimi di Temperatura	62
5.4.4	Onde Elettromagnetiche nel Plasma ( $B = 0$ )	63
5.4.5	Energia delle onde elettromagnetiche nel plasma	64
5.4.6	Pacchetti d'onda e riflettometria	64

5.5	Onde in plasmi magnetizzati (MHD)	65
5.5.1	Linearizzazione delle equazioni MHD	65
5.5.2	Modi Normali MHD	65
5.6	Esercizi	66
<b>A</b>	<b>Formulario</b>	<b>72</b>
A.1	Introduzione alla fisica dei plasmi	72
A.2	Descrizione a singola particella: moto delle cariche in un plasma	72
A.3	Descrizione del plasma come un fluido carico	73
A.4	Equilibri in magneto-idro-dinamica (MHD)	74
A.5	Elementi di onde nei plasmi	74
<b>B</b>	<b>Identità vettoriali</b>	<b>75</b>
B.1	Identità Algebriche	75
B.2	Regole del Prodotto (Primo Ordine)	76
B.3	Identità del Secondo Ordine	76
B.4	Teoremi Integrali Fondamentali	76
<b>C</b>	<b>Operatori differenziali in coordinate curvilinee</b>	<b>76</b>
C.1	Formule Generali	77
C.2	Casi Particolari Notevoli	77
<b>D</b>	<b>Integrali Gaussiani</b>	<b>77</b>
D.1	Forme Unidimensionali	77
D.2	Momenti della Distribuzione	78
D.3	Forma Multivariata	78

# 1 Introduzione alla fisica dei plasmi

**Definizione 1.1 (Plasma)** *Un plasma è un gas ionizzato che contiene un numero sufficiente di particelle cariche (ioni ed elettroni) da far sì che la sua dinamica sia dominata da forze elettromagnetiche a lungo raggio, esibendo un caratteristico **comportamento collettivo**. Nel complesso, un plasma è elettricamente quasi-neutro.*

## 1.1 Descrizione Statistica di un Gas Ionizzato

Per descrivere le proprietà di un plasma in equilibrio termico, si ricorre alla meccanica statistica. La popolazione relativa di due stati energetici è governata dalla **distribuzione di Boltzmann**.

### 1.1.1 Distribuzione Statistica di Boltzmann

Dato un sistema a temperatura  $T$ , il numero di particelle  $N_i$  che occupano uno stato con energia  $E_i$  è proporzionale al fattore di Boltzmann:

$$N_i \propto g_i e^{-\frac{E_i}{k_B T}}$$

dove:

- $k_B$  è la costante di Boltzmann,  $k_B \approx 1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ .
- $E_i$  è l'energia dello stato  $i$ .
- $g_i$  è il **peso statistico**, o **degenerazione dello stato**, che rappresenta il numero di configurazioni quantistiche fisicamente distinte che corrispondono alla stessa energia  $E_i$ .

### 1.1.2 Degenerazione degli Stati Energetici

**Definizione 1.2** *Si parla di **degenerazione** quando più stati quantici distinti di un sistema possiedono lo stesso livello energetico.*

**Esempio 1.3 (Atomo di idrogeno)** *L'energia degli stati legati dell'atomo di idrogeno dipende unicamente dal numero quantico principale  $n$ :*

$$E_n = -\frac{R_y}{n^2}, \quad \text{con } R_y \approx 13.6 \text{ eV}$$

*Tuttavia, lo stato di un elettrone è descritto da quattro numeri quantici:  $n$  (principale),  $l$  (azimutale),  $m_l$  (magnetico) e  $m_s$  (spin). Poiché l'energia dipende solo da  $n$ , tutti gli stati con lo stesso  $n$  ma diversi valori di  $l, m_l, m_s$  sono degeneri. Ad esempio, lo stato fondamentale ( $n = 1$ ) ha  $l = 0, m_l = 0$ , ma due possibili stati di spin ( $m_s = \pm 1/2$ ). La sua degenerazione è quindi  $g_1 = 2$ .*

**Esempio 1.4 (Elettrone libero)** *Anche un elettrone libero possiede una degenerazione. La sua energia è la somma dell'energia di ionizzazione  $\chi$  (l'energia minima per liberarlo dall'atomo) e della sua energia cinetica:*

$$E = \chi + \frac{p^2}{2m_e}$$

*dove  $p$  è il modulo della quantità di moto. Tutti gli elettroni con lo stesso modulo della quantità di moto  $p$  hanno la stessa energia, indipendentemente dalla direzione del loro moto. Questa è una forma di degenerazione in un continuo di stati.*

### 1.1.3 Conteggio degli Stati e Spazio delle Fasi

Per contare gli stati di un sistema di particelle libere, come gli elettroni in un plasma, si utilizza il concetto di **spazio delle fasi**.

Il **Principio di Indeterminazione di Heisenberg** stabilisce che non è possibile conoscere simultaneamente posizione  $x$  e quantità di moto  $p_x$  con precisione arbitraria:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

Questo implica che nello spazio delle fasi (uno spazio a 6 dimensioni con coordinate  $\vec{x}, \vec{p}$ ), una particella occupa una "cella" elementare di volume minimo. Per un sistema tridimensionale, questo volume minimo è  $h^3$ , dove  $h$  è la costante di Planck.

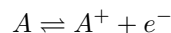
Il numero di stati quantici  $N_{\text{stati}}$  disponibili in un volume dello spazio delle fasi  $V_{\text{fasi}}$  è quindi:

$$N_{\text{stati}} = \frac{V_{\text{fasi}}}{h^3} = \frac{V_{\text{fisico}} \times V_{\text{moto}}}{h^3}$$

Se le particelle occupano un volume fisico  $V$  e hanno una quantità di moto compresa in un volume  $V_{\text{moto}}$ , possiamo calcolare il numero totale di stati disponibili. Ad esempio, il numero di stati con quantità di moto di modulo compreso tra  $p$  e  $p + dp$  è dato dal volume di un guscio sferico nello spazio delle quantità di moto:  $V_{\text{moto}} = 4\pi p^2 dp$ .

## 1.2 Equilibrio di Ionizzazione e l'Equazione di Saha

Utilizziamo la meccanica statistica per determinare il grado di ionizzazione di un gas in funzione della temperatura. Consideriamo la reazione di ionizzazione reversibile per un atomo  $A$  all'interno di un volume  $V$ :



La condizione di equilibrio chimico si esprime attraverso le **funzioni di partizione totali** ( $Z$ ) e i numeri totali di particelle ( $N$ ). La legge dell'azione di massa assume la forma:

$$\frac{N_i N_e}{N_a} = \frac{Z_i Z_e}{Z_a} \quad (1)$$

dove gli indici  $i, e, a$  si riferiscono rispettivamente a ioni, elettroni liberi e atomi neutri. La funzione di partizione totale per una singola particella è il prodotto della parte traslazionale e della parte interna:  $Z = Z_{\text{trans}} \cdot Z_{\text{int}}$ .

La funzione di partizione traslazionale per una particella di massa  $m$  in un volume  $V$  si ottiene integrando su tutti gli stati di impulso possibili:

$$Z_{\text{trans}} = \frac{V}{h^3} \int e^{-\frac{p^2}{2mk_B T}} d^3p = \frac{V}{h^3} 4\pi \int_0^\infty p^2 e^{-\frac{p^2}{2mk_B T}} dp$$

L'integrale è di tipo Gaussiano:

$$\int_0^\infty p^2 e^{-\alpha p^2} dp = \frac{\sqrt{\pi}}{4\alpha^{3/2}}, \quad \text{con } \alpha = \frac{1}{2m_e k_B T}$$

Sostituendo  $\alpha$ , il risultato dell'integrale è  $\frac{\sqrt{\pi}}{4} (2m_e k_B T)^{3/2}$ . Sostituendo, otteniamo:

$$Z_{\text{trans}} = V \left( \frac{2\pi m k_B T}{h^2} \right)^{3/2}$$

Notiamo che  $Z_{\text{trans}}$  è proporzionale al volume  $V$ . Per le funzioni di partizione interne ( $Z_{\text{int}}$ ), consideriamo i pesi statistici ( $g$ ) e l'energia di ionizzazione  $\chi$ :

- Per l'elettrone libero:  $Z_{\text{int},e} = 2$  (degenerazione di spin  $2s + 1$ ).
- Per l'atomo e lo ione:  $Z_{\text{int},a} = g_a$  e  $Z_{\text{int},i} = g_i e^{-\frac{\chi}{k_B T}}$  (ponendo lo zero dell'energia allo stato fondamentale dell'atomo neutro).

Sostituendo le espressioni di  $Z$  nell'equazione di equilibrio:

$$\frac{N_i N_e}{N_a} = \frac{\left[ V \left( \frac{2\pi m_i k_B T}{h^2} \right)^{3/2} g_i e^{-\frac{\chi}{k_B T}} \right] \cdot \left[ V \left( \frac{2\pi m_e k_B T}{h^2} \right)^{3/2} 2 \right]}{\left[ V \left( \frac{2\pi m_a k_B T}{h^2} \right)^{3/2} g_a \right]}$$

Poiché la massa dell'atomo è circa uguale a quella dello ione ( $m_a \approx m_i$ ), i loro termini traslazionali si elidono. Semplificando i volumi ( $V^2/V = V$ ), otteniamo:

$$\frac{N_i N_e}{N_a} = V \cdot \frac{2g_i}{g_a} \left( \frac{2\pi m_e k_B T}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{\chi}{k_B T}}$$

Per passare alle densità numeriche, usiamo le relazioni  $n = N/V$ . Sostituendo  $N_x = n_x V$  nel membro di sinistra:

$$\frac{(n_i V)(n_e V)}{n_a V} = \frac{n_i n_e}{n_a} V$$

Uguagliando le due espressioni, il fattore  $V$  si cancella da entrambi i lati, restituendo l'**Equazione di Saha** (2) corretta e dimensionalmente consistente:

$$\frac{n_i n_e}{n_a} = \frac{2g_i}{g_a} \frac{(2\pi m_e k_B T)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{\chi}{k_B T}} \quad (2)$$

Assumendo un plasma con singola ionizzazione,  $n_i = n_e$ . La densità di atomi neutri  $n_a$  può essere approssimata dalla legge dei gas perfetti per basse ionizzazioni,  $P \approx n_a k_B T$ . Sostituendo si ottiene:

$$\frac{n_e^2}{P/(k_B T)} \approx \frac{(2\pi m_e k_B T)^{3/2}}{h^3} e^{-\frac{\chi}{k_B T}}$$

Da cui si ricava la densità elettronica  $n_e$ :

$$n_e \approx \left[ \frac{P}{k_B T} \frac{(2\pi m_e k_B T)^{3/2}}{h^3} \exp \left( -\frac{\chi}{k_B T} \right) \right]^{1/2}$$

Il grado di ionizzazione è  $\rho = n_e/n_{\text{totale}} \approx n_e/n_a$ . In unità pratiche, valutando le costanti fisiche, si ottiene la formula approssimata:

$$\rho \approx 5.74 \times 10^{-4} \frac{(T[\text{K}])^{5/4}}{(P[\text{atm}])^{1/2}} \cdot \exp \left( -5.8 \times 10^3 \frac{\chi[\text{eV}]}{T[\text{K}]} \right)$$

Questa relazione evidenzia come la ionizzazione sia favorita da alte temperature (esponenziale dominante) e basse pressioni.

### 1.3 Distribuzione delle Velocità nei Plasmi

In un plasma in equilibrio termodinamico, la distribuzione delle velocità delle particelle (sia ioni che elettroni) è descritta dalla **distribuzione di Maxwell-Boltzmann** (3). La funzione di distribuzione  $f(\vec{v})$  fornisce la densità di particelle nello spazio delle velocità.

$$f(\vec{v}) = n \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{mv^2}{2k_B T} \right) \quad (3)$$

dove  $m$  e  $T$  sono la massa e la temperatura della specie di particelle considerata. La funzione è normalizzata in modo che la sua integrazione su tutto lo spazio delle velocità restituisca la densità numerica totale  $n$ :

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(\vec{v}) d^3v = n$$

### 1.3.1 Energia Cinetica Media

L'energia cinetica media di una particella può essere calcolata come valore di aspettazione sull'intera distribuzione:

$$\langle E_k \rangle = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} m v^2 f(\vec{v}) d^3v$$

Sostituendo  $f(\vec{v})$  (3) e risolvendo l'integrale (che è una variante dell'integrale Gaussiano - Vedi D),

$$\begin{aligned} \langle E_k \rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} m v^2 \left[ \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m v^2}{2 k_B T} \right) \right] d^3v = \\ &= \frac{1}{2} m \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \int_{\mathbb{R}^3} v^2 \exp \left( -\frac{m v^2}{2 k_B T} \right) d^3v = \\ &= \frac{1}{2} m \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \int_0^\infty v^2 \exp \left( -\frac{m v^2}{2 k_B T} \right) 4\pi v^2 dv = \end{aligned}$$

quest'ultimo integrale corrisponde ad un integrale Gaussiano pertanto posso risolverlo sostituendo  $\alpha = \frac{m}{2k_B T}$

$$\begin{aligned} &= 2\pi m \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^{3/2} \frac{3}{8\alpha^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \\ &= \frac{3}{4} \frac{m}{\alpha} = \frac{3}{2} k_B T \end{aligned}$$

si ottiene il risultato fondamentale del teorema di equipartizione dell'energia per un gas monoatomico:

$$\langle E_k \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

Questo risultato vale per ogni specie di particelle (ioni ed elettroni), ciascuna con la propria temperatura.

**Nota bene 1.5** *In fisica dei plasmi, è comune misurare la temperatura in unità di energia, tramite l'electronvolt (eV), dove  $1 \text{ eV} \approx 11\,604 \text{ K}$ .*

## 1.4 Schermatura di Debye

Una delle proprietà fondamentali di un plasma è la sua capacità di **schermare** i potenziali elettrostatici. Se una carica esterna viene inserita in un plasma, le cariche libere si ridistribuiscono per neutralizzarne l'effetto su lunghe distanze.

Poiché gli elettroni sono molto più leggeri degli ioni ( $m_e \ll m_i$ ), la loro risposta è molto più rapida. In prima approssimazione, possiamo considerare gli ioni come uno sfondo di carica positiva, fisso e uniforme, mentre gli elettroni si muovono per raggiungere l'equilibrio.

### 1.4.1 Il Modello dello Schermo di Debye

Consideriamo un plasma uniforme e inseriamo una lastra piana carica con densità superficiale  $\sigma$  in  $x = 0$ . Lontano dalla lastra, il plasma è neutro:  $n_{e0} = n_{i0} = n_0$ .

La densità di carica totale  $\rho(x)$  è data da:

$$\rho(x) = en_i(x) - en_e(x)$$

Assumiamo che gli ioni siano uno sfondo immobile,  $n_i(x) = n_0$ . La densità degli elettroni  $n_e(x)$  varia in risposta al potenziale elettrostatico  $\varphi(x)$  secondo la **relazione di Boltzmann**:

$$n_e(x) = n_0 e^{\frac{e\varphi(x)}{k_B T_e}}$$

Il segno positivo nell'esponentiale indica che gli elettroni (carica  $-e$ ) sono attratti nelle regioni a potenziale positivo ( $\varphi > 0$ ).

### 1.4.2 L'Equazione di Poisson-Boltzmann

Il potenziale  $\varphi(x)$  e la densità di carica  $\rho(x)$  sono legati dall'**equazione di Poisson**:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\varepsilon_0} = -\frac{en_0}{\varepsilon_0} \left(1 - e^{\frac{e\varphi(x)}{k_B T_e}}\right) \quad (4)$$

Questa è un'equazione non lineare. Per risolverla, assumiamo che l'energia potenziale elettrostatica sia piccola rispetto all'energia termica degli elettroni, ovvero  $e\varphi(x) \ll k_B T_e$ . In questa approssimazione, possiamo linearizzare l'esponentiale:  $e^X \approx 1 + X$ .

$$e^{\frac{e\varphi(x)}{k_B T_e}} \approx 1 + \frac{e\varphi(x)}{k_B T_e}$$

Sostituendo, l'equazione di Poisson diventa:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} \approx -\frac{en_0}{\varepsilon_0} \left(1 - \left(1 + \frac{e\varphi(x)}{k_B T_e}\right)\right) = \frac{e^2 n_0}{\varepsilon_0 k_B T_e} \varphi(x)$$

Definiamo la **lunghezza di Debye**,  $\lambda_D$ , come:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 k_B T_e}{e^2 n_0}} \quad (5)$$

Questa grandezza rappresenta la scala di distanza caratteristica su cui avviene la schermatura. L'equazione linearizzata si scrive allora:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{1}{\lambda_D^2} \varphi(x) = 0 \quad (\text{per } x \neq 0)$$

### 1.4.3 Soluzione e Significato Fisico

L'equazione caratteristica associata è:

$$r^2 - \frac{1}{\lambda_D^2} = 0$$



Le radici sono:

$$r = \pm \frac{1}{\lambda_D}$$

La soluzione generale dell'equazione omogenea è  $\varphi(x) = Ae^{x/\lambda_D} + Be^{-x/\lambda_D}$ .

Imponiamo la condizione all'infinito:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$$

Il termine  $e^{\frac{x}{\lambda_D}}$  diverge per  $x \rightarrow +\infty$ . Affinché il limite sia finito e nullo, dobbiamo imporre  $A = 0$ . La soluzione per  $x > 0$  diventa:

$$\varphi(x) = Be^{-\frac{x}{\lambda_D}}$$

Imponiamo la condizione a meno infinito:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0$$

Il termine  $e^{-\frac{x}{\lambda_D}}$  diverge per  $x \rightarrow -\infty$  (poiché l'esponente diventa positivo e grande). Dobbiamo quindi imporre  $B = 0$ . La soluzione per  $x < 0$  diventa:

$$\varphi(x) = Ce^{\frac{x}{\lambda_D}}$$

Solitamente si impone la continuità del potenziale nell'origine, ovvero  $\varphi(0^+) = \varphi(0^-) = \varphi_0$ . In tal caso, otteniamo  $B = C = \varphi_0$ .

Le due soluzioni possono essere unificate utilizzando la funzione valore assoluto  $|x|$ :

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_0 e^{-\frac{x}{\lambda_D}} & \text{se } x > 0 \\ \varphi_0 e^{\frac{x}{\lambda_D}} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Che si scrive in forma compatta come:

$$\varphi(x) = \varphi_0 e^{-\frac{|x|}{\lambda_D}}$$

La costante  $\varphi_0$  si determina integrando l'equazione di Poisson completa (4) (con la carica  $\sigma$  in  $x = 0$ ) in un intorno infinitesimo dell'origine. Questo fornisce la condizione di salto sul campo elettrico, che porta a  $\varphi_0 = \frac{\sigma \lambda_D}{2\varepsilon_0}$ . La soluzione finale è:

$$\varphi(x) = \frac{\sigma \lambda_D}{2\varepsilon_0} e^{-|x|/\lambda_D}$$

Questo risultato mostra che il potenziale generato dalla carica esterna non si estende all'infinito, ma decade esponenzialmente su una scala di distanza pari alla lunghezza di Debye. Il plasma ha efficacemente "schermato" la carica.

## 1.5 I Criteri per un Buon Plasma

Perché un gas ionizzato possa essere considerato un plasma e mostrare un comportamento collettivo, devono essere soddisfatte tre condizioni fondamentali.

**Primo Criterio: Quasi-Neutralità su Grande Scala** Il sistema deve essere molto più grande della lunghezza di Debye (5),  $L \gg \lambda_D$ . Questo assicura che gli effetti di bordo siano trascurabili e che il sistema sia globalmente neutro, sebbene possano esistere fluttuazioni di carica locali sulla scala di  $\lambda_D$ .

**Secondo Criterio: Schermatura Collettiva** Il numero di particelle contenute in una sfera di raggio  $\lambda_D$  (la **Sfera di Debye**),  $N_D$ , deve essere molto maggiore di 1.

$$N_D = n_0 \cdot V_{\text{sfera}} = n_0 \cdot \frac{4}{3}\pi\lambda_D^3 \gg 1 \quad (6)$$

Se  $N_D \leq 1$ , l'interazione sarebbe dominata da collisioni binarie tra singole particelle e il concetto statistico di schermatura perderebbe di significato.

**Terzo Criterio: Dominanza del Comportamento Collettivo** Le interazioni collettive, come le oscillazioni di plasma, devono avvenire su una scala temporale molto più breve del tempo medio tra le collisioni,  $\tau$ . La frequenza caratteristica delle oscillazioni degli elettroni è la **frequenza di plasma**:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{n_0 e^2}{m_e \varepsilon_0}} \quad (7)$$

Il criterio richiede che una particella compia molte oscillazioni prima di subire una collisione che ne smorzi il moto:

$$\omega_p \tau \gg 1$$

Quando queste tre condizioni sono soddisfatte, il gas ionizzato esibisce il ricco e complesso comportamento collettivo che definisce lo stato di plasma.

## 1.6 Esercizi

**Esercizio 1.6 (Criteri per definire un plasma)** In un grafico bi-logaritmico, avente per assi la densità elettronica  $n_e$  nell'intervallo da  $10^6$  a  $10^{25}$  particelle/ $m^3$  e la temperatura  $T$  nell'intervallo da 0.01 a  $10^5$  eV, rappresentare le linee su cui sono costanti la lunghezza di Debye  $\lambda_D$  e il numero  $N_D$  di particelle nella sfera di Debye.

Sullo stesso grafico, posizionare poi i seguenti punti, per i quali  $n_e$  e  $T$  sono espressi in  $m^{-3}$  ed eV, rispettivamente:

1. Un tipico reattore a fusione:  $n_e = 10^{21}$ ,  $T = 10^4$
2. Ionosfera:  $n_e = 10^{11}$ ,  $T = 0.05$
3. Scarica a bagliore:  $n_e = 10^{15}$ ,  $T = 2$
4. Fiamma:  $n_e = 10^{14}$ ,  $T = 0.1$
5. Plasma al cesio:  $n_e = 10^{17}$ ,  $T = 0.2$
6. Spazio interplanetario:  $n_e = 10^6$ ,  $T = 0.01$

Per ciascuno di questi esempi, verificare che si tratta effettivamente di plasm.

**Soluzione 1.6.1** Un gas ionizzato, per essere considerato un plasma, deve soddisfare tre condizioni principali.

**Definizione di Plasma e Condizioni** Un plasma è un gas ionizzato in cui le interazioni elettromagnetiche a lungo raggio tra le particelle cariche (elettroni e ioni) dominano sul comportamento individuale, portando a fenomeni collettivi. Affinché un gas ionizzato sia classificato come plasma:

1. **Condizione di quasi-neutralità:** La dimensione caratteristica del sistema,  $L$ , deve essere molto maggiore della lunghezza di Debye,  $L \gg \lambda_D$ .
2. **Condizione di comportamento collettivo:** Il numero di particelle contenute nella sfera di Debye deve essere molto maggiore di 1. Questo numero, indicato con  $N_D$ , assicura che l'effetto di schermaggio sia statistico e continuo (interazione simultanea con molte particelle). La condizione si scrive:

$$N_D = \frac{4}{3}\pi\lambda_D^3 n_e \gg 1$$

3. **Condizione temporale:** La frequenza delle oscillazioni di plasma,  $\omega_p$ , deve essere molto maggiore della frequenza delle collisioni neutre.

In questo esercizio verificheremo la seconda condizione. La **lunghezza di Debye**,  $\lambda_D$ , è definita come:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 T_e}{n_e e^2}}$$

dove  $T_e$  è qui espressa in unità di energia (Joule o eV con conversione opportuna). Poiché il testo fornisce  $T$  in eV, la formula pratica (omettendo  $k_B$  esplicitamente poiché assorbito in  $T$ ) è  $\lambda_D = \sqrt{\varepsilon_0 T / (n_e e)}$ .

**Rappresentazione sul Grafico Bilogaritmico** Analizziamo le dipendenze da  $n_e$  e  $T$  in scala logaritmica.

- **Linee a  $\lambda_D$  costante:** Dalla definizione,  $T \propto n_e \lambda_D^2$ . Per  $\lambda_D$  fisso:

$$\log(T) = \log(n_e) + \text{costante}$$

Questa è una retta con pendenza (coefficiente angolare) **1**.

- **Linee a  $N_D$  costante:** Sostituendo  $\lambda_D \propto (T/n_e)^{1/2}$  in  $N_D \propto n_e \lambda_D^3$ :

$$N_D \propto n_e \left( \frac{T}{n_e} \right)^{3/2} = T^{3/2} n_e^{-1/2}$$

Per  $N_D$  costante, abbiamo  $T^{3/2} \propto n_e^{1/2} \implies T \propto n_e^{1/3}$ . Passando ai logaritmi:

$$\log(T) = \frac{1}{3} \log(n_e) + \text{costante}$$

Questa è una retta con pendenza **1/3**.

**Verifica degli Esempi** Calcoliamo  $\lambda_D$  e  $N_D$  (approssimando  $\varepsilon_0 \approx 8.85 \times 10^{-12}$  F/m e  $e \approx 1.6 \times 10^{-19}$  C, ricordando di convertire eV in Joule per il calcolo o usare la formula con  $T_{\text{eV}}$ ).

- **Reattore a fusione** ( $n_e = 10^{21}$ ,  $T = 10^4$ ):  $\lambda_D \approx 2.3 \times 10^{-5}$  m;  $N_D \approx 5 \times 10^7 \gg 1$ . (Plasma)
- **Ionosfera** ( $n_e = 10^{11}$ ,  $T = 0.05$ ):  $\lambda_D \approx 5.3 \times 10^{-3}$  m;  $N_D \approx 6 \times 10^4 \gg 1$ . (Plasma)
- **Scarica a bagliore** ( $n_e = 10^{15}$ ,  $T = 2$ ):  $\lambda_D \approx 3.3 \times 10^{-4}$  m;  $N_D \approx 1.5 \times 10^5 \gg 1$ . (Plasma)
- **Fiamma** ( $n_e = 10^{14}$ ,  $T = 0.1$ ):  $\lambda_D \approx 2.3 \times 10^{-4}$  m;  $N_D \approx 5 \times 10^3 \gg 1$ . (Plasma, anche se debolmente ionizzato)
- **Plasma al cesio** ( $n_e = 10^{17}$ ,  $T = 0.2$ ):  $\lambda_D \approx 1.0 \times 10^{-5}$  m;  $N_D \approx 5 \times 10^2 \gg 1$ . (Plasma)
- **Spazio interplanetario** ( $n_e = 10^6$ ,  $T = 0.01$ ):  $\lambda_D \approx 0.74$  m;  $N_D \approx 1.7 \times 10^6 \gg 1$ . (Plasma)

Tutti gli esempi forniti soddisfano la condizione  $N_D \gg 1$ .

