Cálculo Infinitesimal 3 – 2020

Prof. Flavio Dickstein.

Questão 1. Seja $\vec{f}(x, y) = (\cos x \,\text{sen}\, y, \text{sen}\; x\; \cos y)$.

(i) Mostre que rot $\vec{f} = 0$. (Há um teorema que garante que, neste caso, $\vec{f}$ é um campo gradiente.)

(ii) Calcule o potencial G de $\vec{f}$ resolvendo as equações

$$\partial_x G(x, y) = \cos x \,\text{sen}\; y, \quad \partial_y G(x, y) = \text{sen}\; x\; \cos y.$$

(iii) Alternativamente, determine G calculando

$$G(x, y) = \int_\gamma \vec{f} \cdot \vec{dl},$$

onde γ é uma curva ligando $(0, 0)$ a (x, y). (Escolha a curva mais simples possível.)

(iv) No item anterior, o que acontece se escolhermos outro ponto no lugar de $(0, 0)$?

Questão 2.

(i) Mostre que $\vec{f}(x, y) = (ye^{xy}, xe^{xy})$ é um campo conservativo e calcule o seu potencial.

(ii) Considere $\vec{g}(x, y) = (x + ye^{xy}, xe^{xy})$. Seja T o triângulo de vértices $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$ percorrido no sentido trigonométrico. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \vec{g} \cdot \vec{dl}$, o trabalho realizado por $\vec{g}$. (Simplifique as contas usando o item anterior.)

Questão 3. Considere dois caminhos indo de $(-1, 0)$ a $(1, 0)$: γ_1 é um segmento de reta e γ_2 é o arco de meia circunferência na parte superior do plano. Mostre que

$$\int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot \vec{dl} \neq \int_{\gamma_2} \vec{f} \cdot \vec{dl},$$

onde $\vec{f}(x, y) = (y^2, x^2)$.

Questão 4. Um campo vetorial $\vec{f}$ no plano é dito **radial** se ele é da forma $\vec{f}(x, y) = g(r)\vec{r}$, onde

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \vec{r} = \frac{1}{r}(x, y).$$

($\vec{r}$ é o vetor unitário que aponta na direção radial.) Suponha que a função **escalar** $g(t)$ tenha uma primitiva $G(t)$. Mostre que a função $G(x, y) = G(r)$ é um potencial de $\vec{f}$. A conclusão é que **todo campo radial é conservativo**.

Questão 5. Seja

$$\vec{f}(x, y) = \frac{1}{r^2}(-y, x), \text{ onde } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

e seja γ a circunferência unitária, percorrida na sentido trigonométrico.

(i) Repita a conta feita em sala, mostrando que rot $\vec{f} = 0$.

(ii) Repita a conta feita em sala, mostrando que $\int_\gamma \vec{f} \cdot \vec{dl} = 2\pi$.

(iii) Mostre que $G_1(x, y) = \arctan \dfrac{y}{x}$ é um campo potencial de $\vec{f}$.

(iv) Mostre que $G_2(x, y) = -\arctan \dfrac{x}{y}$ também é um campo potencial de $\vec{f}$.

(v) Mostre que $G_3(x, y) = \arcsin \dfrac{y}{r}$ também é um campo potencial de $\vec{f}$.

(vi) Mostre que G_1, G_2 e G_3 diferem de constantes.

Observe que G_3 está definida fora da origem, isto é, se $r \neq 0$. Portanto, G_3 está definida sobre a circunferência unitária e deveríamos concluir que

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot \vec{dl} = G_3(B) - G_3(A) = 0,$$

pois $A = B$ neste caso. Mas isto contraria o item (i).

Onde está o problema? A resposta é que as afirmativas acima não estão totalmente corretas. Em que regiões do plano G_1, G_2 e G_3 são potenciais de $\vec{f}$?