

1 Integral no plano

Seja B um retângulo do plano \mathbb{R}^2 e seja $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Vamos definir $\int_B f$, a integral de f em B , estendendo de modo natural a integral de funções de duas variáveis.

Pensando como Leibnitz, para cada ponto (x, y) de B consideramos o retângulo infinitesimal dB gerado por variações dx e dy nas duas direções principais. A área infinitesimal de dB vale $dA = dx dy$. A contribuição infinitesimal df correspondente vale $df = f(x, y) dA = f(x, y) dx dy$. Assim,

$$\int_B f = \int_B df = \int_B f(x, y) dx dy.$$

Isso é bastante impreciso. A definição precisa da integral envolve **somas de Riemann**. Seja $B = [a, b] \times [c, d]$. Dividimos o intervalo $[a, b]$ em n partes $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$, com $x_0 = a$ e $x_n = b$. Seja $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. (Os intervalos não precisam ser de mesmo tamanho.) Definimos ainda $\Delta x = \max_i \Delta x_i$, o maior tamanho dos intervalos em x . Da mesma forma, dividimos o intervalo $[c, d]$ em m partes $[y_j, y_{j+1}]$, $j = 0, 1, 2, \dots, m - 1$, com $y_0 = c$ e $y_m = d$. Seja $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$ e $\Delta y = \max_j \Delta y_j$, o maior tamanho dos intervalos em y .

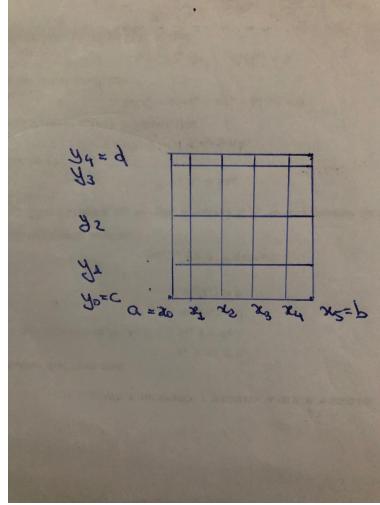


Figura 1: Partição

Definimos a partição \mathcal{P} de B como o conjunto dos sub-blocos $B_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$. Assim,

$$B = \bigcup_{B_{i,j} \in \mathcal{P}} B_{i,j}.$$

A norma $|\mathcal{P}|$ da partição \mathcal{P} é definida por $|\mathcal{P}| = \max\{\Delta x, \Delta y\}$. A área $A_{i,j}$ de $B_{i,j}$ vale

$$A_{i,j} = \Delta x_i \Delta y_j.$$

A contribuição infinitesimal $df = f(x, y) dA$ é substituída por

$$[\Delta f]_{i,j} = f_{i,j} A_{i,j} = f_{i,j} \Delta x_i \Delta y_j,$$

onde $f_{i,j} = f(x, y)$ para algum $(x, y) \in B_{i,j}$. A soma de Riemann associada à partição \mathcal{P} é

$$S(\mathcal{P}) = \sum_{i \leq N} \sum_{j \leq M} [\Delta f]_{i,j} = \sum_{i \leq N} \sum_{j \leq M} f_{i,j} \Delta x_i \Delta y_j.$$

Dizemos que f é (Riemann) integrável sobre B se existe $I \in \mathbb{R}$ tal que

$$S(\mathcal{P}) \rightarrow I \text{ quando } |\mathcal{P}| \rightarrow 0,$$

independentemente da escolha dos pontos (x, y) em cada $B_{i,j}$.

Notaçāo: $\int_B f$ ou $\int_B f(x, y) dx dy$ ou $\int_B f dx dy$. É usual escrever $\int \int_B$ no lugar de \int_B .

Uma motivação para a integral é o cálculo de volumes abaixo de uma função f .

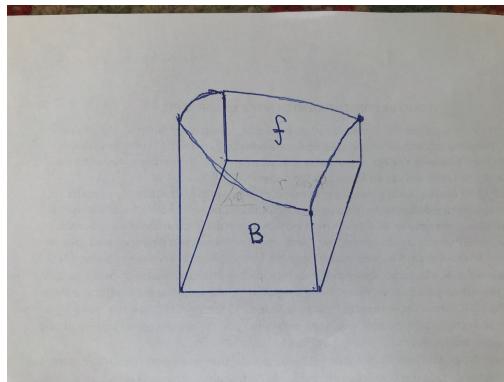


Figura 2: Volume abaixo de uma função

Nesse caso, o argumento de Leibnitz é descrito na figura abaixo.

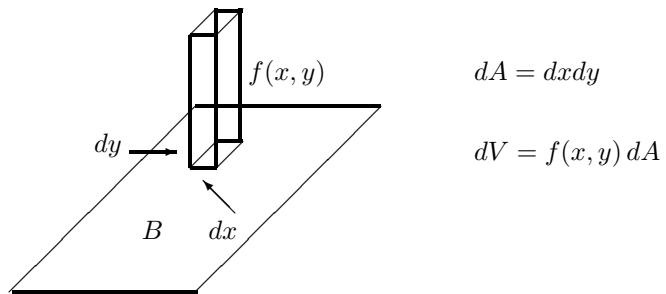


Figura 3: Volume infinitesimal

O volume V é a soma contínua dos volumes infinitesimais dV .

$$V = \int_B dV = \int_B f(x, y) dx dy.$$

Uma segunda motivação é o cálculo da massa de um corpo bidimensional não homogêneo B , com densidade de massa $\rho(x, y)$ em cada ponto. Uma porção infinitesimal do corpo localizada em (x, y) e de área $dA = dx dy$ tem massa infinitesimal $dM = \rho(x, y)dA = \rho(x, y)dx dy$. A massa total M vale

$$M = \int_B dM = \int_B \rho(x, y) dx dy.$$

Apresentamos também a definição de integral de Darboux, para funções f limitadas. (A definição é equivalente à de Riemann.) Sejam $\underline{f}_{i,j}$ e $\bar{f}_{i,j}$ o ínfimo e o supremo de f no bloco $B_{i,j}$.

