

Instituto Tecnológico Autónomo de México

Simulación

# Simulación Monte Carlo: Determinación de precios en opciones Americanas y Asiáticas.

Luis Gerardo Martínez Valdés

Emiliano Pizaña Vega

Fausto Membrillo Fuentes



Otoño 2021

# Índice general

<b>1</b>	<b>Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Determinación del precio de opciones</b>	<b>2</b>
2.1	Definiciones y notación . . . . .	2
2.2	Ingredientes principales . . . . .	2
2.3	Modelo de Black-Scholes . . . . .	3
2.3.1	¿Cómo Funciona? . . . . .	4
2.3.2	Limitaciones . . . . .	4
2.3.3	Ejemplo de Determinación del Precio de una Opción Europea por BSM . .	5
<b>3</b>	<b>Métodos Numéricos para la determinación de precios de opciones</b>	<b>7</b>
3.1	Opciones Americanas . . . . .	7
3.1.1	Método de Diferencias Finitas Explícitas . . . . .	7
3.1.2	Método de Diferencias Finitas Implícitas . . . . .	8
3.2	Opciones Asiáticas . . . . .	8
3.2.1	Expansión Asintótica . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Métodos Monte Carlo</b>	<b>9</b>
4.1	Opciones Americanas . . . . .	9
4.2	Método LSM (Least Square Monte Carlo Algorithm) . . . . .	9
4.3	Ejemplos numéricos . . . . .	10
4.3.1	Limitaciones del LSM y método LSM mejorado . . . . .	11
4.3.2	Método Monte Carlo: Broadie Glasserman . . . . .	11
4.4	Opciones Asiáticas . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>16</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>17</b>
<b>A</b>	<b>Códigos en R</b>	<b>18</b>

# 1. Introducción

**Caso:** Nuestro cliente nos pidió investigar y trabajar sobre la implementación del método MC y comparar sus resultados con otros métodos que se acomodan más a los derivados que buscamos valorar como: *Movimiento Browniano*, *Black-Scholes*, entre otros. Para resolver cuál es la más eficiente y porqué.

En este reporte analizaremos cómo se utilizan tanto el método de Monte Carlo (de aquí en adelante MC) y variaciones del mismo como el Método Broadie Glasserman (de aquí en adelante BG) y el método de Mínimos Cuadrados de Longstaff y Schwartz (de aquí en adelante LSM) para poder fijar el precio de las opciones en el mercado americano y asiático. El método MC es una opción para poder analizar el precio de las opciones cuando se violan los supuestos de modelos analíticos más simples.

El precio de las opciones es un tema de investigación importante en las finanzas y, por su complejidad en las dinámicas subyacentes, los modelos analíticos suponen ciertas restricciones demasiado restrictivas por lo que las aproximaciones numéricas son mejores para el análisis en la vida real. En este caso usaremos el método de MC y variaciones junto con algunas herramientas para hacer el método mas eficiente como lo son el uso de variables de control o variables antitéticas.

Primero que nada daremos una breve descripción de como funcionan la transacción de las opciones. Los componentes principales son el precio de ejecución (*striking price*) y la fecha de vencimiento (*expiration date*). En la opción de compra el titular de la opción tiene la posibilidad de comprar el activo subyacente al precio de ejecución.

En el caso del mercado americano esta opción es posible en cualquier momento hasta la fecha de vencimiento, en cambio, en el mercado europeo esto solo es posible en la fecha de vencimiento. Pero en cualquier caso la transacción no se tiene que dar necesariamente el día de vencimiento si es que el precio del mercado esta por debajo del precio de ejecución. La opción de venta es prácticamente lo mismo pero, se vende al precio de ejecución. Las dinámicas del activo subyacente se pueden describir hasta cierto punto con una ecuación diferencial estocástica y por medio del método de MC, el cual es un método eficiente y relativamente fácil de aplicar podemos dar una buena estimación del precio de las opciones[11].

Por otro lado, el caso de las opciones asiáticas nos interesa por que el pago final es una función de algún promedio del precio del activo en todo el intervalo de tiempo[5]. Las opciones asiáticas están dentro de la categoría de “opciones exóticas” y se usan comúnmente para resolver problemas que las opciones ordinarias no pueden resolver. En general, las opciones asiáticas son más baratas que sus contra-partes europeas o americanas, dado que la volatilidad del precio promedio es menor que su precio *spot*.

## 2. Determinación del precio de opciones

### 2.1 Definiciones y notación

- $S_0$ — El precio del activo en el tiempo cero.
- $S_t$ — El precio del activo en el tiempo  $t$ .
- $T$ — El tiempo de vida de activo la cual representa la fecha de vencimiento
- $r$ — La tasa de interés sin riesgo anualizada.
- $K$ — El precio de ejecución de la opción.
- $J_T$ — El valor presente de la opción.
- $\mu, \sigma$ — Los parámetros de la distribución de la acción.

### 2.2 Ingredientes principales

Decimos que un mercado donde los precios son fijos no permite **arbitraje**; esto es, son mercados tales que no es posible empezar sin capital alguno y obtener una ganancia positiva con cierto grado de certidumbre (i.e. no podemos obtener retornos positivos con probabilidad igual a uno si empezamos sin capital y que el precio del derivado es justo)[6]. En la realidad y corto plazo, esta suposición no siempre se puede verificar y si es así, no es sin dificultado; esto se debe a la presencia de información asimétrica. Sin embargo, en el mediano largo plazo los agentes tienden a comportarse de manera tal que se elimina este arbitraje[9]. Una vez que se elimina este arbitraje, decimos que los precios son justos y, en nuestro caso, estamos especialmente en el precio de los derivados financieros.

Se dice que un mercado es **completo** si los portafolios de cobertura (*hedging portolios*) existen para toda clase de derivados[6]. Esto es una especie de protección minimización de riesgo. El concepto de completitud se observa en mercados reales muy rara vez por una plétora de razones[2] por ejemplo: los costos de transacción tienen un impacto directo en la administración del portafolio de cobertura.

En resumen, para comenzar a modelar sobre las opciones Europeas, Americanas y Asiáticas, Iacus (2011) nos ofrece las siguientes condiciones:

1. No-Arbitraje

2. Habilidad de los agentes a protegerse del riesgo.
3. Esto, a su vez, implica completitud del mercado.

## 2.3 Modelo de Black-Scholes

El modelo de Black-Scholes(1973), también conocido como Black-Scholes-Merton (de aquí en adelante BSM) es uno de los conceptos o proposiciones más importantes en el mundo de la teoría financiera. Esta ecuación estima el valor teórica de derivados y otros instrumentos financieros, tomando en cuenta el impacto del tiempo y otros factores de riesgo[1]. Requiere cinco variables:

- Precio de ejecución de la acción
- Precio actual de la acción
- Tiempo de vida de la acción
- Tasa libre de riesgo
- Volatilidad

La fórmula de una opción de tipo *call* se calcula multiplicando el precio de la acción por la función de distribución acumulada de una normal. Después se resta el valor presente neto (VPN) del precio de ejecución multiplicado por la función de distribución acumulada normal.

$$C = S_t N(d_1) - K e^{-rt} N(d_2) \quad (2.1)$$

donde ,

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{\sigma_v^2}{2})t}{\sigma_S \sqrt{t}} \quad ; \quad d_2 = d_1 - \sigma_S \sqrt{t}$$

con  $C \equiv$  Precio de la opción (tipo call),  $S \equiv$  Precio actual del activo,  $K \equiv$  Precio de ejecución ,  $r \equiv$  Tasa libre de riesgo,  $t \equiv$  tiempo de madurez,  $N \equiv$  Distribución Normal.

