CAPÍTULO 7

Exercícios 7.1

1. ***a***) Seja $\vec{F}(x, y, z, w) = (x, y, z, w)$.

Um campo vetorial $\vec{F} : \Omega \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ é conservativo se existe um campo escalar diferenciável $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, tal que $\nabla\varphi = \vec{F}$ em Ω.

Tomando-se $\varphi(x, y, z, w) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{w^2}{2}$,

tem-se $\nabla\varphi = \vec{F}$ em Ω. $(\Omega = \mathbb{R}^4)$.

Então, $\vec{F}$ é conservativo.

b) Seja $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} + x\vec{j}$.

$\varphi(x, y) = xy$ é tal que $\nabla\varphi = \vec{F}$ em $\mathbb{R}^4$.
Então, $\vec{F}$ é conservativo.

c) Seja $\vec{F}(x, y, z) = \underbrace{(x - y)}_{P}\vec{i} + \underbrace{(x + y + z)}_{Q}\vec{j} + \underbrace{z^2}_{R}\vec{k}$.

Como $\vec{F}$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$, uma condição necessária para $\vec{F}$ ser conservativo é que

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Como $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -1$ e $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 1$, $\vec{F}$ não é conservativo.

d) Seja $\vec{F}(x, y, z) = \underbrace{\dfrac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}}_{P}\vec{i} + \underbrace{\dfrac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}}_{Q}\vec{j} + \underbrace{\dfrac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}}_{R}\vec{k}$.

Tomando-se $\varphi(x, y, z) = -\dfrac{1}{2(x^2 + y^2 + z^2)}$ tem-se $\nabla\varphi = \vec{F}$. Logo, $\vec{F}$ é conservativo.

e) Seja $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Temos $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial z} = \dfrac{\partial R}{\partial y} = 0.$

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\vec{k}$$

Daí, segue

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = x \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = y \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = z.$$

Tomando-se $\varphi(x, y, z) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{z^2}{2}$, tem-se $\Delta\varphi = \vec{F}$. Logo, $\vec{F}$ é conservativo.

2. Sejam $\vec{F}\,(x, y, z) = f(r)\,\dfrac{\vec{r}}{r}$, onde $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua,

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e $\|\vec{r}\| = r.$

Consideremos $\varphi(x, y, t) = g\,\underbrace{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,)}_{r}$, onde g é uma primitiva de f.

Temos:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{dg}{dr}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{dg}{dr}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \text{ e}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{dg}{dr}\cdot\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Então,

$$\nabla\varphi = \frac{x\vec{i}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,f(r) + \frac{y\vec{j}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,f(r) + \frac{z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,f(r). \text{ Daí}$$

$$\nabla\varphi = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\underbrace{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}_{\|r\| = r}}\cdot f(r) \text{ ou seja,}$$

$\nabla\varphi = \dfrac{\vec{r}}{r}\,f(r) = \vec{F}$. Logo, $\vec{F}$ é conservativo.

Exercícios 7.2

1.

a) A forma diferencial $x\,dx + y\,dy + z\,dz$ é exata pois admite $\varphi(x, y, z)$ $= \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{z^2}{2}$ como primitiva:

$$d\left(\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}\right) = x\,dx + y\,dy + z\,dz.$$

c) A forma diferencial $yz\,dx + xz\,dy + xy\,dz$ é exata pois admite $\varphi(x, y, z) = xyz$ como primitiva.

e) A forma diferencial $(x + y)\,dx + (y - x)\,dy$ não é exata pois

$$\frac{\partial(x+y)}{\partial y} \neq \frac{\partial(y-x)}{\partial x} \quad \left(\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}\right).$$

g) A forma diferencial $xy\,dx + y^2\,dy + xyz\,dz$ não é exata pois

$$\frac{\partial(xy)}{\partial y} \neq \frac{\partial(y^2)}{\partial x} \quad \left(\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}\right).$$

h) Seja a forma diferencial $-\dfrac{y}{x^2 + y^2}\,dx + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\,dy,\ y > 0$

onde $P(x, y) = -\dfrac{y}{x^2 + y^2}$ e $Q(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ são funções de classe C^1 em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Temos:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}\right\}, \text{ ou seja, } \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y).$$

Como a condição necessária está verificada, a forma diferencial tem chance de ser exata.

Como $\theta(z, y) = -\text{arctg}\,\dfrac{x}{y},\ y > 0$ é uma primitiva, segue que a forma diferencial é exata.