**Grafico Riassuntivo** La Figura 1 mostra le rette con pendenza 1 e 1/3 e la posizione dei punti calcolati.

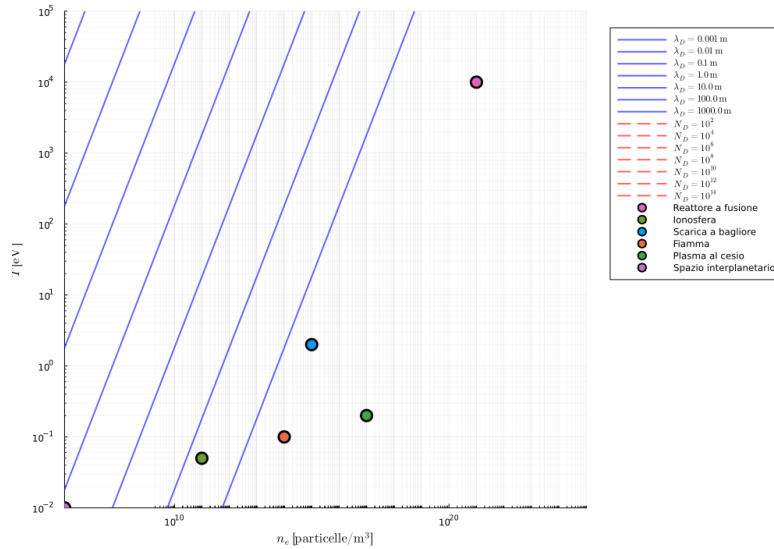


Figura 1: Diagramma log-log  $T$  vs  $n_e$ . Le linee tratteggiate indicano  $\lambda_D$  costante e  $N_D$  costante.

**Esercizio 1.7 (Schermo di Debye in tre dimensioni)** Si consideri una carica  $q$  immersa in un plasma omogeneo ed indefinito fatto di specie cariche individuate dall'indice  $\alpha$ . Ciascuna specie ha carica  $q_\alpha$  e densità e temperatura di equilibrio pari a  $n_{0\alpha}$  e  $T_{0\alpha}$ , rispettivamente.

1. Seguendo la procedura vista durante le lezioni per ottenere lo schermo di Debye nel caso dell'esempio uno-dimensionale, mostrare che, per questo caso, l'equazione di Poisson per il potenziale  $\phi(r)$  è:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{q \delta(r)}{\varepsilon_0} + \frac{\phi(r)}{\lambda_D^2} \quad (8)$$

dove il simbolo  $\delta$  indica la funzione delta di Dirac e

$$\frac{1}{\lambda_D^2} = \sum_{\alpha} \frac{1}{\lambda_{D\alpha}^2} = \sum_{\alpha} \frac{q_{\alpha}^2 n_{0\alpha}}{\varepsilon_0 T_{0\alpha}} \quad (9)$$

indica l'inverso del quadrato della lunghezza di Debye.

2. Usando coordinate sferiche, si consideri l'equazione (8) nella regione  $r > 0$ . Usando l'espressione dell'operatore di Laplace in tali coordinate, si cerchi una soluzione dell'equazione (8) del tipo:

$$\phi(r) = \frac{g(r)}{r}$$

dove  $g(r)$  è una funzione da determinare. Si verifichi, per sostituzione nell'equazione (8), che  $g(r)$  soddisfa l'equazione:

$$\frac{d^2 g}{dr^2} = \frac{g(r)}{\lambda_D^2} \quad (10)$$

Si mostri quindi che la soluzione generale fisicamente significativa dell'equazione (8) per  $r > 0$  è:

$$\phi(r) = A \frac{e^{-r/\lambda_D}}{r} \quad (11)$$

dove  $A$  è una costante arbitraria.

3. Si verifichi che il campo elettrico  $\mathbf{E}$  associato al potenziale  $\phi(r)$  determinato in precedenza ha espressione:

$$\mathbf{E} = \frac{A}{r^2} e^{-r/\lambda_D} \left( 1 + \frac{r}{\lambda_D} \right) \hat{r} \quad (12)$$

dove  $\hat{r}$  è il versore radiale.

4. Applicando il teorema di Gauss per l'elettrostatica ad una sfera centrata in  $r = 0$ , ed usando l'espressione per il campo elettrico sopra determinata, mostrare che:

$$A = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \quad (13)$$

e, dunque:

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^{-r/\lambda_D}}{r} \quad (14)$$

### **Soluzione 1.7.1 1. Derivazione dell'equazione schermata**

Consideriamo l'equazione di Poisson completa:

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = -\frac{\rho_{tot}}{\varepsilon_0} = -\frac{q\delta(\mathbf{r}) + \rho_{plasma}}{\varepsilon_0}$$

Assumendo che le particelle del plasma seguano la distribuzione di Boltzmann  $n_\alpha(\mathbf{r}) = n_{0\alpha} \exp(-q_\alpha \phi / k_B T_\alpha)$  e linearizzando per piccoli potenziali ( $|q_\alpha \phi| \ll k_B T_\alpha$ ), la densità di carica indotta è:

$$\rho_{plasma} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} \approx \underbrace{\sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{0\alpha}}_0 - \left( \sum_{\alpha} \frac{n_{0\alpha} q_{\alpha}^2}{k_B T_{\alpha}} \right) \phi$$

Definendo  $1/\lambda_D^2 = \sum_{\alpha} (n_{0\alpha} q_{\alpha}^2) / (\varepsilon_0 k_B T_{\alpha})$ , l'equazione diventa quella richiesta:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{\lambda_D^2} \phi = -\frac{q}{\varepsilon_0} \delta(\mathbf{r})$$

## 2. Soluzione in coordinate sferiche

Per  $r > 0$ , la  $\delta(\mathbf{r})$  è nulla. Il Laplaciano radiale di  $\phi = g(r)/r$  è:

$$\nabla^2 \left( \frac{g}{r} \right) = \frac{1}{r} \frac{d^2 g}{dr^2}$$

Sostituendo nell'equazione omogenea ( $\nabla^2 \phi = \phi / \lambda_D^2$ ):

$$\frac{1}{r} g'' = \frac{1}{\lambda_D^2} \frac{g}{r} \implies g''(r) - \frac{1}{\lambda_D^2} g(r) = 0$$

La soluzione generale è  $g(r) = A e^{-r/\lambda_D} + B e^{+r/\lambda_D}$ . Poiché il potenziale deve annullarsi all'infinito ( $\phi \rightarrow 0$  per  $r \rightarrow \infty$ ), imponiamo  $B = 0$ . Quindi:

$$\phi(r) = A \frac{e^{-r/\lambda_D}}{r}$$

## 3. Calcolo del campo elettrico

Il campo elettrico è dato da  $\mathbf{E} = -\nabla \phi$ . In coordinate sferiche:

$$\mathbf{E} = -\frac{d\phi}{dr} \hat{r} = -A \frac{d}{dr} \left( \frac{e^{-r/\lambda_D}}{r} \right) \hat{r}$$

Eseguendo la derivata del prodotto:

$$\frac{d}{dr} \left( r^{-1} e^{-r/\lambda_D} \right) = -r^{-2} e^{-r/\lambda_D} - r^{-1} \frac{1}{\lambda_D} e^{-r/\lambda_D} = -\frac{e^{-r/\lambda_D}}{r^2} \left( 1 + \frac{r}{\lambda_D} \right)$$

Sostituendo (e notando che i segni meno si cancellano):

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = A \frac{e^{-r/\lambda_D}}{r^2} \left( 1 + \frac{r}{\lambda_D} \right) \hat{r}$$

## 4. Determinazione della costante A

Per trovare A, dobbiamo analizzare il comportamento del campo (o del potenziale) molto vicino alla carica q, ovvero per  $r \rightarrow 0$ . A distanze molto minori della lunghezza di Debye ( $r \ll \lambda_D$ ), l'effetto di schermaggio del plasma è trascurabile e il campo deve coincidere con il campo di Coulomb nel vuoto generato dalla sola carica q.

Calcoliamo il limite del campo  $\mathbf{E}$  per  $r \rightarrow 0$ :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \mathbf{E} = \lim_{r \rightarrow 0} \left[ \frac{A}{r^2} \underbrace{e^{-r/\lambda_D}}_{\rightarrow 1} \left( 1 + \underbrace{\frac{r}{\lambda_D}}_{\rightarrow 0} \right) \right] \hat{r} \approx \frac{A}{r^2} \hat{r}$$

Confrontando questo risultato con la legge di Coulomb  $\mathbf{E}_{Coulomb} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$ , otteniamo l'uguaglianza:

$$A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}$$

## 2 Descrizione a Singola Particella: Moto delle Cariche in un Plasma

### 2.1 Moto di una Particella Carica in Campi Magnetici

Lo studio del moto di una singola particella carica in un campo magnetico è fondamentale per la comprensione della fisica dei plasmi, specialmente quando si considerano campi non uniformi e gli effetti delle collisioni, che qui inizialmente trascureremo per semplicità. L'obiettivo è risolvere l'equazione del moto governata dalla forza di Lorentz:

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = q(\bar{v} \times \bar{B})$$

La sfida principale risiede nel quantificare l'effetto di un campo magnetico non uniforme sul moto della particella.

#### 2.1.1 Conservazione dell'Energia Cinetica

Iniziamo con l'assunzione di campi magnetici statici, ovvero  $\frac{\partial \bar{B}}{\partial t} = 0$ . In questa condizione, la forza di Lorentz non compie lavoro, poiché è sempre perpendicolare alla velocità della particella. Di conseguenza, l'energia cinetica della particella si conserva. Questo può essere dimostrato proiettando l'equazione del moto sulla velocità  $\bar{v}$ :

$$\bar{v} \cdot \left( m \frac{d\bar{v}}{dt} \right) = \bar{v} \cdot (q(\bar{v} \times \bar{B}))$$

Il termine a sinistra può essere riscritto come la derivata temporale dell'energia cinetica, mentre il termine a destra è nullo, essendo il prodotto scalare tra il vettore velocità  $\bar{v}$  e il vettore  $\bar{v} \times \bar{B}$ , che è per definizione ortogonale a  $\bar{v}$ . Otteniamo quindi:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = 0$$

Questo conferma che l'energia cinetica, e quindi il modulo della velocità, rimane costante.

Il caso più semplice è quello di un campo magnetico uniforme e costante. Se la velocità iniziale è parallela alle linee di campo, il moto è rettilineo uniforme. Se la velocità è perpendicolare, il moto è circolare uniforme, caratterizzato dal **raggio di Larmor**  $r_L = \frac{mv_\perp}{|q|B}$  e dalla **frequenza di ciclotrone** (o di Larmor)  $\omega_L = \frac{|q|B}{m}$ .

### 2.1.2 Moto di Deriva in Presenza di una Forza Esterna

Generalizziamo ora il problema considerando un campo magnetico  $\vec{B}$  uniforme a cui si sovrappone una forza esterna costante  $\vec{F}$ . Si assume che tale forza sia sufficientemente debole da perturbare il moto di girazione senza distruggere il confinamento della particella.

L'intuizione fisica suggerisce che la traiettoria circolare venga modificata. Immaginiamo un campo magnetico uscente dal piano e una forza  $\vec{F}$  diretta verso l'alto. Durante la semicirconferenza superiore del suo moto, la particella viene accelerata dalla forza  $\vec{F}$ , aumentando la sua velocità e, di conseguenza, il suo raggio di Larmor istantaneo. Nella semicirconferenza inferiore, la forza si oppone al moto, riducendo la velocità e il raggio di Larmor. L'effetto netto è che la traiettoria non si chiude: dopo ogni ciclo di girazione, la particella si ritrova spostata lateralmente. Questo moto coerente e lento del centro di girazione è chiamato **moto di deriva**.

Per calcolarne la velocità, risolviamo l'equazione completa:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{v} \times \vec{B}) + \vec{F}$$

La componente della forza parallela al campo magnetico,  $F_{\parallel}$ , causa semplicemente un moto uniformemente accelerato in quella direzione,  $v_{\parallel}(t) = v_{\parallel,0} + \frac{F_{\parallel}}{m}t$ , che non altera la natura della girazione.

La dinamica interessante avviene nel piano perpendicolare. Scomponiamo la velocità perpendicolare  $\vec{v}_{\perp}$  in due contributi: una componente di girazione rapida,  $\vec{v}_L$ , e una componente di deriva lenta e costante,  $\vec{v}_D$ .

$$\vec{v}_{\perp} = \vec{v}_L + \vec{v}_D$$

Le ipotesi fondamentali su queste componenti sono:

1. La velocità di deriva è costante in prima approssimazione:  $\frac{d\vec{v}_D}{dt} \approx 0$ .
2. La velocità di Larmor oscilla rapidamente e la sua media su un periodo di girazione è nulla:  $\langle \vec{v}_L \rangle = 0$ .

Sostituendo la velocità scomposta nell'equazione del moto perpendicolare e mediando su un periodo di Larmor, otteniamo:

$$\left\langle m \frac{d\vec{v}_L}{dt} \right\rangle + \left\langle m \frac{d\vec{v}_D}{dt} \right\rangle = \langle q(\vec{v}_L \times \vec{B}) \rangle + \langle q(\vec{v}_D \times \vec{B}) \rangle + \langle \vec{F}_{\perp} \rangle$$

I termini medi che contengono  $\vec{v}_L$  o la sua derivata si annullano, e dato che  $\vec{v}_D$ ,  $\vec{B}$  e  $\vec{F}_{\perp}$  sono costanti, l'equazione si semplifica drasticamente:

$$0 = q(\vec{v}_D \times \vec{B}) + \vec{F}_{\perp}$$

Questa è un'equazione vettoriale per l'incognita  $\vec{v}_D$ . Per risolverla, eseguiamo un prodotto vettoriale a destra per  $\vec{B}$ :

$$0 = (q\vec{v}_D \times \vec{B} + \vec{F}_{\perp}) \times \vec{B} = q(\vec{v}_D \times \vec{B}) \times \vec{B} + \vec{F}_{\perp} \times \vec{B}$$

Utilizzando la proprietà del doppio prodotto vettoriale  $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$  e notando che  $\vec{v}_D$  è perpendicolare a  $\vec{B}$  (quindi  $\vec{v}_D \cdot \vec{B} = 0$ ), si ottiene:

$$0 = q((\vec{B} \cdot \vec{v}_D)\vec{B} - B^2\vec{v}_D) + \vec{F}_{\perp} \times \vec{B} = -qB^2\vec{v}_D + \vec{F}_{\perp} \times \vec{B}$$



Da cui si ricava la velocità di deriva:

$$\bar{v}_D = \frac{\bar{F}_\perp \times \bar{B}}{qB^2}$$

Un'importante conseguenza fisica emerge a seconda della natura della forza  $\bar{F}$ .

- Se  $\bar{F}$  è una forza elettrica,  $\bar{F} = q\bar{E}$ , la velocità di deriva diventa  $\bar{v}_{E \times B} = \frac{\bar{E} \times \bar{B}}{B^2}$ . Questa deriva è **indipendente dalla carica e dalla massa** della particella, causando un moto d'insieme dell'intero plasma.
- Se  $\bar{F}$  è una forza che dipende dalla massa, come la gravità  $\bar{F} = m\bar{g}$ , la velocità di deriva  $\bar{v}_g = \frac{m\bar{g} \times \bar{B}}{qB^2}$  dipende dal segno della carica  $q$ . Ioni ed elettroni deriveranno in direzioni opposte, generando una **corrente** nel plasma.

**Origine fisica della deriva** Supponiamo ora che il campo elettrico vari e che cresca nel tempo. In questo caso uno ione non tornerà nel punto di partenza e via via si avrà uno spostamento verso l'alto di esso. Al contrario di quanto visto prima lo spostamento sarà sia verso l'alto che verso destra. Questa deriva è detta deriva di polarizzazione.

Vogliamo ora capire la natura della forza causata dalla presenza delle disuniformità dei campi. Iniziamo a chiarire il significato fisico di queste forze.

L'espressione

$$\bar{F} = -mv_{\text{gc},\parallel}^2 (\hat{b} \cdot \nabla) \hat{b}$$

sarebbe nulla se la linea di campo non avesse una curvatura. Se fosse dritta il vettore non cambierebbe lungo  $S$ . Possiamo quindi intuire che questo termine di forza è legato alla curvatura della linea di campo. Per chiarirne il significato possiamo supporre che  $\hat{b} = \hat{\phi}$ :

$$\hat{b} \cdot \nabla = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \implies (\hat{b} \cdot \nabla) \hat{b} = \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\phi}}{\partial \phi} = -\frac{1}{r} \hat{u}_r$$

dove  $\hat{u}_r$  è il versore radiale. Ora considero l'espressione:

$$\bar{F} = -mv_{\text{gc},\parallel}^2 \left( -\frac{1}{r} \hat{u}_r \right) = \frac{m}{r} v_{\text{gc},\parallel}^2 \hat{u}_r$$

questa forza è diretta lungo il raggio ed è presente solo se la linea di campo curva. Questo termine rappresenta una forza centrifuga e il suo modulo è:

$$|\bar{F}| = m \frac{v_{\text{gc}}^2}{r}$$

Ora prendiamo in considerazione il termine:

$$q \langle \bar{v}_L \times (\bar{r}_L \cdot \nabla) \bar{B} \rangle$$

Supponiamo ora che localmente ci sia una linea di campo entrante e uno ione che attua la girazione attorno ad essa. Si avrà un raggio e una velocità di Larmor, posso quindi scrivere il moto della particella come

$$\begin{aligned} \bar{r}_L &= r_L (\cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}) \\ \bar{v}_L &= \frac{d\bar{r}_L}{dt} = r_L \omega_L (-\sin(\omega_L t) \hat{i} + \cos(\omega_L t) \hat{j}) \end{aligned}$$

Calcoliamo ora la forza incognita. Poiché  $\langle \sin^2(\omega_L t) \rangle = \langle \cos^2(\omega_L t) \rangle = 1/2$ , e con  $\nabla \cdot \bar{B} = 0$ , si ottiene:

$$\begin{aligned}\bar{F} &= q \frac{r_L^2 \omega_L}{2} \left[ \left( \frac{\partial B_z}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial B_z}{\partial y} \hat{j} \right) - \hat{k} \left( \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) \right] \\ &= q \frac{r_L^2 \omega_L}{2} \left[ \frac{\partial B_z}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial B_z}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \hat{k} \right] = -\frac{q r_L^2 \omega_L}{2} \nabla |\bar{B}| \end{aligned}$$

dove ora è possibile definire

$$\mu = \frac{q r_L^2 \omega_L}{2 q B} = q \frac{m^2 v_\perp^2}{q^2 B^2} \frac{|q| B}{2 m B} = \frac{m v_\perp^2}{2 B}$$

che corrisponde al momento magnetico della carica  $q$ .

La forza quindi è presente quando il modulo del campo magnetico varia nello spazio. Questa forza è una forza di tipo repulsivo ed assomiglia ad una forza d'attrito; essa rallenta la particella e impedisce che si avvicini a delle regioni con campo magnetico più intenso.

### 2.1.3 Moto in Campi Magnetici Non Uniformi: L'Approssimazione del Girocentro

Consideriamo ora il caso più complesso di un campo magnetico statico ma spazialmente non uniforme,  $\bar{B}(\bar{x})$ . Assumiamo che il campo vari lentamente, ovvero che sia approssimativamente uniforme sulla scala spaziale del raggio di Larmor e costante sulla scala temporale del periodo di Larmor.

In queste condizioni, il moto può ancora essere visto come una rapida girazione attorno a un punto, il **girocentro**, che a sua volta si muove lentamente. La posizione della particella  $\bar{x}$  può essere scomposta come:

$$\bar{x}(t) = \bar{x}_{gc}(t) + \bar{r}_L(t)$$

dove  $\bar{x}_{gc}$  è la posizione del girocentro e  $\bar{r}_L$  è il vettore del raggio di Larmor.

L'equazione del moto diventa non lineare, poiché il campo  $\bar{B}$  dipende dalla posizione istantanea della particella. Per risolvere il problema, si linearizza il campo magnetico sviluppandolo in serie di Taylor attorno alla posizione del girocentro e troncando al primo ordine:

$$\bar{B}(\bar{x}) \approx \bar{B}(\bar{x}_{gc}) + (\bar{r}_L \cdot \bar{\nabla}) \bar{B}|_{\bar{x}=\bar{x}_{gc}}$$

Anche la velocità viene scomposta come prima in  $\bar{v} = \bar{v}_L + \bar{v}_D$ , dove  $\bar{v}_D$  rappresenta ora la velocità del girocentro. L'equazione del moto diventa:

$$m \frac{d\bar{v}_L}{dt} + m \frac{d\bar{v}_D}{dt} \approx q [(\bar{v}_L + \bar{v}_D) \times (\bar{B}(\bar{x}_{gc}) + (\bar{r}_L \cdot \bar{\nabla}) \bar{B})]$$

Il moto di girazione imperturbato attorno al girocentro è descritto da  $m \frac{d\bar{v}_L}{dt} = q \bar{v}_L \times \bar{B}(\bar{x}_{gc})$ . Sottraendo questo termine dall'equazione completa e mediando sul periodo di Larmor, si eliminano i termini che oscillano rapidamente. Trascurando i termini di ordine superiore (come il prodotto tra la velocità di deriva e il gradiente del campo), si ottiene un'equazione per l'accelerazione del girocentro:

$$m \frac{d\bar{v}_D}{dt} \approx q \langle \bar{v}_L \times [(\bar{r}_L \cdot \bar{\nabla}) \bar{B}] \rangle + q(\bar{v}_D \times \bar{B}(\bar{x}_{gc}))$$

Questa equazione descrive come il girocentro si muove e accelera a causa delle inomogeneità del campo magnetico.

Per analizzare ulteriormente questa dinamica, si può scomporre l'accelerazione del girocentro nelle componenti parallela e perpendicolare al campo magnetico locale, definito dal versore  $\hat{b} = \vec{B}/B$ .

$$m \frac{d\vec{v}_D}{dt} = m \frac{d}{dt} (v_{D,\parallel} \hat{b} + \vec{v}_{D,\perp}) = m \left( \frac{dv_{D,\parallel}}{dt} \hat{b} + v_{D,\parallel} \frac{d\hat{b}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{D,\perp}}{dt} \right)$$

Il primo termine è parallelo al campo, mentre gli altri due sono perpendicolari, poiché la derivata di un versore è sempre ad esso ortogonale. Questa scomposizione è il punto di partenza per derivare importanti fenomeni come la **deriva di gradiente**, la **deriva di curvatura** e l'effetto di **specchio magnetico**.

## 2.2 Confinamento del plasma

Conseguenza dovuta al confinamento di plasma in un campo magnetico dovuta alla presenza di gradienti quando il campo è disuniforme. Se uso delle linee di campo magnetico chiuse mi aspetto che le particelle siano ben confinate.

Come abbiamo visto se il campo non è omogeneo ho una deriva, l'idea di usare solo linee di campo circolare non funziona perché ho una deriva verticale opposta tra ioni ed elettroni ma se separo ioni ed elettroni compare un campo elettrico. Se compare un  $E$  ho una forza e una velocità di deriva associata, questa prende tutto il plasma (quest'ultima non dipende dalla carica) e lo fa sbattere contro la parete. Non si riesce quindi a confinare il plasma.

Allora che cosa si fa? La geometria chiusa non è una cattiva idea, però devo complicare il sistema, aggiungendo una componente poloidale, dando una curvatura alla linea di campo, come la filettatura di una vite. In questo modo si può dimostrare che non c'è più una deriva netta. Ci sono due configurazioni possibili: i tokamak e gli stellaratori.

Ci sono due approcci:

- **Geometria di tipo lineare:** linee di campo aperte con due strozzature. So che in presenza di strozzature c'è una forza che si oppone al gradiente, c'è una forza che cerca di ostacolare che le particelle vadano nella strozzatura. Questo approccio si chiama **Bottiglia magnetica** e la macchina che lo implementa è detta **specchio magnetico** (Vedi Figura 2).
- **Geometria di tipo toroidale:** Linee di campo chiuse se trascuro la deriva dovuto ad un campo magnetico non costante. Basta mettere delle bobine disposte attorno alla superficie del toro.

### 2.2.1 Problemi del Confinamento Toroidale

Voglio determinare il modulo del campo magnetico all'interno di un Toroide. Per fare ciò utilizzo il teorema di Ampere:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 n I \implies B = \frac{\mu_0 n I}{2\pi R}$$

quindi il campo magnetico non è uniforme, dipende da  $R$  (si avrà una forza perpendicolare  $\vec{F}_{\nabla B} = -\vec{\nabla}U = -\mu \vec{\nabla}B$ ). In questo caso si ha anche una velocità di deriva:

$$\vec{v}_{\nabla|\vec{B}|} = -\frac{\mu \vec{\nabla}_\perp |\vec{B}| \times \vec{B}}{qB^2}$$

che è carica-dipendente. In questo caso la deriva quindi sarà verticale. Nel plasma ho sia elettroni che ioni, gli ioni andranno verso l'alto e gli elettroni andranno verso il basso. Una deriva di questo tipo separa le cariche e produce un campo elettrico.

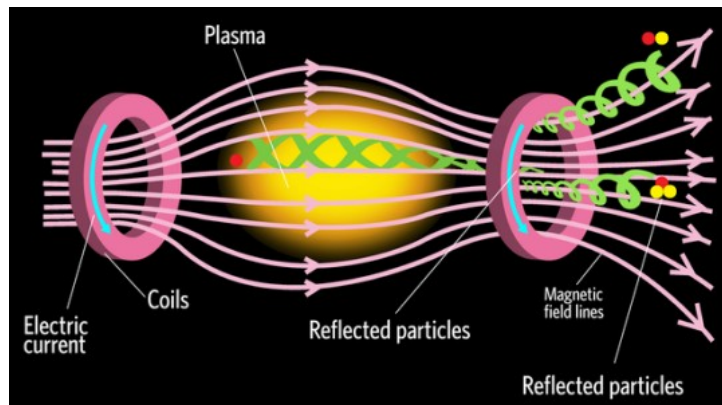


Figura 2: Specchio magnetico

Se utilizzo quindi solo un campo magnetico toroidale produco un campo elettrico (verso il basso) e di conseguenza una forza esterna la cui deriva è carica-indipendente che corrisponde ad un movimento netto di tutto il plasma contro la parete.

Per ovviare a questo problema complico la situazione e non utilizzo un campo puramente toroidale ma do al campo una torsione. In questo modo do al campo magnetico una componente anche nella sezione. In questo caso quindi la deriva non avrebbe più un segno costante e la deriva netta si annulla. Questo tipo di macchina si chiama **Stellaratore**.

In alternativa, la linea **Tokamak**, si fa correre una corrente nel plasma toroidale. Mantengo la simmetria del sistema però ho il problema di capire come far scorrere una corrente toroidale. Il Tokamak non è una macchina intrinsecamente stazionaria.

### 2.2.2 Stellaratore

L'idea è quella di sviluppare delle bobine più complicate, aventi una geometria tridimensionale. Il vantaggio è che questa configurazione permette un funzionamento stazionario del dispositivo, lo svantaggio è la complessità, sia ingegneristica che di confinamento.

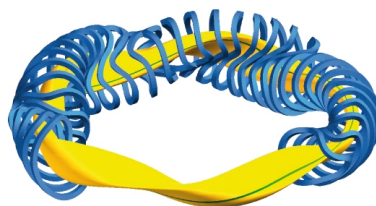


Figura 3: Schema di uno stellaratore

### 2.2.3 Tokamak

L'idea del tokamak è quella di trovare una maniera per far scorrere una corrente attraverso il plasma, senza però mettere dentro degli elettrodi. Devo quindi indurre una fem in direzione

toroidale. Come faccio? Devo avere un campo elettrico variabile. I vantaggi sono che il sistema è simmetrico e relativamente più semplice dello stellarator. Lo svantaggio è che questo sistema è intrinsecamente non stazionario. Può andare avanti per un po' ma non per sempre, vediamo perché.