Por otro lado, podemos ver a la ecuación de BSM de manera distinta; sea  $X = f(S_T)$  el retorno de la opción. Como estamos interesados en el precio de esta en  $t = 0$  y sabemos que el retorno es el valor de la opción en  $t = T$  tenemos que considerar el precio del activo para todo  $t \in [0, T]$ .

Así, definimos  $C(t, S_t) = P_t$  como el precio del activo en el tiempo  $t$ . Notamos que en  $t = T$  se tiene que  $P_T = C(T, S_T) = f(S_T) = X$ . Para poder derivar la ecuación del BSM como una ecuación diferencial estocástica simplemente vamos a requerir que  $\mathbb{E}[f(S_T)^2] < \infty$ ; esto es, que el segundo momento del retorno de nuestra opción sea finito.

**Teorema 2.3.1. (Ecuación Diferencial Parcial No-Estocástica de BSM)** Sea  $C(t, x)$  la función que describe  $P_t = C(t, S_t)$  el precio del activo en tiempo  $t$ . Suponga que  $C(t, x)$  es diferenciable en  $t$  y dos veces diferenciable en  $x$ . Entonces,  $C(t, x)$  es solución de la siguiente ecuación diferencial parcial :

$$rC(t, x) = C_t(t, x) + rx C_x(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 C_{xx}(t, x) \quad (2.2)$$

A la ecuación (2.2) se le conoce como la ecuación BSM. La demostración de este teorema escapa los propósitos de este texto; sin embargo su demostración deviene de la aplicación directa de la fórmula de Itô<sup>1</sup>.

Sin embargo, el teorema (2.3.1) no nos dice absolutamente nada acerca del precio  $P_t = C(t, x)$ , para esto necesitamos resolver la ecuación BSM. Nuevamente, Iacus(2011) nos propone la metodología para resolverla analíticamente, obteniendo así:

**Teorema 2.3.2. (Solución de BSM)** La solución  $C(t, x)$  de la ecuación BSM es

$$C(t, x) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[f(Z_T^{t,x})] \quad (2.3)$$

donde  $Z_s^{t,x} = x + \int_t^s r Z_u^{t,x} du + \int_t^s \sigma Z_u^{t,x} dBu$  es un movimiento Browniano geométrico en  $x$  para el tiempo  $t^2$ .

Vemos que las ecuaciones (2.1) y (2.2) son perfectamente equivalentes la una a la otra. Manipulando los parámetros para la ecuación (2.1), se obtiene que:

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma_S \sqrt{T-t}} \quad ; \quad d_2 = d_1 - \sigma_S \sqrt{T-t}$$

### 2.3.1 ¿Cómo Funciona?

Lo más importante que debemos resaltar es que el modelo nos dice que el precio de activos con fuerte actividad en el mercado, esto es, con un alto grado de intercambio, sigue un **movimiento Browniano Geométrico** con tendencia (*drift*) y volatilidad constantes[1]. Al aplicarse a una opción, el BSM incorpora la variación constante del precio de la misma, el valor del dinero en el tiempo, el precio de ejecución y el tiempo de expiración.

Los supuestos del modelo son: la opción es Europea y sólo puede ser ejecutada al expirar(esta es, tal vez, la más importante de todas), no hay dividendos durante el tiempo de vida de la opción, no existen costos de transacción al comprar la opción, tanto la tasa libre de riesgo como la volatilidad del activo son constantes, (otro supuesto muy importante) los retornos del activo se distribuyen **log-normalmente**.

### 2.3.2 Limitaciones

Una de las mayores desventajas del BSM es que solamente se usa para la determinación de los precios de opciones Europeas, se puede ver fácilmente que no puede o no toma en cuenta que las opciones Americanas y Asiáticas sólo pueden ser ejecutadas **antes** del tiempo de expiración de la opción. Además, este modelo asume que la volatilidad permanece constante a lo largo del tiempo de vida del activo, empíricamente esto no siempre se cumple. También. existen varios costos de transacción e impuestos en la realidad, la tasa libre de riesgo es sumamente fluctuante, existen retornos sin capital, que violan los supuestos del BSM.

---

<sup>1</sup>Véase Iacus, *Option Pricing And Estimation Models with R*, p.230

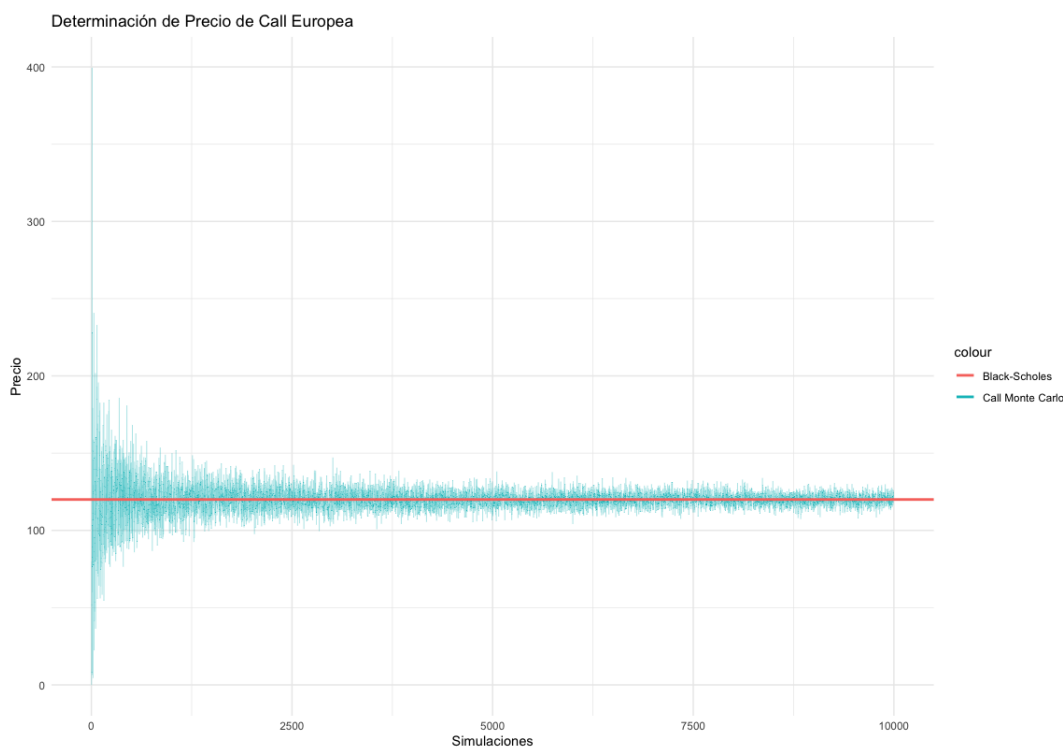
<sup>2</sup>Véase Iacus, *Option Pricing And Estimation Models with R*, p.232-234

### 2.3.3 Ejemplo de Determinación del Precio de una Opción Europea por BSM

Haremos uso del paquete de R **fOptions** para comparar nuestros resultados<sup>3</sup>.

```
1 #Por medio de Black Scholes
2 > (Call<- precio.call(x=S0, t=0, Tf=Tf, r=r, sigma=sigma, K=K))
3 [1] 120.0008
4
5 #Por medio de MC
6 > (Call.MC<- precio.callMC(S0,0,Tf,r,sigma,nsim ,f=f))
7 [1] 119.87785
8
9 #Por medio de Black-Scholes de fOptions
10 > require(fOptions)
11 > (blackscholes<-
12     GBSOption('c', S=S0, X=K, Time= Tf, r= r,b= r,sigma= sigma)@
13     price)
14 [1] 120.0008
15 >
```

En este caso, ambos métodos (BSM) llegaron al precio de 120.0008 euros, mientras que Monte Carlo arroja 119.87785 euros. Podemos ver que el MC no es tan preciso como quisiéramos; sin embargo, su ventaja recae en que puede ser modificado y su precisión no es afectada por la dimensionalidad del problema, sólo del número de simulaciones.



