A integral e a integral de linha

Prof. Flavio Dickstein.

1 Introdução

Uma série $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ é a soma de um número enumerável de parcelas. Sua definição precisa é o limite

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} x_n.$$

Uma integral $\int_a^b f(x)\,dx$ é a soma de um **contínuo** de parcelas. Sua definição precisa também é um limite da soma de um números finito de parcelas, as somas de Riemann. Há outras definições de integral, como a de Lebesgue, mas todas elas envolvem um limite de somas finitas.

Leibnitz criou a noção de **números infinitesimais**, com das seguintes propriedades:

(i) Um infinitésimo dx satisfaz $0 < dx < s$ para todo s real positivo.

(ii) A soma finita de infinitésimos é um infinitésimo. O produto adx de um infinitésimo dx por um número real a é um infinitésimo.

(iii) Mesmo a soma **enumerável** de infinitésimos é infinitesimal.

(iv) Mas a integral, que é a soma de um **contínuo** de infinitésimos, é um número real.

Se $x \in (a, b)$ e $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, então $f(x)dx$ é um infinitésimo. Mas a soma de $f(x)dx$ para todo x dá, em geral, o número real

$$I = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Por exemplo, se um móvel se desloca com velocidade variável v, a cada instante t seu deslocamento infinitesimal vale $ds = v(t)\,dt$. (dt é tão pequeno que a velocidade v é constante entre t e $t + dt$.) O deslocamento total s entre os instantes a e b é a soma contínua dos deslocamentos infinitesimais

$$s = \int_a^b ds = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt.$$

Da mesma forma, a área dA embaixo de uma função $f(x)$, entre os pontos x e $x + dx$ vale $dA = f(x)dx$, pois a altura $f(x)$ não varia nesse intervalo infinitesimal. A área total no intervalo $x \in [a, b]$ vale

$$A = \int_a^b dA = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Iremos, com frequência, nos apoiar em Leibnitz para discutir as integrais em $\mathbb{R}^N$.

2 Integral de um campo escalar ao longo de uma curva

A primeira generalização de integrais de uma variável é a integral ao longo de uma curva $\gamma \subset \mathbb{R}^N$. Começamos com o caso $N = 2$.

Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ uma curva plana.

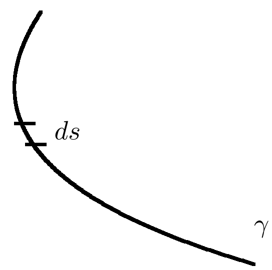


Figura 1: Variação infinitesimal

Queremos calcular a soma contínua das contribuições infinitesimais df ao percorrer a curva γ. Quando um segmento (vetorial) infinitesimal $(\vec{s}, \vec{s} + \vec{ds})$ é percorrido, a contribuição (escalar) df à soma é dada por $df = f(\vec{s})ds$. Observe que ds é o comprimento do deslocamento $\vec{ds}$. A soma total das contribuições é

$$\int f(\vec{s})\, ds. \tag{2.1}$$

A definição de (2.1) é a seguinte.

Definição 2.1. *Seja L o comprimento da curva γ. Considere $g : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ a parametrização pelo comprimento de arco de γ. Definimos a* **integral de um escalar f sobre uma curva γ** *como*

$$\int_\gamma f(\vec{s})\, ds = \int_0^L f(g(s))\, ds.$$

Observe que o lado direito é a conhecida integral de Riemann do Cálculo I, de modo que a integral ao longo de uma curva está bem definida. (Desde que, é claro, a função f e a curva γ sejam regulares.) Mas a Definição 2.1 não é operacional, porque a parametrização pelo comprimento de arco e o valor de L raramente estão disponíveis. Vejamos como calcular (2.1) usando outras parametrizações de γ.