Utilizziamo la legge di Faraday:

$$fem = -\frac{d}{dt}\phi(\bar{B})$$

Se volessi  $I$  costante nel tempo, dovrei applicare una  $fem$  costante. Se la  $fem$  è costante il flusso deve crescere linearmente nel tempo. La geometria rimane costante, quindi  $B$  (nel solenoide centrale) deve crescere. Visto che la corrente non può crescere indefinitamente nel tempo, ho un limite ingegneristico, quindi ho una durata massima di funzionamento.

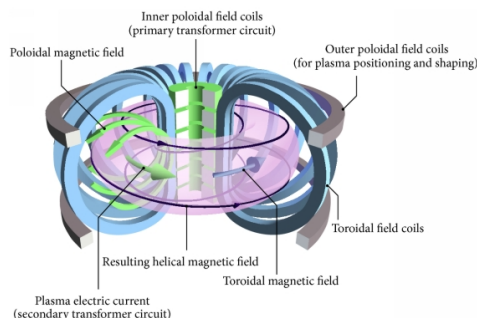


Figura 4: Esempio di reattore Tokamak

## 2.3 Invarianti Adiabatici

### 2.3.1 Introduzione al Problema: Pendolo a Lunghezza Variabile

Consideriamo un pendolo semplice la cui lunghezza del filo,  $L$ , non è costante ma varia nel tempo,  $L = L(t)$ . In una situazione del genere, il lavoro compiuto dalla forza che accorcia o allunga il filo modifica l'energia del sistema. Di conseguenza, l'energia meccanica  $E_{mecc}$  non si conserva più.

Per dimostrare la non conservazione tramite il formalismo lagrangiano, scriviamo la Lagrangiana del sistema in coordinate polari  $(L, \theta)$ . Tenendo conto che  $L = L(t)$  è una funzione esplicita del tempo, abbiamo:

$$\mathcal{L}(\theta, \dot{\theta}, t) = \frac{1}{2}m \left( \dot{L}^2 + L(t)^2 \dot{\theta}^2 \right) + mgL(t) \cos \theta$$

Poiché la Lagrangiana dipende esplicitamente dal tempo attraverso  $L(t)$ , la funzione Hamiltoniana  $H = \dot{\theta} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} - \mathcal{L}$  non coincide con una costante del moto. Infatti:

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \neq 0$$

La domanda che ci poniamo è: **se l'energia non è conservata, esiste un'altra grandezza fisica che rimane costante durante il moto?** Questa grandezza è ciò che chiamiamo **invariante adiabatico**.

**L'Ipotesi Adiabatica** Per procedere, introduciamo la **condizione adiabatica**, secondo cui la variazione di  $L(t)$  è molto lenta:

1. Il moto del pendolo resta approssimativamente oscillatorio.
2. Si può definire un periodo "istantaneo" di oscillazione:

$$T = \frac{2\pi}{\omega(t)}, \quad \text{dove } \omega(t) = \sqrt{\frac{g}{L(t)}}.$$

3. Il tempo caratteristico  $\Delta t$  su cui  $L$  (e quindi  $\omega$ ) varia sensibilmente è molto maggiore del periodo di oscillazione:  $\Delta t \gg T$ .

**Soluzione Approssimata del Moto** Per piccole oscillazioni, l'equazione del moto è  $\ddot{\theta} = -\omega^2(t)\theta$ . Cerchiamo una soluzione del tipo:

$$\theta(t) = \text{Re} \left[ \theta_0(t) e^{i \int_0^t \omega(t') dt'} \right]$$

Sostituendo nell'equazione del moto e trascurando  $\ddot{\theta}_0$ , si ottiene:

$$2i\omega\dot{\theta}_0 + i\dot{\omega}\theta_0 \approx 0 \implies \frac{d\theta_0}{\theta_0} = -\frac{1}{2} \frac{d\omega}{\omega}$$

che integrata fornisce:

$$\theta_0(t) = \theta_0(0) \sqrt{\frac{\omega(0)}{\omega(t)}}$$

**L'Invariante nello Spazio delle Fasi** L'area dell'ellisse nello spazio delle fasi  $(\theta, \dot{\theta})$  per  $\omega = \text{costante}$  è  $A = \pi\theta_0^2\omega$ . Quando  $\omega$  varia lentamente, l'area istantanea diventa:

$$A(t) = \pi\theta_0^2(t)\omega(t)$$

Sostituendo la soluzione per  $\theta_0(t)$ , si ottiene:

$$A(t) = \pi \left( \theta_0^2(0) \frac{\omega(0)}{\omega(t)} \right) \omega(t) = \pi\theta_0^2(0)\omega(0) = \text{costante}$$

Dunque, **l'area dell'orbita nello spazio delle fasi è un invariante adiabatico**. In generale, per un sistema con coordinata periodica  $q$  e momento coniugato  $p$ , se i parametri variano lentamente, allora  $I = \oint p dq$  è un invariante adiabatico (variabile d'azione).

Cosa c'entra tutto questo discorso con i plasmi? Perché ho una periodicità, abbiamo visto che la carica effettua una girazione attorno alla linea di campo, quindi mi aspetto che il moto abbia un invariante adiabatico.

### 2.3.2 Lagrangiana di una Particella Carica in un Campo Elettromagnetico

La Lagrangiana per una particella di massa  $m$  e carica  $q$  in un campo elettromagnetico descritto dal potenziale scalare  $\phi(\vec{x}, t)$  e dal potenziale vettore  $\vec{A}(\vec{x}, t)$  è:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + q\vec{A}(\vec{x}, t) \cdot \vec{v} - q\phi(\vec{x}, t)$$

Applicando le equazioni di Eulero-Lagrange, si dimostra che questa Lagrangiana produce la forza di Lorentz:

$$m\vec{a} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

### 2.3.3 L'Invariante Adiabatico: Il Momento Magnetico ( $\mu$ )

Consideriamo una particella di massa  $m$  e carica  $q$  in un campo magnetico  $\vec{B}$  forte e quasi uniforme. Il moto della particella può essere decomposto in una traslazione lungo le linee di campo e un moto di girazione (ciclotronico) nel piano perpendicolare a  $\vec{B}$ .

Se il campo magnetico varia lentamente nello spazio e nel tempo rispetto al raggio di Larmor  $r_L$  e al periodo di ciclotrone  $T_c = 2\pi/\omega_c$  (dove  $\omega_c = qB/m$ ), il sistema ammette un invariante adiabatico legato al moto di girazione.

**Derivazione dall'Integrale d'Azione** L'invariante adiabatico è definito come l'integrale d'azione calcolato su un ciclo del moto di girazione:

$$J = \oint \vec{p}_\perp \cdot d\vec{l}$$

Dove  $\vec{p}_\perp = m\vec{v}_\perp + q\vec{A}$  è il momento canonico trasverso. Per una particella in un campo magnetico, l'integrale si riduce a:

$$J = \oint (mv_\perp)r_L d\phi - q\Phi_B = 2\pi mv_\perp r_L - q(\pi r_L^2 B)$$

Sostituendo il raggio di Larmor  $r_L = \frac{mv_\perp}{qB}$ , otteniamo:

$$J = 2\pi \frac{m^2 v_\perp^2}{qB} - \pi \frac{m^2 v_\perp^2}{qB} = \pi \frac{m^2 v_\perp^2}{qB} = \frac{2\pi m}{q} \left( \frac{\frac{1}{2} m v_\perp^2}{B} \right)$$

**Il Momento Magnetico  $\mu$**  Poiché  $m$  e  $q$  sono costanti, la conservazione di  $J$  implica la conservazione della grandezza tra parentesi, definita come **momento magnetico  $\mu$** :

$$\mu = \frac{\frac{1}{2} m v_\perp^2}{B} = \frac{W_\perp}{B}$$

**Significato Fisico e Confinamento** Questo  $\mu$  è un **invariante adiabatico**. La sua conservazione ha implicazioni profonde:

- **Specchi Magnetici:** Se una particella si muove verso una regione dove  $B$  aumenta, affinché  $\mu$  resti costante, l'energia cinetica perpendicolare  $W_\perp$  deve aumentare. Poiché l'energia totale è conservata, l'energia cinetica parallela  $W_\parallel$  deve diminuire, portando potenzialmente alla riflessione della particella (punto di inversione).
- **Fisica dei Plasmi:** La conservazione di  $\mu$  è alla base del confinamento dei plasmi nelle macchine a fusione e nelle fasce di van Allen terrestri.

$\mu$  rappresenta effettivamente il momento di dipolo magnetico della "spira di corrente" creata dalla particella in girazione, definita dal rapporto tra l'energia trasversa e l'intensità del campo.

### 2.3.4 Il Principio dello Specchio Magnetico

La conservazione di  $\mu$  ha una conseguenza notevole: il fenomeno dello **specchio magnetico**.

**Conservazione dell'Energia e Forza di Specchio** L'energia cinetica totale di una particella è costante in un campo magnetico statico:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2) = \text{costante}$$

Sostituendo  $v_{\perp}^2 = \frac{2\mu B}{m}$ :

$$E = \frac{1}{2}mv_{\parallel}^2 + \mu B(s) = \text{costante}$$

dove  $s$  è la coordinata lungo la linea di campo. Il termine  $\mu B(s)$  agisce come un **potenziale efficace**  $U(s)$  per il moto parallelo. La particella è soggetta alla **forza di specchio**:

$$F_{\parallel} = -\frac{\partial U(s)}{\partial s} = -\mu \frac{\partial B}{\partial s}$$

Questa forza spinge le particelle dalle regioni a campo magnetico più intenso verso quelle a campo magnetico più debole.

**Il Cono di Perdita (Loss Cone)** Una particella è intrappolata in una "bottiglia magnetica" (una regione con due massimi di campo,  $B_{max}$ , e un minimo,  $B_{min}$ ) se la sua velocità parallela si annulla prima di raggiungere i massimi del campo.

Per derivare la **condizione di confinamento**, consideriamo due principi di conservazione:

1. La conservazione dell'energia cinetica  $E = \frac{1}{2}mv^2$  (poiché la forza magnetica non compie lavoro, il modulo della velocità  $v$  è costante).
2. L'invarianza adiabatica del momento magnetico  $\mu$ .

Il momento magnetico è definito come:

$$\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B} = \frac{mv^2 \sin^2 \theta}{2B}$$

dove  $\theta$  è il **pitch angle** (l'angolo tra  $\vec{v}$  e  $\vec{B}$ ). Poiché  $\mu$  e  $v$  sono costanti durante il moto, la quantità  $\frac{\sin^2 \theta}{B}$  deve conservarsi lungo la linea di campo:

$$\frac{\sin^2 \theta(z)}{B(z)} = \frac{\sin^2 \theta_{min}}{B_{min}} = \text{costante}$$

dove  $\theta_{min}$  è l'angolo nel punto in cui il campo è minimo ( $B_{min}$ ).

La particella viene riflessa (punto di inversione) quando tutta la sua velocità diventa perpendicolare al campo magnetico, ovvero quando  $\theta = 90^\circ$  ( $\sin \theta = 1$ ). Sia  $B_{ref}$  il valore del campo magnetico nel punto di riflessione:

$$\frac{\sin^2 \theta_{min}}{B_{min}} = \frac{\sin^2(90^\circ)}{B_{ref}} = \frac{1}{B_{ref}}$$

Da cui ricaviamo il campo necessario per riflettere una particella con angolo iniziale  $\theta_{min}$ :

$$B_{ref} = \frac{B_{min}}{\sin^2 \theta_{min}}$$



Affinché la particella rimanga confinata, la riflessione deve avvenire *prima* o *in corrispondenza* del picco massimo del campo magnetico ( $B_{max}$ ). La condizione di confinamento è quindi  $B_{ref} \leq B_{max}$ . Sostituendo l'espressione trovata:

$$\frac{B_{min}}{\sin^2 \theta_{min}} \leq B_{max} \implies \sin^2 \theta_{min} \geq \frac{B_{min}}{B_{max}}$$

Le particelle che non soddisfano questa disuguaglianza hanno un pitch angle troppo piccolo: la loro riflessione richiederebbe un campo magnetico superiore a quello disponibile ( $B_{max}$ ), quindi esse superano la strozzatura e fuggono. Lo spazio delle velocità corrispondente a queste particelle fuggitive è chiamato **cono di perdita**. L'angolo critico  $\theta_c$  che definisce l'apertura del cono è dato dal caso limite ( $B_{ref} = B_{max}$ ):

$$\sin^2 \theta_c = \frac{B_{min}}{B_{max}}$$

**Condizione di Confinamento e Cono di Perdita** Una particella è intrappolata in una "bottiglia magnetica" (una configurazione con due massimi di campo  $B_{max}$  e un minimo centrale  $B_{min}$ ) solo se la sua velocità parallela si annulla, invertendo il moto, prima di raggiungere i punti di massimo campo.

Per derivare la condizione di intrappolamento, sfruttiamo due costanti del moto:

1. L'energia cinetica  $E = \frac{1}{2}mv^2$  (poiché la forza di Lorentz non compie lavoro, il modulo della velocità  $v$  è costante).
2. Il momento magnetico  $\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B} = \frac{mv^2 \sin^2 \theta}{2B}$ , che è un invariante adiabatico.

Dall'invarianza di  $\mu$  lungo la linea di campo, possiamo eguagliare il valore nel piano mediano (dove  $B = B_{min}$  e l'angolo è  $\theta_{min}$ ) con il valore in un generico punto di riflessione dove la velocità è puramente perpendicolare ( $\theta = 90^\circ$ , ossia  $\sin \theta = 1$ ):

$$\frac{\sin^2 \theta_{min}}{B_{min}} = \frac{\sin^2(90^\circ)}{B_{ref}} = \frac{1}{B_{ref}}$$

Risolvendo per il campo di riflessione:

$$B_{ref} = \frac{B_{min}}{\sin^2 \theta_{min}}$$

Affinché la particella resti confinata, il punto di riflessione deve trovarsi all'interno della bottiglia, ovvero il campo necessario per rifletterla non deve superare il campo massimo disponibile ( $B_{ref} \leq B_{max}$ ). Sostituendo:

$$\frac{B_{min}}{\sin^2 \theta_{min}} \leq B_{max} \implies \sin^2 \theta_{min} \geq \frac{B_{min}}{B_{max}}$$

Questa è la **condizione di confinamento**. Definiamo il **rapporto di specchio** (mirror ratio) come  $R_m = \frac{B_{max}}{B_{min}}$ . La condizione diventa  $\sin^2 \theta_{min} \geq \frac{1}{R_m}$ .

**Analisi del Cono di Perdita** Le particelle che non soddisfano la condizione precedente ( $\sin^2 \theta_{min} < 1/R_m$ ) possiedono una velocità parallela troppo elevata rispetto a quella perpendicolare. Esse attraversano i colli magnetici senza essere riflesse e fuggono dal sistema.

Lo spazio delle velocità che contiene queste particelle non confinate è detto **cono di perdita**. L'apertura del cono è definita dall'**angolo di pitch critico**  $\theta_c$ , dato dall'uguaglianza:

$$\sin \theta_c = \sqrt{\frac{B_{min}}{B_{max}}} = \frac{1}{\sqrt{R_m}}$$

**Interpretazione geometrica:** Nello spazio delle velocità tridimensionale  $(v_x, v_y, v_z)$ , con l'asse  $v_z$  allineato al campo magnetico  $\vec{B}$ , la condizione  $\theta < \theta_c$  definisce un cono con vertice nell'origine. Poiché le particelle possono fuggire in entrambe le direzioni lungo la linea di campo (sia verso  $+B_{max}$  che verso l'altro massimo), esistono in realtà **due coni di perdita**: uno per  $0 \leq \theta < \theta_c$  e uno per  $\pi - \theta_c < \theta \leq \pi$ .

**Frazione di particelle perse:** Se assumiamo che la distribuzione delle velocità delle particelle sia isotropa (uniforme in tutte le direzioni), possiamo calcolare la frazione di particelle perse calcolando l'angolo solido  $\Omega$  sotteso dal cono di perdita. L'angolo solido di un cono di apertura  $\theta_c$  è dato da:

$$\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\theta_c} \sin \theta d\theta = 2\pi [-\cos \theta]_0^{\theta_c} = 2\pi(1 - \cos \theta_c)$$

Considerando che esistono due coni (uno per ogni direzione del campo), l'angolo solido totale di perdita è  $2\Omega$ . La frazione di particelle perse  $F_{loss}$  rispetto all'angolo solido totale della sfera ( $4\pi$ ) è:

$$F_{loss} = \frac{2 \cdot 2\pi(1 - \cos \theta_c)}{4\pi} = 1 - \cos \theta_c$$

Utilizzando la relazione trigonometrica  $\cos \theta_c = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_c} = \sqrt{1 - 1/R_m}$ , la frazione di perdita in funzione del rapporto di specchio è:

$$F_{loss} = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{R_m}}$$

Questo risultato mostra che per avere un buon confinamento ( $F_{loss} \rightarrow 0$ ) è necessario un rapporto di specchio molto elevato ( $R_m \gg 1$ ).

## 2.4 Invarianti Adiabatici e Moto delle Particelle

Per le particelle intrappolate in uno specchio magnetico, il loro moto può essere scomposto in tre tipi di moti periodici, a ciascuno dei quali è associato un invariante adiabatico, a condizione che le variazioni del sistema siano lente.

### 2.4.1 Il Primo Invariante Adiabatico: Momento Magnetico ( $\mu$ )

Il primo moto è la rapida rotazione di Larmor. L'invariante associato è il **momento magnetico**,  $\mu$ .

$$\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B} = \text{cost.}$$

Questo si conserva se le variazioni del campo sono lente rispetto al periodo di Larmor ( $T_{Larmor}$ ).

### 2.4.2 Il Secondo Invariante Adiabatico: Invariante Longitudinale ( $J$ )

Per identificare un invariante adiabatico è necessario individuare una coordinata periodica e calcolare l'integrale dell'azione su questa coordinata. Nel caso dello specchio magnetico, oltre alla girazione di Larmor, è presente un secondo moto periodico: il **moto di "bounce"** (rimbalzo) lungo la linea di campo tra i due punti di inversione.

La variabile d'azione associata è l'**invariante longitudinale**  $J$ , definito come l'integrale del momento canonico coniugato lungo il percorso:

$$J = \oint P_{\parallel} ds$$

**Derivazione del Momento Canonico e Scelta di Gauge** Dalla meccanica analitica, sappiamo che la Lagrangiana di una particella carica in un campo magnetico è:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}mv^2 + q\vec{A} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}m(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2) + q(A_{\parallel}v_{\parallel} + \vec{A}_{\perp} \cdot \vec{v}_{\perp})$$

Se consideriamo  $s$  (coordinata lungo la linea di campo) come coordinata libera, la velocità generalizzata è  $v_{\parallel} = \dot{s}$ . Il momento canonico coniugato è:

$$P_{\parallel} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_{\parallel}} = mv_{\parallel} + qA_{\parallel}$$

L'invariante adiabatico sembrerebbe dipendere dal potenziale vettore  $A_{\parallel}$ . Tuttavia, sfruttando l'**invarianza di Gauge**, possiamo dimostrare che è possibile scegliere una gauge in cui il termine di campo  $qA_{\parallel}$  si annulla, lasciando solo il termine cinetico (momento del primo ordine).

*Dimostrazione:* Dalle equazioni di Maxwell (Teorema di Ampere) e dalla definizione di potenziale vettore:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_{corr} \quad \text{e} \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

Sostituendo e usando l'identità vettoriale del doppio rotore:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}_{corr}$$

Imponiamo la **Gauge di Coulomb** ( $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ ). L'equazione diventa un'equazione di Poisson vettoriale:

$$-\nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}_{corr}$$

Proiettando lungo la linea di campo (componente parallela):

$$(\nabla^2 \vec{A})_{\parallel} = -\mu_0 (\vec{J}_{corr})_{\parallel}$$

In assenza di correnti libere lungo la linea di campo ( $J_{\parallel} \approx 0$ ), segue che la componente parallela del potenziale vettore  $A_{\parallel}$  può essere posta a zero. Di conseguenza, il momento canonico si riduce al solo momento meccanico:

$$P_{\parallel} \approx mv_{\parallel}$$

L'invariante longitudinale diventa quindi:

$$J = \oint mv_{\parallel} ds = \text{cost.}$$

**Accelerazione di Fermi** La conservazione di  $J$  è valida se le perturbazioni sono lente rispetto al periodo di bounce ( $T_b$ ). Supponiamo di perturbare il sistema aumentando lentamente la corrente nelle bobine: il campo magnetico  $|\vec{B}|$  aumenta e i punti di riflessione si avvicinano. Se  $L$  è la lunghezza della traiettoria di bounce, possiamo approssimare l'integrale come:

$$J \approx m \langle v_{\parallel} \rangle \cdot 2L = \text{cost.}$$

Se la "bottiglia" si accorcia ( $L$  diminuisce), la velocità parallela media  $\langle v_{\parallel} \rangle$  deve aumentare per conservare  $J$ .

$$L \downarrow \implies \langle v_{\parallel} \rangle \uparrow$$

Questo meccanismo è noto come **Accelerazione di Fermi**. Dal punto di vista energetico, chi compie lavoro sulla particella? È il **campo elettrico indotto** dalla variazione del campo magnetico (legge di Faraday) a garantire la conservazione dell'energia totale nel processo di accelerazione. Tuttavia, se la particella guadagna troppa velocità parallela, il suo pitch angle diminuisce fino a rientrare nel *cono di perdita*, causandone l'espulsione dal sistema.

### 2.4.3 Il Terzo Invariante Adiabatico: Flusso Magnetico ( $\Phi$ )

Consideriamo una scala temporale ancora più lunga. Se il campo magnetico non è perfettamente assialsimmetrico o uniforme, i punti di inversione del moto (punti di rimbalzo) subiscono una deriva, creando un moto di **precessione** attorno all'asse del sistema.

Questo è il terzo moto periodico, con periodo  $T_{\text{precessione}} \gg T_{\text{bounce}}$ . L'invariante associato è il flusso del campo magnetico  $\Phi$  racchiuso dalla superficie tubolare disegnata dalla precessione della linea di campo (spesso chiamato "invariante di flusso"):

$$\Phi = \oint \vec{B} \cdot d\vec{S} = \text{cost.}$$

La conservazione di  $\Phi$  implica che le particelle rimangono "incollate" alle linee di campo che precessano.

**Gerarchia delle Scale Temporal** Perché i tre invarianti siano conservati simultaneamente, deve valere una precisa gerarchia temporale. Se una perturbazione agisce su una scala di tempo  $T_{\text{perturbazione}}$ , essa romperà gli invarianti con periodo comparabile o superiore. La gerarchia è:

$$T_{\text{Larmor}} \ll T_{\text{bounce}} \ll T_{\text{precessione}}$$

Tipicamente:

- $T_{\text{precessione}}$  è il più facile da rompere (basta una perturbazione lenta).
- $T_{\text{Larmor}}$  è il più robusto (viene rotto solo da sistemi di riscaldamento a risonanza ciclotronica o collisioni rapide).
- Onde auto-generate nel plasma possono spesso avere frequenze che violano il secondo ( $J$ ) o terzo ( $\Phi$ ) invariante, modificando le orbite (trasporto anomalo).

## 2.5 Dalla Singola Particella alla Descrizione del Plasma

Per descrivere il comportamento collettivo di un plasma, si passa dalle traiettorie delle singole particelle a campi macroscopici continui, come la densità di carica  $\rho(\vec{x}, t)$  e la densità di corrente  $\vec{j}(\vec{x}, t)$ . Queste grandezze agiscono come sorgenti nelle equazioni di Maxwell, chiudendo il sistema in modo autoconsistente.

## 2.6 Due Approcci alla Descrizione del Plasma

Esistono due approcci principali per modellizzare il plasma:

1. **Teoria Cinetica:** È la descrizione più fondamentale e completa. Utilizza la **funzione di distribuzione**  $f_s(\vec{x}, \vec{v}, t)$  che descrive la densità di probabilità di trovare particelle della specie  $s$  in un punto dello spazio delle fasi  $(\vec{x}, \vec{v})$ . L'evoluzione è governata dall'equazione di Boltzmann o di Vlasov (in assenza di collisioni).
2. **Teoria Fluida (MHD):** Descrive il plasma come un fluido conduttore. Si ricava facendo i momenti (integrali sulla velocità) dell'equazione cinetica. Le variabili sono campi macroscopici funzione solo di  $(\vec{x}, t)$ , come:
  - Densità di particelle:  $n(\vec{x}, t) = \int f d^3v$
  - Velocità media del fluido:  $\vec{u}(\vec{x}, t) = \frac{1}{n} \int \vec{v} f d^3v$
  - Pressione (tensore o scalare):  $P(\vec{x}, t)$

Questo approccio è matematicamente più semplice ma perde le informazioni sui dettagli della distribuzione delle velocità (come effetti di risonanza onda-particella o distorsioni della funzione di distribuzione).

## 2.7 Esercizi

**Esercizio 2.1 (Moto delle particelle cariche nel campo magnetico terrestre)** *Si supponga che il campo magnetico della Terra abbia il valore  $B = 3 \cdot 10^{-5}$  T all'equatore e diminuisca con la distanza dal centro della Terra come  $1/r^3$ , come per un dipolo magnetico. Ci siano poi, sul piano equatoriale, una popolazione isotropa di protoni con energia di 1 eV e una di elettroni con energia di 30 keV, ciascuna di densità  $n = 10^7$  m $^{-3}$ , ad una distanza dal centro della Terra pari a 5 raggi terrestri. Immaginando di potere trascurare la deriva dovuta alla curvatura delle linee di campo magnetico, determinare*

1. *Le velocità di deriva di ioni ed elettroni dovute al gradiente del campo magnetico.*
2. *La deriva degli elettroni è verso est o verso ovest?*
3. *Il tempo impiegato da un elettrone a fare il giro completo della Terra.*
4. *La densità di corrente attorno all'equatore. Questa corrente è dominata dal contributo degli ioni o degli elettroni?*

**Soluzione 2.1.1** *Il campo magnetico di dipolo all'equatore varia con la distanza  $r$  secondo la legge:*

$$B(r) = B_0 \left( \frac{R_E}{r} \right)^3$$

*La velocità di deriva dovuta al gradiente del campo ( $\nabla B$ ) per una particella con energia cinetica perpendicolare  $E_\perp$  è data da:*

$$\vec{v}_{\nabla B} = \frac{E_\perp}{qB^3} (\vec{B} \times \nabla B)$$

*Assumendo che l'energia data dal testo sia interamente associata al moto perpendicolare (o considerando la media su una distribuzione isotropa efficace ai fini del drift), poniamo  $E_k = E_\perp$ .*

Calcoliamo il valore del campo magnetico e del suo gradiente alla distanza  $r = 5R_E$ :

$$B(5R_E) = \frac{3 \times 10^{-5} \text{ T}}{(5)^3} = \frac{3 \times 10^{-5} \text{ T}}{125} = 2.4 \times 10^{-7} \text{ T}$$

Il gradiente di  $B$  in direzione radiale è:

$$\nabla B = \frac{\partial}{\partial r} (B_0 R_E^3 r^{-3}) \hat{r} = -3 \frac{B(r)}{r} \hat{r}$$

Sostituendo il gradiente nella formula della velocità (considerando solo il modulo per il punto 1):

$$v_D = \left| \frac{E_k}{qB} \frac{\nabla B}{B} \right| = \frac{E_k}{qB} \cdot \frac{3}{r} = \frac{3E_k}{qBr}$$

**1. Calcolo delle velocità di deriva** Convertiamo le energie in Joule ( $1 \text{ eV} \approx 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$ ) e usiamo  $r = 5 \times 6371 \text{ km} \approx 3.185 \times 10^7 \text{ m}$ .