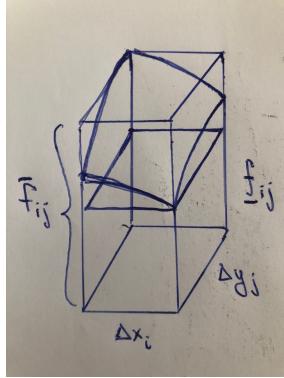


Figura 4: Integral de Darboux

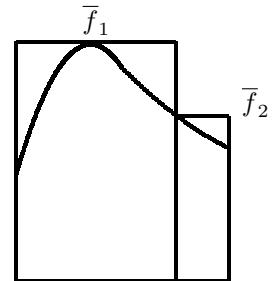
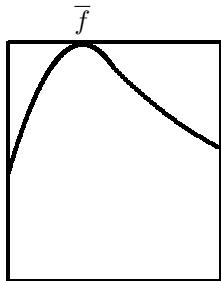
Defina a soma inferior $L(\mathcal{P})$ e superior $U(\mathcal{P})$ associados à partição \mathcal{P} como

$$L(\mathcal{P}) = \sum_i \sum_j \underline{f}_{i,j} A_{i,j} \quad , \quad U(\mathcal{P}) = \sum_i \sum_j \bar{f}_{i,j} A_{i,j}.$$

Então, se $S(\mathcal{P})$ é uma soma de Riemann associada a \mathcal{P} , temos

$$L(\mathcal{P}) \leq S(\mathcal{P}) \leq U(\mathcal{P}).$$

Quando refinamos a partição \mathcal{P} , $L(\mathcal{P})$ cresce e $U(\mathcal{P})$ vai decresce.



Exercício 1.1. Seja \mathcal{P}' um refinamento de \mathcal{P} . Mostre que

- (i) $L(\mathcal{P}) \leq U(\mathcal{P})$.
- (ii) $L(\mathcal{P}') \geq L(\mathcal{P})$ e $U(\mathcal{P}') \leq U(\mathcal{P})$.

Sejam \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 duas partições de B . Mostre que $L(\mathcal{P}_1) \leq U(\mathcal{P}_2)$. (Sugestão: Considere \mathcal{P}_3 um refinamento de \mathcal{P}_1 e de \mathcal{P}_2 e use os dois itens acima.)

Como consequência, temos o seguinte.

Exercício 1.2. *Sejam \mathcal{P}_1 e \mathcal{P}_2 duas partições de B . Mostre que $L(\mathcal{P}_1) \leq U(\mathcal{P}_2)$. (Sugestão: Considere \mathcal{P}_3 um refinamento de \mathcal{P}_1 e de \mathcal{P}_2 e use o Exercício 1.1.)*

Definimos as integrais inferior e superior de f como

$$\underline{\int}_B f = \sup L(\mathcal{P}) \quad , \quad \overline{\int}_B f = \inf U(\mathcal{P})$$

onde o supremo e o ínfimo são tomados sobre todas as partições.

$$L(\mathcal{P}) \nearrow \underline{\int}_B f \quad , \quad U(\mathcal{P}) \searrow \overline{\int}_B f,$$

Do Exercício 1.2, vemos que $\underline{\int}_B f \leq \overline{\int}_B f$. Dizemos que f é integrável quando $\underline{\int}_B f = \overline{\int}_B f$.

Eis um critério para determinar se uma função é integrável.

Proposição 1.3. *Suponha que vale o seguinte. Dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição \mathcal{P} tal que $U(\mathcal{P}) - L(\mathcal{P}) < \varepsilon$. Então, f é integrável.*

Demonstração. Temos que $L(\mathcal{P}) < \underline{\int}_B f$ e que $U(\mathcal{P}) > \overline{\int}_B f$. Então,

$$0 \leq \overline{\int}_B f - \underline{\int}_B f \leq U(\mathcal{P}) - L(\mathcal{P}) < \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, $\overline{\int}_B f = \underline{\int}_B f$. □

Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.4. *Se $f(x, y)$ é contínua em um retângulo B fechado, então f é integrável. A demonstração usa o fato de que uma função contínua em um conjunto fechado e limitado de \mathbb{R}^2 (um compacto) é uniformemente contínua.*

Exemplo 1.5. *Seja $f(x, y)$ tal que $f(x, y) = 0$ se x é racional e $f(x, y) = 1$ se x é irracional. Então, para qualquer partição \mathcal{P} , $L(\mathcal{P}) = 0$ e $U(\mathcal{P}) = |B|$, onde $|B|$ é a área de B . Logo, $\underline{\int}_B f = 0$ e $\overline{\int}_B f > 0$. Então, f não é integrável.*

Exercício 1.6. *Seja $B = [-1, 1] \times [0, 1]$ e f a função que vale 1 se $x > 0$ e 0 se $x \leq 0$. Mostre que f é integrável em B , com $\int_B f = 1$.*

Note que a função f acima tem uma quantidade infinita de pontos em que ela é descontínua. Quão descontínua uma função integrável pode ser? A resposta foi dada por Lebesgue: f é integrável se e só se o conjuntos de descontinuidades de f tem medida nula. Um conjunto tem medida nula se pode ser coberto por um conjunto enumerável de blocos de volume total arbitrariamente pequeno.

Exercício 1.7. *Mostre que todo conjunto enumerável é de medida nula. Conclua que os racionais têm medida nula.*

1.1 Integral em um conjunto limitado qualquer

Se R um conjunto qualquer **limitado** do plano, consideramos um bloco B contendo R e estendemos f a B atribuindo o valor 0 aos pontos de B fora de R . Se \tilde{f} é essa extensão, definimos

$$\int_R f = \int_B \tilde{f}.$$

1.2 Propriedades da integral

Seja $\mathcal{I}(R)$ o conjunto das funções integráveis em R . Propriedades fundamentais da integral:

1. **Linearidade:** Se $f, g \in \mathcal{I}(R)$ e $a, b \in \mathbb{R}$, então $af + bg \in \mathcal{I}(R)$ e $\int_R af + bg = a \int_R f + b \int_R g$.
2. **Monotonia:** Se $f, g \in \mathcal{I}(R)$ e $f \geq g$, então $\int_R f \geq \int_R g$.
3. **Adição:** Se $R \cap S = \emptyset$, então $\mathcal{I}(R \cup S) = \mathcal{I}(R) \cap \mathcal{I}(S)$ e $\int_{R \cup S} f = \int_R f + \int_S f$.

2 Integrais iteradas e o Teorema de Fubini

Seja $B = [a, b] \times [c, d]$ e seja $V = \int_B f$ o volume embaixo do gráfico de f .

