1. Integrais múltiplas

Exercício 1. Seja $\mathcal{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$. Calcular $\iint_C x^2 + y^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Resposta.

$$\iint_C x^2 + y^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_C x^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\int_{-1}^{1} x^2 \mathrm{d}x = \frac{4}{3}[x^3]_{-1}^{1} = \frac{8}{3}.$$

Exercício 2. Calcular $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/9+2x/3} \mathrm{d}x$. Dica: complete o quadrado, e calcule I^2.

Resposta. Completamos o quadrado:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/9+2x/3} \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/9+2x/3-1+1} \mathrm{d}x = e\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-3)^2}{9}} \mathrm{d}x = e\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{X^2}{9}} \mathrm{d}X$$

Logo,

$$I^2 = e^2 \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{X^2+Y^2}{9}} \mathrm{d}X\mathrm{d}Y = e^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} Re^{-\frac{R^2}{9}} \mathrm{d}R\mathrm{d}\theta = 9\pi e^2.$$

Exercício 3. Calcular o volume do conjunto

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \leq 1 \text{ e } 2y > x\}$$

Resposta. Seja $M = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Escrevemos $\mathcal{D} = M\mathcal{D}_0$ onde

$$\mathcal{D}_0 = \{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 : X^2 + Y^2 \leq 1 \text{ e } 2\sqrt{2}Y > X\}.$$

Então:

$$\begin{aligned} \text{Área}(\mathcal{D}) &= \iint_{\mathcal{D}} 1 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_{\mathcal{D}_0} \frac{1}{\sqrt{2}} \, \mathrm{d}X\mathrm{d}Y \\ &= \frac{\pi\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

já que $\mathcal{D}_0$ é um meio-disco.

Exercício 4. Calcule o momento de inércia em torno do eixo Oz do corpo $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ com densidade $x^2 + y^2 + z^2$

Resposta.

$$I = \int_{x^2+y^2+z^2\leq 1} (x^2+y^2)(x^2+y^2+z^2) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Passamos para coordenadas esféricas: $x = r\cos(\alpha)\sin(\beta)$, $y = r\sin(\alpha)\sin(\beta)$, $z = r\cos(\beta)$. Nesse caso, $x^2 + y^2 = \sin^2(\beta)$ e teremos

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 R^6 \sin^2(\beta) \mathrm{d}r\mathrm{d}\beta\mathrm{d}\alpha = \frac{2\pi}{7}\int_0^{\pi} \sin^2\beta \mathrm{d}\beta = \frac{\pi^2}{7}.$$

Exercício 5. Achar a área da figura limitada pela cardióide $r = a(1 + \cos(\theta))$.

Resposta. Integrando,

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^{a(1+\cos(\theta))} r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \frac{a^2(1+\cos(\theta))}{2} \mathrm{d}\theta = \frac{3}{2}a^2\pi.$$

Exercício 6. Agora ache o comprimento da mesma cardióide $r = a(1+\cos(\theta))$

Resposta. Parametrizamos

$$\begin{bmatrix} x(\theta) \\ y(\theta) \end{bmatrix} = a(1+\cos(\theta)) \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix}.$$

Derivando, obtemos

$$\left\| \begin{bmatrix} \dot{x}(\theta) \\ \dot{y}(\theta) \end{bmatrix} \right\| = a\sqrt{2}\sqrt{1+\cos(\theta)}$$

Integrando,

$$\int_{-\pi}^{\pi} a\sqrt{2}\sqrt{1+\cos(\theta)} \mathrm{d}\theta = 2\sqrt{2}a \int_0^{\pi} a\sqrt{2}\sqrt{1+\cos(\theta)} \mathrm{d}\theta = 2\sqrt{2}a \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x = 2\sqrt{2}a \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}} \mathrm{d}x = 8a$$

Exercício 7. Calcular

$$I = \int_C \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mathrm{d}l,$$

onde C é o arco da elips $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ no quadrante superior, orientado no sentido trigonométrico.

Resposta. Reconhecemos

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \nabla P(x,y)$$

com $P(x,y) = \sqrt{1+x^2+y^2}$. Assim,

$$\int_C \nabla P(x,y) \mathrm{d}l = P(0,b) - P(a,0) = \sqrt{1+b^2} - \sqrt{1+a^2}$$

Exercício 8. Calcule

$$\oint_C \frac{1}{x^2+y^2} \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \mathrm{d}l$$

onde C é uma curva parametrizada regular, fechada, dando n voltas em torno da origem das coordenadas.

Resposta. $2\pi n$.

Exercício 9. Calcule

$$\oint_C \frac{1}{x+y} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mathrm{d}l$$

onde C é o quadrado de vértices $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$.

Resposta. No primeiro e terceiro lado, $x + y = \pm 1$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ tangente à curva, com a direção contrária. Parametrizando $y = 1 - x$ resp. $y = -1 - x$, cada parcela vale -2. No segundo e quarto lado, o vetor é ortogonal à velocidade. Assim,

$$\oint_C \frac{1}{x+y} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mathrm{d}l = -4.$$

Exercício 10. Ache a área da figura delimitada pelo laço da Folha de Descartes $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $a > 0$.

Resposta. Parametrize $y = tx$ e obtenha x, y em termos de t. Pelo Teorema de Green,

$$\text{Área}(\mathcal{D}) = \int_{\mathcal{D}} 1 \mathrm{d}x \mathrm{d}y = \int_{\partial\mathcal{D}} \begin{bmatrix} -y \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{d}l = 9a^2 \int_0^{\infty} \frac{t^2(1-2t^3)}{(1+t^3)^3} \mathrm{d}t$$

Para integrar, substitua $s = 1 + t^3$, e obtenha $\text{Área}(\mathcal{D}) = \frac{3}{2}a^2$.