

Instituto Tecnológico Autónomo de México

Repaso Probabilidad

Luis Gerardo Martínez Valdés

Mail: luis.martinez@neverlandconsultants.capital



Otoño 2021

Índice general

1	Variables Aleatorias	1
1.1	Esperanza, Varianza, Covarianza y Correlación	2
1.1.1	Esperanza	2
1.1.2	Varianza	2
1.1.3	Covarianza	3
1.1.4	Correlación	3
1.1.5	Desigualdades Importantes	3
2	Distrbuciones Conocidas	4
2.1	Continuas	4
2.2	Discretas	5
3	Relación entre distribuciones	6
3.1	Binomial	6
3.2	Binomial Negativa	6
3.3	Poisson	6
3.4	Exponencial	6
3.5	Uniforme	6
3.6	Gamma	7
3.7	Chi-Cuadrada	7
3.8	Normal	7
3.9	t-Student	7
3.10	Pareto	7
3.11	Beta	8
4	Ejercicios	9
	Bibliografía	11
	Índice	

1. Variables Aleatorias

Definición 1 (Variable Aleatoria). Una función $\mathcal{X} : (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ es variable aleatoria (v.a) si $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \quad \mathcal{X}^{-1} \in \mathcal{F}$ [2]

Para fines de este curso diremos que una **v.a.** es una función que va del espacio muestral Ω a los reales \mathbb{R} ; definida por $\mathcal{X} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Definición 2 (Funcion de Masa de Probabilidad (f.m.p)). Si $\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(\omega \in \Omega : X(\omega) = x)$ es una f.m.p, entonces:

- $0 \leq \mathbb{P}(X = x) \leq 1$
- $\sum \mathbb{P}(X = x) = 1$

Definición 3 (Funcion de Densidad de Probabilidad (f.d.p)). Si $f(x)$ es una f.d.p, entonces:

- $0 \leq f(x) \leq 1$
- $\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$

También, se tiene que $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$.

Definición 4 (Función de Distribución Acumulada). Sea \mathcal{X} una v.a. la F.d.a

$$F_x = \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1], \quad F_x(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

- *No-Decreciente:* Si $x_1 < x_2$ entonces $F(x_1) < F(x_2)$
- *Normalizada:* $F(-\infty) = 0$ y $F(\infty) = 1$
- *Continua por la derecha:* $\lim_{y \rightarrow x^+} F(y) = F(x)$
- Si X es continua, entonces

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} = f(x); \quad F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Definición 5 (Función de Densidad de Probabilidad **Condicional**).

$$\mathbb{P}(a \leq Y \leq b \mid X = x) = \int_a^b f_{Y|X}(y|x) dy ; \quad a \leq b$$

$$\int_a^b f_{Y|X}(y|x) dy = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

Donde $f(x, y)$ es la distribución conjunta de X, Y y $f_X(x)$ es la función de densidad marginal de X .

Sean X, Y v.a.'s independientes, entonces se tiene que:

1. $F(x, y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathbb{P}(X \leq x)\mathbb{P}(Y \leq y) = F(x)F(y)$
2. $f_{X,Y}(x, y) = f(x)f(y)$

1.1 Esperanza, Varianza, Covarianza y Correlación

[1] Definiciones y propiedades, sean X, Y, Z v.a.'s:

1.1.1 Esperanza

1. $\mathbb{E}(X) = \mu_X = \begin{cases} \sum_X x f(x) & X \text{ es discreta} \\ \int_X x f_X(x) dx & X \text{ es continua} \end{cases}$
2. $\mathbb{E}(cX) = c \mathbb{E}(X)$; $c \in \mathbb{R}$
3. $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
4. $\mathbb{E}(g(X, Y)) = \int_{X,Y} g(x, y) f_{X,Y}(x, y) dx dy$ para cualquier función real valuada $g(\bullet)$
5. $\mathbb{E}(X) = \sum_{x=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq x)$ con X discreta
6. Esperanza Condicional: $\mathbb{E}(Y | X = x) = \int y f(y|x) dy$
7. Ley de Esperanza Total (Teorema de Torre): $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y))$
8. $\mathbb{E}(g(X, Y)|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{Y|X}(y|x) dx$
9. $\mathbb{E}(g(Y, Z)|X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y, z) f_{Y,Z|X}(y, z|x) dy dz$
10. $\mathbb{E}(X + Y|X) = \mathbb{E}(Y|X) + \mathbb{E}(Z|X)$
11. $\mathbb{E}(g(X)Y|X) = g(X)\mathbb{E}(Y|X)$

Se recomienda al lector probar algunas de las propiedades anteriores, en especial: 6,7,10 y 11.

