Cálculo Infinitesimal 3 – Prova 2 - 2020

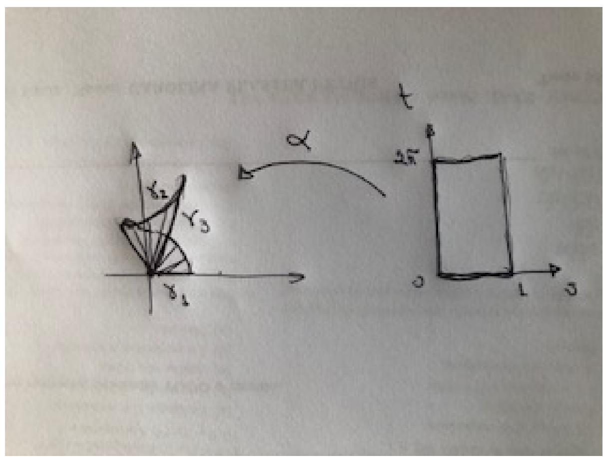
Prof. Flavio Dickstein.

Questão 1. Seja γ a curva parametrizada por $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi)$. Seja S a superfície obtida unindo-se cada ponto de γ à origem por um segmento de reta.

(i) Calcule a área de S.

(ii) Descreva o bordo ∂S de S, constituído de três pedaços.

(iii) Verifique o Teorema de Stokes para o caso particular de S e de $F(x, y) = (z, x, y)$.



Resolução 1. *A superfície S é parametrizada por $\alpha(s, t) = s(\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi)$, $s \in [0, 1]$. Temos*

$$\alpha_s = (\cos t, \sin t, t),$$

$$\alpha_t = s(-\sin t, \cos t, 1),$$

de modo que

$$\eta = \alpha_s \times \alpha_t = s \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos t & \sin t & t \\ -\sin t & \cos t & 1 \end{vmatrix} = s(\sin t - t\cos t, -t\sin t - \cos t, 1).$$

Assim,

$$\|\eta\| = s((\sin t - t\cos t)^2 + (t\sin t + \cos t)^2 + 1)^{\frac{1}{2}} = s(2 + t^2)^{\frac{1}{2}}.$$

(i) *Vamos calcular a área de S.*

$$|S| = \int_0^{2\pi} \int_0^1 s(2 + t^2)^{\frac{1}{2}}\, dsdt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (2 + t^2)^{\frac{1}{2}}\, dt.$$

Fazendo $t = \sqrt{2}\tan\theta$, temos

$$\frac{1}{2} \int (2 + t^2)^{\frac{1}{2}} = \int \sec^3\theta = \int \sec\theta + \sec\theta\tan^2\theta = \log|\sec\theta + \tan\theta| + \int \sec\theta\tan^2\theta.$$

Mas, integrando por partes,

$$\int \sec\theta \tan^2\theta = \int \sec\theta \tan\theta \tan\theta = \sec\theta\tan\theta - \int \sec^3\theta.$$

Então,

$$\int \sec^3\theta = \log|\sec\theta + \tan\theta| + \sec\theta\tan\theta - \int \sec^3\theta,$$

de modo que

$$\frac{1}{2}\int (2+t^2)^{\frac{1}{2}} = \int \sec^3\theta = \frac{1}{2}(\log|\sec\theta+\tan\theta| + \sec\theta\tan\theta).$$

Quando $t = 0$, $\tan\theta = 0$ *e* $\sec\theta = 1$, *quando* $t = 2\pi$, $\tan\theta = \pi\sqrt{2}$ *e* $\sec\theta = (1+2\pi^2)^{\frac{1}{2}}$. *Finalmente,*

$$|S| = \frac{1}{2}(\log((1+2\pi^2)^{\frac{1}{2}} + \pi\sqrt{2}) + \pi\sqrt{2}(1+2\pi^2)^{\frac{1}{2}}).$$

(ii) *O bordo* γ *de* S *se escreve* $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$, *onde* γ_1 *é o segmento que vai de* $(0,0,0)$ *a* $(1,0,0)$, γ_2 *é a hélice* $\alpha_2(t) = (\cos t, \sin t, t)$ *e* γ_3 *é o segmento que vai de* $(1,0,2\pi)$ *a* $(0,0,0)$. *Parametrizamos* γ_1 *por* $\alpha_1(s) = s(1,0,0)$ *e* γ_3 *por* $\alpha_3(s) = (1-s)(1,0,2\pi)$, *onde* $s \in [0,1]$.

