

## 1 Integral no plano

Nas aulas anteriores, discutimos integrais de funções que dependem de um parâmetro. Mesmo se  $f$  for um campo vetorial, sua restrição a uma curva é uma função escalar. Nesta seção, vamos discutir a integração de funções a várias variáveis. Comecemos por discutir o caso de duas variáveis.

Um retângulo em  $\mathbb{R}^2$  será chamado de um bloco, e denotado por  $B$ . Vamos considerar  $f : B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função **limitada**. Para começar, podemos pensar em calcular o volume embaixo de uma função positiva  $f(x, y)$  definida sobre  $B$ .

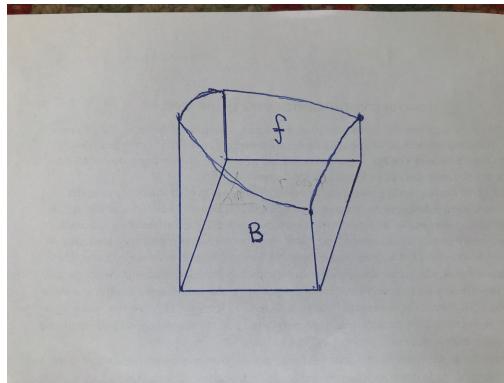


Figura 1: Volume abaixo de uma função

Pensando como Leibnitz, para cada ponto  $(x, y)$  de  $B$  a área o volume  $dV$  gerado por variações  $dx$  e  $dy$  nas duas direções é dado por  $dV = f(x, y)dA$ , onde  $dA = dx dy$ .

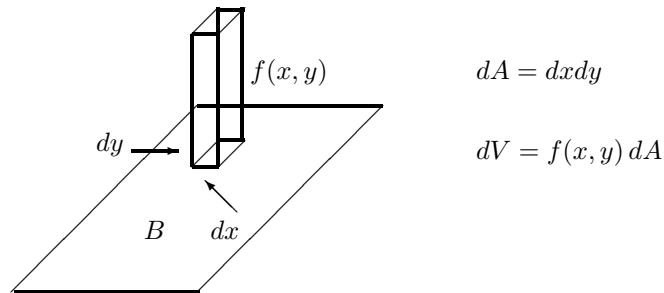


Figura 2: Volume infinitesimal

A integral  $I$  de  $f$  será uma soma contínua de  $dV$ 's

$$I = \int_B dV = \int_B f(x, y) dx dy.$$

A definição precisa da integral envolve **somas de Riemann**. Imitando o caso de uma variável, dividimos o intervalo  $[a, b]$  em  $n$  partes  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ . Aqui  $x_0 = a$  e  $x_n = b$ . Seja  $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ . (Os intervalos não precisam ser de mesmo tamanho.) Definimos ainda  $\Delta x = \max_i \Delta x_i$ , o maior tamanho dos intervalos em  $x$ . Da mesma forma, dividimos o intervalo  $[c, d]$  em  $m$  partes  $[y_j, y_{j+1}]$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, m - 1$ , com  $y_0 = c$  e  $y_m = d$ . Seja  $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$  e  $\Delta y = \max_j \Delta y_j$ , o maior tamanho dos intervalos em  $y$ .

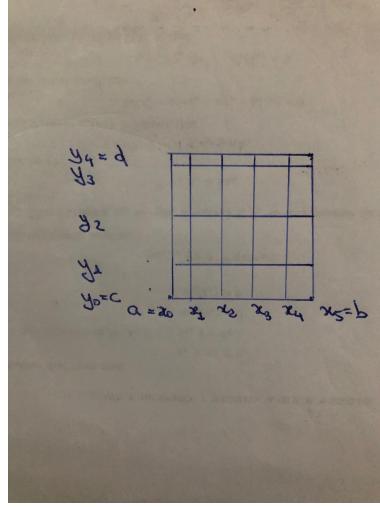


Figura 3: Partição

Obtemos assim uma partição  $\mathcal{P}$  de  $B$  em subblocos  $B_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ . Isto é,

$$B = \bigcup_{B_{i,j} \in \mathcal{P}} B_{i,j}.$$

O tamanho da partição  $\mathcal{P}$  é definido por  $|\mathcal{P}| = \max\{\Delta x, \Delta y\}$ . A área de  $B_{i,j}$  vale

$$A_{i,j} = \Delta_i^x \Delta_j^y.$$

O volume infinitesimal

$$dV = f(x, y) dA$$

será substituído por

$$V_{i,j} = f_{i,j} A_{i,j},$$

onde  $f_{i,j} = f(x, y)$  para algum  $(x, y) \in B_{i,j}$ .

Soma de Riemann associada:

$$S(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f_{i,j} A_{i,j} \tag{1.1}$$

$f$  é (Riemann) integrável sobre  $B$  se

$$S(\mathcal{P}) \rightarrow I \text{ quando } |\mathcal{P}| \rightarrow 0,$$

independentemente da escolha dos pontos  $(x, y)$  em cada  $B_{i,j}$ .

Notação:  $\int_B f$  ou  $\int_B f(x, y) dx dy$  ou  $\int_B f dx dy$ . Ou ainda, usamos  $\int \int_B$ .

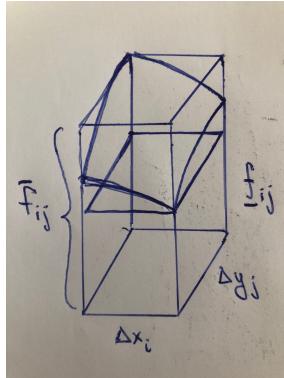


Figura 4: Volumes máximo e mínimo em cada bloco

Outro modo de definir integral: Sejam  $\underline{f}_{i,j}$  e  $\bar{f}_{i,j}$  o ínfimo e o supremo de  $f$  no bloco  $B_{i,j}$  e

$$L(\mathcal{P}) = \sum_i \sum_j \underline{f}_{i,j} A_{i,j}, \quad U(\mathcal{P}) = \sum_i \sum_j \bar{f}_{i,j} A_{i,j}.$$

Então,  $L(\mathcal{P}) \leq S(\mathcal{P}) \leq U(\mathcal{P})$ .

Quando a partição  $\mathcal{P}$  vai se refinando,  $L(\mathcal{P})$  vai crescendo e  $U(\mathcal{P})$  vai decrescendo.



Definimos as integrais inferior e superior de  $f$  como

$$\int_B f = \sup L(\mathcal{P}), \quad \bar{\int}_B f = \inf U(\mathcal{P})$$

onde o supremo e o ínfimo são tomados sobre todas as partições. Então,

$$L(\mathcal{P}) \nearrow \int_B f, \quad U(\mathcal{P}) \searrow \bar{\int}_B f,$$

Dizemos que  $f$  é integrável quando  $\int_B f = \bar{\int}_B f$ .