Sin embargo, este método no es aplicable a opciones que son dependientes a su traza o camino

---

<sup>3</sup>Los códigos están en apéndice A

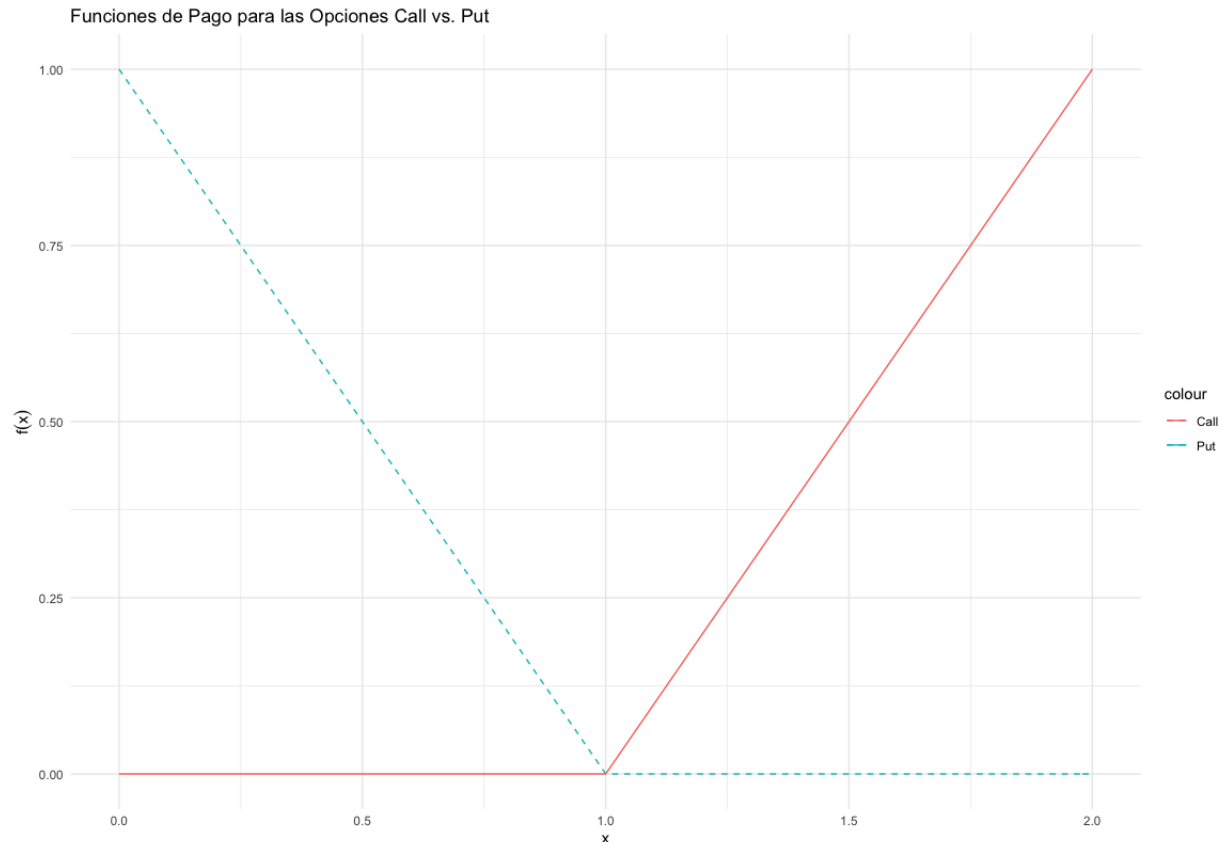
(*path-dependent*) pues pueden presentar una serie de dificultades numéricas que sesgan la estimación del precio de manera contraproducente.

Las **opciones Americanas** son muy similares a las Europeas con la peculiaridad que pueden ser ejercidas durante todo el intervalo de tiempo  $[0, T]$ [6]. De hecho, uno puede probar que el valor de un *call* Americano siempre es mayor que aquél de su similar Europeo.

Por otro lado, tenemos **opciones asiáticas** las cuáles pagan un retorno que es una función del promedio de valores del valor del activo en el intervalo  $[0, T]$  (como se mencionó brevemente en la introducción). Un ejemplo de opción Asiática es aquella que paga si y solamente si el precio promedio es mayor que el precio de ejecución i.e.  $X = \max\{0, \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K\}$ .

Dado que vamos a estimar el precio de opciones Americanas y Asiáticas, es importante definir qué son los *calls* y *puts* y cómo se ven sus funciones de pago:

1. *Calls*: Contratos Financieros que le dan al comprador(dueño) de la opción el derecho, pero no la obligación de **comprar** algún instrumento financiero(acciones, bonos, comodidades) a un precio específico en un periodo de tiempo claramente demarcado[4].
2. *Puts*: Contratos financieros que le dan al comprador(dueño) de la opción el derecho, pero no la obligación de **vender** algún instrumento financiero(acciones, bonos, comodidades) a un precio predeterminado en un periodo de tiempo claramente demarcado[3].





### 3. Métodos Numéricos para la determinación de precios de opciones

Dado que no es propósito de este texto el implementar las técnicas señaladas a continuación, nos vemos obligados a explicar algunas de las alternativas que existen para la determinación de los precios de los derivados, específicamente de opciones americanas y asiáticas.

#### 3.1 Opciones Americanas

##### 3.1.1 Método de Diferencias Finitas Explícitas

Suponga que tenemos una opción con un tiempo de madurez  $T$ . La idea es partir el intervalo  $[0, T]$  en  $N$  intervalos de la misma longitud  $\lambda = \frac{T}{N}$ . De este modo tenemos  $N + 1$  periodos  $t_i = i\lambda$  para  $i = 0, 1, \dots, N$ . Sea  $\Sigma := [S_{min}, S_{max}]$  el soporte del proceso  $S_t$ , al dividir este soporte en  $M$  subintervalos de la misma longitud y sea  $\Delta\Sigma := \frac{(S_{max}-S_{min})}{M}$  el tamaño de los incrementos del proceso  $S_t$ .

