Simulación: Tarea 3

Luis Gerardo Martínez Valdés   Emiliano Pizaña Vega   Fausto Membrillo Fuentes

Otoño 2021

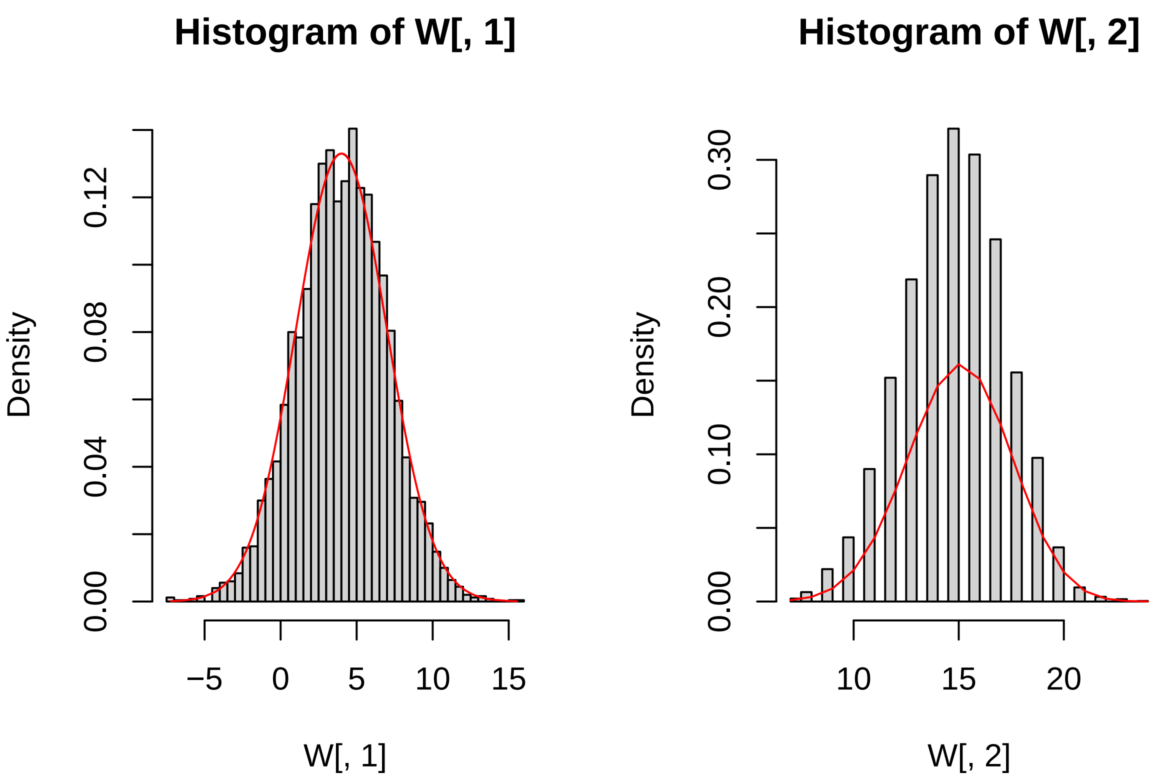
.

Pregunta 1

```
copulanorm <- normalCopula(c(2*sin(0*pi/6), 2*sin(-0.7*pi/6), 2*sin(0.2*pi/6),
                             2*sin(0.5*pi/6), 2*sin(0.4*pi/6),2*sin(0*pi/6)),
                           dim = 4, dispstr = "un")
set.seed(50)
U <- rCopula(5000, copulanorm)
round(cor(U, method = "kendall"), 2)
```

