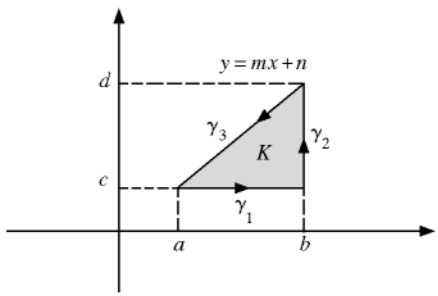
Capítulo 8

Exercícios 8.1

4. Seja K o triângulo e γ a fronteira de k orientada no sentido anti-horário.



Vamos mostrar que

$$\oint_\gamma Pdx + Ady = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$$

Temos

$$\oint_\gamma Pdx = \int_{\gamma_1} P(x, y)\, dx + \int_{\gamma_2} P(x, y)\, dx + \int_{\gamma_3} P(x, y)\, dx$$

onde (parametrização de γ)

$$\gamma_1: \begin{cases} x = t & a \leqslant t \leqslant b \quad (dx = dt) \\ y = c \end{cases}$$

$$\gamma_2: \begin{cases} x = b & c \leqslant t \leqslant d \quad (dx = 0) \\ y = t \end{cases}$$

$$\overline{\gamma}_3: \begin{cases} x = t & a \leqslant t \leqslant b \quad (dx = dt). \\ y = mt + n \end{cases}$$

(observe que $c = ma + n$ e $d = mb + n$)

Então,

$$\oint_\gamma Pdx = \int_{\gamma_1} P(x, y)\, dx - \int_{\overline{\gamma}_3} P(x, y)\, dx = \int_a^b P(t, c)\, dt - \int_a^b P(t, mt + n)\, dt. \quad ①$$

Por outro lado,

$$\iint_K \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_c^{mx+n} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\, dy \right] dx =$$

$$= \int_a^b \left[P(x, y) \right]_c^{mx+n} dx = \int_a^b \left[P(x, mx+n) - P(x, c) \right] dx \quad ②$$

De ① e ② resulta

$$\oint_\gamma P(x, y)\, dx = -\iint_K \frac{\partial P(x, y)}{\partial y}\, dx\, dy. \quad ③$$

De forma análoga,

$$\oint_\gamma Q(x, y)\, dy = \int_{\gamma_1} Q(x, y)\, dy + \int_{\gamma_2} Q(x, y)\, dy - \int_{\overline{\gamma}_3} Q(x, y)\, dy \text{ onde}$$

$$\gamma_1 : \begin{cases} x = t \\ y = c \end{cases} \quad (dy = 0)$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = b \\ y = t \end{cases} \quad (dy = dt). \qquad c \leqslant t \leqslant d$$

$$\overline{\gamma}_3 : \begin{cases} x = \dfrac{t-n}{m} \\ y = t \end{cases} \quad (dy = dt). \qquad c \leqslant t \leqslant d$$

(lembre de que $c = ma + n$ e $d = mb + n$)

Então,

$$\oint_\gamma Q(x, y)\, dy = \int_{\gamma_2} Q(x, y)\, dy - \int_{\overline{\gamma}_3} Q(x, y)\, dy =$$

$$= \int_c^d Q(b, t)\, dt - \int_c^d Q\left(\frac{t-n}{m}, t \right) dt. \quad ④$$

$$\iint_K \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_{\frac{t-n}{m}}^b \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}\, dx \right] dy = \int_c^d \left[Q(x, y) \right]_{\frac{t-n}{m}}^b dy =$$

$$= \int_c^d \left[Q(b, y) - Q\left(\frac{t-n}{m}, y \right) \right] dy. \quad ⑤$$

De ④ e ⑤ resulta

$$\oint_\gamma Q(x, y)\, dy = \iint_K \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}\, dx\, dy. \quad ⑥$$

Somando ③ e ⑥, resulta

$$\oint P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \iint_K \left(\frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

Exercícios 8.2

1. Pelo Teorema de Green:

$$\oint Pdx + Qdy = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy.$$

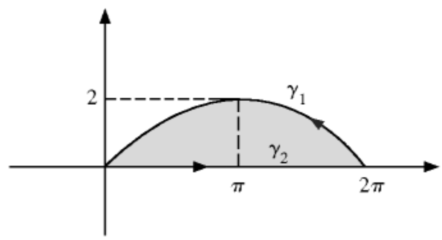
Façamos $P(x, y) = 0$ e $Q(x, y) = x; \dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1.$