1.1.2 Varianza

1. $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$
2. $\mathbb{V}(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) + \sum_{i \neq j} COV(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{i < j} COV(X_i, X_j)$
3. Varianza Condicional: $\mathbb{V}(Y|X) = \mathbb{E}(Y^2|X) - \mathbb{E}^2(Y|X)$
4. Varianza Total: $\mathbb{E}(\mathbb{V}(Y|X)) + \mathbb{V}(\mathbb{E}(Y|X))$

Se recomienda al lector demostrar las propiedades 2 y 4.

1.1.3 Covarianza

1. $COV(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))]$
2. $COV(X, y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
3. $COV(X, a) = 0$ donde $a \in \mathbb{R}$
4. $COV(X, X) = \mathbb{V}(X)$
5. $COV(aX, bY) = ab COV(X, Y)$ donde $a, b \in \mathbb{R}$
6. $COV(X + a, Y + b) = COV(X, Y)$
7. $COV(\sum X_i, \sum Y_i) = \sum \sum COV(X_i, Y_i)$

1.1.4 Correlación

1. $Corr(X, Y) = \rho(X, Y) = \frac{COV(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}}$
2. $\rho(c, Y) = 0 \quad \forall \quad c \in \mathbb{R}$
3. $\rho(X, Y) \in [-1, 1]$
4. Sea $Y = aX + b$ entonces $\rho(X, Y) = \begin{cases} \rho(X, Y) = 1 & \text{si } a > 0 \\ \rho(X, Y) = -1 & \text{si } a < 0 \end{cases}$

Se recomienda al lector demostrar las propiedades 3 y 4.

1.1.5 Desigualdades Importantes

1. Desigualdad de Markov Si X es una v.a. y $g(\bullet)$ es una función tal que $g(x) \geq 0 \quad \forall \quad x$ entonces $\forall k$ se tiene que

$$\mathbb{P}(g(X) \geq k) \leq \frac{\mathbb{E}(g(X))}{k} \quad (1.1)$$

2. Desigualdad de Tchebysheff

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{x - \mu}{\sigma}\right|^2 \geq t^2\right) \leq \frac{1}{t^2} \quad (1.2)$$

Otras versiones:

$$\mathbb{P}(|x - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$
$$\mathbb{P}(|x - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}$$

3. Desigualdad de Jensen: Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función, tal que

$$\begin{cases} \mathbb{E}(g(X)) \geq g(E(X)) & \text{g convexa} \\ \mathbb{E}(g(X)) \leq g(E(X)) & \text{g cóncava} \end{cases} \quad (1.3)$$