Así, se irá evaluando cada punto  $x_j = S_{min} + j\Delta\Sigma$ , para  $j = 0, 1, \dots, M$  de una red de  $(N+1) \times (M+1)$  puntos. Para hacer el problema más interesante, Iacus(2011) propone que el precio de ejecución de la opción  $K$  se encuentre en el intervalo  $\Sigma$ [6]. Simplificando se obtiene que:

$$C_{i,j} = C(t_i, x_j) = C(i\lambda, S_{min} + j\Delta\Sigma)$$

Tomando diferentes aproximaciones de las derivadas parciales de la ecuación anterior obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial x} C(t, x) = \frac{C_{i,j+1} - C_{i,j-1}}{2\Delta\Sigma} \quad (3.1)$$

y

$$\frac{\partial}{\partial t} C(t, x) = \frac{C_{i+1,j} - C_{i-1,j}}{\lambda} \quad (3.2)$$

Una vez hecho esto, uno puede sustituir la ecuación BS para llegar a la aproximación iterativa de la fórmula de  $C(t, x)$  que es el precio de la opción<sup>1</sup>.

La aplicación de técnicas de diferenciación numérica se llega a la conclusión que el precio de la opción depende de los valores futuros de esta, por lo que la dimensionalidad puede presentar un problema insuperable para este método.

---

<sup>1</sup>Ver Iacus 2011, p288

### 3.1.2 Método de Diferencias Finitas Implícitas

El método anterior puede presentar problemas de estabilidad también, por lo que se propone el de diferencias finitas implícitas para solucionarlo. La idea en que se basa este método es aproximar el valor futuro  $C_{i+1,j}$  con los valores presentes.

Primero realizamos las aproximaciones de las derivadas parciales de nuestro precio  $C(t, x)$ ; nuevamente, insertamos la ecuación BS a los resultados para obtener una solución aproximada; tercero, reescribimos la red de  $(N+1) \times (M+1)$  puntos en su forma matricial y la resolvemos para obtener los valores de  $C_{N-1,j}$  para toda  $j = 1, \dots, M-1$ ; cuarto, aplicamos este paso iterativamente hasta llegar a  $C_{0,j}$  para toda  $j = 1, \dots, M-1$ .

Es natural ver que este método es más costoso que su contraparte explícita, sin embargo resuelve los problemas de estabilidad si tanto  $\lambda$  como  $\Delta\Sigma$  son suficientemente pequeños.

## 3.2 Opciones Asiáticas

En esta sección proponemos solamente un método distinto al método MC que parte de una interpretación diferente del movimiento Browniano geométrico.

### 3.2.1 Expansión Asintótica

Como se dijo anteriormente, el proceso de movimiento Browniano geométrico se puede interpretar en un marco de soluciones de difusión pequeñas a ecuaciones diferenciales estocásticas(EDS)[10].

Partiendo de la EDS

$$dX_t^\epsilon = a(X_t^\epsilon, \epsilon)dt + b(X_t^\epsilon, \epsilon)dW_t, \quad \epsilon \in (0, 1)$$

Se sabe que el movimiento Browniano geométrico es un caso particular cuando  $a(x, \epsilon) = \mu x$  y  $b(x, \epsilon) = \epsilon x$  con  $\sigma = \epsilon$ . Por lo tanto, otra forma de estimar el precio de opciones Asiáticas es notar que la función de pago contiene al valor de la funcional

$$\frac{1}{T} \int_0^T X_t dt$$

De aquí se sigue que

$$f_0(x, \epsilon) = \frac{x}{T}, \quad f_1(x, \epsilon) = 0, \quad F(x, \epsilon) = 0 \tag{3.3}$$

Que representa una solución directa a la ecuación BS.

## 4. Métodos Monte Carlo

### 4.1 Opciones Americanas

### 4.2 Método LSM (Least Square Monte Carlo Algorithm)

El método LSM se usa para poder determinar el precio de las opciones en el mercado americano, esto se debe a que estamos tomando en cuenta que se las opciones pueden ser ejecutadas antes de que expiren. El problema de aplicar MC con el mercado americano es que el mercado americano esta tomando un periodo continuo entre la fecha de inicio y la fecha de vencimiento por lo que necesitamos otro método para poder determinar el precio de las opciones.

El método LSM utiliza el análisis de mínimos cuadrados para poder determinar la relación de mejor ajuste entre el valor de seguir y el valor del ejercicio anterior. Este algoritmo funciona de manera recursiva y depende de las decisiones anteriores, es decir, construye el valor estimado en un tiempo condicionando que no se ha ejecutado en un tiempo anterior.

Por último es importante notar que estimamos la esperanza condicional que se utiliza bajo un modelo de regresión lineal y dado que el intervalo de ejecución de la opción es un intervalo continuo se toma una aproximación discreta de puntos en ese intervalo y en esos puntos es donde se hace el análisis.

Primero tomamos el intervalo  $[0, T]$  como nuestro intervalo de tiempo y tomamos un espacio de probabilidad  $(\Omega, F, P)$  donde notamos que  $\Omega$  es nuestro espacio muestral definido bajo el intervalo  $[0, T]$ . Definimos  $\mathbb{F} = (F_t : t \in [0, T])$  como la filtración generada definida en un tiempo  $t$ .

Nuestro objetivo es poder determinar el valor de un derivado americano el cual puede ir generando cambios de efectivo en el intervalo  $[0, T]$ . El valor apropiado es el valor esperado máximo de los flujos de efectivo descontados de la opción sobre todos los tiempos definidos en la familia  $\mathbb{F}$ . Para esto suponemos que podemos aproximar el intervalo  $[0, T]$  con  $L$  distintos puntos  $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_L = T$  (lo podemos aproximar tomando distintas muestras sobre el intervalo). Con esto podemos escribir el valor esperado como

$$G(\omega; t_l) = E_Q \left[ \sum_{j=l+1}^L e^{\int_{t_1}^{t_j} r(\omega, u) du} CF(\omega, t_j; t_l, T) | F_{t_l} \right] \quad (4.1)$$

donde  $CF(\omega, t_j; t_l, T)$  representa el camino del flujo de efectivo generado por la opción dado que no se ejecuto en un tiempo anterior a  $t_j$  y sabiendo que el titular de la opción ha decidido bajo

esta misma estrategia en un tiempo  $s$ , con  $t_l < s < t_L$  de esta manera tenemos nuestro método recursivo y por último tenemos  $r(\omega, t)$  que representa la tasa de interés sin riesgo.

La idea del método LSM es que la esperanza condicional se puede aproximar bajo una regresión lineal de mínimos cuadrados para cada tiempo fijo  $t \in [0, T]$  que ya hemos tomado una aproximación discreta. Por lo tanto el método lo que hace es ir aproximando la esperanza condicional empezando en el tiempo  $t_{L-1}$  hasta llegar al inicio (método recursivo de atrás hacia adelante) y aplicar el método MC en cada iteración.

## 4.3 Ejemplos numéricos

Para hacer las simulaciones numéricas utilizamos el paquete *LSMonteCarlo* en R, con el cual podemos aplicar el método LSM con distintos parámetros.<sup>1</sup> En la primera simulacion, Figura 4.1, se utiliza el método LSM común y corriente parametros

```
1 set.seed (152812)
2
3 S0 <- sample (100:1000 ,1 , FALSE) #Precio inicial
4 K<- sample(S0:1250,1, FALSE) #Precio de strike/ejecucion
5 r<- runif (1 ,0 ,0.08) #Tasa libre de riesgo
6 Tf <- 1/2 #Tiempo de expiracion
7 sigma <- runif (1,0,1) #Volatilidad
```

llegando a un precio de 415,5111 bajo 1,000 iteraciones. Es importante notar que este método utiliza Monte Carlo sin mejoras y podemos notar que la varianza es alta y su convergencia es más lenta.