Seja $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ uma parametrização **bijetora** de γ. Nesse caso, existe uma bijeção $s : [a, b] \to [0, L]$ tal que $\alpha(t) = g(s(t))$. Eventualmente trocando t por $-t$, podemos supor que s seja uma função crescente, de modo que $s' \geq 0$. Usando a fórmula de mudança de variáveis do Cálculo I, temos

$$\int_0^L f(g(s))\, ds = \int_a^b f(\alpha(t))s'(t)\, dt.$$

Temos também que

$$\alpha'(t) = g'(s(t))s'(t).$$

Então,

$$|\alpha'(t)| = |g'(s(t))||s'(t)| = s'(t).$$

pois $|g'| = 1$ e $s' \geq 0$. (Estamos usando $|.|$ para norma de um vetor plano e para o módulo de um escalar.) Então, o modo operacional de calcular a integral ao longo de uma curva é dado por

$$\int_\gamma f(\vec{s})\, ds = \int_a^b f(\alpha(t))|\alpha'(t)|\, dt. \tag{2.2}$$

(Na notação de Leibnitz, $\vec{s} = \alpha(t)$, $\vec{ds} = \alpha'(t)dt$, $ds = |\alpha'(t)|dt$.)

A integral de um escalar ao longo de uma linha **independe de modo como a curva é percorrida.** Não importa a ordem como somamos as parcelas infinitesimais $f(\vec{s})ds$. Uma parametrização começando em A e terminando em B produz o mesmo resultado que uma parametrização começando em B e terminando em A.

Exercício 2.2. *Mostre que a integral* (2.2) *independe do sentido em que* γ *é percorrido, de* A *e* B *ou de* B *a* A.

As seguintes propriedades da integral sobre uma curva são uma consequência da Definição 2.1 e das propriedades correspondentes para integral de funções de uma variável.

Exercício 2.3. *Mostre que*

(i) $\int_\gamma af\,ds = a\int_\gamma f\,ds$ *para todo* $a \in \mathbb{R}$.

(ii) $\int_\gamma f + g\,ds = \int_\gamma f\,ds + \int_\gamma g\,ds$.

(iii) *Se* $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, *com* $\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$, *então* $\int_\gamma f\,ds = \int_{\gamma_1} f\,ds + \int_{\gamma_2} f\,ds$.

(iv) *Se* $f \geq g$, *então* $\int_\gamma f\,ds \geq \int_\gamma g\,ds$.

O **comprimento** $|\gamma|$ de γ é a integral da função constante $f \equiv 1$ sobre γ. Se $\alpha(t)$ parametriza γ quando $t \in [a,b]$, então

$$|\gamma| = \int_\gamma 1\,ds = \int_a^b |\alpha'(t)|\,dt.$$

Uma última observação: em nenhum lugar acima foi usado que estamos no plano $\mathbb{R}^2$. Para $N > 2$, se f é um campo escalar em $\mathbb{R}^N$ e a curva γ está em $\mathbb{R}^N$, nada muda.

A título de exemplo, consideremos um móvel que se desloca no espaço com velocidade $v(t) = (t, t, -t^2)$. Vamos determinar o espaço percorrido pelo móvel entre os instantes 0 e 1: temos que $|v(t)| = \sqrt{2t^2 + t^4} = t\sqrt{2+t^2}$. Assim, $ds = v\,dt = t\sqrt{2+t^2}\,dt$ e

$$s = \int ds = \int_0^1 t\sqrt{2+t^2}\,dt = \frac{1}{3}(2+t^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{3^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}}}{3}.$$

3 Integral de linha

Considere agora um **campo vetorial** $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. A **integral de linha** de F ao longo de uma curva γ é definida como a integral da **componente tangencial à curva de** F. Se τ é um vetor tangencial unitário em certo ponto P da curva (há dois vetores assim), a componente tangencial F_τ vale $F_\tau = F \cdot \tau$. (Quando F é um campo de forças, a integral de linha é dita o **trabalho de** F **ao longo de** γ**.**)

Usaremos a notação $\int_\gamma F \cdot dl$ para a integral de linha. Então,

$$\int_\gamma F \cdot dl = \int_\gamma F_\tau\,ds = \int_\gamma F \cdot \tau\,ds.$$

Façamos as contas. Se $\alpha(t)$ é uma parametrização de γ, então $\tau = \dfrac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$, de modo que $F_\tau(\alpha(t)) = F(\alpha(t)) \cdot \dfrac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$. (Supondo $\alpha'(t) \neq 0$). Usando (2.2), obtemos

$$\int_\gamma F \cdot dl = \int_a^b F(\alpha(t)) \cdot \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}|\alpha'(t)|\,dt = \int_a^b F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\,dt. \tag{3.1}$$

Vejamos um exemplo.

