Cálculo Infinitesimal 3 – Lista 4 - 2020

Prof. Flavio Dickstein.

Questão 1. Calcule o volume V do parabolóide $z = 1-(x^2+y^2)$ situado na região $z > 0$.

Resolução 1. *Considere o parabolóide* $z = 1-(x^2+(ay)^2)$ *situado na região* $z > 0$. *Então, usando a mudança de variáveis* $u = x$, $v = ay$, $w = z$ *(de jacobiano* $J = \dfrac{1}{a}$*) temos*

$$V = \int_0^1 \int_{x^2+(ay)^2\le 1-z} 1\, dxdydz = \frac{1}{a}\int_0^1 \int_{u^2+v^2\le 1-w} 1\, dudvdw.$$

Se $u = \sqrt{1-w}r\cos\theta$, $v = \sqrt{1-w}r\sin\theta$ *(*$J = (1-w)r$*),* $r\in(0,1)$ *e* $\theta\in(0,2\pi)$*,*

$$\int_{u^2+v^2\le 1-w} 1\, dxdy = (1-w)\int_0^1\int_0^{2\pi} r\, dr = (1-w)\pi.$$

Logo,

$$V = \frac{\pi}{a}\int_0^1 1-w\, dw = \frac{\pi}{2a}.$$

Isto resolve as questões 1 e 2.

Questão 2. Um sólido de forma cilíndrica tem a base circular de raio 1 e altura 2. Ele tem densidade de massa ρ variável, $\rho(x,y,z) = x^2+y^2+z$. Determine sua massa M.

Resolução 2. *Usando coordenadas cilíndricas,* $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $z = z$ *(jacobiano* r*) temos*

$$M = \int_C \rho = \int_0^1\int_0^2\int_0^{2\pi} r^3+zr\, d\theta dz dr = 2\pi\int_0^1 r^3z + r\frac{z^2}{2}\Big|_0^2 dr = 2\pi\int_0^1 2r^3+2r\, dr = 3\pi.$$

Questão 3. Seja Ω a região de $\mathbb{R}^3$ situada entre as esferas de raio 1 e de raio 2. Seja $f(r) = r^{-3}$. Calcule $I = \displaystyle\int_\Omega f$.

Resolução 3. *Usando coordenadas esféricas (jacobiano* $r^2\sin\varphi$*), temos*

$$\int_1^2\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^{-1}\sin\varphi\, d\theta d\varphi dr = 4\pi\int_1^2 r^{-1}\, dr = 4\pi\log r\Big|_1^2 = 4\pi\log 2.$$

Questão 4. Considere a função radial em $\mathbb{R}^3$ $f(r) = r^{-p}$, onde $p > 0$. Seja $I = \displaystyle\int_{r>1} f(r)$. Mostre que $I < \infty$ se $p > 3$ e $I = \infty$ se $p \le 3$.

Seja $J = \displaystyle\int_{r<1} f(r)$. Mostre que $J < \infty$ se $p < 3$ e $J = \infty$ se $p \ge 3$.

Resolução 4. *Fazendo como no exercício anterior, obtemos para* $p \neq 3$

$$I = 4\pi \int_1^\infty r^{2-p}\, dr = \frac{4\pi}{3-p} r^{3-p}\Big|_1^\infty.$$

Então, $I = \infty$ *se* $p < 3$ *e* $I = \dfrac{4\pi}{p-3}$ *se* $p > 3$*. No caso* $p = 3$*, teremos* $\log \infty = \infty$*. Analogamente,*

$$J = \frac{4\pi}{3-p} r^{3-p}\Big|_0^1.$$

Logo, $J = \infty$ *se* $p > 3$ *e* $J = \dfrac{4\pi}{3-p}$ *se* $p < 3$*. Novamente,* $p = 3$ *está do lado da divergência, pois* $\log 0 = -\infty$*.*

Questão 5. Mostre que um cone de altura h e área da base A tem volume igual a $\dfrac{1}{3}Ah$.

Resolução 5. *Podemos usar o Princípio de Cavalieri, mas eu vou aplicar o Teorema de Pappus, usando que o centro de massa* CM *do triângulo* ABC *está em* $\dfrac{1}{3}(A+B+C)$*. Se o cone é obtido pela rotação de um triângulo retângulo de catetos de comprimento* h *e* r*, então* CM *está a uma distância* $\frac{r}{3}$ *do eixo de rotação. Usando Pappus, o volume do cone vale*

$$V = 2\pi \frac{r}{3}\frac{1}{2} rh = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}Ah.$$

Questão 6. Mostre uma pirâmide de altura h e área da base A tem volume igual a $\dfrac{1}{3}Ah$.

Resolução 6. *As seções horizontais da pirâmide e do cone têm a mesma área. Usando o Princípio de Cavalieri, a pirâmide e o cone têm o mesmo volume.*

Questão 7. Sejam C_z o cilindro $x^2 + y^2 \leq 1$ e C_y o cilindro $x^2 + z^2 \leq 1$. Calcule o volume de $\Omega = C_z \cap C_y$. (Sugestão: Mostre que a interseção de Ω com planos x constante são quadrados. Use Fubini.)

Resolução 7. *Considere o plano paralelo ao plano* yz*. Considere* $|x_0| \leq 1$*. A interseção de* C_z *com o plano* $x = x_0$ *é a faixa* $y^2 \leq 1 - x^2$*, isto é,*

$$-\sqrt{1 - x_0^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x_0^2}.$$

A interseção de C_y *com o plano* $x = x_0$ *é a faixa*

$$-\sqrt{1 - x_0^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x_0^2}.$$

Portanto a interseção de $C_z \cap C_y$ *com o plano* $x = x_0$ *é um quadrado de lado* $2\sqrt{1 - x_0^2}$ *e área* $A(x_0) = 4(1 - x_0^2)$*. Usando Fubini,*

$$V = \int_{-1}^{1} A(x)\, dx = 4 \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = \frac{16}{3}.$$