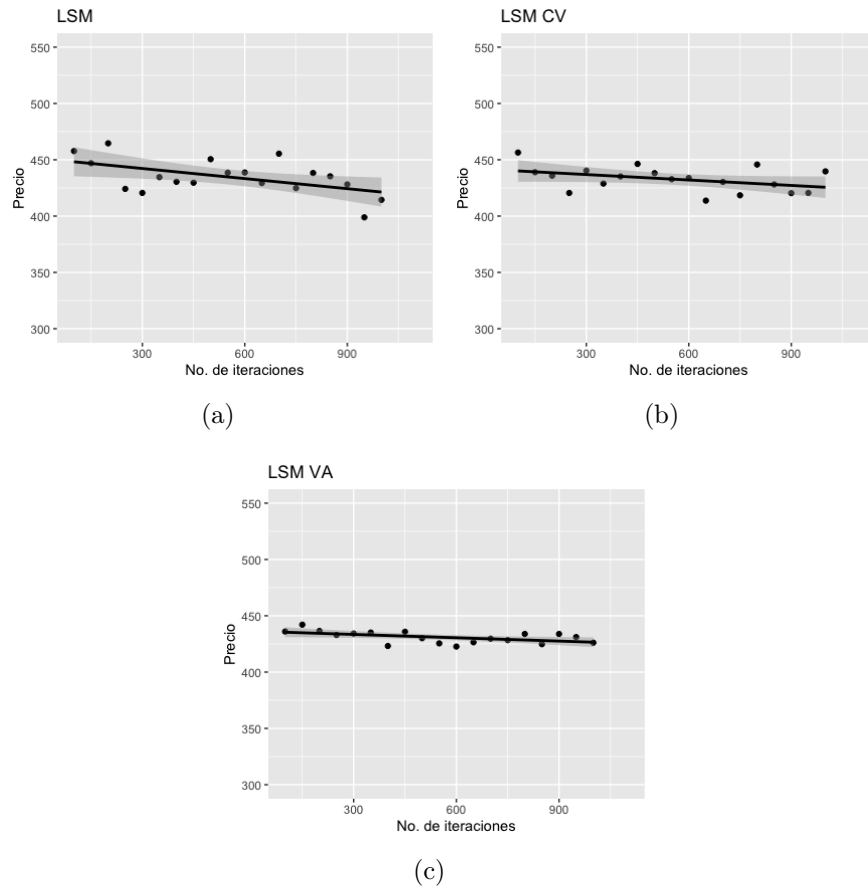
Para la segunda simulacion, (b), se utilizan los mismos parámetros pero, se utiliza el método LSM CV que se basa en LSM pero al momento de aplicar Monte carlo utiliza variables de control las cuales reducen la varianza. En este caso la varianza entre los puntos es menor y por lo tanto su convergencia es más rápida que en LSM original. En este caso tenemos un precio de 439,6916 bajo 1,000 iteraciones.

Por ultimo la tercera simulacion, (c), utiliza los mismos parámetros pero, se utiliza el método LSM VA que se basa en LSM pero al momento de aplicar Monte carlo utiliza variables antitéticas las cuales hacen que se reduzca la varianza en la simulación. En este caso la igual que en el de variables de control su convergencia es más rápida que en LSM original y tenemos un precio de 426,1026 bajo 1,000 iteraciones.

2

<sup>1</sup>La implementación del código esta en el apéndice A.2

<sup>2</sup>Solo esta el código de la simulación 1, para la simulación 2 y 3 lo único que cambia es el nombre de la función utilizada, a AmerPutLSM\_CV y AmerPutLSM\_AV respectivamente.



#### 4.3.1 Limitaciones del LSM y método LSM mejorado

El método de LSM funciona bien para determinar los precios de opciones americanas y algunas otras opciones complicadas. El problema del método es que cuando la dimensión es grande y hay muchos caminos posibles el método es tardado y no muy preciso.

En nuestro caso no hicimos un número muy grande de simulaciones puesto que cuando incrementamos el número de iteraciones el tiempo de máquina incrementa en gran medida. Además de los métodos de reducción de varianza implementados, también existe un método llamado Quasi-Monte Carlo el cual es muy similar al método de MC, pero genera caminos aleatorios que están mejor distribuidos en el espacio muestral, que consecuentemente mejora la precisión con una muestra más pequeña.

#### 4.3.2 Método Monte Carlo: Broadie Glasserman

En un artículo de 1997 (Pricing American-style securities using simulation) Mark Broadie y Paul Glasserman proponen una metodología para valorar instrumentos (opciones) estilo americano, usando simulación. La importancia de esta metodología radica en dos aspectos importantes, en primer lugar, en aportar una metodología de valuación para opciones que no tienen una solución analítica y, en segundo lugar, introducir los métodos de simulación para valorar este tipo de opciones. En efecto, no hay una solución analítica para valorar opciones americanas sobre una acción que paga dividendos en el marco teórico estándar de Black-Scholes por ejemplo. Por otra parte, cuando no existen soluciones analíticas, los métodos de valuación mediante árboles binomiales

o retículas (lattices) y metodología de diferencias finitas se utilizan para valorar opciones americanas. En consecuencia, la introducción de los métodos de simulación es una nueva aportación relevante en este contexto de valuación mediante métodos numéricos

Si bien los métodos de simulación en finanzas han sido muy útiles para valorar instrumentos financieros en general, tienen dos desventajas importantes: la primera es la velocidad de cómputo y la segunda es la dificultad para aplicarlos a las opciones de tipo americano. La dificultad para aplicar los métodos de simulación para la valuación de instrumentos de tipo americano proviene de la dificultad para determinar la política de ejercicio óptimo de la opción. Los métodos de simulación son *forward*, es decir simulan de hoy hacia el futuro. Sin embargo, para determinar la política de ejercicio se debe comenzar en la fecha de vencimiento de la opción y analizar *backwards* o hacia atrás en el tiempo para determinar la fecha de ejercicio óptimo y así valorar la opción americana. El problema de usar simulación para valorar una opción americana surge de la dificultad de aplicar un procedimiento inherentemente hacia adelante en el tiempo (*forward*) a un problema que requiere un procedimiento hacia atrás en el tiempo (*backward*) para resolverse.

La metodología de Broadie-Glasserman resuelve este problema generando dos estimadores del valor de la opción basados en muestras aleatorias de trayectorias futuras de las variables de estado y refinando incrementalmente la aproximación a la decisión de ejercicio óptimo. Un estimador está sesgado hacia arriba y el otro está sesgado hacia abajo, sin embargo, ambos estimadores son asintóticamente insesgados y convergen al precio verdadero. Los dos estimadores se pueden combinar para obtener un intervalo de confianza válido y conservador del valor verdadero de la opción. En el caso de una opción europea *call* estándar sobre un activo subyacente que paga dividendos a una tasa continua, la metodología de simulación trata de estimar la esperanza de

$$C = \mathbb{E}[e^{-r(T)}(S_T - K)] \quad (4.2)$$

bajo la medida neutral al riesgo. Donde  $r$  denota la tasa de interés,  $T$  el plazo,  $K$  el *strike* y  $S_T$  es el precio final del activo subyacente. El problema de valorar una opción americana es encontrar

$$C = \max_T \mathbb{E}[e^{-r(T)}(S_T - K)] \quad (4.3)$$

sobre todos los tiempos de paro  $T$ . Para aplicar la metodología se utilizarán árboles de simulación, que no se deben confundir con la metodología de árboles binomiales o polinomiales. Estos árboles se *parametrizan* por el número de ramas que salen de cada nodo (que es el parámetro  $b$ ) en cada tiempo  $t_0 = 0, t_1, \dots, t_n = T$ . Y cada camino en el árbol representa una posible trayectoria del subyacente, de acuerdo con su modelo estocástico.