Então, temos:

$$\oint_{\gamma} x\, dy = \iint_K \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \iint_K dx\, dy = \text{área de } K.$$

2.

$$\bar{\gamma}_1: \begin{cases} x = t - \operatorname{sen} t & 0 \leqslant t \leqslant 2\pi \\ y = 1 - \cos t & (dy = \operatorname{sen} t\, dt) \end{cases}$$



$$\gamma_2: \begin{cases} x = t & 0 \leqslant t \leqslant 2\pi \\ y = 0 & (dy = 0) \end{cases}$$

$$\text{Área} = -\int_{\bar{\gamma}_1} x\, dy + \int_{\gamma_2} x\, dy = -\int_0^{2\pi} (t - \operatorname{sen} t) \operatorname{sen} t\, dt + \int_0^{2\pi} t \cdot 0.$$

Daí,

$$\text{Área} = \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2 t - t \operatorname{sen} t)\, dt = 3\pi$$

3. Sejam $x = a \cos t$ e $y = b \operatorname{sen} t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ onde $a > 0$ e $b > 0$ (elipse).

$$\text{Área} = \oint x\, dy = \int_0^{2\pi} (a \cos t) \cdot (b \cos t)\, dt =$$

$$= ab \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt = ab \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} \right) dt =$$

$$= ab \left[t + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t \right]_0^{2\pi} = \pi\, ab.$$

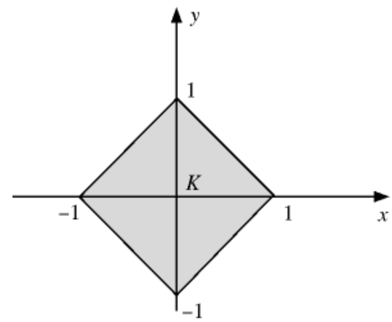
4. Seja $\vec{F}(x, y) = (2x + y)\, \vec{i} + (3x - y)\, \vec{j}$, onde

$P(x, y) = 2x + y \quad \left(\dfrac{\partial P}{\partial y} = 1\right), \quad Q(x, y) = 3x - y$

$\left(\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 3\right).$

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma = \oint_\gamma P\, dx + Q\, dy = \iint_B \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{2} dx\, dy =$$

$$= 2 \iint_B dx\, dy = 2 \cdot \underbrace{(\text{área de } B)}_{\alpha} = 2\alpha.$$

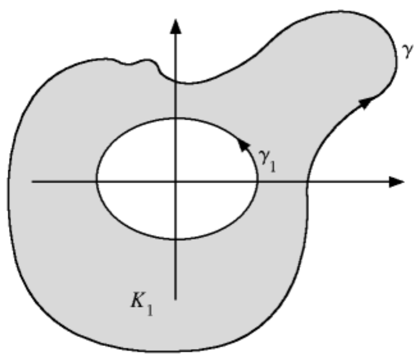


5. Seja $\vec{F}(x, y) = \underbrace{4x^3y^3}_{P(x,\, y)}\, \vec{i} + \underbrace{(3x^4y^2 + 5x)}_{Q(x,\, y)}\, \vec{j}.$

$\dfrac{\partial P}{\partial y} = 12x^3y^2$ e $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 12x^3y^2 + 5.$

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\gamma = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint_K 5\, dx\, dy = 5 \cdot (\text{área de } K) = 10$$

6. O teorema de Green não se aplica, pois, $P(x, y) = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$ e $Q(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ não estão definidas em (0, 0) que pertence ao compacto K que admite γ como fronteira.



$$\gamma_1: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

K_1 é a região limitada pelas curvas γ e γ_1. Pelo Exemplo 3,

$$\oint_{\gamma} P\,dx + Q\,dy - \oint_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \iint_{K_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy.$$

De

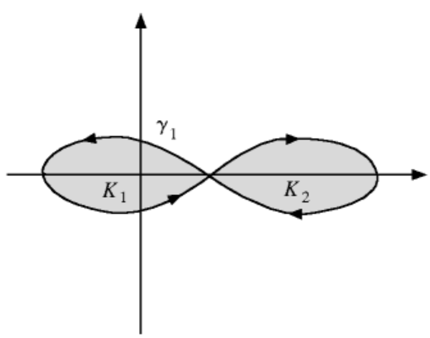
$$\oint_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy = \int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t)\,dt = 2\pi$$

e $\displaystyle\iint_{K}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0$ (verifique)

resulta

$$\oint_{\gamma} P\,dx + Q\,dy = 2\pi.$$

7.



