

问题一

对方案1、2建立使值班护士人数为最少的线性规划模型并求解。

方案一

确定决策变量、目标函数和约束函数

根据题意，每名护士连续上班5天，休息2天，并从上班第一天起按从上第一班到第五班顺序安排。目标是使值班护士人数最少。

可以设决策变量 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ 分别表示从星期一到星期日该日开始上班的护士人数，则所需的值班护士总人数则可以简单的表示为这七天开始上班的护士人数的总和。

每天的时间区段和护士班次对应如下表：

时间区段	班次
6:00~10:00	1,2
10:00~14:00	2,3
14:00~18:00	3,4
18:00~22:00	4,5
22:00~6:00（次日）	5(前一半),1(后一半)

每天的五个时间区段上班的护士数量如下表所示：

时间区段	周一	周二	周三	周四	周五	周六	周日
6:00~10:00	x_1+x_7	x_2+x_1	x_3+x_2	x_4+x_3	x_5+x_4	x_6+x_5	x_7+x_6
10:00~14:00	x_6+x_7	x_1+x_7	x_2+x_1	x_3+x_2	x_4+x_3	x_5+x_4	x_6+x_5
14:00~18:00	x_5+x_6	x_7+x_6	x_1+x_7	x_2+x_1	x_3+x_2	x_4+x_3	x_5+x_4
18:00~22:00	x_4+x_5	x_6+x_5	x_7+x_6	x_1+x_7	x_2+x_1	x_3+x_2	x_4+x_3
22:00~6:00（次日）	x_4, x_1	x_5, x_2	x_6, x_3	x_7, x_4	x_1, x_5	x_2, x_6	x_3, x_7

