Cálculo Infinitesimal 3 – Lista 7 - 2020

Prof. Flavio Dickstein.

Questão 1. Seja $F(x,y,z) = (yz, xz, xy)$ e seja S a parte superior da superfície esférica definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $z > 0$. Verifique o Teorema de Stokes neste caso: calcule o fluxo de $\nabla \times F$ através de S e a circulação de F no bordo de S para verificar que são iguais.

Questão 2. Repita a Questão 1 para $F(x,y,z) = (xyz, xyz, xyz)$.

Questão 3. Repita a Questão 1 para $F(x,y,z) = (xyz, xyz, xyz)$ e S a parte da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ situada no semiplano $x - y > 0$.

Questão 4. Seja $F(x,y,z) = (z, x, y)$ e seja Q um quadrado de lado 1 situado no plano $2x + 2y + z = 1$. (A localização do quadrado no plano não é importante.) Escolha um modo de percorrer o bordo γ do quadrado e calcule a circulação de F em γ. (A resposta é $5/3$. Sugestão: use o Teorema de Stokes.)

Questão 5. Considere o campo gravitacional gerado por uma esfera de raio 1 e contendo uma massa M. (Assuma que a constante de gravitação universal G valha 1.) Suponha que em certo instante um corpo de massa $m = 1$ é colocado na posição $(1, 2, 2)$. A massa então se move sob a ação do campo gravitacional.

(i) Determine a velocidade do corpo quando ele passa pelo ponto $(2, 4, 4)$. (Esta é fácil.)

(ii) Determine quanto tempo o corpo leva para chegar ao ponto $(2, 4, 4)$. (Esta é difícil.)

Questão 6. Seja $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função radial. Escrevendo $u(x,y,z) = u(r)$, mostre que

$$\Delta u = u'' + \frac{2}{r}u' = \frac{1}{r^2}(r^2 u')'.$$

Suponha que u seja harmônica. Neste caso,

$$(r^2 u')' = 0.$$

Conclua que existem duas constantes A e B tais que

$$u(r) = \frac{A}{r} + B.$$

A moral da história é que as funções harmônicas e radiais em $\mathbb{R}^3$ ou são constantes ou são potenciais gerados por uma carga pontual na origem.