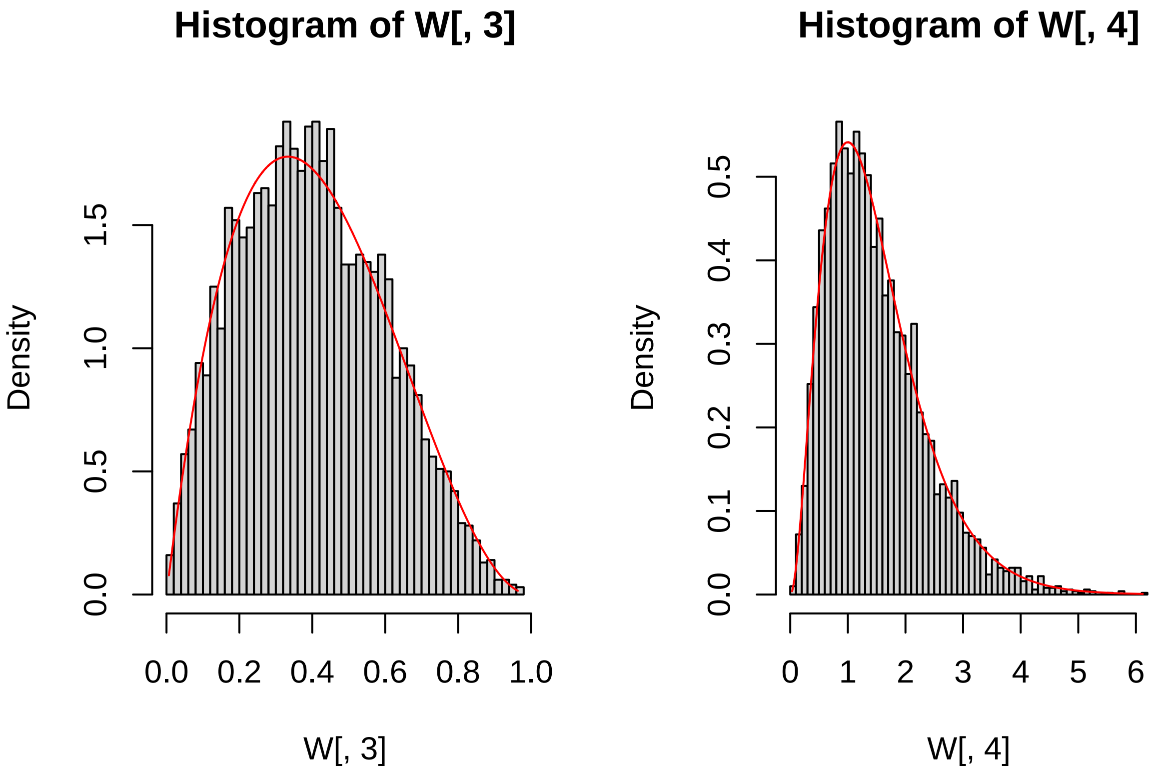
```
##       [,1]  [,2]  [,3] [,4]
## [1,]  1.00 -0.01 -0.50 0.11
## [2,] -0.01  1.00  0.36 0.28
## [3,] -0.50  0.36  1.00 0.01
## [4,]  0.11  0.28  0.01 1.00
```

```
W <- cbind(qnorm(U[,1], mean = 4, sd = 3), qbinom(p = U[,2],size = 25,
                                                  prob = .6),
           qbeta(p = U[,3], shape1 = 2, shape2 = 3),
           qgamma(p = U[,4], shape = 3, rate = 2))
#pairs(W, pch = 16, cex = 0.5)

par(mfrow = c(1,2))
hist(W[,1], prob = T,breaks=50)
points(sort(W[,1]), dnorm(sort(W[,1]),4,3),type="l",col="red")
hist(W[,2], prob = T,breaks=50)
points(sort(W[,2]), dbinom(sort(W[,2]),size = 25, prob = .6),type="l",col="red")
```




```
par(mfrow = c(1,2))
hist(W[,3], prob = T,breaks=50)
points(sort(W[,3]), dbeta(sort(W[,3]), shape1 = 2, shape2 = 3),
```

```
       type="l",col="red")
hist(W[,4], prob = T,breaks=50)
points(sort(W[,4]), dgamma(sort(W[,4]), shape = 3, rate = 2),type="l",col="red")
```



