**Cálculo Infinitesimal 3 – Lista 2 - 2020**

**Prof. Flavio Dickstein.**

**Questão 1.** Seja $F(x,y) = (x,-y)$ e seja $\gamma$ o triângulo de vértices $A = (-1,0)$, $B = (1,0)$ e $C = (0,1)$. Considere $\eta$ como a normal unitária que aponta para fora de $T$. Determine $\int_\gamma F \cdot d\eta$, o fluxo de $F$ através $\gamma$. (Resp.: 0.)

**Questão 2.** Repita o exercício para $F(x,y) = (x,y)$. (Resp.: 2.)

**Questão 3.** Seja $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ definido por $f(x) = 1$ se $x \in [0,1]$, $f(x) = 0$ se $x \in [-1,0)$. Considere uma partição $\mathcal{P}$ do intervalo $[-1,1]$ e seja $[x_i, x_{i+1}]$ o intervalo que contem $x = 0$. Mostre que $U(\mathcal{P}) = 1 - x_i$ e que $L(\mathcal{P}) = 1 - x_{i+1}$, onde $U$ e $L$ são as somas de Riemann máxima e mínima associadas a $\mathcal{P}$. Mostre que $U(\mathcal{P}) \to 1$ e $L(\mathcal{P}) \to 1$ quando $|\mathcal{P}| \to 0$. Conclua que $f$ é integrável e que $\displaystyle\int_{-1}^{1} f = 1$.

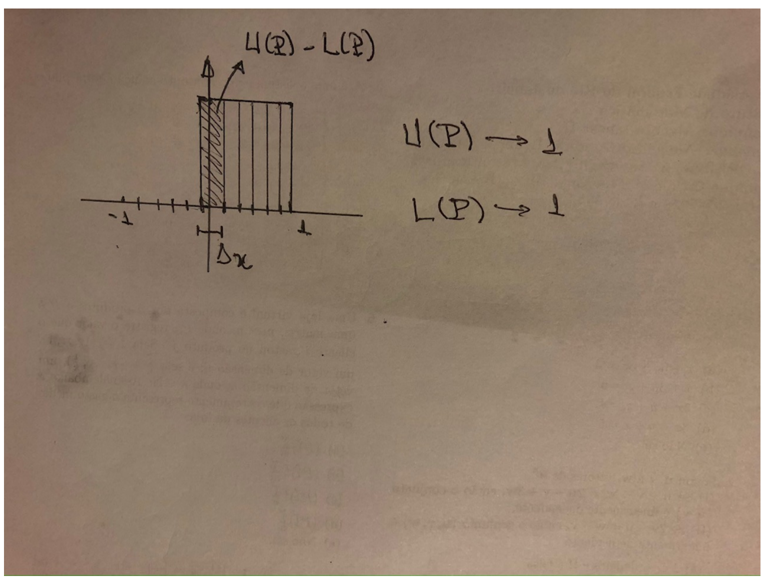


Figura 1

**Questão 4.** O exercício anterior mostra que uma descontinuidade não prejudica a integral. Vejamos o caso de mais de uma descontinuidade.

(i) Seja $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 1$, $f(0,5) = 2$ e $f(x) = 0$ nos outros pontos. Faça como acima e mostre que $f$ é integrável, com $\displaystyle\int_{-1}^{1} f = 0$.

(ii) Seja $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ tal que $f(\frac{1}{n}) = 1$ para todo $n$ e $f(x) = 0$ nos outros pontos. Mostre que $f$ é integrável, com $\displaystyle\int_{-1}^{1} f = 0$.

Em geral, se $f$ é descontínua em um número enumerável de pontos, $f$ será integrável.

