Cálculo Infinitesimal 3 – 2021/1 - Lista 1

Prof. Flavio Dickstein.

Questão 1. Considere um fio não-homogêneo que ocupe no espaço uma curva γ parametrizada por $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in (0, 2\pi)$. No ponto da curva de altura z, a densidade de massa σ do fio é igual a $\sigma(z) = z$. Determine a massa total do fio.

Resolução 1. *A massa dm contida no trecho infinitesimal ds vale* $dm = \sigma(s)ds$. *A massa total vale* $m = \int dm = \int \sigma(s)\, ds$. *Usando a parametrização, temos* $ds = |\alpha'(t)|dt = \sqrt{2}\, dt$. *Portanto,*

$$m = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} t\, dt = 2\sqrt{2}\pi^2.$$

Questão 2. Seja $F(x, y) = (y^2, x^2)$. Considere dois caminhos indo de $(-1, 0)$ a $(1, 0)$: γ_1 é um segmento de reta e γ_2 é o arco de meia circunferência, na parte superior do plano. Mostre que

$$\int_{\gamma_1} F \cdot dl \neq \int_{\gamma_2} F \cdot dl.$$

O que isto diz sobre F?

Resolução 2. *A curva* γ_2 *é parametrizada por* $x(\theta) = \cos\theta$, $y(\theta) = \sin\theta$, $\theta \in (0, \pi)$. *Então,*

$$\int_{\gamma_2} F_1 dx + F_2 dy = \int_\pi^0 \sin^2\theta(-\sin\theta) + \cos^2\theta\cos\theta\, d\theta =$$

$$\int_\pi^0 (1 - \sin^2\theta)\cos\theta - (1 - \cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta = \sin\theta + \cos\theta - \frac{1}{3}(\sin^3\theta + \cos^3\theta)\Big|_\pi^0 = \frac{4}{3}.$$

A curva γ_1 *é parametrizada por* $x(t) = t$, $y(t) = 0$, $t \in (-1, 1)$. *Então,*

$$\int_{\gamma_1} F_1 dx + F_2 dy = \int_{-1}^1 0\, dt = 0.$$

Como $\int_{\gamma_1} F \cdot dl \neq \int_{\gamma_2} F \cdot dl$, *vemos que F não é conservativo. (Mais simples seria verificar que* $\nabla \times F = \partial_x F_2 - \partial_y F_1 = 2x - 2y \neq 0$.*)*

Questão 3. Seja $F(x, y) = (x^2, y^2)$. Considere os caminhos γ_1 e γ_2 da questão anterior. Escolha as normais a γ_1 e a γ_2 apontando para cima. Mostre que

$$\int_{\gamma_1} F \cdot d\eta \neq \int_{\gamma_2} F \cdot d\eta.$$

O que isto diz sobre F?

Resolução 3. *Parametrizando* γ_1 *por* $x(t) = t$, $y(t) = 0$, *vemos que* $\tau(t) = (1, 0)$ *e* $\eta(t) = (0, 1)$. *Então,*

$$\int F_1 d\eta_1 + F_2 d\eta_2 = \int_{-1}^1 0\, dt = 0.$$

Parametrizando γ_2 por $x(\theta) = \cos\theta$, $y(\theta) = \sin\theta$, vemos que $\tau(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$ é um vetor tangente unitário à curva. Portanto, $\eta(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ é uma normal unitária. E é a normal exterior. Assim,

$$\int F_1 d\eta_1 + F_2 d\eta_2 = \int_0^\pi \cos^2\theta\cos\theta + \sin^2\theta\sin\theta\, d\theta =$$

$$\int_\pi^0 (1-\sin^2\theta)\cos\theta + (1-\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta = \sin\theta - \cos\theta + \frac{1}{3}(\cos^3\theta - \sin^3\theta)\Big|_0^\pi = \frac{4}{3}.$$

Atenção: No caso anterior, a integral de linha vai de π a 0, segundo o modo de percorrer a curva. No cálculo do fluxo, não há forma de percorrer a curva, mas há o sentido da normal exterior. A integral aqui vai de 0 a π.

Como $\int_{\gamma_1} F \cdot d\eta \neq \int_{\gamma_2} F \cdot d\eta$, vemos que F é compressível.

Questão 4. Seja $F(x, y) = (\cos x \sin y, \sin x \cos y)$.

(i) Mostre que o rotacional $\nabla \times F = 0$. (Como veremos, nesse caso F é um campo gradiente.)

(ii) Calcule o potencial G de F resolvendo as equações

$$\partial_x G(x, y) = \cos x \sin y, \quad \partial_y G(x, y) = \sin x \cos y. \tag{1}$$

(iii) Alternativamente, determine G calculando

$$G(x, y) = \int_\gamma F \cdot dl, \tag{2}$$

onde γ é uma curva ligando $(0, 0)$ a (x, y). (Escolha a curva mais simples possível.)

(iv) No item anterior, o que acontece se escolhermos outro ponto no lugar de $(0, 0)$?

Resolução 4. *Temos que $\partial_y(\cos x \sin y) = \cos x \cos y$ e $\partial_x(\sin x \cos y) = \cos x \cos y$. Então, $\nabla \times F = 0$.*

Vamos ver se existe um potencial G. Se $\partial_x G(x, y) = \cos x \sin y$, então

$$G(x, y) = \sin x \sin y + g(y).$$

Derivando em relação a y, $\partial_y G(x, y) = \sin x \cos y + g'(y)$. Basta então tomar $g'(y) = 0$, ou seja, $g(y) = C$. Conclusão: $G(x, y) = \sin x \sin y + C$ é um campo potencial de F.