Pregunta 2

Por definición, $\tau = \mathbb{E}[sgn\{(X - X^*)(Y - Y^*)\}]$. Por otro lado, observamos que $sgn\left(\frac{1}{Y} - \frac{1}{Y^*}\right) = -sgn(Y - Y^*)$. Por lo tanto, $\rho_\tau(X, \frac{1}{Y}) = -.55$. Y así, $\rho_\tau(\frac{1}{X}, \frac{1}{Y}) = .55$

Pregunta 3

Queremos demostrar que la cópula de Frank, converge a la cópula de co-monoticidad cuando $\theta \to \infty$

$$C^{Fr}(u,v) = -\frac{ln\Big[1 - (e^{-\theta\ u})(e^{-\theta\ v})\Big]}{\theta} = -\frac{ln\Big[- e^{-\theta(u+v)} - e^{-\theta\ u} - e^{-\theta\ v}\Big]}{\theta} = -\frac{ln\Big[e^{-\theta\ u}(1 - e^{-\theta\ v} + e^{-\theta(v-u)})\Big]}{\theta}$$

$$u - \frac{ln\Big[1 - e^{-\theta\ v} + e^{-\theta(v-u)}\Big]}{\theta} \to u$$

Si $\theta \to \infty$.

Por simetría, podemos concluir que la Cópula de Frank converge a la cópula de co-monoticidad cuando $\theta \to \infty$.

Pregunta 4

Sean $u, v \in (0,1)$ tal que $u < v$, esto implica que $ln(u) > ln(v) \implies \theta[ln(v) - ln(u)] < 0$. Así, tenemos que:

$$ln(u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1) = ln[e^{-\theta ln(u)}(1 + e^{\theta(ln(v)-ln(u))} + e^{\theta ln(u)})] = -\theta ln(u) + ln(1 + e^{\theta(ln(v)-ln(u))} + e^{\theta ln(u)})$$

Luego,

$$exp\left[\frac{ln[u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1]}{\theta}\right] = exp[-ln(u)]exp[\frac{1}{\theta}ln(1+e^{\theta(ln(v)-ln(u))} + e^{\theta ln(u)}] = u\ exp\left[\frac{-ln(1 + e^{\theta\gamma} + e^{\theta ln(u)})}{\theta}\right] \tag{1}$$

donde $\gamma = ln(v) - ln(u) < 0$ y $log(u) < 0$. Usando el hint, aplicamos la regla de L'Hóptial a (1) se tiene que :

$$lim_{\theta\to\infty}\frac{-ln(1 + e^{\theta\gamma} + e^{\theta ln(u)})}{\theta} = lim_{\theta\to\infty}\frac{\gamma e^{\theta\gamma} + (ln(u))e^{\theta ln(u)}}{1 + e^{\theta\gamma} + e^{\theta ln(u)}} = 0$$

Por lo tanto,

$$lim_{\theta\to\infty}u\ exp[\frac{-ln(1 + e^{\theta\gamma} + e^{\theta ln(u)})}{\theta}] = u\ exp[lim_{\theta\to\infty}\frac{-ln(1 + e^{\theta\gamma} + e^{\theta ln(u)})}{\theta}] = ue^0 = u$$

Por simetría (de resultados para u, v) concluimos que:

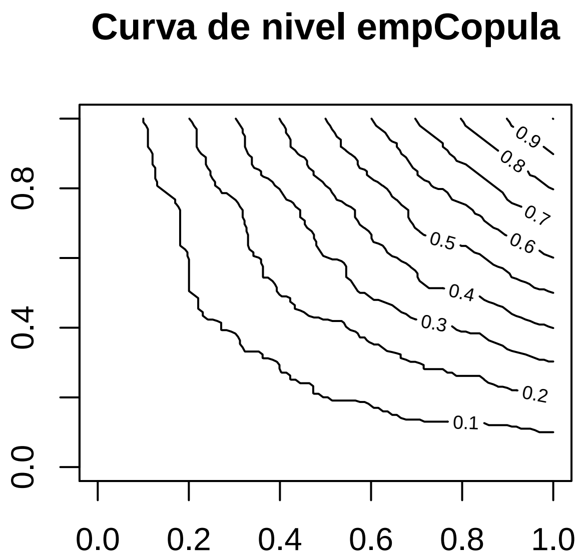
$$lim_{\theta\to\infty}C(u,v)^C = min\{u,v\}$$