En este contexto, el estimador sesgado hacia a arriba o superior, se generará mediante la aplicación del algoritmo de programación dinámica aplicada al árbol. Es decir, una vez generado el árbol mediante simulación, se realiza un proceso *backward* comenzando por el valor en la fecha de vencimiento y siguiendo hacia atrás, estableciendo el valor como el mayor entre ejercer inmediatamente o esperar al siguiente intervalo. Este estimador resulta que está sesgado hacia arriba. Sin embargo, converge a  $C$  conforme  $b$  se incrementa. Por otro lado, se define otro estimador utilizando el mismo árbol generado mediante simulación, pero en este caso, en cada nodo se utilizará un valor de los  $b$  que existen para definir el valor en caso de continuar con la opción y no ejercer, y se utilizarán los  $b - 1$  restantes para decidir si se ejerce o no la opción. Se realiza esta

valuación en cada nodo  $b$  veces cambiando el nodo de continuación, y el valor de la opción en el nodo se define como el promedio de los valores generados. Este estimador es sesgado hacia abajo, pero consistente, es decir, que conforme  $b$  se incrementa convergerá al verdadero valor de la opción.

Como ejemplo, se realiza la simulación requerida (determinación del precio de un Americano) con los siguientes parámetros: ramas  $b = 9$ , periodos(hacia adelante)  $d = 5$ ,  $K = 940$ ,  $T = 1$ ,  $r = 5,43\%$ , volatilidad  $\sigma = ,4671$ ,  $S_0 = 962,12$ . Obteniendo un precio medio de 634,0915(Consultar A para verificar resultado).

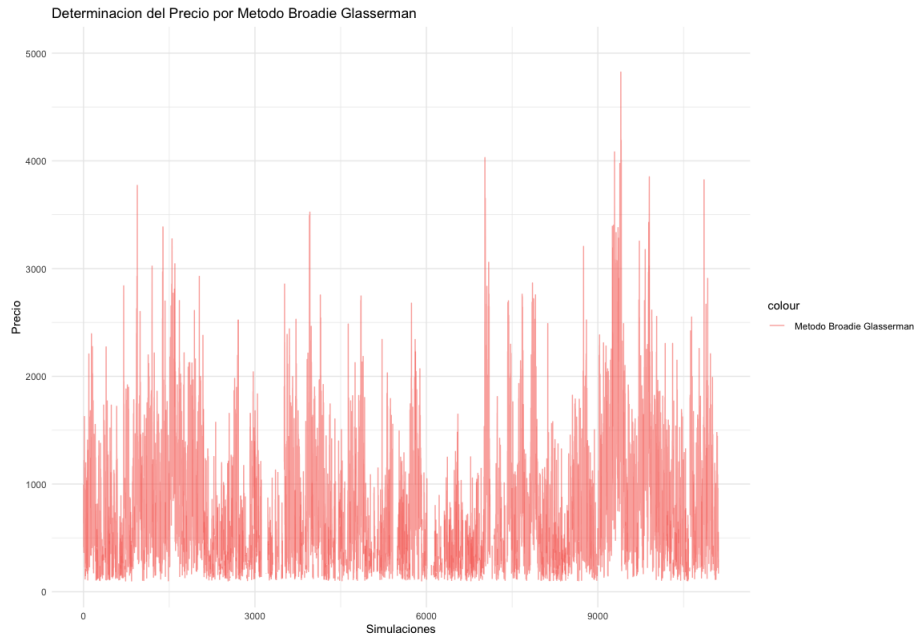


Figura 4.1: Precio Call Por medio de BG

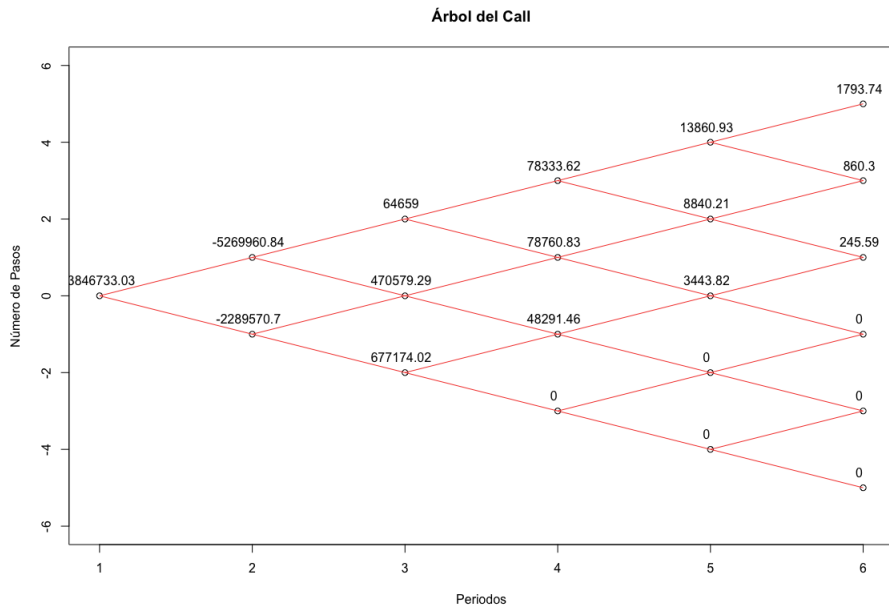


Figura 4.2: Árbol Binomial Correspondiente a la simulación con parámetros previamente dados

En la Figura 4.1, podemos observar que el método BG no parece tener una convergencia clara hacia el precio del *call*, lo que pone en duda la estabilidad del método. Sin embargo, y como veremos más adelante, esto no nos preocupa ya que el árbol binomial empata con los resultados deseados, estas observaciones aberrantes que puede arrojar la simulación por medio de BG, se corrigen a medida que pedimos una mayor cantidad de periodos *forward* y un mayor número de simulaciones.

