ITAM
Departamento de Estadística

Inferencia Estadística– Laboratorio #11
Pruebas de Hipótesis

+ ×

− ÷

1. (a) Enliste los elementos de una **prueba estadística** y defina cada uno de ellos. → Contrastar hipótesis de investigación

(b) Defina y explique *error tipo I y error tipo II*

(a)

(1) Hipótesis Nula (H_0): Hipótesis que queremos probar.

(2) Hipótesis Alternativa (H_A, H_1): Hipótesis a ser aceptada en caso de rechazar H_0

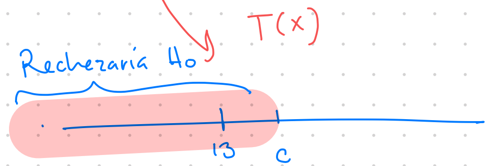
(3) Estadístico de Prueba [$T(x)$]: Es lo mismo que un estimador, que es función de observaciones muestrales en las que H_0 está basada.

($e.g.$ $T(x)=\bar{x}$, $T(x)=X$, $T(x)=S^2$)

(4) Región de Rechazo ($RR=R$):

Especifica los valores de $T(x)$ para el cual H_0 será rechazada en favor de H_1.

i.e. $R=\{x \mid T(x)>c\}$ donde c es el valor crítico.



$H_0: \mu = 13$ vs. $H_1: \mu < 13$

(b)

(V)	A_{H_0}	R_{H_0}
H_0	✓	Tipo I
H_1	Tipo II	✓

Para cualquier región de rechazo R surgen:

(i) Tipo I: H_0 es rechazado dado que H_0 es verdadera.

i.e. $\alpha = \mathbb{P}\{R_{H_0} \mid H_0 \text{ es verdad}\} = \mathbb{P}\{R_{H_0} \mid H_0\} = \mathbb{P}_{H_0}\{R_{H_0}\}$ → Nivel de la Prueba o Nivel de Significancia

(ii) Tipo II: H_0 es aceptada dado que H_1 es verdadera.

i.e. $\beta = \mathbb{P}\{A_{H_0} \mid H_1 \text{ es verdadera}\} = \mathbb{P}\{A_{H_0} \mid H_1\} = \mathbb{P}_{H_1}\{A_{H_0}\} = 1-\beta^*$

Donde β^* es la POTENCIA / PODER de la prueba. $\beta^* = 1-\beta$

$= \mathbb{P}\{R_{H_0} \mid H_1 \text{ es verdad}\}$

Definimos función potencia $\beta(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{parámetro de Hipótesis}}}{\theta}) = \pi(\theta) = \mathbb{P}_\theta\{R_{H_0} \mid H_0 \text{ es verdad}\}$

$= \mathbb{P}_\theta\{R_{H_0} \mid H_0\}$

2. Para la encuesta política de Rod se muestrearon $n = 15$. Deseamos probar $H_0 : p = 0{,}5$ vs. $H_1 :< 0{,}5$. El estadístico de prueba es $Y \equiv$ el no. de votantes muestreados a favor de Rod. Suponga que la región de rechazo $RR = \{y \leq 2\}$.

   (a) Explique qué tipo de hipótesis se están comparando.

   (b) Calcule α

   (c) Sponga que Rod recibirá el 30 % de los votos. Defina β, explíque qué describe en este ejercicio y calcúlela.

   $\rightarrow p = .3 < .5$

   (d) Interprete sus resultados.

(a) Se quier probar $H_0 : p = 0.5$ vs. $H_1 : p < 0.5$

$\therefore$ Simple vs. Compuesta.

(b) $\alpha = \mathbb{P}\{\text{error tipo I}\} = \mathbb{P}_{H_0}\{R_{H_0}\} = \mathbb{P}\{y \leq 2 \mid p = .5\}$

Quiero ver cuántos éxitos (votos) tiene Rod en $y \leq 2$ si $p = .5$

$$\Rightarrow \alpha = \mathbb{P}_{p=.5}\{Y \leq 2\} = \sum_{y=0}^{2} \binom{15}{y} .5^y (.5)^{15-y} = .00369 \approx .004$$

$(\because Y \sim \text{Binom}(15, .5))$

$H_1 : p < .5$

(c) $\beta = \mathbb{P}\{\text{error tipo II}\} = \mathbb{P}\{A_{H_0} \mid H_1\} = \mathbb{P}\{Y > 2 \mid p = .3\}$

$$= \mathbb{P}_{p=.3}\{Y > 2\} = \sum_{y=3}^{15} \binom{15}{y} .3^y \, .7^{15-y} \approx .873$$

(d) Si usamos $R = \{y \leq 2\}$ y $p = .5$ tenemos un riesgo muy pequeño ($\alpha = .004$) de concluir que Rod perderá cuando en realidad ganará.