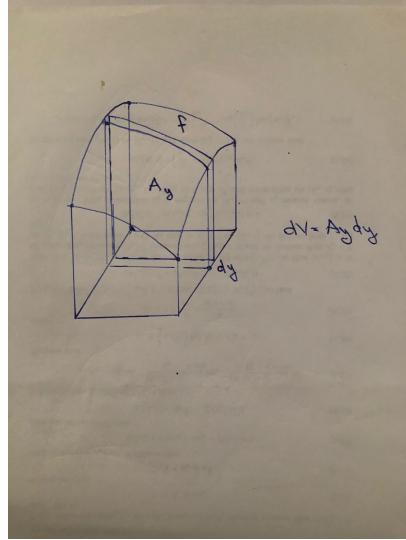


Figura 5: Volume por fatias

Para cada $y \in [c, d]$ seja V_y o volume de altura infinitesimal dy e área A_y . Então,

$$V = \int V_y = \int_c^d A_y dy.$$

Mas $A_y = \int_a^b f(x, y) dx$. Logo,

$$\int_B f = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

Trocando o papel de x com y , obtemos também

$$\int_B f = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

As integrais $\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$ e $\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$ são ditas **iteradas**. As contas informais acima dizem que podemos calcular $\int_B f$ fazendo duas integrais simples. Podemos integrar primeiro em x , e depois em y , ou vice-versa. Este é o chamado método de Fubini. A formalização deste argumento é o Teorema de Fubini, cujos detalhes técnicos omitimos.

Exemplo 2.1. Seja $B = [0, 1] \times [0, 2]$ e $f(x, y) = (2x + y)^2$. Temos

$$\int_B f = \int_0^1 \int_0^2 (2x + y)^2 dy dx = \int_0^2 \int_0^1 (2x + y)^2 dx dy.$$

Calculamos

$$\int_0^2 (2x + y)^2 dy = \frac{1}{3}(2x + y)^3 \Big|_0^2 = \frac{1}{3}((2x + 2)^3 - 8x^3) = \frac{8}{3}((x + 1)^3 - x^3).$$

Então,

$$\int \int_B f = \frac{8}{3} \int_0^1 [(x + 1)^3 - x^3] dx = \frac{2}{3}[(x + 1)^4 - x^4] \Big|_0^1 = \frac{2}{3}(16 - 1 - 1) = \frac{28}{3}.$$

Mudando a ordem,

$$\int_0^1 (2x + y)^2 dx = \frac{1}{6}(2x + y)^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{6}((2 + y)^3 - y^3),$$

$$\int \int_B f = \frac{1}{6} \int_0^2 ((2 + y)^3 - y^3) dy = \frac{1}{24}((2 + y)^4 - y^4) \Big|_0^2 = \frac{1}{24}(4^4 - 2^4 - 2^4) = \frac{28}{3}.$$

Exemplo 2.2. Seja $B = [0, 1] \times [0, 1]$ e $f(x, y) = xe^{xy}$. Então,

$$\int_B f = \int_0^1 \int_0^1 xe^{xy} dy dx = \int_0^1 \int_0^1 xe^{xy} dx dy.$$

Temos

$$\int_0^1 xe^{xy} dy = e^{xy} \Big|_0^1 = e^x - 1.$$

Logo,

$$\int_B f = \int_0^1 e^x - 1 dx = e^x - x \Big|_0^1 = e - 1 - 1 = e - 2.$$

Temos menos sucesso quando trocando a ordem de integração. Resolvemos $\int_0^1 xe^{xy} dx$ integrando por partes. Isto dá,

$$\int_0^1 xe^{xy} dx = x \frac{e^{xy}}{y} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{xy}}{y} dx = x \frac{e^{xy}}{y} - \frac{e^{xy}}{y^2} \Big|_0^1 = \frac{e^y}{y} - \frac{e^y - 1}{y^2}.$$

Então,

$$\int_B f = \int_0^1 \frac{e^y}{y} - \frac{e^y - 1}{y^2} dy = ???$$

Exemplo 2.3. Vejamos como fica Fubini na integral $\int_R f$, onde R é uma região limitada qualquer. Suponha que R seja como a primeira imagem da Figura 6.

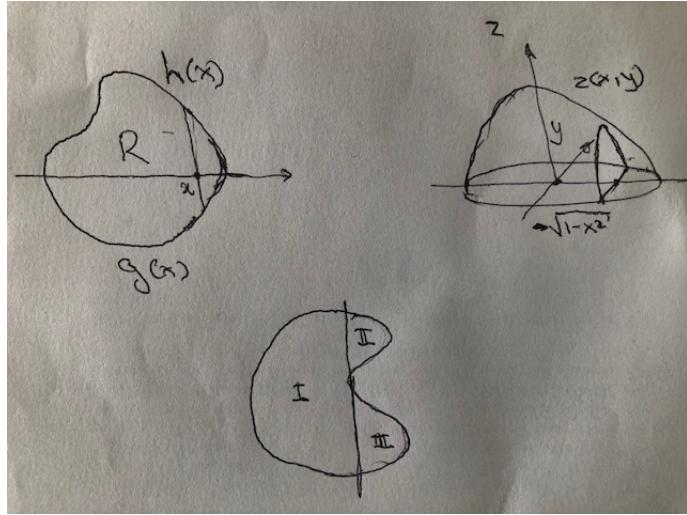


Figura 6: Região R

Fubini nos dá

$$\int_R f = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx.$$

Pode ocorrer que precisemos dividir R em sub-regiões para poder aplicar Fubini, como mostra a Figura 6.

Vejamos o caso do volume V da semi-esfera de raio R . Temos que $z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$ é a parte superior da esfera. Então, $V = \int_D z(x, y)$, onde D é o círculo $x^2 + y^2 \leq R^2$. Fixado x , a variável y varia entre $-\sqrt{R^2 - x^2}$ e $\sqrt{R^2 - x^2}$. Logo,

$$V = \int_D \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} = \int_{-R}^R \int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} dy dx. \quad (2.1)$$

Para x fixado, seja $r = \sqrt{R^2 - x^2}$. Então,

$$\int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} dy = \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - y^2} dy$$

é a área da semicircunferência de raio r , que vale $\frac{\pi}{2}r^2 = \frac{\pi}{2}(R^2 - x^2)$. Assim,

$$V = \frac{\pi}{2} \int_{-R}^R (R^2 - x^2) dx = \frac{\pi}{2} \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-R}^R = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

O Teorema de Fubini está associado ao **Princípio de Cavalieri**: se as seções ortogonais de dois corpos têm áreas iguais, então eles têm volumes iguais.