Seja γ_1 a fronteira de K_1 orientada no sentido anti-horário. Pelo exercício anterior

$$\oint_{\gamma_1} -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = 2\pi.$$

Seja γ_2 a fronteira de K_2 orientada no sentido anti-horário. Nesta região, o teorema de Green se aplica. De

$$\iint_{K_2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = 0$$

segue que

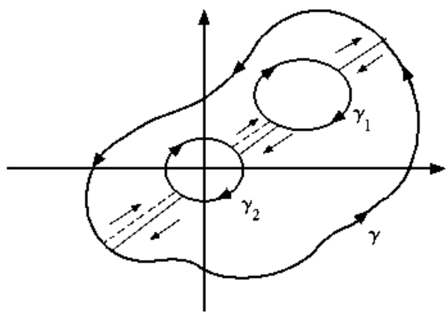
$$\oint_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = 0.$$

Logo,

$$\oint_\gamma -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = 2\pi.$$

8. P e Q são de classe C^1 em $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0,0),(1,1)\}$. Seja B a região compreendida entre as curvas γ, γ_1 e γ_2. Portanto, P e Q são de classe C^1 num aberto contendo B. A fronteira de B consiste em γ, γ_1, γ_2. Raciocinando como no Exemplo 3, temos

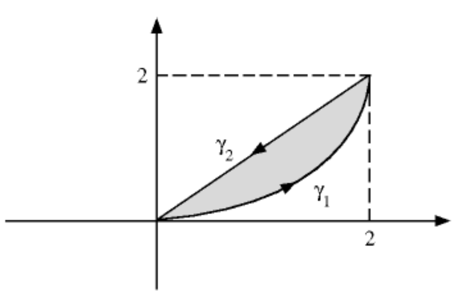
$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy + \oint_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy + \oint_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = \underbrace{\iint_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy}_{0}$$



Portanto,

$$\oint_\gamma P\,dx + Q\,dy = -\oint_{\gamma_1} P\,dx + Q\,dy - \oint_{\gamma_2} P\,dx + Q\,dy = -3.$$

9. Inicialmente, observamos que, para $0 < t < 1$, $t^5 + t < t^3 + t$, o que significa que o ponto $(t^3 + t, t^5 + t)$, para $0 < t < 1$, permanece abaixo da reta $y = x$. Seja K a região limitada pelas curvas dadas.



$$\gamma_1: \begin{cases} x = t^3 + t \\ y = t^5 + t \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

$$\overline{\gamma}_2: \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2.$$

Então, área de $K = \oint_\gamma x dy = \int_{\gamma_1} x dy - \int_{\gamma_2} x dy$, ou seja,

área de $K = \int_0^1 (t^3 + t)(5t^4 + 1)\, dt - \int_0^2 t dt = \dfrac{5}{24}$.

Exercícios 8.4

1. ***a***) Sejam $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$, $\gamma(t) = (\cos t, \text{sen } t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ e $\vec{n}$ a normal exterior.

$\oint \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = \iint_K \text{div } \vec{F}\, dx\, dy$, onde K é o círculo $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

$$\text{div } \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = 1 + 1 = 2.$$

Então,

$$\oint \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = \iint_K 2\, dx\, dy = 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho\, d\rho\, dt = 2\int_0^{2\pi}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

c) Sejam $\vec{F}(x, y) = x^2\vec{i}$, $\gamma(t) = (2\cos t, \text{sen } t\}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, e

$$K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{4} + y^2 \leqslant 1\right\}.$$

Então,

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = \iint_K \text{div } F\, dx\, dy = \iint_K 2x\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 2(2\cos t)\,\rho\, d\rho\, dt = 4\int_0^{2\pi} \cos t \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 dt = 2\int_0^{2\pi} \cos t\, dt = 0$$

Observe que pela simetria do campo e da região em relação ao eixo y, o fluxo através da fronteira localizada no semiplano $x < 0$ deve ser igual ao fluxo que sai pela fronteira localizada no semiplano $x > 0$. É razoável então esperar que o fluxo através da fronteira seja nulo.

d) $\vec{F}(x, y) = x^2\vec{i}$ e $y(t) = (2\cos t, \text{sen } t)$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, e $\vec{n}$ a normal com componente $y \geqslant 0$. Observe que o fluxo através de γ é igual ao fluxo através da fronteira, orientada no sentido anti-horário e com normal apontando para fora, do conjunto limitado pela curva

$\dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$, $y \geqslant 0$, e pelo eixo x, pois, sendo $\vec{F}$ ortogonal a $-\vec{j}$, o fluxo através do segmento $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant 2$ é nulo. Então, pelo teorema da divergência,

$$\int_\gamma \vec{F}(x, y) \cdot \vec{n}\, ds = \iint_K \operatorname{div} \vec{F}\, dxdy$$

onde $K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{4} + y^2 \leqslant 1 \text{ e } y \geqslant 0\right\}$.

