Cálculo Infinitesimal 3 – Lista 3 - 2021/1

Prof. Flavio Dickstein.

Questão 1. Calcule o volume do parabolóide $z = 1 - (x^2 + y^2)$ situado na região $z > 0$.

Questão 2. Um sólido de forma cilíndrica tem a base circular de raio 1 e altura 2. Ele tem densidade de massa $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z$. Determine sua massa.

Questão 3. Considere a função radial em $\mathbb{R}^3$ $f(r) = r^{-p}$, onde $p > 0$. Seja $I = \displaystyle\int_{r>1} f(r)$. Mostre que $I < \infty$ se $p > 3$ e $I = \infty$ se $p \leq 3$.

Seja $J = \displaystyle\int_{r<1} f(r)$. Mostre que $J < \infty$ se $p < 3$ e $J = \infty$ se $p \geq 3$. (Portanto, o ponto crítico p_c é igual a 1 em $\mathbb{R}$, 2 em $\mathbb{R}^2$ e 3 em $\mathbb{R}^3$. Em geral, $p_c = n$ em $\mathbb{R}^n$. Mostre isso.)

Questão 4. Mostre que um cone de altura h e área da base A tem volume igual a $\dfrac{1}{3}Ah$.

Questão 5. Sejam C_z o cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$ e C_y o cilindro $x^2 + z^2 \leq 1$. Calcule o volume de $\Omega = C_z \cap C_y$. (Sugestão: Mostre que a interseção de Ω com planos x constante são quadrados. Use Fubini.)

Questão 6. Considere Q o quadrado de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$. Determine o volume do sólido obtido pela rotação de Q em torno da reta $x + y = 3$.

Questão 7. Seja T um triângulo de vértices A, B e C. Mostre que o seu centro de massa está sobre cada uma das medianas. Em particular, isso mostra que as três medianas se encontram em um ponto (o centro de massa ou baricentro). Mostre que esse ponto é $\dfrac{A + B + C}{3}$. (Sugestão: Mostre que o momento do triângulo em relação a cada mediana é nulo.)