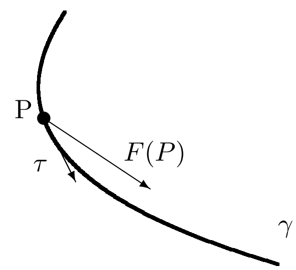


Figura 2: Campo F e campo tangencial

Exemplo 3.1. *Seja* $F(x,y) = (x^2+y, y^2+x)$ *e* γ *a parte superior (*$y>0$*) do circunferência unitária, indo de* $(-1,0)$ *a* $(1,0)$*. Para calcular* $\int_\gamma F \cdot dl$*, consideramos a parametrização de* γ *dada por* $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$*,* $t \in (-\pi, 0)$*. Temos*

$$\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t), \quad F(\alpha(t)) = (\cos^2 t + \sin t, \sin^2 t + \cos t).$$

Assim,

$$F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = (\cos^2 t + \sin t)(-\sin t) + (\sin^2 t + \cos t)\cos t = \sin^2 t \cos t - \cos^2 t \sin t + \cos 2t,$$

onde usamos que $\cos^2 t - sen\ ^2 t = \cos 2t$*. Portanto,*

$$\int_\gamma F \cdot dl = \frac{1}{3}\sin^3 t + \frac{1}{3}\cos^3 t + \frac{1}{2}\sin 2t \Big|_{-\pi}^{0} = \frac{2}{3}.$$

Uma notação conveniente para a integral de linha aparece quando escrevemos $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Então,

$$\int_a^b F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt = \int_a^b [F_1(\alpha(t))x'(t) + F_2(\alpha(t))y'(t)]\, dt.$$

Denotando $dx = x'(t)\, dt$ e $dy = y'(t)\, dt$, temos

$$\int_\gamma F \cdot dl = \int_\gamma F_1\, dx + F_2\, dy. \tag{3.2}$$

Vejamos como ficam as contas do Exemplo 3.1 com esta notação.

Temos $x = \cos t$, $y = \sin t$, $F_1 = x^2 + y$, $F_2 = y^2 + x$. Então, $dx = -\sin t\, dt$, $dy = \cos t\, dt$ e

$$\int_\gamma F_1\, dx + F_2\, dy = \int_{-\pi}^{0} [-(\cos^2 t + \sin t)\sin t + (\sin^2 t + \cos t)\cos t] dt = \frac{2}{3}.$$

Mais do que uma notação, a igualdade (3.2) adquire um sentido próprio no contexto da Teoria de Formas Diferenciais, como é discutido no livro-texto do curso.

Uma observação importante é que a integral de linha **depende de modo como a curva é percorrida.** A razão disso é que a tangente τ muda de sentido quando invertemos a ordem como percorremos a curva. Denotamos por $-\gamma$ a curva sendo percorrida na ordem inversa à da curva γ.

Exercício 3.2. *Mostre que*

$$\int_{-\gamma} F \cdot dl = -\int_\gamma F \cdot dl.$$

As propriedades da integral de linha abaixo são uma consequência imediata da sua definição e do Exercício 2.3.

Exercício 3.3. *Mostre que*

(i) $\int_\gamma aF \cdot dl = a \int_\gamma F \cdot dl$ *se* $a \in \mathbb{R}$.

(ii) $\int_\gamma F + G \cdot dl = \int_\gamma F \cdot dl + \int_\gamma G \cdot dl$.

(iii) *Se* $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, *então* $\int_\gamma F \cdot dl = \int_{\gamma_1} F \cdot dl + \int_{\gamma_2} F \cdot dl$.

No caso particular da curva γ ser fechada, a integral de linha é chamada de **circulação**, e denotada por $\displaystyle\oint_\gamma F \cdot dl$.

4 Campos conservativos

Definição 4.1. *Um campo* F *é dito* **conservativo** *ou* **gradiente** *se existe uma função* **escalar** $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tal que* $F = \nabla G$. *Nesse caso,* G *é uma* **primitiva** *ou um* **potencial** *de* F.

Se $F = (F_1, F_2)$, então $F = \nabla G$ significa $F_1 = \partial_1 G$ e $F_2 = \partial_2 G$. Temos o seguinte resultado.

Teorema 4.2. *Suponha* F *uma função contínua. São equivalentes:*

(i) F *é conservativo.*

(ii) *A integral de linha* $\int_\gamma F \cdot dl$ *só depende das extremidades inicial e final* A *e* B *da curva.*

(iii) *Se* γ *é uma curva fechada, então* $\oint_\gamma F \cdot dl = 0$.