**Exemplo 1.1.** Seja  $f(x, y) = C$  uma função constante. Então,  $f$  é integrável e  $\int_B f = C|B|$ .

**Exemplo 1.2.** Seja  $f$  que vale 0 nos racionais e 1 nos irracionais. Então,  $L(\mathcal{P}) = 0$  e  $U(\mathcal{P}) = |B|$ , onde  $|B|$  é a área de  $B$ . Logo,  $\int_B f = 0$  e  $\bar{\int}_B f > 0$ . Então,  $f$  não é integrável.

**Exemplo 1.3.** Se  $f(x, y)$  é contínua em um bloco  $B$  fechado, então  $f$  é integrável. A demonstração é a mesma do caso de uma variável, e usa o fato que uma função contínua em um conjunto fechado e limitado de  $\mathbb{R}^2$  (um compacto) é uniformemente contínua.

**Exemplo 1.4.** Seja  $f(x, y) = xy$  e  $B = [0, 1] \times [0, 1]$ . Vamos fazer as contas na mão para calcular  $\int \int_B f(x, y) dx dy$ . Para simplificar, vamos dividir os dois lados em  $n$  partes iguais. Assim,  $x_i = \frac{i}{n}$ ,  $y_j = \frac{j}{n}$  e  $A_{i,j} = \frac{1}{n^2}$ ,  $1 \leq i, j \leq n$ . Neste caso,

$$\underline{f}_{i,j} = x_i y_j = \frac{ij}{n^2}, \quad \bar{f}_{i,j} = x_{i+1} y_{j+1} = \frac{(i+1)(j+1)}{n^2}.$$

Temos,

$$\begin{aligned} L(\mathcal{P}) &= \sum_i \sum_j \underline{f}_{i,j} A_{i,j} = \frac{1}{n^4} \sum_i \sum_j ij = \frac{1}{n^4} \sum_i i \sum_j j = \\ &= \frac{1}{n^4} \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Assim,  $\underline{\int}_B f = \frac{1}{4}$ . Em cada bloco,

$$(\bar{f}_{i,j} - \underline{f}_{i,j}) A_{i,j} = \frac{i+j+1}{n^4} \leq \frac{2n+1}{n^4} = \frac{3}{n^3}.$$

Como temos  $n^2$  blocos  $B_{i,j}$ , vemos que  $U(\mathcal{P}) - L(\mathcal{P}) \leq \frac{3}{n}$ . Então,  $U(\mathcal{P}) \searrow \frac{1}{4} = \overline{\int}_B f$ . Conclusão:  $f$  é integrável e  $\int_B f = \frac{1}{4}$ .

**Exemplo 1.5.** Seja  $B = [-1, 1] \times [0, 1]$  e  $f$  a função que vale 1 se  $x > 0$  e 0 se  $x \leq 0$ . Então,  $f$  é integrável em  $B$  e  $\int_B f = 1$ .

Quão descontínua uma função integrável pode ser? A resposta foi dada por Lebesgue:  $f$  é integrável se e só se o conjuntos de descontinuidades de  $f$  tem **medida nula**. Um conjunto tem medida nula se pode ser coberto por um conjunto enumerável de blocos de volume total arbitrariamente pequeno.

**Exercício 1.6.** Mostre que todo conjunto enumerável é de medida nula. Conclua que os racionais têm medida nula.

## 1.1 Integral em um conjunto limitado qualquer

Se  $R$  um conjunto qualquer **limitado** do plano, consideramos um bloco  $B$  contendo  $R$  e estendemos  $f$  a  $B$  atribuindo o valor 0 aos pontos de  $B$  fora de  $R$ . Se  $\bar{f}$  é esta extensão, definimos

$$\int_R f = \int_B \bar{f}.$$

Pronto, já temos a integral de uma função limitada sobre uma região limitada qualquer.

## 1.2 Propriedades da integral

Seja  $\mathcal{I}(R)$  o conjunto das funções integráveis em  $R$ . Propriedades fundamentais da integral:

1. **Linearidade:** Se  $f, g \in \mathcal{I}(R)$  e  $a, b \in \mathbb{R}$ , então  $af + bg \in \mathcal{I}(R)$  e  $\int_R af + bg = a \int_R f + b \int_R g$ .
2. **Monotonia:** Se  $f, g \in \mathcal{I}(R)$  e  $f \geq g$ , então  $\int_R f \geq \int_R g$ .
3. **Adição:**  $\mathcal{I}(R \cup S) = \mathcal{I}(R) \cap \mathcal{I}(S)$ . Se  $R \cap S = \emptyset$  então  $\int_{R \cup S} f = \int_R f + \int_S f$ .

## 2 Integrais iteradas e o Teorema de Fubini

Seja  $B = [a, b] \times [c, d]$  e seja  $V = \int_B f$  o volume embaixo do gráfico de  $f$ .

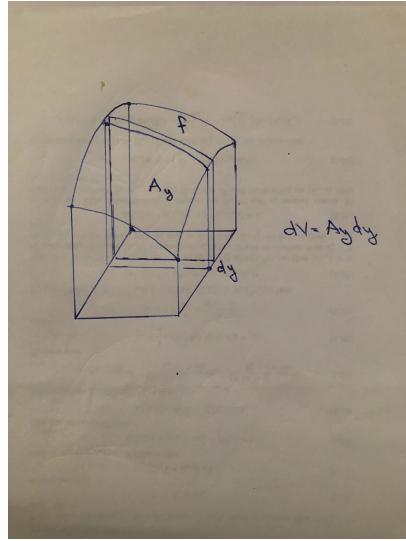


Figura 5: Volume por fatias

Para cada  $y \in [c, d]$  seja  $V_y$  o volume de altura infinitesimal  $dy$  e área  $A_y$ . Então,

$$V = \int_c^d A_y dy.$$

Mas  $A_y = \int_a^b f(x, y) dx$ . Logo,

$$\int \int_B f = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy.$$

Trocando o papel de  $x$  com  $y$ , obtemos também

$$\int \int_B f(x, y) dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx.$$

Este é o Teorema de Fubini: se  $f$  é integrável sobre  $B$ , a integral pode ser calculada com duas integrais usuais.

**Exemplo 2.1.** Seja  $B = [0, 1] \times [0, 2]$  e  $f(x, y) = (2x + y)^2$ . Temos

$$\int \int_B f = \int_0^1 \int_0^2 (2x + y)^2 dy dx = \int_0^2 \int_0^1 (2x + y)^2 dx dy.$$

Calculamos

$$\int_0^2 (2x + y)^2 dy = \frac{1}{3} (2x + y)^3 \Big|_0^2 = \frac{1}{3} ((2x + 2)^3 - 8x^3) = \frac{8}{3} ((x + 1)^3 - x^3).$$

Então,

$$\int \int_B f = \frac{8}{3} \int_0^1 [(x + 1)^3 - x^3] dx = \frac{2}{3} [(x + 1)^4 - x^4] \Big|_0^1 = \frac{2}{3} (16 - 1 - 1) = \frac{28}{3}.$$

Mudando a ordem,

$$\int_0^1 (2x+y)^2 dx = \frac{1}{6} (2x+y)^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{6} ((2+y)^3 - y^3),$$

$$\int \int_B f = \frac{1}{6} \int_0^2 ((2+y)^3 - y^3) dy = \frac{1}{24} ((2+y)^4 - y^4) \Big|_0^2 = \frac{1}{24} (4^4 - 2^4 - 2^4) = \frac{28}{3}.$$