2. Distributions Conocidas

2.1 Continuas

	Notation	PDF	CDF	Expectation	Variance
Uniform	$U(a, b)$	$\frac{1}{b-a} x \in (a, b)$	$\frac{x-a}{b-a} x \in (a, b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
Normal	$\mathbb{N}(\mu, \sigma^2)$	$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	$\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(t)dt$	μ	σ^2
Log-Normal	$\mathbb{LN}(\mu, \sigma^2)$	$\frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left[\frac{\ln x - \mu}{\sqrt{2\sigma^2}}\right]$	$e^{\mu + \sigma^2/2}$	$(e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu + \sigma^2}$
Student's t	$\text{Student}(\nu)$	$\frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2}$	$I_x\left(\frac{\nu}{2}, \frac{\nu}{2}\right)$	0	$\frac{\nu}{\nu-2}; \nu > 2$
Chi-square	$\chi^2(\nu)$	$\frac{1}{2^{\nu/2}\Gamma(\nu/2)} x^{\nu/2-1} e^{-x/2}$	$\frac{1}{\Gamma(\nu/2)} \gamma\left(\frac{\nu}{2}, \frac{x}{2}\right)$	ν	2ν
Exponential	$\text{EXP}(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$1 - e^{-\lambda x}$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
Gamma	$\text{Gam}(\alpha, \beta)$	$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$	$\frac{\gamma(\alpha, \beta x)}{\Gamma(\alpha)}$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$
Beta	$\text{Beta}(\alpha, \beta)$	$\frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}$	$I_x(\alpha, \beta) \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$	$\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$	$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{r=0}^{k-1} \frac{\alpha+r}{\alpha+\beta+r} \right) \frac{s^k}{k!}$
Weibull	$\text{Weibull}(\lambda, k)$	$\frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right)$	$1 - e^{-(x/\lambda)^k}$	$\lambda \Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)$	$\lambda^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \mu^2$
Pareto	$\text{Pareto}(x_m, \alpha)$	$\frac{\alpha x_m^\alpha}{x^{\alpha+1}} x \geq x_m$	$1 - \left(\frac{x_m}{x}\right)^\alpha x \geq x_m$	$\frac{\alpha x_m}{\alpha-1} \alpha > 1$	$\frac{x_m^2 \alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} \alpha > 2$

2.2 Discretas

	Notation	PDF	CDF	Expectation	Variance	MGF
Bernoulli	$\text{Ber}(p)$	$p^x (1-p)^{1-x}$	$(1-p)^{1-x}$	p	$p(1-p)$	$1-p+pe^s$
Binomial	$\text{Bin}(n, p)$	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	--	np	$np(1-p)$	$(1-p+pe^t)^n$
Multinomial	$\text{Multi}(n, p_1, \dots, p_n)$	$\frac{n!}{x_1! \dots x_k!} p_1^{x_1} \dots p_k^{x_k} \sum_{i=1}^k x_i = n$	--	$\begin{pmatrix} np_1 \\ \vdots \\ np_k \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} np_1(1-p_1) & -np_1p_2 \\ -np_2p_1 & \ddots \end{pmatrix}$	$\left(\sum_{i=0}^k p_i e^{t_i} \right)^n$
Geometric ¹	$\text{Geo}(p)$	$p(1-p)^{x-1}$	$1-(1-p)^x$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$
Hypergeometric	$\text{HG}(N, m, n)$	$\frac{\binom{m}{x} \binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	--	$\frac{nm}{N}$	$\frac{nm(N-n)(N-m)}{N^2(N-1)}$	
Negative Binomial	NB	$\binom{x+r-1}{r-1} p^r (1-p)^x$	--	$r \frac{1-p}{p}$	$r \frac{1-p}{p^2}$	$\left(\frac{p}{1-(1-p)e^t} \right)^r$
Poisson	$\text{Po}(\theta)$	$\frac{e^{-\theta} \theta^x}{x!}$	--	θ	θ	$e^{\theta(e^t-1)}$

3. Relación entre distribuciones

3.1 Binomial

- $Bin(1, p) \equiv Ber(p)$
- Si $X_i \overset{v.a.i.i.d}{\sim} Bin(1, p) \Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i \sim Bin(n, p)$
- Si $X_1 \sim Bin(n_1, p)$, $X_2 \sim Bin(n_2, p)$ independientes, entonces $X_1 + X_2 \sim Bin(n_1 + n_2, p)$
- $Bin(n, p) \equiv Poisson(np)$ para n grande y p pequeña
- $Bin(n, p) \equiv N(np, np(1-p))$ para n grande y una p ni tan pequeña ni tan grande

3.2 Binomial Negativa

- $BN(1, p) \equiv Geo(p)$
- $X_i \overset{v.a.i.i.d}{\sim} Geo(p) \Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i \sim BN(n, p)$
- Si $X_i \overset{v.a.i.i.d}{\sim} Geo(p) \Rightarrow X_{(1)} = \min(X_1, \dots, X_n) \sim Geo(1 - (1-p)^n)$