**Per gli Elettroni** ( $E_k = 30 \text{ keV}$ ):

$$v_{D,e} = \frac{3 \cdot (30 \times 10^3 \text{ eV})}{1 \cdot (2.4 \times 10^{-7} \text{ T}) \cdot (3.185 \times 10^7 \text{ m})}$$

Poiché nel rapporto  $\frac{E_k(\text{in eV})}{q(\text{in e})}$  la carica si elide numericamente se usiamo  $eV$  e carica elementare, possiamo calcolare direttamente (oppure convertire tutto in SI):

$$v_{D,e} = \frac{3 \cdot (30000 \text{ V} \cdot e)}{e \cdot 2.4 \times 10^{-7} \text{ T} \cdot 3.185 \times 10^7 \text{ m}} \approx \frac{90000}{7.644} \approx 11774 \text{ m/s} \approx 11.8 \text{ km/s}$$

**Per gli Ioni (Protoni,  $E_k = 1 \text{ eV}$ ):** Essendo la velocità proporzionale all'energia, possiamo scalare il risultato precedente:

$$v_{D,i} = v_{D,e} \cdot \frac{E_i}{E_e} = 11774 \text{ m/s} \cdot \frac{1}{30000} \approx 0.39 \text{ m/s}$$

**2. Direzione della deriva degli elettroni** Per determinare la direzione utilizziamo la regola del prodotto vettoriale nella formula  $\vec{v}_D \propto q^{-1}(\vec{B} \times \nabla B)$ :

1. **Campo Magnetico** ( $\vec{B}$ ): All'equatore terrestre punta verso **Nord**.
2. **Gradiente** ( $\nabla B$ ): L'intensità diminuisce allontanandosi, quindi il gradiente punta verso il centro della Terra (direzione **radiale entrante**).
3. **Prodotto**  $\vec{B} \times \nabla B$ : Nord  $\times$  Basso = **Ovest**.
4. **Carica** ( $q$ ): Gli elettroni hanno carica negativa ( $q = -e$ ). Il segno meno inverte la direzione.

**Conclusione:** La deriva degli elettroni è diretta verso **EST**.

**3. Periodo di rotazione degli elettroni** L'elettrone percorre una circonferenza di raggio  $r = 5R_E$ .

$$C = 2\pi r = 2\pi(3.185 \times 10^7 \text{ m}) \approx 2.00 \times 10^8 \text{ m}$$

$$T = \frac{C}{v_{D,e}} = \frac{2.00 \times 10^8 \text{ m}}{11774 \text{ m/s}} \approx 16986 \text{ s}$$

Convertendo in ore:

$$T \approx \frac{16986}{3600} \text{ h} \approx 4.72 \text{ h} \quad (\text{circa } 4 \text{ ore e } 43 \text{ minuti})$$

**4. Densità di corrente** La densità di corrente  $\vec{J}$  è data dalla somma dei contributi delle specie:

$$\vec{J} = nq_i\vec{v}_{D,i} + nq_e\vec{v}_{D,e}$$

Consideriamo i versi (convenzione corrente positiva):

- Ioni (positivi) derivano a Ovest  $\rightarrow$  Corrente verso **Ovest**.
- Elettroni (negativi) derivano a Est  $\rightarrow$  Corrente verso **Ovest**.

Poiché entrambi contribuiscono nello stesso verso, i moduli si sommano:

$$J = ne(v_{D,i} + v_{D,e})$$

Essendo  $v_{D,e} \gg v_{D,i}$  (di 5 ordini di grandezza), il termine degli ioni è trascurabile.

$$J \approx nev_{D,e} = (10 \times 10^7 \text{ m}^{-3})(1.602 \times 10^{-19} \text{ C})(11\,774 \text{ m/s})$$

$$J \approx 1.88 \times 10^{-8} \text{ A/m}^2$$

La corrente è diretta verso Ovest ed è **dominata dagli elettroni** a causa della loro energia cinetica significativamente maggiore.

**Esercizio 2.2 (Orbite in una macchina a confinamento toroidale)** Negli esperimenti per la fusione, il plasma è confinato prevalentemente da un campo magnetico toroidale. Il toro di ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor) ha un raggio maggiore  $R_0 = 6.2 \text{ m}$  e minore  $a = 2 \text{ m}$  (si veda la figura 5). Si assuma che il campo magnetico sia soltanto toroidale e che il suo modulo decresca con il raggio maggiore secondo la legge  $B(R) = B_0 R_0 / R$  con  $B_0 = 5.3 \text{ T}$ . Si supponga inoltre che i protoni e gli elettroni del plasma abbiano tutti la stessa energia cinetica di  $10 \text{ keV}$  e che la velocità parallela al campo magnetico  $v_{\parallel}$  sia pressoché identica alla velocità ortogonale al campo magnetico  $v_{\perp}$ .

1. Quali derive ci si aspetta ed in quali direzione le particelle si allontanano dalle linee di campo?
2. Se le particelle partono dall'asse del toro, quanto tempo impiegano ad uscire dal plasma? E quanti giri attorno al toro compiono prima di venire perse a causa del moto di deriva?

Sulla base di questi risultati, è concepibile un dispositivo per la fusione a geometria toroidale e con campo magnetico puramente toroidale?

**Soluzione 2.2.1** In una configurazione toroidale con campo magnetico puramente toroidale ( $B_{\phi}$ ), il modulo del campo varia con il raggio maggiore  $R$  secondo la legge:

$$B(R) = B_0 \frac{R_0}{R}$$

Questa disomogeneità e la curvatura delle linee di campo generano due velocità di deriva perpendicolari al campo magnetico e al raggio: la deriva di gradiente ( $\nabla B$ ) e la deriva di curvatura.

La velocità di deriva totale  $\vec{v}_D$  è la somma vettoriale dei due contributi. Considerando che  $\nabla B$  è diretto verso l'asse del toro ( $-\hat{R}$ ) e il raggio di curvatura è  $R$ , le due derive si sommano algebricamente in direzione verticale ( $Z$ ). Il modulo è dato da:

$$v_D = \frac{m}{qBR} \left( v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2 \right)$$

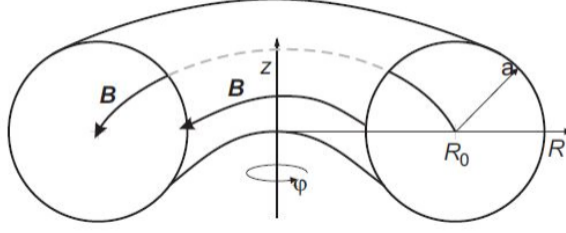


Figura 5: Rappresentazione schematica della geometria di un dispositivo a confinamento toroidale.

Il testo specifica che l'energia cinetica è equipartita tra le componenti, ovvero  $v_{\parallel} \approx v_{\perp}$ . Dato che l'energia totale è  $E_k = \frac{1}{2}m(v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2)$ , si ha:

$$v_{\parallel}^2 \approx v_{\perp}^2 \approx \frac{E_k}{m}$$

Sostituendo questi valori nella formula della deriva:

$$v_D = \frac{m}{qB_0R_0} \left( \frac{E_k}{m} + \frac{E_k}{2m} \right) = \frac{3}{2} \frac{E_k}{qB_0R_0}$$

**1. Calcolo delle velocità di deriva e direzione** Le particelle si muovono verticalmente. Poiché la velocità di deriva dipende dal segno della carica  $q$ , gli ioni (positivi) e gli elettroni (negativi) derivano in direzioni opposte (uno verso l'alto, uno verso il basso, a seconda del verso di  $\vec{B}$ ).

Calcoliamo il modulo della velocità di deriva usando  $E_k = 10 \text{ keV}$ ,  $B_0 = 5.3 \text{ T}$  e  $R_0 = 6.2 \text{ m}$ .

$$v_D = \frac{1.5 \cdot (10 \times 10^3 \text{ eV})}{1 \cdot (5.3 \text{ T}) \cdot (6.2 \text{ m})}$$

Semplificando la carica elementare e presente sia nell'unità eV che al denominatore ( $q = 1e$ ):

$$v_D = \frac{1.5 \cdot 10000}{5.3 \cdot 6.2} \text{ m/s} \approx \frac{15000}{32.86} \text{ m/s} \approx 456.5 \text{ m/s}$$

La velocità di deriva è identica per elettroni e protoni poiché hanno la stessa energia e la stessa carica in modulo.

**2. Tempo di confinamento e numero di giri** Le particelle, partendo dall'asse, escono dal plasma quando percorrono una distanza verticale pari al raggio minore  $a = 2 \text{ m}$ .

$$t_{uscita} = \frac{a}{v_D} = \frac{2 \text{ m}}{456.5 \text{ m/s}} \approx 4.38 \times 10^{-3} \text{ s} = 4.38 \text{ ms}$$

Per calcolare il numero di giri toroidali ( $N$ ), consideriamo la velocità parallela  $v_{\parallel}$  lungo la circonferenza maggiore  $C = 2\pi R_0$ . L'energia parallela è metà dell'energia totale:  $E_{\parallel} = 5 \text{ keV}$ .

$$v_{\parallel} = \sqrt{\frac{2E_{\parallel}}{m}} \implies N = \frac{v_{\parallel} \cdot t_{uscita}}{2\pi R_0}$$



**Per i Protoni** ( $m_p \approx 1.67 \times 10^{-27}$  kg):

$$v_{\parallel,p} = \sqrt{\frac{2 \cdot (5000 \text{ eV} \cdot 1.602 \times 10^{-19} \text{ J/eV})}{1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}}} \approx 9.79 \times 10^5 \text{ m/s}$$

$$N_p = \frac{9.79 \times 10^5 \text{ m/s} \cdot 4.38 \times 10^{-3} \text{ s}}{2\pi \cdot 6.2 \text{ m}} \approx \frac{4288}{38.95} \approx 110 \text{ giri}$$

**Per gli Elettroni** ( $m_e \approx 9.11 \times 10^{-31}$  kg): Essendo l'energia la stessa, il rapporto delle velocità è pari alla radice del rapporto inverso delle masse:

$$v_{\parallel,e} = v_{\parallel,p} \sqrt{\frac{m_p}{m_e}} \approx v_{\parallel,p} \cdot 42.8$$

Di conseguenza, anche il numero di giri scala con lo stesso fattore:

$$N_e \approx 110 \cdot 42.8 \approx 4708 \text{ giri}$$

**3. Conclusioni sulla fattibilità** Sulla base di questi risultati, **non è concepibile** un dispositivo a campo puramente toroidale. Le derive calcolate al punto 1 separano le cariche verticalmente. Questa separazione genera un campo elettrico macroscopico  $\vec{E}$  verticale. L'interazione tra questo campo elettrico indotto e il campo magnetico toroidale produce una deriva  $\vec{E} \times \vec{B}$  radiale, che spinge l'intero plasma verso la parete esterna molto rapidamente (pochi millisecondi), distruggendo il confinamento prima che possano avvenire reazioni di fusione utili.

Per risolvere il problema è necessario introdurre una **trasformata rotazionale** (componente poloidale del campo magnetico), che fa sì che le particelle mediino a zero la deriva verticale orbitando elicoidalmente attorno al toro.

**Esercizio 2.3 (Specchio magnetico ed accelerazione di Fermi)** Un protone di un raggio cosmico è intrappolato in uno specchio magnetico le cui estremità si avvicinano lentamente l'una all'altra (si veda la figura 6). Durante il moto il rapporto "di specchio"  $R_m$  tra il valore massimo  $B_{\max}$  del campo magnetico e il valore al centro dello specchio  $B_0$  si mantiene costante e pari a  $R_m = B_{\max}/B_0 = 5$ . Inizialmente il protone ha energia cinetica  $W = 1$  keV al centro dello specchio e uguali componenti della velocità parallela  $v_{\parallel}$  e perpendicolare  $v_{\perp}$  al campo magnetico.

1. Ricordando la formula che definisce l'angolo di perdita per uno specchio magnetico, mostrare che il protone è inizialmente confinato nello specchio.
2. Usando l'invarianza adiabatica del momento magnetico, determinare l'energia a cui il protone viene accelerato prima di lasciare lo specchio.

**Soluzione 2.3.1** Il confinamento di una particella carica in uno specchio magnetico dipende dal rapporto tra la sua velocità perpendicolare  $v_{\perp}$  e quella parallela  $v_{\parallel}$  rispetto alle linee di campo. Tale rapporto definisce l'angolo di pitch  $\theta$  al centro dello specchio ( $B = B_0$ ):

$$\sin^2 \theta = \frac{v_{\perp}^2}{v^2} = \frac{v_{\perp}^2}{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2}$$

La condizione di riflessione (confinamento) è determinata dal rapporto di specchio  $R_m = B_{\max}/B_0$ . Una particella viene riflessa se il suo angolo di pitch soddisfa la condizione:

$$\sin^2 \theta \geq \frac{B_0}{B_{\max}} = \frac{1}{R_m}$$

L'angolo critico (cono di perdita) è dunque definito da  $\sin^2 \theta_c = 1/R_m$ .

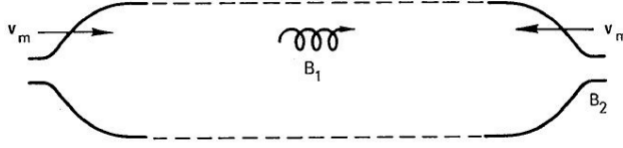


Figura 6: Schema di uno specchio magnetico in cui le estremità si avvicinano lentamente l'una all'altra.

**1. Verifica del confinamento iniziale** *Il testo specifica che inizialmente, al centro dello specchio ( $B_0$ ), il protone ha componenti della velocità uguali:  $v_{\parallel,0} = v_{\perp,0}$ . Calcoliamo il seno al quadrato dell'angolo di pitch iniziale  $\theta_0$ :*

$$\sin^2 \theta_0 = \frac{v_{\perp,0}^2}{v_{\perp,0}^2 + v_{\parallel,0}^2} = \frac{v_{\perp,0}^2}{2v_{\perp,0}^2} = \frac{1}{2} = 0.5$$

Il valore critico per il rapporto di specchio  $R_m = 5$  è:

$$\sin^2 \theta_c = \frac{1}{R_m} = \frac{1}{5} = 0.2$$

Poiché  $\sin^2 \theta_0 > \sin^2 \theta_c$  (ovvero  $0.5 > 0.2$ ), la particella si trova al di fuori del cono di perdita. **Conclusione:** Il protone è inizialmente confinato. In termini angolari,  $\theta_0 = 45^\circ$  mentre  $\theta_c \approx 26.6^\circ$ .

**2. Energia di fuga e accelerazione di Fermi** *Mentre le estremità dello specchio si avvicinano lentamente, la particella subisce un'accelerazione di Fermi del second'ordine, aumentando la sua velocità parallela  $v_{\parallel}$  a ogni riflessione. Tuttavia, il momento magnetico  $\mu$  è un invariante adiabatico:*

$$\mu = \frac{W_{\perp}}{B} = \frac{mv_{\perp}^2}{2B} = \text{costante}$$

Dall'invarianza di  $\mu$ , sappiamo che l'energia perpendicolare al centro dello specchio  $W_{\perp,0}$  e l'energia perpendicolare nel punto di riflessione  $W_{\perp,refl}$  (dove  $B = B_{refl}$ ) sono legate dal rapporto dei campi. La particella viene persa (fuga) nell'istante esatto in cui il suo punto di riflessione "supera"  $B_{max}$ .

Al momento della fuga, la particella ha appena toccato il limite del cono di perdita, ovvero:

$$\frac{W_{\perp,fuga}}{W_{tot,fuga}} = \sin^2 \theta_c = \frac{B_0}{B_{max}}$$

Poiché l'invariante adiabatico  $\mu$  lega l'energia perpendicolare al campo  $B$ , al centro dello specchio deve valere:

$$W_{\perp,fuga} = W_{\perp,0} = \frac{1}{2} W_{tot,0}$$

(Nota:  $W_{\perp,0}$  rimane costante al centro perché  $B_0$  è costante, mentre è  $W_{\parallel}$  ad aumentare per effetto delle pareti in movimento). Imponendo la condizione di fuga  $W_{tot,fuga} \sin^2 \theta_c = W_{\perp,0}$ :

$$W_{tot,fuga} = \frac{W_{\perp,0}}{\sin^2 \theta_c} = W_{\perp,0} \cdot R_m$$

Sostituendo i valori numerici ( $W_{tot,0} = 1 \text{ keV}$  e  $W_{\perp,0} = 0.5 \text{ keV}$ ):

$$W_{tot,fuga} = 0.5 \text{ keV} \cdot 5 = 2.5 \text{ keV}$$

**Conclusione:** Il protone viene accelerato fino a un'energia cinetica totale di  $2.5 \text{ keV}$  prima di entrare nel cono di perdita e lasciare lo specchio magnetico.

### 3 Descrizione del plasma come un fluido carico

Fino ad ora abbiamo trattato il moto delle particelle cariche in campi elettrici e magnetici assegnati (approccio non auto-consistente). Tuttavia, le cariche in moto generano densità di carica  $\rho$  e densità di corrente  $J$ , che modificano i campi stessi. In un plasma reale, con densità tipiche che variano da  $n \approx 10^6 \text{ m}^{-3}$  a  $n \approx 10^{20} \text{ m}^{-3}$ , è impossibile tracciare la traiettoria di ogni singola particella (risolvendo  $\sim 10^{20}$  equazioni accoppiate).

È necessario quindi un approccio statistico. Le due strade principali sono:

1. **Teoria Cinetica:** Descrive la funzione di distribuzione delle particelle nello spazio delle fasi  $(x, v)$ . È completa e descrive fenomeni dipendenti dalla velocità (es. risonanze onda-particella), ma complessa.
2. **Teoria Fluida:** Descrive l'evoluzione delle quantità macroscopiche medie (densità  $n$ , velocità media  $u$ , pressione  $p$ ). È più semplice ma perde i dettagli sulla distribuzione delle velocità.

#### 3.1 Validità dell'approccio fluido

Affinché la descrizione fluida sia valida, dobbiamo poter definire una "media locale". Deve esistere un volume  $\Delta V$  tale che:

- Sia abbastanza grande da contenere un numero statisticamente significativo di particelle ( $N \gg 1$ ).
- Sia abbastanza piccolo rispetto alla lunghezza caratteristica di variazione del sistema ( $L$ ) da poter considerare le grandezze uniformi al suo interno.

**Esempio 3.1 (Plasma per la fusione)**  $n \approx 10^{20} \text{ m}^{-3}$ ,  $L \approx 1 \text{ m}$ . Scelto un volume di risoluzione con lato  $\Delta x \approx 10^{-5} \text{ m}$  ( $10 \mu\text{m}$ ), il numero di particelle è  $N = n(\Delta x)^3 \approx 10^5$ . La media è statisticamente robusta.

**Esempio 3.2 (Plasma astrofisico)**  $n \approx 10^6 \text{ m}^{-3}$ ,  $L \approx 10^7 \text{ m}$ . Scelto  $\Delta x \approx 1 \text{ m}$ , si ha  $N \approx 10^6$ . Anche in questo caso l'approccio è valido.

La validità della velocità media è garantita dalle collisioni (che termalizzano la distribuzione) o, nei plasmi poco collisionali, dal campo magnetico che confina il moto perpendicolare (raggio di Larmor piccolo), localizzando le particelle.

#### 3.2 Derivazione delle Equazioni Fluide

Consideriamo il plasma composto da più specie (es. elettroni  $e$ , ioni  $i$ ). Per ogni specie, deriviamo le leggi di conservazione.

### 3.2.1 Equazione di Continuità (Conservazione della Massa)

Consideriamo un volume di controllo fisso  $V$  delimitato da una superficie chiusa  $S$ . La variazione del numero di particelle al suo interno deve essere uguale al flusso netto attraverso la superficie (assumendo che non vi siano processi di ionizzazione o ricombinazione all'interno del volume).

Il numero totale di particelle  $N$  nel volume è l'integrale della densità  $n$ :

$$N = \int_V n dV$$

La variazione temporale di  $N$  è data dal flusso della densità di corrente di particelle,  $\Gamma = nu$ , attraverso la superficie  $S$ . Poiché il vettore normale alla superficie  $dS$  è orientato verso l'esterno, un flusso uscente riduce il numero di particelle, quindi compare un segno meno:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V n dV = - \oint_S (nu) \cdot dS$$

Applicando il teorema della divergenza (o di Gauss) all'integrale di superficie, possiamo trasformarlo in un integrale di volume:

$$\oint_S (nu) \cdot dS = \int_V \nabla \cdot (nu) dV$$

Sostituendo e portando tutto a primo membro sotto un unico integrale, otteniamo:

$$\int_V \left[ \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (nu) \right] dV = 0$$

Poiché il volume  $V$  è arbitrario, l'integrando deve essere nullo ovunque. Si ottiene così la forma differenziale:

#### Definizione 3.3 (Equazione di Continuità)

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (nu) = 0$$

*Questa equazione lega la derivata temporale della densità alla divergenza del flusso di particelle. In presenza di sorgenti (es. ionizzazione) o pozzi (es. ricombinazione), il termine a destra sarebbe diverso da zero.*

### 3.2.2 Equazione del Momento (Legge di Newton)

Per ricavare l'equazione del moto macroscopica si moltiplica l'equazione cinetica per la quantità di moto  $mv$  e si integra su tutto lo spazio delle velocità.

Scomponendo la velocità delle particelle in velocità media del fluido  $u$  e velocità termica casuale  $w$  (tale che  $v = u + w$ ), emergono due contributi fondamentali dal termine di trasporto:

1. L'inerzia del fluido, che porta alla derivata totale (o lagrangiana).
2. Il flusso di quantità di moto dovuto all'agitazione termica, che definisce il tensore degli sforzi (da cui deriva la pressione  $p$ ).

L'equazione risultante esprime la conservazione della quantità di moto come somma delle densità di forza agenti sul fluido:

- **Forza di Lorentz:**  $F_L = q_\alpha n_\alpha (E + u_\alpha \times B)$ . È la forza elettromagnetica agente sulla carica netta della specie.
- **Forza di Pressione:**  $F_p = -\nabla \cdot P_\alpha \approx -\nabla p_\alpha$ . Deriva dalla divergenza del tensore di pressione (assumendo una distribuzione isotropa maxwelliana, il tensore diventa scalare:  $P = p\mathbb{I}$ ).
- **Forza di Collisione (Attrito):**  $F_{coll}$ . Rappresenta la variazione di momento dovuta agli urti con altre specie  $\beta$ . Si modella spesso come  $R_{\alpha\beta} \approx m_\alpha n_\alpha \nu_{\alpha\beta} (u_\beta - u_\alpha)$ .

**Derivazione del termine di Pressione** Il termine di pressione nasce dal flusso di quantità di moto dovuto all'agitazione termica. Partiamo dalla velocità istantanea  $v$  di una particella, che può essere scomposta nella somma della velocità media del fluido  $u$  e di una velocità casuale (termica)  $w$ :

$$v = u(x, t) + w$$

Per definizione di velocità media, il valor medio della componente casuale è nullo:  $\langle w \rangle = 0$ .

Nel calcolo del momento primo dell'equazione di Boltzmann, appare la divergenza del flusso di momento, proporzionale alla media del prodotto diadico  $\langle vv \rangle$ . Sostituendo la scomposizione:

$$\langle vv \rangle = \langle (u + w)(u + w) \rangle$$

Espandendo il prodotto:

$$\langle vv \rangle = \underbrace{\langle uu \rangle}_{\text{Flusso ordinato}} + \underbrace{u \langle w \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle w \rangle u}_{=0} + \underbrace{\langle ww \rangle}_{\text{Flusso termico}}$$

I termini misti si annullano. Il termine  $uu$  contribuisce alla derivata convettiva (il termine  $(u \cdot \nabla)u$  a sinistra dell'equazione). Il termine rimanente definisce il **Tensore di Pressione**  $P$ :

$$P \equiv mn \langle ww \rangle = \int m w w f d^3v$$

La forza per unità di volume è data dalla divergenza negativa di questo tensore:

$$F_p = -\nabla \cdot P$$

**Ipotesi di Isotropia:** Se la distribuzione delle velocità termiche è isotropa (es. Maxwelliana), le medie delle componenti miste sono nulle ( $\langle w_x w_y \rangle = 0$ ) e le componenti quadratiche sono uguali ( $\langle w_x^2 \rangle = \langle w_y^2 \rangle = \langle w_z^2 \rangle = v_{th}^2/3$ ). Il tensore diventa scalare diagonale:

$$P_{ij} = p \delta_{ij} \implies P = p\mathbb{I}$$

dove  $p = nk_B T$  è la pressione scalare ideale. In questo caso, la divergenza del tensore si riduce al gradiente scalare:

$$-\nabla \cdot (p\mathbb{I}) = -\nabla p$$

**Somma delle componenti** Combinando questi termini, l'equazione del momento per la specie  $\alpha$  è:

$$m_\alpha n_\alpha \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} + (u_\alpha \cdot \nabla) u_\alpha \right) = q_\alpha n_\alpha (E + u_\alpha \times B) - \nabla p_\alpha + \sum_\beta R_{\alpha\beta}$$

Il termine a sinistra rappresenta la massa per l'accelerazione convettiva:

$$m_\alpha n_\alpha \frac{du_\alpha}{dt}$$

### 3.2.3 Equazione di Stato (Chiusura del sistema)

Le equazioni precedenti contengono un'incognita in più (la pressione  $p$ ) rispetto al numero di equazioni. È necessario chiudere il sistema con un'equazione di stato  $p = p(n, T)$ .

$$p = Cn^\gamma$$

- **Isoterma** ( $\gamma = 1$ ): Se il sistema scambia calore efficacemente ( $T = \text{cost}$ ), allora  $p = nk_B T$ .
- **Adiabatica** ( $\gamma = \frac{f+2}{f}$ ): Se non c'è scambio di calore ( $dU = -pdV$ ), la relazione tra pressione e densità è  $p \propto n^\gamma$ . Per un gas monoatomico tridimensionale ( $f = 3$ ),  $\gamma = 5/3$ .

### 3.3 Derive Fluidi e Deriva Diamagnetica

L'approccio fluido permette di analizzare i moti di deriva da un punto di vista macroscopico. In condizioni stazionarie ( $\partial_t \rightarrow 0$ ) e trascurando l'inerzia ( $u \cdot \nabla u \approx 0$ ), l'equazione del momento diventa un bilancio di forze:

$$qn(E + u \times B) - \nabla p = 0$$

Risolvendo per la velocità perpendicolare a  $B$  (moltiplicando vettorialmente per  $B$ ):

$$u_\perp = \frac{E \times B}{B^2} + \frac{B \times \nabla p}{qnB^2}$$

- Il termine  $\frac{E \times B}{B^2}$  è la classica deriva  $E \times B$ , identica per ioni ed elettroni.
- Il termine  $u_D = \frac{B \times \nabla p}{qnB^2}$  è la **Deriva Diamagnetica**.

