

## Teoremas de Gauss e Stokes

Prof. Flavio Dickstein.

### 1 O Teorema de Green

O Teorema de Green é uma generalização do Teorema Fundamental do Cálculo para o caso de funções de duas variáveis  $f(x, y)$ . Escrevemos o TFC da forma

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a) = f(b)\eta(b) + f(a)\eta(a),$$

onde  $\eta(b) = 1$  e  $\eta(a) = -1$  são as normais exteriores unitárias no bordo de  $(a, b)$ . É sob esta forma que TFC será estendido.

Considere uma região limitada  $\Omega$ , com parte superior  $h(x)$  e parte inferior  $g(x)$ ,  $x \in (a, b)$ . Se  $f(x, y)$  é de classe  $C^1$ , usamos o Teorema Fundamental do Cálculo para obter que

$$\int_{\Omega} \partial_y f = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} \partial_y f(x, y) dy dx = \int_a^b f(x, h(x)) - f(x, g(x)) dx. \quad (1.1)$$

A integral resultante é feita sobre o bordo  $\gamma$  de  $\Omega$ . Mas que integral é esta?

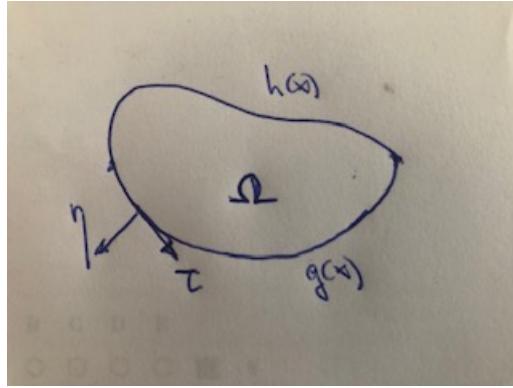


Figura 1:  $\Omega$  e seu bordo

A parte superior do bordo  $\gamma_h$  é parametrizada por  $\alpha(x) = (x, h(x))$ , com  $\alpha'(x) = (1, h'(x))$  e  $|\alpha'(x)| = \sqrt{1 + (h'(x))^2}$ . Escrevemos

$$\int_a^b f(x, h(x)) dx = \int_a^b f(x, h(x)) \frac{1}{|\alpha'(x)|} |\alpha'(x)| dx.$$

Observamos que

$$\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + (h'(x))^2}} (-h'(x), 1) = \frac{1}{|\alpha'(x)|} (-h'(x), 1)$$

é a normal unitária **exterior** a  $\partial\Omega$ . Então,  $\eta_y(x) = \frac{1}{|\alpha'(x)|}$  é a componente  $y$  de  $\eta$ . Temos então

$$\int_a^b f(x, h(x)) dx = \int_a^b f(x, h(x)) \eta_y(x) |\alpha'(x)| dx = \int_{\gamma_h} f \eta_y ds.$$

Se  $\beta(x) = (x, g(x))$  parametriza a parte inferior  $\gamma_g$ , então  $\eta(x) = \frac{1}{|\beta'(x)|}(g'(x), -1)$  é a normal unitária exterior. Portanto,  $\eta_y = -\frac{1}{|\beta'(x)|}$  e

$$\begin{aligned} - \int_a^b f(x, g(x)) dx &= - \int_a^b f(x, g(x)) \frac{1}{|\beta'(x)|} |\beta'(x)| dx = \int_a^b f(x, g(x)) \eta_y(x) |\beta'(x)| dx \\ &= \int_{\gamma_g} f \eta_y ds. \end{aligned}$$

Como  $\int_{\gamma_h} + \int_{\gamma_g} = \int_{\gamma}$ , de (1.1) vemos que

$$\int_{\Omega} \partial_y f = \int_{\gamma} f \eta_y ds. \quad (1.2)$$

Analogamente,

$$\int_{\Omega} \partial_x f = \int_{\gamma} f \eta_x ds. \quad (1.3)$$

Em (1.2) e (1.3), uma integral de uma derivada de  $f$  em  $\Omega$  é igual a uma integral de  $f$  no bordo de  $\Omega$ , envolvendo a normal externa a  $\Omega$ . Como no Teorema Fundamental do Cálculo.

Dois resultados fundamentais obtêm-se quando combinamos estas duas fórmulas. Mas, antes, precisamos de algumas definições.

O primeiro resultado envolve o **divergente**  $\nabla \cdot F$  de um campo  $F = (F_1, F_2)$ ,

$$\nabla \cdot F = \partial_x F_1 + \partial_y F_2.$$

**Teorema 1.1** (Teorema da Divergência). *Seja  $F = (F_1, F_2)$  um campo de classe  $C^1$  definido em uma região  $R$ . Seja  $\Omega \subset R$  uma região cuja fronteira  $\gamma$  seja definida pelo gráfico de uma função  $h(x)$  na parte superior e pelo gráfico de uma função  $g(x)$  na parte inferior. Então,*

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F = \int_{\gamma} F \cdot d\eta, \quad (1.4)$$

onde o fluxo é tomado com a normal exterior.

*Demonstração.* Neste caso, aplicamos (1.3) a  $F_1$ , (1.2) a  $F_2$  e somamos as equações. Obtemos

$$\int_{\Omega} \partial_x F_1 + \partial_y F_2 = \int_{\gamma} F_1 \eta_x + F_2 \eta_y ds. \quad (1.5)$$

Do lado esquerdo,  $\nabla \cdot F = \partial_x F_1 + \partial_y F_2$  é o divergente de  $F$ . Do lado direito, temos que

$$\int_{\gamma} F_1 \eta_x + F_2 \eta_y ds = \int_{\gamma} F \cdot \eta ds = \int_{\gamma} F \cdot d\eta$$

é o fluxo de  $F$  através de  $\gamma$ . Temos então (1.5).  $\square$

Um outro resultado fundamental envolve o rotacional de  $F$ ,  $\nabla \times F = \partial_x F_2 - \partial_y F_1$ .

**Teorema 1.2** (Teorema de Green). *Seja  $F = (F_1, F_2)$  um campo de classe  $C^1$  definido em uma região  $R$ . Seja  $\Omega \subset R$  uma região cuja fronteira  $\gamma$  seja definida pelo gráfico de uma função  $h(x)$  na parte superior e pelo gráfico de uma função  $g(x)$  na parte inferior. Então,*

$$\int_{\Omega} \nabla \times F = \oint_{\gamma} F \cdot dl, \quad (1.6)$$

onde a direção da circulação é a que faz a região exterior ficar à direita.

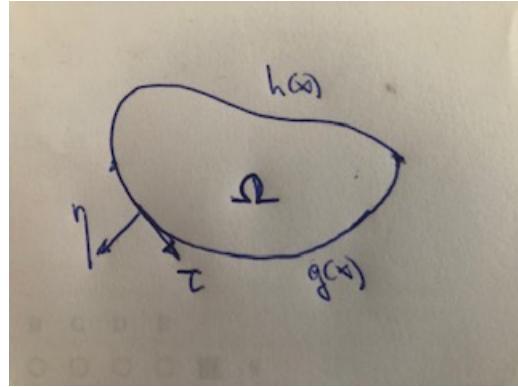


Figura 2: Partição de  $\Omega$

*Demonação.* Seja  $F^\perp = (F_2, -F_1)$ . Usando o Teorema da Divergência, temos

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F^\perp = \int_{\gamma} F^\perp \cdot d\eta. \quad (1.7)$$

Mas,  $\nabla \cdot F^\perp = \partial_x F_2 - \partial_y F_1 = \nabla \times F$ . Logo,

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F^\perp = \int_{\Omega} \nabla \times F.$$

Além disso,

$$F \cdot \eta = F_2 \eta_1 - F_1 \eta_2 = F_1 \tau_1 + F_2 \tau_2,$$

onde  $\tau = (\tau_1, \tau_2) = (-\eta_2, \eta_1)$  é a tangente unitária a  $\gamma$ . Portanto,

$$\int_{\gamma} F^\perp \cdot d\eta = \oint_{\gamma} F \cdot dl.$$

Escrevendo (1.7) em termos de  $F$ , obtemos (1.8). □

Vamos olhar o Teorema de Green sob um ponto de vista mais instrutivo. Para isto, introduzimos a seguinte definição.

**Definição 1.3.** Seja  $\Omega$  uma região conexa de  $\mathbb{R}^2$ . Duas curvas fechadas  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$  são **homotéticas** (por curvas fechadas) em  $\Omega$  se existe uma função  $\alpha(s, t) : [0, 1] \times [a, b] \rightarrow \Omega$  de classe  $C^1$  tal que  $\alpha(0, t)$  parametriza  $\gamma_0$  e  $\alpha(1, t)$  parametriza  $\gamma_1$ .

Uma curva fechada  $\gamma_0$  é homotética (por curvas fechadas) a um ponto  $P \in \Omega$  se  $\alpha(0, t)$  parametriza  $\gamma_0$  e  $\alpha(1, t) = P$  para todo  $t \in [a, b]$ .

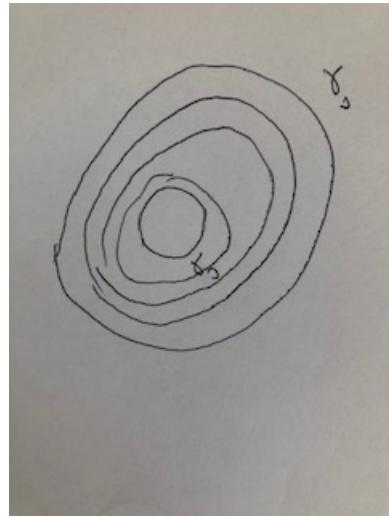


Figura 3: Homotetia entre curvas fechadas

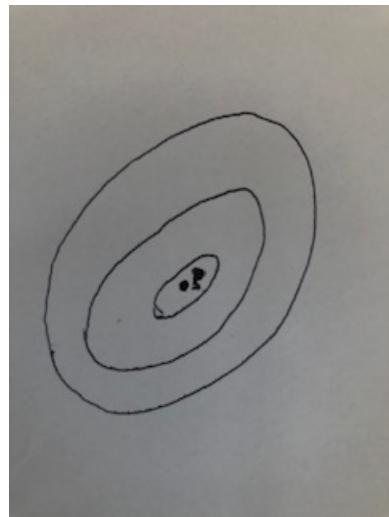


Figura 4: Homotetia a um ponto

**Uma região conexa**  $\Omega$  é dita **simplesmente conexa** se toda curva fechada de  $\Omega$  é homotética a um ponto de  $\Omega$ .

Por exemplo, um círculo é um conjunto conexo e simplesmente conexo. Se tirarmos um ponto do círculo, ele continua conexo, mas não simplesmente conexo. Outro exemplo é a região  $\Omega$  entre os gráficos de  $g(x)$  e de  $h(x)$ ,  $x \in (a, b)$ . Neste caso, podemos construir uma homotetia  $\alpha(s, x)$ , como na Figura 5, que parametriza  $\Omega$  de forma bijetora.

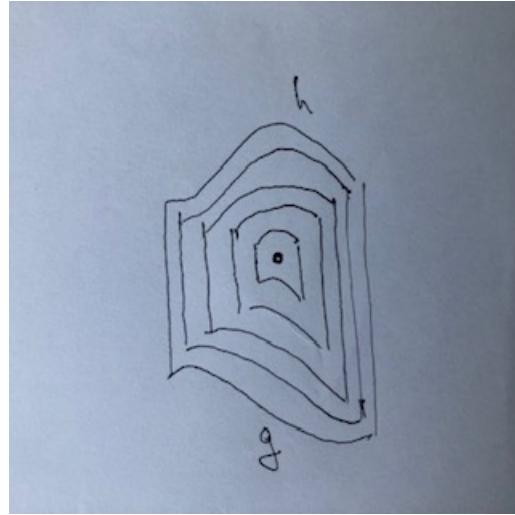


Figura 5: Homotetia bijetora

Enunciamos agora uma versão mais geral do Teorema de Green.

**Teorema 1.4** (Teorema de Green - caso geral). *Seja  $F = (F_1, F_2)$  um campo de classe  $C^1$  definido em uma região  $R$ . Seja  $\Omega \subset R$  um aberto simplesmente conexo, de fronteira  $\gamma$ . Então,*

$$\int_{\Omega} \nabla \times F = \oint_{\gamma} F \cdot dl, \quad (1.8)$$

onde a direção da circulação é a que faz a região exterior ficar à direita.

*Demonstração.* Seja  $\alpha(s, t)$ ,  $s \in [0, 1]$ , uma homotetia que leva  $\gamma$  em um ponto  $P$  de  $\Omega$ . Isto é,  $\alpha(0, t)$  parametriza  $\gamma$  e  $\alpha(1, t) = P$  para todo  $t$ . Vamos supor que  $\alpha(s, t)$  seja uma bijeção. (É o caso quando  $\Omega$  está entre dois gráficos.) Para cada  $s > 0$ , seja  $\gamma_s$  a curva parametrizada por  $\alpha(t, s)$ . A circulação de  $F$  em  $\gamma_s$  vale

$$T(s) = \oint_{\gamma_s} F \cdot dl = \int_a^b F(\alpha(s, t)) \cdot \partial_t \alpha(s, t) dt.$$

Queremos estudar como  $T(s)$  varia com  $s$ . Calculemos

$$\begin{aligned} T'(s) &= \oint_a^b \frac{\partial}{\partial s} (F(\alpha(s, t)) \cdot \partial_t \alpha(s, t)) dt = \\ &\quad \int_a^b F'(\alpha(s, t)) \partial_s \alpha(s, t) \cdot \partial_t \alpha(s, t) + F(\alpha(s, t)) \cdot \partial_{st}^2 \alpha(s, t) dt. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Integrando por partes,

$$\int_a^b F(\alpha(s, t)) \cdot \partial_{ts}^2 \alpha(s, t) dt = - \int_a^b \partial_t F(\alpha(s, t)) \cdot \partial_s \alpha(s, t) dt + F(\alpha(s, t)) \partial_s \alpha(s, t) \Big|_a^b. \quad (1.10)$$

Como as curvas são fechadas,  $\alpha(s, a) = \alpha(s, b)$ . Logo,  $\partial_s \alpha(s, 0) = \partial_s \alpha(s, 1)$ . Então,

$$F(\alpha(s, t)) \partial_s \alpha(s, t) \Big|_a^b = F(\alpha(s, b)) \partial_s \alpha(s, b) - F(\alpha(s, a)) \partial_s \alpha(s, a) = 0.$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 F(\alpha(s, t)) \cdot \partial_{ts}^2 \alpha(s, t) dt &= - \int_0^1 \partial_t F(\alpha(s, t)) \cdot \partial_s \alpha(s, t) dt \\ &= - \int_0^1 F'(\alpha(s, t)) \partial_t \alpha(s, t) \cdot \partial_s \alpha(s, t) dt \end{aligned} \quad (1.11)$$

Lembremos que, dada uma matriz  $M_{n \times n}$  e dois vetores  $u, v$  de dimensão  $n$ , temos

$$Mu \cdot v = M^T v \cdot u,$$

de modo que  $Mu \cdot v - Mv \cdot u = (M - M^T)u \cdot v$ . Usando isto em (9.7) e (9.9), obtemos

$$T'(s) = \int_0^1 (M - M^T) \partial_s \alpha(s, t) \cdot \partial_t \alpha(s, t) dt, \quad (1.12)$$

onde

$$M = \begin{pmatrix} \partial_x F_1 & \partial_y F_1 \\ \partial_x F_2 & \partial_y F_2 \end{pmatrix}, \quad M^T = \begin{pmatrix} \partial_x F_1 & \partial_x F_2 \\ \partial_y F_1 & \partial_y F_2 \end{pmatrix}, \quad M - M^T = \begin{pmatrix} 0 & -\nabla \times F \\ \nabla \times F & 0 \end{pmatrix},$$

Seja  $\alpha(s, t) = (x(s, t), y(s, t))$ . Então,

$$\begin{aligned} \partial_s \alpha(s, t) &= (\partial_s x(s, t), \partial_s y(s, t)), \\ \partial_t \alpha(s, t) &= (\partial_t x(s, t), \partial_t y(s, t)). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} (M - M^T) \partial_s \alpha(s, t) \cdot \partial_t \alpha(s, t) &= \begin{pmatrix} 0 & \nabla \times F \\ -\nabla \times F & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_s x \\ \partial_s y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_t x \\ \partial_t y \end{pmatrix} = \\ &\nabla \times F \begin{pmatrix} \partial_s y \\ -\partial_s x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_t x \\ \partial_t y \end{pmatrix} = \nabla \times F (\partial_s y \partial_t x - \partial_s x \partial_t y). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Portanto,

$$T'(s) = \int_0^1 \nabla \times F(\alpha(s, t)) (\partial_s y(s, t) \partial_t x(s, t) - \partial_s x(s, t) \partial_t y(s, t)) dt, \quad (1.14)$$

Integrando em  $s$  (e invertendo o sinal em ambos os lados), obtemos

$$T(0) - T(1) = \int_0^1 \int_0^1 \nabla \times F(\alpha(s, t)) (\partial_s x(s, t) \partial_t y(s, t) - \partial_s y(s, t) \partial_t x(s, t)) dt ds. \quad (1.15)$$

Mas  $T(1) = 0$  pois  $\alpha(s, t) \rightarrow P$  quando  $s \rightarrow 1$ . Portanto, o lado esquerdo é igual a  $T(0)$ , a circulação de  $F$  em torno de  $\gamma_0 = \gamma$ .

No lado direito, temos que

$$\partial_s x(s, t) \partial_t y(s, t) - \partial_s y(s, t) \partial_t x(s, t) = \det \begin{pmatrix} \partial_s x & \partial_t x \\ \partial_s y & \partial_t y \end{pmatrix},$$

o determinante da matriz jacobiana  $\alpha'(s, t)$ . Como  $\alpha(s, t)$  é uma parametrização de  $\Omega$ , reconhecemos no lado direito a fórmula de mudança de variáveis, isto é,

$$\oint_{\gamma} F \cdot dl = \int_{\Omega} \nabla \times F.$$

A prova está quase completa. Falta verificar uma coerência de sinais, que deixamos ao leitor. E falta tratar do caso em que  $\Omega$  é uma região qualquer. Isto pode ser tratado dividindo  $\Omega = \bigcup_j \Omega_j$  em sub-regiões adequadas, como na Figura 6, e verificando que a contribuição do trabalho em cada curva interseção de duas sub-regiões é nula.

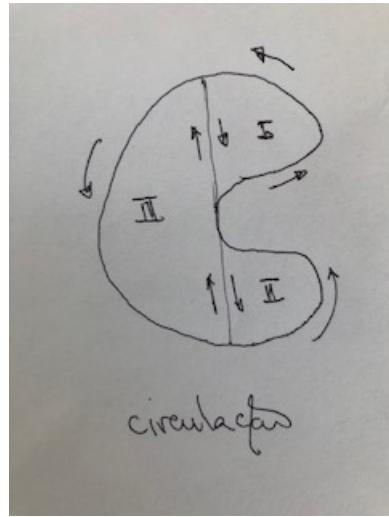


Figura 6: Circulação nas sub-regiões

□

**Observação 1.5.** Por definição, uma região simplesmente conexa é conexa. A hipótese da região ser conexa é importante, como vemos na Figura 10. Se aplicarmos o Teorema de Green a cada uma das partes conexas de  $\Omega$  e somarmos as duas igualdades, obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla \times F = \oint_{\gamma_1} + \oint_{\gamma_2} F \cdot dl \neq \oint_{\gamma} F \cdot dl,$$

devido à orientação da circulação de  $\gamma_1$  e de  $\gamma_2$ .

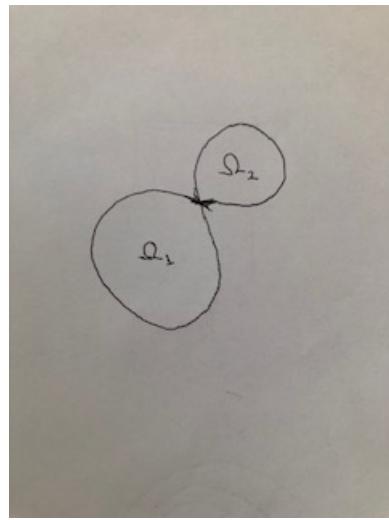


Figura 7: Região desconexa

**Observação 1.6.** Seja

$$F(x, y) = \frac{1}{r^2}(-y, x).$$

definida em  $\Omega$ , o círculo unitário menos a origem. Então,  $\nabla \times F = 0$ . Portanto,  $\int_{\Omega} \nabla \times F = 0$ . Mas  $\int_{\gamma} F \cdot dl = 2\pi$  se  $\gamma$  é a circunferência unitária. Portanto, não vale (1.8). Observe que  $\Omega$  não é simplesmente conexo.

**Observação 1.7.** Seja  $\nabla \times F$  uma função definida numa região  $R$ , não necessariamente simplesmente conexa. Seja  $\Omega \subset R$  cuja fronteira  $\gamma$  é composta de duas curvas fechadas  $\gamma_0$  e  $\gamma_1$  como na Figura 11. Note que  $\Omega_I$  e  $\Omega_{II}$  são simplesmente conexas. Aplicando o Teorema de Green nas duas regiões, temos

$$\int_{\Omega_I} \nabla \times F = \oint_{\gamma_I} F \cdot dl, \quad \int_{\Omega_{II}} \nabla \times F = \oint_{\gamma_{II}} F \cdot dl.$$

Somando, obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla \times F = \oint_{\gamma_I \cup \gamma_{II}} F \cdot dl.$$

Note que  $\gamma_I \cup \gamma_{II} \neq \gamma$ , pois  $\gamma_I$  e  $\gamma_{II}$  contêm dois segmentos de retas que não fazem parte da fronteira  $\gamma$ . No entanto, a integral de linha em cada um destes segmentos se anula, pois eles são percorridos duas vezes, em direções opostas. Então,

$$\oint_{\gamma_I \cup \gamma_{II}} F \cdot dl = \oint_{\gamma} F \cdot dl.$$

de modo que

$$\int_{\Omega} \nabla \times F = \oint_{\gamma} F \cdot dl = \oint_{\gamma_0} F \cdot dl + \oint_{\gamma_1} F \cdot dl.$$

Mas  $\gamma_0$  está sendo percorrida no sentido horário. Percorrendo  $\gamma_0$  no sentido trigonométrico, escrevemos

$$\oint_{\gamma_1} F \cdot dl = \oint_{\gamma_0} F \cdot dl + \int_{\Omega} \nabla \times F. \quad (1.16)$$

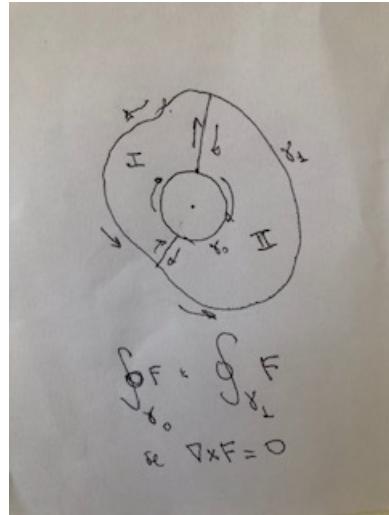


Figura 8: Curvas homotéticas têm mesma circulação

Por exemplo, seja

$$F(x, y) = \frac{1}{r^2}(-y, x) = \frac{1}{r^2}\vec{r}.$$

Então  $\nabla \times F = 0$  e a circulação na circunferência unitária vale  $2\pi$ . Então, a circulação em qualquer curva fechada que envolva a origem vale  $2\pi$ . E a circulação em qualquer curva fechada que não envolva a origem vale zero.