(Observamos que $\theta(x, y) = \dfrac{\pi}{2} - \text{arctg}\,\dfrac{x}{y},\ y > 0,$ é também uma primitiva, pois, funções com gradientes iguais, num conjunto conexo por caminhos, diferem, neste conjunto, por uma constante. Veja Seção 30.3 do Vol. 2.)

i) Seja $-\dfrac{y}{x^2+y^2}\,dx+\dfrac{x}{x^2+y^2}\,dy,\,(x,\,y)\in\Omega$ onde
$\Omega=\left\{(x,\,y)\in\mathbb{R}^2\mid y>0\right\}\cup\left\{(x,\,y)\in\mathbb{R}^2\mid x<0\right\}.$

$\theta_1(x,\,y)=\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y},\,y>0,$ é uma primitiva de $-\dfrac{y}{x^2+y^2}\,dx+\dfrac{x}{x^2+y^2}\,dy$ no semiplano $y>0$. Por outro lado, $\theta_2(x,\,y)=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x},\,x<0,$ é uma primitiva no semiplano $x<0$. Então, no quadrante $x<0$ e $y>0$, $\theta_1(x,\,y)$ e $\theta_2(x,\,y)$ diferem por uma constante, ou seja,

$$\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+k.$$

No ponto $(-1,\,1)$, temos

$$\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{-1}{1}=\operatorname{arctg}\frac{1}{-1}+k,\text{ ou seja, }\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+k$$

daí, $k=\pi$. Segue que

$$\theta(x,\,y)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y},\,y>0\\ \pi+\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x},\,x<0\end{cases}$$

é uma primitiva da forma diferencial dada em Ω. Tal função pode ser dada de outra forma. Como $\theta_3(x,\,y)=k_1-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$ é uma primitiva da forma diferencial no semiplano $y<0$, segue que no quadrante $x<0$ e $y<0$, $\theta_3(x,\,y)$ e $\theta_2(x,\,y)$ diferem por uma constante, logo, para algum valor de k_1 devemos ter

$$k_1-\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=\pi+\operatorname{arctg}\frac{y}{x},\ x<0\text{ e }y<0.$$

Fazendo $(x,\,y)=(-1,\,-1)$, obtemos $k_1-\dfrac{\pi}{4}=\pi+\dfrac{\pi}{4}$ e, portanto, $k_1=\dfrac{3\pi}{2}\cdot$ Segue que a primitiva $\theta(x,\,y)$ pode, também, ser dada assim

$$\theta(x,\,y)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} & \text{se } y>0\\ \pi & \text{se } y=0 \text{ e } x<0\\ \dfrac{3\pi}{2}-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y} & \text{se } y<0.\end{cases}$$

2. Seja a forma diferencial $\underbrace{3x^{m+1}\,y^{n+1}}_{P(x,\,y)}\,dx + \underbrace{2x^{m+2}\,y^{n}}_{Q(x,\,y)}\,dy.$

Temos $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow 3(n+1)\,x^{m+1}y^n = 2(m+2)\,x^{m+1}y^n \Rightarrow$

$\Rightarrow 3n+3 = 2m+4 \Rightarrow \dfrac{3n+3}{m+2} = 2.$

Com a condição $\dfrac{3n+3}{m+2} = 2$, m e n naturais, $\varphi(x, y) = \dfrac{3}{m+2}\,x^{m+2}y^{n+1}$ é uma primitiva, em $\mathbb{R}^2$, da forma diferencial dada, pois, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 3x^{m+1}y^{n+1}$ e $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \dfrac{3n+3}{m+2}\,x^{m+2}y^n = 2x^{m+2}y^n$. (**Observação.** Se permitirmos que m e n sejam reais quaisquer, com as condições $\dfrac{3n+3}{m+2} = 2$ e $m \neq -2$, a função $\varphi(x, y) = \dfrac{3}{m+2}\,x^{m+2}y^{n+1}$, será uma primitiva no aberto $x > 0$ e $y > 0$. Se $m = -2$ e $n = -1$, $\varphi(x, y) = 3\ln x + 2\ln y$ será uma primitiva no aberto $x > 0$ e $y > 0$.)

