Cálculo Infinitesimal 3 – Lista 2 - 2020

Prof. Flavio Dickstein.

Questão 1. Seja $F(x, y) = (x, -y)$ e seja γ o triângulo de vértices $A = (-1, 0)$, $B = (1, 0)$ e $C = (0, 1)$. Considere η como a normal unitária que aponta para fora de T. Determine $\int_\gamma F \cdot d\eta$, o fluxo de F através γ. (Resp.: 0.)

Questão 2. Repita o exercício para $F(x, y) = (x, y)$. (Resp.: 2.)

Questão 3. Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definido por $f(x) = 1$ se $x \in [0, 1]$, $f(x) = 0$ se $x \in [-1, 0)$. Considere uma partição $\mathcal{P}$ do intervalo $[-1, 1]$ e seja $[x_i, x_{i+1}]$ o intervalo que contem $x = 0$. Mostre que $U(\mathcal{P}) = 1 - x_i$ e que $L(\mathcal{P}) = 1 - x_{i+1}$, onde U e L são as somas de Riemann máxima e mínima associadas a $\mathcal{P}$. Mostre que $U(\mathcal{P}) \to 1$ e $L(\mathcal{P}) \to 1$ quando $|\mathcal{P}| \to 0$. Conclua que f é integrável e que $\displaystyle\int_{-1}^{1} f = 1$.

Questão 4. O exercício anterior mostra que uma descontinuidade não prejudica a integral. Vejamos o caso de mais de uma descontinuidade.

(i) Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 1$, $f(0, 5) = 2$ e $f(x) = 0$ nos outros pontos. Faça como acima e mostre que f é integrável, com $\displaystyle\int_{-1}^{1} f = 0$.

(ii) Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(\frac{1}{n}) = 1$ para todo n e $f(x) = 0$ nos outros pontos. Mostre que f é integrável, com $\displaystyle\int_{-1}^{1} f = 0$.

Em geral, se f é descontínua em um número enumerável de pontos, f será integrável.

Questão 5. Vejamos agora o caso de duas variáveis. Seja $B = [-1, 1] \times [0, 1]$ e seja $f(x, y) = 0$, se $x < 0$ e $f(x, y) = 1$, se $x \geq 0$. Seja $\mathcal{P}$ uma partição de B. Calcule $L(\mathcal{P})$, $U(\mathcal{P})$ e mostre que ambos convergem a 1 quando $|\mathcal{P}| \to 0$. Conclua que f é integrável e que $\int\int_B f = 1$.

Aqui, $\{0\} \times [0, 1]$ é o conjunto de descontinuidades de f. Ele não é finito, nem mesmo enumerável. Mas ele tem área zero, e é isso que conta. Em geral, f é integrável se ele é descontínuo apenas em um conjunto de medida nula. Medida nula é um conceito técnico para dizer que o conjunto tem área zero.