Departamento de Matemática Aplicada – Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro

# GABARITO – Cálculo Infinitesimal III

2022-1 - Prof Gregorio - 2ª prova.

**Primeira Questão(2 pontos):** Calcular a integral dupla $\iint_S y \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ onde $S$ é a região limitada pelo eixo das abcissas e o arco de ciclóide

$$\begin{aligned} x(t) &= R(t - \text{sen }(t)) \\ y(t) &= R(1 - \cos(t)) \end{aligned}$$

para $0 \leq t \leq 2\pi$.
Introduzimos a mudança de coordenadas

$$\begin{aligned} \Phi : \quad [0, 2\pi] \times [0, 1] &\longrightarrow S \\ (t, s) &\longmapsto \begin{bmatrix} R(t - \text{sen }(t)) \\ sR(1 - \cos(t)) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

O Jacobiano é

$$\det D\Phi(t, s) = \det \left( R \begin{bmatrix} 1 - \cos(t) & 0 \\ s \text{ sen }(t) & 1 - \cos(t) \end{bmatrix} \right) = R^2(1 - \cos(t))^2.$$

Pelo Teorema de mudança de variáveis,

$$\begin{aligned} \iint_{\Phi([0,2\pi]\times[0,1])} y \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y &= \iint_{[0,2\pi]\times[0,1]} |\det D\Phi(t, s)| sR(1 - \cos(t)) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}s \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \int_0^1 sR^3(1 - \cos(t))^3 \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{R^3}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos(t))^3 \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{R^3}{2} \int_0^{2\pi} 1 - 3\cos^2(t) \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{5}{2} \pi R^3. \end{aligned}$$

**Segunda Questão(2 pontos):** Em que caso a integral de linha

$$\oint_C P(x, y, z)\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\mathrm{d}y + R(x, y, z)\mathrm{d}z$$

será igual a zero para qualquer contorno fechado $C$ que é borda de um disco $D$ em $\mathbb{R}^3$? Justifique.

Uma condição necessária é que $\nabla \times \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = 0$. Pelo Teorema de Stokes,

$$\oint_{\partial D} CP(x, y, z)\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\mathrm{d}y + R(x, y, z)\mathrm{d}z = \iint_D \nabla \times \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \, \mathrm{d}n$$

o que mostra a suficiência. Se $\nabla \times \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \neq 0$ em um ponto $\Omega$, então existe um disco $D$ ortogonal a $\nabla \times \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ e centrado em $\Omega$, de raio suficientemente pequeno, onde $\nabla \times \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} \, \mathrm{d}n > 0$. Logo a integral de contorno não se anula em $\partial D$.

**Terceira Questão(2 pontos):** Seja $S$ a esfera de centro 0 e raio $a$ em $\mathbb{R}^3$. Calcular

$$I = \iint_S x^3 \ \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y^3 \ \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z^3 \ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

Seja $\omega = x^3 \ \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y^3 \ \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z^3 \ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$, então $\mathrm{d}\omega = 3(x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$. Se $B$ é a bola de raio $a$, $S = \partial B$ e

$$I = \iint_{\partial B} \omega = \iiint_B \mathrm{d}\omega = 4\pi \int_0^a 3r^4 \mathrm{d}r = \frac{12}{5}\pi a^5,$$

usando coordenadas esféricas.

**Quarta Questão(2 pontos):** Ache a área da figura delimitada pelo laço da folha de Descartes, $x^3 + y^3 - 3axy, a > 0$.
R. $\frac{3}{2}a^2$. Esta questão é reciclada, resposta no gabarito da 3ª lista.

**Quinta Questão(4 pontos):** Seja $\omega = \frac{1}{x^2+y^2}(x \ \mathrm{d}y - y \ \mathrm{d}x)$. Seja $C$ o círculo de centro 0 e raio $r > 0$ em $\mathbb{R}^2$.

1. Calcule $\mathrm{d}\omega$.
2. Calcule $\oint_C \omega$.
3. Seja $\mathcal{S}$ uma superfície em $\mathbb{R}^3$. Dizemos que duas curvas fechadas $\gamma, \eta : S^1 \to \mathcal{S}$ são *homólogas* se e somente se existe

$$\begin{array}{rccc} F: & S^1 \times [0,1] & \longrightarrow & \mathcal{S} \\ & (\alpha, t) & \longmapsto & F(\alpha, t) \end{array}$$

   de classe $\mathcal{C}^1$ tal que $F(\alpha, 0) \equiv \gamma(\alpha)$ e $F(\alpha, 1) \equiv \eta(\alpha)$. Mostre que se $\gamma$ e $\alpha$ são homólogas, então para qualque 1-forma $\mu$ com $\mathrm{d}\mu = 0$,

$$\oint_\gamma \mu = \oint_\alpha \mu.$$

4. Agora seja $\mathcal{S}$ o toro obtido como imagem de $\Phi$, onde

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & S^1 \times S^1 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (\alpha, \beta) & \longmapsto & \begin{bmatrix} \cos(\alpha)(1 + \frac{1}{2}\cos(\beta)) \\ \sin(\alpha)(1 + \frac{1}{2}\cos(\beta)) \\ \frac{1}{2}\mathrm{sen}\ (\beta) \end{bmatrix}. \end{array}$$

   Mostre que os círculos $\Phi(\alpha, 0)$ e $\Phi(0, \beta)$ não são curvas homólogas.

1. $\mathrm{d}\omega = 0$.
2. A integral é $2\pi$
3. Aplicar o Teorema de Stokes, a borda do domínio são duas cópias de $S^1$.
4. A integral de $\omega$ no primeiro círculo é $2\pi$ (item 2), no segundo círculo é 0 (usar item 1).