Pregunta 5

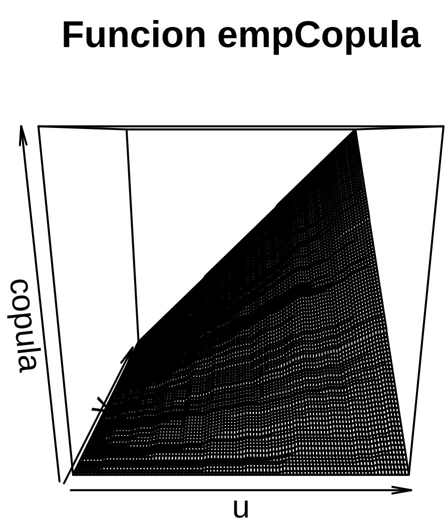
Tenemos que tener cuidado porque la función que nos piden en este ejercicio **no** está vectorizada, tenemos que generar el *grid* a "mano".

```
#Esta funcion tiene por objeto el calculo de la copula empirica de vectores
#aleatorios u,v de misma longitud

empCopula <- function(u,v,xVec,yVec){
  n<- length(xVec)

  #rangos
  rx <- rank(xVec)/(n+1)
  sy <- rank(yVec)/(n+1)

  return(mean((rx <=u) & (sy<=v)))
}

#Generamos la grafica

N<- 100
#Generamos Vectores
u<- seq(0,1, length=N); v<- seq(0,1, length=N)

xVec<- runif(N+100); yVec<-  rnorm(N+100)
```

```r
copula<- matrix(numeric(), nrow=N, ncol=N)

#Grid
for(u.gorro in u)
for(v.gorro in v)
copula[which(u.gorro==u),which(v.gorro==v)]<- empCopula(u.gorro, v.gorro, xVec, yVec)

contour(u,v, copula, main= 'Curva de nivel empCopula')
```




```r
persp(u,v, copula, main='Funcion empCopula')
```



Pregunta 6

Obtenemos la densidad conjunta,

$$\frac{\partial C}{\partial u} = v + \alpha v(1-v)[1-2v]; \quad \frac{\partial^2 C}{\partial u \partial v} = 1 + \alpha[1-2u][1-2v]$$

Sabemos que, $1-2u \leq 0, \quad 1-2v \leq 0$ para valores $u \geq 0, \ v \leq 1$. Por lo que el producto tiene su valor mínimo en $u = 1, \quad v = 0$ o $u = 0, \quad v = 1$. Ya que deseamos que este producto no sea negativo, pedimos que $\alpha \leq 1$ pero esto siempre se cumple(por el enunciado del problema).

Usamos el hecho de que la función es simétrica en u, v y al evaluarla en $C(1, v),\ C(u, 1)$ para ver que $C(1, v) = v + \alpha v(0)(1 - v) = v$. De esto se concluye que las marginales son uniformes.

Por otro lado queremos resolver para la tau de Kendall:

$$\tau = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v)\ dC(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 \int_0^1 (uv + \alpha uv(1 - u)(1 - v)(1 + \alpha(1 - 2u)(1 - 2v)))dudv - 1 \quad (2)$$

Resolviendo esta integral llegamos al resultado $\tau = \frac{2\alpha}{9}$.

Luego, para la ρ_s de Spearman

$$\rho_s = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v)\ dudv - 3 = 12 \int_0^1 \int_0^1 uv(1 + \alpha(1 - u)(1 - v))dudv - 3 \quad (3)$$

Resolviendo esta integral obtenemos $\rho_s = \frac{\alpha}{3}$

Preguntа 7

- Para la cópula normal tenemos que la relación entre

  $$\rho_\tau = \frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$$

  Por lo tanto si $\rho_\tau = .2$ entonces el parámetro de la cópula normal es $\rho = .309$ la cual representa la correlación de spearman entre las dos variables.

