Detonado Calculo III

A prova tem 4 questões. É importante saber identificar de cara qual é cada questão.

- $\int \vec{F}\, dr$ → Stokes / → Campo conservativo
- Fluxo ou $\iint F \cdot n \, ds$ → Gauss
- Integral de superficie

⇒ Campo conservativo

$\int \vec{F} \cdot dR$

① Fazer o rotacional de $\vec{F}$:

$$\text{Rot } \vec{F} = (R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y)$$

② Escrever que: "o Rot $\vec{F} = (0,0,0)$ e o campo é de classe C_1, e por isso ele é conservativo.

③ ENCONTRAR A função potencial:

$$\left.\begin{array}{l}\Phi_x \to \int P\,dx \\ \Phi_y \to \int Q\,dy \\ \Phi_z \to \int R\,dz\end{array}\right\}$$ COMPARAR E ENCONTRAR A função.

④ $\int F \cdot dr = \Phi(B) - \Phi(A)$

ENCONTRAR OS PONTOS "B" final e "A" inicial

OBS: NAS PROVAS EM GERAL VEM DE DUAS FORMAS

① Ele te da uma parametrização e o intervalo

Ex: P2 14/06/2012

$\sigma(t) = (t + \cos(\pi t),\ 2t + \operatorname{sen}(\pi t),\ t) \quad 0 \leq t \leq 1$

$A = t(0) = (1, 0, 0)$

$B = t(1) = (0, 2, 1)$

Basta substituir na função potencial encontrada.

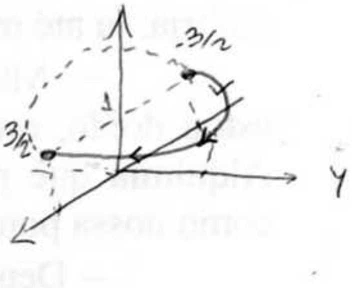
② OU ENTÃO A CURVA É A INTERSEÇÃO DE SUPERFÍCIES OU PLANOS, E O ENUNCIADO DIZ A DIREÇÃO.

EX: P2 23/06/2009

$$\begin{cases} \text{PLANO } z=1 \\ \dfrac{x^2}{3}+y^2+\dfrac{z^2}{4}=1 \\ y\geq 0 \end{cases} \quad \frac{x^2}{3}+y^2=\frac{3}{4}$$

ELIPSE NA ALTURA $z=1$, $y\geq 0$

C ORIENTADA x CRESCENTE.



Pto INICIAL $\left(-\frac{3}{2}, 0, 1\right)$

Pto FINAL $\left(\frac{3}{2}, 0, 1\right)$

→ JOGAR OS PONTOS NA FUNÇÃO POTENCIAL.

OBS: A FUNÇÃO POTENCIAL DERIVADA COM RELAÇÃO A "X" É O NOSSO "P". $\frac{\partial Y}{\partial F}=Q$; $\frac{\partial Z}{\partial F}=R$

É UMA FORMA DE VERIFICAR A NOSSA FUNÇÃO ENCONTRADA. LEMBRANDO QUE $F(x,y,z) = F(P,Q,R)$

$\Rightarrow$ Stokes.

① Calcular o Rotacional de $\vec{F}$

$$\text{Rot } \vec{F} = (R_y - Q_z,\ P_z - R_x,\ Q_x - P_y)$$

② $\int \vec{F} \cdot dr = \iint \vec{F} \cdot n \cdot ds$

③ Muito importante saber parametrizar as interseções das superfícies, para encontrar o vetor "normal" e os limites de integração.