**Observação 1.8.** Na demonstração, passamos a derivada em relação a  $s$  para dentro da integral. Isto não pode ser feito, em geral, veja o Exercício 1.9. Mas vale se  $f$  e as curvas  $\gamma_0, \gamma_1$  forem regulares.

**Exercício 1.9.** Seja  $f(x)$  uma função limitada e tal que  $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$ . Seja

$$f_n(x) = \frac{1}{n}f\left(\frac{x}{n}\right).$$

(i) Mostre que  $\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = 1$  para todo  $n$ .

(ii) Mostre que  $f_n(x) \rightarrow 0$  se  $n \rightarrow \infty$ .

(iii) Conclua que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \neq \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ .

O Teorema de Green tem como consequência o seguinte.

**Teorema 1.10.** Seja  $F$  um campo de classe  $C^1$  definido em uma região  $R$  simplesmente conexa. Então,  $F$  é conservativo se e só se  $\nabla \times F = 0$ .

*Demonstração.* Se  $F$  é conservativo então existe um potencial  $G$  tal que  $F = \nabla G$ . Neste caso,  $F_1 = \partial_x G$  e  $F_2 = \partial_y G$ . Então,

$$\partial_y F_1 = \partial_{xy}^2 G = \partial_x F_2.$$

Logo,  $\nabla \times F = 0$ .

Reciprocamente, suponha que  $\nabla \times F = 0$ . Se  $\gamma$  é uma curva fechada, pelo Teorema de Green 1.4 vemos que  $\int_{\gamma} F \cdot dl = 0$ . Então,  $F$  é conservativo.  $\square$

Enunciamos agora o Teorema da Divergência no caso geral .

**Teorema 1.11** (Teorema da Divergência - caso geral). Seja  $F = (F_1, F_2)$  um campo de classe  $C^1$  definido em uma região  $R$ . Seja  $\Omega \subset R$  um aberto simplesmente conexo, de fronteira  $\gamma$  . Então,

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F = \int_{\gamma} F \cdot d\eta, \tag{1.17}$$

onde o fluxo é tomado com a normal exterior à região, veja a Figura 9.

*Demonstração.* Basta aplicar o Teorema de Green a  $F^\perp = (F_2, -F_1)$ .  $\square$

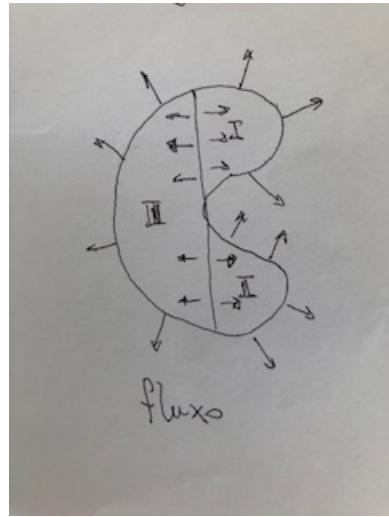


Figura 9: Fluxo em sub-regiões  $\Omega_j$

Os comentários feitos em Observação 1.5, 1.6 e 1.7 têm seus equivalentes em termos de divergente e fluxo.

**Observação 1.12.** Considerando a região  $\Omega$  desconexa da Figura 10. Se aplicarmos o Teorema de Green a cada uma das partes conexas de  $\Omega$  e somarmos as duas igualdades, obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F = \int_{\gamma_1} F \cdot d\eta + \int_{\gamma_2} F \cdot d\eta,$$

introduzindo uma descontinuidade no campo normal unitário externo  $\eta$ .

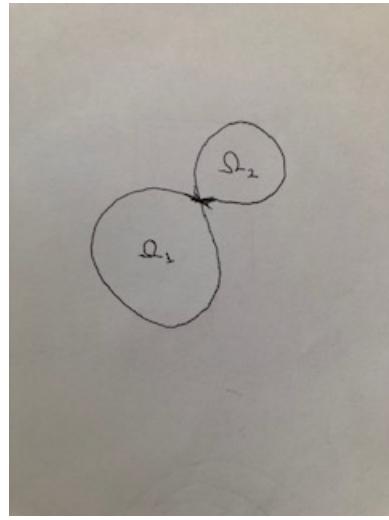


Figura 10: Região desconexa

**Observação 1.13.** Seja

$$F(x, y) = \frac{1}{r^2}(x, y).$$

definida em  $\Omega$ , o círculo unitário menos a origem. Então,  $\nabla \cdot F = 0$ . Portanto,  $\int_{\Omega} \nabla \cdot F = 0$ . Mas  $\int_{\gamma} F \cdot d\eta = 2\pi$  se  $\gamma$  é a circunferência unitária. Portanto, não vale (1.17).

**Observação 1.14.** Seja  $\Omega$  como na Figura 11. Então, aplicando (1.16) a  $F^\perp$ , obtemos

$$\int_{\gamma_1} F \cdot d\eta = \int_{\gamma_0} F \cdot d\eta + \int_{\Omega} \nabla \cdot F.$$

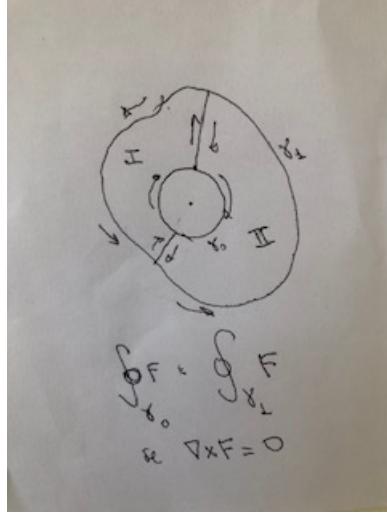


Figura 11: Curvas homotéticas têm mesma circulação

Por exemplo, se

$$F(x, y) = \frac{1}{r^2}(x, y) = \frac{1}{r^2}\vec{r}.$$

Então  $\nabla \cdot F = 0$  e o fluxo através da circunferência unitária vale  $2\pi$ . Então, o fluxo através de qualquer curva fechada que envolva a origem vale  $2\pi$ . E o fluxo através de qualquer curva fechada que não envolva a origem vale zero.

## 2 Integral sobre uma superfície

Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície bidimensional, parametrizada por  $\alpha$ , isto é,  $\alpha : (a, b) \times (c, d) \rightarrow S$ . A área  $|S|$  de  $S$  é a soma das áreas  $\Delta S$  da Figura 12, que são as imagens por  $\alpha$  de retângulos  $\Delta t \times \Delta s$ .

Aproximamos

$$\alpha(t + \Delta t, s + \Delta s) \approx \alpha(t, s) + \alpha'(t, s) \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta s \end{pmatrix}.$$

$\Delta S$  é aproximado pelo paralelogramo  $\alpha'(t, s)(\Delta t \times \Delta s)$ . Qual é a área do paralelogramo de lados  $\Delta t \alpha_t$  e  $\Delta s \alpha_s$ ?

**Exercício 2.1.** Sejam  $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ . O produto vetorial  $u \times v$  é definido por

$$u \times v = \begin{pmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = (u_2 v_3 - v_2 u_3, u_3 v_1 - v_3 u_1, u_1 v_2 - v_2 u_1)$$

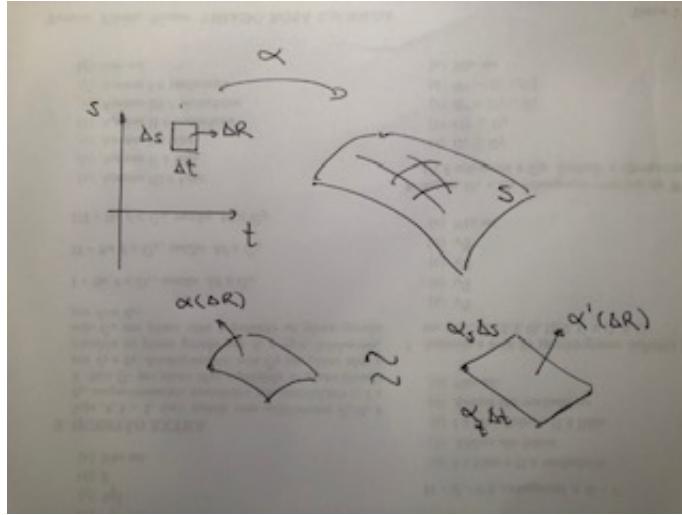


Figura 12: Área em uma superfície

Mostre o seguinte.

- (i) O produto vetorial  $u \times v$  é uma forma bilinear, isto é, é linear em  $u$  e é linear em  $v$ .
- (ii)  $u \times v$  é anticomutativo:  $u \times v = -v \times u$ .
- (iii) Se  $w \in \mathbb{R}$  então o **produto misto**  $u \times v \cdot w$  é igual ao determinante da matriz formada por  $w$ ,  $u$  e  $v$ .
- (iv)  $u$  e  $v$  são l.d. se e só se  $u \times v = 0$ .
- (v)  $u \times v$  é ortogonal a  $u$  e a  $v$ .
- (vi) A área do paralelogramo formado por  $u$  e  $v$  vale  $|u \times v|$ .  
(Sugestão:  $v^\perp = v - \langle u, v \rangle \frac{u}{|u|^2}$  é a projeção de  $v$  sobre  $u^\perp$ . Então, a área do paralelogramo vale  $|u||v^\perp|$ .)

Segue do Exercício 2.1 que

$$\Delta S \approx |\Delta t \alpha_t \times \Delta s \alpha_s| = |\alpha_t \times \alpha_s| \Delta t \Delta s.$$

Para Leibnitz,  $dS = |\alpha_t \times \alpha_s| dt ds$ . Se  $B = (a, b) \times (c, d)$  então

$$|S| = \int_S dS = \int_B |\alpha_s(t, s) \times \alpha_t(t, s)| dt ds. \quad (2.1)$$

No caso mais geral, seja  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função escalar e  $\alpha : R \rightarrow S$  uma parametrização de  $S$ , onde  $R$  é uma região de  $\mathbb{R}^2$ . Definimos a integral de  $f$  sobre  $S$  como

$$\int_S f dS = \int_R f(\alpha(t, s)) |\alpha_s(t, s) \times \alpha_t(t, s)| dt ds. \quad (2.2)$$

É preciso garantir que a definição acima é coerente, isto é, independe da parametrização escolhida. É o que vamos a seguir.

**Lema 2.2.** A integral (2.2) não depende da parametrização escolhida.

*Demonastração.* Seja  $\alpha : R_\alpha \rightarrow S$  e  $\beta : R_\beta \rightarrow S$  duas parametrizações bijetoras de  $S$ . Então existe a função  $g : R_\beta \rightarrow R_\alpha$  dada por  $g(u, v) = (t, s)$  tal que  $\beta(u, v) = \alpha(t, s)$ . Seja  $g = (g_1, g_2)$ . Então,

$$\beta(u, v) = \alpha(t, s) = \alpha(g(u, v)) = \alpha(g_1(u, v), g_2(u, v)),$$

$$\beta_u = \alpha_t g_{1,u} + \alpha_s g_{2,u},$$

$$\beta_v = \alpha_t g_{1,v} + \alpha_s g_{2,v}.$$

Lembrando que o produto interno é bilinear, e que  $w \times w = 0$  para qualquer  $w$ , temos

$$\beta_u \times \beta_v = g_{1,u} g_{2,v} \alpha_t \times \alpha_s + g_{2,u} g_{1,v} \alpha_s \times \alpha_t = (g_{1,u} g_{2,v} - g_{2,u} g_{1,v}) \alpha_t \times \alpha_s = J_g \alpha_t \times \alpha_s.$$

Usando mudança de variáveis,

$$\begin{aligned} \int_{R_\alpha} f(\alpha(t, s)) |\alpha_t(t, s) \times \alpha_s(t, s)| dt ds &= \int_{R_\beta} f(\beta(u, v)) |\alpha_t(g(u, v)) \times \alpha_s(g(u, v))| |J_g(u, v)| du dv = \\ &\quad \int_{R_\beta} f(\beta(u, v)) |\beta_u(u, v) \times \beta_v(u, v)| du dv. \end{aligned}$$

Era o que precisava ser mostrado.  $\square$

Um caso particular ocorre quando a superfície  $S$  é o gráfico de uma função  $z : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Então,  $\alpha(x, y) = (x, y, z(x, y))$  parametriza  $S$ . Calculamos  $\alpha_x = (1, 0, z_x)$ ,  $\alpha_y = (0, 1, z_y)$  e

$$\alpha_x \times \alpha_y = \begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & z_x \\ 0 & 1 & z_y \end{pmatrix} = (-z_x, -z_y, 1).$$

Logo,  $|\alpha_x \times \alpha_y| = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$  e a integral sobre  $S$  fica

$$\int_S f = \int_R f(x, y, z(x)) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy. \quad (2.3)$$

Observe que  $\alpha_x \times \alpha_y$  é uma normal que aponta para cima ( $z > 0$ ). Portanto,

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} (-z_x, -z_y, 1) \quad (2.4)$$

é a normal unitária que aponta para cima.

**Exemplo 2.3.** Seja  $S$  o gráfico do parabolóide  $z = x^2 + y^2$ ,  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

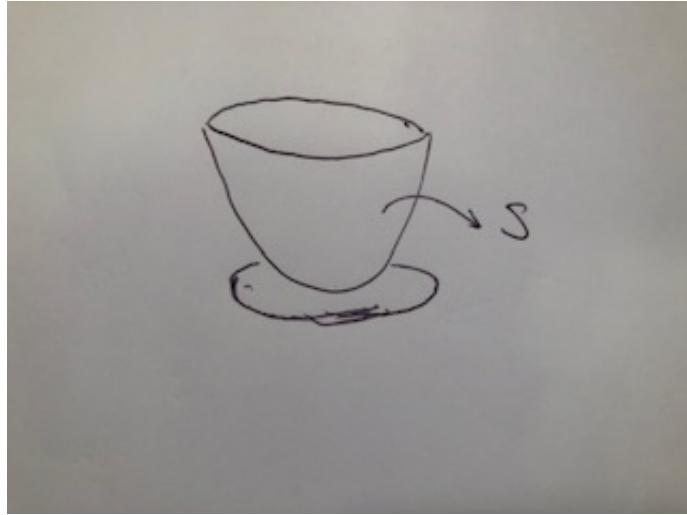


Figura 13: Superfície do parabolóide

Neste caso,  $z_x = 2x$  e  $z_y = 2y$ . Usando (2.3) calculamos sua área como

$$\int_S 1 = \int_{x^2+y^2 \leq 1} \sqrt{1+4x^2+4y^2} dx dy.$$

Usando coordenadas polares,

$$\int_S 1 = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{1+4r^2} r d\theta dr = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1+4r^2} r dr = \frac{\pi}{6} (1+4r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6} (5^{\frac{3}{2}} - 1).$$

Se  $S$  fosse uma placa com densidade de massa  $\rho(x, y, z)$  em cada ponto, a massa total da placa seria

$$\int_S \rho = \int_{x^2+y^2 \leq 1} \rho(x, y, z(x, y)) \sqrt{1+4x^2+4y^2} dx dy.$$

**Exemplo 2.4.** Calculemos a área de  $S_R$ , a superfície esférica de raio  $R$ . Podemos usar que  $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  são as partes superior e inferior de  $S_R$ . Mas é melhor parametrizar  $S_R$  por

$$\alpha(\varphi, \theta) = R(\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi).$$

Neste caso,

$$\partial_\varphi \alpha = R(\cos \varphi \cos \theta, \cos \varphi \sin \theta, -\sin \varphi),$$

$$\partial_\theta \alpha = R(-\sin \varphi \sin \theta, \sin \varphi \cos \theta, 0),$$

$$\partial_\varphi \alpha \times \partial_\theta \alpha = R^2 \sin \varphi (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi).$$

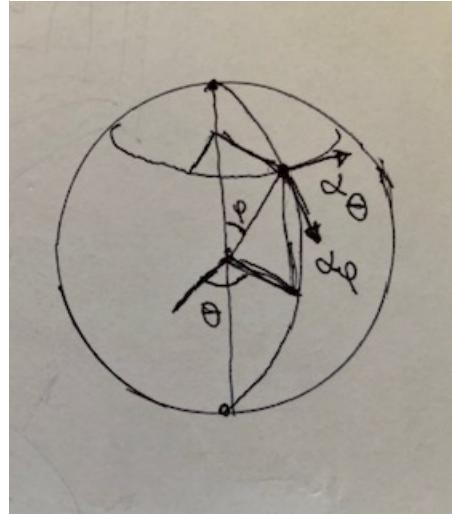


Figura 14: Superfície da esfera

Portanto,

$$A = R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\theta d\varphi = 4\pi R^2.$$

Usaremos a notação  $\int_S f dS$  para denotar a integral da função escalar  $f$  sobre a superfície  $S$ .

**Observação 2.5.** Para que  $\int_S f dS$  faça sentido, é preciso de a função  $f(\alpha(s, t)) |\alpha_s \times \alpha_t|$  seja integrável na região  $R$  de definição dos parâmetros. Se  $f$  for contínua em um aberto envolvendo  $S$ , se  $\alpha$  for de classe  $C^1$  em uma região envolvendo  $R$ , e se  $R$  for um domínio regular, então  $\int_S f dS$  está bem definida. Estas hipóteses podem ser relaxadas, para admitir descontinuidades em conjuntos de medida nula.

### 3 Centro de Massa

Anteriormente, calculamos o centro de massa de uma região plana. Vamos agora discutir centros de massa de corpos no espaço, de curvas no espaço e no plano, e de superfícies bidimensionais. Em todos os casos, vamos assumir que a aceleração da gravidade  $g$  vale 1, e que a densidade do corpo é homogênea e igual a 1.

Consideramos primeiro o caso de corpos tridimensionais. O momento infinitesimal em relação ao plano  $x = x_0$  de uma massa  $dm = dx dy dz$  situada em  $(x, y, z)$  vale

$$dM = (x - x_0) dm = (x - x_0) dx dy dz.$$

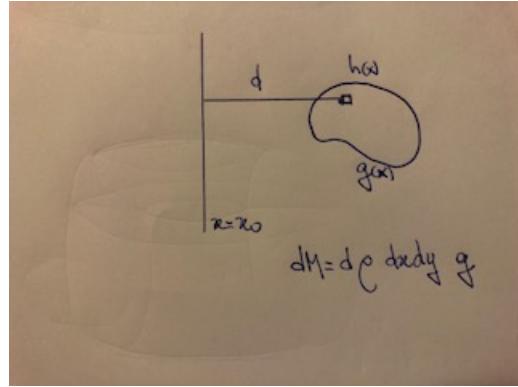


Figura 15: Momento de um corpo

O momento total  $M_{x_0}$  de  $\Omega$  em relação a  $x_0$  vale

$$M_{x_0} = \int_{\Omega} dM = \int_{\Omega} (x - x_0) dx dy dz = \int_{\Omega} x dx dy dz - x_0 |\Omega|.$$

Se o centro de massa está situado em  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , então  $M_{\bar{x}} = 0$ , isto é,

$$\bar{x} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} x dx dy dz. \quad (3.1)$$

Analogamente,

$$\bar{y} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} y dx dy dz, \quad \bar{z} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} z dx dy dz. \quad (3.2)$$

No caso de uma linha  $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ , a massa infinitesimal  $dm$  é igual ao comprimento infinitesimal  $ds$ . Portanto, o momento infinitesimal em relação ao plano  $x = x_0$  de uma massa  $dm$  situada em  $(x, y, z)$  vale  $dM = (x - x_0) ds$  e o momento total  $M_{x_0}$  vale

$$M_{x_0} = \int_{\gamma} (x - x_0) ds = \int_{\gamma} x ds - x_0 |\gamma|,$$

onde  $|\gamma|$  é o comprimento de  $\gamma$ . Então, a coordenada  $\bar{x}$  do centro de massa que torna  $M_{\bar{x}} = 0$  vale

$$\bar{x} = \frac{1}{|\gamma|} \int_{\gamma} x ds. \quad (3.3)$$

Analogamente,

$$\bar{y} = \frac{1}{|\gamma|} \int_{\gamma} y ds, \quad \bar{z} = \frac{1}{|\gamma|} \int_{\gamma} z ds. \quad (3.4)$$

**Exemplo 3.1.** Vamos calcular o centro de massa de um quarto do quarto da circunferência  $x^2 + y^2 = R^2$  situada no primeiro quadrante.

