CAPÍTULO 10

Exercícios 10.1

1. Sejam $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0 \text{ e } 0 \leqslant z \leqslant 1 - x - y\}$, σ a fronteira de B e $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\cdot$

Temos

$\sigma(u, v) = (u, v, 1 - u - v)$ e $\dfrac{\partial\sigma}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial\sigma}{\partial v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

$$\iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_K \vec{F}(\sigma(u, v)) \underbrace{\frac{\dfrac{\partial\sigma}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial\sigma}{\partial v}}{\left\|\dfrac{\partial\sigma}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial\sigma}{\partial v}\right\|}}_{\vec{n}} \cdot \underbrace{\left\|\frac{\partial\sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\| du\, dv}_{dS}$$

ou seja,

$$\iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, ds = \iint_K (u\vec{i} + v\vec{j} + (1 - u - v)\,\vec{k}) \cdot (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})\, du\, dv =$$

$$= \iint_K du\, dv = \frac{1}{2}, \text{ pois } K \text{ é o triângulo } u \geqslant 0, v \geqslant 0, u + v \leqslant 1.$$

Então, $\displaystyle\iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \frac{1}{2}$.

Por outro lado,

$$\iiint_B \underbrace{\operatorname{div} \vec{F}}_{3}\, dx\, dy\, dz = 3\iiint_B dx\, dy\, dz =$$

$$= 3\iint_A \left[\int_0^{1 - x - y} dz\right] dy\, dx = 3\iint_A (1 - x - y)\, dy\, dx,$$ onde A é o triângulo $x + y \leqslant 1$, $x \geqslant 0$ e $y \geqslant 0$.

2. $$\iiint_B \operatorname{div} \vec{F}\, dx\, dy\, dz = 3\int_0^1 \left[\int_0^{1 - x} (1 - x - y)\, dy\right] dx =$$

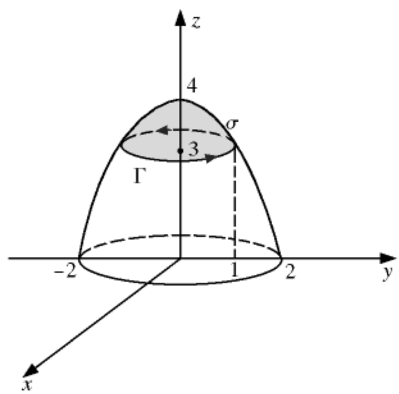
$$= 3\int_0^1 \frac{(1 - x)^2}{2}\, dx = \frac{1}{2}.$$

Comparando ① e ② segue:

$$\iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_B \operatorname{div} \vec{F}\, dx\, dy\, dz.$$

Sejam $\sigma(u, v) = (u, v, 4 - u^2 - v^2)$, $u^2 + v^2 \leqslant 1$, $\Gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 3)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ e $\vec{F}(x, y, z) = \vec{i} + (x + y + z)\,\vec{j}$.

a)



b) Temos:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 1 & x + y + z & 0 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{k} \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} = 2u\vec{i} + 2v\vec{j} + \vec{k}.$$

Então,

$$① \iint_\sigma \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_K \operatorname{rot} F(\sigma(u, v)) \cdot \frac{\dfrac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \sigma}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \dfrac{\partial \sigma}{\partial v} \right\|} \cdot \left\| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \right\| du\, dv =$$

$$= \iint_K (-\vec{i} + \vec{k})\,(2u\vec{i} + 2v\vec{j} + \vec{k})\, du\, dv = \iint_K (-2u + 1)\, du\, dv =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (-2\rho \cos \theta + 1)\, \rho\, d\rho \right] d\theta = \pi.$$

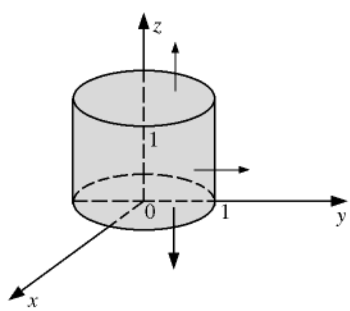
Por outro lado,

② $\int_\Gamma \vec{F} d\Gamma = \int_0^{2\pi} \left[\vec{i} + (\text{sen}\, t + \cos t + 3)\, \vec{j}\right] \cdot \left[-\text{sen}\, t\, \vec{i} + \cos t\, \vec{j}\right] dt = \pi.$

De ① e ② segue

$$\iint_\sigma \text{rot}\, \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \int_\Gamma \vec{F} d\Gamma.$$

3. Sejam B o cilindro $x^2 + y^2 \leqslant 1$ e $0 \leqslant z \leqslant 1$, e $\vec{F}(x, y, z) = xy\vec{i} - \vec{j} + z^2\vec{k}$.