Daí, $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = \int_{-2}^{2} \int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} x\, dy\, dx = \int_{-2}^{2} x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}\, dx = 0$

pois o integrando é função ímpar.

e) Sejam $\vec{F}(x, y) = x\vec{i} + y\vec{j}$; $\gamma(t) = (t, t^2)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ e $\vec{n}$ a normal com componente $y < 0$.

Temos $\gamma'(t) = (1, 2t)$ e $\| \gamma'(t) \| = \sqrt{1 + 4t^2}$;

$\vec{n}(\gamma(t)) = \dfrac{1}{\| \gamma'(t) \|} (y'(t)\, \vec{i} - x'(t)\, \vec{j})$, ou seja,

$\vec{n}(\gamma(t)) = \dfrac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}\, \vec{i} - \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{1+4t^2}}}_{\text{componente } y < 0}\, \vec{j}$.

$\displaystyle\oint_\gamma \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = \int_0^1 \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \vec{n}(\gamma(t)) \| \gamma'(t) \|\, dt =$

$\displaystyle= \int_0^1 (t\vec{i} + t^2\vec{j}) \cdot \left(\frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}\, \vec{i} - \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\, \vec{j} \right) \| \gamma'(t) \|\, dt =$

$\displaystyle= \int_0^1 (2t^2 - t^2)\, dt = \frac{1}{3}.$

2. Supondo γ definida em $[a, b]$ e sendo $\vec{F} \cdot \vec{n}$ constante, teremos

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = \vec{F} \cdot \vec{n} \int_a^b \underbrace{\| \gamma'(t) \|\, dt}_{ds},$$

ou seja, o fluxo de $\vec{F}$ através de γ é o produto de $\vec{F} \cdot \vec{n}$ pelo comprimento de γ.

3. Seja $\vec{F}(x, y) = \dfrac{x}{(x^2 + y^2)^5}\, \vec{i} + \dfrac{y}{(x^2 + y^2)^5}\, \vec{j}$.

Temos:

$$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t),\ 0 \leqslant t \leqslant \pi,$$
$$\gamma'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t) \ \text{ e } \ \|\gamma'(t)\| = \|(-\operatorname{sen} t, \cos t)\| = 1.$$

$$\vec{n}\,(\gamma(t)) = \cos t\, \vec{i} + \operatorname{sen} t\, \vec{j}.$$

Calculemos o produto $\vec{F} \cdot \vec{n}$:

$$\vec{F}(\gamma(t)) \cdot \vec{n}(\gamma(t)) = (\cos t\, \vec{i} + \operatorname{sen} t\, \vec{j}) \cdot (\cos t\, \vec{i} + \operatorname{sen} t\, \vec{j}) = 1,$$

ou seja, $\vec{F} \cdot \vec{n} = 1$ (constante). Então,

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = \int_0^\pi \underbrace{\vec{F} \cdot \vec{n}}_{1} \ \underbrace{\|\gamma'(t)\|}_{1}\, dt = \pi.$$

6. Seja $\vec{F}(x, y) = \dfrac{x}{(x^2 + y^2)^\alpha}\,\vec{i} + \dfrac{y}{(x^2 + y^2)^\alpha}\,\vec{j}.$

F é solenoidal $\Leftrightarrow$ div $\vec{F} = 0$.

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{(x^2+y^2)^\alpha - 2\,\alpha x^2 (x^2 + y^2)^{\alpha-1}}{(x^2 + y^2)^{2\alpha}} +$$
$$+ \frac{(x^2 + y^2)^\alpha - 2\,\alpha y^2 (x^2 + y^2)^{\alpha-1}}{(x^2 + y^2)^{2\alpha}} = \frac{2(1-\alpha)}{(x^2 + y^2)^\alpha}$$

Então,

$$\operatorname{div} \vec{F} = 0 \ \Leftrightarrow \ 1 - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

Logo, $\vec{F}(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}\,\vec{i} + \dfrac{y}{x^2 + y^2}\,\vec{j}$ é solenoidal.