**Exemplo 2.2.** Seja  $B = [0, 1] \times [0, 1]$  e  $f(x, y) = xe^{xy}$ . Então,

$$\int \int_B f = \int_0^1 \int_0^1 xe^{xy} dy dx = \int_0^1 \int_0^1 xe^{xy} dx dy.$$

Temos

$$\int_0^1 xe^{xy} dy = e^{xy} \Big|_0^1 = e^x - 1.$$

Logo,

$$\int \int_B f = \int_0^1 e^x - 1 dx = e^x - x \Big|_0^1 = e - 1 - 1 = e - 2.$$

Trocando a ordem,  $\int_0^1 xe^{xy} dx$  deve ser integrado por partes. Isto dá,

$$\int_0^1 xe^{xy} dx = x \frac{e^{xy}}{y} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{xy}}{y} dx = x \frac{e^{xy}}{y} - \frac{e^{xy}}{y^2} \Big|_0^1 = \frac{e^y}{y} - \frac{e^y - 1}{y^2}.$$

Então,

$$\int \int_B f = \int_0^1 \frac{e^y}{y} - \frac{e^y - 1}{y^2} dy = ???$$

**Exemplo 2.3.** Vejamos como fica Fubini na integral  $\int_R f$ , onde  $R$  é uma região limitada qualquer. Suponha que  $R$  seja como a primeira imagem da Figura 6.

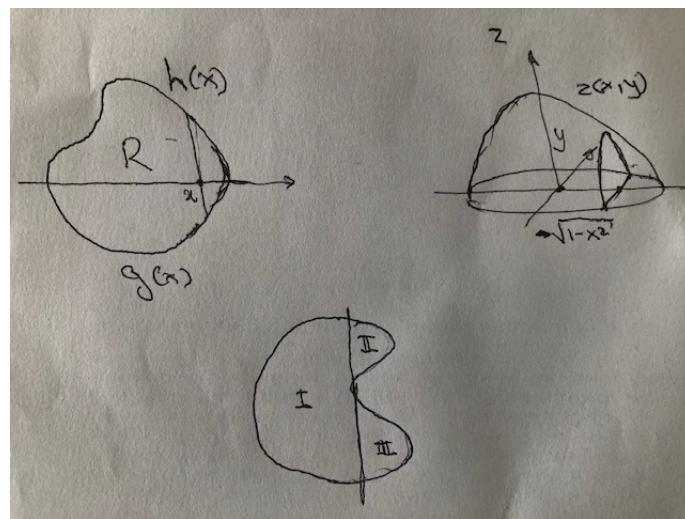


Figura 6: Região R

Fubini nos dá

$$\int \int_R f = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) dy dx.$$

Vejamos o caso do volume  $V$  da semi-esfera de raio  $R$ . Temos que  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ , de modo que  $z = \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$  é a parte superior da esfera. Devemos integrar  $\int \int_D z(x, y)$ , onde  $D$  é o círculo  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Fixado  $x$ , a variável  $y$  vai de  $-\sqrt{1-x^2}$  a  $\sqrt{1-x^2}$ . Logo,

$$V = \int_D \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} dy dx. \quad (2.1)$$

O Teorema de Fubini está associado ao **Princípio de Cavalieri**: se as seções ortogonais de dois corpos têm áreas iguais, então eles têm volumes iguais. Na Figura 7,  $V = \int dV = \int A(h) dh$ .

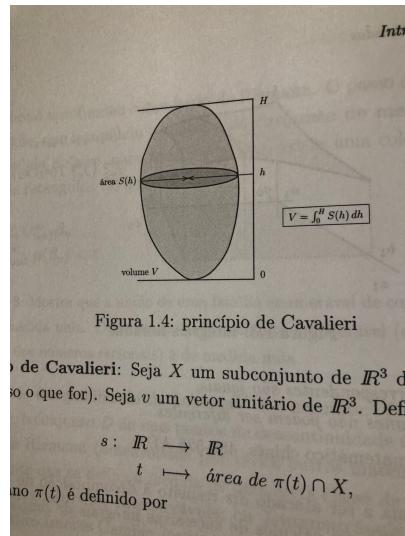


Figura 1.4: princípio de Cavalieri

**Princípio de Cavalieri:** Seja  $X$  um subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  de medida finita (o que for). Seja  $v$  um vetor unitário de  $\mathbb{R}^3$ . Definimos a função  $s$  de modo que

$s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $t \mapsto$  área de  $\pi(t) \cap X$ ,

onde  $\pi(t)$  é definido por

Figura 7: O Princípio de Cavalieri

Vamos calcular o volume da esfera de raio  $R$  usando o Princípio de Cavalieri. Na Figura 8, para cada  $z$  do eixo vertical, a área  $A(z)$  vale  $\pi(R^2 - z^2)$ .

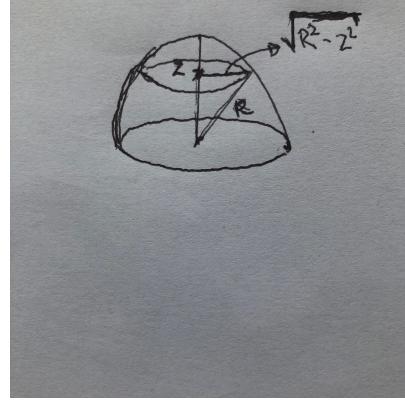


Figura 8: Volume da esfera

Logo,

$$V = \int_{-R}^R \pi(R^2 - z^2) dz = \pi R^2 z - \pi \frac{z^3}{3} \Big|_{-R}^R = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

### 3 Mudança de variáveis

Recordamos o caso de funções de uma variável. Seja  $A = \int dA = \int_a^b f(x) dx$ . Na mudança de variável  $x = g(t)$ , com  $t \in [c, d]$ , a área infinitesimal  $dA = f(x) dx$  é igual a  $f(g(t))g'(t)dt$ , veja a Figura 9. (Isto é verdade se  $g' > 0$ .) Portanto,  $I = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt$ .

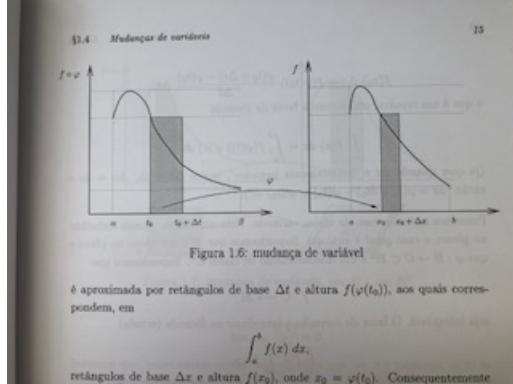


Figura 9: Mudança de variáveis

No caso  $\mathbb{R}^2$ , considere  $\Omega$  uma região limitada do  $\mathbb{R}^2$  e  $V = \int_{\Omega} dV = \int_{\Omega} f(x, y) dx dy$ . Considere a mudança de variáveis  $(u, v) \rightarrow (x, y)$  dada por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Suponha  $\Sigma$  um retângulo de  $\mathbb{R}^2$  e  $g : \Sigma \rightarrow \Omega$  bijetora. Uma partição no retângulo  $\Sigma$  se transforma em uma partição em  $\Omega$  como na Figura 10.