4. Seja $\underbrace{(x^3 + x + y)u}_{P}dx \underbrace{-\,xu}_{Q}dy$. Queremos determinar u que só dependa de x, $u = u(x)$, de modo que a forma diferencial seja exata. Temos

$\dfrac{\partial P}{dy} = u + (x^3 + x + y)\,\dfrac{\partial u}{\partial y} = u$, pois, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$ e $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = -\,u - x\,\dfrac{du}{dx}$. Da condição necessária para a forma diferencial ser exata segue $u = -\,u - x\,\dfrac{du}{dx}$ que é uma equação diferencial de variáveis separáveis. Separando as variáveis, obtemos $\dfrac{du}{u} = -\,\dfrac{2}{x}\,dx$, $u \neq 0$ e $x \neq 0$. Integrando, resulta $\ln|u| = \ln\dfrac{k}{x^2}$, onde $k > 0$ é a constante de integração. Deste modo, com $u = \dfrac{1}{x^2}$, $x \neq 0$, a condição necessária está verificada. Deixamos a seu cargo verificar que com este u a forma diferencial é exata.

5. Queremos determinar $u = u(y)$ que torne $(y^2 + 1)u\,dx + (x + y^2 - 1)u\,dy$ uma forma diferencial exata. Para que a condição necessária esteja verificada, devemos ter

$\dfrac{d}{\partial y}(y^2 + 1)u = \dfrac{d}{\partial x}(x + y^3 - 1)u$, ou seja, $2\,yu + (y^2 + 1)\,\dfrac{du}{dy} = u$ que é uma equação diferencial de variáveis separáveis. (*Lembre-se*: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$, pois, u só depende de y.)

Separando as variáveis, obtemos $\dfrac{du}{u} = \dfrac{(1-2y)\,dx}{y^2+1}$, $u \neq 0$. Integrando, resulta $\ln k|\,u\,| = \operatorname{arctg} y - \ln(y^2 + 1)$, onde $k > 0$ é a constante de integração. Deste modo, com $u = \dfrac{e^{\operatorname{arctg} y}}{y^2 + 1}$ a condição necessária está verificada. Fica a seu cargo verificar que com esta u a forma diferencial é exata.

Exercícios 7.3

1. *b*) $\int_\gamma y\,dx + x^2\,dy$ (a forma diferencial não é exata)

$\gamma(t) = (1, 1) + t[(2, 2) - (1, 1)] = (1 + \text{t}, 1 + \text{t}) \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$

Façamos $x(t) = 1 + t$ e $y(t) = 1 + t$.

Temos,

$$\int_\gamma y\,dx + x^2\,dy = \int_0^1 \left[(1+t) + (1+t)^2\right] dt = \int_0^1 (t^2 + 3t + 2)\,dt = \frac{23}{6}.$$

***c*)** $\int_\gamma -\frac{y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy$, onde $\gamma\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ é uma curva C^1 por partes, com imagem contida no semiplano $y > 0$.

Pelo Exercício 1, *h* da Seção 7.2, $\theta(x, y) = \text{arctg}\,\frac{x}{y}$, $y > 0$ é uma primitiva e a forma é exata.

Então,

$$\int_\gamma -\frac{y}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\,dy = \left[\theta(x, y)\right]_{\gamma(0)}^{\gamma(1)} = \left[-\text{arctg}\,\frac{x}{y}\right]_{\gamma(0) = (1, 1)}^{\gamma(1) = (-2, 3)}$$

$$= -\text{arctg}\left(-\frac{2}{3}\right) + \text{arctg}\,1 = \frac{\pi}{4} + \text{arctg}\,\frac{2}{3}.$$

***d*)** $\int_{(-1, 0)}^{(1, 0)} \frac{x}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{y}{x^2 + y^2}\,dy$

$P(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$ e $Q(u, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$ são funções de classe C^1 em $\Omega = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

De $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$ e $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$ segue que é uma forma diferencial exata em Ω: $\varphi = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ é uma primitiva em Ω.

Segue que:

$\int_{(-1, 0)}^{(1, 0)} \frac{x}{x^2 + y^2}\,dx + \frac{y}{x^2 + y^2}\,dy = \left[\ln\sqrt{x^2 + y^2}\right]_{(-1, 0)}^{(1, 0)} = 0$ sendo a integral calculada sobre uma curva com imagem contida em Ω.

e) $\displaystyle\int_\gamma (\text{sen } xy + xy \cos xy)\, dx + x^2 \cos xy\, dy$, onde
$\gamma(t) = (t^2 - 1, t^2 + 1),\ -1 \leqslant t \leqslant 1.$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= 2x \cos xy - x^2 y \,\text{sen}\, xy \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= 2x \cos xy - x^2 y \,\text{sen}\, xy \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{a forma diferencial é exata em } \mathbb{R}^2.$$

$\varphi(x, y) = x \,\text{sen}\, xy$ é uma primitiva e

$$\int_\gamma (\text{sen } xy + xy \cos xy)\, dx + x^2 \cos xy\, dy = \left[x \,\text{sen}\, xy\right]_{\gamma(-1)}^{\gamma(1)} = 0.$$

f) $\displaystyle\int_\gamma -\frac{y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy$, onde $g\colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ é uma curva C^1 por partes com imagem contida no conjunto

$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < 0\}$ tal que
$\gamma(0) = (1, 1)$ e $\gamma(1) = (-1, -1)$.