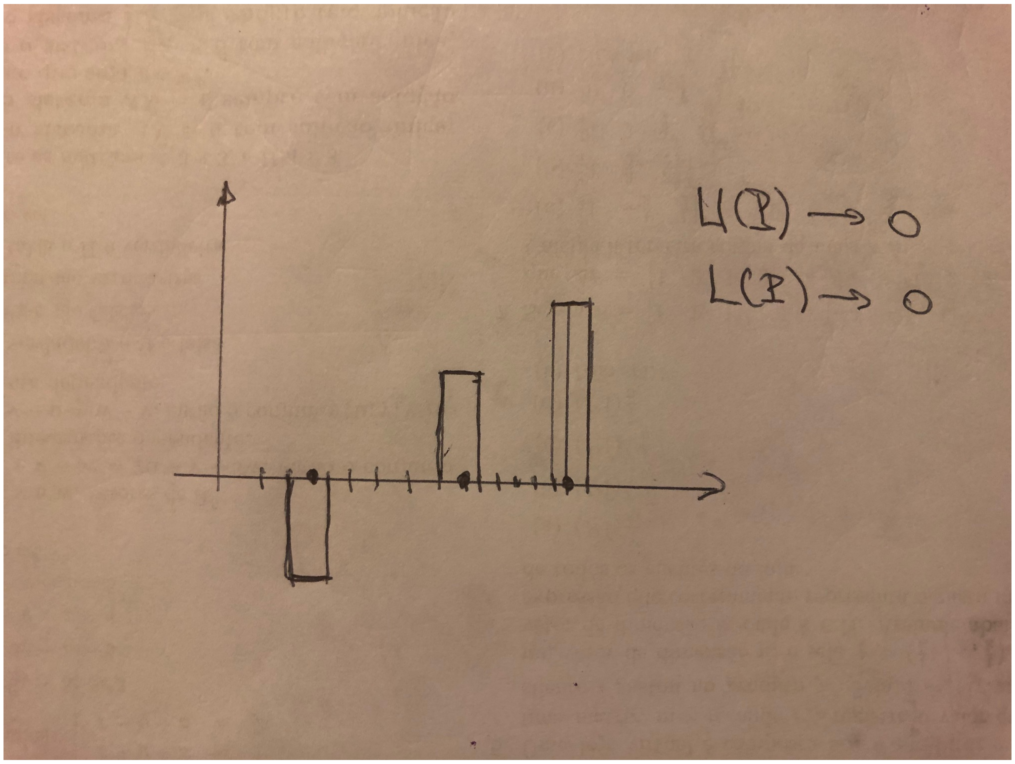


Figura 2

**Questão 5.** Vejamos agora o caso de duas variáveis. Seja $B = [-1, 1] \times [0, 1]$ e seja $f(x, y) = 0$, se $x < 0$ e $f(x, y) = 1$, se $x \geq 0$. Seja $\mathcal{P}$ uma partição de $B$. Calcule $L(\mathcal{P})$, $U(\mathcal{P})$ e mostre que ambos convergem a 1 quando $|\mathcal{P}| \to 0$. Conclua que $f$ é integrável e que $\int\int_B f = 1$.

Aqui, $\{0\} \times [0, 1]$ é o conjunto de descontinuidades de $f$. Ele não é finito, nem mesmo enumerável. Mas ele tem área zero, e é isso que conta. Em geral, $f$ é integrável se ele é descontínuo apenas em um conjunto de medida nula. Medida nula é um conceito técnico para dizer que o conjunto tem área zero.