22:00~6:00（次日）这一时间段需要第一班和第五班合作完成，故这两班的人数都要达到人数要求。

根据题意，可以确定决策变量、目标函数和约束函数（重复的约束函数已略去）如下：

决策变量：

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$$

目标函数：

$$\min \quad tot = \sum_{i=1}^7 x_i$$

约束函数：

$$x_6 + x_7 \geq 20$$

$$x_1 + x_7 \geq 20$$

$$x_2 + x_1 \geq 20$$

$$x_3 + x_2 \geq 20$$

$$x_4 + x_3 \geq 20$$

$$x_5 + x_4 \geq 20$$

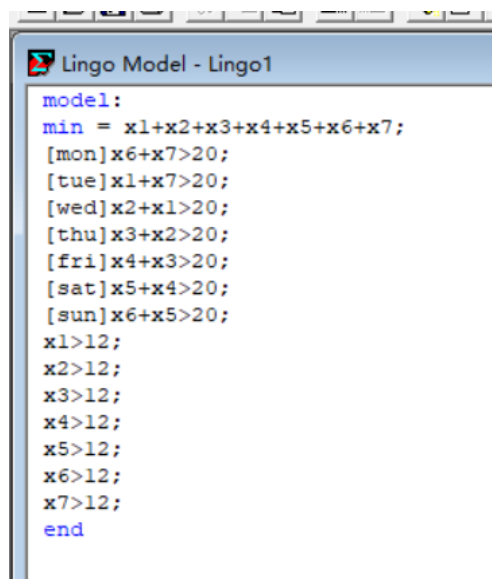
$$x_6 + x_5 \geq 20$$

$$x_1, x_2, \dots, x_7 \geq 12$$

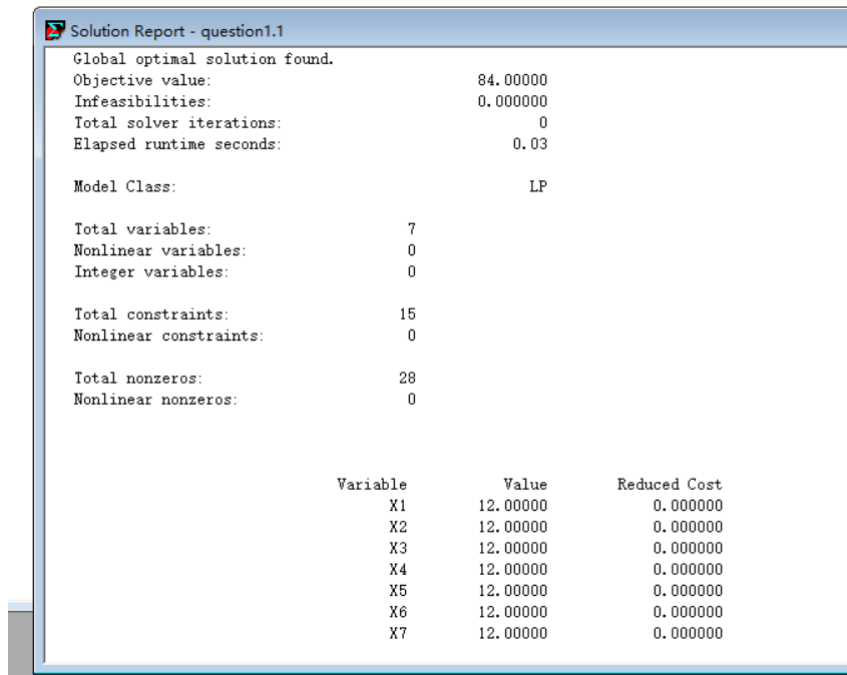
使用lingo编程求解

代码如下：

```
model:
min = x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7;
[mon]x6+x7>20;
[tue]x1+x7>20;
[wed]x2+x1>20;
[thu]x3+x2>20;
[fri]x4+x3>20;
[sat]x5+x4>20;
[sun]x6+x5>20;
x1>12;
x2>12;
x3>12;
x4>12;
x5>12;
x6>12;
x7>12;
end
```



求解得：



可得当每天开始上班的护士人数都为12人时，值班护士总人数最少，最少人数为84人。

方案二

确定决策变量、目标函数和约束函数

根据题意，每名护士在周六、周日两天内安排一天、且只安排一天休息，并且每个护士工作日期连续，所以一旦确定周末两天每个班次的护士人数，总人数和护士的排班就可以轻松确定。

设决策变量 x_1, x_2, \dots, x_{10} 分别表示从周六和周日共10班的护士人数，则所需的值班护士总人数则可以表示为这是个变量的和。

护士值班情况如下表所示：

班次	周一	周二	周三	周四	周五	周六	周日
2:00~10:00	x_{10}	x_5+x_9	x_4+x_8	x_3+x_7	x_2	x_1	x_6
6:00~14:00	x_6	x_1+x_{10}	x_5+x_9	x_4+x_8	x_3	x_2	x_7
10:00~18:00	x_7	x_2+x_6	x_1+x_{10}	x_5+x_9	x_4	x_3	x_8
14:00~22:00	x_8	x_3+x_7	x_2+x_6	x_1+x_{10}	x_5	x_4	x_9
18:00~2:00 (次日)	x_9	x_4+x_8	x_3+x_7	x_2+x_6	x_1	x_5	x_{10}