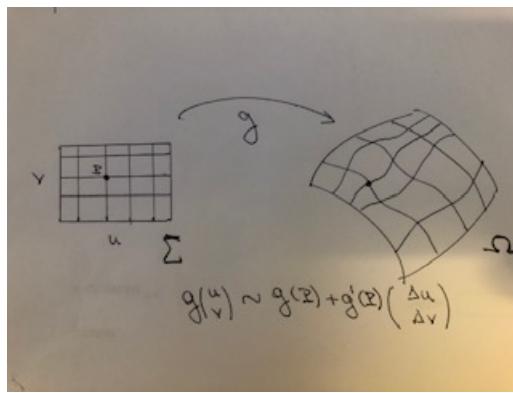


Figura 10: Partição em  $\Omega$

Na Figura 11, vemos a imagem do retângulo de lados  $\Delta u, \Delta v$ . O retângulo infinitesimal de lados  $du, dv$  é levado no paralelogramo infinitesimal  $g'_{u,v} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$ .

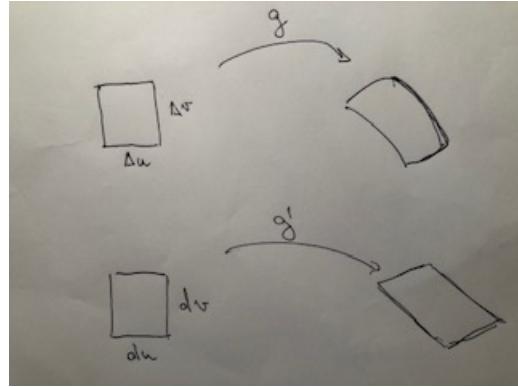


Figura 11: Deformação de  $g$

A área do retângulo de lados  $du$  e  $dv$  vale  $dudv$ . A área do paralelogramo de lados  $g'(u, v)du$  e  $g'(u, v)dv$  vale  $|\det g'(u, v)|dudv$ . Definimos o **Jacobiano** de  $g$  como  $J_g = \det g'$ . Então, um volume infinitesimal  $dV$  vale  $f(g(u, v))|J_g(u, v)|dudv$ . A fórmula de mudança de variáveis é

$$\int_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_{\Sigma} f(g(u, v)) |J_g(u, v)| dudv.$$

Vejamos a mudança de coordenadas cartesianas para polares. Ela é útil, por exemplo, para descrever o círculo  $x^2 + y^2 \leq R^2$ , fazendo  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ , com  $(r, \theta) \in [0, R] \times [0, 2\pi]$ . Neste caso,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix}.$$

Então,

$$g' \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

e

$$J_g \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r.$$

A interpretação geométrica do valor  $J_g = r$  é dada na Figura 12 abaixo.

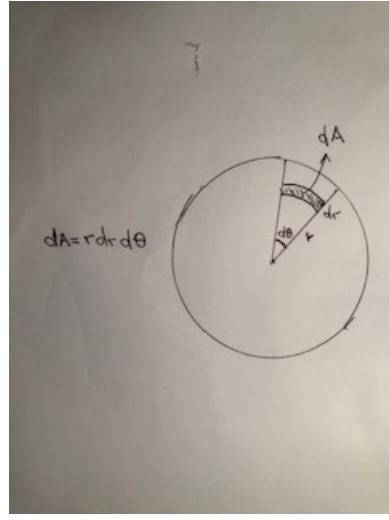


Figura 12: Coordenadas Polares

Vamos recalcular o volume da esfera de raio  $R$ , usando a transformação em coordenadas polares. O volume da semi-esfera é dado por  $V = \int_{B_R} \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)} dx dy$ . Usando coordenadas polares, cujo jacobiano vale  $r$ , temos

$$V = 2\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r dr = -\frac{2\pi}{3} (R^2 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^R = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

#### 4 Integrais imprórias

Até o momento, discutimos integrais de funções limitadas, em domínios limitados. Vamos estender a integral ao caso geral. Se  $f$  é uma função limitada e  $\Omega$  é uma região não limitada, consideramos  $B_R$  a bola de raio  $R$  em  $\mathbb{R}^2$  e  $\Omega_R = \Omega \cap B_R$ . Então,  $\Omega_R$  é uma região limitada. Suponha que  $I_R = \int_{\Omega_R} f$  esteja bem definida. Se  $I_R \rightarrow I$  quando  $R \rightarrow \infty$ , dizemos que  $f$  é integrável em  $\Omega$  e definimos o valor de  $\int_{\Omega} f$  como igual a  $I$ , veja a segunda imagem da Figura 13.

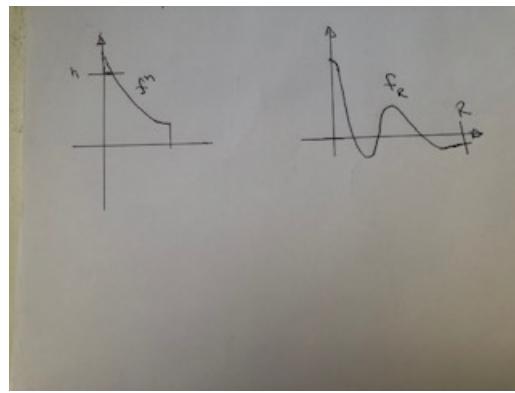


Figura 13: Mudança de variáveis

Por exemplo, seja  $p > 0$  e  $f(x, y) = r^{-p}$ , definida na região  $\Omega = \{r \geq 1\}$ , veja a Figura 14.

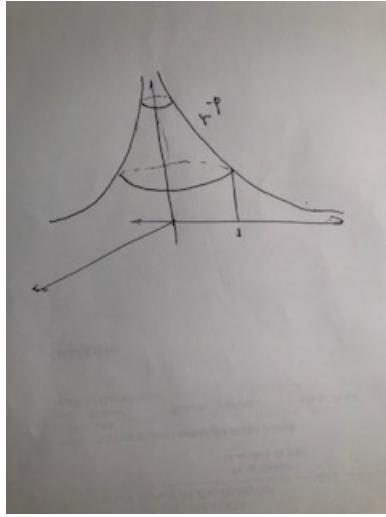


Figura 14: A função  $r^{-p}$

Calculemos  $I_R = \int_{\Omega} f(x, y) dx dy$ , para  $R > 1$ . Melhor usar coordenadas polares,

$$I_R = \int_1^R \int_0^{2\pi} r^{-p} r d\theta dr = 2\pi \int_1^R r^{1-p} dr = \frac{2\pi}{2-p} r^{2-p} \Big|_1^R = \frac{2\pi}{2-p} (R^{2-p} - 1),$$

válido para  $p \neq 2$ . Se  $p < 2$ ,  $I_R \rightarrow \infty$ . Dizemos neste caso que a integral **diverge**. Se  $p > 2$ , quando  $R \rightarrow \infty$ ,  $I_R \rightarrow \frac{2\pi}{p-2}$  e dizemos que a integral converge. para  $p > 2$ , escrevemos

$$\int_{r \geq 1} r^{-p} = \frac{2\pi}{p-2}$$

e dizemos que a integral é **convergente**. O caso  $p = 2$  está no lado da divergência.