## 4.4 Opciones Asiáticas

Estas opciones tienen un pago de la forma[8]:

$$\Pi = \max \left\{ 0, \frac{1}{T} \int_0^T S_t dt - K \right\} \quad (4.4)$$

Esta ecuación puede “discretizarse” por medio de la suma de Riemann; esto es:

$$\Pi = \max \left\{ 0, \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N S(t_i) - K \right\} \quad (4.5)$$

Iacus(2011) nos ofrece un algoritmo sencillo generando una variedad de trayectorias y evaluar el promedio  $S_t$  en el intervalo  $[0, T]$ , al aplicar la función de pago y finalmente restamos el promedio del pago de la opción(ver códigos en A). Comparamos el una modificación del algoritmo MC[6] con aquellos ofrecidos por el paquete de **fAsianOptions**, específicamente con aquellos propuestos por Geman-Yor y Zhang:

Listing 4.1: Resultados de la determinación de Precio de Call Asiático

```

1 set.seed(152812)
2 (p.MC<- asia.MC(S0 = S0, K = K, t=0, Tf = Tf, mu = mu, sigma = s,
3               r = r, N = 250, nsim = nsim))
4 [1] 9.900498
5
6 require(fAsianOptions)
7 (p.Geman <-
8   GemanYorAsianOption("c", S = S0, X = K, Time = T, r = r,
9                       sigma = s, doprint = FALSE)$price)
10 [1] 10.19741
11 (p.Zhang <-
12   ZhangAsianOption("c", S = S0, X = K, Time = T, r = r, sigma = s,
13                   table = NA, correction = TRUE,
14                   nint = 800, eps = 1e-08, dt = 1e-10))
15 [1] 10.72768

```

El intervalo de confianza al 99 % para nuestro precio por vía MC está dado por [9,410471 , 10,39053]. Podemos observar que este método no es tan preciso, puede haber algunos errores numéricos en la implementación del algoritmo. Por otro lado, este tipo de error suele venir acompañado de una varianza relativamente grande entre los valores arrojados por el algoritmo.



Para resolver este problema e incrementar la eficiencia de la simulación MC seguimos el método presentado por Kemna y Vorst (1990). El cuál, consiste en aproximar la integral  $\frac{1}{T} \int_0^T S_t dt$  por medio de  $\exp(\frac{1}{T} \int_0^T \ln(S_t) dt)$  [7]; si escogemos una tasa libre de riesgo y una volatilidad pequeñas, entonces es fácil notar que estas dos variables aleatorias son bastante similares entre sí.

**Teorema 4.4.1.** *Sea  $\Phi = \exp(\frac{1}{T} \int_0^T \ln(S_t) dt)$ . Entonces,  $\Phi$  converge asintóticamente a una distribución normal.*

**Corolario 4.4.0.1.** *Dado  $\Phi$  como en el teorema anterior, podemos calcular explícitamente*

$$\mathbb{E}(e^{-rT}[e^\Phi - K])$$

Como consecuencia de este corolario, Lapeyre y Teman(2010) proponen a

$$VC = e^{-rT} \left[ x \left( \exp \left\{ \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{T}{2} + \frac{\sigma}{T} \int_0^T W_t dt \right\} \right) - K \right] \quad (4.6)$$

como variable de control[8]; es importante notar que  $VC$  debe de ser calculada con el camino del movimiento Browniano que se simuló en el algoritmo anterior. Aplicando esta reducción de varianza a nuestro algoritmo obtenemos que el precio de nuestra opción asiática es de **10.727669**, con un intervalo de confianza al 99 % de [10,719687 , 10,727759].

## 5. Conclusiones

El propósito de este reporte fue demostrar que si bien existen una plétora de alternativas para determinar el precio de derivados Americanos y Asiáticos, los métodos MC nos abre la puerta a la simplificación de los problemas que puedan surgir con sus contrapartes, como pueden ser el método BS, diferencias finitas explícitas e implícitas, expansión asintótica, entre otras.

Los métodos MC resuelven principalmente problemas de dimensionalidad y de cómputo; sin embargo, pueden quedarse cortos en términos de eficiencia o precisión para un número pequeño de simulaciones. Es por esto que se recomienda fuertemente el uso de técnicas de reducción de varianza, pues, como se demostró en este reporte, la precisión del método mejora considerablemente y se asemeja más a la realidad o, en su defecto, incrementar el número de simulaciones lo más posible. Esto asegura la eficiencia de los MC.

Si bien, el estudio de estos métodos no es exhaustivo ofrece al lector un amplio panorama de las técnicas de simulación utilizadas para la determinación del precio de una opción (de cualquier tipo: *call*, *put*, *swap*, *switch*) y la teoría que está detrás del porqué su uso es correcto y fomentado. Sin embargo, no es posible asegurar si utilizamos los mejores métodos para ello, sólo aquellos que nos dan una estimación robusta de los resultados que esperábamos.

Profundizando, muchos de los modelos que se proponen en este reporte dependen de manera importante tanto de los supuestos como de los parámetros, de los cuáles se observan comportamientos muy diferentes en la vida real. Esto es, dimensionalidad, arbitraje, completitud, tasas libres de riesgo y volatilidad constantes entre otros. Razones por las cuáles los métodos MC son ampliamente competitivos entre sus semejantes.

La eficacia de los métodos presentados es suficiente para sostener que se pueden enfrentar problemas mucho más complejos como la determinación de precios de derivados en mercados con incertidumbre o riesgos elevados, de opciones cuyos pagos dependan en varios activos subyacentes como las opciones canasta o arcoíris.

# Bibliografía

- [1] Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. In *World Scientific Reference on Contingent Claims Analysis in Corporate Finance: Volume 1: Foundations of CCA and Equity Valuation*, pages 3–21. World Scientific, 2019.
- [2] Luciano Campi. Arbitrage and completeness in financial markets with given n-dimensional distributions. *Decisions in Economics and Finance*, 27(1):57–80, 2004.
- [3] James Chen. Put option definition. *Investopedia*, page <https://www.investopedia.com/terms/p/putoption.asp>, Dec 2020.
- [4] James Fernando. Call option definition. *Investopedia*, page <https://www.investopedia.com/terms/c/calloption.asp>, Dec 2020.
- [5] Michael C Fu and Jian-Qiang Hu. Sensitivity analysis for monte carlo simulation of option pricing. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 9(3):417–446, 1995.
- [6] Stefano M Iacus. *Option pricing and estimation of financial models with R*. John Wiley & Sons, 2011.
- [7] Angelien GZ Kemna and Antonius CF Vorst. A pricing method for options based on average asset values. *Journal of Banking & Finance*, 14(1):113–129, 1990.
- [8] Bernard Lapeyre, Emmanuel Temam, et al. Competitive monte carlo methods for the pricing of asian options. *Journal of computational finance*, 5(1):39–58, 2001.
- [9] Eva Strasser. Characterization of arbitrage-free markets. *The Annals of Applied Probability*, 15(1A):116–124, 2005.
- [10] Masayuki Uchida and Nakahiro Yoshida. Asymptotic expansion for small diffusions applied to option pricing. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 7(3):189–223, 2004.
- [11] Long Yun. Monte carlo simulation in option pricing, 2010.