Além disso, se $F = \nabla G$, *então* $\int_\gamma F \cdot dl = G(B) - G(A)$.

Demonstração. $(i) \Longrightarrow (ii)$. Se F é conservativo, então existe G tal que $G' = F$. Seja $\alpha(t)$ uma parametrização de γ tal que $\alpha(a) = A$ e $\alpha(b) = B$. Pela Regra da Cadeia,

$$(G(\alpha(t)))' = G'(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t).$$

Logo,

$$\int_\gamma F \cdot dl = \int_a^b F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\, dt = \int_a^b (G(\alpha(t)))'\, dt = G(\alpha(b)) - G(\alpha(a)) = G(B) - G(A).$$

$(ii) \Longrightarrow (iii)$. Seja γ uma curva fechada. Se A, B são dois pontos distintos de γ, temos que $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$, com γ_1 indo de A a B e γ_2 indo de B a A, veja a Figura abaixo.

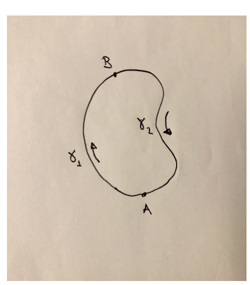


Figura 3

Temos que

$$\oint_\gamma F \cdot dl = \int_{\gamma_1} F \cdot dl + \int_{\gamma_2} F \cdot dl = \int_{\gamma_1} F \cdot dl - \int_{-\gamma_2} F \cdot dl.$$

Mas, γ_1 e $-\gamma_2$ têm as mesmas extremidades inicial e final. Usando (ii), obtemos que

$$\oint_\gamma F \cdot dl = 0.$$

$(iii) \implies (ii)$. Sejam γ_1 e γ_2 duas curvas distintas indo de A a B. Então, $\gamma = \gamma_1 \cup -\gamma_2$ é uma curva fechada, veja a Figura abaixo.

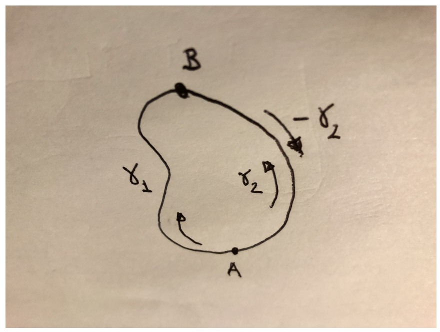


Figura 4

Usando (iii), obtemos

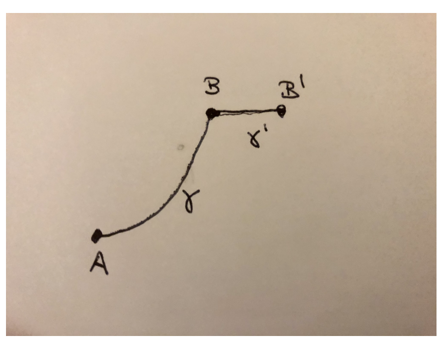
$$0 = \int_\gamma F \cdot dl = \int_{\gamma_1} F \cdot dl + \int_{-\gamma_2} F \cdot dl = \int_{\gamma_1} F \cdot dl - \int_{\gamma_2} F \cdot dl.$$

Portanto, $\displaystyle\int_{\gamma_1} F \cdot dl = \int_{\gamma_2} F \cdot dl.$

$(ii) \implies (i)$. Fixe $A \in \mathbb{R}^2$. Se $B = (x, y)$ defina

$$G(B) = \int_\gamma F \cdot dl,$$

onde γ é uma curva unindo A a B. A função G está bem definida, pois vale (ii). Dado $h \in \mathbb{R}$, seja γ' o segmento de reta unindo $B = (x, y)$ a $B' = (x + h, y)$.