**Osservazione 3.4** *La deriva diamagnetica non corrisponde al moto del centro di guida di una singola particella, ma è un effetto fluido collettivo. In presenza di un gradiente di pressione (o densità), i flussi di particelle non si compensano, generando una corrente netta diamagnetica perpendicolare al gradiente e al campo magnetico.*

### 3.4 Il Modello a Due Fluidi (Two-Fluid Model)

Prima di passare ad una descrizione a singolo fluido, è utile visualizzare il sistema completo a due fluidi. Il plasma è descritto da due set di equazioni fluidodinamiche (uno per gli elettroni, uno per gli ioni) accoppiati dai campi elettromagnetici che essi stessi generano.

Le incognite sono le densità  $n_e, n_i$ , le velocità  $u_e, u_i$  e le pressioni  $p_e, p_i$ , oltre ai campi  $E$  e  $B$ .

Il sistema di equazioni è composto da:

- **2 Equazioni di Continuità:**

$$\partial_t n_\alpha + \nabla \cdot (n_\alpha u_\alpha) = 0 \quad (\alpha = e, i)$$

- **2 Equazioni del Momento:**

$$n_\alpha m_\alpha d_t u_\alpha = n_\alpha q_\alpha (E + u_\alpha \times B) - \nabla p_\alpha + R_{\alpha\beta}$$

- **2 Equazioni di Stato:**  $p_\alpha = p_\alpha(n_\alpha, T_\alpha)$ .

- **Equazioni di Maxwell:** Che usano come sorgenti le densità di carica e corrente totali:

$$\rho = e(n_i - n_e), \quad J = e(n_i u_i - n_e u_e)$$

Questo modello è molto accurato e copre fenomeni ad alta frequenza (dove gli elettroni si muovono rispetto agli ioni), ma è matematicamente oneroso. Spesso si cerca una semplificazione considerando i fenomeni a bassa frequenza, portando alla MHD.

### 3.5 Magnetoidrodinamica (MHD) a singolo fluido

Spesso è utile descrivere il plasma non come due fluidi separati, ma come un unico fluido conduttore. Questo modello è detto Magnetoidrodinamica (MHD).

#### 3.5.1 Ipotesi del modello

1. **Massa elettroni trascurabile:**  $m_e \ll m_i$ . La densità di massa è dominata dagli ioni:  $\rho \approx n_i m_i$ .
2. **Quasi-neutralità:**  $n_e \approx Z n_i$ . Assumiamo  $Z = 1 \implies n_e \approx n_i \equiv n$ .
3. **Bassa frequenza:** I tempi scala sono lunghi rispetto alla frequenza di plasma, elettroni e ioni si muovono "insieme".

#### 3.5.2 Variabili a singolo fluido

- Densità di massa:  $\rho \approx n m_i$ .
- Velocità del fluido:  $u \approx u_i$  (il centro di massa coincide quasi con gli ioni).
- Densità di corrente:  $J = en(u_i - u_e)$ .
- Pressione totale:  $p = p_i + p_e$ .

#### 3.5.3 Equazioni MHD fondamentali

Sommando le equazioni di conservazione delle due specie, otteniamo le equazioni MHD:

1. **Continuità di massa:** Moltiplichiamo l'equazione di continuità di ogni specie per la propria massa  $m_\alpha$  e sommiamo:

$$\frac{\partial}{\partial t}(m_i n_i + m_e n_e) + \nabla \cdot (m_i n_i u_i + m_e n_e u_e) = 0$$

Sostituendo le definizioni di  $\rho$  e  $u$ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0$$

2. **Equazione del Moto:** Sommiamo le equazioni del momento per ioni ed elettroni.

*Termine inerziale:* Trascurando l'inerzia elettronica, la densità di momento è dominata dagli ioni:  $\sum m_\alpha n_\alpha \frac{du_\alpha}{dt} \approx \rho \frac{du}{dt}$ .

*Forze di collisione:* Per il terzo principio della dinamica, le forze interne si annullano:  $R_{ie} + R_{ei} = 0$ .

*Termine di pressione:* La forza totale è la somma dei gradienti parziali:  $-\nabla p_i - \nabla p_e = -\nabla p$ .

*Termine di Lorentz:* Sommiamo i contributi elettromagnetici:

$$\sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} E + \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha} u_{\alpha} \times B$$

Il primo termine è  $\rho_c E \approx 0$  per la quasi-neutralità. Il secondo termine rappresenta la forza sulla corrente:

$$(en u_i - en u_e) \times B = J \times B$$

Mettendo tutto insieme otteniamo l'equazione di Eulero magnetica:

$$\rho \frac{du}{dt} = J \times B - \nabla p$$

3. **Legge di Ohm Generalizzata:** Invece di sommare, prendiamo l'equazione del momento per gli **elettroni**. Poiché  $m_e$  è molto piccola, trascuriamo il termine inerziale a sinistra ( $m_e n \frac{du_e}{dt} \approx 0$ ). L'equazione di equilibrio delle forze per gli elettroni è:

$$0 = -en(E + u_e \times B) - \nabla p_e + R_{ei}$$

Dalla definizione di corrente, ricaviamo la velocità elettronica in funzione di quella del fluido:  $u_e = u_i - \frac{J}{en} \approx u - \frac{J}{en}$ . La forza d'attrito collisionale è modellata tramite la resistività  $\eta$ :  $R_{ei} = en\eta J$ .

Sostituendo  $u_e$  e  $R_{ei}$  nell'equazione:

$$0 = -en \left( E + \left( u - \frac{J}{en} \right) \times B \right) - \nabla p_e + en\eta J$$

Dividendo per  $-en$  e riordinando i termini per esplicitare  $E$ :

$$E + u \times B = \eta J + \frac{J \times B}{en} - \frac{\nabla p_e}{en}$$

Questa è la legge di Ohm generalizzata completa.

**MHD Ideale:** Per sistemi macroscopici (scala  $L$  grande) e plasmi altamente conduttivi, i termini resistivi ( $\eta$ ), Hall ( $\propto 1/L$ ) e di pressione elettronica ( $\propto 1/L$ ) diventano trascurabili. L'equazione si riduce alla condizione di congelamento del flusso:

$$E + u \times B = 0$$

### 3.5.4 Classificazione MHD

**Definizione 3.5 (MHD Ideale)** *Trascurando resistività e termini cinetici (Hall/pressione):*

$$E + u \times B = 0$$

*Il plasma è un conduttore perfetto.*

**Definizione 3.6 (MHD Resistiva)** *Mantenendo la resistività collisionale  $\eta$ :*

$$E + u \times B = \eta J$$



### 3.5.5 Riepilogo Sistema MHD

Il sistema completo di equazioni da risolvere è:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) &= 0 \\ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) &= \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) &= 0 \\ E + \mathbf{u} \times \mathbf{B} &= \eta \mathbf{J} \quad (\text{oppure } = 0) \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0\end{aligned}$$

### 3.6 Esercizi

**Esercizio 3.7 (Modello a due Fluidi)** Si consideri un plasma fatto da idrogeno ed elettroni. Considerando il modello a due fluidi carichi, comprensivo delle equazioni di Maxwell per i campi elettromagnetici, mostrare che:

1. Il numero totale di equazioni è 18, mentre il numero totale di incognite è 16 (ciascuna equazione o incognita vettoriale va contata 3 volte, per via delle 3 componenti coinvolte).
2. Applicando l'operatore divergenza alla legge di Faraday-Neumann-Lenz e al teorema di Ampere, mostrare che la legge di Poisson per il campo elettrico e il teorema di Gauss per il campo magnetico non sono leggi indipendenti, ma servono a fissare delle condizioni al contorno per i campi. In altri termini, ci sono soltanto 16 equazioni indipendenti, per altrettante incognite.

**Soluzione 3.7.1** Per verificare la consistenza matematica del modello a due fluidi (elettroni e ioni  $i$ ) accoppiato con l'elettromagnetismo, procediamo prima al conteggio delle variabili e delle equazioni, e successivamente all'analisi della loro indipendenza lineare.

**1. Conteggio delle incognite e delle equazioni** Le variabili che definiscono completamente lo stato del sistema in ogni punto dello spazio e del tempo sono le densità, le pressioni e le velocità di ciascuna specie, oltre ai campi elettrico e magnetico.

- **Incognite scalari:** Densità  $n_e, n_i$  e pressioni  $p_e, p_i$ . Totale:  $2 + 2 = 4$ .
- **Incognite vettoriali:** Velocità dei fluidi  $\mathbf{u}_e, \mathbf{u}_i$  e campi  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ . Poiché ogni vettore ha 3 componenti, il totale è:  $4 \times 3 = 12$ .

Nota: La densità di carica  $\rho$  e di corrente  $\mathbf{J}$  non sono incognite aggiuntive, ma sono definite in funzione delle precedenti:  $\rho = \sum q_\alpha n_\alpha$  e  $\mathbf{J} = \sum q_\alpha n_\alpha \mathbf{u}_\alpha$ .

$$\text{Totale Incognite} = 4 + 12 = \mathbf{16}$$

Elenchiamo ora le equazioni del sistema:

- **Equazioni di Continuità:**  $\partial_t n_\alpha + \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = 0$  per  $\alpha = e, i$  (2 equazioni scalari).

- **Equazioni del Momento:** Equazioni vettoriali del moto per  $\alpha = e, i$ . Contano per  $2 \times 3 = 6$  equazioni scalari.
- **Equazioni di Stato:**  $p_\alpha = C n_\alpha^\gamma$  per  $\alpha = e, i$  (2 equazioni scalari).
- **Equazioni di Maxwell (statiche):**  $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$  e  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  (2 equazioni scalari).
- **Equazioni di Maxwell (dinamiche):**  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$  e  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}$ . Essendo vettoriali, contano per  $2 \times 3 = 6$  equazioni scalari.

$$\text{Totale Equazioni} = 2 + 6 + 2 + 2 + 6 = \mathbf{18}$$

A prima vista, il sistema appare sovradeterminato ( $18 > 16$ ).

**2. Indipendenza delle equazioni** Dimostriamo che le due equazioni di Maxwell contenenti la divergenza sono ridondanti rispetto alle equazioni dinamiche (contenenti i rotori) e alle leggi di conservazione.

*Caso del campo magnetico: Consideriamo la legge di Faraday:*

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Applicando l'operatore divergenza ad entrambi i membri e ricordando che la divergenza di un rotore è sempre nulla ( $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ ), otteniamo:

$$0 = -\nabla \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{B})$$

Se imponiamo la condizione iniziale  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$  all'istante  $t = 0$ , la derivata temporale nulla garantisce che tale condizione rimanga vera per ogni  $t > 0$ .

*Caso del campo elettrico: Consideriamo la legge di Ampere-Maxwell:*

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Applicando la divergenza:

$$0 = \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E})$$

Dalle equazioni di continuità fluide, sommando i contributi delle specie pesati per la carica, si ottiene l'equazione di conservazione della carica  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ . Sostituendo  $\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$  nell'espressione sopra:

$$-\mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0 \implies \frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{\rho}{\epsilon_0} \right) = 0$$

Anche in questo caso, la quantità tra parentesi è una costante del moto. Se la legge di Poisson è valida inizialmente, lo sarà sempre.

**Conclusione:** Le due equazioni "statiche" di Maxwell agiscono come vincoli sulle condizioni iniziali e non governano l'evoluzione temporale. Il numero di equazioni indipendenti si riduce quindi a  $18 - 2 = \mathbf{16}$ , eguagliando il numero delle incognite e rendendo il sistema ben posto.

**Esercizio 3.8 (Velocità di deriva diamagnetica)** Una colonna cilindrica indefinita di un plasma di idrogeno con simmetria per rotazione è immersa in un campo magnetico  $\mathbf{B}$ , uniforme ed assiale. La densità  $n(r)$  di ciascuna specie di plasma ha un profilo radiale descritto da

$$n(r) = n_0 \exp(-r^2/r_0^2) \quad (15)$$

dove  $r_0$  è un opportuno parametro. Le densità elettronica  $n_e$  e ionica  $n_i$  soddisfano la neutralità di carica e vale inoltre che

$$n_i = n_e = n_0 \exp(e\phi(r)/T_e) \quad (16)$$

dove  $T_e$  è la temperatura elettronica, supposta uniforme, e  $\phi(r)$  è il potenziale elettrostatico. Mostrare che la velocità di deriva  $\mathbf{v}_{E \times B} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}$  e la velocità di deriva diamagnetica per gli elettroni  $\mathbf{v}_{De}$  sono uguali ed opposte. In particolare, osservare che, per effetto di queste velocità, il plasma ruota come un corpo rigido. Valutare infine la densità di corrente diamagnetica complessiva, cioè data dal contributo sia degli elettroni, sia degli ioni.

**Soluzione 3.8.1** Consideriamo un sistema di coordinate cilindriche  $(r, \theta, z)$  con il campo magnetico diretto lungo l'asse:  $\mathbf{B} = B\hat{z}$ . Poiché la densità dipende solo da  $r$ , il gradiente di densità è radiale:  $\nabla n = \frac{dn}{dr} \hat{r}$ .

**1. Confronto tra deriva elettrica e diamagnetica** Dalla relazione di Boltzmann per gli elettroni  $n_e(r) = n_0 \exp(e\phi(r)/T_e)$ , ricaviamo il campo elettrico interno  $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ . Invertendo la relazione:

$$\ln\left(\frac{n_e}{n_0}\right) = \frac{e\phi}{T_e} \implies \phi = \frac{T_e}{e} \ln\left(\frac{n_e}{n_0}\right)$$

Differenziando rispetto a  $r$  (con  $T_e$  costante):

$$E_r = -\frac{d\phi}{dr} = -\frac{T_e}{e} \frac{1}{n_e} \frac{dn_e}{dr}$$

La velocità di deriva elettrica ( $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ) è quindi:

$$\mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} = \frac{1}{B^2} \left( -\frac{T_e}{en_e} \frac{dn_e}{dr} \hat{r} \right) \times (B\hat{z}) = \frac{T_e}{en_e B} \frac{dn_e}{dr} \hat{\theta}$$

Calcoliamo ora la velocità di deriva diamagnetica elettronica. Usando l'equazione di stato  $p_e = n_e T_e$  (con  $T_e$  in unità energetiche) e la carica  $q_e = -e$ :

$$\mathbf{v}_{De} = \frac{\mathbf{B} \times \nabla p_e}{q_e n_e B^2} = \frac{\mathbf{B} \times (T_e \nabla n_e)}{-en_e B^2} = -\frac{T_e}{en_e B^2} (B\hat{z} \times \frac{dn_e}{dr} \hat{r}) = -\frac{T_e}{en_e B} \frac{dn_e}{dr} \hat{\theta}$$

Confrontando le due espressioni, risulta evidente che:

$$\mathbf{v}_E = -\mathbf{v}_{De}$$

Le due velocità sono uguali in modulo ma dirette in verso opposto lungo la direzione azimutale.

**2. Rotazione a corpo rigido** Sostituiamo il profilo di densità gaussiano  $n(r) = n_0 \exp(-r^2/r_0^2)$  nel calcolo della derivata:

$$\frac{dn}{dr} = n_0 \exp(-r^2/r_0^2) \cdot \left( -\frac{2r}{r_0^2} \right) = -n(r) \frac{2r}{r_0^2}$$

Sostituendo questo risultato nell'espressione (in modulo) delle velocità di deriva:

$$v \propto \frac{1}{n} \frac{dn}{dr} = \frac{1}{n} \left( -n \frac{2r}{r_0^2} \right) = -\frac{2}{r_0^2} r$$

Si osserva che la velocità di deriva (sia essa quella elettrica o diamagnetica) dipende linearmente dalla distanza dall'asse ( $v \propto r$ ). Una velocità lineare nel raggio corrisponde cinematicamente a una rotazione con velocità angolare costante  $\Omega = v/r = \text{cost.}$  Pertanto, le componenti di deriva inducono una rotazione "rigida" della colonna di plasma.

**3. Densità di corrente diamagnetica totale** La corrente diamagnetica totale è la somma dei contributi di specie:

$$\mathbf{J}_D = \mathbf{J}_{De} + \mathbf{J}_{Di} = n(-e)\mathbf{v}_{De} + n(e)\mathbf{v}_{Di}$$

La deriva diamagnetica ionica, assumendo ioni con temperatura  $T_i$  e carica  $+e$ , è data da:

$$\mathbf{v}_{Di} = \frac{\mathbf{B} \times \nabla p_i}{enB^2} = \frac{T_i}{enB} \frac{dn}{dr} \hat{\theta}$$

Sostituendo le espressioni delle velocità in  $\mathbf{J}_D$ :

$$\mathbf{J}_D = -en \left( -\frac{T_e}{enB} \frac{dn}{dr} \hat{\theta} \right) + en \left( \frac{T_i}{enB} \frac{dn}{dr} \hat{\theta} \right) = \frac{T_e + T_i}{B} \frac{dn}{dr} \hat{\theta}$$

Notando che la pressione totale è  $p = n(T_e + T_i)$ , ritroviamo l'espressione standard  $\mathbf{J} = \frac{\mathbf{B} \times \nabla p}{B^2}$ . Inserendo il profilo gaussiano esplicito:

$$\mathbf{J}_D = \frac{T_e + T_i}{B} \left( -n(r) \frac{2r}{r_0^2} \right) \hat{\theta} = -\frac{2n(r)(T_e + T_i)}{Br_0^2} r \hat{\theta}$$

La corrente scorre in direzione azimutale (opposta a  $\hat{\theta}$  per via del segno meno, quindi diamagnetica nel senso che genera un campo opposto a  $B$ ) e la sua intensità è modulata dal prodotto del raggio per la gaussiana.

## 4 Equilibri in Magnetoidrodinamica

In questa sezione analizziamo il modello Magnetoidrodinamico (MHD), le condizioni di equilibrio statico, le configurazioni di confinamento (Pinch), la conservazione del flusso magnetico e introduciamo lo studio delle instabilità e delle onde.

### 4.1 Il Modello MHD

La Magnetoidrodinamica descrive il plasma come un fluido conduttore unico.

#### 4.1.1 Variabili del modello

Le variabili macroscopiche fondamentali sono:

- $\rho$ : densità di massa.
- $\mathbf{u}$ : velocità del fluido.
- $\mathbf{J}$ : densità di corrente.
- $p$ : pressione (isotropa).

#### 4.1.2 Equazioni fondamentali

**Definizione 4.1 (Equazione di Continuità)** *Rappresenta la conservazione della massa:*

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

dove  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$  è la derivata lagrangiana (o convettiva).

**Definizione 4.2 (Equazione del Moto)** *Legge di Newton per un fluido soggetto a forze elettromagnetiche e di pressione:*

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p$$

**Definizione 4.3 (Legge di Ohm Generalizzata)** *Descrive la relazione tra campo elettrico e dinamica del plasma.*

- **MHD Ideale** (assenza di collisioni):

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = 0$$

Implica  $\mathbf{E}_{\parallel} = 0$  e  $\mathbf{E}_{\perp} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ .

- **MHD Resistiva** (con collisioni):

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{J}$$

dove la resistività è  $\eta = \frac{m_e \bar{v}_{e,i}}{n_e e^2}$ .

**Definizione 4.4 (Equazione di Stato)** *Chiude il sistema legando pressione e densità (solitamente adiabatica):*

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \text{cost.}$$

Il sistema è completato dalle **Equazioni di Maxwell** (trascurando la corrente di spostamento e assumendo quasi-neutralità  $Zen_i \approx en_e$ ):

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$$

## 4.2 Equilibrio Statico e Forze Magnetiche

Consideriamo una configurazione di equilibrio statico, definita da  $\mathbf{u} = 0$  e  $\partial_t = 0$ . In queste condizioni, l'equazione del moto si riduce al bilanciamento tra la forza di gradiente di pressione e la forza di Lorentz:

$$\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

**Superfici Isobare e Magnetiche** Moltiplicando scalarmente l'equazione di equilibrio prima per  $\mathbf{J}$  e poi per  $\mathbf{B}$ , sfruttando la proprietà del prodotto misto ( $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = 0$ ), otteniamo:

$$\mathbf{J} \cdot \nabla p = 0$$

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0$$

Questo risultato geometrico è fondamentale: il gradiente di pressione è ortogonale sia alle linee di campo magnetico che alle linee di corrente. Di conseguenza,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{J}$  giacciono su superfici a pressione costante ( $p = \text{costante}$ ), chiamate *superfici magnetiche* o *flux surfaces*.

**Scomposizione della Forza di Lorentz** Per analizzare le forze in gioco, esprimiamo la densità di corrente tramite la legge di Ampère (in condizioni stazionarie):

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}$$

Sostituendo nell'equazione di equilibrio:

$$\nabla p = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$$

Utilizziamo ora la seguente identità vettoriale per il termine a destra:

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla \left( \frac{B^2}{2} \right)$$

Sostituendo e riordinando i termini, l'equazione di equilibrio diventa:

$$\nabla \left( p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}$$

Qui riconosciamo due concetti fisici distinti legati al campo magnetico:

- $\nabla(B^2/2\mu_0)$ : è il gradiente della **Pressione Magnetica**. Agisce come una pressione isotropa, tendendo a espandere le linee di campo.
- $(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} / \mu_0$ : è la **Tensione Magnetica**. Deriva dalla curvatura delle linee di campo.

**Introduzione della Curvatura** Per comprendere meglio il termine di tensione, scomponiamo il campo nel suo modulo e nella sua direzione (versore):

$$\mathbf{B} = B \hat{\mathbf{b}}$$

Calcoliamo il termine direzionale  $(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}$ :

$$(\mathbf{B} \cdot \nabla)(B \hat{\mathbf{b}}) = B(\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla)(B \hat{\mathbf{b}})$$

Applicando la regola di derivazione del prodotto:

$$B \left[ \underbrace{(\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla B)}_{\nabla_{\parallel} B} \hat{\mathbf{b}} + B \underbrace{(\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{b}})}_{\boldsymbol{\kappa}} \right] = \hat{\mathbf{b}} \nabla_{\parallel} \left( \frac{B^2}{2} \right) + B^2 \boldsymbol{\kappa}$$

dove  $\nabla_{\parallel}$  indica la derivata lungo la linea di campo e  $\boldsymbol{\kappa} = (\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla) \hat{\mathbf{b}}$  è il **vettore curvatura**, che punta verso il centro di curvatura della linea di campo ed è per definizione perpendicolare a  $\hat{\mathbf{b}}$ .

Sostituendo questa espressione nell'equazione di equilibrio e proiettando lungo la direzione perpendicolare alle linee di campo ( $\nabla_{\perp}$ ), i termini paralleli si elidono e rimane:

$$\nabla_{\perp} \left( p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \frac{B^2}{\mu_0} \boldsymbol{\kappa}$$

**Interpretazione fisica:** In una configurazione di equilibrio, la somma della pressione cinetica e della pressione magnetica (pressione totale) non è costante, ma il suo gradiente perpendicolare deve bilanciare la tensione magnetica dovuta alla curvatura delle linee di campo. Se le linee sono dritte ( $\boldsymbol{\kappa} = 0$ ), la pressione totale è costante.

### 4.3 Configurazioni di Pinch

Analizziamo tre configurazioni fondamentali in geometria cilindrica.

#### 4.3.1 $\theta$ -pinch

In questa configurazione, una corrente scorre in direzione azimutale ( $\theta$ ) sulla superficie o all'interno del plasma, generando un campo magnetico indotto in direzione assiale ( $z$ ).

- Campo magnetico:  $\mathbf{B} = B_z(r)\hat{\mathbf{z}}$ .
- Densità di corrente:  $\mathbf{J} = J_\theta(r)\hat{\theta}$ .
- Curvatura delle linee di campo:  $\kappa = (\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla)\hat{\mathbf{b}} = 0$  (le linee di campo sono rette parallele all'asse  $z$ ).

**Equilibrio e Calcolo di  $\beta$**  L'equazione di equilibrio magnetoidrodinamico (MHD) è  $\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ . In geometria cilindrica, considerando solo la componente radiale:

$$\frac{dp}{dr} = J_\theta B_z$$

Usando la legge di Ampère ( $\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}$ ), abbiamo  $\mu_0 J_\theta = -\frac{dB_z}{dr}$ . Sostituendo nell'equazione di equilibrio:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{1}{\mu_0} B_z \frac{dB_z}{dr} = -\frac{d}{dr} \left( \frac{B_z^2}{2\mu_0} \right)$$

Portando tutto a primo membro e integrando rispetto a  $r$ , otteniamo la condizione di **equilibrio della pressione totale**:

$$\frac{d}{dr} \left( p + \frac{B_z^2}{2\mu_0} \right) = 0 \implies p(r) + \frac{B_z^2(r)}{2\mu_0} = \text{costante}$$

Questa equazione afferma che la somma della pressione cinetica del plasma ( $p$ ) e della pressione magnetica ( $B^2/2\mu_0$ ) è costante in tutto il volume.

Valutiamo la costante confrontando il centro del plasma ( $r = 0$ ) con l'esterno ( $r \rightarrow \infty$  o parete):

- **Esterno** (vuoto):  $p = 0$ ,  $B_z = B_{ext}$  (campo prodotto dalle bobine).
- **Interno** (asse):  $p = p_0$  (massimo),  $B_z = B_{int}$  (campo interno).

Uguagliando le pressioni totali:

$$p_0 + \frac{B_{int}^2}{2\mu_0} = \frac{B_{ext}^2}{2\mu_0}$$

Da cui ricaviamo la pressione che il campo magnetico esterno può confinare:

$$p_0 = \frac{B_{ext}^2}{2\mu_0} - \frac{B_{int}^2}{2\mu_0}$$

Il parametro  $\beta$  è definito come il rapporto tra la pressione cinetica del plasma e la pressione magnetica esterna disponibile per il confinamento:

$$\beta \equiv \frac{p_0}{B_{ext}^2/2\mu_0}$$

Sostituendo l'espressione di  $p_0$ :

$$\beta = \frac{\frac{B_{ext}^2}{2\mu_0} - \frac{B_{int}^2}{2\mu_0}}{\frac{B_{ext}^2}{2\mu_0}} = 1 - \left( \frac{B_{int}}{B_{ext}} \right)^2$$

**Conclusioni su  $\beta$ :**

1. Poiché  $B_{int}^2 \geq 0$ , risulta sempre  $\beta \leq 1$ .
2. Il caso  $\beta = 1$  corrisponde a  $B_{int} = 0$ . Questo è il caso ideale di *diamagnetismo perfetto*: il plasma espelle completamente il campo magnetico dal suo interno e la pressione cinetica è sostenuta interamente dalla pressione magnetica esterna.
3. Nella realtà, il campo penetra parzialmente nel plasma, quindi  $0 < \beta < 1$ .

La configurazione è stabile all'interscambio (le linee sono dritte), ma soffre di gravi perdite di particelle alle estremità del cilindro ("end losses").