根据题意，可以确定决策变量、目标函数和约束函数（重复的约束函数已略去）如下：

决策变量：

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}$$

目标函数：

$$\min \quad tot = \sum_{i=1}^{10} x_i$$

约束函数：

$$x_6 + x_7 \geq 20$$

$$x_1 + x_2 + x_6 + x_{10} \geq 20$$

$$x_1 + x_5 + x_9 + x_{10} \geq 20$$

$$x_4 + x_5 + x_8 + x_9 \geq 20$$

$$x_4 + x_3 \geq 20$$

$$x_2 + x_3 \geq 20$$

$$x_7 + x_8 \geq 20$$

$$x_4 + x_5 \geq 19$$

$$x_8 + x_9 \geq 19$$

$$x_{10} + x_6 \geq 18$$

$$x_9 + x_{10} \geq 17$$

$$x_1, x_2, x_5, x_6, x_9, x_{10} \geq 12$$

$$x_4 + x_8 \geq 12$$

$$x_3 + x_7 \geq 12$$

$$x_3, x_4, x_7, x_8 \geq 0$$

使用lingo编程求解

代码如下：

```
model:
min = x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+x10;
x6+x7>20;
x1+x2+x6+x10>20;
x1+x5+x9+x10>20;
x4+x5+x8+x9>20;
x4+x3>20;
x2+x3>20;
x7+x8>20;
x4+x5>19;
x8+x9>19;
x10+x6>18;
x9+x10>17;
x1>12;
x2>12;
x5>12;
x6>12;
x9>12;
x10>12;
x4+x8>12;
x3+x7>12;
end
```

```

Lingo Model - question1.2

model:
min = x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+x10;
x6+x7>20;
x1+x2+x6+x10>20;
x1+x5+x9+x10>20;
x4+x5+x8+x9>20;
x4+x3>20;
x2+x3>20;
x7+x8>20;
x4+x5>19;
x8+x9>19;
x10+x6>18;
x9+x10>17;
x1>12;
x2>12;
x5>12;
x6>12;
x9>12;
x10>12;|
x4+x8>12;
x3+x7>12;
end

```

求解得：

Global optimal solution found.		
Objective value:	112.0000	
Infeasibilities:	0.000000	
Total solver iterations:	5	
Elapsed runtime seconds:	0.03	
Model Class:	LP	
Total variables:	10	
Nonlinear variables:	0	
Integer variables:	0	
Total constraints:	20	
Nonlinear constraints:	0	
Total nonzeros:	48	
Nonlinear nonzeros:	0	
Variable	Value	Reduced Cost
X1	12.00000	0.000000
X2	12.00000	0.000000
X3	13.00000	0.000000
X4	7.000000	0.000000
X5	12.00000	0.000000
X6	12.00000	0.000000
X7	13.00000	0.000000
X8	7.000000	0.000000
X9	12.00000	0.000000
X10	12.00000	0.000000
Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	112.0000	-1.000000
2	5.000000	0.000000
3	28.00000	0.000000
4	28.00000	0.000000
5	18.00000	0.000000
6	0.000000	-1.000000
7	5.000000	0.000000
8	0.000000	-1.000000
9	0.000000	0.000000

可得方案二总人数最少需要112人。

结论

对于方案一，使值班护士人数为最少的线性规划模型为：

班次	周一	周二	周三	周四	周五	周六	周日
2:00~10:00	12	12	12	12	12	12	12

班次	周一	周二	周三	周四	周五	周六	周日
6:00~14:00	12	12	12	12	12	12	12
10:00~18:00	12	12	12	12	12	12	12
14:00~22:00	12	12	12	12	12	12	12
18:00~2:00 (次日)	12	12	12	12	12	12	12

总共需要 $12 \times 7 = 84$ 名护士。

对于方案二，使值班护士人数为最少的线性规划模型为：

班次	周一	周二	周三	周四	周五	周六	周日
2:00~10:00	12	24	14	26	12	12	12
6:00~14:00	12	24	24	14	13	12	13
10:00~18:00	13	24	24	24	7	13	7
14:00~22:00	7	26	24	24	12	7	12
18:00~2:00 (次日)	12	14	26	24	12	12	12

总共需要112名护士。

问题二

对于方案3，同样建立使值班护士人数为最少的线性规划模型并求解，然后回答 a 的值为多大时，第3方案较第2方案更经济。

方案三

确定决策变量、目标函数和约束函数

根据题意，有一部分护士周末两天都上班，另外一部分周末只上一天，所以一旦确定周末两天每个班次的护士人数，总人数和护士的排班就可以轻松确定。

对于周末两天都上班的护士，设决策变量 x_1, x_2, \dots, x_5 分别表示每班次的上班人数；对于周末只上一天的护士，设决策变量 x_6, x_7, \dots, x_{15} 分别表示每班次的上班人数。

