Seg Ter Qua Qui Sex Sáb Dom 20/05/13

P1 - Cálculo 3 - Detonado!

O que eu aprendi com as provas antigas?

Existe um padrão.

Vamos analisar esse padrão.

1ª Questão - Integral Dupla

2 possibilidades:

(1) • Substituição

(2) • Região D

(1).1 Se você já resolveu bastantes integrais, você sabe identificar quando se deve usar a substituição.

O grande macete é saber qual substituição utilizar.

Por exemplo:

Se sua região de integração for:

1) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / (2x+y)^2 - 2y + x = -3,\ (2x+y)^2 - 2y + x = 0,$
$2x+y = 1 \text{ e } 2x+y = 0\}$

Você vai sempre procurar uma substituição que te dê um intervalo fixo e bem definido.

Nesse caso chamando:

$2x+y = u$ seu u varia bonitinho entre

$x-2y = v$ $\quad 0 \leq u \leq 1$

$-(3+u^2) \leq v \leq -u^2$

/ /

Seg Ter Qua Qui Sex Sáb Dom

2) $\iint_D \frac{y^2}{x}\,dxdy$

D: $3x^2 \geq \pi y \cap 3x^2 \leq 2\pi y \cap y^2 \geq 2x \cap y^2 \leq 4x$

Aqui nós temos uma dica na própria integral, se escolhermos $U = \frac{y^2}{x}$, vamos tanto simplificar a integral quanto fazer o intervalo constante $2 \leq U \leq 4$.
Mas agora quem será o nosso V?
$\frac{x^2}{y}$ ou $\frac{y}{x^2}$?, os dois me dão intervalos constantes.

Geralmente, devemos escolher o que tiver dependência inversa de U, ou seja, se no meu U, o "y" está em cima e o "x" embaixo, é plausível escolher V tal que "x" esteja em cima e "y" embaixo, porque geralmente, dessa forma, o Jacobiano simplifica muito. Cheque você mesmo!

Dica! Se você esta tendo problemas em botar seu x e y em função de U, V para fazer o Jacobiano, não se desespere. Deixe seu U e V em função de x e y e faça $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$, uma vez que

$J \neq 0$, $J = \frac{1}{\det \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$

Seg Ter Qua Qui Sex Sáb Dom

20/05/13

Por exemplo:

$$U = 2x^2 + y$$
$$V = \frac{y^2}{x}$$

$$\text{Jacobiano} = \det\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1}$$

$$\frac{1}{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4x & 1 \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{vmatrix} = 8y + \frac{y^2}{x} = \frac{8xy + y^2}{x}$$

Portanto $\forall x \neq 0$

$$J = \frac{x}{y^2 + 8xy}$$

(1).2 Calcular área sobre região D.

Sabemos que $A = \iint_D dxdy$

Mas se não soubermos graficar D?

Por exemplo:

$$D = \quad (x^2+y^2)^2 = 2xy$$

Se abrimos o x^2+y^2 vamos ter x^4 e y^4, o que complica nossas vidas.

Em geral, se você não souber graficar e aparecer um x^2+y^2, use substituição polar!

Nesse caso:

$x = r\cos\theta$
$y = r\,sen\theta$

Temos que

$$(r^2 sen^2\theta + r^2\cos^2\theta)^2 = 2r\cos\theta\, r\,sen\theta$$
$$r^4 = r^2\, sen 2\theta \quad \sim \text{(arco duplo MT importante)}$$
$$r^2 = sen 2\theta$$
$$r = \pm\sqrt{sen 2\theta} \quad \text{, como } r > 0$$
$$0 \leq r \leq \sqrt{sen 2\theta}$$

Mas e aí? E o θ?

Para $\sqrt{sen 2\theta}$ fazer sentido, nosso $sen 2\theta > 0$ ~~Portanto~~ Porque não podemos ter raiz negativa, logo seu θ vai variar onde o seno for positivo

$sen\theta > 0 \quad \forall \; 0 \leq \theta \leq \pi$, mas ATENÇÃO é $sen 2\theta > 0$, logo $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Assim,

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\sqrt{sen 2\theta}} \underbrace{r}_{\text{Jacobiano}}\, dx dy$$

(2) Regiões.

Se deparou com uma integral não trivial? Não tem problema, Grafique sua região D e tente mudar sua ordem de integração, ou seja, se ela for do tipo 1 parte para o tipo 2 e vice-versa, isso ajuda muito!

Seg Ter Qua Qui Sex Sáb Dom

20/05/13

2ª Questão - Integral Tripla

Existe 85%* de chance de ser uma esfera com um cone. Mas antes disso.

Tem cilindro: use substituição cilíndricas! Parece óbvio, mas acredite quando você tem uma questão com esfera e cilindro você fica tentado a usar coordenadas esféricas, não faça isso, só use coord. esféricas se **NÃO TIVER** um cilindro.