3 Mudança de variáveis

Recordamos o caso de funções de uma variável. Seja $A = \int dA = \int_a^b f(x) dx$. Na mudança de variável $x = g(t)$, com $t \in [c, d]$, o intervalo infinitesimal $(t, t + dt)$ se transforma no intervalo

$(x, x + dx)$, onde

$$x = g(t), \quad x + dx = g(t + dt) = g(t) + g'(t)dt = x + g'(t)dt.$$

Portanto, $dx = g'(t)dt$. Assim, a área infinitesimal $dA = f(x) dx$ é igual a $f(g(t))g'(t) dt$ e

$$I = \int dA = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt.$$

No caso \mathbb{R}^2 , seja Ω uma região limitada do \mathbb{R}^2 e seja $V = \int_{\Omega} dV = \int_{\Omega} f(x, y) dx dy$. Considere a mudança de variáveis $(u, v) \rightarrow (x, y)$ dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Suponha Σ um retângulo de \mathbb{R}^2 e $g : \Sigma \rightarrow \Omega$ bijetora. Uma partição no retângulo Σ se transforma em uma partição em Ω como na Figura 7.

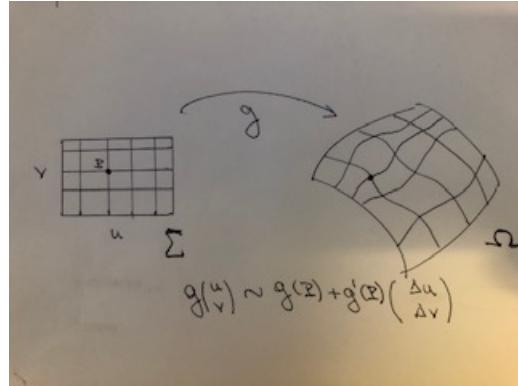


Figura 7: Partição em Ω

Suponha que g seja uma função afim, isto é, $g(u, v) = (a, b) + A(u, v)$, onde A é uma matriz 2×2 . Nesse caso,

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix}.$$

Nesse caso,

$$\Delta x \Delta y = |\det A| \Delta u \Delta v.$$

No caso geral, em cada ponto (u_0, v_0) escrevemos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \approx g \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} + g'(u_0, v_0) \begin{pmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{pmatrix},$$

de modo que

$$\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \approx g'(u_0, v_0) \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix}.$$

Para variações infinitesimais, temos

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = g'(u, v) \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}.$$

Definimos o **Jacobiano** de g como $J_g = \det g'$. Para áreas infinitesimais temos $dxdy = |J_g(u, v)|dudv$. A fórmula de mudança de variáveis se escreve

$$\int_{\Omega} f(x, y) dxdy = \int_{\Sigma} f(g(u, v)) |J_g(u, v)| dudv.$$

Na Figura 8, vemos a imagem do retângulo de lados Δu , Δv e a imagem do retângulo infinitesimal de lados du , dv . O retângulo infinitesimal é levado no paralelogramo infinitesimal $g'(u, v) \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$.

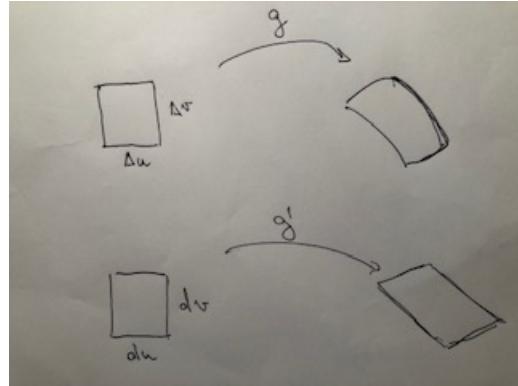


Figura 8: Deformação de g

Vejamos a mudança de coordenadas cartesianas para polares. Ela é útil, por exemplo, para descrever o círculo $x^2 + y^2 \leq R^2$, fazendo $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, com $(r, \theta) \in [0, R] \times [0, 2\pi]$. Neste caso,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}.$$

Então,

$$g' \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

e

$$J_g \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r.$$

A interpretação geométrica do valor de J_g é dada na Figura 9 abaixo.

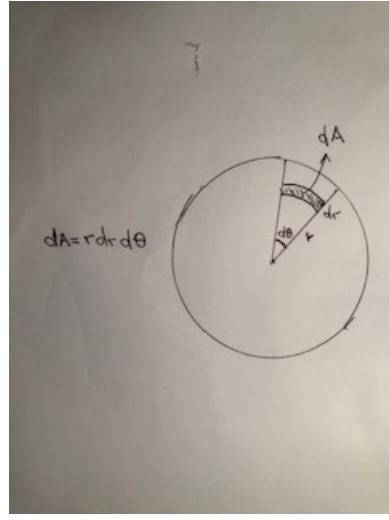


Figura 9: Coordenadas Polares

Exemplo 3.1. Vamos calcular do volume da esfera de raio R usando coordenadas polares. O volume da semi-esfera é dado por $V = \int_{D_R} \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} dx dy$, onde D_R a o círculo $x^2 + y^2 = R^2$. A descrição de D_R em coordenadas polares é dada por

$$D_R = \{(r, \theta), r \in [0, R], \theta \in [0, 2\pi]\}.$$

Como o jacobiano da transformação vale r , temos

$$V = \int_0^R \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 - r^2} r d\theta dr = 2\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r dr = -\frac{2\pi}{3} (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^R = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

4 Integrais impróprias

Integrais impróprias são aquelas definidas em regiões não-limitadas e/ou para funções não-limitadas.

Considere primeiro f limitada e $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ uma região não-limitada. Definimos $\int_{\Omega} f$ da seguinte forma. Seja B_R a bola de raio R em \mathbb{R}^2 . Então, $\Omega_R = \Omega \cap B_R$ é uma região limitada. Definimos

$$\int_{\Omega} f = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Omega_R} f,$$

desde que a integral do lado direito esteja bem definida.

No caso de f não-limitada, começemos supondo $f \geq 0$. Dado $n \in \mathbb{N}$, defina $f_n(x, y) = \min\{f(x, y), n\}$. Então, f_n é limitada. Definimos

$$\int_{\Omega} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n,$$

desde que a integral do lado direito esteja bem definida. Se f muda de sinal, definimos sua **parte positiva** f^+ como $f^+(x, y) = \max\{f(x, y), 0\}$ e sua **parte negativa** f^- como $f^-(x, y) = \max\{-f(x, y), 0\}$. Assim $f = f^+ - f^-$. Dizemos que f é integrável em Ω se f^+ e f^- forem integráveis em Ω , e definimos

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} f^+ - \int_{\Omega} f^-.$$

Em resumo, se Ω não é limitada, truncamos Ω , calculamos a integral e passamos ao limite. Se f não é limitada, truncamos f , calculamos a integral e passamos ao limite. Veja a Figura 10.