#### 4.3.2 Z-pinch

In questa configurazione, una corrente  $I$  scorre in direzione assiale ( $z$ ) lungo il plasma, generando un campo magnetico azimutale ( $\theta$ ) che confina il plasma stesso ("self-constriction").

- Campo magnetico:  $\mathbf{B} = B_\theta(r)\hat{\theta}$ .
- Densità di corrente:  $\mathbf{J} = J_z(r)\hat{z}$ .
- Curvatura:  $\kappa = -\frac{\hat{r}}{r}$  (le linee di campo sono cerchi concentrici).

**Equilibrio Radiale** In coordinate cilindriche  $(r, \theta, z)$ , assumendo simmetria assiale, la pressione dipende unicamente dal raggio:

$$p = p(r) \quad \Rightarrow \quad \nabla p = \frac{dp}{dr} \hat{r}.$$

Nel Z-pinch il campo magnetico e la densità di corrente sono dati da:

$$\mathbf{B} = B_\theta(r)\hat{\theta}, \quad \mathbf{J} = J_z(r)\hat{z}.$$

Il prodotto vettoriale che compare nella forza di Lorentz è quindi:

$$\mathbf{J} \times \mathbf{B} = J_z \hat{z} \times B_\theta \hat{\theta} = -J_z B_\theta \hat{r},$$

avendo utilizzato la relazione  $\hat{z} \times \hat{\theta} = -\hat{r}$ .

L'equazione di equilibrio MHD

$$\nabla p = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$$

fornisce pertanto l'equilibrio radiale:

$$\frac{dp}{dr} = -J_z B_\theta.$$

Per riscrivere questa equazione mettendo in evidenza i contributi della pressione magnetica e della tensione magnetica, utilizziamo la legge di Ampère:

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}.$$



Nel caso di simmetria cilindrica, l'unica componente non nulla del rotore è quella assiale:

$$(\nabla \times \mathbf{B})_z = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rB_\theta) = \mu_0 J_z,$$

da cui:

$$J_z = \frac{1}{\mu_0 r} \frac{d}{dr}(rB_\theta).$$

Sostituendo questa espressione nell'equilibrio radiale si ottiene:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{B_\theta}{\mu_0 r} \frac{d}{dr}(rB_\theta).$$

Espandendo la derivata:

$$\frac{d}{dr}(rB_\theta) = B_\theta + r \frac{dB_\theta}{dr},$$

segue:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{1}{\mu_0 r} \left( B_\theta^2 + rB_\theta \frac{dB_\theta}{dr} \right).$$

Separando i termini:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} - \frac{1}{\mu_0} B_\theta \frac{dB_\theta}{dr}.$$

Osservando che:

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} \right) = \frac{1}{\mu_0} B_\theta \frac{dB_\theta}{dr},$$

l'equazione di equilibrio può essere riscritta nella forma:

$$\frac{d}{dr} \left( p + \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} \right) + \frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} = 0.$$

Il termine  $\frac{B_\theta^2}{\mu_0 r}$  rappresenta la *tensione magnetica* associata alla curvatura delle linee di campo, che nel Z-pinch sono circonferenze di raggio  $r$  e tendono quindi a contrarsi verso l'asse del plasma.

**Calcolo di  $\beta$  per Corrente Uniforme** Assumiamo una densità di corrente costante  $J_z = J_0$  all'interno del raggio del plasma  $r \leq a$ .

1. **Calcolo del campo magnetico (Legge di Ampère):**

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{conc} \implies B_\theta(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 (J_0 \pi r^2)$$

Da cui:

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0 J_0 r}{2}$$

2. **Calcolo della pressione (Equilibrio):** Sostituiamo  $B_\theta$  e  $J_z$  nell'equazione di equilibrio  $\frac{dp}{dr} = -J_z B_\theta$ :

$$\frac{dp}{dr} = -J_0 \left( \frac{\mu_0 J_0 r}{2} \right) = -\frac{\mu_0 J_0^2}{2} r$$

Integriamo dal raggio generico  $r$  al bordo  $a$  (dove la pressione si annulla,  $p(a) = 0$ ):

$$p(r) = \int_r^a \frac{\mu_0 J_0^2}{2} r' dr' = \frac{\mu_0 J_0^2}{2} \left[ \frac{r'^2}{2} \right]_r^a$$

Otteniamo il profilo parabolico:

$$p(r) = \frac{\mu_0 J_0^2}{4}(a^2 - r^2)$$

3. **Calcolo di  $\beta$ :** Il valore massimo della pressione si ha al centro ( $r = 0$ ):

$$p_{max} = p(0) = \frac{\mu_0 J_0^2 a^2}{4}$$

La pressione magnetica al bordo del plasma ( $r = a$ ), che funge da "parete" magnetica, è:

$$B_{wall} = B_\theta(a) = \frac{\mu_0 J_0 a}{2} \implies P_{mag} = \frac{B_{wall}^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\mu_0^2 J_0^2 a^2}{4} \right) = \frac{\mu_0 J_0^2 a^2}{8}$$

Il parametro  $\beta$ , definito sul picco di pressione, risulta:

$$\beta = \frac{p_{max}}{B_{wall}^2/2\mu_0} = \frac{\frac{\mu_0 J_0^2 a^2}{4}}{\frac{\mu_0 J_0^2 a^2}{8}} = 2$$

**Nota bene 4.5** Il fatto che  $\beta > 1$  (specificamente  $\beta = 2$ ) indica che il gas è confinato non solo dalla pressione magnetica esterna, ma dalla tensione delle linee di campo che lo "strozzano". Tuttavia, questa configurazione è altamente instabile (instabilità "salsicciotto"  $m = 0$  e "kink"  $m = 1$ ).

### 4.3.3 Screw Pinch

Questa configurazione è una sovrapposizione delle due precedenti: una corrente assiale  $J_z$  (come nello Z-pinch) e una corrente azimutale  $J_\theta$  (come nel  $\theta$ -pinch).

- Campo magnetico:  $\mathbf{B} = B_\theta(r)\hat{\theta} + B_z(r)\hat{z}$ .
- Linee di campo: Elicoidali (si avvolgono a spirale attorno al toro/cilindro).

L'equazione di equilibrio radiale completa è:

$$\frac{d}{dr} \left( p + \frac{B_z^2 + B_\theta^2}{2\mu_0} \right) + \frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} = 0$$

**Calcolo della Pressione Media (Teorema del Viriale)** Vogliamo trovare una relazione per la pressione media volumetrica  $\langle p \rangle$ , definita come:

$$\langle p \rangle = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a p(r) 2\pi r dr = \frac{2}{a^2} \int_0^a p(r) r dr$$

Per farlo, moltiplichiamo l'equazione di equilibrio per  $r^2$  e integriamo da 0 ad  $a$ . Riscriviamo l'equazione separando i gradienti:

$$\frac{dp}{dr} + \frac{d}{dr} \left( \frac{B_z^2}{2\mu_0} \right) + \underbrace{\frac{d}{dr} \left( \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} \right) + \frac{B_\theta^2}{\mu_0 r}}_{\text{Termine Z-pinch}} = 0$$

Il termine relativo al campo azimutale può essere semplificato notando che  $B_\theta \approx \frac{1}{r}$  non vale ovunque, ma possiamo usare l'identità:  $\frac{1}{2\mu_0 r^2} \frac{d}{dr} (r^2 B_\theta^2) = \frac{B_\theta}{\mu_0 r} \frac{d}{dr} (r B_\theta)$ . Tuttavia, procediamo per integrazione per parti diretta dei singoli termini moltiplicati per  $r^2$ .

L'operazione globale è  $\int_0^a r^2 [\dots] dr = 0$ . Analizziamo i tre addendi:

1. **Termine di pressione:**

$$\int_0^a r^2 \frac{dp}{dr} dr = [r^2 p]_0^a - \int_0^a 2rp dr$$

Poiché la pressione al bordo è nulla ( $p(a) = 0$ ), il termine al bordo sparisce. L'integrale rimanente è esattamente proporzionale alla pressione media:

$$\int_0^a r^2 \frac{dp}{dr} dr = -a^2 \langle p \rangle$$

2. **Termine di campo assiale ( $B_z$ ):**

$$\int_0^a r^2 \frac{d}{dr} \left( \frac{B_z^2}{2\mu_0} \right) dr = \left[ r^2 \frac{B_z^2}{2\mu_0} \right]_0^a - \int_0^a 2r \frac{B_z^2}{2\mu_0} dr$$

Il primo termine è il valore al bordo. Il secondo è proporzionale alla media di  $B_z^2$ :

$$= a^2 \frac{B_z^2(a)}{2\mu_0} - a^2 \left\langle \frac{B_z^2}{2\mu_0} \right\rangle$$

3. **Termine di campo azimutale ( $B_\theta$ ):** Questo termine include sia la pressione magnetica che la tensione. Si può dimostrare (vedi Z-pinch) che l'integrale del viriale di tutto il blocco azimutale si riduce al solo termine di bordo (poiché la forza interna è bilanciata):

$$\int_0^a r^2 \left( \frac{d}{dr} \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} + \frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} \right) dr = \frac{a^2 B_\theta^2(a)}{2\mu_0}$$

Sommando i tre contributi e dividendo per  $a^2$ :

$$-\langle p \rangle + \left( \frac{B_z^2(a)}{2\mu_0} - \frac{\langle B_z^2 \rangle}{2\mu_0} \right) + \frac{B_\theta^2(a)}{2\mu_0} = 0$$

Riorganizzando i termini otteniamo la relazione finale:

$$\langle p \rangle = \frac{B_\theta^2(a)}{2\mu_0} + \frac{1}{2\mu_0} (B_z^2(a) - \langle B_z^2 \rangle)$$

**Interpretazione Fisica:**

- Il primo termine ( $\propto B_\theta^2$ ) è il contributo di confinamento dello **Z-pinch** (sempre positivo).
- Il secondo termine dipende dalla differenza tra campo esterno e campo medio interno.
  - Se  $B_z(a) > \sqrt{\langle B_z^2 \rangle}$  (paramagnetismo), il termine è positivo e aiuta il confinamento.
  - Se  $B_z(a) < \sqrt{\langle B_z^2 \rangle}$  (diamagnetismo, tipico del  $\theta$ -pinch), il termine è negativo: il plasma "spinge" contro le linee di campo.

Questa configurazione è la base del **Tokamak**, dove un forte campo  $B_z$  stabilizza le instabilità MHD (kink) tipiche dello Z-pinch puro, permettendo di superare il limite di Kruskal-Shafranov (fattore di sicurezza  $q > 1$ ).

## 4.4 Teorema del Flusso Congelato (Legge di Gelo)

In MHD Ideale, il flusso magnetico attraverso una superficie solidale col fluido si conserva.

**Teorema 4.6 (Teorema di Alfvén o "Legge di Gelo")** *In un fluido conduttore con resistività nulla (o molto piccola), le linee di campo magnetico rimangono congelate in un dato volume del fluido (in inglese, frozen in).*

$$\frac{d\Phi}{dt} = 0$$

**Dimostrazione 4.6.1** *La variazione del flusso attraverso una superficie  $S(t)$  che si muove con velocità  $\mathbf{u}$  è data da:*

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \oint_C \mathbf{B} \cdot (\mathbf{u} \times d\mathbf{l})$$

Usando Faraday ( $\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}$ ) e Stokes, si ottiene:

$$\frac{d\Phi}{dt} = - \oint_C (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}$$

Se vale la legge di Ohm ideale ( $\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = 0$ ), l'integrale è nullo.

**Osservazione 4.7 (Caso Resistivo)** *Se  $\eta \neq 0$ , si ha diffusione del campo magnetico:*

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{B} \quad (\text{con } \mathbf{u} = 0)$$

Le linee di campo non sono più perfettamente "incollate" al plasma ma diffondono.

## 4.5 Effetti Toroidali e Instabilità

Chiudendo uno screw-pinch a formare un toro (Tokamak), nascono forze radiali espansive:

1. **Hoop Force:** Espansione dovuta alla repulsione tra correnti nel toro (maggiore pressione magnetica interna).
2. **Tire Tube Force:** Dovuta alla pressione cinetica e alla differenza di superficie tra interno ed esterno del toro.
3. **Forza  $1/R$ :** Dovuta al gradiente del campo magnetico toroidale ( $B_\phi \propto 1/R$ ).

Le instabilità che ne derivano possono essere classificate in:

- **Ideali:** Veloci ( $\tau \sim \mu s$ ), senza riconnessione.
- **Resistive:** Lente ( $\tau \sim s$ ), permettono il cambiamento della topologia magnetica.
- **Interne/Esterne:** A seconda della localizzazione nel plasma.

## 4.6 Onde nei Plasmi e Analisi Spettrale

Per studiare le perturbazioni e le onde, si utilizza l'analisi di Fourier.

**Definizione 4.8 (Trasformata di Fourier)** *Per un dominio infinito, una funzione  $f(x)$  può essere rappresentata come:*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk$$

#### 4.6.1 Onde Elettromagnetiche nel Vuoto

Dalle equazioni di Maxwell nel vuoto, il campo elettrico soddisfa l'equazione d'onda:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

Cercando soluzioni di onda piana  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(kx - \omega t)}$ , si ottiene la **relazione di dispersione**:

$$\omega^2 = k^2 c^2 \implies \frac{\omega}{k} = c = \text{cost.}$$

Il vuoto è un mezzo *non dispersivo*. Nei plasmi, invece,  $\omega(k)$  è generalmente non lineare, rendendo il plasma un mezzo dispersivo dove la velocità di fase e di gruppo differiscono.

#### 4.7 Esercizi

**Esercizio 4.9 (z-pinch e corrente necessaria per il confinamento)** La pressione media in uno z-pinch di raggio  $a = 0.1 \text{ m}$  è  $\langle p \rangle = 10 \text{ bar}$ . Assumendo che la pressione si annulli al bordo dello z-pinch, ovvero  $p(a) = 0$ , e assumendo una densità di corrente uniforme, determinare la corrente di plasma necessaria per garantire l'equilibrio magnetoidrodinamico.

**Soluzione 4.9.1** Dalla teoria sappiamo che assumendo una densità di corrente uniforme  $\mathbf{J} = J_z \hat{\mathbf{z}}$  (costante), il profilo di pressione radiale che soddisfa l'equilibrio è parabolico:

$$p(r) = \frac{\mu_0 J^2}{4} (a^2 - r^2)$$

L'obiettivo è relazionare la corrente totale  $I$  alla pressione media  $\langle p \rangle$ . Calcoliamo la pressione media sulla sezione circolare del plasma:

$$\langle p \rangle = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a p(r) 2\pi r dr$$

Sostituendo l'espressione di  $p(r)$ :

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \frac{2}{a^2} \frac{\mu_0 J^2}{4} \int_0^a (a^2 r - r^3) dr = \frac{\mu_0 J^2}{2a^2} \left[ \frac{a^2 r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^a \\ \langle p \rangle &= \frac{\mu_0 J^2}{2a^2} \left( \frac{a^4}{4} \right) = \frac{\mu_0 J^2 a^2}{8} \end{aligned}$$

Ora esprimiamo la densità di corrente  $J$  in funzione della corrente totale  $I$ . Poiché  $J$  è uniforme:

$$I = J \cdot (\pi a^2) \implies J = \frac{I}{\pi a^2}$$

Sostituiamo  $J$  nella relazione della pressione media (questa relazione è nota anche come relazione di Bennett):

$$\langle p \rangle = \frac{\mu_0 a^2}{8} \left( \frac{I}{\pi a^2} \right)^2 = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 a^2}$$

Invertiamo la formula per esplicitare la corrente  $I$ :

$$I = \sqrt{\frac{8\pi^2 a^2 \langle p \rangle}{\mu_0}} = 2\pi a \sqrt{\frac{2\langle p \rangle}{\mu_0}}$$

Procediamo con il calcolo numerico. Convertiamo la pressione in unità SI (Pascal):

$$\langle p \rangle = 10 \text{ bar} = 1 \times 10^6 \text{ Pa}, \quad a = 0.1 \text{ m}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$$

$$I = \sqrt{\frac{8\pi^2(0.1)^2(10^6)}{4\pi \cdot 10^{-7}}} = \sqrt{2\pi \cdot 10^{11}} \approx 7.92 \times 10^5 \text{ A}$$

La corrente necessaria per il confinamento è quindi:

$$I \approx 793 \text{ kA}$$

**Esercizio 4.10 (Fattore di sicurezza e screw pinch)** L'equazione differenziale che descrive la traiettoria di una linea di campo magnetico  $\mathbf{B}$  è

$$d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = 0$$

dove  $d\mathbf{l}$  indica un elemento infinitesimo di linea di campo. Usando un opportuno sistema di coordinate cilindriche  $(r, \theta, z)$ , mostrare che la traiettoria della linea di campo soddisfa le seguenti equazioni differenziali:

$$\frac{dr}{dz} = \frac{B_r}{B_z}$$

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{B_\theta}{rB_z}$$

Verificare quindi che, per uno screw pinch,  $r = \text{cost}$  (ovvero la linea di campo si avvolge su di una superficie cilindrica a raggio  $r$  fissato) e la sua traiettoria  $\theta(z)$  è

$$\theta(z) = \theta_0 + \frac{B_\theta(r)}{rB_z(r)} z$$

In particolare, determinare la trasformata rotazionale  $i(r)$  di uno screw pinch, definita come l'angolo  $\Delta\theta$  spazzato dalla linea di campo quando questa si sposta di una quantità  $\Delta z = 2\pi R_0$  lungo l'asse, e il fattore di sicurezza  $q(r) = 2\pi/i$ <sup>1</sup>.

Nel caso di uno screw pinch di lunghezza  $2\pi R_0$  (supposta molto grande) e in assenza di forze ( $\nabla p = 0$ ), determinare una equazione per il profilo radiale di  $B_z(r)$  in funzione di  $q(r)$ . Calcolare infine i profili  $B_z(r)$  e  $B_\theta(r)$  nel caso in cui il fattore di sicurezza sia noto e costante,  $q(r) = q_0$ , e si conosca il valore lungo l'asse di  $B_z$ , ovvero  $B_z(r=0) = B_0$ .

**Soluzione 4.10.1** Partendo dalla descrizione delle screw pinch fatta nei paragrafi precedenti procediamo a risolvere l'esercizio come segue.

**1. Equazioni della linea di campo** La condizione di parallelismo tra l'elemento di linea  $d\mathbf{l}$  e il campo magnetico  $\mathbf{B}$  è data da  $d\mathbf{l} \times \mathbf{B} = 0$ . In coordinate cilindriche  $(r, \theta, z)$ , i vettori sono:

$$d\mathbf{l} = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + dz \hat{\mathbf{z}}, \quad \mathbf{B} = B_r \hat{\mathbf{r}} + B_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} + B_z \hat{\mathbf{z}}$$

La condizione di prodotto vettoriale nullo implica che le componenti siano proporzionali:

$$\frac{dr}{B_r} = \frac{r d\theta}{B_\theta} = \frac{dz}{B_z}$$

<sup>1</sup>Il fattore di sicurezza è un parametro di grande rilevanza per la discussione della stabilità delle configurazioni di equilibrio MHD

Uguagliando la prima e la terza frazione otteniamo l'equazione radiale:

$$\frac{dr}{dz} = \frac{B_r}{B_z}$$

Uguagliando la seconda e la terza otteniamo l'equazione azimutale:

$$\frac{r d\theta}{dz} = \frac{B_\theta}{B_z} \implies \frac{d\theta}{dz} = \frac{B_\theta}{r B_z}$$

**2. Traiettoria, Trasformata Rotazionale e Fattore di Sicurezza** Nello *Screw Pinch*, il campo magnetico ha solo componenti  $\theta$  e  $z$  che dipendono solo da  $r$ :  $\mathbf{B} = B_\theta(r)\hat{\theta} + B_z(r)\hat{z}$ . Poiché  $B_r = 0$ , dall'equazione radiale segue:

$$\frac{dr}{dz} = 0 \implies r = \text{costante}$$

Le linee di campo giacciono quindi su superfici cilindriche (superfici di flusso). Per la coordinata  $\theta$ , integriamo l'equazione differenziale rispetto a  $z$ . Poiché  $r$  è costante lungo la linea, anche  $B_\theta(r)$  e  $B_z(r)$  sono costanti lungo l'integrazione:

$$\theta(z) = \int \frac{B_\theta(r)}{r B_z(r)} dz = \theta_0 + \frac{B_\theta(r)}{r B_z(r)} z$$

La **trasformata rotazionale**  $i(r)$  è la variazione  $\Delta\theta$  su una lunghezza di periodicità  $L = 2\pi R_0$ :

$$i(r) = \Delta\theta(z = 2\pi R_0) = \frac{B_\theta(r)}{r B_z(r)} (2\pi R_0)$$

Il **fattore di sicurezza**  $q(r)$  è definito come  $2\pi/i(r)$ :

$$q(r) = \frac{2\pi}{\frac{2\pi R_0 B_\theta}{r B_z}} = \frac{r B_z(r)}{R_0 B_\theta(r)}$$

**3. Profilo radiale in equilibrio Force-Free** L'equazione di equilibrio radiale generale (in assenza di forze inerziali) è  $(\mathbf{J} \times \mathbf{B})_r = \nabla_r p$ . Esplicitando la forza di Lorentz in geometria cilindrica:

$$\frac{d}{dr} \left( p + \frac{B_\theta^2 + B_z^2}{2\mu_0} \right) + \frac{B_\theta^2}{\mu_0 r} = 0$$

Nel caso *force-free* ( $\nabla p = 0$ , quindi  $p = 0$ ) l'equazione diventa:

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{B_z^2}{2} + \frac{B_\theta^2}{2} \right) + \frac{B_\theta^2}{r} = 0$$

Dalla definizione di  $q(r)$ , possiamo scrivere  $B_\theta = \frac{r B_z}{R_0 q}$ . Sostituendo nell'equazione differenziale:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dr} \left( B_z^2 + \frac{r^2 B_z^2}{R_0^2 q^2} \right) + \frac{r B_z^2}{R_0^2 q^2} = 0$$

Questa è l'equazione differenziale generale che lega il profilo di  $B_z$  al profilo di  $q(r)$ .

**4. Soluzione per  $q(r) = q_0$  costante** Se  $q(r) = q_0$  è costante, definiamo la costante  $k = \frac{1}{R_0 q_0}$ . L'equazione diventa:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dr} [B_z^2 (1 + k^2 r^2)] + k^2 r B_z^2 = 0$$

Derivando il prodotto:

$$\frac{1}{2} \left[ (1 + k^2 r^2) 2B_z \frac{dB_z}{dr} + B_z^2 (2k^2 r) \right] + k^2 r B_z^2 = 0$$

Semplificando e dividendo per  $B_z$  (assumendo  $B_z \neq 0$ ):

$$(1 + k^2 r^2) \frac{dB_z}{dr} + k^2 r B_z + k^2 r B_z = 0 \implies (1 + k^2 r^2) \frac{dB_z}{dr} = -2k^2 r B_z$$

Separiamo le variabili e integriamo:

$$\frac{dB_z}{B_z} = -\frac{2k^2 r}{1 + k^2 r^2} dr \implies \ln B_z = -\ln(1 + k^2 r^2) + C$$

Da cui  $B_z(r) = \frac{C'}{1 + k^2 r^2}$ . Imponendo la condizione al contorno  $B_z(0) = B_0$ , otteniamo i profili finali:

$$B_z(r) = \frac{B_0}{1 + \left(\frac{r}{R_0 q_0}\right)^2}$$

E utilizzando la relazione tra le componenti del campo:

$$B_\theta(r) = \frac{r}{R_0 q_0} B_z(r) = \frac{B_0 \left(\frac{r}{R_0 q_0}\right)}{1 + \left(\frac{r}{R_0 q_0}\right)^2}$$

## 5 Elementi di onde nei plasmi

### 5.1 Proprietà delle onde elettromagnetiche nel vuoto

#### 5.1.1 Richiami matematici: Serie di Fourier

Consideriamo una funzione  $f$ , definita in un certo intervallo  $(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2})$  e appartenente allo spazio  $\mathcal{L}_2(\mathbb{R})$ . Essa può essere espressa come somma di funzioni trigonometriche:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ a_m \cos\left(\frac{2\pi m x}{a}\right) + b_m \sin\left(\frac{2\pi m x}{a}\right) \right]$$

dove i coefficienti sono dati da:

$$a_m = \frac{2}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(x) \cos\left(\frac{2\pi m x}{a}\right) dx \quad \text{e} \quad b_m = \frac{2}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(x) \sin\left(\frac{2\pi m x}{a}\right) dx$$

Questo significa che una funzione su un intervallo limitato può essere rappresentata con un numero discreto di numeri d'onda. I numeri d'onda sono definiti come  $k_m = \frac{2\pi}{a} m$  e sono separati da un intervallo  $\Delta k = \frac{2\pi}{a}$ .



Tuttavia, nella realtà fisica questa rappresentazione non è adatta per descrivere un'onda, poiché un'onda deve potersi propagare in tutto lo spazio e non rimanere confinata in un intervallo limitato. Ci chiediamo quindi: cosa cambia se il dominio diventa indefinito?

Per rispondere, passiamo alla notazione complessa. Definiamo  $z_m = e^{i\frac{2\pi m}{a}x}$ . Utilizzando le relazioni di Eulero, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) &= \operatorname{Re} z_m = \frac{z_m + \bar{z}_m}{2} = \frac{z_m + z_{-m}}{2} \\ \sin\left(\frac{2\pi mx}{a}\right) &= \operatorname{Im} z_m = \frac{z_m - \bar{z}_m}{2i} = \frac{z_m - z_{-m}}{2i}\end{aligned}$$

Sostituendo nell'espressione originale di  $f(x)$ , otteniamo:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \left( \frac{z_m + z_{-m}}{2} \right) + b_m \left( \frac{z_m - z_{-m}}{2i} \right)$$

**Nota bene 5.1** Valgono le proprietà di simmetria  $a_m = a_{-m}$  e  $b_m = -b_{-m}$ .

Riorganizzando i termini, si ottiene:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} z_m \left( \frac{a_m - ib_m}{2} \right) + z_{-m} \left( \frac{a_m - ib_m}{2} \right)$$

Estendendo la somma da  $-\infty$  a  $+\infty$ , possiamo scrivere in forma compatta:

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{i\frac{2\pi mx}{a}}$$

dove i coefficienti complessi  $c_m$  sono definiti come:

$$c_m = \frac{a_m - ib_m}{2} = \frac{1}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(x) e^{-i\frac{2\pi mx}{a}} dx$$

### 5.1.2 Passaggio al continuo: Trasformata di Fourier

Questa funzione contiene le informazioni in un insieme finito di componenti associati a numeri d'onda discreti, multipli di un numero d'onda fondamentale  $k_0 = 2\pi/a$ , con spaziatura  $\Delta k = k_{m+1} - k_m = \frac{2\pi}{a}$  e  $k_m = mk_0$ .

Se facciamo tendere l'intervallo all'infinito,  $a \rightarrow \infty$ , allora la spaziatura diventa infinitesima:  $\Delta k \rightarrow dk$ . Abbiamo quindi bisogno di un pacchetto d'onda continuo. Vogliamo legare i coefficienti  $c_m$  alla funzione  $f$ . Manipolando l'espressione:

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{a} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} f(x) e^{-i\frac{2\pi mx}{a}} dx \xrightarrow{a \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx dk$$

(con un aggiustamento delle costanti di normalizzazione per simmetria, spesso si usa  $1/\sqrt{2\pi}$ ).

