Cálculo Infinitesimal 3 – Prova 1 - 2020

Prof. Flavio Dickstein.

Questão 1. Seja $F(x,y) = e^{xy}(y,x)$ e seja γ a curva parametrizada por (t^3, t^4+t), indo de $A = (0,0)$ e $B = (1,2)$.

(i) Mostre que $\nabla \times F = 0$.

(ii) Calcule $\int_\gamma F \cdot dl$.

Resolução 1. (i) *Temos que* $\partial_x\, xe^{xy} = e^{xy}(1+xy)$ *e* $\partial_y\, ye^{xy} = e^{xy}(1+xy)$.

Portanto, $\nabla \times F = 0$.

(ii) *O item (i) nos diz que F é conservativo. Podemos pensar em escolher um caminho mais simples para calcular a integral, ou tentar encontrar o potencial de F. Não é difícil perceber que $G(x,y) = e^{xy}$ é um potencial. Então,* $\int_\gamma F \cdot dl = G(B) - G(A) = e^2 - 1$.

Questão 2. Seja γ a curva formada pelo bordo do triângulo ABC, onde $A = (-1,0)$, $B = (1,0)$ e $C = (0,1)$. Suponha que a densidade de massa ρ de γ seja igual a $\rho(x,y) = 1+y$. Determine a massa total de γ.

Resolução 2. *A curva γ é formada pelos 3 lados do triângulo. No lado AB, $y = 0$, de modo que a densidade é igual a 1. Então, a massa m_1 contida em AB é igual ao seu comprimento, ou seja $m_1 = 2$. Parametrizamos o lado AC por $\alpha(t) = (0,1)t + (-1,0)(1-t) = (t-1,t)$. Então, $\alpha'(t) = (1,1)$ e $|\alpha'(t) = \sqrt{2}$. Assim,*

$$m_2 = \int_0^1 \rho(\alpha(t))|\alpha'(t)|\, dt = \sqrt{2}\int_0^1 (1+t)\, dt = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Como a densidade só depende de y, por simetria vemos que as massa contidas em AC e em BC suas iguais. Portanto, a massa total vale

$$2 + 3\sqrt{2}.$$

Questão 3. Seja $f(x,y,z) = xyz$ e $\Omega = \{(x,y,z), x > 0, y > 0, x+y < 1, 0 < z < 2x+y\}$. Calcule $\displaystyle\int_\Omega f(x,y,z)\, dxdydz$.

Resolução 3. *Usando Fubini, temos*

$$\int_\Omega f(x,y,z)\, dxdydz = \int_0^1 \int_0^{1-y} \int_0^{2x+y} xyz\, dzdxdy = \int_0^1 y \int_0^{1-y} x \int_0^{2x+y} z\, dzdxdy.$$

Resolvendo,

$$\int_0^{2x+y} z\, dz = \frac{1}{2}z^2\Big|_0^{2x+y} = 2x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2,$$

$$\int_0^{1-y} 2x^3+2x^2y+\frac{1}{2}xy^2\,dx = \frac{1}{2}x^4+\frac{2}{3}x^3y+\frac{1}{4}x^2y^2\Big|_0^{1-y} = \frac{1}{2}(1-y)^4+\frac{2}{3}(1-y)^3y+\frac{1}{4}(1-y)^2y^2.$$

Finalmente, devemos calcular

$$\int_0^1 \frac{1}{2}(1-y)^4y+\frac{2}{3}(1-y)^3y^2+\frac{1}{4}(1-y)^2y^3\,dy.$$

Chamando $t=1-y$, temos

$$\int_0^1 (1-y)^4y\,dy = \int_0^1 t^4(1-t)\,dt = \int_0^1 t^4-t^5\,dt = \frac{1}{5}-\frac{1}{6} = \frac{1}{30}.$$

Analogamente,

$$\int_0^1 (1-y)^3y^2\,dy = \int_0^1 t^3(1-t)^2\,dt = \int_0^1 t^3-2t^4+t^5\,dt = \frac{1}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{6} = \frac{1}{60}.$$

Pelo que vemos acima,

$$\int_0^1 (1-y)^2y^3\,dy = \frac{1}{60}.$$

. O resultado final é

$$\frac{1}{2}\frac{1}{30}+\frac{2}{3}\frac{1}{60}+\frac{1}{4}.\frac{1}{60} = \frac{23}{720}.$$

Questão 4. Seja $z(x,y)=Ce^{-(x^2+y^2)}$. Determine o valor de C para que

$$\int_{\mathbb{R}^2} z(x,y)\,dxdy = 1.$$

Resolução 4. *usando coordenadas polares,*

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = \int_0^\infty\int_0^{2\pi} e^{r^2}r\,d\theta dr = \pi\int_0^\infty e^{r^2}2r\,dr = \pi e^{r^2}\Big|_0^\infty = \pi.$$

Então, $C=\dfrac{1}{\pi}$.

Na Teoria das Probabilidades a função

$$\rho(x,y) = \frac{1}{\pi}e^{-(x^2+y^2)}$$

é a **densidade normal de Gauss** *no plano. O valor $\frac{1}{\pi}$ é que torna a probabilidade total igual a 1.*

No caso da reta, a densidade gaussiana é igual a

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2},$$

pois $I=\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\,dx=1$. De fato,

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\,dx\times\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-y^2}\,dy = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy = 1.$$

Questão 5. Considere a função $f(x,y)$ definida no retângulo $R=(0,2)\times(0,1)$ dada por

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & \text{se } x\in(0,1)\\ 0, & \text{se } x\in[1,2).\end{cases}$$

Considere a partição $\mathcal{P}_n$ formada por quadrados de lados iguais a $1/n$. Mostre que as somas de Riemann associadas a $\mathcal{P}_n$ convergem quando $n\to\infty$.

Resolução 5. *Consideremos em x os pontos $x_i=\frac{i}{n}$, com $0\le i\le 2n$. Em y, consideramos $y_j=\frac{j}{n}$, $0\le j\le n$. Seja $R_{i,j}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$, com $i\ge 1$, $j\ge 1$. Com a notação do curso, temos*

$$\overline{f}_{i,j}=\begin{cases} x_i+y_j & i\le n,\\ 1+y_j. & i=n+1,\\ 0 & i>n+1,\end{cases} \tag{0.1}$$

$$\underline{f}_{i,j}=\begin{cases} x_{i-1}+y_{j-1} & i\le n,\\ 0 & i>n,\end{cases} \tag{0.2}$$

Sejam

$$U_n=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{n}\overline{f}_{i,j}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_i+y_j+\sum_{j=1}^{n}1+y_j,$$

$$L_n=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{2n}\sum_{j=1}^{n}\underline{f}_{i,j}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_{i-1}+y_{j-1},$$

Queremos mostrar que $U_n-L_n\to 0$ quando $n\to\infty$. Temos que

$$U_n-L_n=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i+y_j-x_{i-1}-y_{j-1})+\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}1+y_j.$$

Mas,

$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i+y_j-x_{i-1}-y_{j-1})=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{2}{n}=\frac{2}{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Além disso,

$$\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}1+y_j=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{j}{n}=\frac{n+1}{n^2}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Isto mostra que U_n-L_n converge a zero.