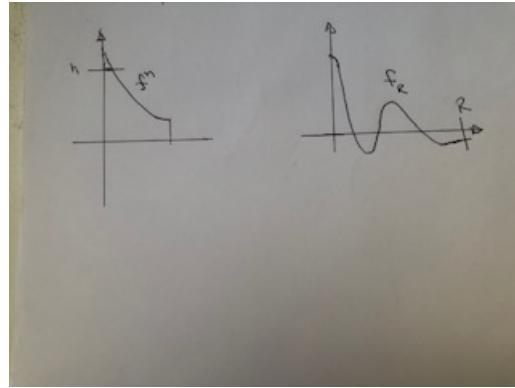


Figura 10: Integrais impróprias

Como exemplo, considere $f(x, y) = r^{-p}$ para $p > 0$, veja a Figura 11.

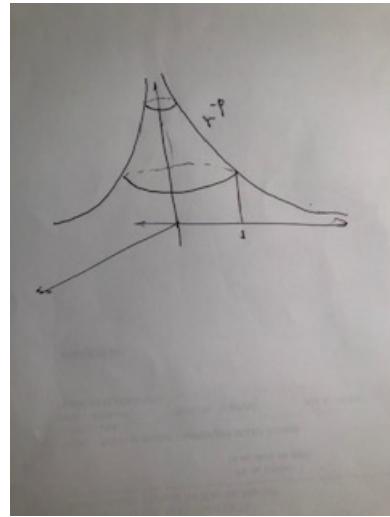


Figura 11: A função r^{-p}

Considere a região não-limitada $\Omega = \{r \geq 1\}$. Em Ω , f é limitada. Defina $\Omega_R = \{1 \leq r \leq R\}$ para cada $R > 1$. Calculemos $I_R = \int_{\Omega_R} f(x, y) dx dy$. Usando coordenadas polares,

$$I_R = \int_1^R \int_0^{2\pi} r^{-p} r d\theta dr = 2\pi \int_1^R r^{1-p} dr = \frac{2\pi}{2-p} r^{2-p} \Big|_1^R = \frac{2\pi}{2-p} (R^{2-p} - 1),$$

válido para $p \neq 2$. Se $p < 2$, $I_R \rightarrow \infty$. Dizemos nesse caso que a integral **diverge**. Se $p > 2$, $I_R \rightarrow \frac{2\pi}{p-2}$ quando $R \rightarrow \infty$. Então,

$$\int_{\{r \geq 1\}} r^{-p} = \frac{2\pi}{p-2}$$

para $p > 2$. Dizemos então que a integral é **convergente**. O caso $p = 2$ está no lado da divergência.

Exercício 4.1. Mostre que $\int_{\{r \geq 1\}} r^{-2} = \infty$.

Observação 4.2. Na prática, escrevemos

$$\int_1^\infty \int_0^{2\pi} r^{1-p} d\theta dr = 2\pi \int_1^\infty r^{1-p} dr = \frac{2\pi}{2-p} r^{2-p} \Big|_1^\infty$$

e fica claro que a integral converge para $\frac{2\pi}{p-2}$ se $p > 2$ e diverge se $p < 2$.

Calculemos agora a integral de $f(x, y) = r^{-p}$ na região $\Omega = \{r \leq 1\}$. Aqui, Ω é limitada (é a bola de raio 1), mas f é ilimitada. Escrevemos

$$\int_{\Omega} f = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{1-p} d\theta dr = 2\pi \int_0^1 r^{1-p} dr = \frac{2\pi}{2-p} r^{2-p} \Big|_0^1.$$

Se $p > 2$, $0^{2-p} = \infty$ e a integral diverge. Se $p < 2$, temos $\int_{\Omega} f = \frac{2\pi}{2-p}$. Mais uma vez, o caso $p = 2$ está do lado da divergência.

5 Integral em \mathbb{R}^3

A integral de uma função escalar f definida em \mathbb{R}^3 (ou mesmo em \mathbb{R}^N) é essencialmente a mesma da do caso \mathbb{R}^2 . Um bloco B de \mathbb{R}^3 é um conjunto da forma $[a, b] \times [c, d] \times [e, f]$. As definições de partição de $B \subset \mathbb{R}^3$, de somas de Riemann, e de integral de uma função limitada f em B são inteiramente análogas ao caso \mathbb{R}^2 . Também a extensão para regiões mais gerais, e as integrais impróprias são definidas de forma análoga.

A integração iterada permanece válida. No caso \mathbb{R}^2 , fixamos x e deixamos y variar, ou o contrário. Agora, realizamos três integrais simples. Fixando x, y , integramos em z . Fazendo variar em seguida x e y , o resultado é uma integral dupla em x e y . Obviamente, existem outras escolhas na ordem de integração. Vejamos um exemplo.

Exemplo 5.1. Sejam $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ e

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x, y) \in D, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\},$$

que corresponde ao primeiro octante da Figura 12.

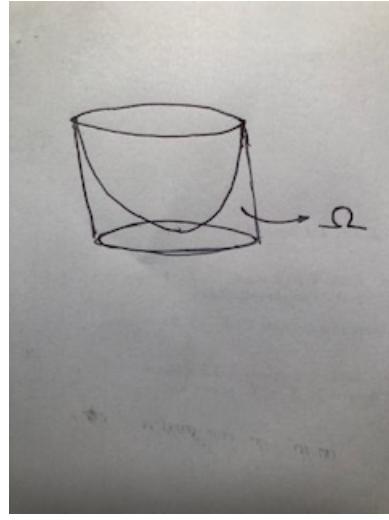


Figura 12: Região Ω

Calculemos $\int_{\Omega} f$, onde $f(x, y, z) = 2xyz$. Usando Fubini, escrevemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f &= \int \int_D \int_0^{x^2+y^2} 2xyz \, dz \, dy \, dx = \\ &\int \int_D xy \int_0^{x^2+y^2} 2z \, dz \, dy \, dx = \int \int_D xyz^2 \Big|_0^{x^2+y^2} \, dy \, dx = \\ &\int \int_D xy(x^2 + y^2)^2 \, dy \, dx. \end{aligned}$$

Agora, podemos resolver a integral dupla usando coordenadas polares. A região D é descrita por $r < 1$ e $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Fazendo $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$ obtemos

$$\begin{aligned} \int \int_D xy(x^2 + y^2)^2 \, dy \, dx &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos \theta \sin \theta r^4 r \, d\theta \, dr = \\ &\int_0^1 r^7 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin^2 \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \int_0^1 r^7 \, dr = \frac{r^8}{16} \Big|_0^1 = \frac{1}{16}. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Exemplo 5.2. Vamos calcular o volume da semi-esfera B_R de raio R (novamente!), escrevendo $V = \int_{B_R} 1 \, dxdydz$. Note que B_R corresponde a $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$. Então, fixados x, y, z varia de 0 a $\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$. Note que (x, y) varia no disco D descrito por $x^2 + y^2 \leq R^2$. Então, por Fubini,

$$\int_{B_R} 1 \, dxdydz = \int_D \int_0^{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}} 1 \, dz \, dxdy = \int_D \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)},$$

obtendo a fórmula (2.1) do Exemplo 2.3.