则护士值班情况如下表所示：

班次	周一	周二	周三	周四	周五	周六	周日
2:00~10:00	x_4+x_{15}	$x_3+x_{10}+x_{14}$	$x_2+x_9+x_{13}$	x_8+x_{12}	x_7	x_1+x_6	x_5+x_{11}
6:00~14:00	x_5+x_{11}	$x_4+x_6+x_{15}$	$x_3+x_{10}+x_{14}$	x_9+x_{13}	x_8	x_2+x_7	x_1+x_{12}
10:00~18:00	x_1+x_{12}	$x_5+x_{11}+x_7$	$x_4+x_6+x_{15}$	$x_{10}+x_{14}$	x_9	x_3+x_8	x_2+x_{13}
14:00~22:00	x_2+x_{13}	$x_1+x_{12}+x_8$	$x_5+x_7+x_{11}$	x_6+x_{15}	x_{10}	x_4+x_9	x_3+x_{14}
18:00~2:00 (次日)	x_3+x_{14}	$x_2+x_9+x_{13}$	$x_1+x_8+x_{12}$	x_7+x_{11}	x_6	x_5+x_{10}	x_4+x_{15}

根据题意，可以确定决策变量、目标函数和约束函数（重复的约束函数已略去）如下：

决策变量:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}$$

目标函数:

$$\min \quad tot = \sum_{i=1}^{10} x_i$$

约束函数:

$$x_4 + x_{15} + x_5 + x_{11} \geq 18$$

$$x_5 + x_{11} + x_1 + x_{12} \geq 20$$

$$x_4 + x_{15} + x_6 + x_5 + x_{11} + x_7 \geq 20$$

$$x_5 + x_{11} + x_7 + x_1 + x_{12} + x_8 \geq 19$$

$$x_3 + x_{14} + x_{10} + x_4 + x_{15} + x_6 \geq 20$$

$$x_{13} + x_9 + x_{14} + x_{10} \geq 20$$

$$x_{14} + x_{10} + x_{15} + x_6 \geq 19$$

$$x_{15} + x_6 + x_{11} + x_7 \geq 17$$

$$x_7 + x_8 \geq 18$$

$$x_8 + x_9 \geq 20$$

$$x_9 + x_{10} \geq 19$$

$$x_{10} + x_6 \geq 17$$

$$x_1 + x_6 + x_2 + x_7 \geq 18$$

$$x_2 + x_7 + x_3 + x_8 \geq 20$$

$$x_1 + x_{12} + x_2 + x_{13} \geq 20$$

$$x_2 + x_{13} + x_3 + x_{14} \geq 19$$

$$x_3 + x_{14} + x_4 + x_{15} \geq 17$$

$$x_{12} + x_8 \geq 12$$

$$x_7 \geq 12$$

$$x_5 + x_{11} \geq 12$$

$$x_7 \geq 12$$

$$x_5 + x_{11} \geq 12$$

$$x_3 + x_{14} \geq 12$$

$$x_2 + x_{13} + x_9 \geq 12$$

$$x_6 \geq 12$$

$$x_5 + x_{10} \geq 12$$

$$x_4 + x_{15} \geq 12$$

使用lingo编程求解

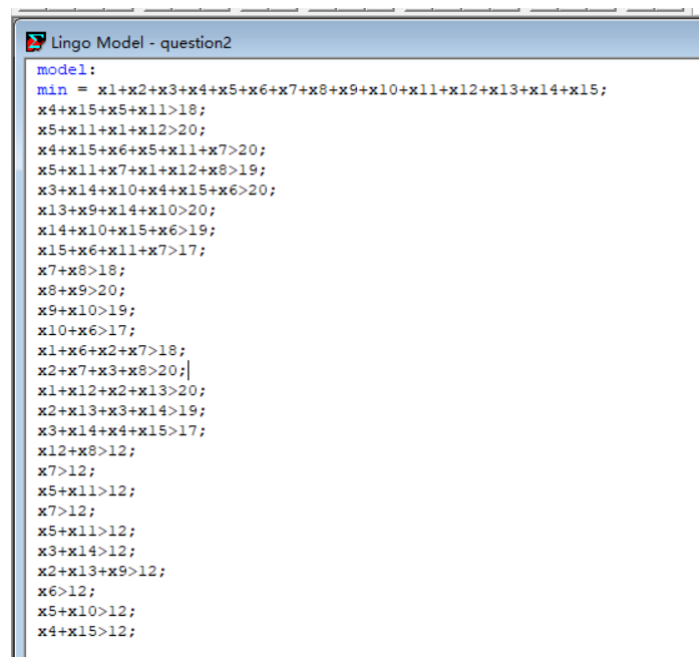
代码如下:

```
x4+x15+x5+x11>18;
x5+x11+x1+x12>20;
x4+x15+x6+x5+x11+x7>20;
x5+x11+x7+x1+x12+x8>19;
x3+x14+x10+x4+x15+x6>20;
x13+x9+x14+x10>20;
```

```

x14+x10+x15+x6>19;
x15+x6+x11+x7>17;
x7+x8>18;
x8+x9>20;
x9+x10>19;
x10+x6>17;
x1+x6+x2+x7>18;
x2+x7+x3+x8>20;
x1+x12+x2+x13>20;
x2+x13+x3+x14>19;
x3+x14+x4+x15>17;
x12+x8>12;
x7>12;
x5+x11>12;
x7>12;
x5+x11>12;
x3+x14>12;
x2+x13+x9>12;
x6>12;
x5+x10>12;
x4+x15>12;