Consideremos a cadeia $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ assim definida:

$\sigma_1(u, v) = (\cos u, \text{sen}\, u, v)$, $0 \leqslant v \leqslant 1$, $0 \leqslant u \leqslant 2\pi$ (superfície lateral do cilindro),

$\sigma_2(u, v) = (u, v, 0)$, $u^2 + v^2 \leqslant 1$ (base inferior do cilindro) e

$\sigma_3(u, v) = (u, v, 1)$, $u^2 + v^2 \leqslant 1$ (base superior do cilindro).

Temos

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma_1}{\partial v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\text{sen}\, u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos u\vec{i} + \text{sen}\, u\vec{j}.$$

Seja $\vec{n}_1 = \cos u\vec{i} + \text{sen}\, u\vec{j}$ a normal a σ_1.

$$\iint_{\sigma_1} \vec{F} \cdot n\, dS = \iint_K \left[(\cos u\, \text{sen}\, u)\, \vec{i} - \vec{j} + v^2\vec{k}\right] \cdot (\cos u\vec{i} + \text{sen}\, u\vec{j})\, du\, dv =$$

$$= \iint_K (\cos^2 u\, \text{sen}\, u - \text{sen}\, u)\, du\, dv =$$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{\cos^3 u}{3} + \cos u\right]_0^{2\pi} dv = 0.$$

Portanto, o fluxo de $\vec{F}$ através da superfície lateral do cilindro é zero.
Seja $\vec{n}_2 = -\vec{k}$ a normal a σ_2 e $\vec{n}_3 = \vec{k}$ a normal a σ_3.

Temos

$$\iint_{\sigma_2} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_K F(\sigma_2(u, v)) \cdot \vec{n}_2(\sigma_2(u, v))\, du\, dv =$$

$$= \iint_K (uv\vec{i} - v\vec{j}) \cdot (-\vec{k})\, du\, dv = 0.$$

$$\iint_{\sigma_3} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_K F(\sigma_3(u, v)) \cdot \vec{n}_3(\sigma_3(u, v))\, du\, dv =$$

$$= \iint_K (uv\vec{i} - v\vec{j} + \vec{k}) \cdot (\vec{k})\, du\, dv = \iint_K du\, dv =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \rho\, d\rho\, d\theta = \pi.$$

Então,

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{\sigma_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1\, dS + \iint_{\sigma_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2\, dS + \iint_{\sigma_3} \vec{F} \cdot \vec{n}_3\, dS =$$

$$= 0 + 0 + \pi \Rightarrow \iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \pi \quad ①$$

Por outro lado,

$$\iiint_B \operatorname{div} \vec{F}\, dx\, dy\, dz = \iiint_B (y + 2z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iint_K \left[\int_0^1 (y + 2z)\, dz \right] dx\, dy = \iint_K (y + 1)\, dx\, dy$$

onde K é o círculo $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Mudando para coordenadas polares:

$$\iint_K (y + 1)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (\rho \operatorname{sen} \theta + 1)\, \rho\, d\rho \right] d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^3}{3} \operatorname{sen} \theta + \frac{\rho^2}{2} \right]_0^1 d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \theta\, d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \pi \quad ②$$

De ① e ②, segue

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_B \operatorname{div} \vec{F}\, dx\, dy\, dz.$$

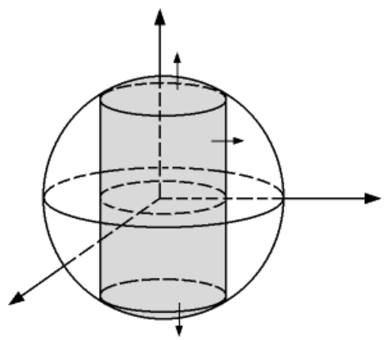
4. Sejam $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1 \text{ e } x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4\}$, σ a fronteira de B e $\vec{F}(x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Consideremos a cadeia $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ assim definida:

