Cálculo Infinitesimal 3 – Lista 7 - 2020

Prof. Flavio Dickstein.

Questão 1. Seja $F(x,y,z) = (yz, xz, xy)$ e seja S a parte superior da superfície esférica definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ e $z > 0$. Verifique o Teorema de Stokes neste caso: calcule o fluxo de $\nabla \times F$ através de S e a circulação de F no bordo de S para verificar que são iguais.

Resolução 1. *Temos que*

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ yz & xz & xy \end{vmatrix} = (0,0,0).$$

($G = xyz$ é um potencial de F.) Então,

$$\int_S \nabla \times F \cdot d\eta = 0 = \oint_\gamma F \cdot dl.$$

Questão 2. Repita a Questão 1 para $F(x,y,z) = (xyz, xyz, xyz)$.

Resolução 2. *Temos que*

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ xyz & xyz & xyz \end{vmatrix} = (xz - xy, xy - yz, yz - xz)$$

e $\eta = (x,y,z)$. Então,

$$\nabla \times F \cdot \eta = x^2(z-y) + y^2(x-z) + z^2(y-x).$$

Parametrizando S por $\alpha(\varphi,\theta) = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi)$, temos

$$\eta = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi),$$

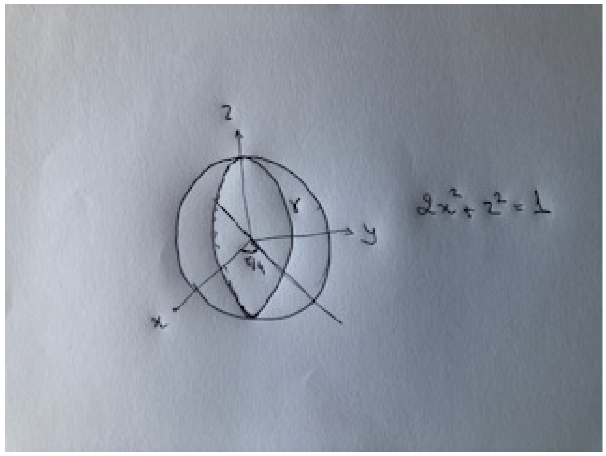
$$\nabla \times F(\varphi,\theta) \cdot \eta = \sin^2\varphi\cos^2\theta(\cos\varphi - \sin\varphi\sin\theta) + \sin^2\varphi\sin^2\theta(\sin\varphi\cos\theta - \cos\varphi) + \cos^2\varphi\sin\varphi(\sin\theta - \cos\theta).$$

Então, omitindo os termos cujas integrais em θ se anulam, e lembrando que o Jacobiano vale $\sin\varphi$, vemos que

$$\int_S \nabla \times F \cdot d\eta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^3\varphi\cos^2\theta\cos\varphi - \sin^3\varphi\sin^2\theta\cos\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^3\varphi\cos\varphi\cos 2\theta = 0.$$

Por outro lado, $F(\cos\theta, \sin\theta, 0) = (0,0,0)$, de modo que $\oint_\gamma F \cdot dl = 0$.

Questão 3. Repita a Questão 1 para $F(x,y,z) = (xyz, xyz, xyz)$ e S a parte da superfície esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ situada no semiplano $x - y > 0$.



Resolução 3. *O semi-plano $x > y$ corresponde a $\sin\varphi\cos\theta > \sin\varphi\sin\theta$, ou seja, $\cos\theta > \sin\theta$, ou seja, $\theta \in (-3\pi/4, \pi/4)$. Neste caso,*

$$\int_S \nabla \times F \cdot d\eta = \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\pi} \sin^3\varphi\cos^2\theta(\cos\varphi - \sin\varphi\sin\theta) +$$
$$\sin^3\varphi\sin^2\theta(\sin\varphi\cos\theta - \cos\varphi) + \cos^2\varphi\sin^2\varphi(\cos\theta - \sin\theta) =$$
$$\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\pi} \sin^3\varphi\cos\varphi(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + \sin^4\varphi(\sin^2\theta\cos\theta - \cos^2\theta\sin\theta) +$$
$$\cos^2\varphi\sin^2\varphi(\sin\theta - \cos\theta).$$

