CÁLCULO 3—EXERCÍCIOS PARA PROVA 1

Prof. Marianty Ionel

Material: Integral múltipla. Teorema de Fubini (com demonstração). Integrais duplas em coordenadas rectangulares e coordenadas polares. Integrais triplas em coordenadas rectangulares, cilíndricas e esféricas. Mudança geral de variaveis em uma integral múltipla. Integrais múltiplas improprias. Aplicações da integral múltipla. Integral de linha de uma função escalar. Integral de linha de um campo vetorial. Campos vetoriais conservativos. Teorema fundamental de calculo para campos conservativos. Teorema de Green (sem demonstração).

Exercícios:

1. Determine o volume do sólido contido no primero octante limitado por cílindro $z = 9 - y^2$ e pelo plano $x = 2$.
Resp: 36

2. Calcular a integral da função $f(x,y) = \frac{xe^y}{\ln^2 y}$ sobre o domínio

$$\Omega = \{(x,y) |\ 0 \le x \le 1; e^x \le y \le e\}$$

Resp: $\frac{1}{2}(e^e - e)$

3. Calcular a integral $\int_\Omega \sqrt{x^2+y^2}\ d\Omega$, onde $\Omega = \{(x,y) | x^2+y^2 \ge 1,\ x^2+y^2 \le 2x\}$.
Resp: $2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{9}$

4. Use coordenadas polares para calcular as seguintes integrais iteradas:
(a) $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{2-y^2}} (x+y) dx dy$
(b) $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{4x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} dy dx$

5. Encontre o volume do sólido limitado por o paraboloide $z = x^2 + 3y^2$ e os planos $x = 0$, $y = 1$, $y = x$ e $z = 0$.

6. Calcular o volume do sólido $V = \{(x,y,z) | z \le \sqrt{3x^2+3y^2};\ x^2+y^2+z^2 \le 2z\}$.
Resp: $\frac{3\pi}{4}$

7. Calcular a integral tripla

$$\iiint_E x^2 e^y dV$$

onde E é limitado pelo cílindro parabolico $z = 1 - y^2$ e os planos $z = 0,\ x = 1$ e $x = -1$.
Resp: $\frac{8}{3e}$

8. Calcular

$$\iiint_H (x^2 + y^2) dV$$

onde H e a região semi-esférica acima do plano xy e abaixo da esféra $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

9. Esboce o sólido cujo volume é dado pela integral seguinte e calcule essa integral:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \rho^2 \sin\phi \ d\rho \ d\theta \ d\phi$$

10. Considere a integral

$$\iint_D f(x,y) dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{4x} f(x,y) dy dx$$

Esboce graficamente a região D e expresse a integral da direita com a ordem trocada.

11. Calcule $\iint_D (x - y)^2 sen^2(x + y) dx dy$, onde D é a região limitada pelas retas: $y = -x + \pi,\ y = -x + 3\pi,\ y = x - \pi,\ y = x + \pi$.
Resp: $\frac{\pi^4}{3}$

12. Trocar a ordem da integração:

$$\int_{-2}^{0} dx \ \int_{\sqrt{-x(x+2)}}^{\sqrt{4-x^2}} \ f(x,y) dy$$

13. Calcular a área da figura plana limitada pela curva $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$.
Resp: 1

14. Calcule a integral dupla $\iint_D y e^x dx dy$, onde D é o paralelogramo de vértices nos pontos $A(0,0), B(2,0), C(3,1)$ e $D(1,1)$.

15. Calcule a integral dupla:

$$\iint_D \frac{dx dy}{(4x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

onde $D = \{(x,y)|\ 1 \leq x \leq 2,\ |y| \leq \frac{x}{2}\}$.
Resp: $\frac{\sqrt{17}}{68}$

16. Calcule a integral dupla:

$$\iint_D (2x+y)sen(x-2y)dxdy$$

onde D é a região do $\mathbb{R}^2$ delimitada pela curvas de equações $(2x+y)^2-2y+x=-3$, $(2x+y)^2-2y+x=0,\ 2x+y=1$ e $2x+y=0$.
Resp: $\frac{1}{10}(sen4-sen3-sen1)$

17. Calcule

$$\iiint_W \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$$

onde W é a interseção dos sólidos $S_1=\{(x,y,z)|x^2+y^2\leq 1\},\ S_2=\{(x,y,z)|z\leq 0\}$ e $S_3=\{(x,y,z)|z\geq -\sqrt{x^2+y^2}\}$.
Resp: $\frac{\pi}{2}$

18. Demostre *o teorema de Pappus:* Se S é uma região plana limitada, então o volume do sólido obtido pela rotação de S em torno de um eixo l contido no plano do S e que não intercepta S é $2\pi R\mu(S)$, onde R é a distância do centroide de S a l e $\mu(S)$ é a área de S.