**Exercício 4.1.** Mostre que  $\int_{r \geq 1} r^{-2} = \infty$ .

**Observação 4.2.** Na prática, escrevemos

$$\int_1^\infty \int_0^{2\pi} r^{1-p} d\theta dr = 2\pi \int_1^\infty r^{1-p} dr = \frac{2\pi}{2-p} r^{2-p} \Big|_1^\infty$$

e fica claro que a integral converge para  $\frac{2\pi}{p-2}$  se  $p > 2$  e diverge se  $p < 2$ .

Resta discutir a integral de funções  $f$  não limitadas. Comecemos com o caso  $f \geq 0$ . Se  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n(x, y) = \min\{f(x, y), n\}$ , de modo que  $f \leq n$ , veja a primeira imagem da Figura 13. Suponha  $f_n$  integrável em uma região  $\Omega$ . Então,  $I_n = \int_{\Omega} f_n$  é uma sequência crescente. Se  $I_n \rightarrow \infty$ , dizemos que a integral diverge. Se  $I_n \rightarrow I$ , dizemos que a integral converge e definimos  $\int_{\Omega} f = I$ .

Como exemplo, seja  $f(x, y) = r^{-p}$ ,  $p > 0$ , e  $\Omega = \{r \leq 1\}$ . Escrevemos

$$\int_{\Omega} f = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^{1-p} d\theta dr = 2\pi \int_0^1 r^{1-p} dr = \frac{2\pi}{2-p} r^{2-p} \Big|_0^1.$$

Se  $p > 2$ ,  $0^{2-p} = \infty$  e a integral diverge. Se  $p < 2$ , temos  $\int_{\Omega} f = \frac{2\pi}{2-p}$ . Mais uma vez, o caso  $p = 2$  está do lado da divergência.

Se  $f$  muda de sinal, definimos sua **parte positiva**  $f^+$  como  $f^+(x, y) = \max\{f(x, y), 0\}$  e sua **parte negativa**  $f^-$  como  $f^-(x, y) = \max\{-f(x, y), 0\}$ . Assim  $f = f^+ - f^-$ . Dizemos que  $f$  é integrável em  $\Omega$  se  $f^+$  e  $f^-$  forem integráveis em  $\Omega$ , e definimos

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} f^+ - \int_{\Omega} f^-.$$

## 5 Integral em $\mathbb{R}^3$

A definição sobre partições em um bloco  $B \subset \mathbb{R}^3$ , sobre somas de Riemann, e definição de integral de uma função em  $B$  são inteiramente análogas ao caso  $\mathbb{R}^2$ . Também a extensão para regiões limitadas, e as integrais impróprias, são definidas de forma análoga.

A ideia de integrais iteradas persiste. Para percorrer  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , podemos fixar  $x$  e deixar  $y$  variar, ou o contrário. Agora, podemos fixar  $x, y$ , e variar  $z$ , depois fixar  $y$  e variar  $x$  ou usar outra ordem qualquer. Vejamos um exemplo.

**Exemplo 5.1.** Sejam  $D = \{(x, y), x > 0, y > 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$  e

$$\Omega = \{(x, y, z), (x, y) \in D, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\},$$

a parte da Figura 15 no quadrante positivo. Calculemos  $\int_{\Omega} f$ , onde  $f(x, y, z) = xyz$ .

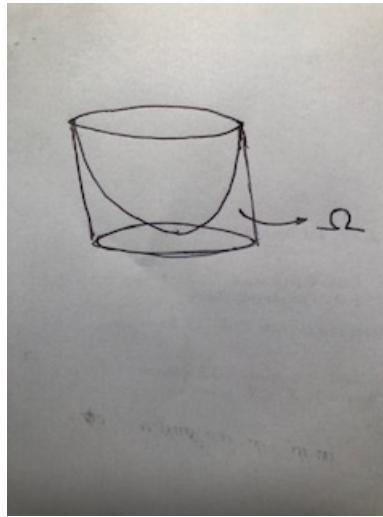


Figura 15: Região  $\Omega$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f &= \int \int_D \int_0^{x^2+y^2} xyz dz dy dx = \\ &= \int \int_D \int_0^{x^2+y^2} xyz dz dy dx = \int \int_D xy \frac{z^2}{2} \Big|_0^{x^2+y^2} dy dx = \\ &= \int \int_D xy(x^2 + y^2)^2 dy dx. \end{aligned}$$

Agora, podemos resolver a integral dupla usando coordenadas polares. A região  $D$  é descrita por  $r < 1$  e  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Se  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$  então

$$\begin{aligned} \int \int_D xy(x^2 + y^2)^2 dy dx &= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos \theta \sin \theta r^4 r d\theta dr = \\ &\int_0^1 r^7 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin^2 \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r^8}{16} \Big|_0^1 = \frac{1}{16}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

**Exemplo 5.2.** Vamos calcular do volume da semi-esfera  $B_R$  de raio  $R$  (novamente!), escrevendo  $V = \int_{B_R} 1 dx dy dz$ . Se  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , fixados  $x, y, z$  vai de 0 a  $\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$ . E  $x, y$  podem variar no disco  $D$  descrito por  $x^2 + y^2 \leq R^2$ . Então, por Fubini,

$$\int_{B_R} 1 dx dy dz = \int_D \int_0^{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}} 1 dz dx dy = \int_D \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)},$$

obtendo a fórmula (2.1) do Exemplo 2.3.

## 6 Mudança de variáveis

A discussão a respeito da mudança de variáveis se estende ao caso  $\mathbb{R}^3$  (e mesmo a  $\mathbb{R}^N$ ) imediatamente. Aqui, se  $\Sigma, \Omega$  são duas regiões de  $\mathbb{R}^3$  e  $T : \Sigma \rightarrow \Omega$  é uma bijeção, escrevemos

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = g'_{u,v,w} \begin{pmatrix} du \\ dv \\ dw \end{pmatrix},$$

com

$$dx dy dz = |J_g(u, v, w)| dudvdw,$$

onde  $J_g = \det g$ .

A fórmula de mudança de variáveis se escreve

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\Sigma} f(T(u, v, w)) |J_g(u, v, w)| dudvdw. \quad (6.1)$$

Vejamos duas mudanças de variáveis úteis em  $\mathbb{R}^3$ .

### 6.1 Coordenadas cilíndricas

Trata-se do sistema de coordenadas  $(r, \theta, z)$  como na Figura 16.