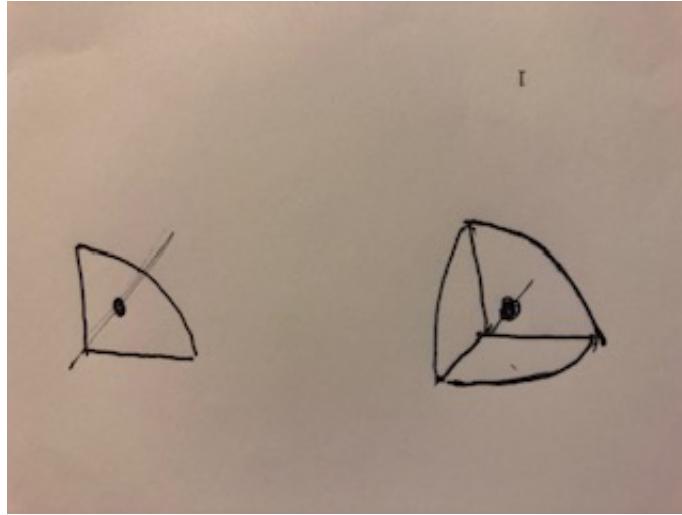


Figura 16: Centro de massa de partes da circunferência, do círculo e da esfera

Neste caso,  $|\gamma| = \frac{\pi R}{2}$ . Parametrizamos  $\gamma$  por  $\alpha(t) = R(\cos t, \sin t)$ ,  $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ . Temos que  $\alpha'(t) = R(-\sin t, \cos t)$ . Então,  $ds = |\alpha'(t)|dt = Rdt$ . Logo,

$$\bar{x} = \frac{4}{\pi R} \int_{\gamma} x ds = \frac{2}{\pi R} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (R \cos t) R dt = \frac{2}{\pi} R.$$

Por simetria  $\bar{x} = \bar{y}$ .

A título de comparação, vamos calcular o centro de massa do quarto de círculo  $x^2 + y^2 \leq R^2$  situado no primeiro quadrante. Neste caso,  $|\Omega| = \frac{\pi R^2}{4}$  e  $\alpha(r, \theta) = r(\cos \theta, \sin \theta)$ ,  $(r, \theta) \in (0, R) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ , parametriza  $\Omega$ . Usando que o jacobiano neste caso vale  $r$ , temos

$$\bar{x} = \frac{4}{\pi R^2} \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r \cos \theta) r d\theta dr = \frac{4}{3\pi} R.$$

Por simetria  $\bar{x} = \bar{y}$ .

Calculemos agora o centro de massa de um oitavo de esfera. Seu volume vale  $|\Omega| = \frac{\pi R^3}{6}$ . Usando coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$ , cujo jacobiano vale  $r^2 \sin \varphi$ , obtemos

$$\bar{x} = \frac{6}{\pi R^3} \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r \sin \varphi \cos \theta r^2 \sin \varphi d\theta d\varphi dr = \frac{3}{8} R.$$

Por simetria  $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$ .

No caso de uma superfície  $S$ , um argumento análogo nos dá

$$M = \int_S (x - \bar{x}) dS = \int_S x dS - \bar{x} |S|,$$

onde  $|S|$  é a área da superfície. Fórmulas análogas valem para  $y$  e para  $z$ . Então, para o centro de massa,

$$\bar{x} = \frac{1}{|S|} \int_S x dS, \quad \bar{y} = \frac{1}{|S|} \int_S y dS, \quad \bar{z} = \frac{1}{|S|} \int_S z dS.$$

**Exemplo 3.2.** Calculemos o centro de massa da superfície esférica  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  situada no primeiro octante. Temos que  $|S| = \frac{\pi R^2}{2}$ , veja o Exemplo 2.4. Então, parametrizando  $S$  por  $R(\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi)$ , temos

$$\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \sin \varphi \cos \theta R^2 \sin \varphi d\theta d\varphi = \frac{1}{2}R$$

## 4 Superfícies de Revolução

Vamos examinar a área de superfícies  $S$  que são obtidas pela revolução em torno do eixo  $\vec{z}$  de uma curva  $\gamma$  situada no plano  $xz$ . Um pedaço infinitesimal  $dl$  de  $\gamma$  a uma distância  $x$  de  $\vec{z}$ , gera uma área infinitesimal  $dS$  igual a  $2\pi x ds$ , onde  $ds$  é o comprimento de  $dl$ .

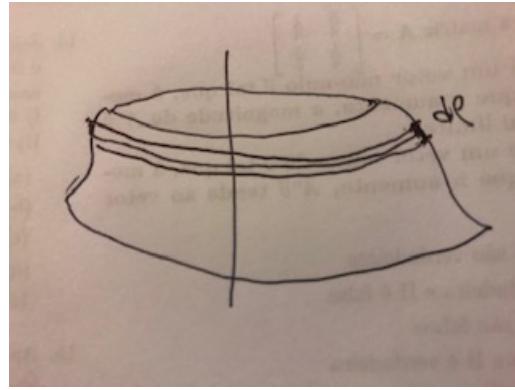


Figura 17: Superfície de Revolução

Então, a área  $|S|$  da superfície vale

$$|S| = 2\pi \int_{\gamma} x dl. \quad (4.1)$$

Usando (3.3), obtemos  $|S| = 2\pi \bar{x} |\gamma|$ .

Podemos então enunciar o **Teorema de Pappus** para superfícies de revolução:

A área da superfície resultante da revolução de uma linha é igual à área gerada pela rotação do centro de linha, quando este centro concentra toda o comprimento da linha.

Vejamos dois exemplos.

**Exemplo 4.1.** Vamos calcular a área  $A$  da superfície do toro obtido pela revolução do círculo de raio  $R$ , cujo centro dista de  $a$  do eixo de revolução. O centro de massa do círculo dista  $a$  do eixo. O comprimento da circunferência é igual a  $2\pi R$ . Usando Pappus,  $A = 2\pi a \times 2\pi R = 4\pi^2 aR$ .

**Exemplo 4.2.** Considere um tronco de cone de altura  $h$ , raio da base inferior  $R$  e raio da base superior  $r$ . Ele é obtido pela rotação de um segmento de reta  $l$ .

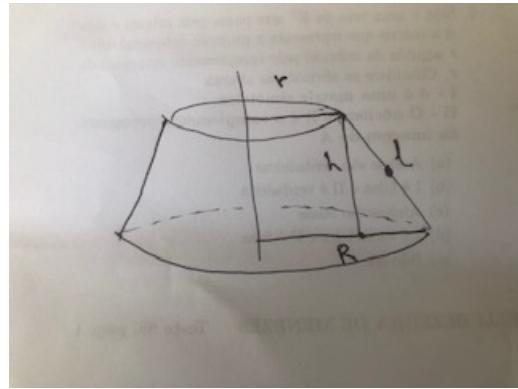


Figura 18: Tronco de cone

Por Pitágoras, o comprimento de  $l$  vale  $|l| = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$ . Além disso, o centro de linha de  $l$  está a uma distância  $\frac{R+r}{2}$  do eixo de rotação. Então,

$$|S| = 2\pi|l|\frac{R+r}{2} = \pi(R+r)\sqrt{h^2 + (R - r)^2}.$$

## 5 Fluxo através de uma superfície

Se  $F = (F_1, F_2, F_3)$  é um campo em  $\mathbb{R}^3$  e  $S$  é uma superfície definimos o **fluxo** de  $F$  através de  $S$  como a integral sobre  $S$  da componente normal de  $F$ . Esta componente normal depende da orientação do campo normal  $\eta$  sobre a superfície, que deverá ser especificada. Se  $\eta$  é unitário, então  $F \cdot \eta$  é a componente normal. Definimos o fluxo como

$$\int_S F d\eta = \int_S F \cdot \eta dS. \quad (5.1)$$

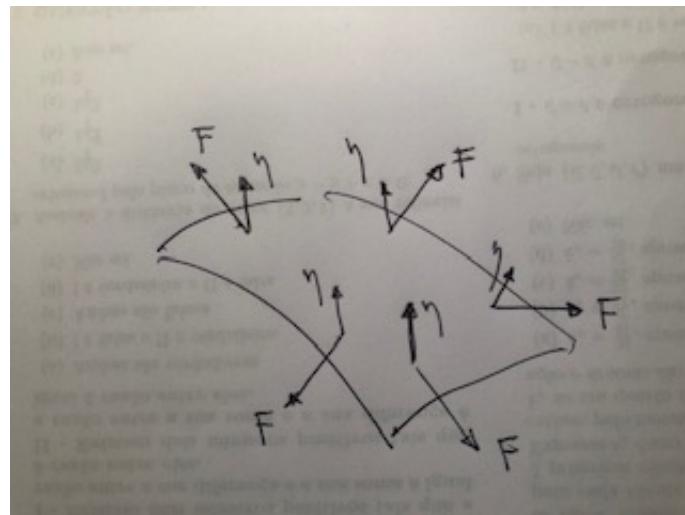


Figura 19: Fluxo de um campo

Façamos as contas. Se  $\alpha : R \rightarrow S$  parametriza  $S$ , então  $\alpha_t \times \alpha_s$  é normal à  $S$ . Assim,

$$\eta = \frac{\alpha_t \times \alpha_s}{|\alpha_t \times \alpha_s|}$$

é um vetor unitário normal. Aplicando (5.1) em (2.2), obtemos a fórmula para o fluxo de um campo  $F$  através de uma superfície  $S$ .

$$\int_S F \cdot d\eta = \int_R F(\alpha(t, s)) \cdot \frac{\alpha_t \times \alpha_s}{|\alpha_t \times \alpha_s|} |\alpha_t \times \alpha_s| dt ds = \int_R F(\alpha(t, s)) \cdot (\alpha_t \times \alpha_s) dt ds. \quad (5.2)$$

No caso particular em que  $S$  é o gráfico da função  $z(x, y)$ , então  $\alpha(x, y) = (x, y, z(x, y))$  parametriza  $S$ , com  $\alpha_x = (1, 0, z_x)$ ,  $\alpha_y = (0, 1, z_y)$  e  $\alpha_x \times \alpha_y = (-z_x, -z_y, 1)$  é a normal que aponta para cima. Neste caso, temos

$$\int_S F \cdot d\eta = \int_R F(x, y, z(x, y)) \cdot (-z_x, -z_y, 1) dx dy = \int_R -F_1 z_x - F_2 z_y + F_3 dx dy. \quad (5.3)$$

**Exemplo 5.1.** Vamos calcular o fluxo do campo constante  $F(x, y, z) = (1, 0, 1)$  através da superfície  $S$  contida no plano  $2x - 2y + z = 0$ , com  $0 < x < 1$ ,  $0 < y < 1$ , veja a Figura 20. Tomamos a normal no sentido de  $(2, -2, 1)$ . Usando (5.3), temos  $z_x = -2$ ,  $z_y = 2$  e  $R = (0, 1) \times (0, 1)$ . Então,

$$\int_S F \cdot d\eta = \int_0^1 \int_0^1 2 - 0 + 1 dx dy = 3.$$

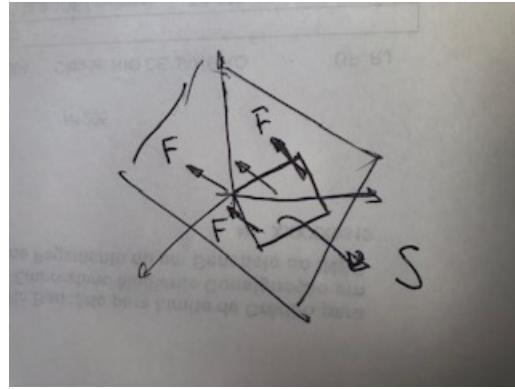


Figura 20: Fluxo de um campo

**Exemplo 5.2.** Considere

$$F(x, y, z) = \frac{1}{r^2} \vec{r} = \frac{1}{r^3} (x, y, z).$$

( $F$  é o campo gravitacional.) Seja  $S_R$  a bola de raio  $R$  dada por  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ . Calculemos o fluxo de  $F$  através de  $S_R$ , tomando o campo normal exterior.

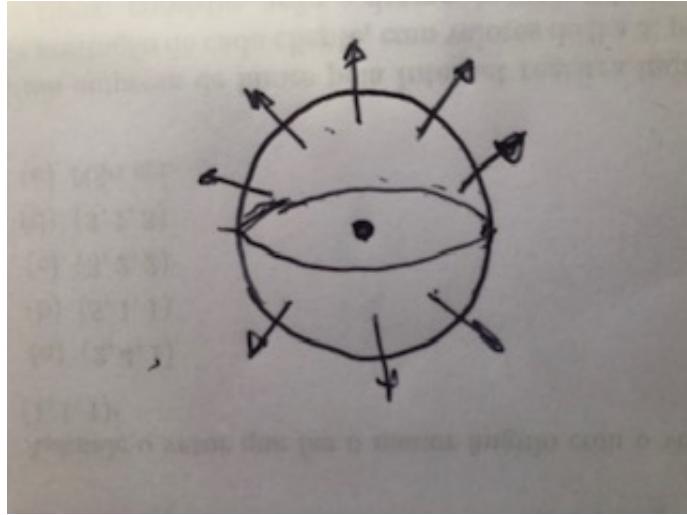


Figura 21: Fluxo do campo gravitacional

Neste caso,  $S_R$  não é o gráfico de uma função, mas  $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$  é a parte superior de  $S_R$ . Então,

$$z_x = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}},$$

$$z_y = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Usando (5.3), temos

$$\begin{aligned} \int_S F \cdot d\eta &= \int_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{1}{R^3} \left( \frac{x^2}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} + \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \right) dx dy = \\ &\quad \frac{1}{R} \int_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy \end{aligned} \tag{5.4}$$

Usamos coordenadas polares, já integrando em  $\theta$ :

$$\frac{1}{R} \int_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{1}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = \frac{2\pi}{R} \int_0^R \frac{1}{\sqrt{R^2 - r^2}} r dr = -\frac{2\pi}{R} \sqrt{R^2 - r^2} \Big|_0^R = 2\pi.$$

A integral da parte inferior da esfera pode ser obtida de forma análoga e também é igual a  $2\pi$ . Portanto, o fluxo total vale  $4\pi$ .

Vamos recalcular o fluxo usando coordenadas esféricas. Neste caso,

$$\alpha(\theta, \varphi) = R(\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi)$$

parametriza  $S_R$  quando  $\theta \in (0, 2\pi)$  e  $\varphi \in (0, \pi)$ . Então,

$$\alpha_\varphi \times \alpha_\theta = R^2 \sin \varphi (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi).$$

Usando a fórmula (5.2), calculamos o fluxo como

$$\begin{aligned} \frac{1}{R^3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R(\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi) \cdot R^2 \sin \varphi (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi) d\theta d\varphi = \\ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\theta d\varphi = 2\pi \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi = 4\pi. \end{aligned}$$

## 6 O Teorema da Divergência

Vamos discutir o Teorema da Divergência no caso  $N = 3$ . Se  $F = (F_1, F_2, F_3)$  é um campo diferenciável em  $\mathbb{R}^3$ , definimos o seu **divergente**  $\nabla \cdot F$  como

$$\nabla \cdot F = \partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 + \partial_3 F_3.$$

O Teorema da divergência também é conhecido como o Teorema de Gauss ou de Gauss-Ostrogadski.

Consideramos inicialmente um campo escalar  $f(x, y, z)$  de classe  $C^1(\mathbb{R}^3)$ . Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  limitada superiormente por  $S_h$ , o gráfico de  $z = h(x, y)$ , e inferiormente por  $S_g$ , o gráfico de  $z = g(x, y)$ , com  $(x, y) \in R$ . Veja a Figura 22.

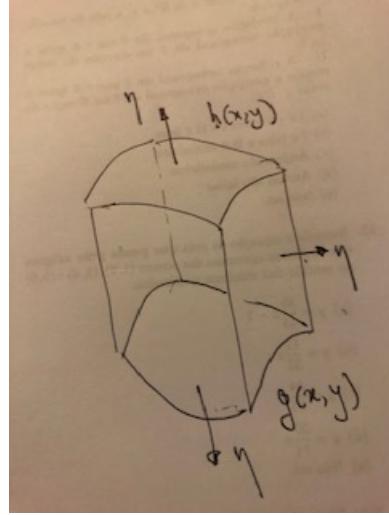


Figura 22: Domínio  $\Omega$

Temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_3 f &= \int_R \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} \partial_3 f(x, y, z) dz dx dy = \\ &= \int_R \int_R f(x, y, h(x, y)) dz dx dy - \int_R \int_R f(x, y, g(x, y)) dz dx dy. \end{aligned}$$

Usando (2.4), escrevemos

$$\int_R \int_R f(x, y, h(x, y)) dz dx dy = \int_R \int_R f(x, y, h(x, y)) \eta_3 \sqrt{1 + |\nabla z|^2} dz dx dy = \int_{S_h} f \eta_3 dS,$$

onde  $\eta_3$  é a terceira componente da normal unitária de  $S_h$  que aponta para o exterior de  $\Omega$ . Na parte inferior  $S_g$ , a terceira componente da normal unitária de  $S_h$  que aponta para o exterior de  $\Omega$  vale  $-\sqrt{1 + |\nabla z|^2}$ . Portanto,

$$-\int_R \int_R f(x, y, g(x, y)) dz dx dy = \int_{S_g} g \eta_3 dS.$$

Assim,

$$\int_{\Omega} \partial_3 f = \int_{S_h \cup S_g} f \eta_3 dS,$$

Observe que o bordo  $S$  de  $\Omega$  é composto por  $S_h$ ,  $S_g$  e  $S_L$ , a parte lateral do bordo. Mas  $\eta_3 = 0$  em  $S_L$ , de modo que  $\int_{S_L} f\eta_3 dS = 0$ . Então,

$$\int_S f\eta_3 dS = \int_{S_h \cup S_g \cup S_L} f\eta_3 dS = \int_{S_h \cup S_g} f\eta_3 dS.$$

Assim,

$$\int_{\Omega} \partial_3 f = \int_S f\eta_3 dS. \quad (6.1)$$

Se  $S$  for definido por gráficos  $x = g(y, z)$  e  $x = h(y, z)$ , obtemos que

$$\int_{\Omega} \partial_1 f = \int_S f\eta_1 dS. \quad (6.2)$$

Se  $S$  for definido por gráficos  $y = g(x, z)$  e  $y = h(x, z)$ , então

$$\int_{\Omega} \partial_2 f = \int_S f\eta_2 dS. \quad (6.3)$$

Dizemos que  $\Omega$  é um domínio simples se nele podemos aplicar as fórmulas (6.1), (6.2) e (6.3). Podemos agora enunciar o

**Teorema 6.1** (Teorema de Gauss). *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  uma região com fronteira  $S$  regular. Seja  $F$  um campo de classe  $C^1$  definido em uma região que contenha  $\bar{\Omega}$ . Então,*

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F = \int_S F \cdot d\eta, \quad (6.4)$$

onde o fluxo é calculado com a normal exterior.

*Demonação.* Suponha que  $\Omega$  seja um domínio simples. Usando (6.2) para  $F_1$ , (6.1) para  $F_2$  e (6.1) para  $F_3$ , obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F = \int_{\Omega} \partial_1 F_1 + \partial_2 F_2 + \partial_3 F_3 = \int_S F_1 \eta_1 + F_2 \eta_2 + F_3 \eta_3 dS = \int_S F \cdot \eta dS = \int_S F \cdot d\eta.$$

No caso de um domínio geral  $\Omega$  regular, escrevemos  $\Omega = \sum_j \Omega_j$ , onde cada  $\Omega_j$  é simples, veja a Figura 23.

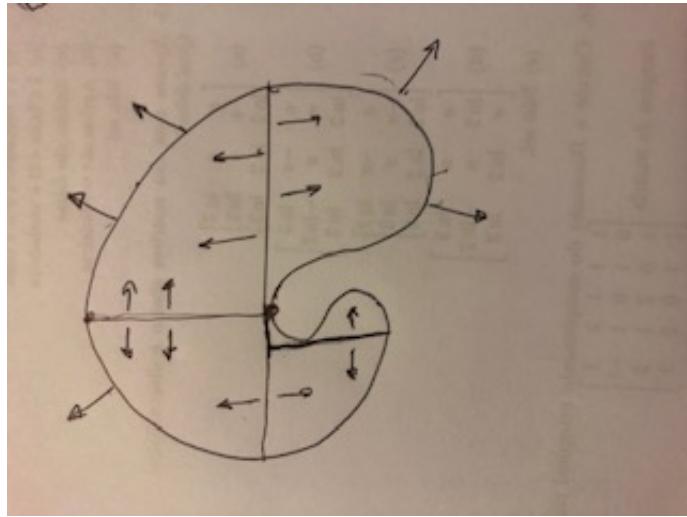


Figura 23: União de domínios simples

Aplicando (6.4) para cada  $\Omega_j$  e somando, obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F = \sum_j \int_{\Omega_j} \nabla \cdot F = \sum_j \int_{S_j} F \cdot d\eta.$$

No lado direito temos que  $\bigcup_j S_j \neq S$ . Mas, as contribuições dos fluxos se anulam em cada parte da fronteira comum de dois domínios simples. Portanto,

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F = \sum_j \int_{S_j} F \cdot d\eta = \int_S F \cdot d\eta.$$

□

**Observação 6.2.** Em uma região de fronteira regular, é possível definir a parte exterior e a parte interior do bordo, de modo que faz sentido falar em normal exterior. Na Figura 24, vemos exemplos de regiões não regulares.

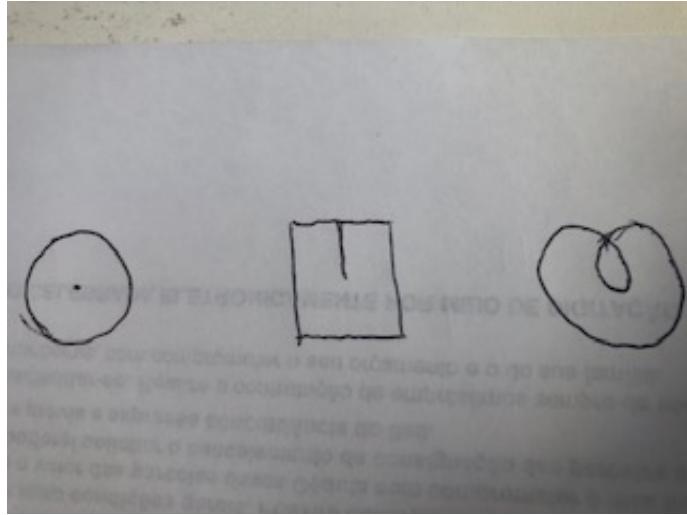


Figura 24: Domínios não-regulares

Suponha que a fronteira  $S$  de  $\Omega$  seja da forma  $S = S_1 \cup S_2$ , onde  $S_1$  é a parte interna de  $\Omega$ , e  $S_2$  a parte externa, como na Figura 25.