Y teniendo en cuenta $\beta = .873$ nos llevará a concluir a que Rod gane aún con $p = .3$

NOTA: Vemos que β depende del parámetro i.e. $\beta(p) = \mathbb{P}_p\{R_{H_0} \mid H_0\}$

$\Rightarrow$ entre mayor sea la diferencia entre $p \rightarrow$ valor H_1 y el valor de H_0, menores la VEROSIMILITUD de que NO rechacemos H_0.

e.g.

$$\beta = \mathbb{P}\{A_{H_0} \mid H_2\} = \mathbb{P}\{Y > 2 \mid p = .6\} = \sum_{y=3}^{15} \binom{15}{y} .6^y \, .4^{15-y} \approx \underline{.99}$$

3. Suponga que $Y_1, Y_2 \overset{v.a.i.i.d}{\sim} U(\theta, \theta+1)$. Para probar que $H_0 : \theta = 0$ vs. $H_1 : \theta > 0$, tenemos dos pruebas:

Simple vs. Compuesta

1. Rechazar H_0 si $Y_1 > 0{,}95$
2. Rechazar H_0 si $Y_1 + Y_2 > c$

Encuentre el valor de c para que la prueba 2 tenga el mismo valor que la prueba 1.

Primero vamos a obtener la f.d.p. de $Y_i \sim U(\theta, \theta+1)$

$$f_{Y_i}(y) = \frac{1}{(\theta+1)-\theta} = 1 \; ; \quad \theta < y < \theta+1$$

(1) Usamos un error tipo I:

$1 \; (\because \theta = 0)$

$$\alpha_1 = \mathbb{P}_{H_0}\{R_{H_0}\} = \mathbb{P}\{Y_1 > .95 \mid \theta = 0\} = \int_{.95}^{\cancel{\theta+1}} 1 \, dy_1 = y \Big|_{.95}^{1} = .05$$

(2) Recordemos si $X \sim U(a,b) \Rightarrow \frac{X-a}{b} \sim U(0,1) \longleftarrow$

$$\Longrightarrow \underbrace{\frac{Y_1 - \theta}{\theta+1}}_{U_1}, \underbrace{\frac{Y_2-\theta}{\theta+1}}_{U_2} \sim U(0,1) \Rightarrow U_1 + U_2 \sim f(u) = \begin{cases} u & \text{si } 0 < u < 1 \\ 2-u & \text{si } 1 \leq u \leq 2 \\ 0 & \text{e.o.c.} \end{cases}$$

En este caso es fácil ver que $Y_i = U_i \; \forall i \; \because \; \theta = 0$ bajo H

$$\Rightarrow \alpha_2 = \mathbb{P}\{Y_1 + Y_2 > c \mid \theta = \theta\} = \int_c^1 u \, du = \frac{u^2}{2}\Big|_c^1 = \frac{1}{2} - \frac{c^2}{2} = .05$$

$$\iff 1 - c^2 = .1 \iff .99 = c^2 \iff .99 \approx c < 1 \checkmark$$

De otra forma

$$\int_c^2 (2-u)\, du = \left(2u - \frac{u^2}{2}\right)_c^2 = \frac{4 - 4c + c^2}{2} = .05$$

$$\iff c^2 - 4c + 3.90 = 0 \iff c = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(3.90)}}{2}$$

$$= \begin{cases} \cancel{2.31} & \text{La descartamos porque límite de } f(u) \text{ es } 2 \\ 1.68 & \end{cases}$$

Faltaría contrastar $\mathbb{P}\{Y_1 + Y_2 > 1.68\}$ vs. $\mathbb{P}\{Y_1 + Y_2 > .99\}$

4. Suponga que $X_1, .., X_{25} \overset{v.a.i.i.d}{\sim} N(\mu, 4)$. Para probar $H_0 : \mu = 0$ vs. $H_1 : \mu = 1$. Si mi región de rechazo $RR = \{\hat{x} : \ \bar{X} > c\}$ y $\alpha = 0{,}1$. Encuentre:

Simple vs. Simple.

