Simulación ITAM
20 de septiembre de 2021 2021-II

Tarea 3.

La fecha de entrega es el **1 de octubre de 2021**.

Lectura

- Salmon, F. (2009) Recipe for Disaster: The Formula That Killed Wall Street, Wired
- Arturo Ederly: Cópulas y variables aleatorias, una introducción

Problemas

1. Obtener una muestra aleatoria de 5,000 observaciones del vector $X = (X_1, X_2, X_3, X_4)$ donde $X_1 \sim \mathcal{N}(4, 9)$, $X_2 \sim$ **Bernoulli** (0.6), $X_3 \sim Beta(2, 3)$ y $X_4 \sim Gamma(3, 2)$. Considerar la siguiente estructura de correlación entre las variables (en términos de la correlación de Spearman):
   - $cor(X_1, X_3) = -0.7$
   - $cor(X_2, X_4) = 0.4$
   - $cor(X_1, X_4) = 0.5$
   - $cor(X_2, X_3) = 0.2$
   - $cor(X_i, X_j) = 0$, para las correlaciones no dadas.

   Con la muestra, hacer los histogramas de las funciones marginales y corroborar que tienen la distribución considerada, así como la estructura de dependencia dada.

2. La τ de Kendall entre X y Y es 0.55. Tanto X como Y son positivas. ¿Cuál es la τ entre X y $1/Y$? ¿Cuál es la τ de $1/X$ y $1/Y$?

3. Mostrar que cuando $\theta \to \infty$, $C^{Fr}(u_1, u_2) \to min\{u_1, u_2\}$, donde C^{Fr} es la cópula de Frank.

4. Consideren la cópula de Clayton. Mostrar que converge a la cópula de comonotonicidad cuando $\theta \to \infty$. [Hint: usen la regla de l'Hópital considerando que la cópula de Clayton se puede escribir como $\exp\{\log(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)/\theta\}$ para θ positivo.]

5. Supongan que tienen dos vectores de datos $(x_1, \ldots, x_n)$ y $(y_1, \ldots, y_n)$. Entonces la cópula empírica es la función $C : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ definida por

$$C(u,v) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} I\left(\frac{r_j}{n+1} \leq u, \frac{s_j}{n+1} \leq v\right)$$

donde $(r_1, \ldots, r_n)$ y $(s_1, \ldots, s_n)$ denotan los vectores de rangos de x y y respectivamente.

   Escriban una función llamada `empCopula` que tome cuatro argumentos `u`, `v`, `xVec` y `yVec`. Pueden suponer que los valores `u,v` están en $[0,1]$ y que `xVec` y `yVec` son vectores numéricos que tienen la misma longitud (no vacios).

6. la cópula Farlie-Gumbel-Morgenstern es $C(u,v) = uv[1+\alpha(1-u)(1-v)]$ para $|\alpha| \leq 1$. Mostrar que la densidad conjunta correspondiente $\partial^2 C(u,v)/\partial u \partial v$ es no negativa. Mostrar que C tiene marginales uniformes en $(0,1)$. Encontrar el coeficiente de correlación de Spearman y la tau de Kendall.

7. Este es un ejercicio de calibración de las cópulas utilizando correlaciones de rangos. Supongan que una muestra produce un estimado de la τ de Kendall de 0.2. ¿Qué parámetro debe usarse para

   i. la cópula normal,
   ii. la cópula de Gumbel,
   iii. la cópula de Calyton?

8. Usen la función `normalCopula` del paquete `copula` para crear una cópula gaussiana bidimensional con un parámetro de 0.9. Luego creen otra cópula gaussiana con parámetro de 0.2 y describan la estructura de ambas cópulas (diferencias y semejanzas).

9. Usen la función `rCopula` del paquete `copula` para generar muestras de 500 puntos cuya distribución son las cópulas del ejercicio 8 anterior. Hagan una gráfica de las dos muestras. Teniendo en mente que una cópula determina la estructura de dependencia de una distribución multivariada conjunta, mirando estas gráficas, ¿pueden decir cuál de estas dos cópulas debe usarse para simular una distribución con una fuerte dependencia entre las marginales?