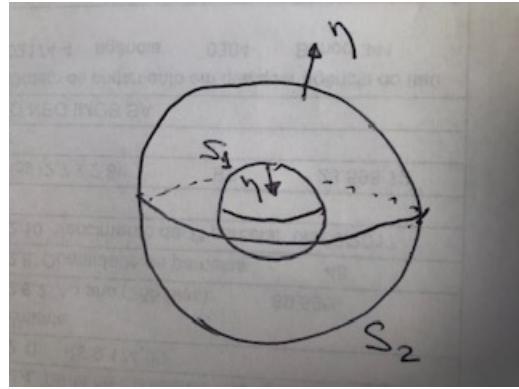


Figura 25: Fronteiras  $S_1$  e  $S_2$

Pelo Teorema de Gauss,

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot F = \int_S F \cdot d\eta = \int_{S_1} F \cdot d\eta + \int_{S_2} F \cdot d\eta.$$

onde a normal aponta para fora de  $\Omega$ . Trocando o sentido da normal em  $S_1$ , escrevemos

$$\int_{S_2} F \cdot d\eta = \int_{S_1} F \cdot d\eta + \int_{\Omega} \nabla \cdot F.$$

Portanto, o divergente  $\nabla \cdot F$  é uma medida da perda , ou ganho, de fluxo entre  $S_1$  e  $S_2$ . Em particular, se o campo é **incompressível** ( $\nabla \cdot F = 0$ ) entre duas superfícies, o fluxo que as atravessam são iguais. Este é o caso do campo elétrico gerado por uma carga  $q$

$$F(x, y, z) = \frac{q}{r^2} \vec{r} = \frac{q}{r^3}(x, y, z).$$

O fluxo através de uma esfera de raio  $R$  vale  $2\pi q$ , veja o Exemplo 5.2. Portanto, o fluxo através de qualquer superfície que envolva a origem vale  $2\pi q$ . E o fluxo através de qualquer superfície que não envolva a origem vale 0.

Considere agora um conjunto de cargas  $q_1, q_2, \dots, q_n$  situadas em pontos  $(x_j, y_j, z_j)$ . O campo elétrico gerado pela carga  $j$  vale

$$F_j = \frac{q_j}{r_j^2} \vec{r}_j,$$

onde  $r_j = (x, y, z) - (x_j, y_j, z_j)$  e  $\vec{r}_j = \frac{\vec{r}_j}{|r_j|}$ . O campo gerado pelas  $n$  cargas vale

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_n.$$

Então, o fluxo  $\mathcal{F}_S$  do campo  $F$  através da uma superfície fechada  $S$  vale a soma dos fluxos de cada  $F_j$ . Pelo que vimos acima, o fluxo de  $F_j$  vale  $4\pi q_j$ , se a carga  $q_j$  está no interior de  $S$ , e vale 0 se a carga está no exterior de  $S_j$ . Assim,

$$\mathcal{F}_S = 4\pi Q_S,$$

onde  $Q_S$  é a **carga total contida no interior de  $S$** .

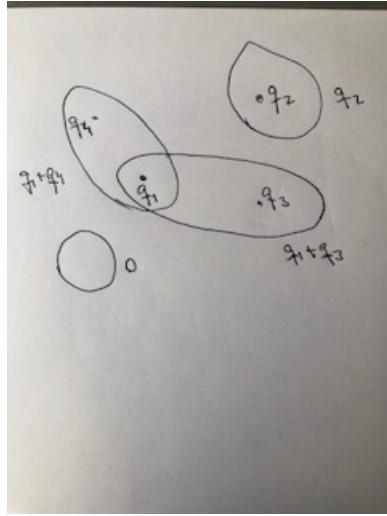


Figura 26: Fluxo gerado por várias cargas

**Observação 6.3.** Se  $f(x)$  é uma função contínua, então

$$\lim_{b \rightarrow a} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(a).$$

Vamos dar três demonstrações deste fato.

*Demonstração 1:* Seja  $F$  uma primitiva de  $f$ . Então, pelo Teorema do Valor Médio,

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{F(b) - F(a)}{b-a} = F'(c) = f(c),$$

onde  $c \in (a, b)$ . Se  $b \rightarrow a$ ,  $f(c) \rightarrow f(a)$ .

*Demonstração 2:*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f(a) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) - f(a) dx.$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , seja  $\delta > 0$  tal que  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  se  $|x - a| < \delta$ . Portanto, se  $|b - a| < \delta$ ,

$$\left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) - f(a) dx \right| \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b |f(x) - f(a)| dx \leq \frac{1}{b-a} \varepsilon (b-a) = \varepsilon.$$

Isto mostra o resultado.

*Demonstração 3:* Seja  $m = \min_{x \in [a,b]} f(x)$  e  $M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$ . Então,  $m \leq f(x) \leq M$ . Logo,

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b m dx \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b M dx = M.$$

Quando  $b \rightarrow a$ ,  $m, M \rightarrow f(a)$ . Segue o resultado, pelo Teorema do Sanduíche.

Resultado análogo ocorre em

Rn. Seja  $f(x, y, z)$  uma função contínua. Considere uma família de abertos  $\Omega$  que vão se comprimindo a um ponto  $\bar{P} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ , como na Figura 27.

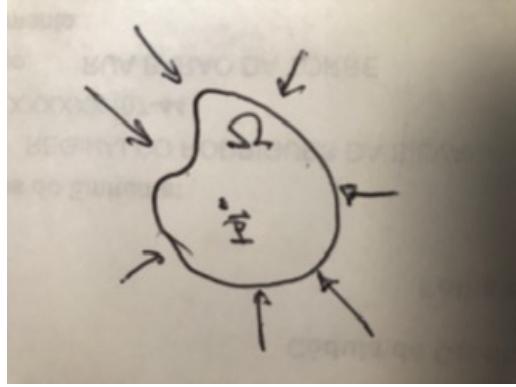


Figura 27:  $\Omega \rightarrow \bar{P}$

Neste caso,

$$\lim_{\Omega \rightarrow \bar{P}} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(x, y, z) dxdydz = f(\bar{P}). \quad (6.5)$$

Para mostrar isto, vamos copiar a demonstração 2 do caso unidimensional. (A demonstração 3 também pode ser copiada.) Suponha que  $|f(x, y, z) - f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})| < \varepsilon$  se  $|(x, y, z) - (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})| < \delta$ . Então,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(x, y, z) dxdydz - f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \right| &= \frac{1}{|\Omega|} \left| \int_{\Omega} (f(x, y, z) - f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})) dxdydz \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f(x, y, z) - f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})| dxdydz \leq \varepsilon, \end{aligned} \quad (6.6)$$

se  $|(x, y, z) - (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})| < \delta$  para todo  $(x, y, z) \in \Omega$ . Isto mostra (6.5).

Aplicando este resultado a  $f = \nabla \cdot F$ , e usando o Teorema de Gauss, obtemos

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_S F \cdot d\eta = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \nabla \cdot F \rightarrow \nabla \cdot F(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \text{ quando } \Omega \rightarrow (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}).$$

Temos então a interpretação do divergente como a **densidade volumétrica de fluxo** (fluxo por volume).

Vamos rediscutir o Teorema da Divergência sob um outro ponto de vista, que será apresentado adiante. Antes, vamos precisar de algumas preliminares.

A primeira observação é quanto às formas n-lineares. Se  $E$  é um espaço vetorial, a função  $M : E^n \rightarrow \mathbb{R}$  é dita uma **forma n-linear** sobre  $E$  se  $M$  é linear em cada uma das  $n$  variáveis. Seja  $\{e_1, \dots, e_m\}$  uma base de  $E$ . Se

$$v_1 = \sum_j v_{1,j} e_j, \quad v_2 = \sum_j v_{2,j} e_j, \quad \dots v_n = \sum_j v_{n,j} e_j,$$

então

$$\begin{aligned} M(v_1, v_2, \dots, v_n) &= M\left(\sum_j v_{1,j} e_j, \sum_j v_{2,j} e_j, \dots, \sum_j v_{n,j} e_j\right) = \\ &= \sum_{j_1} \sum_{j_2} \dots \sum_{j_n} v_{1,j_1} v_{2,j_2} \dots v_{n,j_n} M(e_{j_1}, \dots, e_{j_n}) = \\ &= \sum_{j_1} \sum_{j_2} \dots \sum_{j_n} m_{j_1, j_2 \dots j_n} v_{1,j_1} v_{2,j_2} \dots v_{n,j_n}. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Por exemplo, se  $M$  é uma forma bilinear em  $\mathbb{R}^2$ , então

$$M((a, b), (c, d)) = M(ae_1 + be_2, ce_1 + de_2) = m_{1,1}ac + m_{1,2}ad + m_{2,1}bc + m_{2,2}bd.$$

Se  $f_1, f_2, \dots, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  são  $n$  funções vetoriais contínuas e  $M$  é uma forma n-linear sobre  $\mathbb{R}^m$ , considere a função

$$g(t) = M(f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)).$$

Decorre da expressão (6.7) que  $g$  é contínua. Decorre também que, se as funções forem deriváveis, então  $g$  é derivável e

$$g'(t) = M(f'_1(t), f'_2(t), \dots, f'_n(t)) + M(f_1(t), f'_2(t), \dots, f'_n(t)) + \dots + M(f_1(t), f_2(t), \dots, f'_n(t)).$$

Em particular, se  $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  são funções deriváveis, então  $g(t) = \det(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$  é derivável e

$$g' = \det(f'_1, f_2, f_3) + \det(f_1, f'_2, f_3) + \det(f_1, f_2, f'_3).$$

A segunda preliminar refere-se às **equações diferenciais ordinárias (EDO)**.

## 6.1 EDO

Uma equação diferencial ordinária é uma equação envolvendo uma função  $x(t)$ , o argumento  $t$ , e derivadas de  $x$ . Por exemplo,  $x' = x$ ,  $x' = x^3 + t^2$ ,  $x'' = -x^{-2}$ . As duas primeiras são EDO's de ordem 1, a terceira é uma EDO de ordem 2. As primeiras perguntas naturais são sobre a existência e unicidade de soluções. É de se esperar que não haja unicidade. Por exemplo,  $x(t) = Ce^t$  é solução de  $x' = x$  para todo  $C \in \mathbb{R}$ . Mas é razoável que, dada uma informação suplementar, haja unicidade de solução. Por exemplo, se  $x' = x$  e se  $x(0) = x_0$  é conhecido, então  $x_0 e^t$  é a única solução de  $x' = x$ .

No entanto, considere a EDO  $x' = \sqrt{x}$ , com  $x(0) = 0$ . Então  $x(t) = 0$  é solução, mas  $x(t) = t^2/4$  também é solução. Um resultado de existência e unicidade (de Picard) para um sistemas de EDO's é o seguinte:

Seja  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $F(t, x)$  uma função contínua em  $t$  e Lipschitz contínua em  $x$ . Então, o sistema

$$\begin{cases} \varphi'(t) = F(t, \varphi(t)), \\ \varphi(0) = x. \end{cases} \quad (6.8)$$

tem solução única em um intervalo  $(t_1, t_2)$  contendo 0. Notação:  $\varphi(t, x)$  ou  $\varphi^t(x)$ . Pela unicidade da solução, vale que  $\varphi^t \circ \varphi^s = \varphi^{t+s}$ . Em particular,  $\varphi^t \circ \varphi^{-t} = I$ .

O Teorema de Picard é um resultado local. Não se pode esperar, em geral, que a solução exista para todo  $t \in \mathbb{R}$ , como mostra o exercício a seguir.

**Exercício 6.4.** Considere a EDO

$$\begin{cases} x'(t) = x^2, \\ x(0) = 1. \end{cases} \quad (6.9)$$

Mostre que a solução é dada por  $x(t) = (1-t)^{-1}$ , de modo que  $x(t) \rightarrow \infty$  quando  $t \rightarrow 1$ .

## 6.2 O Teorema de Divergência - parte 2

Considere agora um campo  $F(x, y, z)$  em  $\mathbb{R}^3$ , que vamos pensar que seja um campo de velocidades. Uma região  $R_0$  ocupará a posição  $R(t)$  ao se deslocar no tempo sob a ação de  $F$ . Qual é a variação  $dV$  do volume  $V(t)$  de  $R(t)$ ? Se  $dS$  é um pedaço infinitesimal de  $S_0$ , sua contribuição à variação de volume em um intervalo  $dt$  é dada por  $F_\eta dt dS = F \cdot \eta dt ds$ , veja a Figura 28.

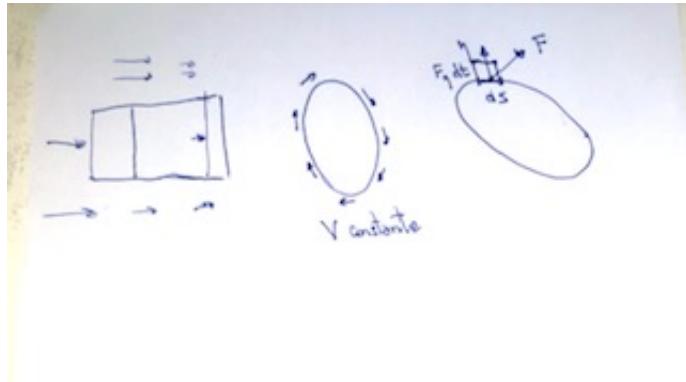


Figura 28: Variação de volume

Então, a variação total de volume durante o intervalo  $dt$  vale  $dV = \int_S F_\eta dt dS = (\int_S F \cdot d\eta dS) dt$ . Assim, se  $S_0$  é a fronteira de  $R_0$ ,

$$V'(0) = \frac{dV}{dt} = \int_{S_0} F \cdot d\eta. \quad (6.10)$$

Por outro lado, a trajetória  $\varphi(t)$  de cada ponto que parte de  $x \in R_0$  é dada pela EDO

$$\begin{cases} \varphi'(t) = F(\varphi(t)), \\ \varphi(0) = x. \end{cases} \quad (6.11)$$

Denotamos por  $\varphi^t(x)$  a solução da EDO. Então,  $R(t) = \varphi^t(R_0)$  e

$$V(t) = \int_{R(t)} 1 \, dx dy dz = \int_{R_0} |J_{\varphi^t}| \, dx dy dz,$$

e

$$V'(t) = \frac{d}{dt} \int_{R(t)} 1 \, dx dy dz = \int_{R_0} |J_{\varphi^t}| \, dx dy dz.$$

Extraímos a seguir os cálculos do livro texto do curso, que mostram que  $J_{\varphi^t} > 0$  e que

$$V'(0) = \int_{R_0} \nabla \cdot F.$$

Usando (6.10), obtemos o Teorema da Divergência.

**Observação:** Não vamos provar isto, mas  $\varphi^t$  é de classe  $C^1$ . Como vale  $\varphi^t \circ \varphi^{-t}$   $= \varphi^{-t} \circ \varphi^t = I$ , temos  $J_{\varphi^t} \neq 0 \quad \forall t$ . Além disso,  $J_{\varphi^t}$  depende continuamente de  $t$ . Como  $J_{\varphi^0} = J_I = 1$ , temos  $J_{\varphi^t} > 0 \quad \forall t$ .

Proseguindo, temos

$$\begin{aligned} V'(t) &= \frac{d}{dt} \int_{R_0} \det \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t, x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(t, x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}(t, x) \right) dx = \\ &= \int_{R_0} \det \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_1 \partial x_2}(t, x), \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_2 \partial x_3}(t, x), \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x_3 \partial x_1}(t, x) \right) dx + \\ &\quad + \int_{R_0} \det \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t, x), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2 \partial x_3}(t, x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}(t, x) \right) dx + \\ &\quad + \int_{R_0} \det \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t, x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(t, x), \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_3 \partial x_1}(t, x) \right) dx. \end{aligned}$$

Mas  $\frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x) = F(\varphi(t, x))$ . Portanto,

$$V'(t) = \int_{R_0} \det \left( \frac{\partial F(\varphi(t, x))}{\partial x_1}(t, x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(t, x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}(t, x) \right) dx +$$

$$\begin{aligned} V'(t) &= \int_{R_0} \det \left( \frac{\partial F(\varphi(t, x))}{\partial x_1}(t, x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(t, x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}(t, x) \right) dx + \\ &\quad + \int_{R_0} \det \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t, x), \frac{\partial F(\varphi(t, x))}{\partial x_2}(t, x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}(t, x) \right) dx + \\ &\quad + \int_{R_0} \det \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}(t, x), \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}(t, x), \frac{\partial F(\varphi(t, x))}{\partial x_3}(t, x) \right) dx. \end{aligned}$$

Observemos ainda que  $\varphi(0, x) \equiv x$ , donde  $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(0, x) = e_i$ . Logo,

$$\begin{aligned} V'(0) &= \int_{R_0} \left[ \det \left( \frac{\partial F(x)}{\partial x_1}, e_2, e_3 \right) + \det \left( e_1, \frac{\partial F(x)}{\partial x_2}, e_3 \right) + \det \left( e_1, e_2, \frac{\partial F(x)}{\partial x_3} \right) \right] = \\ &= \int_{R_0} \left[ \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3(x)}{\partial x_3} \right] dx . \end{aligned}$$

Escrivendo

$$\nabla \cdot F(x) = \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2(x)}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3(x)}{\partial x_3}$$

e igualando os dois valores obtidos para  $V'(0)$ , deduzimos o Teorema de Gauss-Ostrográdski:

$$\int_{S_0} F \cdot d\vec{s} = \int_{R_0} \nabla \cdot F.$$

$\nabla \cdot F$  é chamado de divergência de  $F$ .

Observação: No termo à esquerda a normal a  $S_0$  “aponta para fora”. É importante ainda salientar que a dedução acima não é uma demonstração: calculamos  $V'(0)$  e obtivemos  $V'(0) = \int_{R_0} \nabla \cdot F$ ; mas a igualdade  $V'(0) = \int_{S_0} F \cdot d\vec{S}$  resultou apenas do “significado físico” de  $\int_{S_0} F \cdot d\vec{S}$ .

## 7 O campo e o potencial gravitacional

Seja  $F = (F_1, F_2, F_3)$  um campo de forças em  $\mathbb{R}^3$  e considere uma partícula de massa  $m$  que se move sob a ação do campo  $F$ . Seja  $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$  a posição da partícula em cada instante. A segunda Lei de Newton diz que  $X(t)$  satisfaz a sistema de EDO's de segunda ordem

$$m\ddot{X}(t) = F(X(t)),$$

isto é,

$$m\ddot{x} = F_1, \quad m\ddot{y} = F_2, \quad m\ddot{z} = F_3.$$

Suponha que  $F$  seja um campo conservativo, isto é, suponha que  $F = \nabla G$ . Multiplicando a equação por  $\dot{X}$ , temos

$$m\ddot{X}(t) \cdot \dot{X}(t) = \nabla G(X(t)) \cdot \dot{X}(t) = \frac{d}{dt}G(X(t)),$$

Note que

$$\frac{d}{dt}|\dot{X}|^2 = \frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 2(\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}) = 2\dot{X} \cdot \ddot{X}.$$

Assim,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (m|\dot{X}|^2 - G(X)) = 0,$$

ou seja

$$\frac{1}{2}m|\dot{X}|^2 - G(X) = C.$$

Em Física,  $\frac{1}{2}m|\dot{X}|^2$  é a **energia cinética** da partícula e  $U = -G$  é a **energia potencial** do campo  $F$ . Portanto, quando o campo é conservativo, a soma das suas energias cinética e potencial é constante ao longo da trajetória da partícula.

Vamos discutir alguns campos de força conservativos importantes. Começamos com o campo elétrico (gravitacional) gerado por uma carga  $q$  situada na origem,

$$F(X) = \frac{q}{r^2} \vec{r},$$

onde  $r = |X|$  e  $\vec{r} = \frac{X}{r}$ .  $F$  é um campo radial em  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Portanto,  $F$  é conservativo, com

$$G(r) = -\frac{q}{r}.$$

(E potencial  $U = -G$ .) Além disso,  $F$  é incompressível (ou **solenoidal**), isto é,  $\nabla \cdot F = 0$  em  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ .

O campo gerado por  $n$  cargas  $q_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , situadas nos pontos  $X_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , vale

$$F(X) = \sum_j \frac{q_j}{r_j^2} \vec{r}_j,$$

onde  $r_j = |X - X_j|$  e  $\vec{r} = \frac{X - X_j}{r_j}$ . Neste caso,  $F$  não é radial, mas é conservativo e solenoidal, como soma de campos conservativos e solenoidais. O potencial  $G$  de  $F$  é a soma dos potenciais  $G_j$

$$G = -\sum_j \frac{q_j}{r_j}.$$

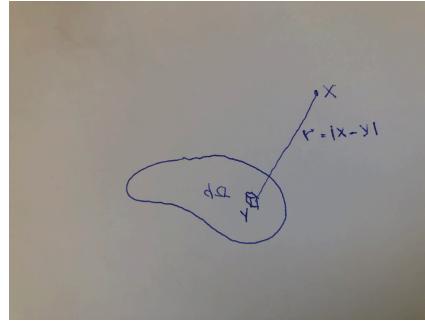
(Verifique isto!)

Vamos discutir o que ocorre com os campos obtidos por um contínuo de cargas, distribuídas em regiões, uni e tri dimensionais.

## 7.1 Campos gerados por distribuições contínuas

Seja  $\Omega$  uma região limitada de  $\mathbb{R}^3$ , com uma distribuição contínua de cargas, de densidade  $\rho(u, v, w)$  em cada ponto. A carga  $dq$  contida em um volume infinitesimal  $d\Omega$  de volume  $dV$  vale

$$dq = \rho dV = \rho dudvdw.$$



A força  $dF$  exercida por  $d\Omega$  em um ponto  $X \notin \Omega$  vale

$$dF = \frac{dq}{r^2} \vec{r} = \frac{\rho}{r^2} \vec{r} dV = \frac{\rho}{r^2} \vec{r} dudvdw.$$

onde  $r$  é a distância de  $d\Omega$  a  $X$ . Então,

$$F = \int_{\Omega} dF = \int_{\Omega} \frac{\rho}{r^2} \vec{r} dudvdw.$$

Isto significa

$$F(X) = \int_{\Omega} \frac{\rho(u, v, w)}{|(x, y, z) - (u, v, w)|^3} (x - u, y - v, z - w) dudvdw.$$

(Observe que a integral acima é uma integração vetorial, que pode ser decomposta em três integrações escalares.)

