ITAM
Departamento de Estadística

Inferencia Estadística– Laboratorio #4
Estimación Puntual: Sesgo, Varianza, Error Cuadrático Medio, Consistencia

---

1. Demuestra que
$$MSE(\hat{\theta}) = \mathbb{E}\big[(\hat{\theta} - \theta)^2\big] = V(\hat{\theta}) - B^2(\hat{\theta})$$

2. Suponga que $\hat{\theta}$ es un estimador para un parámetro θ y $E\big[(\hat{\theta}\big] = a\theta + b$ para $a, b \neq 0$.
   (a) En términos de a, b y θ. Encuentre $B(\hat{\theta})$
   (b) Encuentre una función de $\hat{\theta}$, sea θ^*, que sea un estimador no sesgado para θ
   (c) Usando este estimador insesgado, exprese $MSE(\hat{\theta}^*)$ como función de $V(\hat{\theta})$
   (d) Dé un ejemplo de valores de a, b para los cuales se cumpla $MSE(\hat{\theta}^*) > MSE(\hat{\theta})$

3. Suponga $Y_i,\ i = 1, 2, 3$ denotan una m.a. de una distribución exponencial con f.d.p $f(y) = \frac{1}{\theta} e^{\frac{-y}{\theta}},\ y > 0$. Considere:
$$\hat{\theta}_1 = \frac{Y_1 + 2Y_2}{3}, \quad \hat{\theta}_2 = min\big\{Y_1, Y_2, Y_3\big\}, \quad \hat{\theta}_3 = \bar{Y}$$
   (a) Determina cuál de estos estimadores es insesgado
   (b) ¿Cuál tiene la varianza más pequeña?

4. Si $Y \sim Bin(n, p)$. Demuestra que:
   (a) $\hat{p}_1 = \frac{Y}{n}$ es insesgado.
   (b) Sea $\hat{p}_2 = \frac{(Y+1)}{(n+2)}$ deduzca el sesgo de $\hat{p}_2$
   (c) Dime los valores de p para los que $MSE(\hat{p}_1) < MSE(\hat{p}_2)$

5. Suponga que $X_i, Y_i, \quad i = 1, 2, ..., n$ son m.a.'s independientes provenientes de poblaciones con medias μ_1, μ_2 y varianzas σ_1, σ_2 respectivamente. Demuestre que $\bar{X} - \bar{Y}$ es un estimador consistente de $\mu_1 - \mu_2$

6. Se dice que $\hat{\theta}$, un estimador insesgado de θ es consistente en $MSE(\hat{\theta})$ si $lim_{n\to\infty} MSE(\hat{\theta}) = 0$.
   (a) Pruebe que $\hat{\theta}$ es consistente en $MSE(\hat{\theta})$ si y sólo si $lim_{n\to\infty} V(\hat{\theta}) = 0$
   (b) Pruebe que consistencia en MSE implica consistencia en probabilidad.
   (c) Use estos dos incisos para demostrar que $\hat{\theta}$ es consistente si $lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \theta$

7. Sea $X_i \ \ i = 1, 2, ..., n$ una m.a de $X_i \sim U(0, \theta) \ \ \forall \ \ i$, use el ejercicio anterior para demostrar que $T = X_{(n)}$ es consistente.