- Para la cópula de Gumbel tenemos que la relación esta entre la correlación de kendall y el parámetro de la cópula esta dada por

  $$\tau = 1 - \frac{1}{\theta}$$

  lo cual si tomamos $\tau = .2$ tenemos que $\theta = 1.25$

- Por último para la cópula de Clayton tenemos que la relación entre la correlación de Kendall y el parámetro de la copula esta dada por

  $$\tau = \frac{1}{2\theta + 1}$$

  por lo cual si $\tau = .2$ entonces tenemos que $\theta = 2$

Pregunta 8

```r
copula.normal_0.9 <- normalCopula(param = 0.9, dim = 2)
copula.normal_0.2 <- normalCopula(param = 0.2, dim = 2)

#Estructura de las copulas
str(copula.normal_0.9)
```

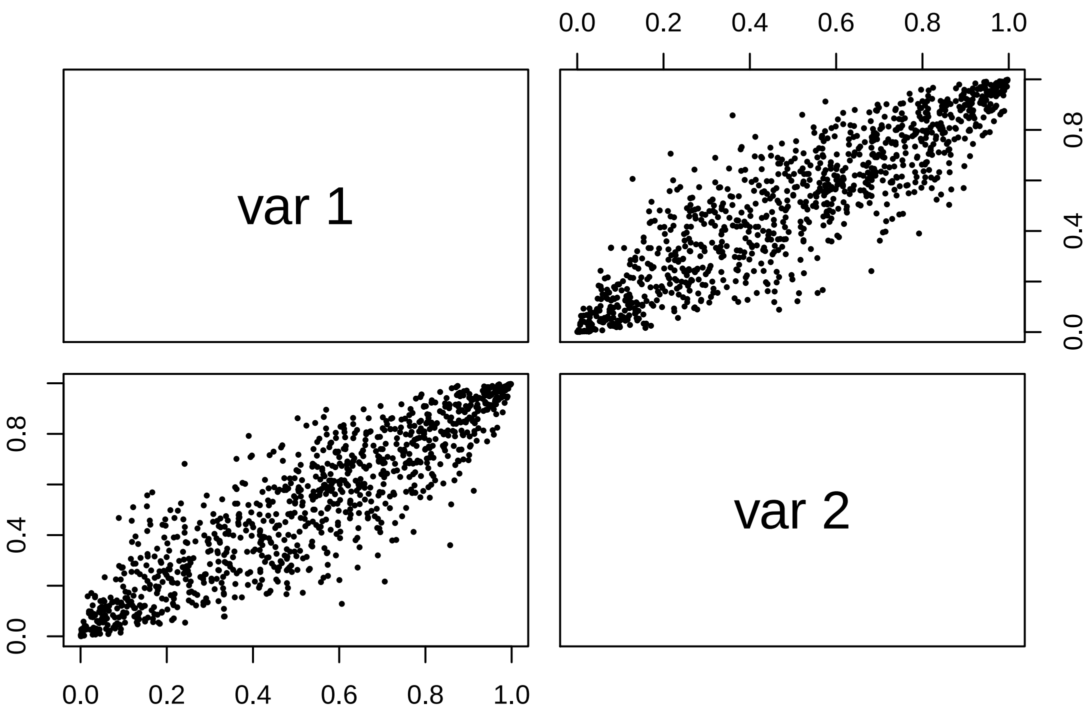
```
## Formal class 'normalCopula' [package "copula"] with 8 slots
##   ..@ dispstr     : chr "ex"
##   ..@ getRho      :function (obj)
##   ..@ parameters  : num 0.9
```

```
##    ..@ param.names : chr "rho.1"
##    ..@ param.lowbnd: num -1
##    ..@ param.upbnd : num 1
##    ..@ fullname    : chr "<deprecated slot>"
##    ..@ dimension   : int 2
```