$\sigma_1(u, v) = (u, v, \sqrt{4 - u^2 - v^2}),\ u^2 + v^2 \leqslant 1$ (calota superior)

$\sigma_2(u, v) = (u, v, -\sqrt{4 - u^2 - v^2}),\ u^2 + v^2 \leqslant 1$ (calota inferior)

$\sigma_3(u, v) = (\cos u, \operatorname{sen} u, v)\ 0 \leqslant u \leqslant 2\pi,\ -\sqrt{3} \leqslant v \leqslant \sqrt{3}$ (superfície lateral do cilindro)



Temos

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{\sigma_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1\, dS + \iint_{\sigma_2} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS + \iint_{\sigma_3} \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS.$$

A normal a σ_1 é $\vec{n}_1 = \dfrac{u}{\sqrt{4 - u^2 - v^2}}\,\vec{i} + \dfrac{v}{\sqrt{4 - u^2 - v^2}}\,\vec{j} + \vec{k}$,

a normal a σ_2 é $\vec{n}_2 = \dfrac{u}{\sqrt{4 - u^2 - v^2}}\,\vec{i} + \dfrac{v}{\sqrt{4 - u^2 - v^2}}\,\vec{j} - \vec{k}$ e a

normal a σ_3 é $\vec{n}_3 = \cos u\vec{i} + \operatorname{sen} u\vec{j}$. Segue

$$\iint_{\sigma_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1\, dS = \iint_K (u\vec{i} + v\vec{j} + \sqrt{4 - u^2 - v^2}\ \vec{k}) \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{u}{\sqrt{4 - u^2 - v^2}}\,\vec{i} + \frac{v}{\sqrt{4 - u^2 - v^2}}\,\vec{j} + \vec{k} \right) du\, dv =$$

$$= \iint_K \frac{4}{\sqrt{4 - u^2 - v^2}}\, du\, dv, \text{ onde } K \text{ é o círculo } u^2 + v^2 \leqslant 1.$$

Temos

$$\iint_{\sigma_1} \vec{F} \cdot \vec{n}_1 \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 4(4-\rho^2)^{-\frac{1}{2}} \rho \, d\rho \, d\theta$$

$$= (-4) \int_0^{2\pi} \left[(4-\rho^2)^{1/2} \right]_0^1 d\theta = 8\pi \, (2 - \sqrt{3}).$$

Analogamente, $\iint_{\sigma_2} \vec{F} \cdot \vec{n}_2 \, dS = 8\pi \, (2 - \sqrt{3})$

O fluxo de $\vec{F}$ através de σ_1 na direção $\vec{n}_1$ é $8\pi(2-\sqrt{3})$ e é igual ao fluxo de $\vec{F}$ na direção $\vec{n}_2$, através de σ_2.

O fluxo de $\vec{F}$, através de σ_3, na direção $\vec{n}_3$ é

$$\iint_{\sigma_3} \vec{F} \cdot \vec{n}_3 \, dS = \iint_K (\cos u \vec{i} + \operatorname{sen} u \vec{j} + v \vec{k}) \cdot (\cos u \vec{i} + \operatorname{sen} u \vec{j}) \, du \, dv =$$

$$= \iint_K du \, dv = \int_0^{2\pi} \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dv \, du = 4\pi \sqrt{3}.$$

Portanto,

$$\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = 8\pi(2-\sqrt{3}) + 8\pi(2-\sqrt{3}) + 4\pi\sqrt{3} = 32\pi - 12\pi\sqrt{3} \quad ①$$

Aplicando o teorema da divergência,

$$\iiint_B \underbrace{\operatorname{div} \vec{F}}_{3} \, dx \, dy \, dz = 3 \iint_K \left[\int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz \right] dx \, dy =$$

$$= 6 \iint_K \sqrt{4-x^2-y^2} \, dx \, dy = 6 \int_0^{2\pi} \int_0^1 (4-\rho^2)^{1/2} \rho \, d\rho \, d\theta =$$

$$= \frac{6}{(-2)} \cdot \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} \underbrace{\left[\left(4-\rho^2\right) \right]_0^1}_{(3\sqrt{3}-8)} d\theta = 4\pi(8 - 3\sqrt{3}) = 32\pi - 12\pi\sqrt{3} \quad ②$$

De ① e ② segue $\iint_{\sigma} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_B \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy \, dz.$

11. Seja um escoamento com velocidade $\vec{v}(x, y, z)$ e densidade $\rho(x, y, z)$, tal que $\vec{u} = \rho \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k}$.