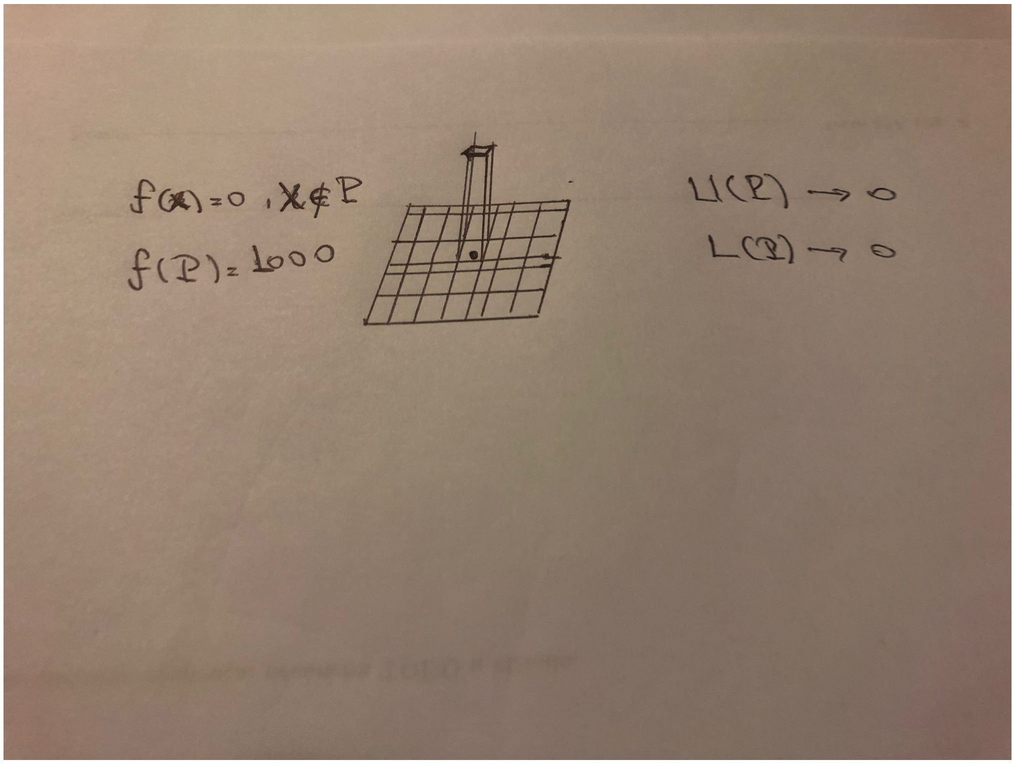


Figura 3

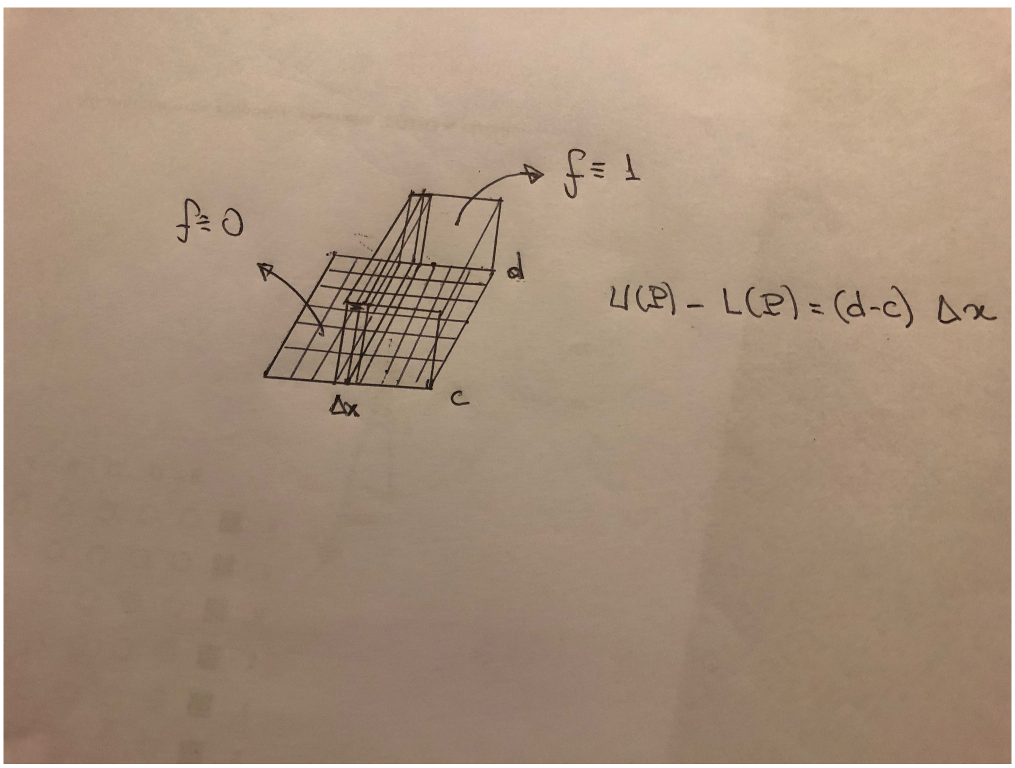


Figura 4