(a) c

(b) β

(c) la potencia de la prueba β^*

(d) la función potencia $\beta(\mu)$

Recordar:

$$\bar{X} \sim N(\mu, 4/25) \Rightarrow \bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\sigma^2/n}} \sim N(0,1)$$

(a)

$$\alpha = .1 = \mathbb{P}\{R_{H_0} | H_0\} = \mathbb{P}_{\mu=0}\{\bar{X} > c\} = \mathbb{P}\left\{Z > \frac{c-0}{2/5}\right\}$$

$$= \mathbb{P}\{Z > 2.5c\} \iff 1 - \mathbb{P}\{Z \leq 2.5c\} = .1$$

$$\iff .99 = \phi(2.5c) \iff \phi^{-1}(.99) = 2.5c$$

$$\iff 1.28 = 2.5c$$

$$\iff .512 = c$$

(b)

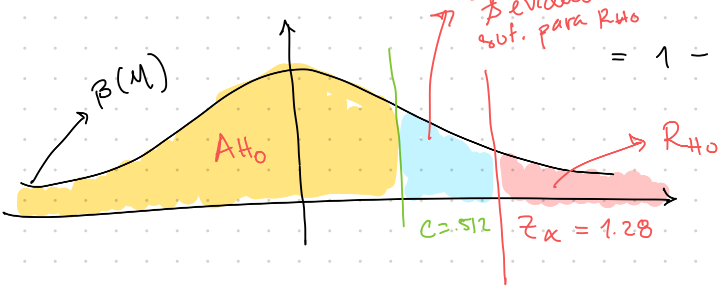
$$\beta = \mathbb{P}\{A_{H_0} | H_1\} = \mathbb{P}_{\mu=1}\{A_{H_0}\} = \mathbb{P}_{\mu=1}\{\bar{X} \leq c\} = \mathbb{P}_{\mu=1}\{\bar{X} \leq .512\}$$

$$= \mathbb{P}\left\{Z \leq \frac{.512 - 1}{2/5}\right\} = \mathbb{P}\{Z \leq -1.22\} \approx .111$$

(c) Potencia de la Prueba es $\beta^* = 1 - \beta = .889$

(d) $\beta(\mu) = \mathbb{P}\{R_{H_0} | \mu\} = \mathbb{P}_\mu\{\bar{X} > .512\} = \mathbb{P}\left\{Z > \frac{.512 - \mu}{2/5}\right\}$

$$= 1 - \phi(2.5(.512 - \mu))$$



5. Suppnga que $X \sim \ Ber(p)$, queremos probar $H_0 : p = \frac{1}{2}$ vs. $H_1 : p = \frac{3}{4}$. Si $R = \{x : x > 1\}$ es la región crítica.

Tenemos $x = 0, \dots, 3$

(a) ¿Qué tipo de prueba es esta?

(b) Encuentre α, β

(a) Simple vs. Simple.

(b) $\alpha = \mathbb{P}\{R_{H_0} | p = 1/2\} = \mathbb{P}\{x > 1 | p = 1/2\} = \mathbb{P}\{x = 2 | p = 1/2\} + \mathbb{P}\{x = 3 | p = 1/2\}$
$= 1/2$

$\beta = \mathbb{P}\{A_{H_0} | p = 3/4\} = \mathbb{P}\{x \leq 1 | p = 3/4\} = \mathbb{P}\{x = 0 | p = 3/4\} + \mathbb{P}\{x = 1 | p = 3/4\}$
$\approx .1562$

6. Los salarios por hora en una industria particular están distribuidos normalmente con media de \$13,20 y desviación estándar de \$2,50. Una compañía en esta industria emplea 40 trabajadores, pagándoles un promedio de \$12,20 por hora. ¿Esta compañía puede ser acusada de pagar salarios abajo del estándar? Use una prueba de nivel $\alpha = ,01$.

$X \sim N(13.20, 2.5)$, $n = 40$, $\bar{X} = 12.20$

$H_0: \mu = 13.20$ vs. $H_1: \mu < 13.20$ y $\alpha = .01$

Podemos aplicar el Z-test i.e. Si $Z_{H_0} < Z_\alpha$ rechazamos H_0.

$$Z_{H_0} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{12.20 - 13.20}{\frac{2.5}{\sqrt{40}}} \approx -2.53$$

Por otro lado, $Z_\alpha = Z_{.01} \approx -2.32$

$\therefore$ Podemos ver que $Z_{H_0} = -2.53 < -2.32 = Z_\alpha$ $\therefore$ Rechazamos H_0

Así, podemos concluir que $\exists$ evidencia suf. para que la compañía sea acusada de pagar salarios bajos.

7. El voltaje de salida para un circuito eléctrico es de 130. Una muestra de 40 lecturas independientes del voltaje para este circuito dio una media muestral de 128.6 y desviación estándar de 2.1. Pruebe la hipótesis de que el promedio de voltaje de salida es 130 contra la alternativa de que es menor a 130. Use una prueba con nivel .05.