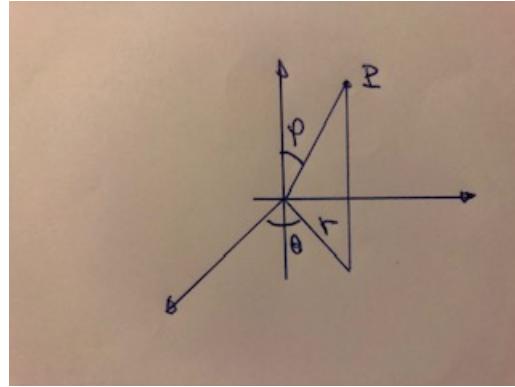


Figura 16: Coordenadas cilíndricas

Neste caso,  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $z = z$  e  $g$  tem como jacobiano

$$J_g(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_z \\ y_r & y_\theta & y_z \\ z_r & z_\theta & z_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r$$

**Exercício 6.1.** Faça um desenho para explicar porque o jacobiano vale  $r$ .

**Exercício 6.2.** Calcule a integral do Exemplo 5.1 usando coordenadas cilíndricas.

## 6.2 Coordenadas esféricas

Trata-se do sistema de coordenadas  $(r, \theta, \varphi)$ , onde  $r$ , mostrado na Figura 17.

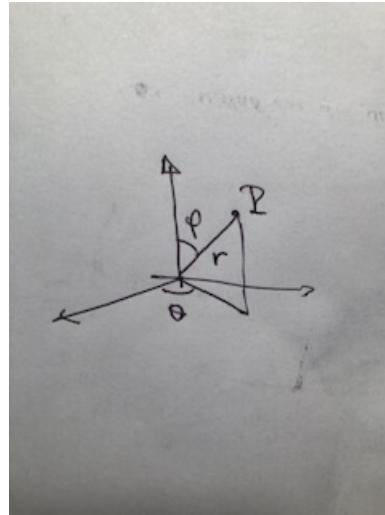


Figura 17: Coordenadas esféricas

A transformação  $g$  é dada por  $x = r \sin \varphi \cos \theta$ ,  $y = r \sin \varphi \sin \theta$  e  $z = r \cos \varphi$ . Se  $r \in [0, \infty)$ ,  $\theta \in [0, 2\pi]$  e  $\varphi \in [0, \pi]$ , então  $(x, y, z)$  percorre todo  $\mathbb{R}^3$ . Calculamos  $\det g'$ :

$$\det \begin{pmatrix} x_r & x_\varphi & x_\theta \\ y_r & y_\varphi & y_\theta \\ z_r & z_\varphi & z_\theta \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \theta & r \cos \varphi \cos \theta & -r \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & r \cos \varphi \sin \theta & r \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \end{pmatrix} = -r^2 \sin \varphi.$$

Logo,  $|J_{T_e}(r, \varphi, \theta)| = r^2 \sin \varphi$ , veja a Figura 18.

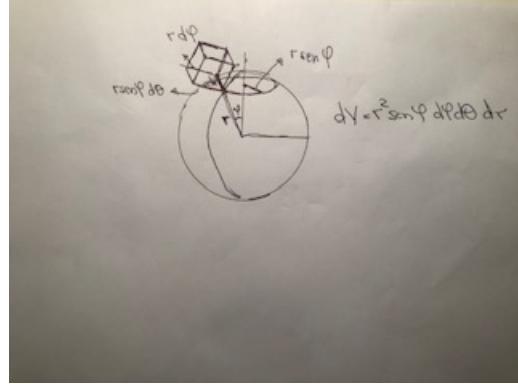


Figura 18: Jacobiano  $J_g$

**Exemplo 6.3.** Calculemos novamente o volume  $V_R$  da esfera de raio  $R$ , usando coordenadas esféricicas. Temos que  $V_R = \int_R 1$ . Usando (6.1),

$$V_R = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \varphi d\theta d\varphi dr = 2\pi \int_0^R \int_0^\pi r^2 \sin \varphi d\varphi dr = 4\pi \int_0^R r^2 dr = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

**Exemplo 6.4.** Calculemos o volume do elipsóide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ . Fazemos a transformação,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

isto é,  $x = au$ ,  $y = bv$ ,  $z = cw$ . Então,

$$J_g(u, v, w) = \det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = abc.$$

A imagem da esfera  $B$  de raio  $1 u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$  é o elipsóide  $\Omega$ . Logo,

$$V_\Omega = \int_\Omega 1 dx dy dz = \int_B abc du dv dw = abc V_B = \frac{4\pi}{3} abc.$$

### 6.3 Volume de Revolução

Vamos discutir o cálculo de volumes de sólidos obtidos por revolução em torno de um eixo. Seja  $\Omega$  uma região do plano  $xz$ , que gera um volume quando gira em torno do eixo  $\vec{z}$ . A área infinitesimal  $dxdy$  situada em  $(x, y)$  percorre a distância  $2\pi x$  ao rodar em torno de  $\vec{z}$ . Portanto, gera um volume infinitesimal igual a  $dV = 2\pi x dxdy$ . O volume do sólido de revolução é dado por

$$V = \int_\Omega dV = 2\pi \int_\Omega x dx. \quad (6.2)$$

Uma outra expressão para  $V$  é obtida quando  $\Omega$  é limitada superiormente por  $z = h(x)$  e inferiormente por  $z = g(x)$ , como na Figura 19.

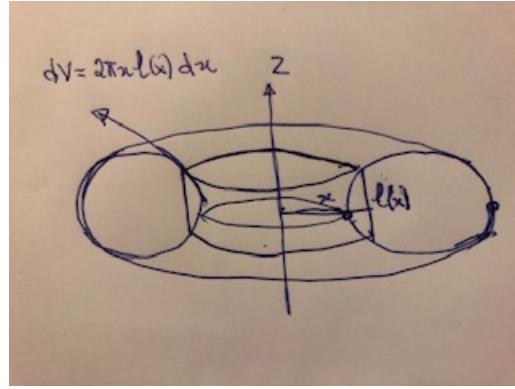


Figura 19: Volume de Revolução

Calculamos  $V$  em (6.2) usando coordenadas cilíndricas  $(r, \theta, z)$ . Lembrando que o jacobiano vale  $r$ , temos

$$V = \int 1 = \int_a^b \int_{g(r)}^{h(r)} \int_0^{2\pi} r d\theta dz dr = \int_a^b \int_{g(r)}^{h(r)} 2\pi r dz dr = \int_a^b 2\pi r(h(r) - g(r)) dr. \quad (6.3)$$

A fórmula acima é chamada de método das cascas cilíndricas, porque estamos calculando  $V$  integrando volumes infinitesimais gerados por cascas cilíndricas.