## A. Códigos en R

Listing A.1: Implementación BSM para determinación del precio de un *call* Europeo

```
1 precio.call<- function(x,t,Tf,r,sigma,K){
2   d1<- (log(x/K) + (r - 0.5 * sigma^2) * (Tf-t)) / (sigma * sqrt(
3     Tf-t))
4   d2<- d1 + sigma * sqrt(Tf-t)
5   x*pnorm(d2) - K* exp(-r * (Tf-t)) * pnorm(d1)
6 }
7 set.seed(152812)
8
9 S0<-sample(100:1000,1,FALSE) #Precio del call
10 K<- sample(S0:1250,1,FALSE) #Precio de strike/ejecucion
11 r<- runif(1,0,0.08)          #Tasa libre de riesgo
12 Tf <- 1/2                    #Tiempo de expiracion
13 sigma<- runif(1,0,1)         #Volatilidad
14
15 (Call<- precio.call(x=S0, t=0, Tf=Tf, r=r, sigma=sigma, K=K))
16
17
18 # Por M todo Monte Carlo
19 f<- function(x) max(0,x-K)
20 precio.callMC <- function(x,t,Tf,r,sigma,nsim, f){
21   #Podemos usar variables antiteticas para reducir varianza
22   h<- function(n){
23     u<- rnorm(n/2)
24     aux<- c(x* exp((r-0.5*sigma^2)*(Tf-t)+ sigma*sqrt(Tf-t)*u),
25             x*exp((r-0.5*sigma^2)*(Tf-t) + sigma*sqrt(Tf -t)*(-u))
26           )
27     mean(sapply(aux, function(y) f(y)))
28   }
29   precio <- h(nsim)
30   precio* exp(-r *(Tf-t))
31 }
32
33 set.seed(152812)
34 nsim<- 100000
```

```

35 (Call.MC<- precio.callMC(S0,0,Tf,r,sigma,nsim ,f=f))
36
37
38 require(fOptions)
39 GBSOption('c', S=S0, X=K, Time= Tf, r= r,b= r,sigma= sigma)@price

```

Listing A.2: Implementación de LSM para opciones Americanas

```

1
2 set.seed (152812)
3
4 S0 <-sample (100:1000 ,1 , FALSE) #Precio inicial
5 K<- sample(S0:1250,1, FALSE) #Precio de strike/ejecucion
6 r<- runif (1 ,0 ,0.08) #Tasa libre de riesgo
7 Tf <- 1/2 #Tiempo de expiracion
8 sigma <- runif (1,0,1) #Volatilidad
9
10 y <- NULL
11 x <- NULL
12
13 func_1 <- function(n){
14   return(AmerPutLSM(S0,sigma, n, Strike = K, r = r, mT = Tf)$price
15   )
16 }
17 list <- seq(100, 1000, by=50)
18 for(i in list){
19   y <- append(y,func_1(i))
20 }
21 for(i in list){
22   x <- append(x,i)
23 }
24 data_1 <- data.frame(x,y)
25 attach(data_1)
26 names(data_1)
27
28 grafica <- ggplot(data_1,aes(x,y))
29
30 grafica + geom_point()+geom_smooth(method = "lm",colour = "black")
31   +
32   scale_x_continuous(name = "No. de iteraciones", limits = c
33     (100,1100)) +
34   scale_y_continuous(name = "Precio", limits = c(300,550)) +
35   ggtitle("LSM")

```

Listing A.3: Implementación de Broadie-Glasserman Monte Carlo para opciones Americanas

```

1 f<- function(x) sapply(x,function(x) max(0,x-K))
2 #b ramas

```

```

3 #d periodos
4 arbol.MC <- function(b, d, S0, sigma, Tf, r) {
5   ramif <- sum(b^(1:(d - 1)))
6   S <- numeric(ramif + 1)
7   S[1] <- S0
8   dt <- Tf/d
9   for(i in 0:(ramif-b^(d-1))){
10
11     for (j in 1:b) {
12       S[i * b + j + 1] <- S[i + 1] * exp((r - 0.5 * sigma^2) *
13                                     dt + sigma * sqrt(dt)
14                                     * rnorm(1))
15     }
16   }
17 }
18
19 BG.Sup <- function(S, b, d, f) {
20   tot <- sum(b^(1:(d - 1)))
21   t0<-tot-b^(d-1)+1
22   tf<-tot+1
23   P<-S
24   P[t0:tf] <- f(S[t0:tf])
25   tot1 <- sum(b^(1:(d - 2)))
26   for (i in tot1:0) {
27     m <- mean(P[i * b+1:b+1])
28     v<-f(S[i+1])
29     P[i + 1] <- max(v, m)
30
31   }
32   P
33 }
34
35 set.seed(152812)
36
37 b<- sample(5:10,1,FALSE)
38 d<- sample(2:5,1,FALSE)
39 K<- sample(100:1000,1, FALSE)
40 Tf<- 1
41 r<- runif(1,0,1)
42 sigma<- runif(1,.25,.5)
43
44 S0<- K+rexp(1,rate=1/2)*100
45 S<- arbol.MC(b,d,S0,sigma,Tf,r)
46 (precio.CallBG<- mean(BG.Sup(S,b,d,f)))
47 precioBG<-BG.Sup(S,b,d,f)
48 ggplot()+geom_line(alpha=0.6,
49                     aes(1:length(S), y=precioBG,

```

```

50         colour=' Metodo Broadie Glasserman'))+
51 labs(x= 'Simulaciones', y='Precio',
52       title='Determinacion del Precio por Metodo Broadie
53             Glasserman')+
54 ylim(100,5000)+
55 theme_minimal()
56 binArbol<- BinomialTreeOption(TypeFlag = 'ce', S0,K,Time=Tf,r=r,b=
57   b,
58   sigma=sigma, n=d)
59 BinomialTreePlot(binArbol, ylim=c(-6,6),xlab='Periodos',ylab='
  N mero de Pasos',
  main=' rbol del Call' )

```

Listing A.4: Implementación de MC para opciones Asiáticas

```

1 #Monte Carlo Opcion Asiatica
2 asia.MC<- function(S0,K,t,Tf,mu,sigma,r,N,nsim) {
3   require(foreach)#Sustituye %do%
4   aux<- function(x){
5     #Necesitamos paquete que resuelve ecuaciones diferenciales
6     estocasticas
7     require(sde)
8     #Obtenemos medias de las columnas de la matriz
9     h<- colMeans(sde.sim(S0, model = 'BS', theta = c(mu,sigma),
10      nsim=x, N=N))
11     #Condicion de pago
12     f<- function(x) max(0,x-K)
13     p.init<- mean(sapply(h,f))
14   }
15   #separamos las operaciones que se llevan acabo simultaneamente
16   nodos.visitados<- getDoParWorkers()
17   precio.asia<- foreach(y=rep(nsim/nodos.visitados,nodos.visitados
18     ),
19     .combine = 'c') %dopar% h(y) #combinamos
20     datos
21   precio.asia<- mean(precio.asia)
22   precio.asia* exp(-r * (Tf-t))/1000
23 }
24
25 nsim<- 5000; mu<- 0.1; s<- 0.6; K<- 110; r<- 0.01; Tf<- 1; S0<-100
26 set.seed(152812)
27 (p.MC<- asia.MC(S0 = S0, K = K, t=0, Tf = Tf, mu = mu, sigma = s,
28   r = r, N = 250, nsim = nsim))
29
30 require(fAsianOptions)
31 (p.Geman <-
32   GemanYorAsianOption("c", S = S0, X = K, Time = T, r = r,

```

```

29         sigma = s, doprint = FALSE)$price)
30
31
32 (p.Zhang <-
33     ZhangAsianOption("c", S = S0, X = K, Time = T, r = r, sigma =
34         s,
35         table = NA, correction = TRUE, nint = 800, eps = 1e-08, dt =
36         1e-10))
37
37 (LI.pcAsia<- p.MC-pnorm(.05/2, 0,1,lower.tail = FALSE ))
38 (LS.pcAsia<- p.MC+pnorm(.05/2, 0,1,lower.tail = FALSE ))

```