Cálculo Infinitesimal 3 – Lista 3 - 2020

Prof. Flavio Dickstein.

Questão 1. Um campo vetorial F em $\mathbb{R}^3$ é dito radial se ele é da forma $F(x,y,z) = g(r)\vec{r}$, onde $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ e $\vec{r} = \frac{1}{r}(x,y,z)$ é o vetor unitário da direção normal. Seja G uma primitiva de g. Mostre que $G(x,y,z) = G(r)$ (abuso de notação) é um potencial de F. (Isto é, nada muda em relação ao caso $\mathbb{R}^2$, funções radiais em $\mathbb{R}^3$ são conservativas.)

Resolução 1. *Se* $r(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$ *então* $r_x = \dfrac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}2x = \dfrac{x}{r}$. *Analogamente,* $r_y = \dfrac{y}{r}$ *e* $r_z = \dfrac{z}{r}$. *Ou seja,* $\nabla r = \vec{r} = \dfrac{1}{r}(x,y,z) = \vec{r}$. *Portanto,*

$$\nabla G = G'(r)\nabla r = g(r)\vec{r} = F.$$

Questão 2. Seja C o cilindro $x^2+y^2 = 1$ em $\mathbb{R}^3$ e seja γ a curva interseção do cilindro C com o plano $x+y+z = 1$. Considere o campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ dado por $F(x,y,z) = (1+y+z, 1+x+z, 1+x+y)$.

(i) Parametrize a curva γ.

(ii) Calcule a integral de linha $\int_\gamma F.dl$ (Você tem que escolher uma direção para percorrer a curva.)

(iii) Mostre que $\nabla \times F = 0$. (o rotacional é o produto vetorial do vetor $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ com o campo (F_1, F_2, F_3).)

(iv) Mostre que F é um campo conservativo, encontrando o seu potencial.

(v) Agora, você já pode saber se você acertou o item (ii).

Resolução 2. *(i)* γ *é parametrizado por* $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 1-\cos t - \sin t)$, $t \in (0, 2\pi)$.

(ii) Se $x = \cos t$, $y = \sin t$ *e* $z(t) = 1 - \cos t - \sin t)$, *então* $dx = -\sin t\,dt$, $dy = \cos t\,dt$, $dz = (\sin t - \cos t)\,dt$. *Logo,*

$$\int F_1\,dx + F_2\,dy + F_3\,dz =$$

$$\int_0^{2\pi} -(2-\cos t)\sin t + (2-\sin t)\cos t + (1+\cos t+\sin t)(\sin t - \cos t)\,dt. =$$

$$\int_0^{2\pi} \cos t - \sin t + \sin^2 t - \cos^2 t\,dt = 0.$$

(iii) É imediato ver que $\partial_i F_j = \partial_j F_i$ *para todo* i,j. *Logo,* $\nabla \times F = 0$.

(iv) Se $G_x = 1+y+z$, *então* $G = (1+y+z)x + h(y,z)$. *Então,* $G_y = x + h_y$. *Logo,* h_y *deve ser igual a* $1+z$, *o que dá* $h(y,z) = y + yz + k(z)$. *Então,* $G = x + xy + xz + y + yz + k(z)$ *e* $G_z = x+y+k'(z)$. *Assim,* $k'(z) = 1$ *e* $k(z) = z + C$. *Portanto,* $G = x+y+z+xy+xz+zy+C$ *é o potencial de* F.

Como F *é conservativo, a circulação de* F *em torno de qualquer curva fechada é igual a* 0.

Questão 3. A área A de uma região planar R pode ser calculada integrando-se a função constante 1 sobre R: $A = \int_R 1\, dxdy$. Use isto para calcular

(i) a área da região limitada superiormente pela curva $y = f(x)$ e inferiormente pela curva $y = g(x)$, $x \in [a, b]$.

(ii) a área da elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Resolução 3. *(i) Por Fubini,* $A = \displaystyle\int_a^b \int_{g(x)}^{f(x)} 1\, dydx = \int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$.

(ii) Vamos calcular a área da elipse usando a transformação $x = ar\cos\theta$, $y = br\sin\theta$, $\theta \in (0, 2\pi)$, $r \in (0, 1)$. *O jacobiano da transformação dá* $J = abr$. *Então,*

$$A = \int_0^1 \int_0^{2\pi} abr\, d\theta dr = \pi ab.$$

Questão 4. Use o Princípio de Cavalieri para calcular o volume do elipsóide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Resolução 4. *Para cada* $z \in (-c, c)$, *a interseção do elipsóide com o plano horizontal em* z *é a elipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{c^2},$$

que tem semi-eixos

$$a\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad b\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto, sua área vale

$$A(z) = \pi ab\left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right).$$

Pelo Princípio de Cavalieri,

$$V = \int_{-c}^{c} A(z)\, dz = \pi ab \int_{-c}^{c} 1 - \frac{z^2}{c^2}\, dz = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Questão 5. Seja Ω a parte do círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ no primeiro quadrante. Seja

$$I = \int_\Omega x^2 - y^2.$$

Sem fazer nenhuma conta, entenda que $I = 0$. Mostre que $I = 0$ considerando a mudança de variável

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}.$$

Resolução 5. *Temos que*

$$g\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Logo, $J = -1$. *Como* g *leva* Ω *em* Ω, *temos*

$$I = \int_\Omega x^2 - y^2 \, dxdy = \int_\Omega v^2 - u^2 \, dudv = \int_\Omega y^2 - x^2 \, dxdy.$$

Logo, $I = 0$.