Façamos de outra maneira, usando (2). Escolhemos a curva mais simples, a linha reta, parametrizada por $\alpha(t) = t(x, y)$, $t \in [0, 1]$. Então, $\alpha'(t) = (x, y)$ e

$$\int_\gamma F \cdot dl = \int_0^1 (\cos tx \sin ty, \sin tx \cos ty) \cdot (x, y)\, dt =$$

$$\int_0^1 x \cos tx \sin ty + y \sin tx \cos ty = \sin tx \sin ty\Big|_0^1 = \sin x \sin y.$$

O candidato $G(x, y) = \sin x \sin y$ é, de fato, um potencial, porque $\nabla G = F$. Se, no lugar de $(0, 0)$, tivéssemos tomado outro ponto P como ponto de partida, teríamos um nova função $\widetilde{G}$ dada por

$$\widetilde{G}(x, y) = \int_{\widetilde{\gamma}} F \cdot dl,$$

onde $\widetilde{\gamma}$ é uma curva que liga P a (x,y). Podemos escolher $\widetilde{\gamma} = \gamma_1 + \gamma_2$, onde γ_1 vai de P a $(0,0)$ e γ_2 vai de $(0,0)$ a (x,y). Portanto,

$$\widetilde{G}(x,y) = \int_{\gamma_1} F \cdot dl + \int_{\gamma_2} F \cdot dl = \int_{\gamma_1} F \cdot dl + G(x,y) = C + G(x,y).$$

Então, mudar o ponto de partida significa mudar o potencial por uma constante.

Questão 5.

(i) Mostre que $F(x,y) = (ye^{xy}, xe^{xy})$ é um campo conservativo e calcule o seu potencial.

(ii) Considere $H(x,y) = (y + ye^{xy}, xe^{xy})$. Seja T o triângulo de vértices $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (0,1)$ percorrido no sentido trigonométrico. Calcule $\oint_\gamma H \cdot dl$, a circulação de H. (Simplifique as contas usando o item anterior.)

Resolução 5. *É fácil ver que $G(x,y) = e^{xy}$ é um potencial de F. Isto mostra (i).*

Para (ii), escrevemos

$$H = (y,0) + (ye^{xy}, xe^{xy}) = K + F.$$

Como F é conservativo,

$$\oint_\gamma H \cdot dl = \oint_\gamma K \cdot dl + \oint_\gamma F \cdot dl = \oint_\gamma K \cdot dl.$$

Basta então calcular a circulação de K. A curva γ tem três partes. Cada uma das partes será calculada usando a expressão

$$\int_\gamma K dl = \int K_1\, dx + K_2\, dy = \int K_1\, dx.$$

da seguinte forma. Escrevemos $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Na expressão acima, substituímos dx por $x'(t)dt$, dy por $y'(t)dt$ e calculamos h_1 e h_2 em $(x(t), y(t))$.

A reta γ_1 que vai de $(0,0)$ a $(1,0)$. Sobre γ_1, $K_1 = 0$. Então,

$$\int_{\gamma_1} K \cdot dl = 0.$$

A reta γ_2 que vai de $(1,0)$ a $(0,1)$ é parametrizada por $(x(t), y(t)) = t(0,1) + (1-t)(1,0) = (1-t, t)$. Logo, $dx = -dt$ e $K_1(1-t, t) = t$. Assim,

$$\int_{\gamma_2} K \cdot dl = \int_0^1 -t dt = -\frac{1}{2}.$$

A reta γ_3 que vai de $(0,1)$ a $(0,0)$ é parametrizada por $(x(t), y(t)) = (0, 1-t)$. Temos $dx = 0$. Assim,

$$\int_{\gamma_3} K \cdot dl = 0.$$

Portanto, $\oint_\gamma F = \int_{\gamma_1} K + \int_{\gamma_2} K + \int_{\gamma_3} K = -\frac{1}{2}.$

Questão 6. Seja F o campo radial de $\mathbb{R}^2$ dado por $F(r) = \dfrac{1}{r}\vec{r}$. Seja γ_R a circunferência de raio R.

(i) Mostre que o fluxo $\displaystyle\int_{\gamma_R} F.d\eta$ independe de R.

(ii) Seja $p > 0$ e considere o campo radial F_p dado por $F_p(r) = \dfrac{1}{r^p}\vec{r}$. Suponha que o fluxo de F_p através da circunferência γ_R independa de R. Conclua que $p = 1$. Explique este fato.

(iii) Mostre que o divergente $\nabla \cdot F_p$ de F_p é nulo se e só se $p = 1$. Explique este fato.

Resolução 6. *A normal unitária η exterior a γ_R é igual a $\vec{r}$. Logo, $F_p \cdot \eta = R^{-p}$, constante. Assim,*

$$\int_{\gamma_R} F_p \cdot d\eta = 2\pi R.R^{-p} = 2\pi R^{1-p}.$$

O fluxo independe de R se e só se $p = 1$. As contas explicam o que ocorre. Como a componente radial é constante, o fluxo é igual à constante vezes o comprimento da curva. Como o comprimento cresce linearmente com R, o fluxo independe de R quando o campo decresce linearmente com R.