Cálculo Infinitesimal 3 – 2020 - Lista 1

Prof. Flavio Dickstein.

Questão 1. Seja $\vec{f}(x,y) = (\cos x\, \sin y, \sin x\, \cos y)$.

(i) Mostre que rot $\vec{f} = 0$. (Há um teorema que garante que, neste caso, $\vec{f}$ é um campo gradiente.)

(ii) Calcule o potencial G de $\vec{f}$ resolvendo as equações

$$\partial_x G(x,y) = \cos x\, \sin y, \quad \partial_y G(x,y) = \sin x\, \cos y. \tag{1}$$

(iii) Alternativamente, determine G calculando

$$G(x,y) = \int_\gamma \vec{f} \cdot \vec{dl}, \tag{2}$$

onde γ é uma curva ligando $(0,0)$ a (x,y). (Escolha a curva mais simples possível.)

(iv) No item anterior, o que acontece se escolhermos outro ponto no lugar de $(0,0)$?

Resolução 1. *Temos que* $\partial_y(\cos x\, \sin y) = \cos x\, \cos y$ *e* $\partial_x(\sin x\, \cos y) = \cos x\, \cos y$. *Então,* $\nabla \times f = 0$.

Vamos ver se existe um potencial G. *Se* $\partial_x G(x,y) = \cos x\, \sin y$, *então*

$$G(x,y) = \sin x\, \sin y + g(y).$$

Derivando em relação a y, $\partial_y G(x,y) = \sin x\, \cos y + g'(y)$. *Basta então tomar* $g'(y) = 0$, *ou seja,* $g(y) = C$. *Conclusão:* $G(x,y) = \sin x\, \sin y + C$ *é um campo potencial de* $\vec{f}$.

Façamos de outra maneira, usando (2) *Escolhemos a curva mais simples, a linha reta, parametrizada por* $\alpha(t) = t(x,y)$, $t \in [0,1]$. *Então,* $\alpha'(t) = (x,y)$ *e*

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot \vec{dl} = \int_0^t (\cos tx\, \sin ty, \sin tx\, \cos ty) \cdot (x,y)\, dt =$$

$$\int_0^t x \cos tx\, \sin ty + y \sin tx\, \cos ty = \sin tx\, \sin ty\Big|_0^1 = \sin x\, \sin y.$$

O candidato $G(x,y) = \cos x\, \sin y$ *é, de fato, um potencial, porque* $\nabla G = \vec{f}$. *Se, no lugar de* $(0,0)$, *tivéssemos tomado* $(4,2)$ *como ponto de partida, o caminho de* $(4,2)$ *até* (x,y) *seria o caminho de* $(4,2)$ *a* $(0,0)$ *mais o caminho de* $(0,0)$ *a* (x,y). *A diferença entre os dois é a integral de* $(4,2)$ *a* $(0,0)$, *que é uma constante.*

Questão 2.

(i) Mostre que $\vec{f}(x,y) = (ye^{xy}, xe^{xy})$ é um campo conservativo e calcule o seu potencial.

(ii) Considere $\vec{g}(x,y) = (y + ye^{xy}, xe^{xy})$. Seja T o triângulo de vértices $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (0,1)$ percorrido no sentido trigonométrico. Calcule $\oint_\gamma \vec{g} \cdot \vec{dl}$, a circulação de $\vec{g}$. (Simplifique as contas usando o item anterior.)

Resolução 2. *É fácil ver que* $G(x,y) = e^{xy}$ *é um potencial de* $\vec{f}$. *Isto mostra (i).*

Para (ii), escrevemos

$$\vec{g} = (y,0) + (ye^{xy}, xe^{xy}) = \vec{h} + \vec{f}.$$

Como $\vec{f}$ *é conservativo,*

$$\oint_\gamma \vec{g} \cdot \vec{dl} = \oint_\gamma \vec{h} \cdot \vec{dl} + \oint_\gamma \vec{f} \cdot \vec{dl} = \oint_\gamma \vec{h} \cdot \vec{dl}.$$

Basta então calcular a circulação de $\vec{h}$. *A curva* γ *tem três partes. Cada uma das partes será calculada usando a expressão*

$$\int_\gamma h \cdot dl = \int_0^1 h_1\, dx + h_2\, dy,$$

da seguinte forma. Escrevemos $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. *Na expressão acima, substituímos* dx *por* $x'(t)dt$, dy *por* $y'(t)dt$ *e calculamos* h_1 *e* h_2 *em* $(x(t), y(t))$.