```



```

Lingo Model - question2

model:
min = x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+x10+x11+x12+x13+x14+x15;
x4+x15+x5+x11>18;
x5+x11+x1+x12>20;
x4+x15+x6+x5+x11+x7>20;
x5+x11+x7+x1+x12+x8>19;
x3+x14+x10+x4+x15+x6>20;
x13+x9+x14+x10>20;
x14+x10+x15+x6>19;
x15+x6+x11+x7>17;
x7+x8>18;
x8+x9>20;
x9+x10>19;
x10+x6>17;
x1+x6+x2+x7>18;
x2+x7+x3+x8>20;
x1+x12+x2+x13>20;
x2+x13+x3+x14>19;
x3+x14+x4+x15>17;
x12+x8>12;
x7>12;
x5+x11>12;
x7>12;
x5+x11>12;
x3+x14>12;
x2+x13+x9>12;
x6>12;
x5+x10>12;
x4+x15>12;

```

求解得：

Solution Report - question2		
Global optimal solution found.		
Objective value:	105.0000	
Infeasibilities:	0.000000	
Total solver iterations:	16	
Elapsed runtime seconds:	0.04	
Model Class: LP		
Total variables:	15	
Nonlinear variables:	0	
Integer variables:	0	
Total constraints:	28	
Nonlinear constraints:	0	
Total nonzeros:	99	
Nonlinear nonzeros:	0	
Variable	Value	Reduced Cost
X1	7.000000	0.000000
X2	7.000000	0.000000
X3	11.00000	0.000000
X4	11.00000	0.000000
X5	12.00000	0.000000
X6	12.00000	0.000000
X7	12.00000	0.000000
X8	6.000000	0.000000
X9	14.00000	0.000000
X10	5.000000	0.000000
X11	0.000000	0.000000
X12	6.000000	0.000000
X13	0.000000	0.000000
X14	1.000000	0.000000
X15	1.000000	0.000000
Row	Slack or Surplus	Dual Price
1	105.0000	-1.000000
2	6.000000	0.000000

可得方案三总人数最少需要105人。

结论

对于方案三，使值班护士人数为最少的线性规划模型为：

班次	周一	周二	周三	周四	周五	周六	周日
2:00~10:00	12	17	21	12	12	19	12
6:00~14:00	12	24	17	14	6	19	13
10:00~18:00	13	24	24	6	14	17	7
14:00~22:00	7	19	24	13	5	25	12
18:00~2:00 (次日)	12	21	19	12	12	17	12

总共需要105名护士，其中周末放弃休息的护士有44人，休息一天的护士有61人。

放弃周末休息的护士，其工资和奖金总额比其他护士增加 $a\%$ 。设正常每名护士的工资和奖金为 s 元，则当方案三较方案二经济时，可列方程如下：

$$61 \times s + 44 \times (1 + a\%)s < 112 \times s$$

$$a < \frac{7}{0.44} \approx 15.91$$

故 a 的值为15时，方案三较方案二更经济