**Exemplo 6.5.** Calculemos o volume do toro, que é o sólido obtido pela revolução de um círculo  $D$  em torno de um eixo. Seja  $\vec{z}$  o eixo, e  $(x-a)^2 + z^2 \leq R^2$  o círculo  $D$ . Supomos  $a > R$ , para que  $D$  não intercepte  $\vec{z}$ . Neste caso,  $h(x) = \sqrt{R^2 - (x-a)^2}$  e  $h(x) = -\sqrt{R^2 - (x-a)^2}$ , com  $x \in (a-R, a+R)$ . Então,

$$V = 2\pi \int_{a-R}^{a+R} 2\sqrt{R^2 - (r-a)^2} r dr = 4\pi \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - s^2} (s+a) ds. \quad (6.4)$$

Temos que

$$\int_{-R}^R \sqrt{R^2 - s^2} s ds = -\frac{1}{3}(R^2 - s^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_{-R}^R = 0.$$

Além disso,

$$4\pi a \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - s^2} ds = 4\pi a \frac{1}{2}\pi R^2,$$

pois o integrando é a área do semicírculo de raio  $R$ . Portanto,  $V = 2\pi^2 a R^2$ .

**Exemplo 6.6.** No caso do toro em que  $a = 0$  e rodamos a parte do círculo correspondente a  $x > 0$ , obtemos (de novo!) a esfera. Usando (6.4), obtemos

$$V = 4\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - s^2} s ds.$$

Resolvendo a integral, obtemos o volume da esfera.

Um outro cálculo do volume, dito Métodos dos Anéis, é obtido quando  $S$  é descrita por curvas  $x = h(z)$  e  $x = g(z)$ , como na Figura 20.

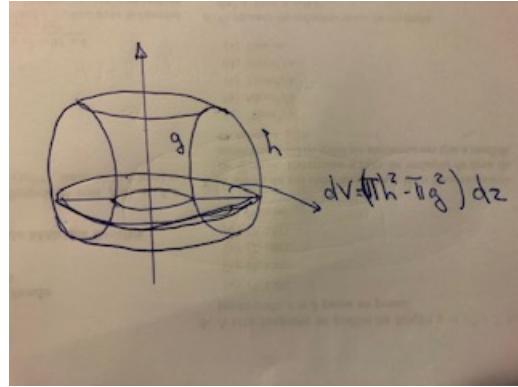


Figura 20: Método dos anéis

Usando coordenadas cilíndricas,  $g(z) < r < h(z)$ . Portanto,

$$V = \int 1 = \int_a^b \int_{g(z)}^{h(z)} \int_0^{2\pi} r \, d\theta \, dr \, dz = \int_a^b \int_{g(z)}^{h(z)} 2\pi r \, dr \, dz = \int_a^b \pi h^2 - \pi g^2 \, dz.$$

**Exemplo 6.7.** Calculemos novamente o volume do toro obtido pela rotação de  $(x-a)^2 + z^2 \leq R^2$  em torno de  $\vec{z}$ . Agora,  $h(z) = a + \sqrt{R^2 - z^2}$  e  $g(z) = a - \sqrt{R^2 - z^2}$ , com  $z \in (-R, R)$ . Então,

$$V = \pi \int_{-R}^R (a + \sqrt{R^2 - z^2})^2 - (a - \sqrt{R^2 - z^2})^2 \, dz = 4\pi a \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - z^2} \, dz = 2\pi^2 a R^2,$$

pois o integrando é a área do semicírculo de raio  $R$ .

#### 6.4 Centro de massa

Considere um eixo  $\vec{e}$  em  $\mathbb{R}^2$ , uma força  $F$  paralela a  $\vec{e}$  atuando sobre um ponto  $P$ . O **momento** de  $F$  em relação a  $\vec{e}$  é definido por  $M = |F|d$ , onde  $d$  é a distância (com sinal) de  $P$  a  $\vec{e}$ . Se  $F = mg$  é o peso de uma massa  $m$ , o momento vale  $M = mgd$ . A partir de agora, vamos supor que  $g = 1$ . O momento de um sistema de  $J$  massas  $m_1, m_2, \dots, m_J$  em relação a um eixo  $\vec{e}$  é definido como  $M_T = M_1 + M_2 + \dots + M_J$ . Um sistema de  $J$  massas pode ser substituído por uma única massa. Seja  $m_T = m_1 + m_2 + \dots + m_J$  a massa total do sistema e

$$d_{CM} = \frac{1}{m_T} (m_1 d_1 + m_2 d_2 + \dots + m_J d_J),$$

a média ponderada das distâncias. Então,

$$M_T = m_T d_{CM}.$$

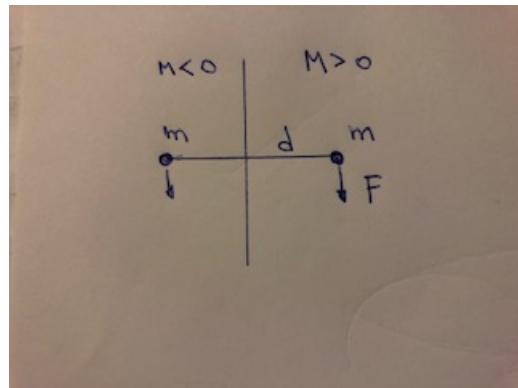


Figura 21: Momento de uma massa

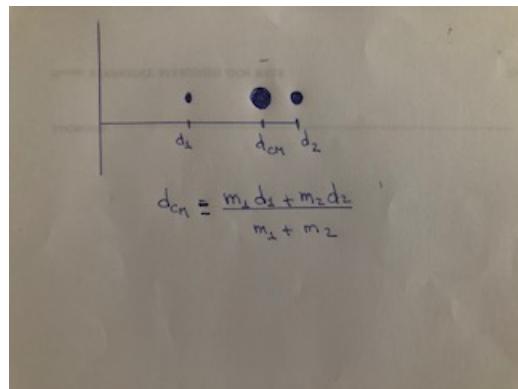


Figura 22: Momento de duas massas

No caso de uma massa distribuída sobre uma região  $\Omega$ , consideramos o momento infinitesimal  $dM$  gerado por uma massa infinitesimal  $dm$  situada a uma distância  $d(x, y)$  do eixo  $\vec{e}$ , veja a Figura 23. Se a densidade de massa vale  $\rho(x, y)$ , então  $dm = \rho(x, y) dx dy$  e

$$dM = \rho(x, y) d(x, y) dx dy.$$

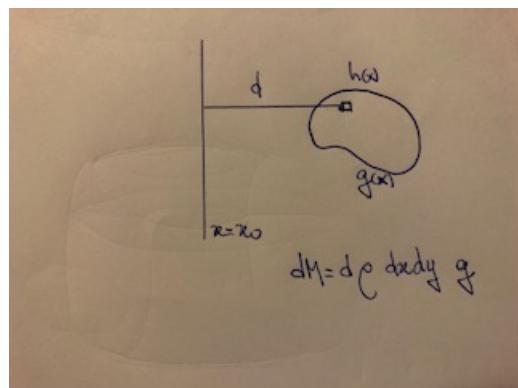


Figura 23: Momento de uma distribuição de massa

Portanto, o momento total vale

$$M = \int_{\Omega} dM = \int_{\Omega} \rho(x, y) d(x, y) dx dy.$$

Vamos supor a partir de agora que  $\Omega$  seja homogêneo, de densidade  $\rho = 1$ . Então

$$M = \int_{\Omega} d(x, y) dx dy.$$

Se  $\vec{e}$  é o eixo vertical  $x = x_0$ , então  $d(x, y) = x - x_0$ . Neste caso,

$$M_{x_0} = \int_{\Omega} (x - x_0) dx dy = \int_{\Omega} x dx dy - x_0 |\Omega|$$