3.3 Poisson

- Si $X_i \overset{v.a.i.i.d}{\sim} Poisson(\lambda_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i \sim Poisson(\sum_{i=1}^n \lambda_i)$
- Si $X_i \overset{v.a.i.i.d}{\sim} Poisson(\lambda_i) \Rightarrow X_i | \sum_{j=1}^n X_j \sim Bin(\sum_{j=1}^n X_j, \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^n \lambda_j})$

3.4 Exponencial

- Si $X_i \overset{v.a.i.i.d}{\sim} Exp(\lambda_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i \sim Gamma(n, \sum_{i=1}^n \lambda_i)$
- Si $X_i \overset{v.a.i.i.d}{\sim} Exp(\lambda)$ entonces:
 1. $X_{(1)} \sim Exp(n\lambda)$
 2. $X_{(1)}^{\frac{1}{\alpha}} \sim Weibull(\alpha, \lambda)$

3.5 Uniforme

- Si $X_i \overset{v.a.i.i.d}{\sim} U(0, 1)$ entonces:
 1. $-\theta \ln(X_i) \sim Exp(\frac{1}{\theta})$ donde θ es usualmente un parámetro que queremos estimar.
 2. $-2 \ln(X_i) \sim \chi_{(2)}^2$

3.6 Gamma

- Si $X_i \stackrel{v.a.i.i.d}{\sim} \text{Gamma}(r, \lambda_i) \Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Gamma}(r, \sum_{i=1}^n \lambda_i)$
- $\text{Gamma}(1, \lambda) \equiv \text{Exp}(\lambda)$
- Si $X \sim \text{Gamma}(r, \lambda)$ entonces para $k > 0$, $kX \sim \text{Gamma}(r, \frac{\lambda}{k})$
- $\text{Gamma}(\frac{\nu}{2}) \equiv \chi_{(\nu)}^2$
- $X_1 \sim \text{Gamma}(r_1, \lambda)$, $X_2 \sim \text{Bin}(r_2, \lambda)$ independientes, entonces $\frac{X_1}{X_1+X_2} \sim \text{Beta}(r_1, r_2)$

3.7 Chi-Cuadrada

- $X_i \stackrel{v.a.i.i.d}{\sim} \chi_{(\nu_i)}^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^n X_i \sim \chi_{(\sum_{i=1}^n \nu_i)}^2$
- $X_1 \sim \chi_{(\nu_1)}^2$, $X_2 \sim \chi_{(\nu_2)}^2$ independientes, entonces:
 1. $\frac{\frac{X_1}{\nu_1}}{\frac{X_2}{\nu_2}} \sim F(\nu_1, \nu_2)$
 2. $\frac{X_1}{X_1+X_2} \sim \text{Beta}(\frac{\nu_1}{2}, \frac{\nu_2}{2})$

3.8 Normal

- Si $Z_i \stackrel{v.a.i.i.d}{\sim} N(0, 1) \Rightarrow \sum_{i=1}^n Z_i^2 \sim \chi_{(n)}^2$
- Si Z_1 es independiente de Z_2 entonces $\frac{Z_1}{Z_2} \sim \text{Cauchy}(0, 1) \equiv t(1)$

3.9 t-Student

- Si $Z \sim N(0, 1)$ es independiente de $V \sim \chi_{\nu}^2$ entonces $\frac{Z}{\sqrt{\frac{V}{\nu}}} \sim t(\nu)$
- Si $X \sim t(\nu) \Rightarrow X^2 \sim F(1, \nu)$

3.10 Pareto

- Si $X_i \stackrel{v.a.i.i.d}{\sim} \text{Pareto}(\alpha, \beta)$ con $i = 1, \dots, n$ entonces:
 1. $\ln(\frac{X_i}{\beta}) \sim \text{Exp}(\alpha)$
 2. $X_{(1)} \sim \text{Pareto}(n\alpha, \beta)$
 3. $2\alpha \sum_{i=1}^n (\frac{X_i}{\beta}) \sim \chi_{(2n)}^2$