Exemplo: Q3 2010.2

$$\begin{cases} z = xy \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \qquad \text{Rot } \vec{F} = (x^2 y,\ -x^2 y,\ 3x^2 + 3y^2)$$

• Uma boa parametrização nesse caso é a explícita

$$\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = xy \end{cases}$$

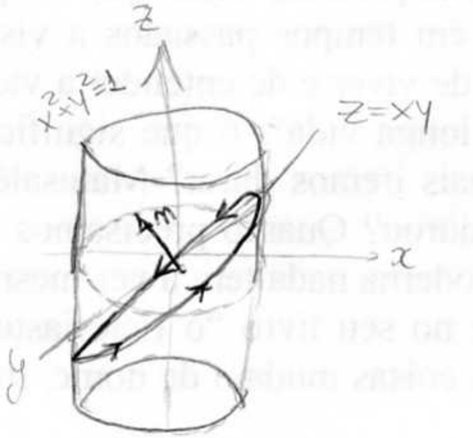
• Vamos achar o vetor normal

$$\begin{array}{c|ccc|} & x & y & z \\ \partial x & 1 & 0 & y \\ \partial y & 0 & 1 & x \end{array}$$

temos: $A = -y \quad B = -x \quad C = 1$

OBS: PODERIAMOS TER FEITO A MATRIZ COM AS DERIVADAS PARCIAIS DE $\underline{Y}$ NA PRIMEIRA LINHA E $\underline{\underline{X}}$ NA SEGUNDA. TERIAMOS O MESMO RESULTADO COM O SINAL TROCADO. CABE A NOS IDENTIFICAR QUAL A DIREÇÃO QUE QUEREMOS.

$\Rightarrow$ O ENUNCIADO NESSE CASO DIZ QUE A CURVA É NO SENTIDO ANTI-HORARIO



VEMOS QUE NÃO PRECISAMOS INVERTER A NOSSA NORMAL VISTO QUE TEMOS A COMPONENTE "C" POSITIVA.

$$\int F \cdot dr = \iint \text{Rot}\vec{F} \cdot n \, ds = \iint (x^2y, -x^2y, 3x^2+3y^2)(-y,-x,1)$$

$$= \iint 3x^2+3y^2 \, ds$$

A NOSSA PROJEÇÃO É UMA CIRCUNFERENCIA DE RAIO 1, BASTA FAZER MUDANÇA POLAR, SEM SE ESQUECER DO JACOBIANO.

$x = R\cos\theta$

$y = R\operatorname{sen}\theta$

$J = R$

$0 \leq R \leq 1$

$$3\int_0^{2\pi}\int_0^1 R^3 \, dR \, d\theta = \boxed{\frac{3\pi}{2}}$$

COMO PODE COMPLICAR EM STOKES?

① É MUITO DIFÍCIL CALCULAR O ROTACIONAL

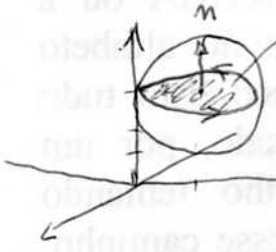
EXEMPLO: Q3 2011.2

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(3z+5y,\ 7x + \arctan(z^2+1),\ 2x+\cos y^2\right)$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-2y+z^2-6z+9=0 \Rightarrow x^2+(y-1)^2+(z-3)^2=1 \\ z=3 \end{cases}$$

SENTIDO ANTI HORÁRIO

ESFERA DESLOCADA DE RAIO 1



A INTERSEÇÃO COM O PLANO É UMA CIRCUNFERÊNCIA DE RAIO 1 NA ALTURA

COMO É PARALELO AO PLANO XY $n=(0,0,1)$

$$\int \vec{F}\,d\vec{r} = \iint \mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot n\,dS = \iint (R_y-Q_z,\ P_z-R_x,\ Q_x-P_y)(0,0,1)\,dS$$

$$= \iint (Q_x-P_y)\,dS = \iint 2\,dS = \boxed{2\pi}$$

② EXISTE UMA QUESTÃO ONDE HÁ UM PONTO NÃO DEFINIDO. PROVA 2010.1 $\boxed{Q3}$

- NÃO SE ASSUSTE COM $z\ln(4+z^4)$ ELE NÃO ENTRARÁ NO ROTACIONAL !!!
- ESSA QUESTÃO O ANATOLI FEZ EM SALA E DISSE QUE É PRATICAMENTE IMPOSSÍVEL DE CAIR.