Observando que $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$, vemos que

$$\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta = 0, \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta\sin\theta = -\frac{\sqrt{2}}{6}, \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\theta\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{6}, \int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos\theta - \sin\theta = 2\sqrt{2}.$$

Portanto,

$$\int_S \nabla \times F \cdot d\eta = \frac{\sqrt{2}}{3}\int_0^{\pi} \sin^4\varphi - 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \cos^2\varphi\sin^2\varphi.$$

Além disso,

$$\int_0^{\pi} \cos^2\varphi\sin^2\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \sin^2 2\varphi = \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 4\varphi}{2} = \frac{\pi}{8}.$$
$$\int_0^{\pi} \sin^4\varphi = \int_0^{\pi} \sin^2\varphi - \sin^2\varphi\cos^2\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}.$$

Então,

$$\int_S \nabla \times F \cdot d\eta = \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{3\pi}{8} - 2\sqrt{2}\frac{\pi}{8} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{8}.$$

Por outro lado, o bordo γ de S é a interseção de S com o plano $x = y$. Parametrizamos γ por $\alpha(\varphi) = (\frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}}, \frac{\cos\varphi}{\sqrt{2}}, \sin\varphi)$. $\varphi \in (0, 2\pi)$. Então,

$$F(\alpha(\varphi)) \cdot \alpha'(\varphi) = \frac{1}{2}\cos^2\varphi\sin\varphi(-\frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}} - \frac{\sin\varphi}{\sqrt{2}} + \cos\varphi) = \frac{1}{2}\cos^2\varphi\sin\varphi(-\sqrt{2}\sin\varphi + \cos\varphi)$$

e

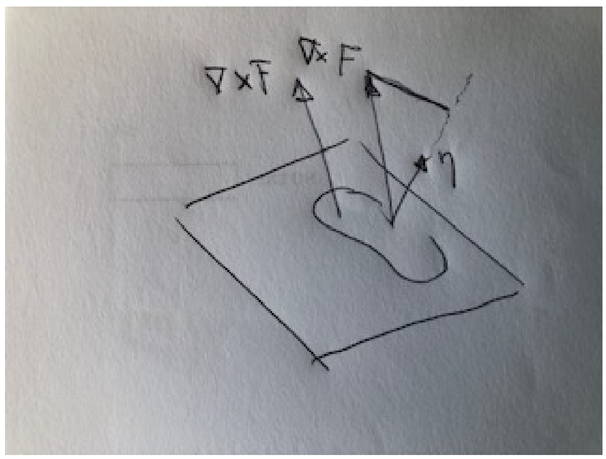
$$\int_\gamma F \cdot dl = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\cos^2\varphi\sin\varphi(-\sqrt{2}\sin\varphi + \cos\varphi) = -\frac{\sqrt{2}}{8}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 4\varphi}{2} = -\frac{\pi\sqrt{2}}{8}.$$

Questão 4. Seja $F(x, y, z) = (z, x, y)$ e seja Q um quadrado de lado 1 situado no plano $2x + 2y + z = 1$. (A localização do quadrado no plano não é importante.) Escolha um modo de percorrer o bordo γ do quadrado e calcule a circulação de F em γ. (A resposta é 5/3. Sugestão: use o Teorema de Stokes.)

Resolução 4. *Temos que*

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ z & x & y \end{vmatrix} = (1, 1, 1).$$

Além disso, o vetor normal unitário η vale $\frac{1}{3}(2, 2, 1)$. Portanto, $\nabla \times F \cdot \eta = \frac{5}{3}$. Assim,



$$\int_Q \nabla \times F \cdot d\eta = \frac{5}{3}|Q| = \frac{5}{3}.$$

Escolhendo a direção de circulação pela regra da mão direita, a circulação de F é igual a 5/3.

Questão 5. Considere o campo gravitacional gerado por uma esfera de raio 1 e contendo uma massa M. (Assuma que a constante de gravitação universal G valha 1.) Suponha que em certo instante um corpo de massa $m = 1$ é colocado na posição $(1, 2, 2)$. A massa então se move sob a ação do campo gravitacional.