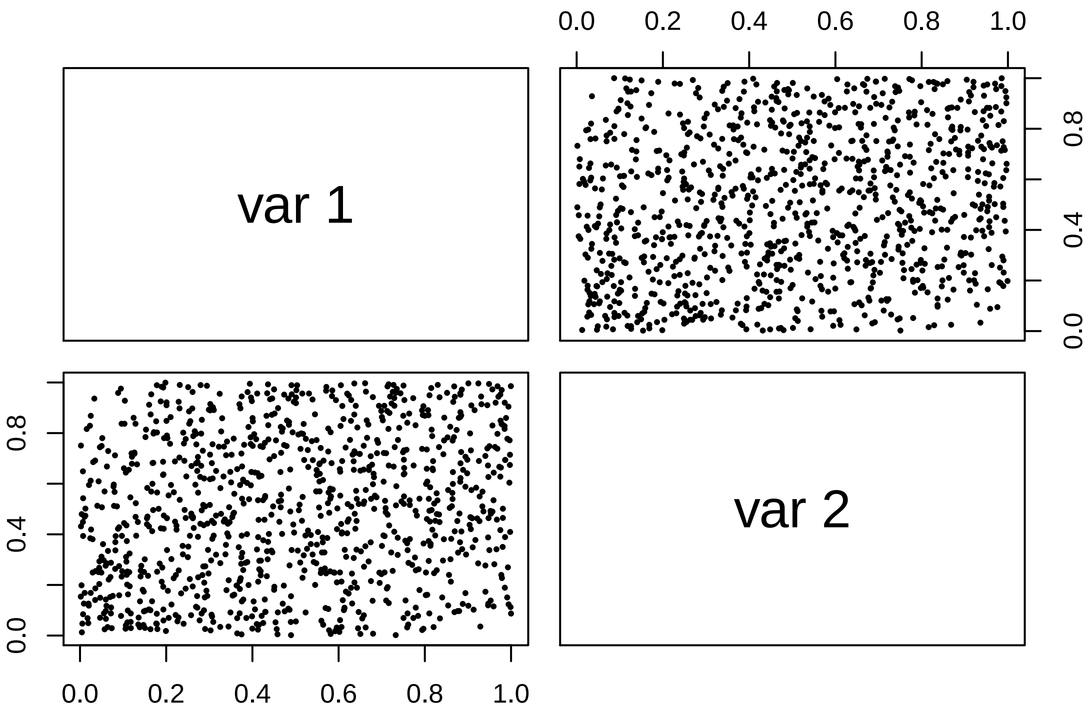
```
str(copula.normal_0.2)
```

```
## Formal class 'normalCopula' [package "copula"] with 8 slots
##    ..@ dispstr     : chr "ex"
##    ..@ getRho      :function (obj)
##    ..@ parameters  : num 0.2
##    ..@ param.names : chr "rho.1"
##    ..@ param.lowbnd: num -1
##    ..@ param.upbnd : num 1
##    ..@ fullname    : chr "<deprecated slot>"
##    ..@ dimension   : int 2
```

```
copula.normal_0.9 <- ellipCopula(family = "normal", dim = 2, dispstr = "un",
                                 param = 0.9)
copula.normal_0.2 <- ellipCopula(family = "normal", dim = 2, dispstr = "un",
                                 param = 0.2)

u <- rCopula(1000,copula.normal_0.9)
v <- rCopula(1000,copula.normal_0.2)

pairs(u,pch=16, cex=0.5)
```