Agora vamos às coordenadas esféricas.
Desses 85% existe uma grande probabilidade de ser uma elipsóide e não uma esfera bonitinha.

Vamos considerar essa região. (sem cone por enquanto)

$$D: \left\{ \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{z+1}{4}\right)^2 \geq 1 \right.$$

O segredo é transformar essa elipsóide deslocada em uma esfera centralizada no $(0,0,0)$, como isso?
Escolhendo bem sua substituição:

$$x = 2\rho \operatorname{sen}\varphi \cos\theta - 1 \qquad \frac{x+1}{2} = x'$$
$$y = 3\rho \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi + 2 \qquad \frac{y-2}{3} = y'$$
$$z = 4\rho \cos\varphi - 1 \qquad \frac{z+1}{4} = z'$$

Mas e meu Jacobiano? Terei que calcular isso tudo?

* Os outros 15% referem-se ao humor do Anatoli, se ele vai repetir o feitiço e largar uma hiperbolóide e/ou paraboloide

NÃO!

Soma e subtração não mudam o Jacobiano, o que muda é produto e divisão, nesse caso:

$$x = a \qquad x' = C_1 \times a$$
$$y = b \quad e \quad y' = C_2 \times b$$
$$z = c \qquad z' = C_3 \times c$$

$$\det \begin{vmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{vmatrix} = \det \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \times C_1 \times C_2 \times C_3$$

Ou seja se antes meu Jacobiano era $\rho^2 \operatorname{sen}\varphi$ agora ele vai ser $\underline{2 \times 3 \times 4 \rho^2 \operatorname{sen}\varphi} = 24\rho^2 \operatorname{sen}\varphi$

E então passamos de $\left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-2}{3}\right)^2 + \left(\frac{z+1}{4}\right)^2 \geq 1$ para

$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \geq 1$

~ Um erro comum, em por exemplo,

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + \frac{z^2}{3} \leq 1 \quad e \quad z^2 \leq x^2 + y^2\}$$

Muitos acham a variação do φ pela abertura do cone, mas ATENÇÃO!, se você escolher $z = \sqrt{3}\rho\cos\varphi$ para transformar sua elipsoide em uma esfera, VOCÊ TAMBÉM ESTÁ MUDANDO a abertura do seu cone! e deve-se substituir na equação do cone o $z = \sqrt{3}\rho\cos\varphi$ para achar a sua nova abertura.

ATENÇÃO para primeiro octante no enunciado!

3ª Questão - Integral de Linha

Seguindo o padrão das últimas provas vai ser uma integral trivial para poder justificar o nível alto de dificuldade da 4ª Questão.

Não há mistérios.

$$\int_C f \cdot ds = f(\vec{\sigma}(t)) \cdot \|\vec{\sigma}'(t)\| \, dt$$

Dificuldade: Parametrização

- Parametrização entre dois pontos:
  (P_x, P_y, P_z) e $(\overline{P_x}, \overline{P_y}, \overline{P_z})$

Parametrização mais simples:

$$\vec{\sigma}(t) = (P_x, P_y, P_z) + (\overline{P_x}, \overline{P_y}, \overline{P_z})t$$

$$\begin{cases} x = P_x + \overline{P_x}t \\ y = P_y + \overline{P_y}t \\ z = P_z + \overline{P_z}t \end{cases}$$

Se puder parametrizar passando pelos eixos coordenados, faça isso! Assim você zera uma de suas coordenadas. Mas isso vamos ver melhor na 4ª Questão.

Outras parametrizações

$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} =$ qqr coisa $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\,\text{sen}\,t \end{cases}$

20/05/13

Seg Ter Qua Qui Sex Sáb Dom

Se você tem por exemplo a interseção de uma curva que não tem componente z, com uma que tem, você parametriza a primeira, independentemente da segunda, isola o z da segunda e põe a sua parametrização da primeira na segunda curva, por exemplo:

$\gamma = (x^2 + 2y^2 = 2) \quad \alpha = (z = 10 - y)$

Parametriza a primeira:

$$\frac{x^2}{2} + y^2 = 1 \qquad \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos\theta \\ y = \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Isola o z da segunda:

$$z = 10 - y$$

E substitui com sua primeira parametrização

$$z = 10 - \operatorname{sen}\theta$$

Assim

$$\vec{\sigma}(t) = \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos\theta \\ y = \operatorname{sen}\theta \\ z = 10 - \operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

Vamos começar na próxima página

Seg Ter Qua Qui Sex Sáb Dom

20/05/13

4ª Questão - Integral de Linha Vetorial (Green)

Existe 95% de chance de você ter que usar o Teorema de Green nessa questão, se não enxergar isso, pense de novo, a possibilidade de não precisar usar Green existe, mas é remota.

