

# CAPÍTULO 2

## Exercícios 2.3

1. Sejam  $A \subset B \subset \mathbb{R}^2$  e  $B$  tem conteúdo nulo. Então,  $\forall \varepsilon > 0$ , existe um número finito de retângulos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  tais que  $B \subset A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  e  $\sum_{i=1}^n m(A_i) < \varepsilon$  onde  $m(A_i)$  é a área do retângulo  $A_i$ .

( $B$  pode ser coberto por um número finito de retângulo cuja soma das áreas seja tão pequena quanto se queira.)

Como  $A \subset B$  então  $A$  também pode ser coberto por esses retângulos.

Logo, se  $A \subset B$  então  $\forall \varepsilon > 0$ , existe um número finito de retângulos  $A_1, A_2, \dots, A_n$

tais que  $A \subset A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$  e  $\sum_{i=1}^n m(A_i) < \varepsilon$ .

Portanto,  $A$  tem conteúdo nulo.

2. Seja  $\phi \subset \mathbb{R}^2$ . Consideremos um conjunto  $B \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $B$  tem conteúdo nulo. Como  $\phi \subset B$ , então  $\phi$  também terá conteúdo nulo.

3. Suponhamos que o conjunto tenha  $n$  pontos. Para cada ponto, considere um quadrado com centro no ponto e com lado estritamente menor que  $\sqrt{\frac{\varepsilon}{n}}$ . Os quadrados cobrem o conjunto e a soma das áreas é menor que  $\varepsilon$ . Logo, o conjunto tem conteúdo nulo.