Em particular, o momento em relação à reta  $x = 0$  vale

$$M_0 = \int_{\Omega} x dx dy \tag{6.5}$$

e  $M_{x_0} = M_0 - x_0 |\Omega|$ . Definimos a coordenada horizontal  $\bar{x}$  do centro de massa como o valor de  $x_0$  que torna o momento nulo,  $M_{\bar{x}} = 0$ , isto é,

$$\bar{x} |\Omega| = M_0 = \int_{\Omega} x dx dy. \tag{6.6}$$

Usando (6.5), vemos que o momento de um sistema distribuído de massas é igual ao momento de uma massa pontual situada sobre  $x = \bar{x}$  e contendo toda a massa do sistema. O mesmo vale para eixos  $y = y_0$ , de modo que existe uma coordenada  $y = \bar{y}$  que equilibra o sistema. O ponto  $CM = (\bar{x}, \bar{y})$  é o **centro de massa** do sistema.

Existe uma interpretação de (6.6) em termos de volume. Multiplicando ambos os lados de (6.6) por  $2\pi$ , temos

$$2\pi \bar{x} |\Omega| = 2\pi \int_{\Omega} x dx dy.$$

A expressão à direita é o volume gerado pela rotação de  $\Omega$ , veja (6.2). Assim, obtemos o seguinte.

**Teorema 6.8** (Teorema de Pappus). *O volume gerado por um corpo é igual ao volume gerado por um ponto situado no seu centro de massa e contendo toda a área do corpo.*

Obviamente, podemos trocar  $x$  por  $y$  e obter o mesmo resultado para a coordenada  $\bar{y}$  do centro de massa de  $\Omega$ , veja a Figura 24.

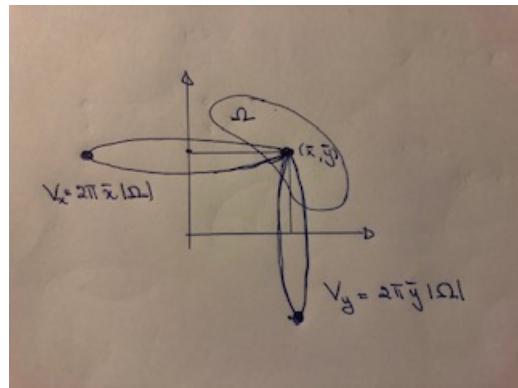


Figura 24: Rotação do centro de massa

**Exemplo 6.9.** Podemos agora determinar o volume do toro sem fazer contas. O centro de massa do círculo de centro  $(a, 0)$  e raio  $R$  é o seu centro  $(a, 0)$ . A área (massa) do círculo vale  $\pi R^2$ . Girando o ponto  $(a, 0)$  em torno do eixo  $z$ , obtemos o volume  $2\pi a \times \pi R^2 = 2\pi^2 a R^2$ .

Podemos usar o Teorema de Pappus para determinar centros de massa.

**Exemplo 6.10.** Considere o semi-círculo  $x^2 + y^2 = R^2$ , com  $y > 0$ . Por simetria,  $\bar{x} = 0$ . E  $\bar{y}$ ? Rodando o semi-círculo em torno do eixo  $\vec{x}$ , obtemos o volume da esfera  $\frac{4}{3}\pi R^3$ . A área do semi-círculo é  $\frac{1}{2}\pi R^2$ . Usando Pappus,

$$2\pi \frac{1}{2}\pi R^2 \bar{y} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

$$\text{Logo, } \bar{y} = \frac{4}{3\pi}R.$$

O centro de massa de um triângulo está no encontro de suas medianas. Isto é consequência do seguinte resultado.

**Theorem 6.11.** O centro de massa de um triângulo está sobre cada uma das medianas.

*Demonstração.* A demonstração é baseada na Figura 25.

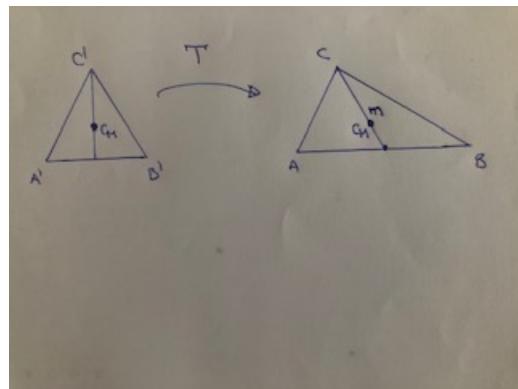


Figura 25: Centro de massa de um triângulo

Suponha primeiro que o triângulo  $\mathcal{T}$  seja isósceles, com mediana (altura) situada em  $x = 0$ . Então,

$$\int_{\mathcal{T}} x \, dx dy = 0. \quad (6.7)$$

Fazendo a mudança de variáveis  $u = -x$ ,  $v = y$ , seu jacobiano  $J$  vale  $-1$  e  $\mathcal{T}$  é levado em  $\mathcal{T}'$ . Usando a fórmula de mudança de variáveis, obtemos

$$\int_{\mathcal{T}} x \, dx dy = \int_{\mathcal{T}'} -u |J| \, dudv = - \int_{\mathcal{T}'} u \, dudv = - \int_{\mathcal{T}'} x \, dx dy$$

Isto mostra (6.7). No caso geral, sejam  $A, B, C$  os vértices de  $\mathcal{T}$  e seja  $m$  a mediana relativa ao lado  $AB$ . Podemos supor que  $AB$  está no eixo  $\vec{x}$  e que a origem  $(0, 0)$  está em  $\frac{A+B}{2}$ . Seja  $x + ky = 0$  a equação de  $m$ . Considere a mudança de variáveis  $u = x + ky$  e  $v = y$ , de modo que a mediana  $m$  é levada em  $u = 0$ . Temos que  $x = u - kv$ . Logo,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Então,  $J = 1$ . A imagem inversa de  $\mathcal{T}$  pela transformação  $T$  é um triângulo **isósceles**  $\mathcal{T}'$ , veja a Figura 25. Então, usando a fórmula de mudança de variáveis,

$$\bar{x}|\mathcal{T}| = \int_{\mathcal{T}} x \, dx dy = \int_{\mathcal{T}'} u - kv \, dudv,$$

$$\bar{y}|\mathcal{T}| = \int_{\mathcal{T}} y \, dx dy = \int_{\mathcal{T}'} v \, dudv,$$

Usando (6.7), vemos que  $\int_{\mathcal{T}'} u \, dudv = 0$ , pois  $\mathcal{T}'$  é isósceles. Então,

$$\bar{x}|\mathcal{T}| = -k \int_{\mathcal{T}'} v \, dudv = -k\bar{y}|\mathcal{T}|,$$

isto é,  $\bar{x} + k\bar{y} = 0$ . Isto mostra que o centro de massa está sobre a mediana.  $\square$