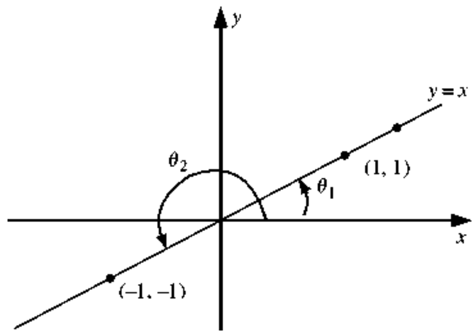
Pelo Exercício 1, *h* da Seção 7.2, vimos que a forma diferencial é exata em Ω. O campo vetorial é conservativo com função potencial assim definida:

$$\theta(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \text{arctg}\, \dfrac{x}{y} & \text{se } y > 0 \\ \pi & \text{se } y = 0 \text{ e } x < 0 \\ \dfrac{3\pi}{2} - \text{arctg}\, \dfrac{x}{y} & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

Então,

$$\int_\gamma -\frac{y}{x^2 + y^2}\, dx + \frac{x}{x^2 + y^2}\, dy = \left[\theta(x, y)\right]_{(1,1)}^{(-1,-1)}$$
$$= \left[\theta(-1, -1) - \theta(1, 1)\right] = \left[\left(3\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right] = \pi.$$

Observação. $\theta(x, y) = \theta_2 - \theta_1$, onde θ_1 e θ_2 são os ângulos assinalados na figura.



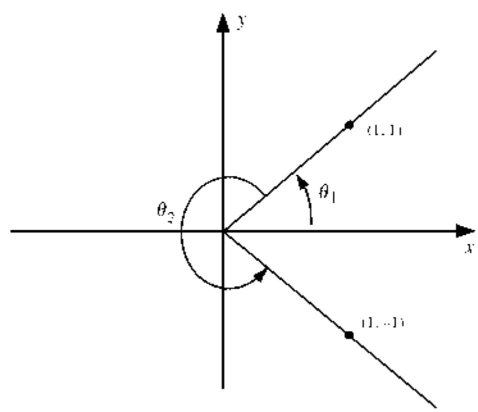
3. Analogamente ao Exercício 1, *f*.

$$\int_\gamma -\frac{y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = \left[\theta(x, y)\right]_{\gamma(0)=(1,1)}^{\gamma(1)=(1,-1)}$$

$$= \left[\theta(1,-1) - \theta(1,1)\right] = \left[\frac{3\pi}{2} - \text{arctg}\,(-1)\right]$$

$$-\left[\frac{\pi}{2} - \text{arctg}\,1\right] = \frac{3\pi}{2}$$

$$\left[\theta(x, y) = \frac{7\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}\right].$$



Exercícios 7.6

1.

a) $h(x) = \int_1^{x^2} \text{sen}\, t^2\, dt + \int_0^1 \frac{1}{1+xu^4}\, du.$

$h'(x) = \frac{d}{dx}\int_1^{x^2} \text{sen}\, t^2\, dt + \frac{d}{dx}\int_0^1 \frac{1}{1+xu^4}\, du.$ Pelo Teorema Fundamental do

Cálculo, $\frac{d}{dx}\int_1^{x^2} \text{sen}\, t^2\, dt = 2x\,\text{sen}\, x^4$ e pelo que vimos na seção, temos

$\frac{d}{dx}\int_0^1 \frac{1}{1+xu^4}\, du = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{1+xu^4}\right) du = \int_0^1 -\frac{u^4}{(1+xu^4)^2}\, du.$ Assim,

$$h'(x) = 2x \operatorname{sen} x^4 + \int_0^1 -\frac{u^4}{(1 + xu^4)^2}\, du.$$

b) $h(x) = \displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2 t^2)\, dt.$

$$h'(x) = \frac{d}{dx}\int_0^1 \operatorname{sen}(x^2t^2)\, dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{sen}(x^2\ t^2))\, dt$$

$$= \int_0^1 2xt^2 \cos(x^2t^2)\, dt.$$

c) $h(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}(x^2t^2)\, dt.$

Seja $\varphi(u, v) = \displaystyle\int_0^u \operatorname{sen}(v^2t^2)\, dt$. Temos