Para desenho do campo, veja Exercício 1g da Seção 1.2.

7. *a*) As condições do teorema da divergência estão estabelecidas no enunciado. Temos

$$\oint_\gamma \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}\, ds = \oint_\gamma \nabla g \cdot \vec{n}\, ds = \iint_K \operatorname{div}(\nabla g)\, dx\, dy =$$
$$= \iint_K \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right) dx\, dy = \iint_K \nabla^2 g\, dx\, dy$$

pois $\dfrac{\partial g}{\partial \vec{n}}$ é a derivada direcional de g na direção de $\vec{n}$, ou seja, $\dfrac{\partial g}{\partial \vec{n}} = \nabla g \cdot \vec{n}$ e $\nabla^2 g$ é o laplaciano de g.

b) $\displaystyle\oint f \frac{\partial g}{\partial \vec{n}}\, ds = \oint_\gamma f \cdot \nabla g \cdot \vec{n}\, ds = \iint_K \text{div}\,(f \cdot \nabla g)\, dx\, dy$

Pelo Exercício 9c da Seção 1.4 deste volume,

$$\text{div}\,(f \cdot \nabla g) = f \cdot \underbrace{\text{div}\,(\nabla g)}_{\nabla^2 g} + \nabla f \cdot \nabla g.$$

Então,

$$\iint_K \text{div}\,(f \cdot \nabla g)\, dx\, dy = \iint_K f \cdot \nabla^2 g\, dx\, dy + \iint_K (\nabla f \cdot \nabla g)\, dx\, dy$$

c) $\displaystyle\oint f \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\, ds = \oint_\gamma f \cdot \nabla f \cdot \vec{n}\, ds = \iint_K \text{div}\,(f \cdot \nabla f)\, dx\, dy =$

$$= \iint_K (f\ \text{div}\ \nabla f + \nabla f \cdot \nabla f)\, dx\, dy = \iint_K (f \cdot \nabla^2 f + \|\nabla f\|^2)\, dx\, dy.$$

8. Pelo item *c* do exercício anterior,

$$\oint_\gamma v \frac{dv}{d\vec{n}}\, ds = \iint_K (v \nabla^2 v + \|\nabla v\|^2)\, dx\, dy.$$

Da hipótese $v(\gamma(t)) = 0$, $a \leqslant t \leqslant b$, segue que a integral do primeiro membro é nula e, tendo em vista a hipótese $\nabla^2 v = 0$ no interior de K, resulta

$\displaystyle\iint_K \|\nabla v\|^2\, dx\, dy = 0$. Da continuidade de ∇v, segue que $\nabla v(x, y) = 0$ no interior de K. Como o interior de K é aberto conexo por caminhos, existe uma constante c tal que $v(x, y) = c$ para todo (x, y) no interior de K. De $v(\gamma(t)) = 0$, $a \leqslant t \leqslant b$, resulta $c = 0$. Assim $v(x, y) = 0$ para todo (x, y) em K.

9. Utilize o Exercício 8, com $v = u_2 - u_1$.

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = \int_c^d \vec{F}(\gamma(g(u))) \cdot \vec{n}(\gamma(g(u)))\, \|\gamma'(g(u))\|\, \gamma'(u) du.$$

Lembrando que $\delta(u) = \gamma(g(u))$, $\delta'(u) = \gamma'(g(u))g'(u)$ e $g'(u) > 0$ resulta

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = \int_c^d \vec{F}(\delta(u)) \cdot \vec{n}(\delta(u)) \|\delta'(u)\|\, du = \int_\delta \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds.$$

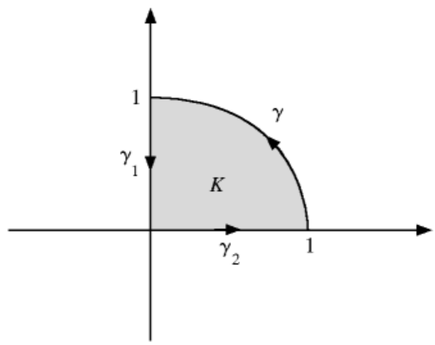
No caso $g'(u) < 0$ (mudança com reversão na orientação), $g(c) = b$ e $g(d) = a$, temos

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = -\int_d^c \vec{F}(\gamma(g(u))) \cdot \vec{n}(\gamma(g(u))) \| \gamma'(g(u)) \| \, (-g'(u))\, du$$

e, portanto,

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = \int_c^d \vec{F}(\delta(u)) \cdot \vec{n}(\delta(u)) \| \delta'(u) \| = \int_\delta \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds.$$

