Cálculo Infinitesimal 3 – Lista 6 - 2020

Prof. Flavio Dickstein.

Questão 1. Um fio de comprimento l tem massa M, uniformemente distribuída ao longo do fio. Suponha que suas extremidades estejam nos pontos $(0,0)$ e $(l,0)$. Por simetria, a força exercida pelo fio no ponto $(l/2,y)$ é vertical, para qualquer $y \in \mathbb{R}$. Mostre isso fazendo as contas, isto é, mostre que a componente horizontal da força é nula.

Resolução 1. *A densidade ρ vale M/l. A força $\vec{F}$ vale*

$$\vec{F} = \rho \int_\gamma \frac{1}{r^2}\vec{r} = \int_0^l \frac{1}{(l/2-x)^2+y^2})^{\frac{3}{2}}(l/2-x,y)\,dx.$$

A componente horizontal vale

$$F_1 = \rho \int_0^l \frac{1}{(l/2-x)^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}(l/2-x)\,dx = \rho \frac{1}{(l/2-x)^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\Big|_0^l = 0.$$

Questão 2. Ainda nas condições do exercício anterior, calcule as componentes horizontal e vertical da força exercida sobre o ponto $(0,d)$.

Resolução 2. *Veja as notas do curso.*

Questão 3. Seja γ a circunferência situada no plano $z=0$, de equação $x^2+y^2=4$. Suponha que γ tenha massa M, uniformemente distribuída. Determine o potencial gravitacional G no plano $z=0$. Determine o campo gravitacional no plano $z=0$. Determine o potencial e a força no ponto $(0,0,d)$.

Resolução 3. *Temos que $\rho = \dfrac{M}{4\pi}$ e*

$$G(x,y,0) = \rho \int_\gamma \frac{1}{r}\,ds.$$

Se $2(\cos\theta,\sin\theta)$ é um ponto de γ, então $r(\theta) = ((x-2\cos\theta)^2+(y-2\sin\theta)^2)^{\frac{1}{2}}$ e

$$G(x,y,0) = \rho \int_0^{2\pi} \frac{1}{((x-2\cos\theta)^2+(y-2\sin\theta)^2)^{\frac{1}{2}}}\,2d\theta.$$

Esta integral é conhecida como uma integral de tipo elítica, e sabe-se que $G(x,y,0)$ não pode ser calculada exatamente. O campo gravitacional também não pode ser calculado. Já o potencial e a força no ponto $(0,0,d)$ são fáceis de serem calculadas, pois $r(\theta)=\sqrt{d^2+4}$. Assim,

$$G(0,0,d) = \rho \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{d^2+4}}\,2d\theta = \frac{4\pi\rho}{\sqrt{d^2+4}} = \frac{M}{\sqrt{d^2+4}}.$$

Por simetria, a força $\vec{F}$ tem a direção de z. Sua componente F_3 vale

$$F_3 = \partial_3 G(0,0,d) = -\frac{Md}{(d^2+4)^{\frac{3}{2}}}.$$

Questão 4. Repita o exercício anterior, supondo que γ não é homogênea, e que sua densidade de massa é dada por $\rho(x, y) = |x| + |y|$.

Questão 5. Considere um quadrado de lado 1 e massa M, distribuída uniformemente no quadrado. Considere a reta r que passa pelo centro do quadrado e é ortogonal ao quadrado. Determine a força que o quadrado exerce sobre um ponto P de r que dista d do quadrado.

Resolução 4. *Vamos considerar o quadrado Q no plano $z = 0$, e de extremidades $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ e $(1, 1)$. Por simetria, a força aponta na direção z. Se $(x, y, 0) \in Q$, a distância entre $(x, y, 0)$ e $(1/2, 1/2, d)$ vale $r(x, y) = \sqrt{((x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 + d^2)}$. Temos que*

$$\vec{F}(d) = \rho \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{((x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} (1/2 - x, 1/2 - y, d)\, dxdy.$$

Melhor escrever

$$\vec{F}(d) = \rho \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(x^2 + y^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} (x, y, d)\, dxdy.$$

(Verifique que $F_1 = F_2 = 0$.) Temos que

$$F_3(d) = \rho d \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(x^2 + y^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}\, dxdy = 4\rho d \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(x^2 + y^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}\, dxdy.$$

Para calcular F_3, fixado y, seja

$$I(y) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(x^2 + y^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx.$$

Se $x = \sqrt{y^2 + d^2} \tan\theta$, $dx = \sqrt{y^2 + d^2} \sec^2\theta\, d\theta$. Então,

$$\int \frac{1}{(x^2 + y^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx = \frac{1}{y^2 + d^2} \int \cos\theta\, d\theta = \frac{1}{y^2 + d^2} \sin\theta = \frac{1}{y^2 + d^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + d^2}}$$

Assim,

$$F_3(d) = 2d\rho \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{y^2 + d^2} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} + y^2 + d^2}}\, dy.$$

É possível resolver esta integral, mas não vale a pena continuar.

Questão 6. Repita o exercício anterior, trocando o quadrado por um círculo de raio 1.

Resolução 5. *Este caso é mais simples. As componentes F_1 e F_2 são nulas, por simetria. Se C é o círculo,*

$$\begin{aligned} F_3(d) = \rho d \int_C \frac{1}{(x^2 + y^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}\, dxdy =& \rho d \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{r}{(r^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}\, d\theta dr = \\ & - 2\pi\rho d \frac{1}{\sqrt{r^2 + d^2}}\Big|_0^1 = 2\pi\rho \left(1 - \frac{d}{\sqrt{1 + d^2}}\right). \end{aligned} \tag{0.1}$$

Questão 7. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um corpo situado entre as esferas de raios 1 e 2. Suponha que ele seja homogêneo e tenha massa M. Determine o potencial e o campo de forças gravitacionais em todos os pontos do espaço.

Resolução 6. *Vimos que o campo gravitacional $\vec{F}$ gerado por uma esfera de raio R e de densidade ρ é dado por*

$$\vec{F}(r) = \begin{cases} \frac{4\pi\rho}{3}(x,y,z), & r < R \\ \frac{4\pi\rho R^3}{3r^3}(x,y,z), & r > R. \end{cases}$$

No caso $\rho = \dfrac{3M}{4\pi(2^3 - 1^3)} = \dfrac{3M}{28\pi}$. *O campo gerado por Ω vale $\vec{F} = \vec{F}_2 - \vec{F}_1$, onde $\vec{F}_2, \vec{F}_1$ são os campos gerados pela esferas de raio 2 e de raio 1. Então,*

$$\vec{F}(r) = \begin{cases} 0, & r < 1, \\ \frac{4\pi\rho}{3}\left(1 - \frac{1}{r^3}\right)(x,y,z), & 1 \le r \le 2 \\ \frac{28\pi\rho}{3r^3}(x,y,z), & r > 2. \end{cases}$$

Analogamente, $G = G_2 - G_1$.