Как математики управляют финансовыми инструментами на квадраллион долларов

Leonid Merkin-Janson

08.07.2023

Что такое финансовая математика?

Финансовая математика – это **НЕ**...

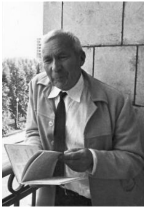
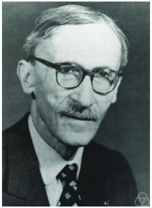
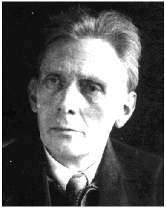
- ...бухгалтерский учет или аудит
- ...корпоративная финансовая аналитика
- ...актуарная (страховая) математика

Финансовая математика — это междисциплинарная наука и практика. Есть такая профессия — Quant, и у нее много вариантов:

- Quantitative Analyst (QA)
- Quantitative Researcher (QR)
- Quantitative Developer (QD)
- Quantitative Trader (QT)
- Research Analyst (RA)...

Исторический экскурс:
Как развивалась финансовая математика (1)

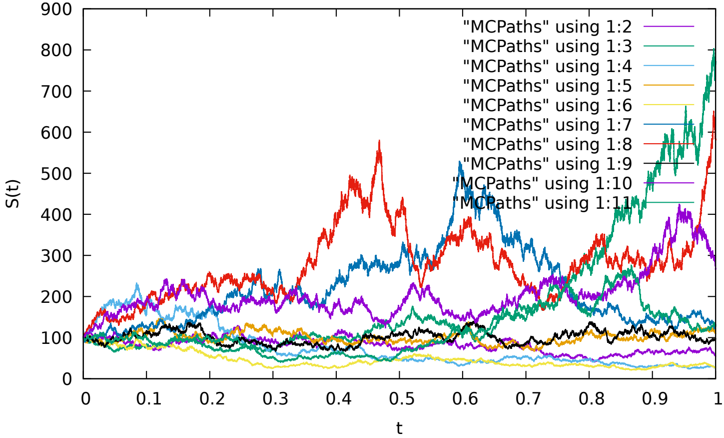
1-й этап (1900–1960-е гг.):

Louis Bachelier: В 1900 г. впервые поставил и решил задачу о цене *финансового опциона*

А. Н. Колмогоров, Paul Levy, А. Я. Хинчин, Kiyosi Ito: создатели современной аксиоматической теории вероятностей, теории случайных процессов и стохастических дифференциальных уравнений

Что такое опцион?



"Функция платежа" для фиксированного будущего момента времени: $\phi(S_T) = \max(S_T - K, 0)$

2-й этап (1973–конец 1980-х гг.):



Fischer Black, Myron Scholes и Robert Merton: В 2-х знаменитых статьях 1973 г. получили принципиально новые решения задачи о ценообразовании опционов на основе *принципа хеджирования*

Исторический экскурс:
Как развивалась финансовая математика (3)

3-й этап (1990-е–середина 2000-х гг.):

Steven Heston и Bruno Dupire в 1993–1994 гг. создали модели стохастической и локальной волатильности цен финансовых активов

Исторический экскурс: Как развивалась финансовая математика (4)

4-й этап (примерно 2005–2010-е гг.):



Pierre Henry-Labordere и Иван Аврамиди в середине 2000-х гг. применили методы теоретической физики для построения аналитических и асимптотических решений для цен опционов в моделях стохастической волатильности

Jacques Hadamard был первым, кто разработал один из этих методов (метод тепловых ядер) еще в 1920-х гг.!

Исторический экскурс: Как развивалась финансовая математика (5)

5-й этап (2010-е гг. – по наст. вр.):

Marco De Prado, Alvara Cartea, Jean Boucheaud:

Расширение предмета финансовой математики на микроструктуру финансовых рынков и стратегии алгоритмической торговли

Появление и развитие цифровых финансовых активов

Итак, что такое финансовая математика? (1)

Во-первых, финансовая математика — это фундаментальная и прикладная математика:

- теория вероятностей, математическая статистика
- теория случайных процессов, стохастические дифференциальные уравнения
- уравнения в частных производных математической физики
- дифференциальная геометрия
- численные методы и методы компьютерной алгебры
- математическое моделирование финансово-экономических процессов