(iii) *Calculemos*

$$\int_\gamma F\cdot dl = \int_{\gamma_1} F\cdot dl + \int_{\gamma_2} F\cdot dl + \int_{\gamma_3} F\cdot dl.$$

Temos

$$\int_{\gamma_1} F\cdot dl = \int_0^1 F(\alpha_1(s))\cdot\alpha_1'(s)\,ds = \int_0^1 s(0,1,0)\cdot(1,0,0)\,ds = 0,$$

$$\int_{\gamma_2} F\cdot dl = \int_0^{2\pi} F(\alpha_2(t))\cdot\alpha_2'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} (t,\cos t,\sin t)\cdot(-\sin t,\cos t,1) =$$
$$\int_0^{2\pi} -t\sin t + \cos^2 t + \sin t\,dt = \int_0^{2\pi} -t\sin t\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1+\cos 2t\,dt =$$
$$\int_0^{2\pi} -t\sin t\,dt + \pi = t\cos t\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi}\sin t\,dt + \pi = 3\pi.$$

Finalmente,

$$\int_{\gamma_3} F\cdot dl = \int_0^1 F(\alpha_3(s))\cdot\alpha_3'(s)\,ds = \int_0^1 (1-s)(2\pi,1,0)\cdot(-1,0,-2\pi)\,ds = -\pi.$$

Portanto,

$$\int_\gamma F\cdot dl = \int_{\gamma_1} F\cdot dl + \int_{\gamma_2} F\cdot dl + \int_{\gamma_3} F\cdot dl = 2\pi.$$

Calculemos agora $\int_S \nabla\times F\cdot ds$. *Temos*

$$\nabla\times F = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ z & x & y \end{pmatrix} = (1,1,1).$$

Então, integrando por partes,

$$\int_S \nabla\times F\cdot d\eta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (1,1,1)\cdot s(\sin t - t\cos t, -t\sin t - \cos t, 1)\,dsdt =$$
$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin t - t\cos t - t\sin t - \cos t + 1\,dt = \pi + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} -t\cos t - t\sin t\,dt = 2\pi$$

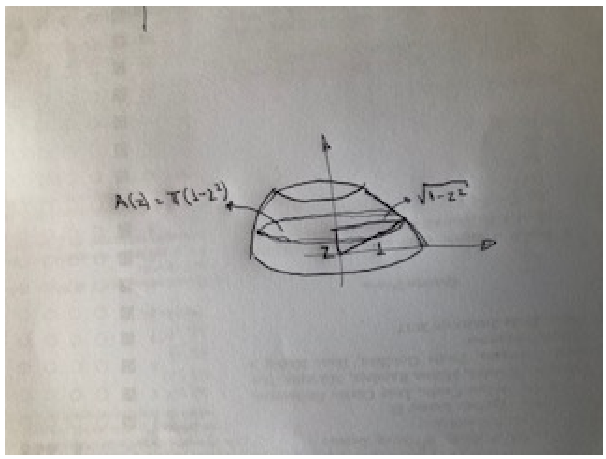
Questão 2. Verifique o Teorema de Gauss no caso particular em que

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 + z^2 < 1, 0 < z < \frac{1}{2}\}$$

e $F(x, y, z) = (x, y, z)$.

Resolução 2. *Temos que* $\nabla \cdot F = 1 + 1 + 1 = 3$. *Usando coordenadas esféricas, vemos que* $z = \frac{1}{2}$ *corresponde a* $\varphi = \frac{\pi}{6}$. *Então,*

$$\int_\Omega \nabla \cdot F = 3|\Omega|.$$



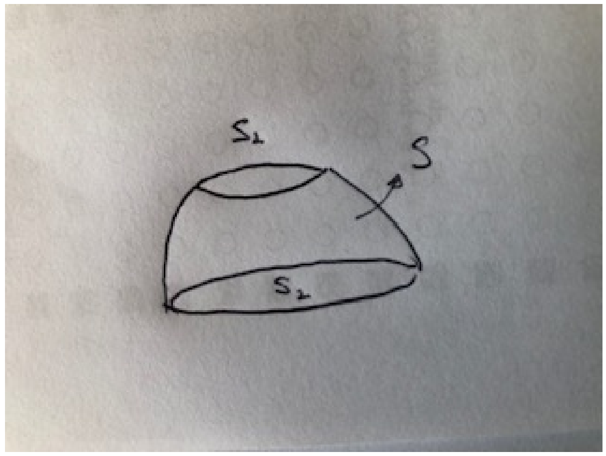
Calculamos o volume de Ω *usando seções horizontais: fixado* z, *a seção horizontal* $A(z)$ *tem área* $\pi(1 - z^2)$. *Então,*

$$|\Omega| = \int_\Omega 1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \pi(1 - z^2) dz = \pi(z - \frac{z^3}{3})\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{11\pi}{24}.$$

Portanto,

$$\int_\Omega \nabla \cdot F = 3|\Omega| = \frac{11\pi}{8}.$$

O bordo S *de* Ω *é da forma* $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.