Então,

$$G(B') - G(B) = \int_{\gamma\cup\gamma'} F \cdot dl - \int_{\gamma} F \cdot dl = \int_{\gamma'} F \cdot dl.$$

Parametrizamos γ' por $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (x + th, y)$. Então, $\alpha'(t) = h(1,0)$ e

$$G(x+h,y) - G(x,y) = \int_{\gamma'} F \cdot dl = \int_0^1 F_1 dx + F_2 dy = h \int_0^1 F_1(x+th,y)\, dt.$$

Como F é contínua

$$\frac{G(x+h,y) - G(x,y)}{h} - F_1(x,y) = \int_0^1 F_1(x+th,y)\, dt - F_1(x,y) = \int_0^1 F_1(x+th,y) - F_1(x,y)\, dt.$$

Dado $\varepsilon > 0$ seja $\delta > 0$ tal que $|F_1(x+z,y) - F_1(x,y)| < \varepsilon$ se $|z| < \delta$. Nesse caso,

$$\left| \frac{G(x+h,y) - G(x,y)}{h} - F_1(x,y) \right| \le \int_0^1 |F_1(x+th,y) - F_1(x,y)|\, dt \le \int_0^1 \varepsilon\, dt = \varepsilon.$$

Isso mostra que $\partial_x G(x,y)$ está bem definida e que $\partial_x G(x,y) = F_1(x,y)$. Analogamente, mostramos que $\partial_y G(x,y) = F_2(x,y)$. Portanto, $F = G'$.

□

Observação 4.3. *A demonstração acima não usa o fato do campo F estar definido em $\mathbb{R}^2$. O Teorema 4.2 é válido para campos definidos em $\mathbb{R}^N$, com $N \ge 2$.*

4.1 Funções radiais

O Teorema 4.2 generaliza o Teorema Fundamental do Cálculo. Ele é válido para funções F que são contínuas. Toda função contínua em $\mathbb{R}$ tem uma primitiva. Funções vetoriais nem sempre são conservativas, isto é, nem sempre têm primitivas. Uma classe importante de funções conservativas são as **radiais**. Um campo $F(x,y)$ é dito radial se ele é da forma

$$F(x,y) = g(r)\vec{r},$$

onde $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\vec{r} = \frac{1}{r}(x,y)$ e g é uma função escalar. Note que $|\vec{r}| = 1$, de modo que $|F(x,y)| = |g(r)|$. Portanto, F radial significa que o campo aponta na direção radial $\vec{r}$, e sua norma só depende de r. Por abuso de notação, escrevemos com frequência $F(r)$ no lugar de $F(x,y)$. Campos radiais são conservativos:

Exercício 4.4. *Seja $F(r) = g(r)\vec{r}$ um campo radial. Seja G uma primitiva de g. Mostre que $G(x,y) = G(r)$ é um potencial de F.*

Essas observações não se restrigem ao caso planar. Em $\mathbb{R}^N$, definimos

$$r = \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \vec{r} = \frac{1}{r}(x_1, x_2, \cdots, x_N).$$

Mostre que o Exercício 4.4 se estende a $\mathbb{R}^N$.

Exemplo 4.5. *O campo gravitacional gerado por uma carga pontual é dado por*

$$F(r) = \frac{1}{r^2}\vec{r} = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x,y,z).$$

O potencial G associado a F é

$$G(r) = -\frac{1}{r}.$$

(Os físicos costumam chamar a função $-G$ de potencial. Por exemplo, eles dizem que $1/r$ é o potencial do campo gravitacional.)

4.2 O rotacional

Um critério útil para determinar se $F = (F_1, F_2)$ é ou não conservativo usa o seu **rotacional**

$$\nabla \times F = \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1.$$

É fácil ver o seguinte.

Exercício 4.6. *Se F é gradiente, então $\nabla \times F = 0$.*

Um campo que tem rotacional nulo é dito **irrotacional**. Campos conservativos são muito especiais, porque são irrotacionais. A recíproca do Exercício 4.6 não é verdadeira. Nem todo campo irrotacional deriva de um potencial, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 4.7. *Seja*

$$F(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}(-y, x).$$

O campo F está definido em $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$. Seja γ um arco de circunferência, sendo percorrido de θ_0 até θ_1. Parametrizamos γ por $x(\theta) = \cos\theta$, $y(\theta) = \sin\theta$. Então,

$$F_1 = -\sin\theta, F_2 = \cos\theta, dx = -\sin\theta\, d\theta, dy = \cos\theta\, d\theta,$$

de modo que

$$\int_\gamma F_1 dx + F_2 dy = \int_{\theta_0}^{\theta_1} 1\, d\theta = \theta_1 - \theta_0.$$

Portanto, $\int_\gamma F \cdot dl$ é igual ao ângulo associado ao arco γ. Em particular, se γ é toda a circunferência,

$$\oint_\gamma F \cdot dl = 2\pi.$$

Isto mostra que F não é conservativo, veja o Teorema 4.2. Por outro lado, é fácil ver que

$$\partial_y F_1 = \partial_x F_2 = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^4}.$$

Então, F é um exemplo de um campo irrotacional que não é conservativo. Para apimentar a discussão, defina

$$G(x, y) = \arctan\frac{y}{x}.$$

Um cálculo direto mostra que $\partial_x G = F_1$ e $\partial_2 G = F_2$. Ou seja, $F = G'$. Porque isto não contradiz o Teorema 4.2?