Итак, что такое финансовая математика? (2)

Во-вторых, финансовая математика — это компьютерные науки и инженерия программного обеспечения:

- современные технологии программирования на C++
- функциональное программирование (Haskell, OCaml)
- параллельные и распределенные вычисления (в том числе на GPU)
- низколатентные (μsec) системы реального времени
- формальная верификация программного обеспечения
- методы машинного обучения (***но это не панацея!***)
- системы распределенного реестра

Итак, что такое финансовая математика? (3)

Предметная область финансовой математики — это рынки финансового капитала, финансовые активы и инструменты:

- **Классические:**
  - фондовый рынок (акции), инструменты процентных ставок, валютный рынок (FX), сырьевые товары (commodities), ...
  - **производные финансовые инструменты** (деривативы) — главным образом **опционы**
  - **Волатильность** — невидимый, но чрезвычайно важный актив!
- **Современные (с 2010-х гг.:)**
  - алгоритмические торговые стратегии на финансовых рынках
  - цифровые финансовые активы

Основные задачи финансовой математики:

- Моделирование стохастической динамики цен и ликвидности финансовых инструментов
- Вычисление теоретических цен и рисков финансовых деривативов (*реальные цены и риски могут отличаться от модельных*)
- Оптимальное управление портфелями финансовых инструментов и деривативов
- Построение, верификация и оптимизация алгоритмических торговых стратегий
- Синтез сложных ("структурных", "экзотических") финансовых инструментов
- Реализация вычислительных методов и программного обеспечения для решения указанных задач

И все эти задачи Quant решает **сам единолично**!

Почему это важно?

- Суммарный годовой ВНП всех стран мира (2020) — \$84 trn
- Общая капитализация мирового рынка акций (в наст. момент) — \$95 trn
- **Суммарный номинал всех финансовых деривативов в мире — порядка \$1000 trn**
- Деривативы служат для управления финансовыми рисками, но могут и создавать дополнительные риски
- Эффективное функционирование финансовой системы — необходимое (и “почти достаточное”) условие успешного развития национальной и мировой экономики
- 40 лет назад термин “прикладная математика” в основном означал военно-промышленные приложения, сейчас — финансовые
- **Выпускники лучших университетов мира становятся финансовыми математиками!**

Как выглядят типичные модели финансовой математики?

Система стохастических дифференциальных уравнений для одной модели процентных ставок:

$$\begin{aligned} dr_t &= (\Phi_t - \lambda_t r_t)dt + \sqrt{V_t}\,\eta_t\, dW_t \\ d\Phi_t &= (\eta_t^2 - 2\lambda_t\Phi_t)\, dt \\ dV_t &= \kappa_t(\theta_t - V_t)\, dt + \epsilon_t\sqrt{V_t}\, dZ_t \\ dW_t\, dZ_t &= \rho_t\, dt \end{aligned}$$

При этом:

- сфера интересов QA — в основном **волатильности** (коэффициенты при случайных величинах dW_t, dZ_t)
- QR, наоборот, интересуется в основном **трендами** (коэффициентами при dt)
- QD больше занимается численными методами и ПО, а RA — "большими данными"
- QT реализует стратегии алгоритмической торговли

General Option Pricing Formula in the BSM Theory

$$V(S,t) = \frac{e^{-r(T-t)}}{\sigma\sqrt{2\pi(T-t)}} \int_0^\infty e^{-\left(\log(S/S') + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)^2 / 2\sigma^2(T-t)} \, \mathrm{Payoff}(S') \frac{dS'}{S'}$$