S_1 é parametrizado por $\alpha_1(x,y) = (x,y,\frac{1}{2})$, $x^2+y^2 = \frac{3}{4}$, S_2 é parametrizado por $\alpha_2(\varphi,\theta) = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$, $r \in \left[0, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$ e S_3 é parametrizado por $\alpha_3(x,y) = (x,y,0)$, $x^2+y^2 = 1$. Então, as normais exteriores valem

$$\eta_1 = (0,0,1),$$

$$\eta_2 = \partial_\varphi\alpha_2 \times \partial_\theta\alpha_2 = \sin\varphi(\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi).$$

$$\eta_3 = (0,0,-1).$$

Assim,

$$\int_{S_1} F\cdot d\eta = \int_{x^2+y^2=\frac{3}{4}} (x,y,\frac{1}{2})\cdot(0,0,1)\,dxdy = \frac{3\pi}{8},$$

$$\int_{S_2} F\cdot d\eta = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} \sin\varphi\,d\theta d\varphi = 2\pi(-\cos\varphi)\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi,$$

$$\int_{S_3} F\cdot d\eta = \int_{x^2+y^2=1} (x,y,0)\cdot(0,0,-1)\,dxdy = 0.$$

Portanto,

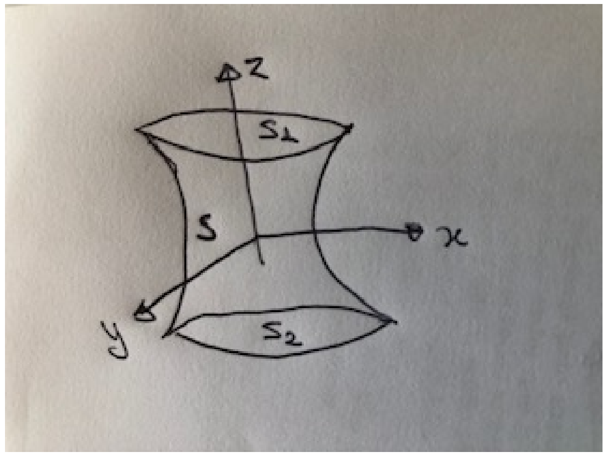
$$\int_S F\cdot d\eta = \int_{S_1} F\cdot d\eta + \int_{S_2} F\cdot d\eta + \int_{S_3} F\cdot d\eta = \frac{11\pi}{8}.$$

Questão 3. Seja γ o pedaço de hipérbole no plano $y=0$ dada por $x^2 - z^2 = 1$, $z \in (0,1)$. Seja S a superfície de revolução obtida pela rotação de γ em torno do eixo z. Considere o campo normal exterior a S e calcule o fluxo do campo $F(x,y,z) = (x,y,z)$ através de S.

Resolução 3. *Usando que $\nabla\cdot F = 3$, é mais fácil usar o Teorema de Gauss,*

$$\int_\Omega \nabla\cdot F = \int_{\partial\Omega} F\cdot d\eta,$$

onde Ω é a região interior a S. A fronteira $\partial\Omega$ de Ω é composta por S e pelas parte superior S_1 e inferior S_2 de Ω.



Temos que

$$\int_\Omega \nabla \cdot F = 3|\Omega|$$

com

$$|\Omega| = \int_0^1 \pi(1+z^2) = \frac{4\pi}{3}.$$

Então,

$$\int_\Omega \nabla \cdot F = 4\pi.$$

Além disso,

$$\int_{S_1} F \cdot d\eta = \int_{x^2+y^2\leq 2} (x,y,1)\cdot(0,0,1) = 2\pi,$$

$$\int_{S_2} F \cdot d\eta = \int_{x^2+y^2\leq 1} (x,y,0)\cdot(0,0,-1) = 0.$$

Portanto,

$$\int_S F \cdot d\eta = \int_\Omega \nabla \times F - \int_{S_1} F \cdot d\eta - \int_{S_2} F \cdot d\eta = 4\pi - 2\pi = 2\pi.$$