$\dfrac{\partial\varphi}{\partial u} = \operatorname{sen}(v^2u^2)$ e $\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = \displaystyle\int_0^u 2vt^2 \cos(v^2t^2)\, dt$. De

$h(x) = \varphi(u, v)$, $u = x$ e $v = x$, resulta, pela regra da cadeia,

$h'(x) = \dfrac{\partial\varphi}{\partial u}\dfrac{du}{dx} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial v}\dfrac{dv}{dx}$ e, portanto,

$$h'(x) = \operatorname{sen} x^4 + 2x\int_0^x t^2 \cos(x^2t^2)\, dt.$$

d) $h(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{\operatorname{sen} x} \frac{1}{1 + x^4t^4}\, dt.$

Façamos $u = x^2$, $v = \operatorname{sen} x$ e $w = x^4$

Então, $h(x) = \varphi(u, v, w) = \displaystyle\int_u^v \underbrace{\frac{1}{1 + wt^4}}_{f(w,\, t)}\, dt$

Pela regra da cadeia:

$$h'(x) = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{dw}{dx}. \quad (1)$$

Pelo teorema fundamental,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\left[-\int_v^u f(w, t)\, dt\right] = -f(w, u) = -\frac{1}{1 + wu^4}$$

$$= -\frac{1}{1+x^4\,(x^2)^4} = -\frac{1}{1+x^{12}};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\int_u^v f(w,t)\,dt = f(w,v)$$

$$= \frac{1}{1+x^4(\text{sen } x)^4};$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial w}\int_u^v f(w,t)\,dt = \int_u^v \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{1}{1+wt^4}\right)dt$$

$$= \int_u^v -\frac{t^4}{(1+wt^4)^2}\,dt.$$

Temos $\dfrac{du}{dx} = 2x$, $\dfrac{dv}{dx} = \cos x$ e $\dfrac{dw}{dx} = 4x^3$.

Substituindo os valores encontrados em ①:

$$h'(x) = -\frac{2x}{1+x^{12}} + \frac{\cos x}{1+x^4(\text{sen } x)^4} + 4x^3\int_{x^3}^{\text{sen } x} -\frac{t^4}{(1+x^4t^4)^2}\,dt.$$

2. Supondo $\alpha(x)$ e $\beta(x)$ funções a valores reais diferenciáveis no intervalo aberto I; $f(x, y)$ de classe C^1 no aberto Ω de $\mathbb{R}^2$ e, para todo $x \in I$, o segmento de extremidades $(x, \alpha(x))$ e $(x, \beta(x))$ esteja contido em Ω.

Nestas condições, seja

$$h(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\,dy, \quad x \in I.$$

Temos $h(x) = H\,(\alpha(x), \beta(x), z(x))$, onde $z = x$ e

$$H(\alpha, \beta, z) = \int_\alpha^\beta f(z,y)\,dy.$$

Pela regra da cadeia,

$$h'(x) = \frac{\partial H}{\partial \alpha}\frac{d\alpha}{dx} + \frac{\partial H}{\partial \beta}\frac{d\beta}{dx} + \frac{\partial H}{\partial y}\frac{dz}{dx}$$

ou seja,

$$h'(x) = \frac{\partial H}{\partial \alpha}\,\alpha'(x) + \frac{\partial H}{\partial \beta}\,\beta'(x) + \frac{\partial H}{\partial z}. \quad ①$$

Temos, em conseqüência do teorema fundamental:

$$\frac{\partial H}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[-\int_{\beta}^{\alpha} f(z, y)\, dy\right] = -f(z, \alpha(x))$$

$$\frac{\partial H}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta}\left[\int_{\alpha}^{\beta} f(z, y)\, dy\right] = -f(z, \beta(x))$$

$$\frac{\partial H}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\int_{\alpha}^{\beta} f(z, y)\, dy\right] = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\partial}{\partial z}\, f(z, y)\, dy$$

Substituindo em ①:

$$h'(x) = -\, f(x, \alpha(x))\; \alpha'(x) + f(x, \beta(x))\; \beta'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}\,(x, y)\, dy.$$