Consideremos $\sigma(u, v) = (u, v, \sqrt{4-u^2-v^2})$, $x^2 + y^2 \leqslant 2$.

Utilizando o resultado do exercício anterior, o fluxo de $\vec{u}$ através de σ é

$$\iint_\sigma \vec{u} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_K \left[P \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - Q \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + R \right] dx\, dy$$

onde $P = x, Q = y, R = -2\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ e $z = f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

Então,

$$\iint_\sigma \vec{u} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_K \frac{-8 + 3(x^2 + y^2)}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy,$$ onde K é o círculo $x^2 + y^2 \leqslant 2$.

Passando para coordenadas polares, tem-se $\iint_\sigma \vec{u} \cdot \vec{n}\, dS = -4\sqrt{2}\,\pi$.

Logo, o fluxo de $\vec{u}$ através de σ é $-4\sqrt{2}\,\pi$.

12. Sejam $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} - 2z\vec{k}$ e B o compacto $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4$, $z \geqslant \sqrt{2}$.
Seja σ_1 a superfície $\sigma_1(u, v) = (u, v, \sqrt{2}), u^2 + v^2 \leqslant 2$.

A fronteira de B coincide com a imagem da cadeia (σ_1, σ_2), onde
$\sigma_2(u, v) = (u, v, \sqrt{4 - u^2 - v^2}), u^2 + v^2 \leqslant 2$.
Portanto, o fluxo de $\vec{u}$ através de σ é

$$\iint_\sigma \vec{u} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{\sigma_1} \vec{u} \cdot \vec{n}_1\, dS + \iint_{\sigma_2} \vec{u} \cdot \vec{n}_2\, dS.$$

A normal a σ_1 é $\vec{n}_1 = -\vec{k}$ e a normal a σ_2 é

$$\vec{n}_2 = \vec{k} + \frac{u}{\sqrt{4 - u^2 - v^2}}\vec{i} + \frac{v}{\sqrt{4 - u^2 - v^2}}\vec{j}$$

Temos

$$\iint_{\sigma_1} \vec{u} \cdot \vec{n}_1\, dS = \iint_K (u\vec{i} + v\vec{j} - 2\sqrt{2}\,\vec{k}) \cdot (-\vec{k})\, du\, dv = \iint_K 2\sqrt{2}\, du\, dv =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} 2\sqrt{2}\, \rho\, d\rho\, d\theta = 4\sqrt{2}\,\pi.$$

$$\iint_{\sigma_2} \vec{u} \cdot \vec{n}_2\, dS = \iint_K (u\vec{i} + v\vec{j} - 2\sqrt{4 - u^2 - v^2}\,\vec{k}) \cdot$$

$$\cdot \left(+ \frac{u\vec{i}}{\sqrt{4 - u^2 - v^2}} + \frac{v\vec{j}}{\sqrt{4 - u^2 - v^2}} + \vec{k} \right) du\, dv =$$

$$= \iint_k \frac{3u^2 + 3v^2 - 8}{\sqrt{4 - u^2 - v^2}}\, du\, dv = -4\sqrt{2}\,\pi.$$ (Veja o exercício anterior.)

Portanto, $\iint_\sigma \vec{u} \cdot \vec{n}\, dS = 4\sqrt{2}\pi - 4\sqrt{2}\pi = 0.$

Por outro lado, temos div $\vec{u} = \dfrac{\partial x}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial y} + \dfrac{\partial(-2z)}{\partial z} = 0$ e $\iiint_B \underbrace{\operatorname{div} \vec{u}}_{0}\, dx\, dy\, dz = 0.$

Logo, $\iint_\sigma \vec{u} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_B \operatorname{div} \vec{u}\, dx\, dy\, dz$.

13. Pelo teorema da divergência
$\iint_\sigma \vec{u} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_B \operatorname{div} \vec{u}\, dx\, dy\, dz = 0.$

Exercícios 10.2

1. Pelo teorema da divergência, temos

$$\iint_\sigma \operatorname{rot} \vec{u} \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_B (\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{u})\, dx\, dy\, dz.$$

Mas div rot $\vec{u} = 0$. (Veja Seção 2.4, Exercício 9(e), deste livro.)

