Cálculo Infinitesimal 3 – Lista 5 - 2020

Prof. Flavio Dickstein.

Questão 1. Seja $F = (F_1, F_2)$ um campo irrotacional, isto é, $\nabla \times F = 0$. Se $F_1(x, y) = x - 4y + 1$, determine F_2.

Resolução 1. *Temos que* $\partial_x F_2 = \partial_y F_1 = -4$. *Então,* $F_2(x, y) = -4x + g(y)$.

Questão 2. Seja $F = (F_1, F_2)$ um campo incompressível, isto é, $\nabla \cdot F = 0$. Se $F_1(x, y) = x - 4y + 1$, determine F_2.

Resolução 2. *Temos que* $\partial_y F_2 = -\partial_x F_1 = 1$. *Então,* $F_2(x, y) = y + g(x)$.

Questão 3. Seja $F(x, y) = (x, y)$ e seja γ o polígono de vértices $(-2, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(0, -2)$.

(i) Calcule $\oint_\gamma F \cdot dl$ quando o circulação é feita no sentido trigonométrico.

(ii) Calcule ∇F e refaça o item (i) usando o Teorema de Green.

(iii) Calcule $\int_\gamma F \cdot d\eta$ tomando a normal exterior.

(iv) Calcule $\nabla \cdot F$ e refaça o item (ii) usando o Teorema da Divergência.

Questão 4. Seja $F(x, y) = e^{xy}(-y, x)$ e seja γ a poligonal que vai de $(-1, 0)$ a $(0, 1)$ e, depois, de $(0, 1)$ a $(1, 0)$. Considere sobre o polígono o campo de normais unitárias que apontam para cima.

(i) Calcule diretamente o fluxo $\int_\gamma F \cdot \eta$.

(ii) Verifique que F é um campo incompressível, $\nabla \cdot F = 0$.

(iii) Use o Teorema da Divergência para calcular $\int_\gamma F \cdot \eta$ de forma mais simples.

Resolução 3. *Seja* γ_1 *o trecho que vai de* $(-1, 0)$ *a* $(0, 1)$, *parametrizado por* $\alpha(t) = t(0, 1) + (1 - t)(-1, 0) = (t - 1, t)$. *Então,* $\alpha'(t) = (1, 1)$, $\eta(t) = (-1, 1)$ *e*

$$\int_{\gamma_1} F \cdot d\eta = \int_0^1 e^{t^2-t}(-t)(-1) + e^{t^2-t}(t - 1)\, dt = \int_0^1 e^{t^2-t}(2t - 1)\, dt = e^{t^2-t}\Big|_0^1 = 0.$$

O segundo trecho γ_1 *é parametrizado por* $\alpha(t) = t(1, 0) + (1 - t)(0, 1) = (t, 1 - t)$. *Então,* $\alpha'(t) = (1, -1)$ *e* $\eta(t) = (1, 1)$. *Assim,*

$$\int_{\gamma_2} F \cdot d\eta = \int_0^1 e^{t-t^2}(t - 1) + e^{t-t^2}(t)\, dt = \int_0^1 e^{t-t^2}(2t - 1)\, dt = -e^{t-t^2}\Big|_0^1 = 0.$$

Um cálculo direto mostra que $\nabla \cdot F = 0$. *Então, se* γ_3 *é o segmento que une* $(1, 0)$ *a* $(-1, 0)$, *o Teorema da Divergência diz que*

$$\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} F \cdot d\eta = 0.$$

$$\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} = - \int_{\gamma_3} F \cdot d\eta,$$

onde a normal em γ_3 tem que ser tomada para baixo. Seja $\alpha(t) = (t, 0)$, $t \in (-1, 1)$. Então, $\alpha'(t) = (1, 0)$ e $\eta(t) = (0, -1)$. Assim,

$$\int_{\gamma_3} F \cdot d\eta = \int_0^1 e^0 t(-1) = -\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = 0.$$

Questão 5. O rotacional de um campo $F = (F_1, F_2, F_3)$ é definido por

$$\nabla \times F = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}.$$

O divergente de F é definido por

$$\nabla \cdot F = \partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 + \partial_3 F_3.$$

Mostre que o "produto misto" $\nabla \cdot \nabla \times F$ é nulo, isto é, que o divergente do rotacional é igual a zero.

Questão 6. Seja $F(x, y, z)$ um campo escalar em $\mathbb{R}^3$. Seja ∇F o gradiente de F. Mostre que o "produto misto" $\nabla \times \nabla F$ é nulo, isto é, que o rotacional do gradiente é igual a zero.