Vanilla Option Pricing Formulas

	Call	Put	Binary Call	Binary Put
Value V Black–Scholes value	$Se^{-D(T-t)}N(d_1)$ $-Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$	$-Se^{-D(T-t)}N(-d_1)$ $+Ee^{-r(T-t)}N(-d_2)$	$e^{-r(T-t)}N(d_2)$	$e^{-r(T-t)}(1-N(d_2))$
Delta $\frac{\partial V}{\partial S}$ Sensitivity to underlying	$e^{-D(T-t)}N(d_1)$	$e^{-D(T-t)}(N(d_1)-1)$	$\frac{e^{-r(T-t)}N'(d_2)}{\sigma S\sqrt{T-t}}$	$-\frac{e^{-r(T-t)}N'(d_2)}{\sigma S\sqrt{T-t}}$
Gamma $\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$ Sensitivity of delta to underlying	$\frac{e^{-D(T-t)}N'(d_1)}{\sigma S\sqrt{T-t}}$	$\frac{e^{-D(T-t)}N'(d_1)}{\sigma S\sqrt{T-t}}$	$-\frac{e^{-r(T-t)}d_1N'(d_2)}{\sigma^2S^2(T-t)}$	$\frac{e^{-r(T-t)}d_1N'(d_2)}{\sigma^2S^2(T-t)}$
Theta $\frac{\partial V}{\partial t}$ Sensitivity to time	$-\frac{\sigma Se^{-D(T-t)}N'(d_1)}{2\sqrt{T-t}}$ $+DSN(d_1)e^{-D(T-t)}$ $-rEe^{-r(T-t)}N(d_2)$	$-\frac{\sigma Se^{-D(T-t)}N'(-d_1)}{2\sqrt{T-t}}$ $-DSN(-d_1)e^{-D(T-t)}$ $+rEe^{-r(T-t)}N(-d_2)$	$re^{-r(T-t)}N(d_2)$ $+e^{-r(T-t)}N'(d_2)\times$ $\left(\frac{d_1}{2(T-t)}-\frac{r-D}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$	$re^{-r(T-t)}(1-N(d_2))$ $-e^{-r(T-t)}N'(d_2)\times$ $\left(\frac{d_1}{2(T-t)}-\frac{r-D}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$
Speed $\frac{\partial^3 V}{\partial S^3}$ Sensitivity of gamma to underlying	$-\frac{e^{-D(T-t)}N'(d_1)}{\sigma^2S^2(T-t)}\times$ $\left(d_1+\sigma\sqrt{T-t}\right)$	$-\frac{e^{-D(T-t)}N'(d_1)}{\sigma^2S^2(T-t)}\times$ $\left(d_1+\sigma\sqrt{T-t}\right)$	$-\frac{e^{-r(T-t)}N'(d_2)}{\sigma^2S^3(T-t)}\times$ $\left(-2d_1+\frac{1-d_1d_2}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$	$\frac{e^{-r(T-t)}N'(d_2)}{\sigma^2S^3(T-t)}\times$ $\left(-2d_1+\frac{1-d_1d_2}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$
Vega $\frac{\partial V}{\partial \sigma}$ Sensitivity to volatility	$S\sqrt{T-t}e^{-D(T-t)}N'(d_1)$	$S\sqrt{T-t}e^{-D(T-t)}N'(d_1)$	$-e^{-r(T-t)}N'(d_2)\times$ $\left(\sqrt{T-t}+\frac{d_2}{\sigma}\right)$	$e^{-r(T-t)}N'(d_2)\times$ $\left(\sqrt{T-t}+\frac{d_2}{\sigma}\right)$
Rho (r) $\frac{\partial V}{\partial r}$ Sensitivity to interest rate	$E(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2)$	$-E(T-t)e^{-r(T-t)}N(-d_2)$	$-(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2)$ $+\frac{\sqrt{T-t}}{\sigma}e^{-r(T-t)}N'(d_2)$	$-(T-t)e^{-r(T-t)}(1-N(d_2))$ $-\frac{\sqrt{T-t}}{\sigma}e^{-r(T-t)}N'(d_2)$
Rho (D) $\frac{\partial V}{\partial D}$ Sensitivity to dividend yield	$-(T-t)Se^{-D(T-t)}N(d_1)$	$(T-t)Se^{-D(T-t)}N(-d_1)$	$-\frac{\sqrt{T-t}}{\sigma}e^{-r(T-t)}N'(d_2)$	$\frac{\sqrt{T-t}}{\sigma}e^{-r(T-t)}N'(d_2)$

$$d_1=\frac{\log(S/E)+(r-D+\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},\quad d_2=\frac{\log(S/E)+(r-D-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}=d_1-\sigma\sqrt{T-t},\quad N(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-(\frac{1}{2})\xi^2}d\xi \text{ and } N'(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(\frac{1}{2})x^2}$$