A reta γ_1 *que vai de* $(0,0)$ *a* $(1,0)$ *é parametrizada por* $(x(t), y(t)) = t(1,0) = (t,0)$. *Então,* $dx = dt$, $dy = 0$, $h_1(t,0) = 0$ *e* $h_2(t,0) = 0$. *Assim,*

$$\int_{\gamma_1} h \cdot dl = 0.$$

A reta γ_2 *que vai de* $(1,0)$ *a* $(0,1)$ *é parametrizada por* $(x(t), y(t)) = t(0,1) + (1-t)(1,0) = (1-t, t)$. *Logo,* $dx = -dt$, $dy = dt$, $h_1(1-t, t) = t$ *e* $h_2(1-t,t) = 0$. *Assim,*

$$\int_{\gamma_2} h \cdot dl = \int_0^1 h_1\, dx + h_2\, dy = \int_0^1 -tdt = -\frac{1}{2}.$$

A reta γ_3 *que vai de* $(0,1)$ *a* $(0,0)$ *é parametrizada por* $(x(t), y(t)) = (0, 1-t)$. *Temos* $dx = 0$, $dy = -dt$, $h_1(0, 1-t) = 1-t$ *e* $h_2(0, 1-t) = 0$. *Assim,*

$$\int_{\gamma_3} h \cdot dl = \int_0^1 h_1\, dx + h_2\, dy = 0.$$

Portanto, $\oint_\gamma f = \int_{\gamma_1} h + \int_{\gamma_2} h + \int_{\gamma_3} h = -\frac{1}{2}$.

Questão 3. Considere dois caminhos indo de $(-1,0)$ a $(1,0)$: γ_1 é um segmento de reta e γ_2 é o arco de meia circunferência na parte superior do plano. Mostre que

$$\int_{\gamma_1} \vec{f} \cdot \vec{dl} \neq \int_{\gamma_2} \vec{f} \cdot \vec{dl},$$

onde $\vec{f}(x,y) = (y^2, x^2)$.

Resolução 3. *A curva* γ_1 *é parametrizada por* $(x(t), y(t)) = (1-t)(-1,0) + t(1,0) = (2t-1, 0)$. *Portanto,* $dx = 2dt$, $dy = 0$, $h_1(2t-1, 0) = 0$ *e* $h_2(2t-1, 0) = (2t-1)^2$.

$$\int_{\gamma_1} h_1\, dx + h_2\, dy = 0.$$

A curva γ_2 é parametrizada por $(x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t)$, $t \in (\pi, 0)$. Portanto, $dx = -\sin t\, dt$, $y(t) = \cos t\, dt$, $h_1((\cos t, \sin t)) = \sin^2 t$, $h_2((\cos t, \sin t)) = \cos^2 t$. Então,

$$\int_{\gamma_2} h_1\, dx + h_2\, dy = \int_{\pi}^{0} -\sin^3 t + \cos^3 t.$$

Mas, $\int \cos^3 t = \int \cos t(1 - \sin^2 t) = \sin t - \sin^3 t/3$ e $\int \sin^3 t = \int \sin t(1 - \cos^2 t) = -\cos t + \cos^3 t/3$. Calculando de π a 0 , obtemos

$$\int_{\gamma_2} \vec{f} \cdot dl = -\frac{4}{3}.$$

Questão 4. Um campo vetorial $\vec{f}$ no plano é dito **radial** se ele é da forma $\vec{f}(x, y) = g(r)\vec{r}$, onde

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \vec{r} = \frac{1}{r}(x, y).$$

($\vec{r}$ é o vetor unitário que aponta na direção radial.) Suponha que a função **escalar** $g(t)$ tenha uma primitiva $G(t)$. Mostre que a função $G(x, y) = G(r)$ é um potencial de $\vec{f}$. A conclusão é que **todo campo radial é conservativo**.

Resolução 4. *Seja uma função G* **escalar** *radial, isto é, $G(x, y) = G(r)$. Então, $\nabla G = G' \nabla r$, isto é, $G_x = G'(r) r_x$ e $G_y = G'(r) r_y$. Como $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$,*

$$r_x = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} 2x = \frac{x}{(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x}{r}.$$

Analogamente $r_y = \dfrac{y}{r}$, isto é,

$$\nabla r(x, y) = \frac{1}{r}(x, y) = \vec{r}.$$

Então,

$$\nabla G = G'(r) \nabla r = G'(r) \vec{r}.$$

Conclusão: se $g(r)\vec{r}$ é um campo radial e se G é uma primitiva de g, então $G(x, y)$ é um potencial do campo.

Questão 5. Seja

$$\vec{f}(x, y) = \frac{1}{r^2}(-y, x), \text{ onde } r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

e seja γ a circunferência unitária, percorrida na sentido trigonométrico.

(i) Repita a conta feita em sala, mostrando que rot $\vec{f} = 0$.

(ii) Repita a conta feita em sala, mostrando que $\int_\gamma \vec{f} \cdot \vec{dl} = 2\pi$.

(iii) Mostre que $G_1(x, y) = \arctan \dfrac{y}{x}$ é um campo potencial de $\vec{f}$.

(iv) Mostre que $G_2(x, y) = -\arctan \dfrac{x}{y}$ também é um campo potencial de $\vec{f}$.

(v) Mostre que $G_3(x, y) = \arcsin \dfrac{y}{r}$ também é um campo potencial de $\vec{f}$.