Quindi, la rappresentazione integrale diventa:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk c(k) e^{ikx}$$

con  $c(k)$  che rappresenta la **Trasformata di Fourier**:

$$c(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-ikx}$$

### 5.1.3 Pacchetti d'onda e principio di indeterminazione

Un pacchetto d'onda è una sovrapposizione di onde piane con numeri d'onda distribuiti in un intorno di un valore centrale  $k_0$ . La localizzazione spaziale e spettrale è limitata dalla relazione di indeterminazione

$$\sigma_x, \sigma_k \geq \frac{1}{2},$$

che esprime l'impossibilità di costruire un pacchetto arbitrariamente localizzato sia nello spazio fisico sia nello spazio dei numeri d'onda.

Dimostriamo che non è possibile localizzare arbitrariamente un pacchetto d'onda sia nello spazio fisico ( $x$ ) che nello spazio dei numeri d'onda ( $k$ ). Definiamo le varianze (assumendo medie nulle e normalizzazione unitaria):

$$\sigma_x^2 = \|xu\|^2, \quad \sigma_k^2 = \|k\tilde{u}\|^2$$

Usando il Teorema di Parseval e la proprietà della derivata ( $\mathcal{F}[du/dx] = ik\tilde{u}$ ):

$$\sigma_k^2 = \int |k\tilde{u}|^2 dk = \int \left| \frac{du}{dx} \right|^2 dx = \left\| \frac{du}{dx} \right\|^2$$

Il prodotto delle varianze è  $\sigma_x^2 \sigma_k^2 = \|xu\|^2 \|u'\|^2$ . Applicando la disuguaglianza di Schwarz ( $\|f\|^2 \|g\|^2 \geq |\langle f, g \rangle|^2$ ) con  $f = xu$  e  $g = u'$ :

$$\sigma_x^2 \sigma_k^2 \geq \left| \int xu^* \frac{du}{dx} dx \right|^2 = |I|^2$$

Integrando per parti  $I$ , si trova che  $2\text{Re}(I) = -1$ , quindi  $|I| \geq 1/2$ . Ne consegue:

$$\sigma_x \sigma_k \geq \frac{1}{2}$$

## 5.2 Onde piane nel vuoto

Finora abbiamo introdotto gli strumenti matematici, ma non è ancora chiaro il legame con le onde fisiche. Analizziamo le equazioni di Maxwell nel vuoto:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 & \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \nabla \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

### 5.2.1 Derivazione dell'equazione delle onde

Dobbiamo soddisfare il sistema accoppiato. Prendiamo il rotore della terza equazione:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = -\frac{\partial (\nabla \times \vec{B})}{\partial t}$$

Usando l'identità vettoriale  $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$  e sostituendo  $\nabla \times \vec{B}$ :

$$\nabla(\underbrace{\nabla \cdot \vec{E}}_0) - \nabla^2 \vec{E} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \implies \nabla^2 \vec{E} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Ricordando che  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ , otteniamo:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Analogamente per il campo magnetico:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial(\nabla \times \vec{E})}{\partial t} \implies \nabla^2 \vec{B} - \epsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0$$

### 5.2.2 Soluzione ad onda piana

Consideriamo la propagazione solo lungo l'asse  $x$ , quindi  $\vec{E}(x, t)$  e  $\vec{B}(x, t)$ , con  $\nabla^2 \rightarrow \partial^2/\partial x^2$ . Cerchiamo una soluzione del tipo onda piana:

$$u(x, t) = u_0 e^{i(kx \mp \omega t)}$$

Calcoliamo le derivate parziali:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= iku, & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= (ik)^2 u = -k^2 u \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \mp i\omega u, & \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (\mp i\omega)^2 u = -\omega^2 u \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione d'onda  $\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$ :

$$u_0 e^{i(kx \mp \omega t)} \left( -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) = 0 \iff \frac{\omega}{k} = \pm c$$

Abbiamo trovato la **relazione di dispersione**:

$$\omega = \omega(k) = \pm kc$$

La soluzione generale è  $u(x, t) = u_0 e^{ik(x \mp \frac{\omega}{k} t)}$ , dove  $\frac{\omega}{k} = v_f$  è la **velocità di fase**. Infatti, la fase è costante se  $x \mp v_f t = \text{cost}$ , il che implica  $\Delta x = \pm v_f \Delta t$  (legato all'omogeneità spaziale e temporale).

**Nota bene 5.2** Anche la sovrapposizione integrale  $\int_{-\infty}^{\infty} c(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$  è soluzione. Non serve specificare il  $\pm$  nell'esponentiale se integriamo su  $k$  positivi (progressive) e negativi (regressive).

Considerando i campi in 3D come parte reale di un fasore complesso:

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \vec{\epsilon}_1 E_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}, \quad \vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{\epsilon}_2 B_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t)}$$

Dalle equazioni di Maxwell  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$  e  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  segue che  $i\vec{k} \cdot \vec{\epsilon}_1 = 0$  e  $i\vec{k} \cdot \vec{\epsilon}_2 = 0$ . Quindi i vettori di polarizzazione  $\vec{\epsilon}_1, \vec{\epsilon}_2$  sono perpendicolari a  $\vec{k}$ : l'onda è trasversale. Inoltre  $\vec{k}, \vec{E}, \vec{B}$  formano una terna ortogonale.

Usando la legge di Faraday  $\nabla \times \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$ , troviamo:

$$i\vec{k} \times \vec{E} = i\omega \vec{B} \implies E_0(\vec{k} \times \vec{\epsilon}_1) = \omega \vec{\epsilon}_2 B_0$$

Da cui si ricavano due osservazioni importanti:

1.  $|\vec{\epsilon}_2| = 1 \implies \frac{k}{\omega} \frac{E_0}{B_0} = 1 \implies \frac{E_0}{B_0} = \frac{\omega}{k} = c$ .
2.  $\vec{\epsilon}_1 \cdot \vec{\epsilon}_2 = 0$  (i campi sono ortogonali tra loro).

### 5.3 Mezzi dispersivi e sovrapposizione di onde

Cosa succede se il mezzo è dispersivo, ovvero se la velocità di fase dipende da  $k$ ? La relazione di dispersione  $\omega(k)$  non è più lineare. Tuttavia, vale ancora che:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{u}(k) e^{i(kx - \omega(k)t)}$$

è soluzione delle equazioni di Maxwell. Il coefficiente spettrale è legato alla condizione iniziale:  $\hat{u}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{-ikx} dx$ .

#### 5.3.1 Determinazione dei coefficienti dalle condizioni iniziali

**Caso 1: Velocità iniziale nulla** Supponiamo di sapere che  $u(x, t = 0) = u_0(x)$  e  $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = 0$ . A  $t = 0$ ,  $u_0(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{u}(k) e^{ikx}$ , quindi  $\hat{u}(k)$  è semplicemente la trasformata di Fourier del profilo iniziale. Dobbiamo però garantire che  $u(x, t)$  sia una grandezza reale. Verifichiamo la condizione di realtà:  $u^*(k) = \hat{u}(-k)$ . Dividiamo l'integrale in componenti con  $k$  positivi e negativi. Imponendo la condizione fisica che  $\omega(k) = \omega(-k)$  (il mezzo è isotropo rispetto alla direzione di propagazione), la soluzione reale si scrive come:

$$u(x, t) = \text{Re} \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk \hat{c}(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} \right]$$

**Caso 2: Velocità iniziale non nulla** Supponiamo ora  $u(x, t = 0) = u_0(x)$  e  $\frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = v_0(x)$ . Cerchiamo una soluzione della forma:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left( A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} + \text{c.c.} \right) \right]$$

Imponendo le condizioni iniziali a  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \left( A(k) + \bar{A}(-k) \right) e^{ikx} \\ v_0(x) &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk (-i\omega) \left( A(k) - \bar{A}(-k) \right) e^{ikx} \end{aligned}$$

I termini tra parentesi sono legati alle trasformate di Fourier di  $u_0$  e  $v_0$ . Risolvendo il sistema per  $A(k)$ :

$$A(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left( u_0(x) + \frac{i}{\omega(k)} v_0(x) \right) e^{-ikx}$$

#### 5.3.2 Velocità di Fase e di Gruppo

In un mezzo dispersivo, ogni componente spettrale viaggia con la propria velocità. Questo causa lo "sfilacciamento" del pacchetto d'onda. Tuttavia, se la dispersione è debole, per brevi istanti il pacchetto mantiene la sua forma e viaggia alla **velocità di gruppo**.

Definiamo:

- $v_f = \frac{\omega}{k}$ : velocità dei fronti d'onda (fase).
- $v_g = \frac{d\omega(k)}{dk}$ : velocità del pacchetto (gruppo).

In un mezzo non dispersivo,  $v_g$  è costante e coincide con  $v_f$ : il pacchetto trasla rigidamente.

Consideriamo un pacchetto con un numero d'onda dominante  $k_0$ . Espandiamo  $\omega(k)$  in serie di Taylor attorno a  $k_0$ :

$$\omega(k) \simeq \omega(k_0) + \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0} (k - k_0) + \mathcal{O}((k - k_0)^2)$$

Sostituendo nell'integrale dell'onda:

$$u(x, t) \simeq \text{Re} \left[ e^{i(k_0 x - \omega(k_0) t)} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk A(k) e^{i(k - k_0)(x - v_g t)}}_{\text{involuppo traslante}} \right]$$

Il risultato è:

$$u(x, t) = u_0(x - v_g t) \cos(k_0 v_g t - \omega(k_0) t)$$

L'onda è descritta da un involuppo  $u_0$  che viaggia a velocità  $v_g$  e una modulazione interna (portante) legata alla differenza tra velocità di fase e di gruppo. Se la variazione di velocità è grande, l'approssimazione di mezzo debolmente dispersivo cade e il pacchetto si deforma significativamente.

## 5.4 Onde nei plasmi (Modello a due fluidi, $B=0$ )

Nel vuoto o nei dielettrici semplici  $\omega = ck/n$ . Nei plasmi la situazione è più complessa. Adottiamo un modello semplificato:

1. **Modello a due fluidi:** Trascuriamo il campo magnetico statico ( $B_0 = 0$ ), niente risonanze ciclotroniche.
2. **MHD:** Se consideriamo  $B_0$ , descriveremo il plasma come un fluido singolo conduttore.

Assumiamo un plasma uniforme, indefinito e studiamo onde di piccola ampiezza (perturbazioni lineari dell'equilibrio):

$$Q(x, t) = Q_0 + Q_1 e^{i(kx - \omega t)}$$

Le derivate diventano:  $\nabla \rightarrow i\vec{k}$  e  $\partial_t \rightarrow -i\omega$ .

### 5.4.1 Linearizzazione delle equazioni di Maxwell

All'equilibrio (indice 0), il plasma è quasi neutro ( $\nabla \cdot E_0 \approx 0$  su grandi scale) e statico ( $B_0, J_0$  nulli o costanti). Le equazioni perturbate (indice 1) sono:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E}_1 &= \frac{\rho_1}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \vec{B}_1 &= 0 \\ \nabla \times \vec{E}_1 &= -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \\ \nabla \times \vec{B}_1 &= \mu_0 \vec{J}_1 + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t} \end{aligned}$$

### 5.4.2 Onde Longitudinali (Elettrostatiche)

Dall'equazione di Poisson linearizzata per i modi normali:

$$i\vec{k} \cdot \vec{E}_1 = \frac{\rho_1}{\epsilon_0}$$

Se  $\rho_1 \neq 0$ , allora  $\vec{k} \cdot \vec{E}_1 \neq 0$ , il che implica che esiste una componente del campo elettrico parallela a  $\vec{k}$ : sono onde longitudinali.

Per trovare la relazione di dispersione, dobbiamo esprimere  $\rho_1 = \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{1\alpha}$  in funzione di  $E_1$ . Usiamo le equazioni dei fluidi linearizzate:

#### 1. Equazione di continuità linearizzata:

$$\frac{\partial n_{1\alpha}}{\partial t} + n_{0\alpha} \nabla \cdot \vec{v}_{1\alpha} = 0 \implies -i\omega n_{1\alpha} + n_{0\alpha} i\vec{k} \cdot \vec{v}_{1\alpha} = 0$$

**2. Equazione del moto (delle forze) linearizzata:** Trascurando i termini non lineari  $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$ :

$$m_{\alpha} n_{0\alpha} \frac{\partial \vec{v}_{1\alpha}}{\partial t} = n_{0\alpha} q_{\alpha} \vec{E}_1 - \nabla P_{1\alpha}$$

**3. Equazione di stato linearizzata:** Assumiamo  $P \propto n^{\gamma}$ , quindi  $\frac{\nabla P_1}{P_0} = \gamma \frac{\nabla n_1}{n_0}$ . Sostituendo  $P_0 = n_0 T_0$ , otteniamo  $\nabla P_{1\alpha} = \gamma T_{0\alpha} \nabla n_{1\alpha}$ .

Sostituendo l'equazione di stato in quella del moto:

$$-i\omega m_{\alpha} n_{0\alpha} \vec{v}_{1\alpha} = n_{0\alpha} q_{\alpha} \vec{E}_1 - \gamma T_{0\alpha} i\vec{k} n_{1\alpha}$$

Moltiplichiamo scalarmente per  $\vec{k}$  per far apparire il termine di divergenza della velocità:

$$-i\omega m_{\alpha} n_{0\alpha} (\vec{k} \cdot \vec{v}_{1\alpha}) = n_{0\alpha} q_{\alpha} \vec{k} \cdot \vec{E}_1 - i k^2 \gamma T_{0\alpha} n_{1\alpha}$$

Usando l'equazione di continuità per sostituire  $\vec{k} \cdot \vec{v}_{1\alpha} = \frac{\omega n_{1\alpha}}{n_{0\alpha}}$ :

$$-i\omega^2 m_{\alpha} n_{1\alpha} = n_{0\alpha} q_{\alpha} \vec{k} \cdot \vec{E}_1 - i k^2 \gamma T_{0\alpha} n_{1\alpha}$$

Risolvendo per  $n_{1\alpha}$  e introducendo la velocità termica  $v_{T\alpha}^2 = T_{0\alpha}/m_{\alpha}$ :

$$n_{1\alpha} = \frac{n_{0\alpha} q_{\alpha}}{i m_{\alpha} (\omega^2 - \gamma v_{T\alpha}^2 k^2)} \vec{k} \cdot \vec{E}_1$$

Inserendo questo risultato nell'equazione di Poisson:

$$i\vec{k} \cdot \vec{E}_1 \left( 1 - \sum_{\alpha} \frac{n_{0\alpha} q_{\alpha}^2}{\epsilon_0 m_{\alpha}} \frac{1}{\omega^2 - \gamma k^2 v_{T\alpha}^2} \right) = 0$$

Per onde longitudinali ( $\vec{k} \cdot \vec{E}_1 \neq 0$ ), la parentesi deve annullarsi. Definiamo la frequenza di plasma  $\omega_{p\alpha}^2 = \frac{n_{0\alpha} q_{\alpha}^2}{m_{\alpha} \epsilon_0}$ . La **relazione di dispersione** è:

$$1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - \gamma k^2 v_{T\alpha}^2} = 0$$

### 5.4.3 Analisi dei Regimi di Temperatura

Definiamo la suscettività del plasma  $\chi_{\alpha} = -\frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - \gamma v_{T\alpha}^2 k^2}$ , tale che la relazione è  $1 + \sum \chi_{\alpha} = 0$ .

**Caso 1: Plasma Freddo** ( $T \rightarrow 0$ ) Se  $T \approx 0$ , allora  $v_{T\alpha} \rightarrow 0$ . La relazione diventa:

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} = 0 \implies \omega^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2 \approx \omega_{pe}^2$$

Poiché  $m_i \gg m_e$ . Non c'è dipendenza da  $k$ : non è un'onda che si propaga, ma un'oscillazione locale alla frequenza di plasma.

**Caso 2: Plasma Caldo** ( $T \neq 0$ ) Dobbiamo confrontare la velocità di fase  $v_f = \omega/k$  con le velocità termiche  $v_{Te}$  e  $v_{Ti}$ .

**1. Onde di Langmuir (Elettroniche):**  $v_{Ti}, v_{Te} \ll \omega/k$  Le particelle sono lente rispetto all'onda. Usiamo l'approssimazione adiabatica per gli elettroni ( $\gamma_e = 3$ ). Gli ioni sono immobili ( $\omega_{pi} \ll \omega_{pe}$ ). Sviluppando il denominatore:

$$\chi_e \approx -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{3k^2 v_{Te}^2}{\omega^2} \right)$$

La relazione di dispersione diventa (Onde di Bohm-Gross):

$$\omega^2 \approx \omega_{pe}^2 + 3k^2 v_{Te}^2$$

Questa è un'onda dispersiva che si propaga grazie alla pressione termica degli elettroni.

**2. Onde Ionico-Acustiche:**  $v_{Ti} \ll \omega/k \ll v_{Te}$  Gli ioni sono lenti (adiabatici,  $\gamma_i = 3$ ), ma gli elettroni sono veloci e riescono a termalizzare (isoterma,  $\gamma_e = 1$ ).

$$\chi_e \approx \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2}, \quad \chi_i \approx -\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}$$

Sostituendo nella relazione di dispersione  $1 + \chi_e + \chi_i = 0$ :

$$1 + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} = 0 \implies \omega^2 = \frac{k^2 C_s^2}{1 + k^2 \lambda_{De}^2}$$

dove  $C_s = \sqrt{\frac{T_e}{m_i}}$  è la **velocità del suono ionico**.

- Se  $k\lambda_{De} \ll 1$  (grandi lunghezze d'onda),  $\omega \approx kC_s$ : onde acustiche non dispersive.
- Se  $k\lambda_{De} \gg 1$ ,  $\omega \approx \omega_{pi}$ : oscillazioni ioniche.

**3. Schermatura di Debye:**  $v_{Ti}, v_{Te} \gg \omega/k$  Entrambe le specie sono isoterme. La relazione diventa statica:

$$1 + \frac{1}{k^2 \lambda_{De}^2} + \frac{1}{k^2 \lambda_{Di}^2} = 0$$

Soluzione:  $k = \pm i/\lambda_D$ . Non è un'onda, ma un potenziale schermato esponenzialmente ( $e^{-x/\lambda_D}$ ).

#### 5.4.4 Onde Elettromagnetiche nel Plasma ( $B = 0$ )

In questo caso cerchiamo onde trasversali,  $\vec{k} \cdot \vec{E}_1 = 0$ , quindi  $\rho_1 = 0$ . Dalle equazioni di Maxwell combinate (Ampere-Faraday):

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - i\omega\mu_0\sigma = 0$$

La conducibilità  $\sigma$  si ricava dall'equazione del moto trasversale:  $v_{1\alpha} = \frac{iq_\alpha}{\omega m_\alpha} E_1 \implies J_1 = \sigma E_1$  con  $\sigma = \frac{i\epsilon_0}{\omega} \sum \omega_{p\alpha}^2$ . La relazione di dispersione è:

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_{pe}^2$$

**Conseguenze:**

- Se  $\omega > \omega_{pe}$ ,  $k$  è reale: propagazione (con  $v_f > c$  e  $v_g < c$ ).
- Se  $\omega < \omega_{pe}$ ,  $k$  è immaginario puro: l'onda è **evanescente** (riflessione totale).

Applicazione: riflessione delle onde radio sulla ionosfera.

#### 5.4.5 Energia delle onde elettromagnetiche nel plasma

L'energia media di un'onda armonica è data dalla somma dei contributi elettrico, magnetico e meccanico:

$$\bar{W} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \bar{E}_1^2 + \frac{\bar{B}_1^2}{2\mu_0} + \frac{1}{2} \rho_e \bar{u}_1^2.$$

Dall'equazione del moto elettronico in forma armonica

$$-i\omega m_e \mathbf{u} = -e\mathbf{E}$$

segue  $u_1 = eE_1/(m_e\omega)$ . Usando la legge di Faraday e la relazione di dispersione si ricavano le relazioni

$$\bar{W}_E = \frac{\omega^2}{\omega \cdot pe^2} \bar{W}_M, \quad \bar{W}_B = \left( \frac{\omega^2}{\omega \cdot pe^2} - 1 \right) \bar{W}_M.$$

Ne segue

$$\begin{aligned} \bar{W}_M &= \frac{1}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \bar{W}, \\ \bar{W}_E &= \frac{1}{2} \bar{W}, \\ \bar{W}_B &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right) \bar{W}. \end{aligned}$$

Nel limite  $\omega \gg \omega_{pe}$  l'energia meccanica diventa trascurabile e l'onda si comporta come nel vuoto.

#### 5.4.6 Pacchetti d'onda e riflettometria

Un segnale reale di durata finita può essere scritto come sovrapposizione di onde piane con coefficienti determinati dalla trasformata di Fourier del profilo iniziale. In un plasma la propagazione è dispersiva e il pacchetto si muove con la velocità di gruppo.

La riflessione avviene quando  $\omega = \omega_{pe}(n_c)$ , che definisce la densità critica. Il tempo di volo del pacchetto è

$$t_g = \int \frac{ds}{v_g} = \frac{1}{c} \int ds \left( 1 - \frac{n(s)}{n_c} \right)^{-1/2}.$$

Questa espressione consente di ricostruire il profilo di densità elettronica a partire dal tempo di ritorno del segnale.



## 5.5 Onde in plasmi magnetizzati (MHD)

Introduciamo un campo magnetico statico  $\vec{B}_0 = B_0 \hat{z}$ . Usiamo il modello magnetoidrodinamico (MHD) a fluido singolo. Stato di equilibrio:  $\vec{u}_0 = 0, \rho_0, P_0, \vec{B}_0$ . Perturbazione: spostamento fluido  $\vec{\xi}(\vec{x}, t)$  tale che  $\vec{u}_1 = \partial \vec{\xi} / \partial t = -i\omega \vec{\xi}$ .

### 5.5.1 Linearizzazione delle equazioni MHD

1. Equazione del moto:

$$-\omega^2 \rho_0 \vec{\xi} = \vec{J}_1 \times \vec{B}_0 - \nabla P_1$$

Dobbiamo esprimere  $\vec{J}_1$  e  $P_1$  in funzione di  $\vec{\xi}$ .

2. Equazione di stato adiabatica:

$$\nabla P_1 = \gamma P_0 \nabla (\nabla \cdot \vec{\xi})$$

(Semplificato:  $P_1 = -\gamma P_0 \nabla \cdot \vec{\xi}$ ).

3. Equazione di induzione (da Ohm + Faraday): Legge di Ohm ideale:

$$\vec{E}_1 + \vec{u}_1 \times \vec{B}_0 = 0$$

Induzione:

$$\vec{B}_1 = \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0)$$

4. Legge di Ampere:

$$\mu_0 \vec{J}_1 = \nabla \times \vec{B}_1$$

Combinando tutto nell'equazione del moto, otteniamo un'equazione vettoriale per  $\vec{\xi}$ :

$$-\omega^2 \rho_0 \vec{\xi} = \frac{1}{\mu_0} [\nabla \times (\nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}_0))] \times \vec{B}_0 + \nabla (\gamma P_0 \nabla \cdot \vec{\xi})$$

Passando allo spazio di Fourier con  $\vec{k} = (k_x, 0, k_z)$  (senza perdita di generalità per simmetria rotazionale attorno a  $B_0$ ), otteniamo un sistema matriciale  $M \cdot \vec{\xi} = 0$ . Le soluzioni si ottengono ponendo  $\det M = 0$ .

### 5.5.2 Modi Normali MHD

Si ottengono tre modi fondamentali:

1. **Onde di Alfvén (Shear Alfvén)** Ottenute dalla radice  $\omega^2 = k_z^2 v_A^2$ .

- Velocità:  $v_A = B_0 / \sqrt{\mu_0 \rho_0}$  (velocità di Alfvén).
- Polarizzazione:  $\vec{\xi} \parallel \hat{y}$  (perpendicolare a  $\vec{k}$  e  $\vec{B}_0$ ).
- Fisica:  $\rho_1 = 0, \nabla \cdot \vec{\xi} = 0$ . È un'onda trasversale incompressibile. Il campo magnetico agisce come una corda tesa dotata di tensione magnetica. Non c'è compressione del plasma.

**2. Onde Magnetosoniche (Compressionali)** Derivano dall'equazione quadratica rimanente (accoppiamento tra pressione magnetica e termica).

$$\omega^4 - \omega^2 k^2 (v_A^2 + C_s^2) + k^2 k_z^2 v_A^2 C_s^2 = 0$$

Si distinguono due rami:

- Onda Magnetosonica Rapida (+): Nel limite di basso  $\beta$  ( $C_s \ll v_A$ ),  $\omega^2 \approx k^2 v_A^2$ .  
Propaga fluttuazioni di compressione magnetica e densità in fase. È quasi isotropa.
- Onda Magnetosonica Lenta (-) / Acustica: Nel limite di basso  $\beta$ ,  $\omega^2 \approx k_z^2 C_s^2$ .

È essenzialmente un'onda sonora confinata lungo le linee di campo magnetico ( $\xi \parallel B_0$ ). Poiché la forza di Lorentz è nulla lungo le linee di campo, il plasma si comporta come un gas neutro in quella direzione.

## 5.6 Esercizi

**Esercizio 5.3 (Oscillazioni di plasma in presenza di collisioni)** Si consideri un plasma uniforme di ioni ( $i$ ) ed elettroni ( $e$ ), con temperatura supposta nulla e in presenza di collisioni descritte da una forza del tipo  $-m_s n_s \nu \mathbf{u}_s$ , dove  $m_s$ ,  $n_s$  e  $\mathbf{u}_s$  sono, rispettivamente, la massa, densità e velocità fluida delle specie  $s$ , mentre  $\nu$  indica la frequenza di collisione. Combinando opportunamente le equazioni di continuità, di conservazione del momento lineare e il teorema di Poisson, nell'ambito della teoria lineare a due fluidi, mostrare che il plasma supporta oscillazioni smorzate alla frequenza di plasma  $\omega_P^2 \approx \frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0}$  e con una costante temporale di smorzamento dell'oscillazione  $\tau = 2/\nu$ . Si supponga  $\nu \ll \omega_P$ .

**Soluzione 5.3.1** Consideriamo le equazioni del modello a due fluidi linearizzato. Assumiamo una dipendenza temporale delle perturbazioni del tipo  $e^{-i\omega t}$ , per cui  $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$ .

