Cálculo Infinitesimal 3 – Lista 3 - 2020

Prof. Flavio Dickstein.

Questão 1. Seja B a circunferência de raio 1 em $\mathbb{R}^2$ e seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$, se $x \in B$, e $f(x) = 0$ se $x \notin B$. (f é a função característica de B.) Mostre que f é integrável, e que $\int_B f = \pi$.

Questão 2. Seja $R = \{(x, y), 0 \leq y \leq x + 1, 0 \leq x \leq 1\}$. Calcule $\int_R e^{x+y}\, dxdy$.

Questão 3. A área A de uma região planar R pode ser calculada como $A = \int_R 1\, dxdy$. Use isto para calcular

(i) a área da região limitada superiormente pela curva $y = f(x)$ e inferiormente pela curva $y = g(x)$, $x \in [a, b]$.

(ii) a área da elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Calcule a área da elipse fazendo uma mudança de variáveis que leve a elipse em um círculo.

Questão 4. Use o exercício anterior e o Princípio de Cavalieri para calcular o volume do elipsóide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$. Alternativamente, calcule esse volume usando uma mudança de variáveis que leve o elipsóide em uma esfera.

Questão 5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \dfrac{1}{4x^2 - 2xy + y^2}$. Seja B o círculo de raio 1. Discuta a existência das integrais $\displaystyle\int_B f$ e $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B} f$. (Sugestão: Use o Teorema Espectral para escrever a forma quadrática de modo mais conveniente.)

Questão 6. Seja $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ a função radial dada por $f(r) = r^{-p} \cos r$, onde $p > 0$. Sejam $\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| < 1\}$ e $\Omega_2 = \{x \in \mathbb{R}^n, |x| > 1\}$. Discuta para que valores de p as integrais $\displaystyle\int_{\Omega_1} f$ e $\displaystyle\int_{\Omega_2} f$ são finitas.