Podemos nos perguntar se o campo  $F$  é conservativo. Parece razoável que a resposta seja sim, como soma (contínua) de campos conservativos. Se isto for verdade, o potencial  $G$  do campo  $F$  é a soma dos potenciais infinitesimais gerados por

$$dG = -\frac{dq}{r} = -\frac{\rho}{r} dV.$$

Então,

$$G(X) = \int_{\Omega} dG = - \int_{\Omega} \frac{\rho}{r} dV = - \int_V \frac{\rho(u, v, w)}{|(x, y, z) - (u, v, w)|} dudvdw.$$

Formalmente,

$$\nabla G = \nabla \left( - \int_{\Omega} \frac{\rho}{r} dV \right) = - \int_{\Omega} \nabla \frac{\rho}{r} dV = \int_{\Omega} \frac{\rho}{r^2} dV = F.$$

Estas contas são justificadas se  $X \notin \Omega$ , pois neste caso  $r$  está longe de 0.

No caso particular de corpos homogêneos, de densidade  $\rho$ , temos

$$F(X) = \rho \int_{\Omega} \frac{1}{r^2} \vec{r} dudvdw,$$

$$G(X) = -\rho \int_{\Omega} \frac{1}{r} dudvdw.$$

Veremos abaixo que estas fórmula fazem sentido mesmo para pontos  $X \in \Omega$ .

No caso de distribuição de cargas ao longo de curvas  $\gamma$  ou sobre superfícies  $S$ , obtemos as fórmulas

$$F(X) = \int_{\gamma} \frac{\rho}{r^2} \vec{r} ds, \quad G(X) = - \int_{\gamma} \frac{\rho}{r} ds$$

e

$$F(X) = \int_S \frac{\rho}{r^2} \vec{r} dS, \quad G(X) = - \int_S \frac{\rho}{r} dS.$$

## 7.2 Campos gerados por curvas

Comecemos com o caso de uma distribuição de densidade uniforme  $\rho$  de cargas ao longo de um segmento de reta  $\gamma$  de comprimento  $l$ . Neste caso, a carga total contida em  $\gamma$  vale  $Q = \rho l$ . Calculemos a força exercida por  $\gamma$  no ponto  $P$  da Figura 29, distando  $d$  da origem. Um segmento infinitesimal  $dx$  tem carga igual a  $\rho dx$ . Se ele está situado em  $x$ , a força que ele exerce sobre  $P$  vale  $\frac{\rho dx}{(d-x)^2}$ . A força é um vetor, mas neste caso só a componente horizontal é de interesse, e trataremos  $F$  como uma escalar.

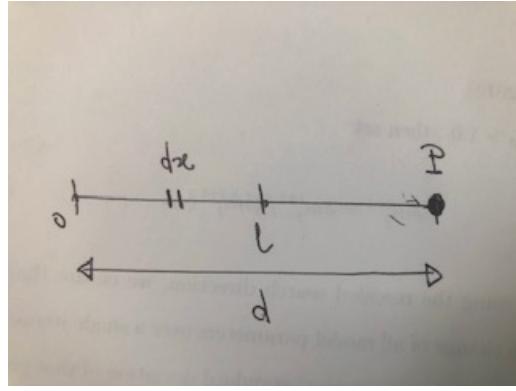


Figura 29: Campo gerado por  $\gamma$

Portanto,

$$F(d) = \rho \int_0^l \frac{dx}{(d-x)^2} dx = \rho \frac{1}{d-x} \Big|_0^l = \rho \left( \frac{1}{d-l} - \frac{1}{d} \right) = \rho l \frac{1}{d(d-l)} = Q \frac{1}{d(d-l)}. \quad (7.1)$$

Seja  $c = \sqrt{d(d-l)}$ , a média geométrica entre a maior e a menor distância de  $P$  ao segmento. Então,

$$F(d) = \frac{Q}{c^2}.$$

Ou seja,  $F(d)$  é igual ao campo gerado por um ponto situado em  $c$  e contendo toda a carga  $Q$  de  $\gamma$ . Observe que  $c \approx d$  quando  $d$  é grande. Isto significa que o ponto equivalente pode se situar fora de  $\gamma$ !

Se o ponto está situado à esquerda, a uma distância  $d$  da origem, o campo é negativo e vale

$$F(d) = -Q \frac{1}{d(d+l)}.$$

Ou seja, o campo gerado por  $\gamma$  em  $d$  corresponde ao de uma carga total  $Q$  situada na média geométrica entre  $d$  e  $d-l$ . Quando  $d \rightarrow \infty$  o campo se aproxima daquele gerado por uma carga pontual de intensidade  $Q$ . Note que  $F(d) \rightarrow \infty$  quando  $d \rightarrow l$ . Mas o campo é inversamente proporcional a  $d-l$ , e não ao seu quadrado! Este é o campo elétrico no exterior de  $\gamma$ .

O potencial  $G$  associado a  $\gamma$  é dado por

$$G(d, y) = -\rho \int \frac{1}{r(x)} dx = -\rho \int_0^l \frac{1}{\sqrt{(d-x)^2 + y^2}} dx.$$

Se  $y = 0$  e  $d > l$ ,

$$G(d, 0) = -\rho \int_0^l \frac{1}{d-x} dx = \rho \log(d-x) \Big|_0^l = \rho(\log(d-l) - \log d). \quad (7.2)$$

Portanto, a componente horizontal  $F_1$  de  $F$  vale

$$F_1(d) = \partial_1 G(d, 0) = \rho \left( \frac{1}{d-l} - \frac{1}{d} \right) = Q \frac{1}{d(d-l)},$$

como já havíamos obtido em (7.1). Se  $y \neq 0$ , fazemos  $\tan \theta = \frac{x-d}{y}$ . Então,  $dx = y \sec^2 \theta d\theta$  e  $\sec \theta = \frac{\sqrt{y^2 + (x-d)^2}}{|y|}$ . Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{(d-x)^2 + y^2}} dx &= \int \frac{1}{\sec \theta} \theta d\theta = \log |\sec \theta + \tan \theta| = \log \left| \frac{x-d + \sqrt{y^2 + (x-d)^2}}{y} \right| = \\ &\quad \log |x-d + \sqrt{y^2 + (x-d)^2}| - \log |y| \end{aligned} \tag{7.3}$$

Portanto,

$$G(d, y) = -\rho \log |x-d + \sqrt{y^2 + (x-d)^2}| \Big|_0^l = \rho \log \left| \frac{l-d + \sqrt{y^2 + (l-d)^2}}{\sqrt{y^2 + d^2} - d} \right|. \tag{7.4}$$

O que acontece quando  $y \rightarrow 0$ ? Temos que  $\sqrt{1+z} \approx 1 + \frac{z}{2}$  quando  $z \approx 0$ . Então,

$$\sqrt{y^2 + d^2} - d = d \left( \sqrt{1 + (y/d)^2} - 1 \right) \approx \frac{y^2}{2d},$$

$$l-d + \sqrt{y^2 + (l-d)^2} = l-d + |l-d| \sqrt{1+y/|l-d|^2} \approx l-d + |l-d| + \frac{y^2}{2|l-d|}.$$

Se  $d > l$ ,

$$l-d + \sqrt{y^2 + (l-d)^2} \approx \frac{y^2}{2(d-l)},$$

de modo que

$$\frac{l-d + \sqrt{y^2 + (l-d)^2}}{\sqrt{y^2 + d^2} - d} \approx \frac{d-l}{d}.$$

Então, usando (7.4),

$$G(d, y) \xrightarrow[y \rightarrow 0]{} \rho \log \left| \frac{d-l}{d} \right|,$$

veja (7.2).

Se  $0 < d < l$ , então

$$l-d + |l-d| + \frac{y}{2|l-d|} = 2(l-d) + \frac{y}{2(l-d)} \xrightarrow[y \rightarrow 0]{} 2(l-d).$$

Como o denominador em (7.4) tende a zero, vemos que, para  $0 < d < l$ ,  $G(d, y) \rightarrow \infty$  se  $y \rightarrow 0$ . O potencial não pode ser definido no interior do fio.

Podemos definir o campo elétrico no interior de  $\gamma$ ? Com a notação da Figura 30, consideramos o campo  $F_\delta$  gerado em  $d$  por  $\gamma_\delta = \gamma \setminus (d-\delta, d+\delta)$ .

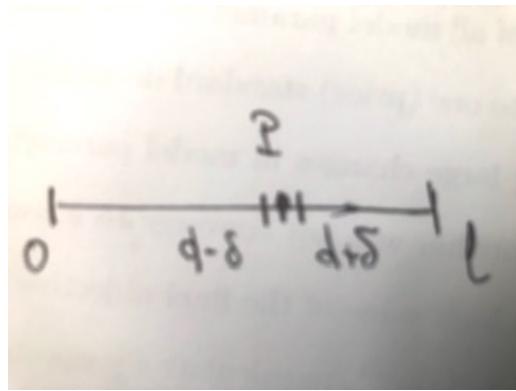


Figura 30: Campo gerado por  $\gamma$

Usando o que aprendemos acima,

$$F_\delta(d) = \rho(d - \delta) \frac{1}{d\delta} - \rho(l - d - \delta) \frac{1}{\delta(l - d)} = \rho \left( \frac{1}{l - d} - \frac{1}{d} \right) = \rho \frac{2d - l}{d(l - d)}.$$

$F_\delta$  não depende de  $\delta$  e o limite está bem definido. Este é o chamado **valor principal** de  $F$ . No entanto, seja  $F_\delta$  o campo obtido ao retirarmos um pedaço de tamanho  $\delta$  à esquerda, e outro pedaço de tamanho  $2\delta$  à direita. Neste caso, ao fazermos  $F_\delta \rightarrow \infty$  quando  $\delta \rightarrow 0$ . O campo  $F$  não pode ser definido no interior de  $\gamma$ .

**Observação 7.1.** Esta situação é análoga ao caso da integrabilidade da função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < x < 1, \\ 0, & x = 0, \\ -\frac{1}{x}, & -1 < x < 0. \end{cases} \quad (7.5)$$

Neste caso,  $\int f^+ = \int f^- = \infty$ , de modo que  $f$  não é integrável. Mas,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{(-1, -\delta)} f + \int_{(\delta, 1)} f = 0.$$

Então, o **valor principal** de  $\int_{(-1, 1)} f$  é zero.

Calculemos agora o campo gerado por  $\gamma$  em um ponto  $P$  situado sobre sua mediatrix, a uma distância  $d$  de  $\gamma$ , como na Figura 31.

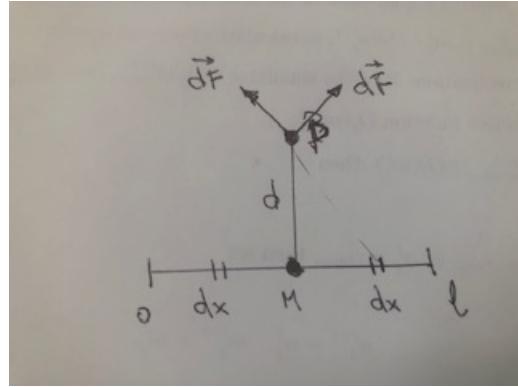


Figura 31: Campo gerado por  $\gamma$

O campo gerado por um segmento  $dx$  situado em  $x$  satisfaz

$$|d\vec{F}| = \rho dx \frac{1}{d^2 + (x - \frac{l}{2})^2}.$$

Por simetria, a componente horizontal de  $d\vec{F}$  é nula. A componente vertical vale

$$dF = |d\vec{F}| \cos \alpha = \rho dx \frac{1}{d^2 + (x - \frac{l}{2})^2} \cos \alpha.$$

Temos que

$$\cos \alpha = \frac{d}{\sqrt{d^2 + (x - \frac{l}{2})^2}}.$$

Logo,

$$dF = \rho \frac{d}{\left(d^2 + (x - \frac{l}{2})^2\right)^{\frac{3}{2}}} dx. \quad (7.6)$$

Então,

$$F(d) = \rho d \int_0^l \frac{1}{\left(d^2 + (x - \frac{l}{2})^2\right)^{\frac{3}{2}}} dx.$$

Com a mudança de variáveis  $d \tan \theta = (x - \frac{l}{2})$ , temos que  $dx = d \sec^2 \theta d\theta$ . Se  $b = \arctan \frac{l}{2d}$ , então  $\sin b = \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4d^2}}$  e

$$F(d) = \frac{\rho}{d} \int_{-b}^b \cos \theta d\theta = \frac{2\rho}{d} \sin b = \frac{2\rho}{d} \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4d^2}} = Q \frac{1}{d \sqrt{d^2 + (\frac{l}{2})^2}}.$$

Mais uma vez,  $\gamma$  se comporta como se toda a carga estivesse concentrada na média geométrica entre a maior e a menor distância do ponto  $P$  a  $\gamma$ . Observe que  $F(d) \rightarrow \infty$  se  $d \rightarrow 0$ , reforçando a ideia de que  $F$  não pode ser definido de forma razoável em  $\gamma$ .

Consideremos agora um fio infinito, com distribuição uniforme de cargas, de densidade  $\rho$ . Neste caso, (7.6) permanece válido e

$$F(d) = \rho d \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(d^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{2\rho}{d}.$$

**Exercício 7.2.** Mostre que o campo gerado por uma placa infinita com densidade de carga homogênea é constante.

**Exercício 7.3.** Considere  $\gamma$  a circunferência  $x^2 + y^2 = R^2$ . Determine o campo nos pontos do plano  $xy$ , no exterior e no interior de  $\gamma$ .

### 7.3 Campo gerado por uma esfera

Suponha que superfície esférica  $S$  dada por  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  tenha uma densidade de carga  $\rho$  constante. Vamos determinar o campo gerado por  $S$  no ponto  $P$  da Figura 32.

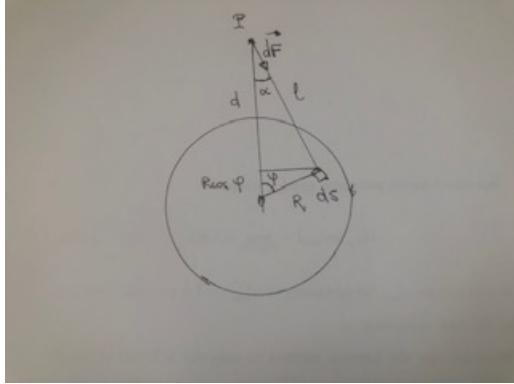


Figura 32: Campo gerado pela esfera

O campo  $d\vec{F}$  gerado pela superfície infinitesimal  $dS$  vale  $dQ \frac{1}{l^2} \vec{l}$ , onde

$$dQ = \rho dS = \rho R^2 \sin \varphi d\theta d\varphi$$

é a carga contida em  $dS$  e  $\vec{l}$  é o vetor unitário na direção que une  $dS$  a  $P$ . Portanto,

$$|d\vec{F}| = \frac{\rho R^2}{l^2} \sin \varphi d\theta d\varphi.$$

Por simetria, basta computar a componente radial de  $|d\vec{F}|$ , dada por  $dF = |d\vec{F}| \cos \alpha$ , onde  $\cos \alpha = \frac{d - R \cos \varphi}{l}$ , veja a Figura 32. Logo,

$$dF = |d\vec{F}| \cos \alpha = \frac{\rho R^2}{l^2} \sin \varphi \frac{d - R \cos \varphi}{l} d\theta d\varphi = \frac{\rho R^2}{l^3} \sin \varphi (d - R \cos \varphi) d\theta d\varphi.$$

Temos que  $l^2 = R^2 + d^2 - 2Rd \cos \varphi$ . Portanto,

$$\begin{aligned} F(d) &= \int_S dF = \rho R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{d - R \cos \varphi}{(R^2 + d^2 - 2Rd \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}} \sin \varphi d\theta d\varphi = \\ &= 2\pi \rho R^2 \int_0^\pi \frac{d - R \cos \varphi}{(R^2 + d^2 - 2Rd \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}} \sin \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Para calcular a integral acima, fazemos a mudança de variáveis

$$t = \sqrt{R^2 + d^2 - 2Rd \cos \varphi}.$$

Então,

$$t^2 = R^2 + d^2 - 2Rd \cos \varphi \implies t dt = R d \sin \varphi d\varphi.$$

Além disso,

$$d - R \cos \varphi = d - \frac{R^2 + d^2 - t^2}{2d} = \frac{d^2 - R^2 + t^2}{2d}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\varphi = 0 &\implies t = \sqrt{R^2 + d^2 - 2Rr} = |R - d|, \\ \varphi = \pi &\implies t = \sqrt{R^2 + d^2 + 2Rr} = R + d.\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}F(d) &= 2\pi\rho R^2 \int_0^\pi \frac{d - R \cos \varphi}{(R^2 + d^2 - 2Rd \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}} \sin \varphi d\varphi = \\ &2\pi\rho R^2 \int_{|R-d|}^{R+d} \frac{d^2 - R^2 + t^2}{2dt^3} \frac{t}{Rd} dt = \\ &\frac{\pi R}{d^2} \int_{|R-d|}^{R+d} \frac{d^2 - R^2}{t^2} + 1 dt = \frac{\pi R}{d^2} \left( \frac{R^2 - d^2}{t} + t \right) \Big|_{|R-d|}^{R+d}.\end{aligned}$$

No caso em que  $d \geq R$ ,

$$\begin{aligned}F(d) &= \frac{\pi R \rho}{d^2} \left( \frac{R^2 - d^2}{R + d} - \frac{R^2 - d^2}{d - R} + 2R \right) = \frac{\pi R \rho}{d^2} (R - d + d + R + 2R) = \\ &\frac{4\pi R^2 \rho}{d^2} = \frac{Q}{d^2},\end{aligned}\tag{7.7}$$

onde  $Q = 4\pi R^2 \rho$  é a carga total contida em  $S$ . Se  $d < R$ ,

$$F(d) = \frac{\pi R \rho}{d^2} \left( \frac{R^2 - d^2}{R + d} - \frac{R^2 - d^2}{R - d} + 2d \right) = \frac{\pi R \rho}{d^2} (R - d - R - d + 2d) = 0.$$

Observe que  $F$  está definido sobre  $S$ . Em particular, o trabalho (integral de linha de  $F$ ) para levar uma carga até à superfície da esfera é finito.

## 7.4 Campos gerados por volumes

Considere agora  $\Omega$  a esfera  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  e suponha que ela esteja carregada eletricamente com uma distribuição uniforme de densidade  $\rho$ . Temos

$$F(d) = \int_{\Omega} dF = \int_0^R \int_{S_r} dF.$$

onde  $S_r$  é a superfície da esfera de raio  $r$ . Suponha que  $d > R$ . Neste caso,  $d > r$  para todo  $r < R$  e  $S_r$  tem carga  $Q_r = 4\pi r^2 \rho$ . Usando (7.7), temos

$$F(d) = \frac{4\pi \rho}{d^2} \int_0^R r^2 = \frac{4\pi R^3 \rho}{3d^2} = \frac{Q}{d^2},$$

onde  $Q$  é a carga total contida na esfera. Se  $d < R$ ,

$$F(d) = \frac{4\pi \rho}{d^2} \int_0^d r^2 dr = \frac{4\pi}{3} \rho d.$$

Em resumo, o campo gerado pela esfera de raio  $R$  satisfaz  $\vec{F}(r) = F(r) \vec{r}$ , onde

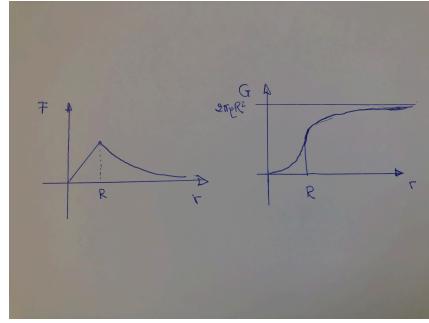
$$F(r) = \begin{cases} \frac{4\pi \rho}{3} r, & r < R \\ \frac{4\pi \rho R^3}{3r^2}, & r > R. \end{cases}$$

Ou seja,

$$\vec{F}(r) = \begin{cases} \frac{4\pi\rho}{3}(x, y, z), & r < R \\ \frac{4\pi\rho R^3}{3r^3}(x, y, z), & r > R. \end{cases}$$

Note que  $F$  vale zero na origem. Note também que  $F(R) = \frac{4\pi\rho}{3}R\vec{R}$  torna  $F$  contínua em  $R$ . Portanto  $F$  está definido em todo  $\mathbb{R}^3$ , é contínuo e é radial. O potencial  $G(r)$  é a primitiva de  $F$  dada por

$$G(r) = \begin{cases} \frac{2\pi\rho}{3}r^2, & r \leq R, \\ 2\pi\rho R^2 - \frac{4\pi\rho R^3}{3r}, & r > R. \end{cases}$$



O divergente de  $F$  satisfaz

$$\nabla \cdot F(r) = \begin{cases} 0, & r > R, \\ 4\pi\rho, & r < R. \end{cases} \quad (7.8)$$

Usando o Teorema da Divergência, obtemos o seguinte resultado sobre o campo  $F$  gerado por uma distribuição uniforme de cargas em uma esfera: o fluxo de  $F$  através de uma superfície fechada  $S$  é igual a 4π vezes a carga contida no interior de  $S$ .

Consideremos agora  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  uma região limitada, com uma distribuição uniforme de cargas. O campo  $F$  de forças gerado por  $\Omega$  está bem definido no exterior de  $\bar{\Omega}$  e vale

$$F = \rho \int_{\Omega} \frac{1}{r^2} \vec{r} = \rho \int_{(u,v,w) \in \Omega} \frac{1}{((x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2)^{\frac{3}{2}}} (x-u, y-v, w-v).$$

Para cada  $(u, v, w)$  fixo, temos que

$$\nabla_{(x,y,z)} \cdot \frac{1}{((x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2)^{\frac{3}{2}}} (x-u, y-v, w-v) = 0.$$

(Verifique isto.)

Então,  $\nabla \cdot F = 0$  em  $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ , pois a conta

$$\nabla \cdot F(x, y, z) = \rho \int_{\Omega} \nabla \cdot \left( \frac{1}{r^2} \vec{r} \right) = \int_{\Omega} 0 = 0$$

pode ser justificada.

Se  $X \in \Omega$ , seja  $B_\delta$  uma bola centrada em  $X$  e de raio  $\delta$  que esteja contida em  $\Omega$ . Seja  $\Omega_\delta = \Omega \setminus B_\delta$ . Então,  $\Omega = B_\delta \cup \Omega_\delta$ . O campo  $F_1$  gerado por  $B_\delta$  está definido no interior de  $B_\delta$  e  $F_1(X) = 0$ . Como  $X$  é exterior a  $B_\delta$ , o campo  $F_2$  gerado por  $\Omega_\delta$  está bem definido em  $X$ . Portanto,  $F(X) = F_1(X) + F_2(X) = F_2(X)$ .

