7. Sea X_t que satisface la ecuación diferencial estocástica $dX_t = -\frac{1}{3}\,dt + \frac{1}{2}\,dZ_t$, donde $X_0 = 0$ y Z_t es un proceso de Wiener estándar. Definan $S_t = e^{X_t}$ así que $S_0 = 1$.

1 - Encontrar la ecuación diferencial estocástica que sigue S_t
2 - Simular 10 trayectorias de S_t para $t = 1, \ldots, 30$. Llamen a esas trayectorias S_t^i, $i = 1, \ldots, 10$ y grafíquenlas en la misma gráfica.
3 - ¿Qué se puede concluir sobre S_t para t grande?
- Con $n = 10$. evaluar $\bar{S}_{30} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_{30}^i$.

1 $dS = a(S,t)\,dt + b(S,t)\,dt$

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial S} \cdot a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S}\,dz$$

$$dX_t = -\frac{1}{3}\,dt + \frac{1}{2}\,dz$$

$$S_t = e^{X_t} \qquad a = \frac{1}{3} \quad b = \frac{1}{2}$$

$$dS_t = \left[e^{x}\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} e^{x}\left(\frac{1}{4}\right) \right] dt + e^{x}\left(\frac{1}{2}\right) dz$$

$$dS_t = \left[-\frac{1}{3} S_t + \frac{1}{8} S_t \right] dt + \frac{1}{2} S_t\,dz$$

$$dS_t = \frac{-5}{24} S_t\,dt + \frac{1}{2} S_t\,dz$$

3

1. Consideren este problema de Manufactura. La compañía A tiene una configuración de dos máquinas, cada una de las cuales produce un componente por hora. Cada componente puede ser probado de manera instantánea para identificar si es defectuoso o no defectuoso. Sea a_i la probabilidad de que un componente producido por la máquina i sea no defectuoso, $i = 1, 2$. Los componentes defectuosos son desechados y los no defectuosos producidos por cada máquina se almacenan en dos armarios separados. Cuando un componente está presente en cada armario, los dos se ensamblan instantáneamente y se envían. Cada armario puede mantener a lo más dos componentes. Cuando un armario está lleno, la máquina correspondiente se apaga. Se prende de nuevo cuando el armario tiene espacio para al menos un componente.

   - Modelar este proceso como una cadena de Markov.
   - Suponiendo que $a_1 = 0.3$ y $a_2 = 0.5$, generar 500 pasos de la cadena. Digan qué condiciones iniciales usaron para esa trayectoria. ¿Qué proporción del tiempo pasa cada una de las máquinas apagadas?

Sean X_{1n}, X_{2n} = # componentes en el armario 1 y 2 al tiempo n, respectivamente (ó después de n horas)

$n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$

$X_{in} \in \{0, 1, 2\} \quad \forall n \ \forall i$

Defino $X_n = (X_{1n}, X_{2n})$

Veamos que $\{X_n \mid n \in \{0, 1, \ldots\}\}$ es cadena de Markov y sus posibles estados

S = espacio de estados $= \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (2,0)\}$ o solo $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

Matriz de prob. de transición:

$$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.35 & 0.15 & 0 & 0 \\ 0.15 & 0.5 & 0 & 0 & 0.35 \\ 0.35 & 0 & 0.5 & 0.15 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

tiene entradas P_{ij} donde

$P_{1,1} = a_1 a_2 + (1-a_1)(1-a_2)$
$= (0.3)(0.5) + (0.7)(0.5) = .5$

$p_{1,2} = (1-a_1)a_2 = .35$

$p_{1,3} = a_1(1-a_2) = .15$

$p_{2,1} = a_1(1-a_2) = .15$

$p_{2,2} = p_{1,1} = .5$

$p_{2,5} = (1-a_1)a_2 = .35$

$p_{3,3} = a_2$

$p_{3,4} = 1-a_2$

$p_{4,2} = a_1$

$p_{4,5} = 1-a_1$

II.

Con $a_1 = .3$ $a_2 = .5$

En R generé 500 pasos de la cadena, con cond iniciales $X_0 = (0,0)$ y semilla 1234

Las proporciones de tiempo apagadas son la proporción que pasa en $(0,1)$ ó $(0,2)$.

(1.94% y 41.46%)