⇒ GAUSS $\iint F.n.dS$

SO PARA SUPERFICIES FECHADAS !!

$$\iint \vec{F}.n.dS = \iiint_V \text{DIV } \vec{F}.dV$$

$\text{DIV } \vec{F} = (P_x + Q_y + R_z)$ → É ESCALAR E NÃO VETORIAL

EM GERAL O DIV SERÁ UM NUMER

COMO PODE COMPLICAR GAUSS?

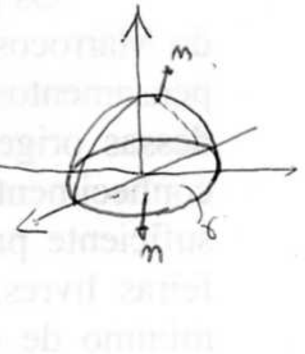
- SER UMA SUPERFICIE ABERTA! TEMOS QUE FECHAR DA MELHOR FORMA POSSIVEL POIS TEREMOS QUE CALCULAR POR $\iint F.n.dS$ DESSA NOVA SUPERFICIE.

EXEMPLO: 2012.1 Q4

$F(x,y,z) = (-xe^z + 3x, -ye^z + \arctan(x^2+z^2), 2e^z)$

$x^2+y^2+z^2=1 \quad z \geq 0$

NORMAL P/ FORA



É A TAMPA INFERIOR POIS A SUP. ESTÁ ABERTA.

$\text{DIV} = 3$

$$\iint_S F.n.dS + \iint_\gamma F.n.dS = \iiint_V \overset{\text{DIV}}{(3)}\, dV$$

$$\iint_S F.n.ds = 3\iiint_V dV - \iint_\gamma F.n.ds$$

- $3\iiint_V dV \rightarrow$ VOLUME DE METADE DE UMA ESFERA $\rightarrow 3.\ \frac{2}{3}\pi 1^3 = \boxed{2\pi}$ //

- $\iint_\gamma F.n.ds$ É UMA CIRCUNFERENCIA DE RAIO 1 COM Z

  TEMOS A NORMAL $(0,0,-1)$

E A NOSSA PARAMETRIZAÇÃO $(R\cos t,\ R\,\text{sen}\,t,\ 0)$

$0 \leq R \leq 1 \quad 0 \leq t \leq 2\pi$ //

SÓ IMPORTA O 3º TERMO DA FUNÇÃO.

$$\iint F.(0,0,-1)ds = \iint -2e^z \quad \text{COMO } Z=0$$

$$-2\iint_S ds = -2\pi$$

$$\iint_S F.n.ds = 2\pi - (-2\pi) = \boxed{4\pi}$$ //

- ter um ponto que não está definido na função dentro da superfície S precisamos com auxílio de uma nova superfície tirar esse ponto.

Exemplo: Diomara pg 308 ex. 12

A resolução vem em anexo no final

⇒ INTEGRAL DE SUPERFICIE.

PODE VIR DE 3 FORMAS:

- AREA
- FUNÇÃO VETORIAL
- FUNÇÃO ESCALAR → MAIS FREQUENTE.

1) AREA DE UMA SUPERFICIE NO INTERIOR DE OUTRA.

- JA CAIU CONE DENTRO DE UM ELIPSOIDE e CONE DESLOCADO EM UMA ESFERA (2010.1 e 2009.2) AS DUAS SÃO BEM PARECIDAS.