Logo, $\iint_\sigma \operatorname{rot} \vec{u} \cdot \vec{n}\, dS = 0.$

3. Seja $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Pelo teorema da divergência,

$$\frac{1}{3}\iint_\sigma \vec{r} \cdot \vec{n}\, dS = \frac{1}{3}\iiint_B \underbrace{(\operatorname{div} \vec{r})}_{3}\, dx\, dy\, dz =$$
$$= \iiint_B dx\, dy\, dz = \text{volume } B.$$

4. Sejam B o compacto $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1$, $z \geqslant 0$ (semi-esfera), σ a superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z > 0$ e σ, dada por $\sigma_1(u, v) = (u, v, 0)$, $u^2 + v^2 \leqslant 1$.

A fronteira de B coincide com a imagem da cadeia (σ, σ_1). Pelo teorema da divergência, temos

$$\iint_\sigma \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS + \iint_{\sigma_1} \vec{F} \cdot (-\vec{k})\, dS = \iiint_B \operatorname{div} \vec{F}\, dx\, dy\, dz \quad ①$$

De div $\vec{F} = y^2 + xz + 1 - y^2 - xz = 1$, segue que

$$\iiint_B \text{div}\, \vec{F}\, dx\, dy\, dz = \iiint_B dx\, dy\, dz = \frac{2}{3}\,\pi. \quad ②$$

Vamos calcular o fluxo de $\vec{F}$, através de σ_1, na direção $(-\vec{k})$.

$$\iint_{\sigma_1} \vec{F}\cdot(-\vec{k})\, dS = \iint_{\sigma_1} \left(y^2 z + \frac{1}{2}\, xz^2 - z\right) dS = 0, \text{ pois}$$

$(x, y, z) \in \text{Im}\ \sigma_1$ e, portanto, $z = 0$.

Então, $\displaystyle\iint_{\sigma_1} \vec{F}\cdot(-\vec{k})\, dS = 0$ ③

Substituindo ② e ③ em ①, segue:

$$\iint_{\sigma} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \frac{2}{3}\,\pi.$$

7. ***a***) Seja $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant x \text{ e } 0 \leqslant z \leqslant 4\}$ e
$\vec{u} = xy\vec{i} + yz\vec{j} + z^2\vec{k}$

Aplicando o teorema da divergência,

$$\iint_{\sigma} \vec{u}\cdot\vec{n}\, dS = \iiint_B \text{div}\,\vec{u}\, dx\, dy\, dz = \iiint_B (y + 3z)\, dz\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^x \left[\int_0^4 (y + 3z)\, dz\right] dy\, dx = \frac{38}{3}.$$

b) Seja $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1 \text{ e } z \geqslant x + y\}$ e
$\vec{u} = -2xy\vec{i} + y^2\vec{j} + 3z\vec{k}$. Observe que B é uma semi-esfera de raio 1, logo, o volume de B é $\dfrac{2\pi}{3}$.

$$\iint_{\sigma} \vec{u}\cdot\vec{n}\, dS = \iiint_B (\text{div}\,\vec{u})\, dx\, dy\, dz = 3\iiint_B dx\, dy\, dz = 2\pi.$$

d) Seja $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1, x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 5 - x^2 - y^2\}$ e
$\vec{u} = 3xy\vec{i} - \dfrac{3}{2}\, y^2\vec{j} + z\vec{k}$.

Temos

$$\iint_{\sigma} \vec{u}\cdot\vec{n}\, dS = \iiint_B (\text{div}\,\vec{u})\, dx\, dy\, dz = \iiint_B dz\, dx\, dy = 4\pi.$$

e) Seja B o paralelepípedo $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$ e $0 \leqslant z \leqslant 1$ e
$\vec{u} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$

Temos

$$\iint_\sigma \vec{u}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_B \underbrace{(3x^2+3y^2+3z^2)}_{\operatorname{div}\vec{u}}\,dx\,dy\,dz$$
$$= \iint_K \left[\int_0^1 (3x^2+3y^2+3z^2)\,dz\right] dx\,dy, \text{ onde } K \text{ é o}$$

retângulo $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Segue que

$$\iint_K \left[3x^2z+3y^2z+z^3\right]_0^1\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 (3x^2+3y^2+1)\,dx\,dy =$$
$$= \int_0^1 (2+3y^2)\,dy = 3.$$

8. Sejam $\sigma(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$, $u^2 + v^2 \leqslant 1$, $\vec{n}$ a normal a σ com componente $z \leqslant 0$ e $\vec{F}(x, y, z) = x^2y\,\vec{i} - xy^2\,\vec{j} + \vec{k}$.