São três requisitos mínimos para poder usar Green; Sua curva tem que ser:

1) Contínua na sua função vetorial
2) Fechada
3) Orientada positivamente

Como assim? Vou explicar:

1) Ser contínua na função significa que sua curva NÃO PASSA por nenhum ponto cuja sua função vetorial não está definida, por exemplo

$$F = \left(\frac{1}{x^2+4y^2}, \frac{x}{x^2+3y^2}\right)$$

Sua função não está definida no ponto (0,0), portanto sua curva NÃO PODE passar por esse ponto!

O que fazer?

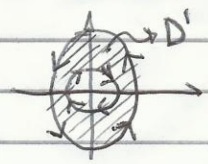
Construa uma curva auxiliar de forma que você exclua o seu ponto de descontinuidade, podendo assim escrever:

$$\int_C F\,dr + \int_{C_{auxiliar}} F\,dr = \iint_{\mathbb{C}} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy \quad ,\text{onde } \mathbb{C} = C + C_{auxiliar}$$

Por exemplo:

$$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} + 2x\right) \text{ sobre a elipse } \underset{C}{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1}$$

Sua elipse contém o ponto (0,0) então devemos adicionar uma curva que exclua esse ponto. Nesse caso escolhemos uma circunferência de raio 1 centrada no ponto (0,0), C_{aux}.
Então sua nova região vira:

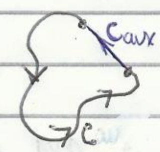


e não contém o ponto (0,0)

Logo $$\int_C F dr + \int_{C_{aux}} F dr = \iint_{D'} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx dy$$

2) Ser fechada significa que você pode dar voltas pela sua curva sem passar por um ponto fora da curva.
Se sua curva não for fechada a melhor coisa a fazer é fechar ela e aplicar green. O raciocínio é similar ao anterior.

Por exemplo, você tem uma curva C e quer calcular o $\int_C F dr$, mas ela é aberta, então você constrói uma curva auxiliar para fechá-la.



E assim:

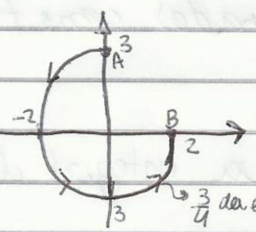
$$\int_C F \cdot dr + \int_{C_{aux}} F \cdot dr = \iint_{C} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx dy$$

Qual o melhor jeito de fechar uma curva?

PASSANDO PELOS EIXOS COORDENADOS! Assim você zera uma coordenada e sua integral fica muito mais fácil!

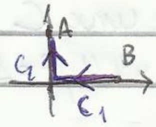
Por exemplo:

$\vec{F}(4y+2xe^{x^2y}, 6x-e^{x^2y})$ sobre a curva C



$\frac{3}{4}$ da elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$

O melhor jeito de ligar $A \to B$ é fazendo



$C_1: (-t, 0)$

$C_2: (0, t)$

Assim:

$$\int_C F dr + \underbrace{\int_{C_1} F dr + \int_{C_2} F dr}_{\text{Muito mais simples de calcular}} = \iint_C \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx dy$$

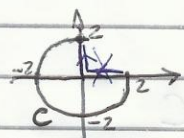
3) Orientada positivamente significa que ao longo da sua curva C o seu domínio tem que estar sempre à esquerda

Exemplo:

Caminhando sobre a elipse e sobre a circunferência o seu D está sempre à esquerda!

Obs: Na hora que for escolher as curvas auxiliares para fechar sua curva C, CUIDADO! Só escolher passar pelos eixos coordenados se sua função for contínua em TODOS os pontos da sua curva auxiliar pelos eixos! Por exemplo

$\vec{F}(x,y) = \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{y^2+x^2}\right)$ sobre a curva C:

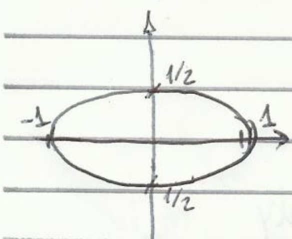


Sua função não é contínua no ponto $(0,0)$ então você não pode escolher as curvas auxiliares passando pelos eixos coordenados como fizemos no último exemplo.

DICA! Se $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} =$ número, sua integral dupla nada mais é do que a área sobre C vezes um número.

Por exemplo: $\vec{F}(x,y) = (e^x - 3y, e^y - 6x)$ sobre a curva C

$C: x^2 + 4y^2 = 1$



Como: $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = -3$

$$\oint_C F\,dr = \iint_C \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy = \iint_C -3\,dxdy = -3 \times \underbrace{\text{Área da elipse}}_{\pi ab}$$

$$= -3 \times \pi \cdot 1 \cdot 1/2 = -3\pi/2 \;//$$

BOA PROVA! (espero ter ajudado)

Thiago Narahari.