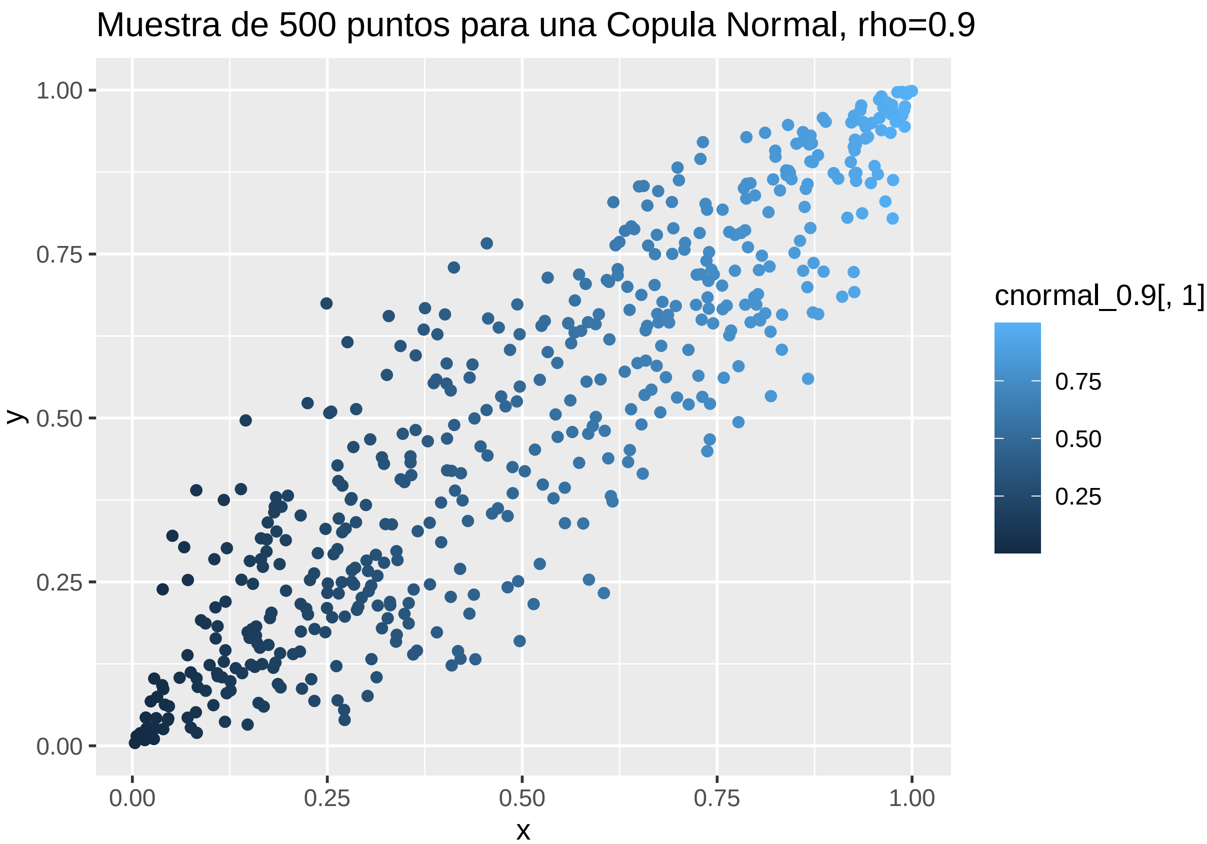

```
pairs(v,pch=16, cex=0.5)
```



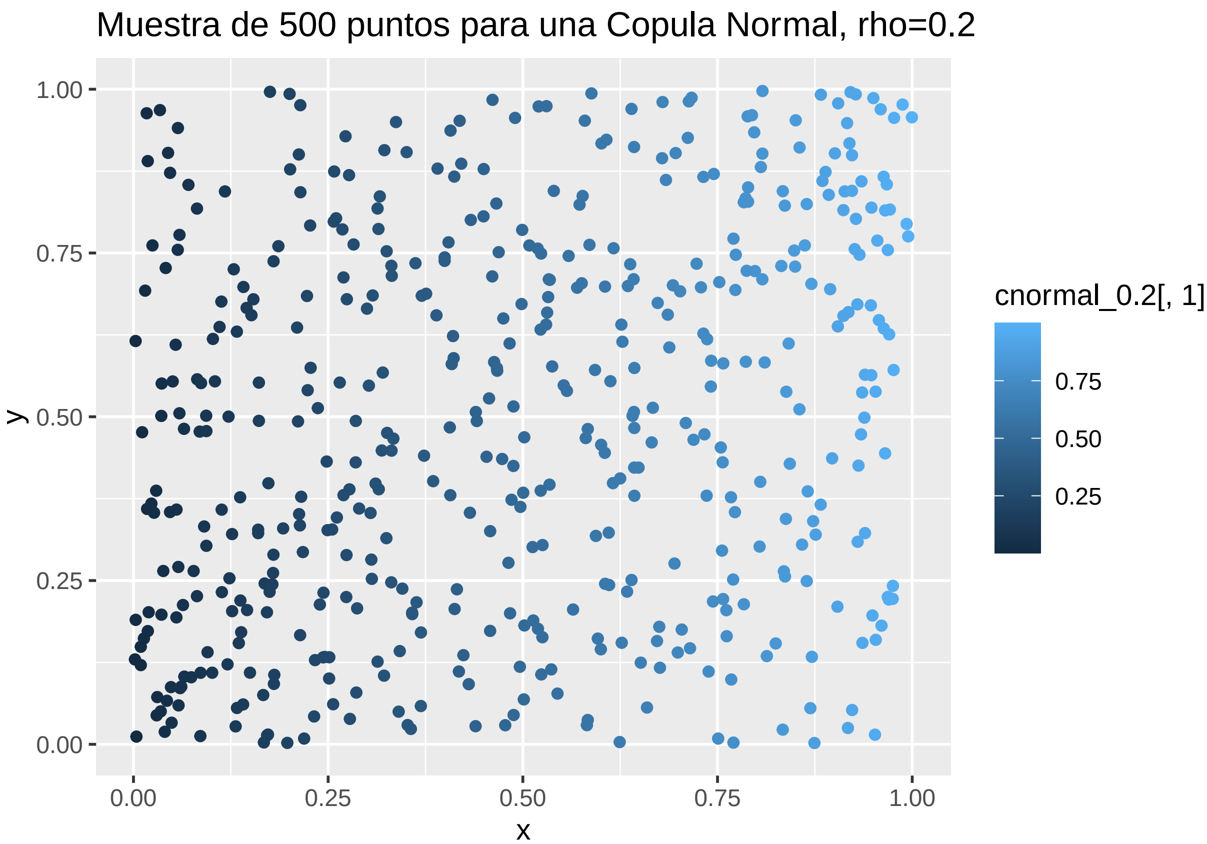
Primero notamos que en la cópula normal bidimensional con parámetro .9 tenemos que la correlación entre las dos variables tiene una tendencia lineal, es decir al tomar una muestra notamos que los datos se acercan más a una recta. En cambio cuando tomamos una cópula normal bidimensional con parámetro .2 tenemos que los datos se parecen menos a una recta, es decir su correlación lineal es mucho menor y esto se puede ver si tomamos una muestra, notamos que en la muestra los datos están mucho más esparcidos a lo largo del cuadrado unitario.

Pregunta 9

```
# Muestra de la copula normal con rho=0.9
cnormal_0.9 <- rCopula(500, copula.normal_0.9)
# Muestra de la copula normal con rho=0.2
cnormal_0.2 <- rCopula(500, copula.normal_0.2)
#Graficamos Copula Normal con rho=0.9
plot.cnormal_0.9 <- qplot(cnormal_0.9[,1], cnormal_0.9[,2], colour = cnormal_0.9[,1],
main="Muestra de 500 puntos para una Copula Normal, rho=0.9", xlab = "x", ylab="y")
plot.cnormal_0.9
```




```
#Graficamos Copula Normal con rho=0.2
plot.cnormal_0.2 <- qplot(cnormal_0.2[,1], cnormal_0.2[,2], colour = cnormal_0.2[,1],
main="Muestra de 500 puntos para una Copula Normal, rho=0.2", xlab = "x",
ylab= "y")
plot.cnormal_0.2
```



Es evidente que la cópula con parámetro 0.9 relaciona las densidades marginales con mayor dependencia.