6 Mudança de variáveis em \mathbb{R}^3

A ideia de mudança de variáveis na integração se estende a \mathbb{R}^3 (e mesmo a \mathbb{R}^N) imediatamente. Aqui, se Σ, Ω são duas regiões de \mathbb{R}^3 e $T : \Sigma \rightarrow \Omega$ é uma bijeção, escrevemos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = T'(u, v, w) \begin{pmatrix} du \\ dv \\ dw \end{pmatrix},$$

com

$$dxdydz = |J_T(u, v, w)| dudvdw,$$

onde $J_T = \det T$.

A fórmula de mudança de variáveis se escreve

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) dxdydz = \int_{\Sigma} f(T(u, v, w)) |J_T(u, v, w)| dudvdw. \quad (6.1)$$

Vejamos duas mudanças de variáveis importantes em \mathbb{R}^3 .

6.1 Coordenadas cilíndricas

Trata-se da transformação $T(r, \theta, z) = (x, y, z)$ tal que $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $z = z$. Temos

$$J_T(r, \theta, z) = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_z \\ y_r & y_\theta & y_z \\ z_r & z_\theta & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

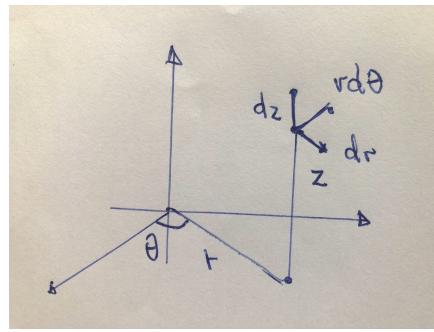


Figura 13: Jacobiano - coordenadas cilíndricas

6.2 Coordenadas esféricas

Trata-se do sistema de coordenadas (r, θ, φ) , mostrado na Figura 14.

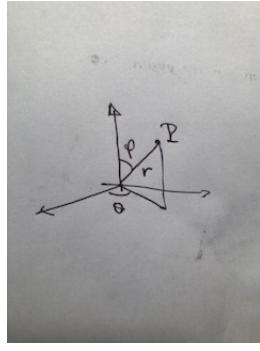


Figura 14: Coordenadas esféricas

A transformação $T(r, \theta, \varphi) = (x, y, z)$ é dada por $x = r \sin \varphi \cos \theta$, $y = r \sin \varphi \sin \theta$ e $z = r \cos \varphi$. Se $r \in [0, \infty)$, $\theta \in [0, 2\pi)$ e $\varphi \in [0, \pi]$, então (x, y, z) percorre todo \mathbb{R}^3 . Temos que

$$T' = \begin{pmatrix} x_r & x_\varphi & x_\theta \\ y_r & y_\varphi & y_\theta \\ z_r & z_\varphi & z_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

Então, $J_T = \det T'$ vale

$$J_T = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} = -r^2 \sin \varphi.$$

Logo, $|J_T(r, \varphi, \theta)| = r^2 \sin \varphi$, veja a Figura 15.

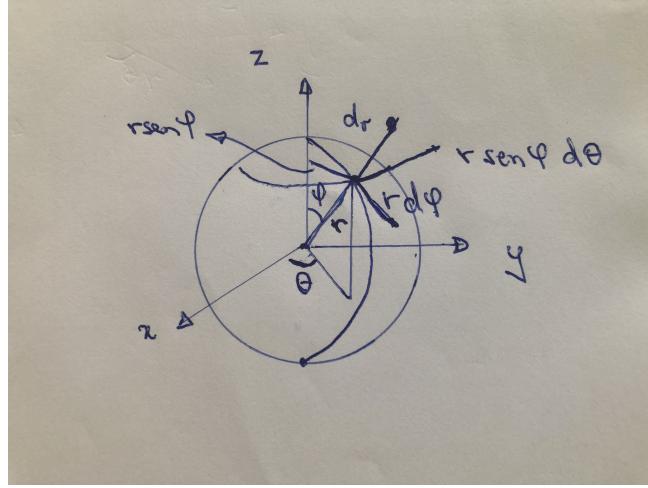


Figura 15: $dV = dr \times r d\varphi \times r \sin \varphi d\theta$

Exemplo 6.1. Calculemos novamente o volume V_R da esfera B_R de raio R , usando coordenadas esféricas, com $\theta \in [0, 2\pi)$, $\varphi \in [0, \pi]$ e $r \in [0, R]$. Temos que $V_R = \int_{B_R} 1$. Então,

$$V_R = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \varphi d\theta d\varphi dr = 2\pi \int_0^R \int_0^\pi r^2 \sin \varphi dr d\varphi = 4\pi \int_0^R r^2 dr = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Exemplo 6.2. Calculemos o volume do elipsóide $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$. Fazemos a mudança de variáveis dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

isto é, $x = au$, $y = bv$, $z = cw$. Então,

$$J_T(u, v, w) = \det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = abc.$$

A transformação T leva a esfera unitária B no elipsóide Ω . Logo,

$$V_\Omega = \int_{\Omega} 1 dx dy dz = \int_B abc du dv dw = abc V_B = \frac{4\pi}{3} abc.$$

6.3 Volume de Revolução

Considere S um corpo sólido de \mathbb{R}^3 que é obtido pela revolução em torno de um eixo de \mathbb{R}^3 de um corpo plano Ω .

Suponha que Ω esteja situado no plano xz ($y = 0$) e que o eixo seja \vec{z} . Consideramos o volume infinitesimal dV obtido pela rotação do retângulo dR de lado dx , dy , situado em $(x, 0, z)$. Sua área infinitesimal vale $dA = dx dz$. Observe que dR percorre a distância $2\pi x$ ao rodar em torno de \vec{z} .

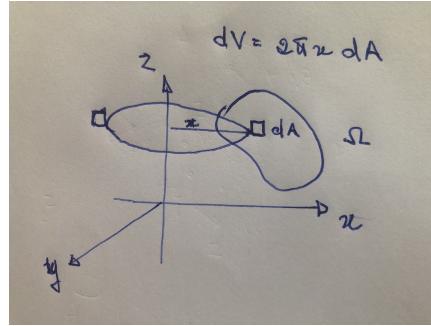


Figura 16: Volume de Revolução

Portanto, $dV = 2\pi x dx dz$ e

$$V = \int_{\Omega} dV = 2\pi \int_{\Omega} x dx dz. \quad (6.2)$$

Podemos calcular V usando Fubini de duas maneiras, integrando primeiro em z e depois em x , ou vice-versa.