A integral de linha em R^3, e mesmo em R^N, pode ser definida de forma inteiramente análoga à do caso $\mathbb{R}^2$. Isto porque a direção tangencial unitária τ da curva γ está bem determinada (a menos de um sinal), de modo que faz sentido definir a componente tangencial $F_\tau = F \cdot \tau$ de F. Vejamos um exemplo.

Exemplo 4.8. *Seja $F(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$ um campo em $\mathbb{R}^3$ e seja γ a espiral parametrizada por $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in (0, \pi)$, indo de $(1, 0, 0)$ a $(-1, 0, \pi)$. Vamos calcular*

$$\int_\gamma F \cdot dl = \int_\gamma F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz.$$

Escrevemos $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$, $z(t) = t$, $F_1 = y + x$, $F_2 = x + z$, $F_3 = x + y$. Então, $dx = -\sin t\, dt$ e $dy = \cos t\, dt$, $dz = dt$. Assim,

$$\int_\gamma F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz = \int_0^\pi [-(\sin t + t)\sin t + (\cos t + t)\cos t + (\cos t + \sin t)]dt.$$

Resolvemos a integral usando que $\cos^2 t - sen\ ^2 t = \cos 2t$, e integrando $t \sin t$, $t \cos t$ por partes.

Encerramos esta seção observando que apenas a definição do rotacional é específica ao plano. Em $\mathbb{R}^N$ o rotacional envolve todas as derivadas cruzadas. É fácil ver o seguinte. (No caso em que F é de classe C^1.)

Exercício 4.9. *Seja $F = (F_1, F_2, \cdots, F_N)$ um campo gradiente, ou seja, da forma $F = \nabla G$. Então $\partial_j F_i - \partial_i F_j = 0$ para todo $1 \leq i, j \leq N$.*

5 O fluxo de um campo através de uma curva plana

A integral de linha de um campo é a integral da componente tangencial de um campo F. No plano, podemos integrar a componente **normal** de F. Se η é um vetor normal unitário (existem dois) a γ em um ponto P, a componente normal F_η é igual a $F \cdot \eta$. A integral de F_η sobre γ é chamada do **fluxo** de F através de γ, e é denotada por $\int_\gamma F \cdot d\eta$. Existe aqui a mesma ambiguidade que antes: há duas normais, como há duas tangentes. O fluxo dependerá da escolha da normal. Isto significa que **o fluxo dependerá da escolha da orientação normal da curva**. Mudando a escolha, o sinal da integral é invertido.

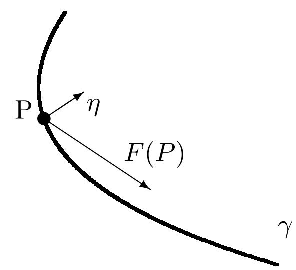


Figura 5: Campo F e campo normal

O cálculo do fluxo é simples. Se $F = (F_1, F_2)$ e $\tau = (\tau_1, \tau_2)$, então $\eta = (\tau_2, -\tau_1)$ ou $\eta = (-\tau_2, \tau_1)$. Suponha que a normal escolhida seja a primeira. Neste caso, $F \cdot \eta = F_1\eta_1 + F_2\eta_2 = F_1\tau_2 - F_2\tau_1$. Definindo $F^\perp = (-F_2, F_1)$, temos $F \cdot \eta = F^\perp \cdot \tau$. Portanto, o fluxo de F através de γ é o trabalho de $F^\perp$ ao longo de γ. Portanto,

$$\int_\gamma F \cdot d\eta = \int -F_2\, dx + F_1\, dy.$$

O fluxo de um campo através de uma curva **não** se estende a $\mathbb{R}^3$, pelo fato que a direção normal a uma curva não está bem definida em $\mathbb{R}^N$, se $N \geq 3$.