Temos

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial v} = -2u\vec{i} - 2v\vec{j} + \vec{k}. \text{ Consideremos } \vec{n} = \frac{2u\vec{i}+2v\vec{j}-\vec{k}}{\sqrt{1+4u^2+4v^2}}.$$

Temos

$$\iint_\sigma \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_k (u^2v\vec{i} - uv^2\vec{j} + \vec{k})\cdot(2u\vec{i}+2v\vec{j}-\vec{k})\,du\,dv =$$
$$= \iint_K \left[2uv\,(u^2-v^2)-1\right] du\,dv.$$

Passando para coordenadas polares

$$\iint_\sigma \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = -\int_0^{2\pi}\left[\int_0^1 (1-2\rho^4 \operatorname{sen}\theta\cos\theta\,(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta))\,\rho\,d\rho\right] d\theta = -\pi.$$

9. Como $\vec{u}$ é de classe C^1 em Ω, div $\vec{u}$ é contínua em Ω. Suponhamos que exista $X_0 \in \Omega$ tal que div $\vec{u}\,(X_0) \neq 0$. Para fixar o raciocínio, suporemos div $\vec{u}\,(X_0) > 0$. Pela conservação do sinal existirá uma bola B fechada, de centro X_0, que podemos supor contida em Ω, pois Ω é aberto. Sendo σ a fronteira de B, com normal exterior $\vec{n}$, teremos

$$\iint_\sigma \vec{u}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_B \operatorname{div}\vec{u} > 0$$

contra a hipótese. Logo, div $\vec{u} = 0$ em Ω.

10. Sejam $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e $r = \|\vec{r}\|$. Então, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Façamos $\vec{F} = \dfrac{\vec{r}}{r^3} = \dfrac{x}{r^3}\,\vec{i} + \dfrac{y}{r^3}\,\vec{j} + \dfrac{z}{r^3}\,\vec{k}$.

$\vec{F}$ é de classe C^1 em $\mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$.

Seja σ a fronteira da esfera K, com normal exterior $\vec{n}$. Suponhamos que a origem não pertença a K. Pelo teorema da divergência,

$$\iint_\sigma \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_K \operatorname{div}\left(\frac{\vec{r}}{r^3}\right) dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_K \left(\frac{\partial}{\partial x}(x\cdot r^{-3}) + \frac{\partial}{\partial y}(y\cdot r^{-3}) + \frac{\partial}{\partial z}(z\cdot r^{-3})\right) dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_K (r^{-3} - 3x^2r^{-5} + r^{-3} - 3y^2r^{-5} + r^{-3} - 3z^2\,r^{-5})\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \iiint_K \left(3r^{-3} - 3\underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{r^2}\,r^{-5}\right) dx\,dy\,dz = 0.$$

Seja σ_1 a fronteira, com normal exterior $\vec{n}_1$, de uma esfera B, com centro na origem e raio R, contida no interior de K. Seja K_1 a região limitada por σ e σ_1. Em K_1, o teorema da divergência se aplica e temos

$$\iint_\sigma \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS - \iint_{\sigma_1} \vec{F}\cdot\vec{n}_1\,dS = \iiint_{K_1} \operatorname{div} F\,dx\,dy\,dz = 0, \text{ daí}$$

$$\iint_\sigma \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{\sigma_1} \vec{F}\cdot\vec{n}_1\,dS.$$

De $\vec{F}\cdot\vec{n} = \dfrac{\vec{r}}{r^3}\cdot\dfrac{\vec{r}}{r} = \dfrac{(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{r^3}\,\dfrac{(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{r} = \dfrac{1}{r^2}$

segue $\displaystyle\iint_{\sigma_1} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \frac{1}{R^2}\iint_{\sigma_1} dS = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi.$

Logo, $\displaystyle\iint_\sigma \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = 4\pi.$