(i) Determine a velocidade do corpo quando ele passa pelo ponto $(2, 4, 4)$. (Esta é fácil.)

(ii) Determine quanto tempo o corpo leva para chegar ao ponto $(2, 4, 4)$. (Esta é difícil.)

Resolução 5. *Vale a lei de conservação de energia $E + P = C$ onde $E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}v^2$ é a energia cinética e $P = \frac{1}{r}$ é a energia potencial. No instante inicial, a posição é $(1, 2, 2)$, ou seja, $r = 3$ e a velocidade v é zero. Então, $C = \frac{1}{3}$. No ponto $(2, 4, 4)$, r vale 6. Então,*

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{6} \Longrightarrow v = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Isto responde ao item (i). Para responder (ii), usamos novamente a conservação de energia

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{r},$$

Então,

$$v = \left(\frac{2(r-3)}{3r}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lembrando que $v = r'$, devemos resolver a equação diferencial

$$r' = \left(\frac{2(r-3)}{3r}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Seja $h(r) = \left(\frac{3r}{2(r-3)}\right)^{\frac{1}{2}}$. Então, $h(r)r' = 1$. Integrando,

$$H(r(t)) - H(r(0)) = \int_0^t h(r)r' = t.$$

Temos que $r(0) = 3$ e $r(t) = 6$. Para encontrar t, devemos calcular

$$H(r) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \int \left(\frac{r}{r-3}\right)^{\frac{1}{2}} dr.$$

Fazendo $s = \left(\frac{r}{r-3}\right)^{\frac{1}{2}}$, temos

$$r = \frac{3}{s^2-1} + 3 \Longrightarrow dr = -\frac{6s}{(s^2-1)^2}\, ds.$$

Logo,

$$H(r) = -3\sqrt{6}\int \frac{s^2}{(s^2-1)^2}\, ds = -3\sqrt{6}\int \frac{s^2}{(s-1)^2(s+1)^2}\, ds$$

Usamos frações parciais

$$\frac{s^2}{(s-1)^2(s+1)^2} = \frac{A}{(s-1)^2} + \frac{B}{(s-1)} + \frac{C}{(s+1)^2} + \frac{D}{(s+1)}.$$

para encontrar H.

Questão 6. Seja $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função radial. Escrevendo $u(x, y, z) = u(r)$, mostre que

$$\Delta u = u'' + \frac{2}{r}u' = \frac{1}{r^2}(r^2u')'.$$

Suponha que u seja harmônica. Neste caso,

$$(r^2u')' = 0.$$

Conclua que existem duas constantes A e B tais que

$$u(r) = \frac{A}{r} + B.$$

A moral da história é que as funções harmônicas e radiais em $\mathbb{R}^3$ ou são constantes ou são potenciais gerados por uma carga pontual na origem.

Resolução 6. *Lembramos que* $r_x = x/r$ *e* $r_y = y/r$. *Pela regra da cadeia,*

$$u_x = u_r r_x = u_r \frac{x}{r}.$$

Então,

$$u_{xx} = u_{rx}\frac{x}{r} + u_r \frac{r - x r_x}{r^2} = u_{rr}\frac{x^2}{r^2} + u_r \frac{r - x^2/r}{r^2} = u_{rr}\frac{x^2}{r^2} + u_r \frac{y^2 + z^2}{r^3}.$$

Analogamente,

$$u_{yy} = u_{rr}\frac{y^2}{r^2} + u_r \frac{x^2 + z^2}{r^3},$$

$$u_{zz} = u_{rr}\frac{z^2}{r^2} + u_r \frac{x^2 + y^2}{r^3},$$

Assim

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_{rr}\frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} + 2u_r \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^3} = u_{rr} + \frac{2}{r} u_r = \frac{1}{r^2}(r^2 u')'.$$

Se u *é radial e harmônica,*

$$(r^2 u')' = 0 \Longrightarrow r^2 u' = C \Longrightarrow u' = \frac{C}{r^2}.$$

Então, $u(r) = -\dfrac{C}{r} + B.$