19. Encontre o centro de massa do cilindro $x^2+y^2\leq 1, 1\leq z\leq 2$ se a densidade é $\rho=(x^2+y^2)z^2$.

20. Encontre o momento de inercia em relação á eixo y para a bola $x^2+y^2+z^2\leq R^2$ se a densidade é constante ρ.

21. Decide se a integral $\int_D \frac{x+y}{x^2+2xy+y^2}dxdy$ existe, onde $D=[0,1]\times[0,1]$. Se existir, calcule o seu valor.

22. Calcule a massa e o centro de massa de um semicírculo D de raio a e centro na origem, sabendo que a densidade no ponto P é proporcional á distância do ponto ao centro do círculo.

23. Sabendo que a densidade em cada ponto do sólido W é dada por $f(x,y,z)=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$, determine a massa do sólido W quando

$$W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|x^2+y^2+z^2\leq 9\ e\ x^2+y^2+z^2\geq 2y\}$$

24. (a) Considere uma distribuição uniforme de carga eléctricas positivas sobre a superfície de uma esféra. Mostre que o campo eléctrico resultante é nulo no interior da esféra e igual ao que seria gerado pela carga total da esfera, se concentrada em seu centro, para pontos no exterior da esféra.
(b) Calcule o campo gravitational gerado por uma bola de raio R e massa M uniformamente distribuída.

25. Determine o valor da integral de linha

$$\int_\gamma (2x\sin y + x^3)dx + (x^2\cos y - y^3)dy$$

onde γ é parametrizada por $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^2 t), 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.
Resp: $-\frac{1}{2}$

26. Considere o segmento γ da reta $y = x$ contido no interior da elipse $16x^2 + 9y^2 = 1$ e orientado no sentido do x crescente. Calcule:

$$\int_\gamma (e^x y - 4y)dx + e^x dy$$

Resp: $\frac{2}{5}\cosh\frac{1}{5}$

27. Calcular a integral de linha da função $\vec{F} = (e^x(cos\ y - 1), 1 - e^x sen\ y)$ sobre a curva $\gamma : x = x(t),\ y = y(t)$, com ponto inicial $A(0,0)$ e ponto final $B(1,1)$.
Resp: $e\cos 1 - e + 1$

28. Calcular o trabalho do campo vetorial

$$\vec{F} = \left(\frac{y-1}{x^2+(y-1)^2},\ \frac{-x}{x^2+(y-1)^2}\right)$$

nos casos:
(a) sobre qualquer circunferência com centro $(0,1)$ no sentido anti-horário;
(b) sobre elipse $\frac{x^2}{19} + \frac{y^2}{11} = 1$ no sentido anti-horário.
Resp: (a) -2π*; (b)* -2π

29. Calcular o trabalho do campo vetorial

$$\vec{F} = (4y + 2xe^{x^2-y},\ 6x - e^{x^2-y})$$

sobre a parte da curva $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ que se encontra abaixo da reta $3x + 2y = 6$, percorrida no sentido anti-horário.
Resp: $9\pi + e^4 - e^{-3}$

30. Considere o segmento $\mathcal{C}_1$ da reta $y = x$ contido no interior da elipse $16x^2 + 9y^2 = 1$ e orientado no sentido de x crescente.
(a) Calcule $I_1 = \int_{\mathcal{C}_1}(e^x y - 4y)dx + e^x dy$
(b) Seja $\mathcal{C}_2$ a parte da elipse $16x^2 + 9y^2 = 1$ contida acima do segmento $\mathcal{C}_1$ e orientado no sentido anti-horário. Use o teorema de Green para calcular $I_2 = \int_{\mathcal{C}_2}(e^x y - 4y)dx + e^x dy$.
Resp: (a) $\frac{2}{5}\cosh\frac{1}{5}$*; (b)* $\frac{\pi}{6} - \frac{2}{5}\cosh\frac{1}{5}$