3.11 Beta

- Si $X \sim \text{Beta}(\alpha, 1)$ entonces:
 1. $-\ln(X) \sim \text{Exp}(\alpha)$
 2. $-2\alpha \ln(X) \sim \chi^2_{(2)}$
- Si $X \sim \text{Beta}(1, \beta)$ entonces:
 1. $-\ln(1 - X) \sim \text{Exp}(\beta)$
 2. $-2\beta \ln(1 - X) \sim \chi^2_{(2)}$

4. Ejercicios

- Una tarea llega a un sistema y es atendida por el procesador C_i con una probabilidad p_i , $i = 1, \dots, n$. El tiempo aleatorio que toma el procesador en terminar la tarea es distribuido exponencialmente con parámetro λ_i

- Muestre que la función de densidad de $T \equiv$ el tiempo que toma el sistema para el procesamiento de la tarea está dada por:

$$f_T(t) = \sum_{i=1}^n p_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}, \quad 0 \leq t$$

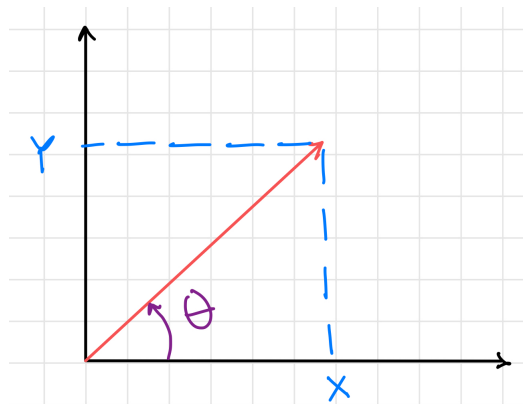
- Muestre entonces que:

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{\lambda_i}$$

- Demuestra el Teorema de Cambio de variable univariado para el caso estrictamente creciente i.e. Sea X una v.a. continua y ϕ una función estrictamente creciente. Entonces:

$$f_{\phi(X)}(t) = f_X(\phi^{-1}(t)) \left| \frac{d}{dt} \phi^{-1}(t) \right|$$

- Para cierto tipo de suelo, el número de lombrices por pie cúbico tiene una media de 100. Suponiendo una distribución de Poisson de las lombrices, proponga un intervalo que incluirá al menos $\frac{5}{9}$ de los valores muestrales de las cantidades de lombrices obtenidas de un número grande de muestras de 1 pie cúbico.
- Si $X, Y \stackrel{\text{v.a.i.i.d.}}{\sim} \text{Exponenciales}$ con parámetros λ_1, λ_2 respectivamente. Encuentra la f.d.p $Z = \frac{X}{Y}$ y calcule $\mathbb{P}(X < Y)$
- Sea $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \dots \leq X_{(n)}$ valores ordenados de n v.a.'s $Uniformes(0, 1)$. Prueba para $1 < k < n + 1$ que $\mathbb{P}(X_{(k)} - X_{(k-1)} > t) = (1 - t)^n$ donde $X_{(0)} = 0$, $X_{(n+1)} = 1$
- Si $U_1, U_2 \sim Unif(0, 1)$ son independientes, encuentre la f.d.p de $|U_1 - U_2|$
- Si $\theta \sim Unif(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Encuentre la distribución de Y .



- Demuestra la Desigualdad de Markov.

9. Demuestra la Desigualdad de Tchebysheff

10. Sean $X_1, \dots, X_n \stackrel{v.a.i.d.}{\sim} f(\bullet)$ tal que $\mathbb{E}(X_i) = \mu$, $\mathbb{V}(X_i) = \sigma^2$. Demuestra:

(a) $\mathbb{E}(\bar{X}) = \mu$

(b) $\mathbb{V}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

(c) $\mathbb{E}(S^2) = \sigma^2$

Bibliografia

- [1] George Casella and Roger L Berger. *Statistical inference*. Cengage Learning, 2021.
- [2] Dennis Wackerly, William Mendenhall, and Richard L Scheaffer. *Mathematical statistics with applications*. Cengage Learning, 2014.