Teoria da Computações - COS700 - 2019.1

Lista 2

Entrega: 25/04/2019

Lema do Bombeamento para Linguagens Regulares

1. Considere a linguagem $L = \{0^{2^n} : n \geq 0\}$ Determine os erros cometidos na demonstração abaixo de que L não é regular. Corrija estes erros e dê uma demonstração correta da não regularidade de L.

Suponha que L é aceita por um autômato finito determinístico.
Seja $w = 0^{2^n}$. Pelo lema do bombeamento podemos decompor w na forma $w = xyz$, onde $x = 0^r$,$y = 0^s$,$z = 0^{2^n-r-s}$
Bombeando y obtemos

$xy^kz = 0^{2^n+(k-1)s}$

Mas para que esta palavra pertença a L é preciso que $2^n + (k-1)s = 2^n$, o que só é possível se $(k-1)s = 0$. Como $s \neq 0$.
Concluímos que k só pode ser igual a 1, o que contradiz o lema do bombeamento.

2. Verifique quais das linguagens dadas abaixo são regulares e quais não são. Em cada caso justifique cuidadosamente sua resposta.

(a) $\{0^i1^{2i} : i \geq 1\}$;

(b) $\{(01)^i : i \geq 1\}$;

(c) $\{1^{2n} : n \geq 1\}$;

(d) $\{0^n1^m0^{n+m} : n, m \geq 1\}$;

(e) $\{1^{2^n} : n \geq 0\}$;

(f) $\{w : w = w^r\}$ onde $w \in \{0,1\}^\star$;

(g) $\{wxw^r : w, x \in \{0,1\}^\star \backslash \{\epsilon\}\}$.

Se w é uma palavra em um alfabeto Σ então w^r é a palavra obtida invertendo-se a ordem das letras em w. Portanto se uma palavra satisfaz $w = w^r$, então é um palíndromo.

3. Seja M um autômato finito determinístico com n estados e seja L a linguagem aceita por M.

a) Use o lema do bombeamento para mostrar que se L contém uma palavra de comprimento maior ou igual que $2n$, então ela contém palavra de comprimento menor que $2n$.

b) Mostre que L é infinita se e somente se admite uma palavra de comprimento maior ou igual a n e menor que $2n$.

c) Descreva um algoritmo que, tendo como entrada um autômato finito determinístico M, determina se $L(M)$ é finita ou infinita.

SUGESTÃO: Para provar (a) use o lema do bombeamento com $k = 0$.

Gramáticas Regulares

4. Determine gramáticas regulares que gerem as linguagens denotadas pelas seguintes expressões regulares:

(a) $(0^\star.1) \cup 0$;

(b) $(0^\star.1) \cup (1^\star.0)$;

(c) $((0^\star.1) \cup (1^\star.0))^\star$.

5. Considere uma nova classe de gramáticas que é uma pequena generalização das gramáticas regulares. Nesta classe, ao invés de permitirmos apenas um terminal do lado direito das regras, permitiremos uma palavra formada por terminais. Formalmente, nesta nova classe de gramáticas, as regras devem ter um dos seguintes formatos:

(a) $X \to wY$;

(b) $X \to w$,

onde $X, Y \in V$ e $w \in T^\star$. Toda gramática regular é um caso particular de gramática desta nova classe. Entretanto, apesar dessa generalidade maior nos formatos das regras, mostre que, se G é uma gramática desta nova classe, sempre existe uma gramática regular G' tal que $L(G') = L(G)$.

6. Ache autômatos finitos que aceitem as linguagens geradas pelas gramáticas no alfabeto 0, 1 e símbolo inicial S, com as seguintes regras:

(a) $S \to 011X, S \to 11S, X \to 101Y, Y \to 111.$;

(b) $S \to 0X, X \to 1101Y, X \to 11X, Y \to 11Y, Y \to 1.$,

Gramáticas Livres de Contexto

7. Considere a gramática G com variáveis S,A, terminais a, b, símbolo inicial S e regras:

$S \to AA$
$A \to AAA \mid a \mid bA \mid Ab$

(a) Quais palavras de $L(G)$ podem ser produzidas com derivações de até 4 passos?;

(b) Dê pelo menos 4 derivações distintas da palavra *babbab*;

(c) Para $m, n, p > 0$ quaisquer, descreva uma derivação em G da palavra $b^m a b^n a b^p$.

8. Determine gramáticas livres de contexto que gerem as seguintes linguagens:

(a) $\{(01)^i : i \geq 1\}$;

(b) $\{1^{2n} : n \geq 1\}$;

(c) $\{0^i 1^{2i} : i \geq 1\}$;

(d) $\{w \in 0, 1^\star :$ w em que o número de 0s e 1s é o mesmo $\}$;

(e) $\{wcw^r : w \in \{0, 1\}^\star\}$;

(f) $\{w : w = w^r$ onde $w \in \{0, 1\}^\star\}$.

9. A gramática livre de contexto G cujas regras são $S \rightarrow 0S1 \mid 0S0 \mid 1S0 \mid 1S1 \mid \epsilon$ não é regular. Entretanto, $L(G)$ é uma linguagem regular. Ache uma gramática regular G' que gere $L(G)$.

Árvores de Análise Sintática

10. Prove, por indução no número de vértices internos, que a colheita de uma árvore gramatical T é igual à palavra obtida concatenando-se os rótulos das folhas de T da esquerda para a direita.

11. Considere a gramática não ambígua G que gera as expressões aritméticas:

G tem simbolo inicial E, e as seguintes regras:

$E \rightarrow E + T \mid T$
$T \rightarrow T * F \mid F$
$F \rightarrow (E) \mid id$

(a) Esboce as árvores de derivação de $id + (id + id) * id$ e de $(id * id + id * id)$;

(b) Dê uma derivação à esquerda e uma derivação à direita da expressão $(id*id+id*id)$.

12. Mostre que a gramática cujas regras são :

$S \rightarrow 1A \mid 0B$

$A \rightarrow 0 \mid 0S \mid 1AA$

$B \rightarrow 1 \mid 1S \mid 0BB$

é ambígua.