EXEMPLO 2010.1 Q2

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2} & \text{I} \\ \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{4} + z^2 = 1 & \text{II} \end{cases}$$

→ PARAMETRIZAÇÃO EXPLICITA

$x = x$
$y = y$
$z = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\|N\| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ 0 & 1 & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{vmatrix}$$

$$\|N\| = \sqrt{A^2+B^2+C^2}$$

$A = -x/\sqrt{x^2+y^2}$

$B = -y/\sqrt{x^2+y^2}$

$C = 1$

$\|N\| = \sqrt{2}$

Subst I EM II TEMOS:

$$\frac{3x^2}{2} + \frac{5y^2}{4} = 1$$ → AREA DE INTERSEÇÃO

$$\iint \sqrt{2}\, dA = \frac{4\sqrt{15}\,\pi}{15} = \frac{4\pi}{\sqrt{15}}$$

Vetorial → PRECISA PARAMETRIZAR ENCONTRAR A NORMAL E OS LIMITES!

EXEMPLO: 2011.2 Q1

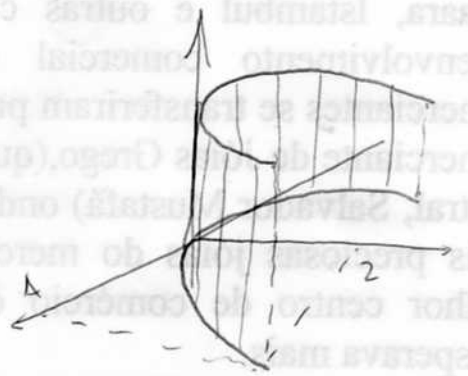
$F(x,y,z) = (2y, -z, x^2)$

$y^2 = 8x$

PRIMEIRO OCTANTE

$y = 4$

$z = 6$



A boa PARAMETRIZAÇÃO: $\left(x = \frac{t^2}{8};\ y = t;\ z = h\right)$

$= \begin{vmatrix} \partial t & t/4 & 1 & 0 \\ \partial h & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ $A = 1$, $B = -t/4$, $C = 0$, $\left(1, -\frac{t}{4}, 0\right)$

O ENUNCIADO DIZ x POSITIVO DA NORMAL! tá OK!

$\iint F \cdot n \, dS = \iint \left(2t, -h, \frac{t^2}{8}\right)\left(1, -\frac{t}{4}, 0\right) dS$

$= \int_0^6 \int_0^4 \left(2t + \frac{ht}{4}\right) dt\, dh = \boxed{132}$

⇨ ESCALAR ! A DIFERENÇA É QUE NÃO MULTIPLICAMOS PELO VETOR NORMAL E SIM PELO MODULO DA NORMAL CAIU EM VARIAS PROVAS (2011.1; 2012.2; 2009.1)

EXEMPLO: 2010.2

$$\begin{cases} \iint \frac{1}{\sqrt{1+4z^3}} \, dS \\ z = 1/(x^2+y^2) \\ \frac{x^2}{4} + (y-2)^2 = 1 \end{cases}$$

↑ CILINDRO ELIPTICO DESLOCADO DE RAIOS 1 e 2

• PARAMETRIZAÇÃO EXPLICITA

$x = x$

$y = y$

$z = 1/x^2+y^2$

$$n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2x/(x^2+y^2)^2 \\ 0 & 1 & -2y/(x^2+y^2)^2 \end{vmatrix}$$

$A = \frac{2x}{(x^2+y^2)^2}$ $\quad B = \frac{2y}{(x^2+y^2)^2}$ $\quad C = 1$

$$\|N\| = \sqrt{A^2+B^2+C^2} = \underbrace{\sqrt{1 + \frac{4}{(x^2+y^2)^3}}}_{\text{IGUAL A FUNÇÃO}}$$

$$\frac{1}{x^2+y^2} = z$$

$$\iint_S \frac{1}{\sqrt{1+4z^3}} \sqrt{1+4z^3} \, dS$$

$$\iint_S dS = \boxed{2\pi}$$

ESPERO TER AJUDADO !

BOA PROVA ! IGOR BAKMAN