exo. Given f the density function, $f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-(x+y)} & \text{if } 0 \leq y \leq x \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$

Q) Is it a density function? | Q) compute MD X and MD Y.

1) property 1. $\forall x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega), f(x,y) \geq 0$ - positivity

It is always positive due to e^z being always positive for $\forall z \in \mathbb{R}$

property 2. $\int_{\mathbb{R}^2} f_{XY}(x,y)\, dy\, dx = 1$ way 2 $\Rightarrow \int_{x=0}^{+\infty} \int_{y=0}^{x} 2e^{-(x+y)}\, dy\, dx$

way 1 $\Rightarrow \int_{y=0}^{+\infty} \underbrace{\int_{x=y}^{+\infty} 2e^{-(x+y)}\, dx}\, dy$

way 1 $\int_{x=y}^{+\infty} 2e^{-(x+y)}\, dx = 2e^{-y} \int_{x=y}^{+\infty} e^{-x}\, dx$

$= 2e^{-y} \cdot \left[-e^{-x}\right]_{y}^{+\infty}$

$= 2e^{-y}\left(e^{-y} + e^{-\infty}\right) = 2 \cdot e^{-y} \cdot e^{-y}$

$= 2e^{-2y}$

$\int_{y=0}^{+\infty} 2e^{-2y}\, dy = \left[-e^{-2y}\right]_0^{+\infty} = e^0 - e^{-\infty} = 1$

way 2 $\int_{x=0}^{+\infty} \underbrace{\int_{y=0}^{x} 2e^{-(x+y)}\, dy}\, dx \Rightarrow \int_{y=0}^{x} 2e^{-(x+y)}\, dy = 2e^{-x} \cdot \int_{y=0}^{x} e^{-y}\, dy$

$= 2e^{-x} \cdot \left[-e^{-y}\right]_0^x$

$= 2e^{-x} \cdot \left[e^{0} - e^{-x}\right]$

$= 2e^{-x} - 2e^{-2x}$

$\int_{x=0}^{+\infty} 2e^{-x} - 2e^{-2x}\, dx = 2\int_{x=0}^{+\infty} e^{-x} - e^{-2x}\, dx$

$= 2\left[\frac{1}{2}e^{-2x} - e^{-x}\right]_0^{+\infty}$

$= 2\left(\left(\frac{1}{2} \cdot 0 - 0\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right)$

$= 2 \cdot \left(-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$

$= 1$

$\forall x \in \mathbb{R}^+$ $MD.X = \int_{y=0}^{x} 2e^{-(x+y)} dy = 2e^{-x} \int_{y=0}^{x} e^{-y} dy$

$= 2e^{-x} \left[-e^{-y} \right]_0^x$

$= 2e^{-x} \cdot \left(e^0 - e^{-x} \right)$

$MD.X = \begin{cases} 2(e^{-x} - e^{-2x}) \ \forall x \in \mathbb{R}^+ \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$

$MD.Y = \int_{x=0}^{+\infty} 2 \cdot e^{-(x+y)} dx = 2e^{-y} \int_{x=0}^{+\infty} e^{-x} dx$

$= 2e^{-y} \cdot \left[-e^{-x} \right]_0^{+\infty} = 2e^{-y} \cdot \left(e^0 - e^{-\infty} \right)$

$= 2e^{-y}$

$MD.Y = \begin{cases} 2e^{-y} \ \forall y \in [0; x] \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$