$\mu = 130$, $n = 40$, $\overline{x} = 128.6$, $\sigma = 2.1$

$H_0 : \mu = 130$ vs. $H_1 : \mu < 130$, $\alpha = .05$

Volvemos a aplicar el Z- test.

$$Z_{H_0} = \frac{128.6 - 130}{\frac{2.1}{\sqrt{40}}} = -4.21$$

$$Z_\alpha = Z_{.05} = -1.64$$

$\therefore Z_{H_0} = -4.21 < -1.64 = Z_\alpha$

$\therefore$ Rechazamos Ho

$\therefore \nexists$ evidencia suf para sostener que el promedio de voltaje es 130

8. **(Lema Neyman-Pearson)** Sea $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ sea una muestra aleatoria de $f(x;\theta)$, donde $\theta \in \Theta = \{\theta_0, \theta_1\}$, y sea $L(\theta; x)$ la función de verosimilitud. Si existe una prueba con nivel de significancia α tal que, para una $k > 0$, se tiene que:

$$\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} \leq k \quad p.c \quad x \in R_1 \rightarrow \text{Región de Rechazo} \tag{1}$$

y

$$\frac{L(\theta_0)}{L(\theta_1)} > k \quad p.c \quad x \in \bar{R}_1 \rightarrow \overline{RR_1} \tag{2}$$

entonces la prueba (no-aleatorizada)

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 & L(\theta_1) \geq L(\theta_0) \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

es la prueba más poderosa (MPT por sus siglas en inglés) con un nivel de significancia

$$\alpha = \mathbb{E}_{\theta_0}\psi(x)$$

para probar $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta = \theta_1$

Proof. The proof is given for sampling from continuous distributions.

Suppose there exists a critical region R_1 with the properties in the statement of the lemma. Let A_1 be the critical region of any other test at significance level α. Then

$$\int_{R_1} f(\mathbf{x};\theta_0)d\mathbf{x} = \int_{A_1} f(\mathbf{x};\theta_0)d\mathbf{x} = \alpha,$$

Now

$$\begin{aligned} A_1 \cup R_1 &= A_1 \cup (R_1 \cap \overline{A_1}) \\ &= R_1 \cup (A_1 \cap \overline{R_1}). \end{aligned}$$

It follows therefore that

$$\int_{A_1} f(\mathbf{x},\theta_1)d\mathbf{x} + \int_{R_1\cap\overline{A_1}} f(\mathbf{x};\theta_1)d\mathbf{x}$$

$$= \int_{R_1} f(\mathbf{x};\theta_1)d\mathbf{x} + \int_{A_1\cap\overline{R_1}} f(\mathbf{x};\theta_1)d\mathbf{x}$$

or

$$\int_{R_1} f(\mathbf{x};\theta_1)d\mathbf{x} - \int_{A_1} f(\mathbf{x};\theta_1)d\mathbf{x}$$

$$= \int_{R_1\cap\overline{A_1}} f(\mathbf{x};\theta_1)d\mathbf{x} - \int_{A_1\cap\overline{R_1}} f(\mathbf{x};\theta_1)d\mathbf{x}$$

Now, by property (i), $f(\mathbf{x};\theta_1) \geq \frac{1}{k}f(\mathbf{x};\theta_0)$ for each point of R_1 and hence for each point of $R_1 \cap \overline{A_1}$. Furthermore, by property (ii), $f(\mathbf{x};\theta_1) < \frac{1}{k}f(\mathbf{x};\theta_0)$ for each point of $\overline{R_1}$ and hence for each point of $A_1 \cap \overline{R_1}$. Therefore

$$\int_{R_1\cap\overline{A_1}} f(\mathbf{x};\theta_1)d\mathbf{x} \geq \frac{1}{k}\int_{R_1\cap\overline{A_1}} f(\mathbf{x};\theta_0)d\mathbf{x}$$

and

$$\int_{A_1\cap\overline{R_1}} f(\mathbf{x};\theta_1)d\mathbf{x} < \frac{1}{k}\int_{A_1\cap\overline{R_1}} f(\mathbf{x};\theta_0)d\mathbf{x}.$$

Substituting we obtain

$$\int_{R_1} f(\mathbf{x};\theta_1)d\mathbf{x} - \int_{A_1} f(\mathbf{x};\theta_1)d\mathbf{x}$$

$$\geq \frac{1}{k}\left(\int_{R_1\cap\overline{A_1}} f(\mathbf{x};\theta_0)d\mathbf{x} - \int_{A_1\cap\overline{R_1}} f(\mathbf{x};\theta_0)d\mathbf{x}\right)$$

$$= \frac{1}{k}\left(\int_{R_1} f(\mathbf{x};\theta_0)d\mathbf{x} - \int_{A_1} f(\mathbf{x};\theta_0)d\mathbf{x}\right) = 0$$

which completes the proof.