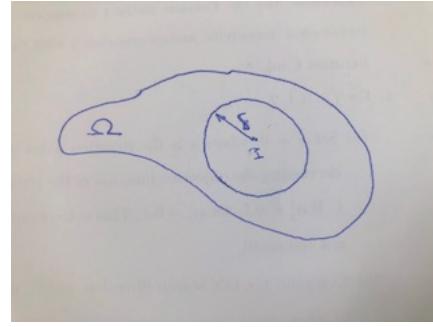


Figura 33: Campo gerado por  $\Omega$

Além disso,  $\nabla \cdot F_1(X) = 4\pi\rho$ , veja (7.8), e  $\nabla \cdot F_2(X) = 0$ , pois  $X \notin \Omega$ . Então,  $\nabla F(X) = \nabla F_1(P) + \nabla F_2(P) = 4\pi\rho$ .

A conclusão é que o divergente de  $F$  vale

$$\nabla \cdot F(X) = \begin{cases} 0, & X \notin \bar{\Omega}, \\ 4\pi\rho, & X \in \Omega. \end{cases}$$

para qualquer distribuição homogênea de cargas em um corpo limitado do espaço. Então, (a menos de um fator  $4\pi$ ) o divergente de  $F$  é uma medida da densidade de cargas distribuídas na região. Este resultado permanece válido mesmo se a densidade de cargas  $\rho$  é uma função que varia continuamente no espaço, mas a demonstração deste fato é mais delicada.

## 8 O rotacional

No caso bidimensional, o Teorema de Green,

$$\int_{\Omega} \nabla \times F = \oint_{\gamma} F \cdot dl,$$

diz que a integral do rotacional de  $F$  em  $\Omega$  é igual à circulação de  $F$  no bordo  $\gamma$  de  $\Omega$  (no sentido adequado). Suponha que  $\Omega$  seja uma coleção de abertos contendo um certo ponto  $\bar{P}$  e que  $\Omega$  vá se contraindo a este ponto.

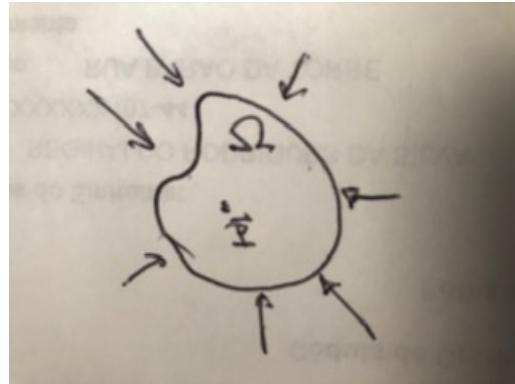


Figura 34:  $\Omega \rightarrow \bar{P}$

Se  $\nabla \times F$  é contínuo, então

$$\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \nabla \times F \xrightarrow{\Omega \rightarrow \bar{P}} \nabla \times F(\bar{P}).$$

Temos então que

$$\frac{1}{|\Omega|} \oint_{\gamma} F \cdot dl \xrightarrow{\Omega \rightarrow \bar{P}} \nabla \times F(\bar{P}).$$

Interpretamos  $\nabla \times F$  como uma densidade de circulação, **circulação por área**. O termos circulação surge quando pensamos que  $F$  é um campo de velocidades. Neste caso, a circulação mede a habilidade do campo de velocidades fazer objetos rodarem.

Por exemplo, considere o campo de velocidades

$$V(x, y) = (-y, x).$$

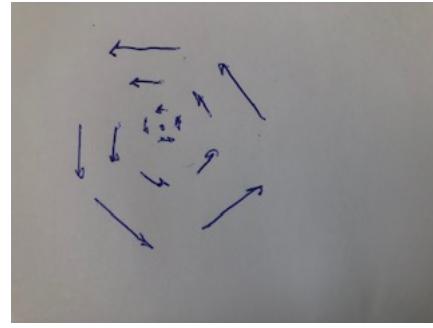


Figura 35: Rotação em torno de um ponto

Vamos verificar que o campo  $V$  representa uma rotação do plano em torno da origem. Suponha que uma partícula se desloca sob a ação de  $V$ . Sua posição  $(x(t), y(t))$  em cada instante  $t$  satisfaz o sistema de EDO's  $(x', y') = V(x, y)$ , isto é,

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t), \\ y'(t) = x(t). \end{cases}$$

Neste caso, é melhor olhar a variação do raio  $r(t)$  e do ângulo  $\theta(t)$  associados à partícula. Temos que

$$r'(t) = (x^2 + y^2)' = 2xx' + 2yy' = 2x(-y) + 2yx = 0.$$

Isto significa que  $r(t)$  é constante, isto é, ela percorre uma circunferência. Examinemos sua velocidade angular

$$\theta(t) = \arctan \frac{y}{x}.$$

Se  $x \neq 0$ ,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{y}{x} \right) = \frac{xy' - yx'}{x^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2}$$

e

$$\theta'(t) = \frac{d}{dt} \left( \arctan \frac{y}{x} \right) = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \frac{d}{dt} \left( \frac{x}{y} \right) = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \frac{x^2 + y^2}{x^2} = 1.$$

Portanto, cada ponto do plano gira com velocidade angular constante. O campo  $V$  faz o plano girar com velocidade angular constante. Ao mesmo tempo,  $\nabla \times F = \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 = 1 + 1 = 2$ . O rotacional também é constante. Poderíamos pensar que o rotacional é uma medida da rotação do campo. Não é exatamente isto, como vemos no exemplo a seguir.

Consideremos

$$V(x, y) = \frac{1}{r^2}(-y, x).$$

Então,

$$\begin{cases} x' = -\frac{y}{r^2}, \\ y' = \frac{x}{r^2}. \end{cases}$$

Neste caso, temos

$$r'(t) = (x^2 + y^2)' = 2xx' + 2yy' = 0.$$

As trajetórias permanecem sendo circunferências. O campo  $V$  continua girando os pontos do plano. Mas não com velocidade angular constante. De fato, temos que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{y}{x} \right) = \frac{xy' - yx'}{x^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 r^2}.$$

Então,

$$\theta'(t) = \frac{d}{dt} \left( \arctan \frac{y}{x} \right) = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \frac{d}{dt} \left( \frac{x}{y} \right) = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \frac{x^2 + y^2}{x^2 r^2} = \frac{1}{r^2}.$$

Quanto mais perto da origem, maior a velocidade angular. Por outro lado, já vimos que  $\nabla \times V = 0$ . Então, o campo faz os objetos rodarem, mas o rotacional vale zero. O que o rotacional (densidade de circulação) mede em cada ponto é a habilidade do campo em **fazer girar um objeto infinitesimal em torno de si mesmo**.

Em  $\mathbb{R}^3$ ,  $\nabla \times F$  é um vetor cujas componentes medem a densidade de circulação nos três planos de normais  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  e  $\vec{z}$ . Para ver isto, considere o quadrado  $S$  de centro  $\bar{X}$  e lado  $2l$ , situado no plano  $x = \bar{x}$ . Neste caso  $|S| = 4l^2$ . O bordo  $\gamma$  de  $S$  se escreve

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4,$$

conforme a Figura 41.

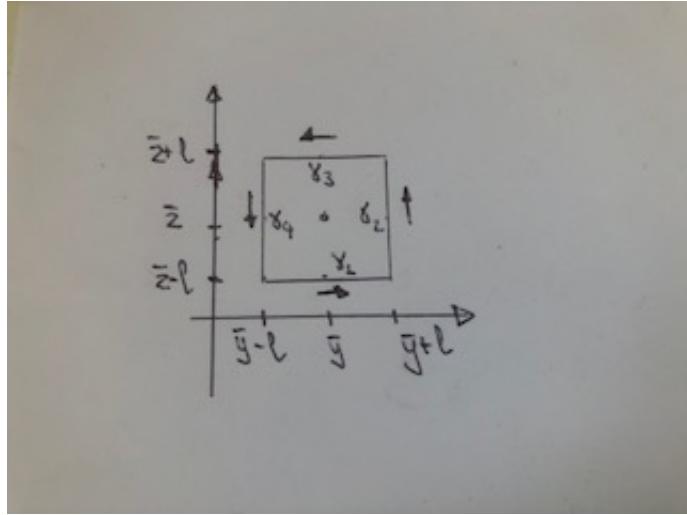


Figura 36: Circulação no plano  $yz$

Temos que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} F \cdot dl &= \int_{-l}^l F_2(\bar{x}, \bar{y} + t, \bar{z} - l) dt + \int_{-l}^l F_3(\bar{x}, \bar{y} + l, \bar{z} + t) dt + \\ &\quad \int_l^{-l} F_2(\bar{x}, \bar{y} + t, \bar{z} + l) dt + \int_l^{-l} F_3(\bar{x}, \bar{y} - l, \bar{z} + t) dt = \\ &\quad \int_{-l}^l F_2(\bar{x}, \bar{y} + t, \bar{z} - l) - F_2(\bar{x}, \bar{y} + t, \bar{z} + l) dt + \\ &\quad \int_{-l}^l F_3(\bar{x}, \bar{y} + l, \bar{z} + t) - F_3(\bar{x}, \bar{y} - l, \bar{z} + t) dt \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Valor Médio,

$$\frac{F_2(\bar{x}, \bar{y} + t, \bar{z} - l) - F_2(\bar{x}, \bar{y} + t, \bar{z} + l)}{2l} = \partial_3 F_2(\bar{x}, \bar{y} + t, \bar{z} + \theta l),$$

$$\frac{F_3(\bar{x}, \bar{y} + l, \bar{z} + t) - F_3(\bar{x}, \bar{y} - l, \bar{z} + t)}{2l} = \partial_2 F_3(\bar{x}, \bar{y} + \theta' l, \bar{z} + t),$$

onde  $\theta, \theta' \in (-1, 1)$ . Então,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4l^2} \int_{\gamma} F \cdot dl &= \frac{1}{4l^2} \int_{-l}^l F_2(\bar{x}, \bar{y} + t, \bar{z} - l) - F_2(\bar{x}, \bar{y} + t, \bar{z} + l) dt + \\ &\quad \frac{1}{4l^2} \int_{-l}^l F_3(\bar{x}, \bar{y} + l, \bar{z} + t) - F_3(\bar{x}, \bar{y} - l, \bar{z} + t) dt = \\ &\quad - \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \partial_3 F_2(\bar{x}, \bar{y} + t, \bar{z} + \theta l) dt + \\ &\quad \frac{1}{2l} \int_{-l}^l \partial_2 F_3(\bar{x}, \bar{y} + \theta' l, \bar{z} + t) dt, \end{aligned}$$

Portanto, quando  $l \rightarrow 0$ ,

$$\frac{1}{4l^2} \int_{\gamma} F \cdot dl \rightarrow -\partial_3 F_2(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) + \partial_2 F_3(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}).$$

Assim,  $\partial_2 F_3 - \partial_3 F_1$  é o limite da circulação no quadrado  $S$  dividido pela área de  $S$ , isto é, a densidade de circulação (no plano de normal  $x$ ).

Cálculos análogos nas outras duas direções mostram que  $\partial_3 F_1 - \partial_1 F_3$  e  $\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1$  são densidades de circulação nos planos de normais  $y$  e  $z$ . Definimos

$$\nabla \times F = (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}. \quad (8.1)$$

Suponha que  $F$  seja  $C^1$ . Neste caso, pode-se mostrar que vale o limite

$$(\nabla \times F)_1(\bar{X}) = \lim_{S_1 \rightarrow \bar{X}} \frac{1}{|S_1|} \oint_{\gamma} F \cdot dl, \quad (8.2)$$

para qualquer região  $S_1$  bidimensional limitada de bordo  $\gamma$  (regular) contido no plano  $x = \bar{x}$ , de área  $|S_1|$ . Analogamente,

$$(\nabla \times F)_2(\bar{X}) = \lim_{S_2 \rightarrow \bar{X}} \frac{1}{|S_2|} \oint_{\gamma} F \cdot dl, \quad (\nabla \times F)_3(\bar{X}) = \lim_{S_3 \rightarrow \bar{X}} \frac{1}{|S_3|} \oint_{\gamma} F \cdot dl, \quad (8.3)$$

onde  $S_2, S_3$  estão nos planos  $y = \bar{y}$  e  $z = \bar{z}$ , respectivamente.

**Observação 8.1.** Nos cálculos acima, a direção da circulação em  $\gamma$  foi tomada de acordo com a regra da mão direita, para que a normal ao quadrado aponte na direção  $x$ .

## 9 O Teorema de Stokes

A conexão entre o rotacional e a circulação é expressa pelo **Teorema de Stokes**. Ele diz que o **fluxo do rotacional** de  $F$  através de  $S$  é igual à **circulação** de  $F$  no bordo  $\gamma$  de  $S$ . Há uma ambiguidade no fluxo e na circulação, ambas estão definidas a menos de uma escolha de direção. O Teorema de Stokes é válido se escolhemos a direção da normal e a direção da circulação de forma coerente, segundo a regra da mão direita: a tangente  $\tau$  a  $\gamma$ , a normal  $n$  a  $\gamma$  no plano tangente a  $S$ , e a normal  $\eta$  a  $S$  formam um triedro positivo, veja a Figura 37



Figura 37: Orientação da circulação e do fluxo

**Teorema 9.1** (Teorema de Stokes). *Seja  $S$  uma superfície regular de bordo  $\gamma$  e seja  $F$  um campo vetorial de classe  $C^1$ . Então,*

$$\int_S \nabla \times F \cdot d\eta = \oint_{\gamma} F \cdot dl. \quad (9.1)$$

*Demonstração.* Inicialmente, vamos considerar  $F$  na forma  $F = (0, 0, g)$ , com  $g$  de classe  $C^1$ , e vamos supor que  $S$  seja gráfico de uma função de classe  $C^2$   $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $B = (a, b) \times (c, d)$  é um retângulo de  $\mathbb{R}^2$ . O bordo  $\gamma$  de  $S$  é a imagem (por  $f$ ) do bordo de  $B$ . Ou seja,  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ , veja a Figura 38

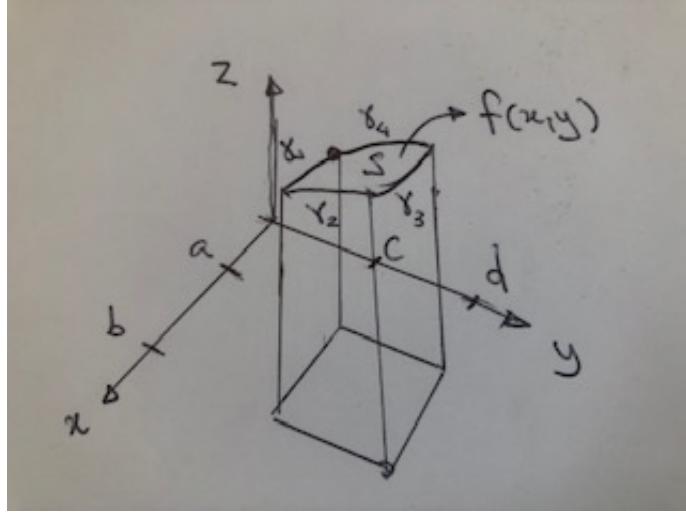


Figura 38: A superfície  $S$  e o bordo  $\gamma$

Temos que  $\nabla \times F = (g_y, -g_x, 0)$ . Além disso,  $S$  é parametrizado por  $\alpha(x, y) = (x, y, f(x, y))$ . Então,  $\alpha_x = (1, 0, f_x)$ ,  $\alpha_y = (0, 1, f_y)$  e

$$\eta = (1, 0, f_x) \times (0, 1, f_y) = (-f_x, -f_y, 1).$$

Assim,

$$\int_S \nabla \times F \cdot d\eta = \int_a^b \int_c^d (g_y, -g_x, 0) \cdot (-f_x, -f_y, 1) dx dy = \int_a^b \int_c^d -g_y f_x + g_x f_y dy dx. \quad (9.2)$$

Integrando por partes, temos que

$$\begin{aligned} - \int_c^d g_y(x, y, f(x, y)) f_x(x, y) dy &= -g(x, y, f(x, y)) f_x(x, y) \Big|_c^d + \int_c^d g(x, y, f(x, y)) f_{xy}(x, y) dy = \\ &g(x, c, f(x, c)) f_x(x, c) - g(x, d, f(x, d)) f_x(x, d) + \int_c^d g(x, y, f(x, y)) f_{xy}(x, y) dy \end{aligned}$$

Integrando em  $x$ ,

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_c^d -g_y f_x dy dx &= \int_a^b g(x, c, f(x, c)) f_x(x, c) - g(x, d, f(x, d)) f_x(x, d) dx + \\ &\int_a^b \int_c^d g(x, y, f(x, y)) f_{xy}(x, y) dy dx. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Analogamente,

$$\int_a^b g_x(x, y, f(x, y)) f_y(x, y) dx = g(x, y, f(x, y)) f_y(x, y) \Big|_a^b - \int_a^b g(x, y, f(x, y)) f_{xy}(x, y) dx,$$

de modo que

$$\begin{aligned} \int_c^d \int_a^b g_x f_y dx dy &= \int_c^d g(b, y, f(b, y)) f_y(b, y) - g(a, y, f(a, y)) f_y(a, y) dy - \\ &\quad \int_a^b \int_c^d g(x, y, f(x, y)) f_{xy}(x, y) dy dx. \end{aligned} \tag{9.4}$$

Somando (9.3) e (9.4), obtemos de (9.2) que

$$\begin{aligned} \int_S \nabla \times F \cdot d\eta &= \int_a^b g(x, c, f(x, c)) f_x(x, c) - g(x, d, f(x, d)) f_x(x, d) dx + \\ &\quad \int_c^d g(b, y, f(b, y)) f_y(b, y) - g(a, y, f(a, y)) f_y(a, y) dy. \end{aligned} \tag{9.5}$$

Por outro lado, parametrizando  $\gamma_1$  por  $\alpha(x) = (x, c, f(x, c))$ , temos que  $\alpha'(x) = (1, 0, f_x(x, c))$  e

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dl = \int_a^b (0, 0, g(x, c, f(x, c))) \cdot (1, 0, f_x(x, c)) dx = \int_a^b g(x, c, f(x, c)) f_x(x, c) dx, \tag{9.6}$$

que é igual ao primeiro termo do lado direito de (9.5). Os outros três termos correspondem às integrais de linha em  $\gamma_3$ ,  $\gamma_2$  e  $\gamma_4$ . Portanto, neste caso particular,

$$\int_S \nabla \times F \cdot d\eta = \oint_{\gamma} F \cdot dl.$$

Se  $S$  não é o gráfico de uma função, podemos escrever  $S$  como a união de superfícies  $S_j$  que são gráficos de funções, como na Figura 40.

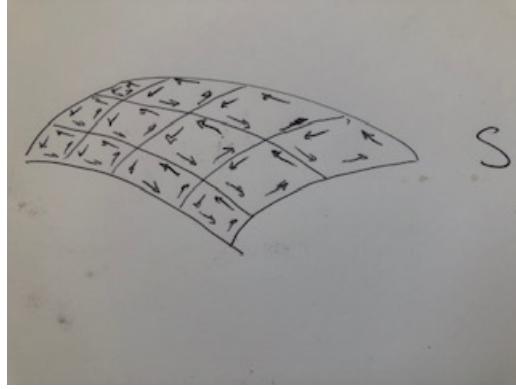


Figura 39:  $S = \bigcup S_j$

Usando o Teorema de Stokes em  $S_j$ , escrevemos

$$\int_S \nabla \times F \cdot d\eta = \sum_j \int_{S_j} \nabla \times F \cdot d\eta = \sum_j \oint_{\gamma_j} F \cdot dl,$$

onde  $\gamma_j$  é o bordo de  $S_j$ . Observe que há partes de  $\gamma_j$  que não pertencem a  $\gamma$ . No entanto, cada nova curva  $\gamma_{i,j}$  é comum a duas superfícies  $S_i$  e  $S_j$ , e são percorridas em sentidos contrários. Por isso, a soma de suas contribuições é nula. Assim,

$$\int_S \nabla \times F \cdot d\eta = \sum_j \oint_{\gamma_j} F \cdot dl = \oint_{\gamma} F \cdot dl.$$

Evidentemente, o mesmo resultado pode ser obtido se  $F = (g, 0, 0)$  ou  $F = (0, g, 0)$ . Portanto, se  $F = (F_1, F_2, F_3)$ , temos

$$\begin{aligned} \int_S \nabla \times F \cdot d\eta &= \int_S \nabla \times ((F_1, 0, 0) + (0, F_2, 0) + (0, 0, F_3)) \cdot d\eta = \\ &= \int_{\gamma} ((F_1, 0, 0) + (0, F_2, 0) + (0, 0, F_3)) \cdot dl = \int_{\gamma} F \cdot dl. \end{aligned}$$

Isto encerra a demonstração do teorema.  $\square$

Seja  $\pi$  um plano de normal unitária  $\eta$  e passando por um ponto  $P \in \mathbb{R}^3$ . Seja  $S \subset \pi$  é uma superfície bidimensional tal que  $P \in S$ . Pelo Teorema de Stokes

$$\int_S \nabla \times F \cdot d\eta = \int_{\gamma} F \cdot dl.$$

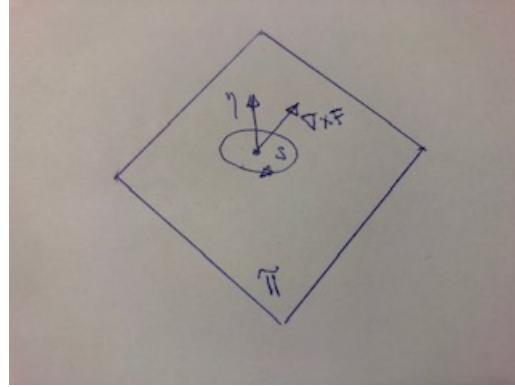


Figura 40: Circulação no plano  $\pi$

Dividindo ambos os lados pela área  $|S|$  e fazendo  $S \rightarrow P$ , obtemos

$$\nabla \times F(P) \cdot \eta = \lim_{S \rightarrow P} \frac{1}{|S|} \int_{\gamma} F \cdot dl.$$

Portanto, a projeção de  $\nabla \times F(P)$  sobre a direção normal  $\eta$  mede a densidade de circulação no plano  $\pi$ . Isto mostra que  $\nabla \times F$  aponta na direção ortogonal ao plano de maior circulação de  $F$ .