**1. Equazione del moto con collisioni** L'equazione del moto linearizzata per la specie  $s$ , includendo il termine di attrito collisionale  $\vec{F}_{coll} = -m_s n_{s0} \nu \vec{u}_{s1}$ , è:

$$m_s n_{s0} \frac{\partial \vec{u}_{s1}}{\partial t} = n_{s0} q_s \vec{E}_1 - m_s n_{s0} \nu \vec{u}_{s1}$$

Passando al dominio delle frequenze:

$$-i\omega m_s n_{s0} \vec{u}_{s1} = n_{s0} q_s \vec{E}_1 - m_s n_{s0} \nu \vec{u}_{s1}$$

Raccogliendo i termini in  $\vec{u}_{s1}$  otteniamo la velocità in funzione del campo elettrico:

$$m_s n_{s0} \vec{u}_{s1} (\nu - i\omega) = n_{s0} q_s \vec{E}_1 \implies \vec{u}_{s1} = \frac{q_s}{m_s (\nu - i\omega)} \vec{E}_1$$

**2. Equazione di continuità** Dall'equazione di continuità linearizzata  $\frac{\partial n_{s1}}{\partial t} + n_{s0} \nabla \cdot \vec{u}_{s1} = 0$ , otteniamo:

$$-i\omega n_{s1} + n_{s0} \nabla \cdot \vec{u}_{s1} = 0 \implies n_{s1} = \frac{n_{s0}}{i\omega} \nabla \cdot \vec{u}_{s1}$$

Sostituendo l'espressione della velocità trovata al punto precedente:

$$n_{s1} = \frac{n_{s0}}{i\omega} \nabla \cdot \left( \frac{q_s}{m_s (\nu - i\omega)} \vec{E}_1 \right) = \frac{n_{s0} q_s}{i\omega m_s (\nu - i\omega)} \nabla \cdot \vec{E}_1$$

**3. Equazione di Poisson e Relazione di Dispersione** Sostituiamo la densità perturbata nell'equazione di Poisson  $\nabla \cdot \vec{E}_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_s q_s n_{s1}$ :

$$\nabla \cdot \vec{E}_1 = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_s \frac{n_{s0} q_s^2}{i\omega m_s (\nu - i\omega)} \nabla \cdot \vec{E}_1$$

Portando tutto a primo membro e ricordando la definizione di frequenza di plasma  $\omega_{ps}^2 = \frac{n_{s0} q_s^2}{m_s \epsilon_0}$ , otteniamo:

$$\left(1 - \sum_s \frac{\omega_{ps}^2}{i\omega(\nu - i\omega)}\right) \nabla \cdot \vec{E}_1 = 0$$

Per avere oscillazioni non banali ( $\nabla \cdot \vec{E}_1 \neq 0$ ), la parentesi deve annullarsi. Considerando che  $m_i \gg m_e$ , trascuriamo il contributo ionico ( $\omega_{pi} \ll \omega_{pe}$ ) e definiamo  $\omega_P \equiv \omega_{pe}$ :

$$1 - \frac{\omega_P^2}{i\omega(\nu - i\omega)} = 0$$

**4. Soluzione e Smorzamento** Risolviamo l'equazione per  $\omega$ :

$$i\omega(\nu - i\omega) = \omega_P^2 \implies \omega^2 + i\nu\omega - \omega_P^2 = 0$$

Le radici dell'equazione quadratica sono:

$$\omega = \frac{-i\nu \pm \sqrt{-\nu^2 + 4\omega_P^2}}{2} = -i\frac{\nu}{2} \pm \sqrt{\omega_P^2 - \frac{\nu^2}{4}}$$

Dato che per ipotesi  $\nu \ll \omega_P$ , possiamo approssimare  $\sqrt{\omega_P^2 - \nu^2/4} \approx \omega_P$ . Quindi:

$$\omega \approx \pm\omega_P - i\frac{\nu}{2}$$

Sostituendo nella forma dell'onda  $e^{-i\omega t}$ :

$$e^{-i(\pm\omega_P - i\nu/2)t} = e^{\mp i\omega_P t} e^{-\frac{\nu}{2}t}$$

Il termine  $e^{\mp i\omega_P t}$  rappresenta l'oscillazione alla frequenza di plasma. Il termine  $e^{-\frac{\nu}{2}t}$  rappresenta il decadimento esponenziale dell'ampiezza nel tempo. Confrontando con la forma standard di smorzamento  $e^{-t/\tau}$ , otteniamo la costante di tempo:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\nu}{2} \implies \tau = \frac{2}{\nu}$$

#### Esercizio 5.4 (Energia delle onde elettromagnetiche in un plasma uniforme e senza campo magnetico)

L'energia media  $\bar{W}$  di un'onda elettromagnetica che propaga in un plasma uniforme e privo di campo magnetico è descritta dall'espressione

$$\bar{W} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \bar{E}_1^2 + \frac{\bar{B}_1^2}{2\mu_0} + \frac{1}{2}\rho_e \bar{u}_1^2 = \bar{W}_E + \bar{W}_B + \bar{W}_M$$

dove  $E_1$  e  $B_1$  sono i campi elettrico e magnetico dell'onda,  $\rho_e$  è la densità di massa degli elettroni e  $u_1$  è la velocità fluida degli elettroni. Come indicato dalla relazione sopra, l'energia si compone di tre contributi, dovuti ad  $E_1$ ,  $B_1$  ed  $u_1$  ed indicati dalle espressioni  $\bar{W}_E$ ,  $\bar{W}_B$  e  $\bar{W}_M$ .

Usando l'equazione di conservazione del momento, la legge di Faraday e la relazione di dispersione delle onde elettromagnetiche in un plasma con le caratteristiche sopra descritte, mostrare che

- $\bar{W}_E = \frac{\omega^2}{\omega_{Pe}^2} \bar{W}_M$
- $\bar{W}_B = \left( \frac{\omega^2}{\omega_{Pe}^2} - 1 \right) \bar{W}_M$

dove  $\omega$  indica la frequenza angolare dell'onda e  $\omega_{Pe}$  la frequenza angolare di plasma degli elettroni. Mostrare quindi che

- $\bar{W}_M = \frac{1}{2} \frac{\omega_{Pe}^2}{\omega^2} \bar{W}$
- $\bar{W}_E = \frac{1}{2} \bar{W}$
- $\bar{W}_B = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\omega_{Pe}^2}{\omega^2} \right) \bar{W}$

A cosa si riducono le tre espressioni sopra nel limite  $\omega \gg \omega_{Pe}$ ? Giustificare la risposta da un punto di vista fisico.

**Soluzione 5.4.1** Sulla base della teoria illustrata in questo capitolo procediamo come segue.

**1. Relazione tra Energia Elettrica e Meccanica** Partiamo dall'equazione del moto per gli elettroni in regime armonico (Sezione 1.4.5 delle note), trascurando il campo magnetico statico:

$$-i\omega m_e \vec{u}_1 = -e \vec{E}_1 \implies \vec{u}_1 = \frac{e}{i\omega m_e} \vec{E}_1$$

Prendendo il modulo quadro della velocità:

$$|\vec{u}_1|^2 = \frac{e^2}{\omega^2 m_e^2} |\vec{E}_1|^2$$

L'energia meccanica media è definita come  $\bar{W}_M = \frac{1}{2} \rho_e \bar{u}_1^2$ , dove  $\rho_e = n_0 m_e$ . Sostituendo  $u_1$ :

$$\bar{W}_M = \frac{1}{2} (n_0 m_e) \left( \frac{e^2}{\omega^2 m_e^2} \bar{E}_1^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{n_0 e^2}{m_e \omega^2} \bar{E}_1^2$$

Ricordando la definizione di frequenza di plasma  $\omega_{Pe}^2 = \frac{n_0 e^2}{m_e \epsilon_0}$ , possiamo riscrivere il pre-fattore:

$$\bar{W}_M = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{\omega_{Pe}^2}{\omega^2} \bar{E}_1^2$$

Confrontando con l'espressione dell'energia elettrica  $\bar{W}_E = \frac{1}{2} \epsilon_0 \bar{E}_1^2$ , otteniamo:

$$\bar{W}_M = \frac{\omega_{Pe}^2}{\omega^2} \bar{W}_E \implies \bar{W}_E = \frac{\omega^2}{\omega_{Pe}^2} \bar{W}_M$$

**2. Relazione tra Energia Magnetica ed Elettrica** Dalla legge di Faraday  $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ , nel dominio di Fourier abbiamo  $i\vec{k} \times \vec{E}_1 = i\omega \vec{B}_1$ . Poiché per onde elettromagnetiche nel plasma  $\vec{k} \perp \vec{E}_1$ , passando ai moduli si ha:

$$k \bar{E}_1 = \omega \bar{B}_1 \implies \bar{B}_1 = \frac{k}{\omega} \bar{E}_1$$

L'energia magnetica è  $\bar{W}_B = \frac{\bar{B}_1^2}{2\mu_0}$ . Sostituendo  $B_1$ :

$$\bar{W}_B = \frac{1}{2\mu_0} \frac{k^2}{\omega^2} \bar{E}_1^2$$

Usando la relazione  $c^2 = 1/(\epsilon_0\mu_0)$ , sostituiamo  $1/\mu_0 = \epsilon_0 c^2$ :

$$\bar{W}_B = \frac{\epsilon_0 c^2 k^2}{2\omega^2} \bar{E}_1^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \left( \frac{1}{2} \epsilon_0 \bar{E}_1^2 \right) = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \bar{W}_E$$

Per legare questo risultato a  $\bar{W}_M$ , usiamo la relazione trovata al punto 1 ( $\bar{W}_E = \frac{\omega^2}{\omega_{Pe}^2} \bar{W}_M$ ):

$$\bar{W}_B = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \left( \frac{\omega^2}{\omega_{Pe}^2} \bar{W}_M \right) = \frac{c^2 k^2}{\omega_{Pe}^2} \bar{W}_M$$

Dalla relazione di dispersione delle onde elettromagnetiche nel plasma (Sezione 1.4.4),  $\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_{Pe}^2$ , ricaviamo  $k^2 c^2 = \omega^2 - \omega_{Pe}^2$ . Sostituendo:

$$\bar{W}_B = \frac{\omega^2 - \omega_{Pe}^2}{\omega_{Pe}^2} \bar{W}_M = \left( \frac{\omega^2}{\omega_{Pe}^2} - 1 \right) \bar{W}_M$$

**3. Espressioni in funzione dell'Energia Totale** L'energia totale è la somma dei tre contributi:

$$\bar{W} = \bar{W}_E + \bar{W}_B + \bar{W}_M$$

Esprimiamo tutto in funzione di  $\bar{W}_M$  usando le relazioni appena dimostrate:

$$\bar{W} = \left( \frac{\omega^2}{\omega_{Pe}^2} \bar{W}_M \right) + \left[ \left( \frac{\omega^2}{\omega_{Pe}^2} - 1 \right) \bar{W}_M \right] + \bar{W}_M$$

$$\bar{W} = \bar{W}_M \left( \frac{\omega^2}{\omega_{Pe}^2} + \frac{\omega^2}{\omega_{Pe}^2} - 1 + 1 \right) = 2 \frac{\omega^2}{\omega_{Pe}^2} \bar{W}_M$$

Da cui si ottengono le formule finali richieste:

- **Energia Meccanica:**

$$\bar{W}_M = \frac{1}{2} \frac{\omega_{Pe}^2}{\omega^2} \bar{W}$$

- **Energia Elettrica:** Sostituendo  $\bar{W}_M$  in  $\bar{W}_E = \frac{\omega^2}{\omega_{Pe}^2} \bar{W}_M$ :

$$\bar{W}_E = \frac{\omega^2}{\omega_{Pe}^2} \left( \frac{1}{2} \frac{\omega_{Pe}^2}{\omega^2} \bar{W} \right) = \frac{1}{2} \bar{W}$$

- **Energia Magnetica:** Sostituendo  $\bar{W}_M$  in  $\bar{W}_B = \left( \frac{\omega^2}{\omega_{Pe}^2} - 1 \right) \bar{W}_M$ :

$$\bar{W}_B = \left( \frac{\omega^2 - \omega_{Pe}^2}{\omega_{Pe}^2} \right) \frac{1}{2} \frac{\omega_{Pe}^2}{\omega^2} \bar{W} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\omega_{Pe}^2}{\omega^2} \right) \bar{W}$$

**Limite ad alta frequenza** ( $\omega \gg \omega_{Pe}$ ) Se la frequenza dell'onda è molto maggiore della frequenza di plasma, il termine  $\frac{\omega_{Pe}^2}{\omega^2} \rightarrow 0$ . Le espressioni diventano:

- $\bar{W}_M \rightarrow 0$
- $\bar{W}_E \rightarrow \frac{1}{2}\bar{W}$
- $\bar{W}_B \rightarrow \frac{1}{2}(1-0)\bar{W} = \frac{1}{2}\bar{W}$

**Giustificazione fisica:** In questo limite, l'inerzia degli elettroni impedisce loro di rispondere significativamente alle rapide oscillazioni del campo. L'energia cinetica associata al moto ordinato delle particelle diventa trascurabile. Il plasma si comporta quindi come il vuoto, dove l'energia è equipartita tra campo elettrico e campo magnetico.

**Esercizio 5.5 (Riflettometria)** Per lo studio del profilo di densità degli elettroni nella ionosfera, vengono usati pacchetti di onde elettromagnetiche di breve durata. Questi sono riflessi quando raggiungono la densità critica (cioè la densità a cui avviene la riflessione dell'onda) e viene misurato il tempo intercorso dal lancio del pacchetto al suo ritorno a terra. Si assuma che la densità degli elettroni cresca linearmente tra 0 e  $2 \times 10^{11} \text{ m}^{-3}$  tra le altitudini di 120 km e 220 km.

- Calcolare la massima frequenza dell'onda necessaria a sondare l'intero profilo di densità elettronica.
- Mostrare che il tempo di viaggio  $t_g$  del pacchetto nella ionosfera con la velocità di gruppo  $v_g$ , ovvero  $t_g = \int ds/v_g$ , si può scrivere come  $t_g = \frac{1}{c} \int ds(1 - n(s)/n_c)^{-1/2}$ , dove  $n_c$  è la densità critica associata all'altitudine fino a cui si vuole sondare.  $ds$  indica un elemento infinitesimo lungo la traiettoria dell'onda e  $n(s)$  è la densità elettronica in un particolare punto della traiettoria dell'onda.
- Calcolare  $t_g$  nel caso in cui si voglia sondare l'intero profilo di densità elettronica e trovare quindi il tempo totale per raggiungere la sommità della ionosfera, ovvero  $t_g$  maggiorato del tempo di propagazione necessario all'onda per raggiungere l'inizio della ionosfera.

**Soluzione 5.5.1** Basandomi su quanto illustrato in precedenza, procediamo come segue.

**1. Calcolo della massima frequenza di sondaggio** La riflessione di un'onda elettromagnetica in un plasma avviene quando la frequenza dell'onda  $\omega$  uguaglia la frequenza di plasma locale  $\omega_{pe}$ . La densità critica è quindi definita dalla condizione  $\omega = \omega_{pe}(n_c)$ . Dalle note,  $\omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0}}$ . La massima frequenza necessaria corrisponde alla densità massima del profilo,  $n_{max} = 2 \times 10^{11} \text{ m}^{-3}$ . Utilizzando i valori costanti standard (carica e massa dell'elettrone, permittività del vuoto):

$$f_{max} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{n_{max} e^2}{m_e \epsilon_0}} \approx \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2 \times 10^{11} \cdot (1.6 \times 10^{-19})^2}{9.1 \times 10^{-31} \cdot 8.85 \times 10^{-12}}} \approx 4.02 \text{ MHz}$$

**2. Derivazione del tempo di viaggio  $t_g$**  Un pacchetto d'onda si propaga con la velocità di gruppo  $v_g$ . Dalla relazione di dispersione  $\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_{pe}^2$  (Sezione 1.4.4), deriviamo  $v_g$ :

$$2\omega \frac{d\omega}{dk} = 2kc^2 \implies v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{kc^2}{\omega}$$

Esprimendo  $k$  dalla relazione di dispersione come  $k = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_{pe}^2}$ , otteniamo:

$$v_g = \frac{c^2}{\omega} \frac{\sqrt{\omega^2 - \omega_{pe}^2}}{c} = c \sqrt{1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}}$$

Poiché la riflessione alla quota di sondaggio avviene dove  $\omega = \omega_{pe}(n_c)$ , possiamo scrivere  $\omega_{pe}^2/\omega^2 = n(s)/n_c$ . Quindi  $v_g(s) = c\sqrt{1 - n(s)/n_c}$ . Il tempo di viaggio infinitesimo è  $dt = ds/v_g$ . Integrando lungo la traiettoria:

$$t_g = \int \frac{ds}{v_g} = \frac{1}{c} \int ds \left(1 - \frac{n(s)}{n_c}\right)^{-1/2}$$

**3. Calcolo numerico del tempo totale** Il profilo di densità è lineare:  $n(z) = n_{max} \frac{z-z_0}{L}$ , dove  $z_0 = 120$  km e  $L = 100$  km. Per sondare l'intero profilo, l'onda viaggia da  $z_0$  a  $z_0 + L$  e ritorna. Calcoliamo il tempo di andata nella ionosfera  $t_{iono}$ :

$$t_{iono} = \frac{1}{c} \int_0^L \left(1 - \frac{z}{L}\right)^{-1/2} dz$$

Ponendo  $u = 1 - z/L$ , allora  $du = -1/L dz$ :

$$t_{iono} = \frac{L}{c} \int_0^1 u^{-1/2} du = \frac{L}{c} [2\sqrt{u}]_0^1 = \frac{2L}{c}$$

Il tempo totale di percorrenza è composto da:

- **Propagazione nel vuoto:** L'onda deve percorrere  $z_0 = 120$  km (andata e ritorno) alla velocità  $c$ .

$$t_{vuoto} = \frac{2z_0}{c} = \frac{240 \times 10^3}{3 \times 10^8} = 0.8 \text{ ms}$$

- **Propagazione nella ionosfera:** L'onda percorre  $L = 100$  km (andata e ritorno) con velocità  $v_g$  variabile.

$$t_{riflessione} = 2 \cdot t_{iono} = \frac{4L}{c} = \frac{400 \times 10^3}{3 \times 10^8} \approx 1.33 \text{ ms}$$

Il tempo totale misurato a terra è:

$$t_{tot} = t_{vuoto} + t_{riflessione} = 0.8 + 1.33 = 2.13 \text{ ms}$$

## A Formulario

### A.1 Introduzione alla fisica dei plasmi

Equazione di Saha–Boltzmann:

$$\frac{n_i}{n} = \left( \frac{k k_B T_p (2\pi m_e k_B T)^{3/2}}{h^3} \exp \left\{ \left( -\frac{I}{k_B T} \right) \right\} \right)^{1/2}$$

Distribuzione di Maxwell–Boltzmann:

$$f(v) = n \left( \frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{mv^2}{2k_B T} \right)$$

Lunghezza di Debye (elettronica):

$$\frac{1}{\lambda_D^2} = \frac{n_e e^2}{\varepsilon_0 k_B T_e}$$

Frequenza di plasma (elettronica):

$$\omega_P^2 = \frac{n_e e^2}{m \varepsilon_0}$$

### A.2 Descrizione a singola particella: moto delle cariche in un plasma

Raggio di Larmor:

$$r_L = \frac{mv_{\perp}}{qB}$$

Frequenza di Larmor:

$$\omega_L = \frac{qB}{m}$$

Velocità di deriva:

$$\mathbf{v}_d = \frac{\mathbf{F}_{\perp} \times \mathbf{B}}{qB^2}$$

Velocità di polarizzazione:

$$\mathbf{v}_P = -\frac{m}{qB^2} \frac{d\mathbf{v}_D}{dt} \times \mathbf{B}$$

Momento magnetico:

$$\mu = \frac{mv_{\perp}^2}{2B}$$

Forza dovuta al gradiente del campo magnetico:

$$\mathbf{F}_{\nabla B} = -\mu \nabla B$$

Forza dovuta alla curvatura delle linee di campo magnetico:

$$\mathbf{F}_c = -mv_{\parallel}^2 (\hat{b} \cdot \nabla) \hat{b}$$

Momento canonico:

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}, \quad j = 1 \dots N$$



Equazioni di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad j = 1 \dots N$$

Integrale di azione:

$$I_j = \oint p_j dq_j$$

Lagrangiana della particella carica in un campo elettromagnetico:

$$L = \frac{1}{2}mv^2 + q\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v} - q\phi(\mathbf{x}, t)$$

con

- $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ ,
- $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ .

Angolo critico per il confinamento in uno specchio magnetico:

$$\sin^2 \theta_C = \frac{B_{\min}}{B_{\max}}$$

### A.3 Descrizione del plasma come un fluido carico

Equazione di continuità per la specie  $\alpha$ :

$$\nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{u}_\alpha) + \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} = 0$$

Equazione di conservazione del momento lineare (senza collisioni):

$$mn_\alpha \frac{d\mathbf{u}_\alpha}{dt} = n_\alpha q_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) - \nabla p$$

Equazione di stato:

$$\frac{\nabla p_\alpha}{p_\alpha} = \gamma \frac{\nabla n_\alpha}{n_\alpha}$$

Equazioni di Maxwell:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{J} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

Velocità di deriva diamagnetica:

$$\mathbf{u} = -\frac{\nabla p \times \mathbf{B}}{qnB^2}$$

Equazione di continuità in MHD:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

Equazione di conservazione del momento in MHD:

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p$$

Legge di Ohm (MHD resistiva):

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j}$$

Equazione di stato in MHD:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0$$

#### A.4 Equilibri in magneto-idro-dinamica (MHD)

Equazione dell'equilibrio:

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$$

oppure

$$\nabla_\perp \left( p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) - \hat{k} \frac{B^2}{\mu_0} = 0$$

con  $\hat{k} = (\hat{b} \cdot \nabla) \hat{b}$ .

Parametro  $\beta$ :

$$\beta = \frac{2\mu_0 p}{B^2}$$

Legge di gelo:

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

#### A.5 Elementi di onde nei plasmi

Serie di Fourier:

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_m e^{i2\pi m x/a}, \quad c_m = \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} f(x) e^{-i2\pi m x/a} dx$$

Trasformata di Fourier:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

Anti-trasformata:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk$$

Equazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

Soluzione generale:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(kx - \omega(k)t)} dk + c.c. \right)$$

Velocità di fase e di gruppo:

$$v_f = \frac{\omega(k)}{k}, \quad v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{k_0}$$

Principio di indeterminazione:

$$\sigma_x \sigma_k \geq \frac{1}{2}$$

Relazione di dispersione (plasma omogeneo non magnetizzato):

$$1 - \sum_s \frac{\omega_{Ps}^2}{\omega^2 - \gamma k^2 T_{0s}/m_s} = 0$$

Onde iono-acustiche:

$$\omega^2 = k^2 c_s^2 + \frac{3}{2} k^2 v_{thi}^2$$

con  $c_s^2 = \frac{T_e}{m_i}$

Onde di Bohm-Gross:

$$\omega^2 = \omega_{Pe}^2 + \frac{3}{2} k^2 v_{the}^2$$

Onde elettromagnetiche:

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_{Pe}^2$$

Velocità di Alfvén e del suono:

$$v_A^2 = \frac{B^2}{\mu_0 \rho}, \quad c_S^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}$$

Onde di Alfvén torsionali:

$$\omega = k_{||} v_A$$

Onde di Alfvén compressionali:

$$\omega = k v_A$$

Onde sonore:

$$\omega = k c_S$$

## B Identità vettoriali

In questa sezione,  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  rappresentano campi vettoriali e  $\psi, \phi$  rappresentano campi scalari, tutti assunti come differenziabili dove necessario.

### B.1 Identità Algebriche

- **Prodotto triplo scalare (Invarianza ciclica):**

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

- **Prodotto triplo vettoriale (Regola BAC-CAB):**

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$$

- **Identità di Lagrange:**

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

## B.2 Regole del Prodotto (Primo Ordine)

$$\begin{aligned}\nabla(\psi\phi) &= \psi\nabla\phi + \phi\nabla\psi \\ \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} \\ \nabla \cdot (\psi\mathbf{A}) &= \psi(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \cdot (\nabla\psi) \\ \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) \\ \nabla \times (\psi\mathbf{A}) &= \psi(\nabla \times \mathbf{A}) + (\nabla\psi) \times \mathbf{A} \\ \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B}\end{aligned}$$

## B.3 Identità del Secondo Ordine

- Rotore di un gradiente (sempre nullo):

$$\nabla \times (\nabla\psi) = \mathbf{0}$$

- Divergenza di un rotore (sempre nulla):

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

- Rotore di un rotore (Relazione col Laplaciano):

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

## B.4 Teoremi Integrali Fondamentali

Sia  $V$  un volume limitato da una superficie chiusa  $S = \partial V$ , e sia  $S$  una superficie aperta limitata da una curva chiusa  $C = \partial S$ :

- Teorema della Divergenza (Gauss):

$$\iiint_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV = \oint_S (\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS$$

- Teorema del Rotore (Stokes):

$$\iint_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}$$

## C Operatori differenziali in coordinate curvilinee

In coordinate curvilinee ortogonali  $(u_1, u_2, u_3)$ , l'elemento di linea infinitesimo è definito tramite i fattori di scala  $h_i$  come  $ds^2 = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2$ . Sia  $\psi$  un campo scalare e  $\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3$  un campo vettoriale.

## C.1 Formule Generali

- **Gradiente:**

$$\nabla\psi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\psi}{\partial u_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial\psi}{\partial u_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3} \frac{\partial\psi}{\partial u_3} \mathbf{e}_3$$

- **Divergenza:**

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right]$$

- **Rotore:**

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$$

- **Laplaciano:**

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} \left( \frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left( \frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial u_2} \right) + \frac{\partial}{\partial u_3} \left( \frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial u_3} \right) \right]$$

## C.2 Casi Particolari Notevoli

Sistema	Coord.	$h_1$	$h_2$	$h_3$
Cartesiane	$(x, y, z)$	1	1	1
Cilindriche	$(\rho, \phi, z)$	1	$\rho$	1
Sferiche	$(r, \theta, \phi)$	1	$r$	$r \sin \theta$

Tabella 1: Fattori di scala per i sistemi di coordinate comuni.

## D Integrali Gaussiani

In questa appendice vengono riportate le forme più comuni degli integrali gaussiani utilizzati in fisica e statistica. In tutte le espressioni seguenti, si assume che  $a$  sia una costante reale positiva ( $a > 0$ ).

### D.1 Forme Unidimensionali

L'integrale gaussiano fondamentale è dato da:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Nel caso sia presente un termine lineare all'esponente (completamento del quadrato), l'integrale diventa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+bx+c)} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}-c}$$

## D.2 Momenti della Distribuzione

I momenti della funzione gaussiana dipendono dalla parità della potenza di  $x$ . Per simmetria, i momenti di ordine dispari sono nulli:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+1} e^{-ax^2} dx = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Per i momenti di ordine pari, si ha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{(2n-1)!!}{2^n a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

dove  $(2n-1)!!$  indica il semifattoriale. I primi due casi notevoli sono:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx &= \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-ax^2} dx &= \frac{3}{4a^2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \end{aligned}$$

## D.3 Forma Multivariata

Sia  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  un vettore e  $A$  una matrice reale simmetrica definita positiva di ordine  $n$ . L'integrale gaussiano multivariato è:

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T A \mathbf{x}} d^n x = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det A}}$$

Se è presente un vettore sorgente  $\mathbf{J}$  (molto comune in meccanica quantistica e teoria dei campi):

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T A \mathbf{x} + \mathbf{J}^T \mathbf{x}} d^n x = \sqrt{\frac{(2\pi)^n}{\det A}} \exp\left(\frac{1}{2} \mathbf{J}^T A^{-1} \mathbf{J}\right)$$