Cálculo Infinitesimal 3 – 2020 - Lista 1

Prof. Flavio Dickstein.

Questão 1. Considere um fio não-homogêneo que ocupe no espaço uma curva γ parametrizada por $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in (0, 2\pi)$. No ponto da curva de altura z, a densidade de massa σ do fio é igual a $\sigma(z) = z$. Determine a massa total do fio.

Questão 2. Seja $F(x, y) = (y^2, x^2)$. Considere dois caminhos indo de $(-1, 0)$ a $(1, 0)$: γ_1 é um segmento de reta e γ_2 é o arco de meia circunferência, na parte superior do plano. Mostre que

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dl \neq \int_{\gamma_2} F \cdot dl.$$

O que isto diz sobre F?

Questão 3. Seja $F(x, y) = (x^2, y^2)$. Considere os caminhos γ_1 e γ_2 da questão anterior. Escolha as normais a γ_1 e a γ_2 apontando para cima. Mostre que

$$\int_{\gamma_1} F \cdot d\eta \neq \int_{\gamma_2} F \cdot d\eta.$$

O que isto diz sobre F?

Questão 4. Seja $F(x, y) = (\cos x \, \sin y, \sin x \, \cos y)$.

(i) Mostre que o rotacional $\nabla \times F$ é nulo. (Veremos que, nesse caso, F é um campo gradiente.)

(ii) Calcule o potencial G de F resolvendo as equações

$$\partial_x G(x, y) = \cos x \, \sin y, \quad \partial_y G(x, y) = \sin x \, \cos y. \tag{1}$$

(iii) Alternativamente, determine G calculando

$$G(x, y) = \int_{\gamma} F \cdot \vec{dl}, \tag{2}$$

onde γ é uma curva ligando $(0, 0)$ a (x, y). (Escolha a curva mais simples possível.)

(iv) No item anterior, o que acontece se escolhermos outro ponto no lugar de $(0, 0)$?

Questão 5.

(i) Mostre que $F(x, y) = (ye^{xy}, xe^{xy})$ é um campo conservativo e calcule o seu potencial.

(ii) Considere $H(x, y) = (y + ye^{xy}, xe^{xy})$. Seja T o triângulo de vértices $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$ percorrido no sentido trigonométrico. Calcule $\oint_{\gamma} H \cdot \vec{dl}$, a circulação de H. (Simplifique as contas usando o item anterior.)

Questão 6. Seja F o campo radial de $\mathbb{R}^2$ dado por $F(r) = \dfrac{1}{r}\vec{r}$. Seja γ_R a circunferência de raio R.

(i) Mostre que o fluxo $\int_{\gamma_R} F.d\eta$ independe de R.

(ii) Seja $p > 0$ e considere o campo radial F_p dado por $F_p(r) = \frac{1}{r^p}\vec{r}$. Suponha que o fluxo de F_p através da circunferência γ_R independa de R. Conclua que $p = 1$. Explique este fato.

(iii) Mostre que o divergente $\nabla \cdot F_p$ de F_p é nulo se e só se $p = 1$. Explique este fato.