Por exemplo, considere o campo  $F(x, y, z) = (-y, x, 0)$ . Temos que

$$\nabla \times F = (\partial_2 F_3 - \partial_3 F_2, \partial_3 F_1 - \partial_1 F_3, \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) = (0, 0, 2).$$

Se  $\gamma$  é a circunferência  $x^2 + y^2 = R^2$ , estamos no caso bidimensional. Quando  $R \rightarrow 0$ ,

$$\frac{1}{\pi R^2} \oint_{\gamma} V \cdot dl \xrightarrow[R \rightarrow 0]{} 2.$$

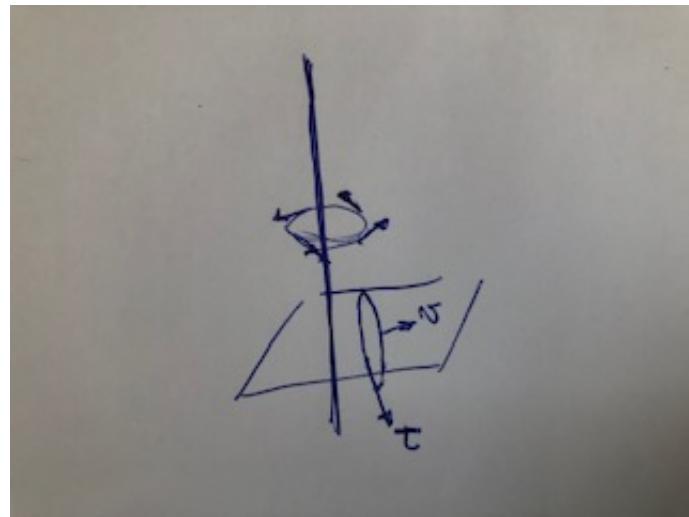
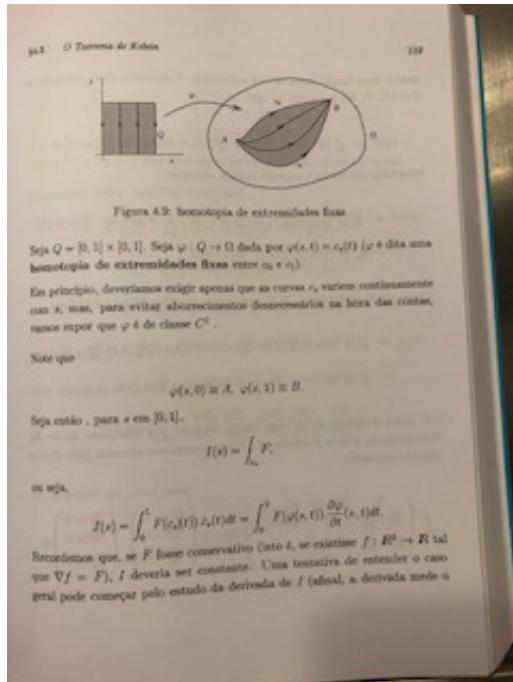
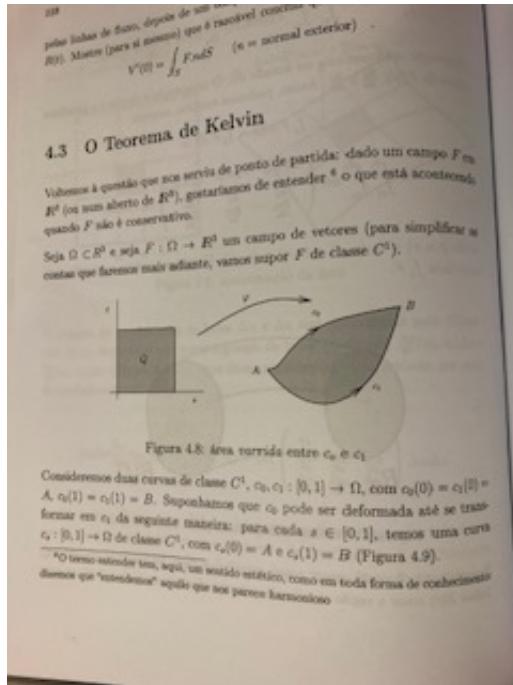
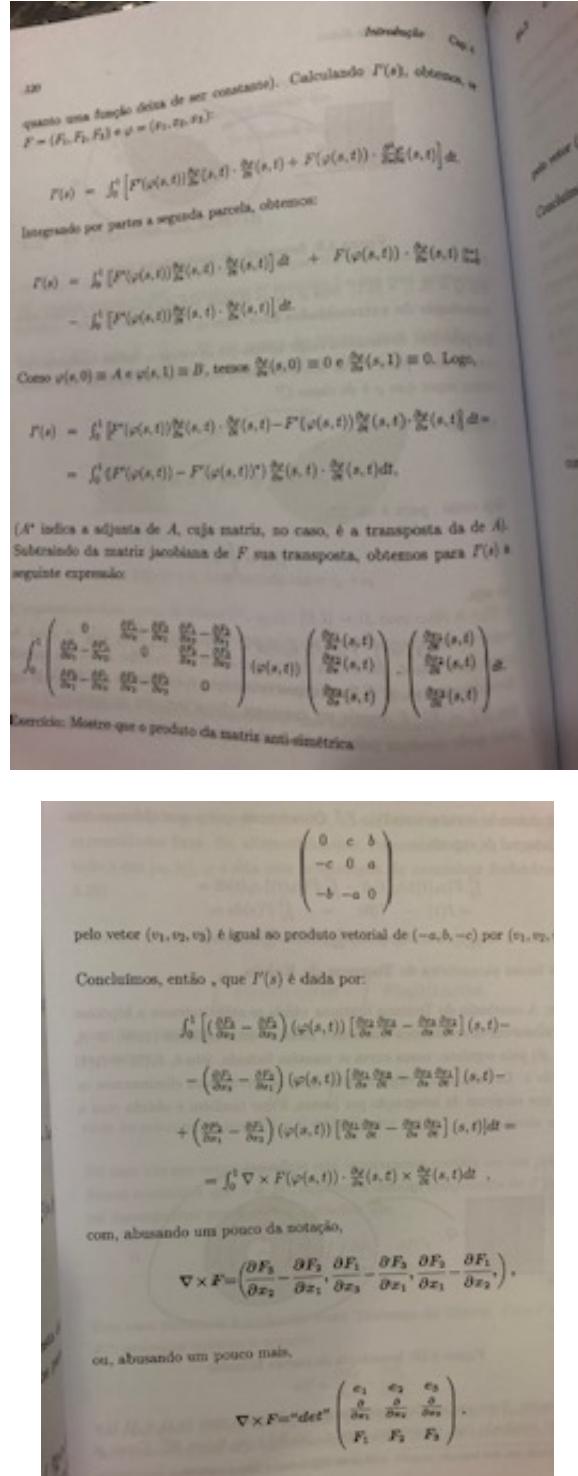


Figura 41: Circulação no plano  $yz$

A circulação por unidade de área vale 2. Tomemos agora a circunferência  $\gamma$  dada por  $x^2+z^2 = R^2$ . Como o campo  $V$  é horizontal, o campo tangente a  $\gamma$  é ortogonal a  $V$  em todos os pontos. Portanto,  $\oint_{\gamma} V \cdot dl = 0$  e o campo não faz girar objetos na direção  $\vec{y}$  (nem na direção  $\vec{x}$ .)

A demonstração do Teorema de Stokes é bastante artificial. Sabíamos onde queríamos chegar e fizemos as contas para mostrar que o lados esquerdo e direito de (9.1) são iguais. Vejamos uma demonstração alternativa, onde o rotacional aparece de forma natural. Ela foi retirada do livro-texto do curso, a partir da página 118.





Aqui vai uma cópia de parte da demonstração, com a notação que eu venho usando.

$$I(s) = \oint_{\gamma_s} F \cdot dl = \int_a^b F(\alpha(s, t)) \cdot \partial_t \alpha(s, t) dt.$$

Queremos estudar como  $I(s)$  varia com  $s$ . Calculemos

$$\begin{aligned} I'(s) &= \oint_a^b \frac{\partial}{\partial s} (F(\alpha(s, t)) \cdot \partial_t \alpha(s, t)) dt = \\ &\quad \int_a^b F'(\alpha(s, t)) \partial_s \alpha(s, t) \cdot \partial_t \alpha(s, t) + F(\alpha(s, t)) \cdot \partial_{st}^2 \alpha(s, t) dt. \end{aligned} \tag{9.7}$$

Integrando por partes,

$$\int_a^b F(\alpha(s, t)) \cdot \partial_{ts}^2 \alpha(s, t) dt = - \int_a^b \partial_t F(\alpha(s, t)) \cdot \partial_s \alpha(s, t) dt + F(\alpha(s, t)) \partial_s \alpha(s, t) \Big|_a^b. \tag{9.8}$$

Mas  $\alpha(s, a) = A$  e  $\alpha(s, b) = B$ . Logo,  $\partial_s \alpha(s, a) = \partial_s \alpha(s, b) = 0$ . Então,

$$F(\alpha(s, t)) \partial_s \alpha(s, t) \Big|_a^b = 0$$

e

$$\begin{aligned} \int_0^1 F(\alpha(s, t)) \cdot \partial_{ts}^2 \alpha(s, t) dt &= - \int_0^1 \partial_t F(\alpha(s, t)) \cdot \partial_s \alpha(s, t) dt \\ &= - \int_0^1 F'(\alpha(s, t)) \partial_t \alpha(s, t) \cdot \partial_s \alpha(s, t) dt = - \int_0^1 (F'(\alpha(s, t)))^T \partial_s \alpha(s, t) \cdot \partial_t \alpha(s, t) dt \end{aligned} \tag{9.9}$$

Então,

$$I'(s) = \int_a^b (F'(\alpha(s, t)) - (F'(\alpha(s, t)))^T) \partial_s \alpha(s, t) \cdot \partial_t \alpha(s, t),$$

onde

$$F' = \begin{pmatrix} \partial_x F_1 & \partial_y F_1 & \partial_z F_1 \\ \partial_x F_2 & \partial_y F_2 & \partial_z F_2 \\ \partial_x F_3 & \partial_y F_3 & \partial_z F_3 \end{pmatrix}, \quad F' - (F')^T = \begin{pmatrix} 0 & \partial_y F_1 - \partial_x F_2 & \partial_z F_1 - \partial_x F_3 \\ \partial_x F_2 - \partial_y F_1 & 0 & \partial_z F_2 - \partial_y F_3 \\ \partial_x F_3 - \partial_z F_1 & \partial_y F_3 - \partial_z F_2 & 0 \end{pmatrix},$$

Um cálculo direto nos dá

$$(F'(\alpha(s, t)) - (F'(\alpha(s, t)))^T) \partial_s \alpha(s, t) \cdot \partial_t \alpha(s, t) = \nabla \times F(\alpha(s, t)) \cdot \partial_s \alpha(s, t) \times \partial_t \alpha(s, t).$$

Assim,

$$I(1) - I(0) = \int_0^1 I'(s) ds - \int_0^1 \int_a^b \nabla \times F(\alpha(s, t)) \cdot \partial_s \alpha(s, t) \times \partial_t \alpha(s, t) dt = \int_S \nabla \times F \cdot d\eta.$$

Invertendo a direção da integral de linha em  $\gamma_1$ , obtemos  $I(1) - I(0) = \oint_{\tilde{\gamma}} F \cdot dl$ , terminando a demonstração.

A demonstração ilustra novamente a ideia da homotetia. No caso, é uma homotetia de pontos fixos. O argumento funciona também com homotetia de curvas fechadas. E funciona também se uma curva fechada é homotética a um ponto. Dizemos que um aberto  $\Omega$  é simplesmente conexo se toda curva fechada  $\gamma \subset \Omega$  é homotética a um ponto de  $\Omega$  por curvas fechadas em  $\Omega$ . O Teorema de Stokes vale em regiões simplesmente conexas. Por exemplo,  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  é simplesmente conexa. (Mas, no caso bidimensional,  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  não é simplesmente conexa.) Por outro lado,  $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{z}\}$  não é simplesmente conexa. De fato, a circunferência  $x^2 + y^2 = 1$  no plano  $z = 0$  não é homotética a nenhum ponto de  $\Omega$ .

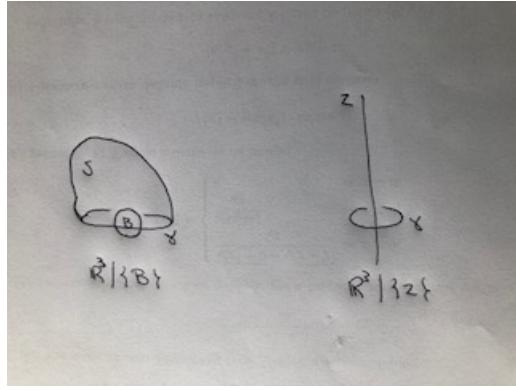


Figura 42:  $\mathbb{R}^3 \setminus B$  é simplesmente conexa, contrariamente a  $\mathbb{R}^3 \setminus \{z\}$

Como consequência do Teorema de Stokes, temos o seguinte resultado.

**Teorema 9.2.** *Seja  $\Omega$  uma região simplesmente conexa. Um campo  $F$  definido em  $\Omega$  é conservativo se e somente se  $\nabla \times F = 0$ .*

*Demonação.* Se  $F$  é conservativo, então  $F = \nabla G$ . E  $\nabla \times \nabla G = 0$ . Reciprocamente, se  $\nabla \times F = 0$ , usando o Teorema de Stokes vemos que a circulação de  $F$  em qualquer curva fechada vale 0. Mas isto implica que  $F$  é conservativo.  $\square$

No Teorema acima, a hipótese de que  $\Omega$  é simplesmente conexa é essencial. Por exemplo, considere  $F(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2}(-y, x, 0)$ . Então,  $\nabla \times F = 0$ . Mas, se  $\gamma$  é a circunferência unitária no plano  $z = 0$ , então  $\int_{\gamma} F \cdot dl = 2\pi$ . Logo,  $F$  não é conservativo.

## 10 O Laplaciano

Na Seção 7, discutimos campos elétricos  $F$  gerados por distribuições contínuas de cargas. Estes campos são potenciais, e discutimos também o cálculo desses potenciais. Por conveniência de notação, vamos chamar o potencial de  $u$ . Vimos ainda que o divergente  $\nabla \cdot F$  é igual a  $4\pi\rho$ , onde  $\rho$  é a densidade de cargas da distribuição. Em particular, na ausência de cargas,  $\nabla \cdot F = 0$ . Como  $F = \nabla u$ , temos que

$$\nabla \cdot \nabla u = 0.$$

Note que

$$\nabla \cdot \nabla u = (\partial_x, \partial_y, \partial_z) \cdot (\partial_x u, \partial_y u, \partial_z u) = \partial_{xx}^2 u + \partial_{yy}^2 u + \partial_{zz}^2 u.$$

Definimos  $\Delta$ , o **operador Laplaciano** em  $\mathbb{R}^3$  como

$$\Delta = \partial_{xx}^2 + \partial_{yy}^2 + \partial_{zz}^2.$$

(Mais geralmente, em  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Delta = \sum_{j \leq n} \partial_{jj}^2$ .)

A equação

$$\Delta u = 0 \tag{10.1}$$

é dita a **equação de Laplace**. Uma função é **harmônica** em uma região  $\Omega$  se o seu Laplaciano é nulo nessa região. Eis alguns exemplos. Funções constantes são harmônicas. Em uma dimensão,

uma função é harmônica se  $u'' = 0$ , isto é,  $u$  é uma função afim. Em  $\mathbb{R}^3$ , o potencial  $\frac{1}{r}$  gerado por uma carga na origem é harmônico em  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Mais geralmente, o potencial gerado por uma distribuição contínua de cargas é harmônico fora da região onde as cargas estão situadas. Um outro exemplo é a função  $f(x, y) = x^2 - y^2$  em  $\mathbb{R}^2$ . Um último exemplo, de grande importância: se  $u : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função complexa analítica, então suas partes real e imaginária são funções harmônicas.

### A equação de Poisson

$$\Delta u = f \quad (10.2)$$

generaliza a equação de Laplace. Mais uma vez, o potencial  $u$  de distribuições contínuas de cargas de densidade  $f$  satisfaz a equação de Poisson. Se  $\Delta u = f$  e  $\Delta v = 0$ , então  $\Delta(u + v) = f$ . Portanto, a equação de Poisson em uma região  $\Omega$  tem infinitas soluções. Assim, suponha que um corpo  $\Omega$  tenha uma distribuição de cargas  $f(x, y, z)$  em seu interior. O potencial  $u$  correspondente satisfaz a equação de Poisson (10.2). Se acrescentarmos uma distribuição qualquer de cargas fora de  $\Omega$ , ou na fronteira  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ , o novo campo potencial ainda satisfaz (10.2) em  $\Omega$ .

Dois problemas que tiveram um papel importante no desenvolvimento da Matemática são os chamados problemas de **Dirichlet**

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x) & x \in \Omega, \\ u(x) = g(x) & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (10.3)$$

e de **Neumann**.

$$\begin{cases} \Delta u(x) = f(x) & x \in \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial\eta} u(x) = h(x) & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (10.4)$$

(Aqui,  $x$  é um ponto de  $\mathbb{R}^3$ .) O problema (10.3) modela o potencial eletrostático em um corpo  $\Omega$  no qual um potencial  $g(x)$  é imposto na fronteira de  $\Omega$ . O problema de Neumann corresponde ao potencial eletrostático em uma corpo que está isolado do exterior.

Os problemas de Dirichlet e de Neumann modelam diversos outros fenômenos de equilíbrio, além do eletrostático. Por exemplo, o do equilíbrio térmico de um corpo. Neste caso,  $u(x)$  representa a temperatura em um ponto  $x$  do corpo.

Várias técnicas e ideias inovadoras foram desenvolvidas no esforço para resolver os problemas de Dirichlet. Em particular, a Série e a Transformada de Fourier. Estas técnicas permitiram obter a existência e a unicidade de soluções dos problemas (10.3) e (10.4).

Vamos discutir a unicidade, a existência é bem mais delicada. Para isto, lembramos a fórmula de integração por partes em

*Rn*

$$\int_{\Omega} \partial_j u v = \int_{\partial\Omega} u \eta_j v \, ds - \int_{\Omega} u \partial_j v,$$

onde  $\eta_j$  é a componente  $j$  da normal unitária exterior a  $\Omega$ . Se  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  é um campo vetorial e  $v$  é um campo escalar, então, para cada  $j$ ,

$$\int_{\Omega} \partial_j u_j v = \int_{\partial\Omega} u_j \eta_j v \, ds - \int_{\Omega} u_j \partial_j v.$$

Somando em  $j$ , obtemos

$$\int_{\Omega} v \nabla \cdot u = \int_{\partial\Omega} v u \cdot \eta \, ds - \int_{\Omega} u \cdot \nabla v.$$

No caso de dois campos escalares  $u$  e  $v$ , aplicando a fórmula acima para  $\nabla u$  no lugar de  $u$ , obtemos

$$\int_{\Omega} v \nabla \cdot \nabla u = \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \eta \, ds - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v.$$

Ou seja, vale a **primeira identidade de Green**

$$\int_{\Omega} v \Delta u = \int_{\partial\Omega} v \partial_{\eta} u \, ds - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v. \quad (10.5)$$

Em particular, fazendo  $v = 1$ ,

$$\int_{\Omega} \Delta u = \int_{\partial\Omega} \partial_{\eta} u \, ds. \quad (10.6)$$

Suponha agora que  $u_1$  e  $u_2$  seja, duas soluções de (10.3) ou de (10.4). Então,  $v = u_1 - u_2$  satisfaz

$$\begin{cases} \Delta v(x) = 0 & x \in \Omega, \\ v(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \Delta v(x) = 0 & x \in \Omega, \\ \frac{\partial}{\partial \eta} v(x) = 0 & x \in \partial\Omega. \end{cases}, \quad (10.7)$$

Aplicando (10.5) para  $u = v$ , obtemos

$$0 = \int_{\Omega} v \Delta v = \int_{\partial\Omega} v \partial_{\eta} v - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v = - \int_{\Omega} |\nabla v|^2.$$

Portanto,  $\nabla v = 0 \implies v = C$ . No caso Dirichlet, como  $v = 0$  na fronteira de  $\Omega$ , obtemos  $v = 0$ , ou seja,  $u_1 = u_2$ . No caso Neumann,  $v = C$ . O problema tem unicidade a menos de uma constante.

A unicidade também pode ser obtida usando o chamado Princípio da Média para função harmônicas, que diz que  $u(x)$  é igual à sua média de seus valores em uma bola centrada em  $x$ , e igual à média de seus valores na casca esférica de cada bola.

**Teorema 10.1** (Princípio da Média). *Seja  $u$  uma função harmônica definida em uma região  $\Omega$  e seja  $B_R \subset \Omega$  uma bola de raio  $R$  centrada em  $x$ , de fronteira  $S_R$ . Então, para todo  $r < R$ ,*

$$u(x) = \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} u = \frac{1}{|S_r|} \int_{S_r} u \, ds.$$

*Demonstração.* Suponha que  $x = 0$ . Usando (10.6), temos para  $r < R$

$$0 = \int_{B_r} \Delta u = \int_{S_r} \partial_{\eta} u \, ds = \int_{S_r} \partial_r u \, ds, \quad (10.8)$$

pois a normal tem direção radial. Então,

$$0 = r^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \partial_r u(r, \varphi, \theta) \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta.$$

Eliminando  $r^2$  e integrando de 0 a  $r$ ,

$$0 = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^r \partial_r u(r, \varphi, \theta) \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} u(r, \varphi, \theta) - u(0, \varphi, \theta) \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta.$$

Note que  $u(0, \varphi, \theta) = u(0)$ . Logo,

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} u(r, \varphi, \theta) \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} u(0, \varphi, \theta) \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta = 4\pi u(0).$$

Então,

$$u(0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} u(r, \varphi, \theta) r^2 \sin \varphi d\varphi d\theta = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r} u ds.$$

Além disso, escrevendo que

$$4\pi r^2 u(0) = \int_{S_r} u ds$$

e integrando em  $r$ , de 0 a  $R$ , obtemos

$$\frac{4\pi R^3}{3} u(0) = 4\pi u(0) \int_0^R r^2 dr = \int_0^R \int_{S_r} u ds dr = \int_{B_R} u.$$

Isto mostra que

$$u(0) = \frac{1}{|B_R|} \int_{B_R} u,$$

obtendo o resultado para  $x = 0$ . Para um ponto  $x$  qualquer, bastar fazer uma translação espacial, aplicando o resultado em  $y = 0$  para a função  $v(y) = u(x + y)$ .  $\square$

**Observação 10.2.** Em  $\mathbb{R}$ , o Princípio da Média significa que

$$u(x) = \frac{u(x+h) + u(x-h)}{2} \text{ e que } u(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} u(t) dt.$$

Isto é imediato, se  $u$  é uma função afim.