Caso 1 - integrando primeiro em z .

Suponha que Ω seja limitado inferiormente por $z = g(x)$ e superiormente por $z = h(x)$. Ou seja, suponha que

$$\Omega = \{(x, z), g(x) \leq z \leq h(x), a \leq x \leq b\}.$$

Usando Fubini,

$$V = \int_{\Omega} dV = 2\pi \int_{\Omega} x dx dz. = 2\pi \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} x dz dx = 2\pi \int_a^b x(h(x) - g(x)) dx.$$

Este é o chamado **método das cascas cilíndricas**. Se $l(x) = h(x) - g(x)$, vemos na Figura 17 que $2\pi x l(x) dx$ é o volume infinitesimal gerado pela rotação do retângulo de altura $l(x)$ e largura dx .

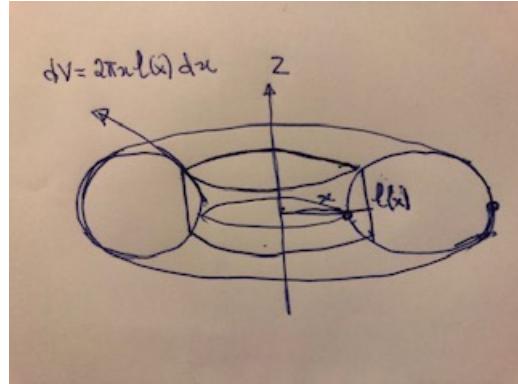


Figura 17: Volume de Revolução

Caso 2 - integrando primeiro em x .

Suponha que Ω seja limitado à direita por $x = h(z)$ e à esquerda por $x = g(z)$. Ou seja, suponha que

$$\Omega = \{(x, z), g(z) \leq x \leq h(z), c \leq z \leq d\}.$$

Usando novamente Fubini,

$$V = \int_{\Omega} dV = 2\pi \int_{\Omega} x dx dz = \pi \int_c^d \int_{g(z)}^{h(z)} 2x dx dz = \pi \int_c^d x^2 \Big|_{g(z)}^{h(z)} dz.$$

Portanto,

$$V = \pi \int_c^d h^2(z) - g^2(z) dz.$$

Este é o **método dos anéis** para o cálculo de volumes de revolução, veja a Figura 18. Vemos que $\pi(h^2(z) - g^2(z)) dz$ é o volume infinitesimal de um anel anel de raios $h(z)$ e $g(z)$, e de altura dz .

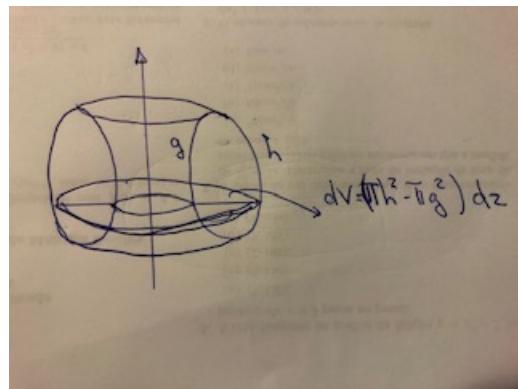


Figura 18: Método dos anéis

Exemplo 6.3. Calculemos o volume do toro, que é o sólido obtido pela revolução de um círculo D em torno de um eixo. Seja \vec{z} o eixo, e $(x - a)^2 + z^2 \leq R^2$ o círculo D . Supomos $a > R$, para que D não intercepte \vec{z} . Usando o método das cascas cilíndricas, temos $h(x) = \sqrt{R^2 - (x - a)^2}$ e $g(x) = -\sqrt{R^2 - (x - a)^2}$, com $x \in (a - R, a + R)$. Então,

$$V = 2\pi \int_{a-R}^{a+R} 2\sqrt{R^2 - (x - a)^2} x dx = 4\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - s^2}(s + a) ds. \quad (6.3)$$

Temos que

$$\int_{-R}^R \sqrt{R^2 - s^2}s ds = -\frac{1}{3}(R^2 - s^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-R}^R = 0.$$

Além disso,

$$4\pi a \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - s^2} ds = 4\pi a \frac{1}{2}\pi R^2,$$

pois o integrando é a área do semicírculo de raio R . Portanto, $V = 2\pi^2 aR^2$.

Exercício 6.4. Calcule o volume do toro usando o método dos anéis.

6.4 Centro de massa

Considere um eixo \vec{e} em \mathbb{R}^2 , uma força F paralela a \vec{e} atuando sobre um ponto P . O momento de F em relação a \vec{e} é definido por $M = |F|d$, onde d é a distância (com sinal) de P a \vec{e} . Uma massa m tem peso $F = mg$, cujo momento vale $M = mgd$.

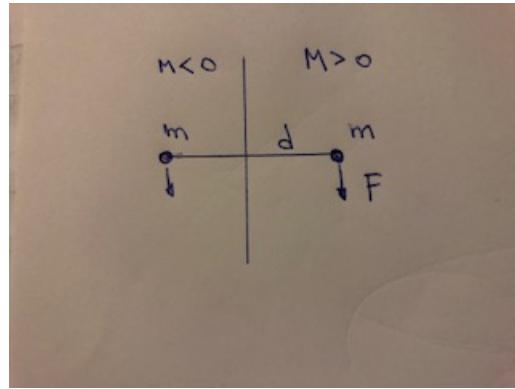


Figura 19: Momento de uma massa

Vamos considerar $g = 1$. O momento total M_T de um sistema de forças associado a j massas m_1, m_2, \dots, m_j é definido como a soma dos momentos

$$M_T = M_1 + M_2 + \dots + M_j = m_1d_1 + m_2d_2 + \dots + m_jd_j.$$

Sejam $m_T = m_1 + m_2 + \dots + m_j$ a massa total do sistema e

$$d_{CM} = \frac{1}{m_T}(m_1d_1 + m_2d_2 + \dots + m_Jd_J) = \frac{1}{m_T}M_T$$

a média ponderada das distâncias. Então,

$$M_T = m_T d_{CM}.$$

Ou seja, o sistema de j corpos tem o mesmo momento que um único corpo localizado no centro de massa CM , com massa total m_T .