Exemplo 5.1. *Considere o campo $F(x, y) = (x, y)$ e γ o círculo unitário centrado na origem. Quanto vale a circulação $\oint_\gamma F \cdot dl$ e o fluxo $\int_\gamma F \cdot d\eta$?*

É fácil saber as respostas sem fazer as contas, mas vamos fazê-las. É preciso definir uma direção tangencial τ e uma direção normal η. Vamos parametrizar γ por $\alpha(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\theta \in (0, 2\pi)$. Então, $F(\alpha(\theta)) = (\cos\theta, \sin\theta)$ e $\alpha'(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$, de modo que $F(\alpha(\theta)) \cdot \alpha'(\theta) = 0$. Portanto,

$$\oint_\gamma F \cdot dl = \int_0^{2\pi} 0\, d\theta = 0.$$

Observe que o vetor $\alpha'(\theta)$ já é unitário (α é a parametrização pelo comprimento de arco) de modo que $\eta = (\cos\theta, \sin\theta)$ é uma normal (é a normal exterior). Neste caso $F(\alpha(t)) \cdot \eta(\alpha(t)) = 1$, de modo que

$$\int_\gamma F \cdot d\eta = \int_0^{2\pi} 1\, d\theta = 2\pi.$$

Estes dois resultados poderiam ter sido obtidos olhando a Figura 6 abaixo. Em cada ponto do círculo a componente tangencial F_τ vale zero e a componente normal F_η vale 1. Com isto, temos o resultado. Podemos ainda notar que F é um campo conservativo, pois ele é radial. Então, a circulação de F vale zero.

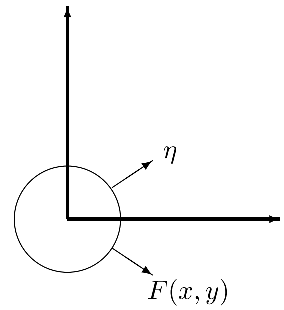


Figura 6: Campo radial

Exemplo 5.2. *Considere o campo $F^\perp = (-y, x)$, que é um campo ortogonal ao do exemplo anterior. Então, a integral de linha de F vira o fluxo de $F^\perp$ e o fluxo de F vira a integral de linha de $F^\perp$. Portanto, se γ é o círculo unitário, $\int_\gamma F^\perp \cdot dl = 2\pi$ e $\oint_\gamma F^\perp \cdot \eta = 0$.*

Na verdade, o fluxo de $F^\perp$ através de **qualquer** *curva fechada vale zero, porque a circulação de F sobre qualquer curva fechada é zero. Isto tem um significa físico, ou geométrico: o total de campo que está entrando em γ é igual ao que está saindo de γ. (Tudo que entra, sai.) No caso de F, esta conta não está balanceada. (Entra mais do que sai, ou sai mais do que entra.) Se o fluxo de F através de toda curva fechada é zero, F é dito um* **campo incompressível**.

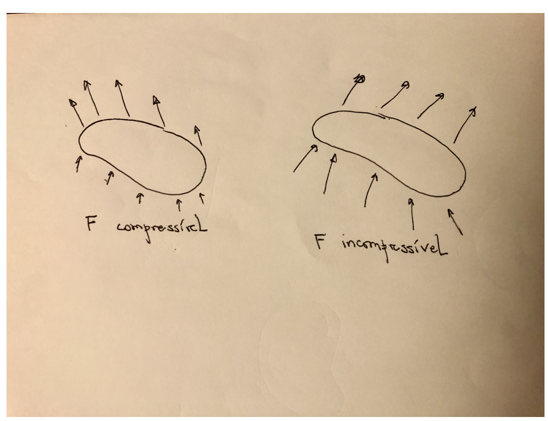


Figura 7: Fluxo através de curvas fechadas

Vemos que $F = (F_1, F_2)$ é incompressível se e só se $F^\perp = (-F_2, F_1)$ é conservativo. Nesse caso,

$$\nabla \times F^\perp = \partial_1 F_1 - \partial_2(-F_2) = \partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 = 0.$$

Definimos o **divergente** de um campo F como $\nabla \cdot F = \partial_1 F_1 + \partial_2 F_2$. Então, se F é incompressível, seu divergente é nulo. A recíproca é (quase) verdade, como veremos mais tarde.