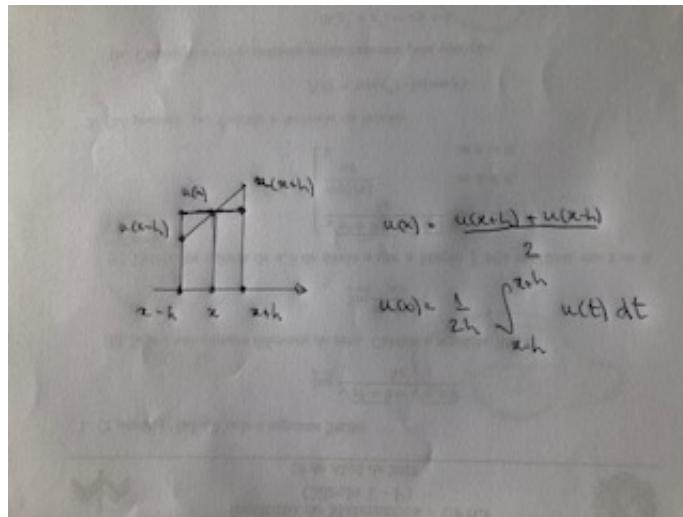


Figura 43: Princípio da Média em  $\mathbb{R}$

O Princípio da Média tem como consequência o Princípio do Máximo.

**Teorema 10.3** (Princípio do Máximo). *Seja  $\Omega$  um aberto conexo e seja  $u$  uma função harmônica em  $\Omega$ . Se  $u$  atinge o máximo (ou o mínimo) em  $\Omega$ , então  $u$  é constante.*

*Demonstração.* Suponha que  $u$  atinja o máximo  $M$  em um ponto de  $\Omega$ , que podemos supor que seja 0. Então,  $M = u(0) \geq u(x)$  se  $x \in \Omega$ . Seja  $A = \{x \in \Omega, u(x) = M\}$ . Então,  $A$  é um conjunto fechado e  $0 \in A$ . Se  $B_r$  é uma bola contida em  $\Omega$ , pelo Princípio da Média,

$$M = u(0) = \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} u \leq \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} M = M.$$

Isto mostra que  $u = M$  em  $B_r$ . Portanto,  $B_r \subset A$ . Ou seja,  $A$  é aberto. Como  $\Omega$  é conexo,  $A = \Omega$ . Logo  $u = M$  em  $\Omega$ .

No caso do mínimo, basta trocar  $u$  por  $-u$ . □

**Observação 10.4.** *A hipótese de que  $\Omega$  é conexa não pode ser descartada. Suponha  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ , com  $\Omega_1, \Omega_2$  disjuntas. Se  $u = 1$  em  $\Omega_1$  e  $u = 2$  em  $\Omega_2$ , então  $\Delta u = 0$ , o máximo e o mínimo são atingidos no interior de  $\Omega$ , mas  $u$  não é constante.*

O Princípio do Máximo tem como consequência a unicidade do Problema de Dirichlet. Apresentamos uma segunda prova da unicidade do problema de Dirichlet.

*Demonstração.* Suponha (por absurdo) que  $v$  satisfaça (10.7) e que  $v$  não seja igual a 0. Então,  $v$  não é constante. Pelo Princípio da Média, o máximo e o mínimo de  $v$  estão na fronteira de  $\Omega$ , onde  $v = 0$ . Então,  $v = 0$ , uma contradição. □

A unicidade do Problema de Neumann pode ser obtida usando-se uma forma mais sofisticada do Princípio da Máximo.

A Princípio do Média caracteriza as funções harmônicas. Ou seja, vale a seguinte recíproca. Se  $u$  satisfaz o Princípio da Média, então  $u$  é harmônica. Veja o exercício abaixo.

**Exercício 10.5.** *Seja  $u$  uma função de classe  $C^2$  em  $\Omega$  e suponha que*

$$u(x) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r} u \, ds,$$

*onde  $S_r$  é a superfície esférica de raio  $r$  centrada em  $x$ . Mostre que  $u$  é harmônica, seguindo o seguinte roteiro.*

- (i) *Mostre que  $u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} u(r, \varphi, \theta) \sin \varphi \, d\theta \, d\varphi$ .*
- (ii) *Derive em relação a  $r$  para obter que  $\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \partial_r u(r, \varphi, \theta) \sin \varphi \, d\theta \, d\varphi = 0$ .*
- (iii) *Conclua que  $\int_{S_r} \partial_\eta u(r, \varphi, \theta) \, ds = 0$ .*
- (iv) *Usando (10.8), obtenha que  $\int_{B_r} \Delta u = 0$  para toda bola  $B_r$  de raio  $r$  e centrada em  $x$ .*
- (v) *Conclua que  $\Delta u(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B_r|} \int_{B_r} \Delta u = 0$ , mostrando que  $u$  é harmônica.*

## 11 A equação do calor

Os problemas de Dirichlet e de Neumann modelam fenômenos de equilíbrio térmico. A variável  $u(x)$  é a temperatura do corpo em cada ponto  $x$ . Nos casos em que não há equilíbrio térmico em um corpo  $\Omega$ , a evolução da temperatura  $u(t, x)$  ao longo do tempo é descrita pela equação do calor.

As palavras-chave na teoria termodinâmica são: entropia  $S$ , energia interna  $e$ , calor  $c$ , fluxo de calor  $q$ , temperatura  $u$ . Não vamos definir nenhum destes termos de forma precisa. De forma imprecisa, o calor é uma medida da energia cinética dos átomos do corpo. O fluxo de calor  $q$  é proporcional ao gradiente de temperatura  $\nabla u$ . Mais precisamente  $q = -\kappa \nabla u$ , onde  $\kappa$  é a

condutividade térmica. A variação de temperatura em cada região  $R \subset \Omega$  é proporcional ao fluxo de calor através do bordo  $\partial R$  de  $R$ . Esta equação expressa uma lei de conservação de energia calorífica e se traduz na equação

$$\partial_t u = -\lambda \nabla \cdot q = \lambda \nabla \cdot (\kappa \nabla u),$$

onde  $\lambda$  é o calor específico do material.

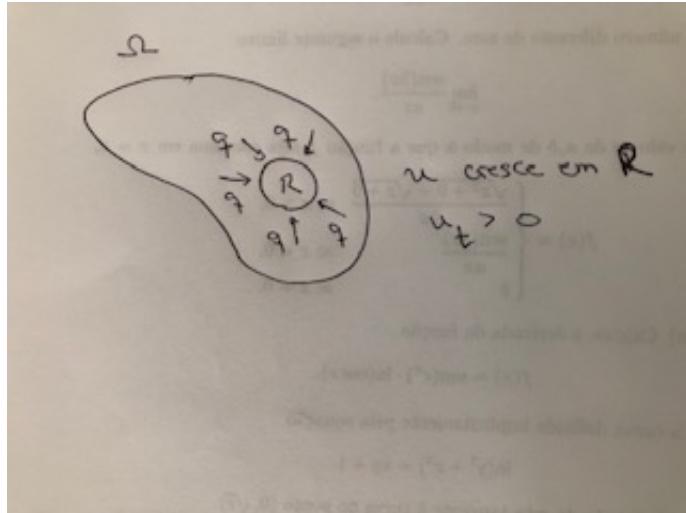


Figura 44: Conservação de energia em  $R$

No caso de corpos homogêneos, e supondo  $\lambda = \kappa = 1$ , obtemos a **equação do calor**

$$\partial_t u(t, x) = \Delta u(t, x). \quad (11.1)$$

(Mais geralmente, na presença de fontes internas de energia,  $u$  satisfaz a equação não-homogênea  $\partial_t u = \Delta u + h$ , onde  $h$  pode variar no tempo e no espaço.)

Vamos considerar (11.1) para  $t > 0$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ . A equação (11.1) tem infinitas soluções. Por exemplo, toda função harmônica que não depende de  $t$  é solução do problema. A função  $u(t, x) = 2nt - |x|^2$  também é solução. Note que (11.1) é um problema linear: a soma de duas soluções é uma solução, múltiplos de soluções são soluções. Como a equação possui muitas soluções, é preciso introduzir informações adicionais para determinar uma solução de forma unívoca. É o que faremos a seguir.

Suponha que no instante inicial  $t = 0$  uma distribuição de temperatura  $u(0, x) = f(x)$  é conhecida. O **problema de valor inicial** ou **problema de Cauchy** consiste em encontrar a solução de

$$\begin{cases} \partial_t u = \Delta u, & t > 0, \\ u(0, x) = f(x). \end{cases} \quad (11.2)$$

Vamos discutir, sem muito rigor, a existência e a unicidade de solução de (11.2). Comecemos pela unicidade.

**Teorema 11.1.** *O problema (11.2) tem solução única.*

*Demonstração.* Seja  $u$  solução de (11.2) com  $f = 0$ . Multiplicando a equação por  $u$  e integrando no espaço, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_t u u = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta u u = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \cdot \nabla u u = - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2,$$

onde usamos integração por partes. Mas,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_t u u = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t |u|^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 \right).$$

Portanto, se  $g(t) = \int_{\mathbb{R}^n} |u(t)|^2$ , então

$$g'(t) = -2 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \leq 0.$$

Isto mostra que  $g(t)$  não cresce ao longo do tempo. Como  $g(0) = 0$  e  $g \geq 0$ , vemos que  $g(t) = 0$ , ou seja,  $u = 0$ .

Pela linearidade do problema, concluímos que (11.2) tem solução única.  $\square$

**Observação 11.2.** Na demonstração da unicidade, admitimos na integração por partes a contribuição do termo de bordo no infinito é nula. Admitimos também que  $|u|^2$  e  $|\nabla u|^2$  são integráveis. São detalhes técnicos que não vamos discutir aqui.

**Observação 11.3.** Existe um Princípio do Máximo para a equação do calor. A unicidade de solução também decorre deste Princípio do Máximo.

A existência de solução de (11.2) envolve a chamada **solução fundamental** da equação do calor

$$G(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad (11.3)$$

definida para  $t > 0$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ . Veja a Figura 45.

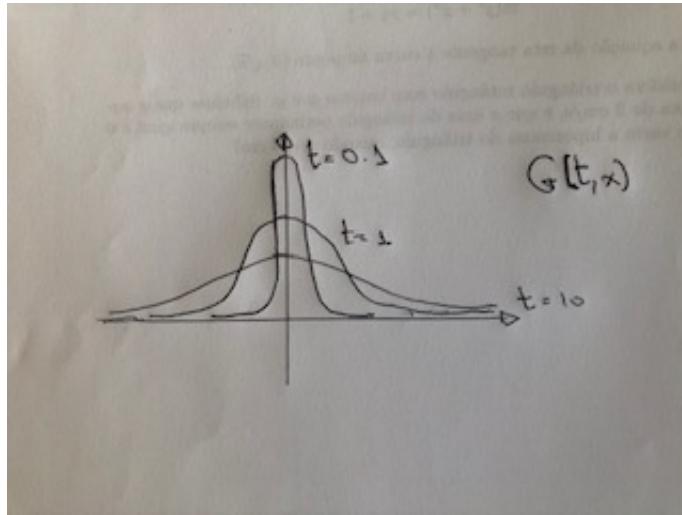


Figura 45: Solução Fundamental  $G(t)$

Algumas propriedades essenciais de  $G(t, x)$  são deixadas ao leitor como exercícios.

**Exercício 11.4.** Mostre que  $G(t, x)$  satisfaz a equação do calor (11.1).

**Exercício 11.5.** Mostre que para todo  $t > 0$  temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(t, x) dx = 1, \quad (11.4)$$

através dos seguintes passos.

(i) Seja

$$I = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx.$$

Usando coordenadas polares, mostre que

$$I^2 = \int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2} dx_1 \times \int_{\mathbb{R}} e^{-x_2^2} dx_2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x_1^2+x_2^2)} dx_1 dx_2 = \pi.$$

(ii) Mostre que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx = I^n = \pi^{\frac{n}{2}}.$$

(iii) Mostre que

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(t, x) dx = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} dx = 1.$$

(Sugestão: Faça a mudança de variáveis  $x = \sqrt{4t}y$ , de modo que  $dx = (4t)^{\frac{n}{2}} dy$ .)

A solução de (11.1) é expressa como um **produto de convolução** entre duas funções.

**Definição 11.6.** Sejam  $f$  e  $g$  duas funções de  $\mathbb{R}^n$ . O produto de convolução  $f * g$  é definido por

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy.$$

A convolução merece ser chamada de produto, pois é linear em  $f$  e em  $g$ . Além disso, usando a mudança de variáveis  $y' = x - y$ , vemos que

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y')g(x - y') dy' = (g * f)(x).$$

Portanto, a convolução é comutativa,  $f * g = g * f$ .

**Observação 11.7.** Para a convolução existir, a integral acima tem que fazer sentido. Não vamos discutir estes detalhes técnicos. Mas observamos que a convolução está sempre bem definida nos cálculos que seguem abaixo.

**Observação 11.8.** A convolução pode ser vista como uma generalização do produto de polinômios. Se

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n, \quad q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n,$$

então o polinômio  $z(x) = p(x)q(x)$  satisfaz

$$z(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_{2n}x^{2n}, \text{ onde } c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_{k-1}b_1 + a_kb_0.$$

Ou seja,  $c_k$  coleta todos os produtos  $a_i b_j$  com  $i + j = k$ . Ou seja, se representarmos  $p(x) = (a_0, a_1, \dots, a_n)$  e  $q(x) = (b_0, b_1, \dots, b_n)$ , então  $z(x) = (c_0, c_1, \dots, c_{2n})$ , onde  $c_k = \sum_{i \leq k} a_i b_{k-i}$ .

A convolução é o análogo contínuo do produto de polinômios.

Se a função  $g$  tem soma 1, isto é, se  $\int g = 1$ , então a convolução  $f * g$  é uma **média ponderada** de  $f$ , com peso  $g$ : o valor de  $f * g$  em  $x$  é uma soma ponderada dos valores de  $f$  em  $y \in \mathbb{R}^n$ , onde  $f(x - y)$  tem peso  $g(y)$ .

Em particular, para cada  $t > 0$ , a convolução  $G_t * f$  no ponto  $x$  é uma média com peso  $G_t$ . Para  $t \approx 0$ , a ponderação pesa sobre os pontos próximos de  $x$ . Se  $t \approx \infty$ , a ponderação é distribuída de forma mais uniforme. No limite, temos o seguinte resultado.

**Lema 11.9.** *Suponha  $f$  uma função contínua e limitada. Então,  $G_t * f$  está bem definida e*

$$\lim_{t \rightarrow 0} (G_t * f)(x) = f(x)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

*Demonastração.* Usando (11.4), temos

$$(G_t * f)(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t, y)f(x - y) dy - f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t, y)(f(x - y) - f(x)) dy.$$

Então,

$$|(G_t * f)(x) - f(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} G(t, y)|f(x - y) - f(x)| dy.$$

Dividimos esta integral em duas partes

$$\int_{|y|<\delta} G(t, y)|f(x - y) - f(x)| dy + \int_{|y|>\delta} G(t, y)|f(x - y) - f(x)| dy. \quad (11.5)$$

Fixe  $\varepsilon > 0$ . Como  $f$  é contínua, escolhemos  $\delta$  tal que  $|f(x - y) - f(x)| < \varepsilon$  se  $|y| < \delta$ . Neste caso, usando (11.4)

$$\int_{|y|<\delta} G(t, y)|f(x - y) - f(x)| dy \leq \varepsilon \int_{|y|<\delta} G(t, y) dy \leq \varepsilon. \quad (11.6)$$

Em seguida, se  $|f(x)| < M$ , então  $|f(x - y) - f(x)| \leq 2M$ . Logo,

$$\int_{|y|>\delta} G(t, y)|f(x - y) - f(x)| dy \leq 2M \int_{|y|>\delta} G(t, y) dy.$$

Fazendo mudança de variáveis,  $z = \frac{y}{\sqrt{4t}}$ , temos  $dy = (4t)^{n/2} dz$  e

$$\int_{|y|>\delta} G(t, y) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{|y|>\delta} e^{-\frac{|y|^2}{4t}} dy = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{|z|>\frac{\delta}{\sqrt{4t}}} e^{-|z|^2} dz \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0,$$

pois  $\frac{\delta}{\sqrt{4t}} \rightarrow \infty$ . Então, se  $|f(x)| < M$ ,

$$\int_{|y|>\delta} G(t, y)|f(x - y) - f(x)| dy < \varepsilon, \quad (11.7)$$

se  $t$  é suficientemente pequeno. Segue de (11.5), (11.6) e (11.7) que  $u(t, x) \rightarrow f(x)$  quando  $t \rightarrow 0$ .  $\square$

**Observação 11.10.** O inglês Paul Dirac (Prêmio Nobel de Física-1933) introduziu a função  $\delta_0$ , hoje chamada de **delta de Dirac**, da seguinte forma:  $\delta_0(x)$  vale 0 se  $x \neq 0$  e  $\delta_0(0) = \infty$ . Além disso,

$$\int \delta_0(y) dy = 1.$$

Neste caso,

$$(\delta_0 * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta_0(y) f(x - y) dy = f(x) \int_{\mathbb{R}^n} \delta_0(y) dy = f(x).$$

Ou seja,  $\delta_0 * f = f$ . Portanto, o Lema 11.9 diz que  $G_t \rightarrow \delta_0$  quando  $t \rightarrow 0$ .

Uma definição rigorosa de  $\delta_0$  é feita no contexto da **Teoria das Distribuições**.

Voltando à equação do calor, em cada instante  $t$ , a solução  $u(t)$  é dada pela convolução da solução fundamental  $G_t = G(t)$  com  $f$ . Como  $\int G_t = 1$ , a convolução é uma média ponderada de  $f(y)$ , com pesos  $G_t$ , veja a Figura 46. Esta média ponderada reflete um processo conhecido como **difusão**. Podemos interpretar  $G_t(x-y)$  como a probabilidade de uma informação situada no ponto  $y$  em  $t=0$  atingir o ponto  $x$  no instante  $t$ . Para todo  $t > 0$ ,  $G_t > 0$ . Isto significa que o fenômeno de difusão térmica tem **velocidade de propagação infinita**.

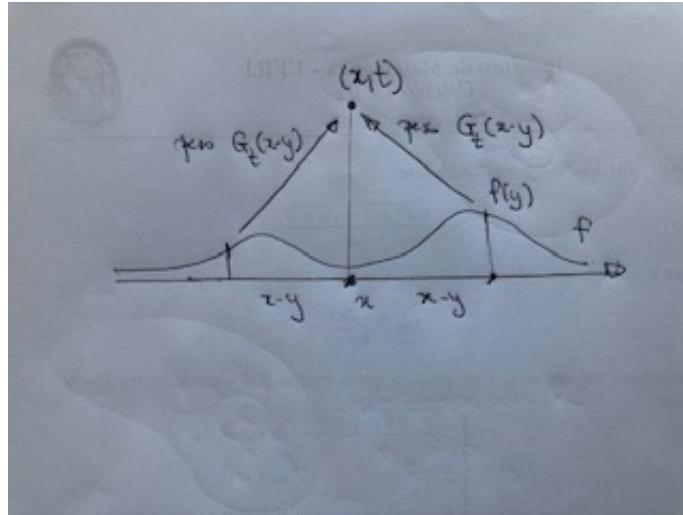


Figura 46: Convolução de  $G_t$  com  $f$

**Teorema 11.11.** Suponha que  $f$  seja uma função contínua e limitada. Então, (11.1) tem uma única solução, definida para  $t > 0$  por

$$u(t, x) = (G(t) * f)(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x - y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} G(t, y) f(x - y) dy. \quad (11.8)$$

*Demonstração.* Começamos por observar que a integral em (11.8) está bem definida, pois  $f$  é limitada e  $G(x) \rightarrow 0$  quando  $|x| \rightarrow \infty$  muito rapidamente. A unicidade da solução já foi mostrada. Resta mostrar que, de fato,  $u$  dada por (11.8) é solução. Deixando de lado os aspectos técnicos, temos

$$\partial_t u(t, x) = \partial_t \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x - y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t G(t, x - y) f(y) dy,$$

$$\Delta u(t, x) = \Delta \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x - y) f(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta G(t, x - y) f(y) dy.$$

Como  $\partial_t G = \Delta G$ , vemos que  $\partial_t u = \Delta u$ .

O fato que  $u(t, x) \rightarrow f(x)$  quando  $t \rightarrow 0$  foi mostrado no Lema 11.9. □

**Exemplo 11.12.** Vamos resolver a equação do calor na reta ( $n = 1$ ) com distribuição inicial  $f(x) = 0$ , se  $x < 0$  e  $f(x) = 1$  se  $x \geq 0$ . Neste caso,

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{4t}} f(x-y) dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{4t}} dy.$$

Não é possível calcular de forma explícita a integral. Fazendo mudança de variáveis,  $z = \frac{y}{\sqrt{4t}}$ , temos  $dy = \sqrt{4t} dz$  e

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4t}}} e^{-z^2} dy.$$

Para todo  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4t}}} e^{-z^2} dy.$$

Então, usando que

$$1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dy = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-z^2} dy,$$

vemos que

$$u(t, 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-z^2} dy = \frac{1}{2},$$

revelando, novamente, a velocidade infinita de propagação da informação. Além disso,

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4t}}} e^{-z^2} dy \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-z^2} dy = \frac{1}{2}.$$

Portanto, a temperatura  $u$  com o passar do tempo, tende a se estabilizar no valor médio  $\frac{1}{2}$ .