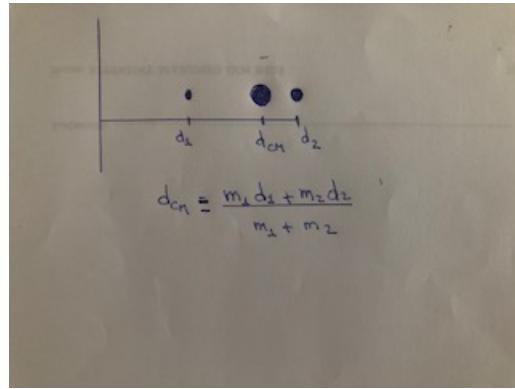


Figura 20: Momento de duas massas

Vejamos o caso de uma massa distribuída em uma região Ω , com densidade de massa $\rho(x, y)$. Considere um retângulo infinitesimal localizado em (x, y) , de lados dx e dy , com massa infinitesimal $dm = \rho(x, y) dx dy$. O momento infinitesimal gerado pela massa vale

$$dM = d(x, y) dm = d(x, y) \rho(x, y) dx dy,$$

onde $d(x, y)$ do eixo \vec{e} , veja a Figura 21.

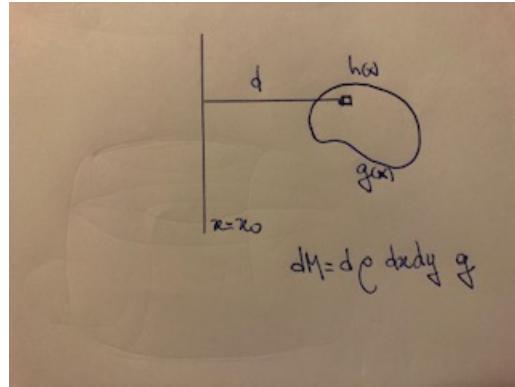


Figura 21: Momento de uma distribuição de massa

Portanto, o momento total vale

$$M = \int_{\Omega} dM = \int_{\Omega} \rho(x, y) d(x, y) dx dy.$$

Vamos supor a partir de agora que Ω seja homogêneo, de densidade $\rho = 1$. Então

$$M = \int_{\Omega} d(x, y) dx dy.$$

Se \vec{e} é o eixo vertical $x = x_0$, então $d(x, y) = x - x_0$. Neste caso,

$$M_{x_0} = \int_{\Omega} (x - x_0) dx dy = \int_{\Omega} x dx dy - x_0 \int_{\Omega} 1 dx dy = \int_{\Omega} x dx dy - x_0 m_T,$$

onde $m_T = \int_{\Omega} 1 dx dy$ é a massa total do sistema. (É também a área de Ω .)

Em particular, o momento em relação à reta $x = 0$ vale

$$M_0 = \int_{\Omega} x \, dx dy \quad (6.4)$$

e $M_{x_0} = M_0 - x_0 m_T$. Definimos a coordenada horizontal \bar{x} do centro de massa como o valor de x_0 que torna o momento nulo, $M_{\bar{x}} = M_0 - \bar{x} m_T = 0$, de modo que

$$\bar{x} = \frac{1}{m_T} \int_{\Omega} x \, dx dy. \quad (6.5)$$

Portanto,

$$M_0 = m_T \bar{x}.$$

ou seja, o momento de um sistema distribuído de massas é igual ao momento de uma massa pontual situada sobre a reta $x = \bar{x}$ e contendo toda a massa do sistema. O mesmo vale para a direção \vec{y} , de modo que existe uma coordenada $y = \bar{y}$ que equilibra o sistema, dada por

$$\bar{y} = \frac{1}{m_T} \int_{\Omega} y \, dx dy. \quad (6.6)$$

O ponto $CM = (\bar{x}, \bar{y})$ é o **centro de massa** do sistema. Escrevemos

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{m_T} \int_{\Omega} (x, y) \, dx dy.$$

Observação 6.5. *O mesmo argumento se aplica no caso de um corpo tridimensional Ω . Seu centro de massa é dado por*

$$(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \frac{1}{m_T} \int_{\Omega} (x, y, z) \, dx dy dz.$$

6.5 O Teorema de Pappus

Existe uma relação entre baricentros e volumes de revolução, dada pelo **Teorema de Pappus**. De fato, multiplicando por 2π ambos os lados da equação (6.6) obtemos

$$2\pi \bar{x} |\Omega| = 2\pi \int_{\Omega} x \, dx dy.$$

Aqui, a área $|\Omega|$ de Ω é igual à sua massa m_T , pois estamos supondo que a densidade é igual a 1. A expressão à direita é o volume gerado pela rotação de Ω em torno do eixo \vec{y} , veja (6.2). Obviamente, podemos trocar x por y e obter o mesmo resultado para a coordenada \bar{y} do centro de massa de Ω , veja a Figura 22. Obtemos assim o

Teorema 6.6 (Teorema de Pappus). *O volume gerado pela rotação de um corpo bidimensional Ω em torno de um eixo é igual ao volume gerado pela rotação de um corpo pontual situado no centro de massa de Ω , e contendo toda a área de Ω .*

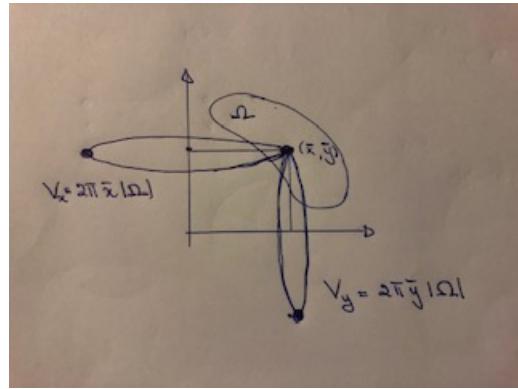


Figura 22: Rotação do centro de massa

Exemplo 6.7. Podemos agora determinar o volume do toro sem fazer contas. O centro de massa do círculo de centro $(a, 0)$ e raio R é o seu centro $(a, 0)$. A área (massa) do círculo vale πR^2 . Girando o ponto $(a, 0)$ em torno do eixo z , obtemos o volume $2\pi a \times \pi R^2 = 2\pi^2 a R^2$.

Também podemos usar o Teorema de Pappus para determinar centros de massa.

Exemplo 6.8. Considere o semi-círculo $x^2 + y^2 = R^2$, com $y > 0$. Por simetria, $\bar{x} = 0$. E \bar{y} ? Rodando o semi-círculo em torno do eixo \vec{x} , obtemos o volume da esfera $\frac{4}{3}\pi R^3$. A área do semi-círculo é $\frac{1}{2}\pi R^2$. Usando Pappus,

$$2\pi \frac{1}{2}\pi R^2 \bar{y} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

$$\text{Logo, } \bar{y} = \frac{4}{3\pi}R.$$