(vi) Mostre que G_1, G_2 e G_3 diferem de constantes.

Observe que G_3 está definida fora da origem, isto é, se $r \neq 0$. Portanto, G_3 está definida sobre a circunferência unitária e deveríamos concluir que

$$\int_\gamma \vec{f} \cdot \vec{dl} = G_3(B) - G_3(A) = 0,$$

pois $A = B$ neste caso. Mas isto contraria o item (ii).

Onde está o problema? A resposta é que as afirmativas acima não estão totalmente corretas. Em que regiões do plano G_1, G_2 e G_3 são potenciais de $\vec{f}$?

Resolução 5. *Os itens (i) e (ii) não apresentam dificuldades, só trabalho braçal. Os itens (iii), (iv) e (v) são análogos, vamos fazer o (v). Pela regra da cadeia,*

$$\partial_x \arcsin \frac{y}{r} = \arcsin' \frac{y}{r} \partial_x \frac{y}{r} = \frac{1}{(1 - \frac{y^2}{r^2})^{\frac{1}{2}}} y(-r^{-2} r_x) = -\frac{r}{x} \frac{y}{r^2} \frac{x}{r} = -\frac{y}{r^2}.$$

$$\partial_y \arcsin \frac{y}{r} = \arcsin' \frac{y}{r} \partial_y \frac{y}{r} = \frac{r}{x} \frac{r - y r_y}{r^2} = \frac{r}{x} \frac{x^2}{r^3} = \frac{x}{r^2}.$$

Se $\nabla G_1 = \nabla G_2 = \nabla G_3$, então $G_1 - G_2 = C_1$ e $G_1 - G_3 = C_2$. As constantes são fáceis de determinar, a partir do desenho:

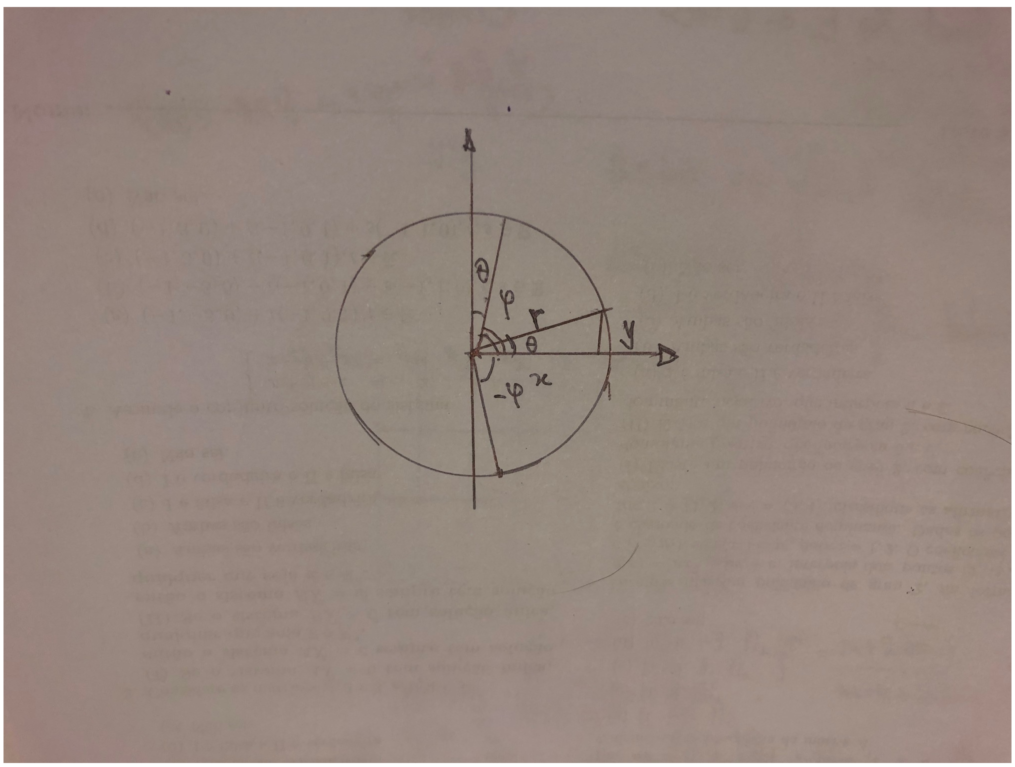

Figura 1: Seno e Tangente

Vemos que $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$, $\tan\varphi = \dfrac{x}{y}$, $\sin\theta = \dfrac{y}{r}$. *Mas* $\theta + \varphi = \dfrac{\pi}{2}$. *Portanto,* $\arctan \dfrac{y}{x} = \arcsin \dfrac{y}{r}$ *e* $\arctan \dfrac{y}{x} - (-\arctan \dfrac{x}{y}) = \dfrac{\pi}{2}$.

Em resumo: O potencial G associado ao campo $\vec{f}$ é o ângulo θ!