11.



$$\gamma : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2},$$

$$\overline{\gamma}_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \text{ e}$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Sendo γ_3 a fronteira de K, orientada no sentido anti-horário, pelo teorema da divergência

$$\oint_{\gamma_3} \vec{F} \cdot \vec{n}\; ds = \iint_K \operatorname{div} \vec{F}\; dxdy = \frac{3\pi}{4}$$

pois a área de K é $\dfrac{\pi}{4}$ e div $\vec{F} = 3$. Temos

$$\oint_{\gamma_3} \vec{F} \cdot \vec{n}\; ds = \int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{n}\; ds + \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot \vec{n}\; ds + \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot \vec{n}\; ds.$$

Temos, ainda,

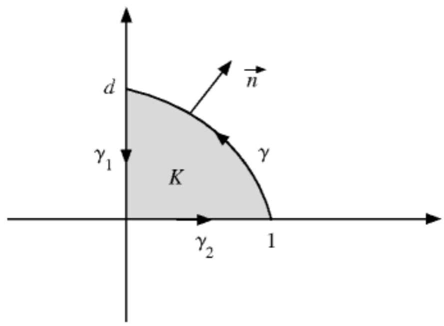
$$\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot \vec{n}\; ds = -\int_0^1 \vec{F}(0, t) \cdot (-\vec{i}\,)\; dt = -\int_0^1 (3t\vec{j}\,) \cdot (-\vec{i}\,)\; dt = 0,$$

$$\int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot \vec{n}\ ds = \int_0^1 \vec{F}(t, 0) \cdot (-\vec{j})\ dt = 0.$$

Segue que

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{n}\ ds = \frac{3\pi}{4}.$$

12.



$$\overline{\gamma}_1 : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant d$$

$$\gamma_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

Pelo teorema da divergência

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{n}\ ds + \int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot \vec{n}\ ds + \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot \vec{n}\ ds = 0$$

pois div $\vec{F} = 0$. Temos $\vec{F}\,(0, t) = \vec{0}$,

logo, o fluxo através de γ_1 é zero. Temos, ainda,

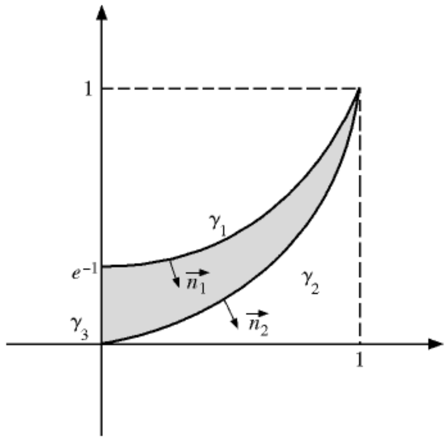
$$\int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot \vec{n}\ ds = \int_0^1 \vec{F}(t, 0) \cdot (-\vec{j})\ dt = -\frac{3}{2}.$$

Então,

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{n}\ ds = \frac{3}{2}.$$

(Observe que a normal unitária para fora sobre γ_2 é $-\vec{j}$ e sobre γ_1 é $-\vec{i}$.)

13.



$$\gamma_3 : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant e^{-1}.$$

Como $\vec{F}(0, y) = \vec{0}$, o fluxo através de γ_3 é nulo e, tendo em vista que div $\vec{F} = 0$, pelo teorema da divergência aplicado ao compacto K limitado pelas curvas γ_1, γ_2 e γ_3, temos

$$-\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, ds + \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 \, ds = 0.$$

Daí, $\int_{\gamma_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, ds = \int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 \, ds$. Temos

$\int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 \, ds = \int_0^1 (t^3\vec{i} - 3t^4\vec{j}) \cdot (2t\vec{i} - \vec{j}) \, dt = 1.$ Então,

$\int_{\gamma_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 \, ds = 1.$ Ou seja, o fluxo através de γ_1, na direção $\vec{n}_1$, é igual ao fluxo através de γ_2, na direção $\vec{n}_2$.

Observação. Para concluir que as imagens de γ_1 e γ_2 são como na figura anterior, basta mostrar que, para $0 < t < 1$, $g(t) = e^{t^2 - 1} - t^2 > 0$. Para isto, verifique que $g'(t) < 0$, $0 < t < 1$, e que $g(1) = 0$.