Cálculo Infinitesimal 3 – Lista 3 - 2020

Prof. Flavio Dickstein.

Questão 1. Um campo vetorial F em $\mathbb{R}^3$ é dito radial se ele é da forma $F(x, y, z) = g(r)\vec{r}$, onde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e $\vec{r} = \frac{1}{r}(x, y, z)$ é o vetor unitário da direção normal. Seja G uma primitiva de g. Mostre que $G(x, y, z) = G(r)$ (abuso de notação) é um potencial de F. (Isto é, nada muda em relação ao caso $\mathbb{R}^2$, funções radiais em $\mathbb{R}^3$ são conservativas.)

Questão 2. Seja C o cilindro $x^2 + y^2 = 1$ em $\mathbb{R}^3$ e seja γ a curva interseção do cilindro C com o plano $x + y + z = 1$. Considere o campo vetorial em $\mathbb{R}^3$ dado por $F(x, y, z) = (1 + y + z, 1 + x + z, 1 + x + y)$.

(i) Parametrize a curva γ.

(ii) Calcule a integral de linha $\int_\gamma F.dl$ (Você tem que escolher uma direção para percorrer a curva.)

(iii) Mostre que $\nabla \times F = 0$. (o rotacional é o produto vetorial do vetor $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ com o campo (F_1, F_2, F_3).)

(iv) Mostre que F é um campo conservativo, encontrando o seu potencial.

(v) Agora, você já pode saber se você acertou o item (ii).

Questão 3. A área A de uma região planar R pode ser calculada integrando-se a função constante 1 sobre R: $A = \int_R 1\, dxdy$. Use isto para calcular

(i) a área da região limitada superiormente pela curva $y = f(x)$ e inferiormente pela curva $y = g(x)$, $x \in [a, b]$.

(ii) a área da elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Questão 4. Use o Princípio de Cavalieri para calcular o volume do elipsóide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

Questão 5. Seja $R = \{(x, y), 0 \leq y \leq x + 1, 0 \leq x \leq 1\}$. Calcule $\int_R e^{x+y}\, dxdy$.

Questão 6. Seja E a porção da elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ situada no primeiro quadrante. Calcule $\int_E x^2 - y^2\, dxdy$ de duas formas diferentes.

(i) usando Fubini;

(ii) usando a transformação $x = 2r\cos\theta$, $y = 3r\sin\theta$.

Questão 7. Seja Ω a parte do círculo $x^2 + y^2 \leq 1$ no primeiro quadrante. Seja

$$I = \int_\Omega x^2 - y^2.$$

Sem fazer nenhuma conta, entenda que $I = 0$. Mostre que $I = 0$ considerando a mudança de variável

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}.$$