Departamento de Matemática Aplicada – Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro

GABARITO – Cálculo Infinitesimal III

2022-1 - Prof Gregorio - 1ª prova.

Primeira Questão(2 pontos): Achar a área compreendida entra a 1ª e a 2ª espira da espiral de Arquimedes $r = a\varphi$.
É pedida a área da região $\mathcal{R} : a\varphi \leq r \leq a(\varphi + 2\pi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Em coordenadas polares,

$$\text{Área}(\mathcal{R}) = \iint_R 1 \ dxdy = \iint_{\substack{a\varphi \leq r \leq a(\varphi+2\pi) \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi}} r \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\varphi$$

Pelo Teorema de Fubini,

$$\text{Área}(\mathcal{R}) = \int_0^{2\pi} \int_{a\varphi}^{a\varphi+2\pi} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi.$$

Integrando,

$$\text{Área}(\mathcal{R}) = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_{a\varphi}^{a\varphi+2\pi} \mathrm{d}\varphi. = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} (2\pi + \varphi)^2 - \varphi^2 \mathrm{d}\varphi == \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi} 4\pi^2 + 4\pi\varphi \mathrm{d}\varphi = 8\pi^3 a^2.$$

Segunda Questão(2 pontos): Ache a área da figura delimitada pelos arcos $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $xy = \alpha$, $xy = \beta$ com $0 < \alpha < \beta$ e $0 < a < b$.
Seja $\mathcal{D}$ essa região, teremos sempre $x > 0$ e $y > 0$. Introduzimos as variáveis $u = xy$ e $v = y^2$, agora u e v satisfazem $\alpha \leq u \leq \beta$ e $(au)^{2/3} \leq v \leq (bu)^{2/3}$. Seja $\mathcal{E}$ a região delimitada no plano (u, v) pelas quatro inequações acima.

Chamamos de g a transformação que leva u e v em x e y,

$$g\left(\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{u}{\sqrt{v}} \\ \sqrt{v} \end{bmatrix}$$

A matriz Jacobiana é

$$Dg(u, v) = \begin{pmatrix} v^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}uv^{-\frac{3}{2}} \\ 0 & \frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Note que g é uma bijeção de $\mathcal{E}$ em $\mathcal{D}$. Pelo Teorema de mudança de variáveis,

$$\text{Área}(\mathcal{D}) = \iint_{g(\mathcal{E})} 1 \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\mathcal{E}} \det Dg(u, v) \ \mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

Pelo Teorema de Fubini,

$$\text{Área}(\mathcal{D}) = \int_\alpha^\beta \int_{(au)^{\frac{2}{3}}}^{(bu)^{\frac{2}{3}}} \frac{1}{2v}\mathrm{d}v\mathrm{d}u$$

Integrando,

$$\text{Área}(\mathcal{D}) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\log\left((bu)^{\frac{2}{3}}\right) - \frac{1}{2}\log\left((au)^{\frac{2}{3}}\right) \ \mathrm{d}u = \int_\alpha^\beta \frac{1}{3}\log\left(\frac{b}{a}\right) \ \mathrm{d}u = \frac{\beta - \alpha}{3}\log\left(\frac{b}{a}\right).$$

Terceira Questão(3 pontos): Uma circunsferência de raio r gira sem escorregar em uma circunsferência de raio $R = nr$, $n \in \mathbb{N}$. A curva percorrida por um ponto da segunda circunferência é chamada de epicicloide.

1. Note que se um ponto da circunferência exterior está em contato com a circunferência interior no ponto $(R\cos\theta, R\sin\theta)$ e imediatamente depois no ponto $(R\cos\theta+\alpha, R\sin\theta+\alpha)$, ele girou $2\pi+\alpha$ entre os dois contatos. Deste modo, a cada revolução completa a circunferência exterior gira $n+1$ vezes em relação ao seu centro. Deduza a parametrização da epicicloide.

2. Escreva a área delimitada pelo interior da epicicloide como uma integral de linha.
3. Calcule essa área. No caso particular $n = 1$, o resultado é $6\pi r^2$.

A epicicloide é parametrizada por

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = (R+r) \begin{bmatrix} \cos(t) \\ \text{sen }(t) \end{bmatrix} - r \begin{bmatrix} \cos((n+1)t) \\ \text{sen }((n+1)t) \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} (n+1)\cos(t) - \cos((n+1)t) \\ (n+1)\text{sen }(t) - \text{sen }((n+1)t) \end{bmatrix}$$

Seja $\mathcal{B}$ a região contida pela epicicloide, sua área é

$$\iint_{\mathcal{B}} 1 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\partial B} \begin{bmatrix} 0 \\ x \end{bmatrix} \mathrm{d}l = r^2 \int_0^{2\pi} ((n+1)\cos(t) - \cos((n+1)t))\,((n+1)\cos(t) - (n+1)\cos((n+1)t))\,\mathrm{d}t$$

Integrando, obtemos a área $\pi(R+r)(R+2r) = \pi r^2(n+1)(n+2)$.

Quarta Questão(4 pontos): Seja u uma função de classe C^2, definida em um domínio $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ aberto e limitado. Assumimos que u é harmônica, ou seja:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

1. Mostrar que se o disco fechado $\overline{B(A,r)}$ de centro A e raio r estiver totalmente contido em $\mathcal{D}$, então
$$\oint_{C(A,r)} \nabla u \cdot \mathrm{d}n = 0$$
onde $C(A,r)$ é o círculo de centro A e raio r.
2. Deduza sob as mesmas hipóteses que
$$u(A) = \frac{1}{2\pi} \oint_{C(A,r)} u(x)\mathrm{d}S.$$
3. Conclua que se $u(A)$ é um ponto de máximo local de u, então $A \in \partial\mathcal{D}$ ou u é constante em uma vizinhança de A.

Pelo Teorema de Gauss,

$$\oint_{C(A,r)} \nabla u \cdot \mathrm{d}n = \oint_{C(A,r)} \Delta u \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

Podemos escrever pelo Teorema fundamental do cálculo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\oint_{C(A,r)} u(x) - u(A)\mathrm{d}S &= \frac{1}{2\pi}\oint_{C(A,r)} \int_0^1 \nabla u(A + \rho(x-A))(x-A)\mathrm{d}S \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 \nabla u \left(A + \rho r \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \text{sen }\theta \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \text{sen }\theta \end{bmatrix} \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

O último integrando é de classe C^1 no compacto $[0, 2\pi] \times [0, r]$, logo a integral dupla correspondente existe. Pelo Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\iint_{[0,2\pi]\times[0,r]} r^2 \nabla u \left(A + \rho r \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \text{sen }\theta \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \text{sen }\theta \end{bmatrix} \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 \nabla u \left(A + \rho r \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \text{sen }\theta \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \text{sen }\theta \end{bmatrix} \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi} r^2 \nabla u \left(A + \rho r \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \text{sen }\theta \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \text{sen }\theta \end{bmatrix} \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho \end{aligned}$$

e a integral interior é

$$\frac{r}{\rho}\oint_{C(A,\rho r)} \nabla u \ \mathrm{d}n = 0$$

Segue-se que $u(A)$ é igual à média de $u(x)$ em $C(A,r)$.

Suponha que A é ponto de máximo. Como $\mathcal{D}$ é aberto, existe uma bola fechada com centro A totalmente contida em $\mathcal{D}$. Assumindo que u não é constante em uma vizinhança de A, podemos achar um ponto B contido nessa bola com $u(B) < u(A)$. Como u é contínua, a média de $u(x)$ em $C(A, \|B - A\|)$ é estritamente menor do que $u(A)$, contradição.