ITAM

Laboratorio #8: Convergencias

Luis Martinez

Otoño 2021

.

Convergencia en Probabilidad

Recordar:

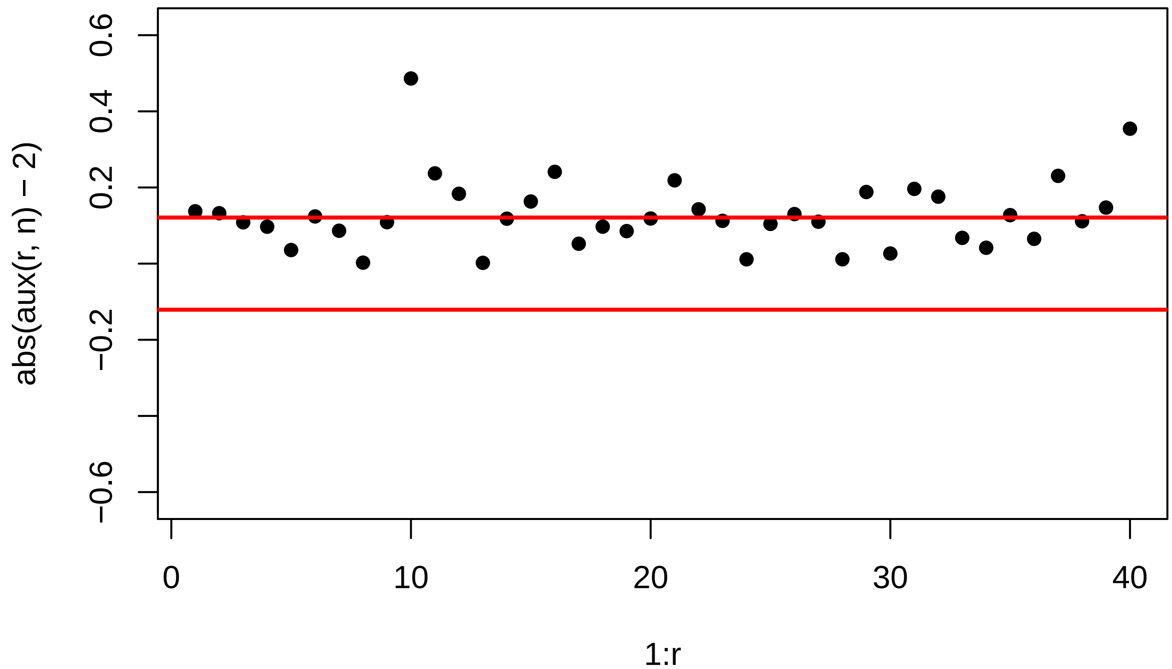
$$lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\{|X_n - X| > \epsilon\} = 0$$

```
#Vamos a crear una muestra aleatoria de normales
muestra<- function(n){
  X <- rnorm(n,2,1)
  Media<- mean(X)
  return(Media)
}
#Vemos el punto que arroja esta funcion
muestra(40)
```

```
## [1] 2.060178
```

```
#Creamos una secuencia Xn con una funcion auxiliar
aux<- function(r,n){
  aux.b<- rep(0,r)
  for(i in 1:r){
    aux.b[i]<- c(muestra(n)) #Llenamos el vector aleatorio
  }
  return(aux.b)
}


lim<- function(eps,r,n){
  s<- 0
  for(i in 1:r){
    if(abs(aux(r,n)[i]-2)< eps){
      s=s+1
    }
  }

  print(s/r)

  plot(1:r, abs(aux(r,n)-2), pch=16, ylim= c(-eps-.5, eps+.5),add=TRUE)
  par(new=TRUE)
  abline(eps,0,col='red', lwd=2)
  abline(-eps,0,col='red', lwd=2)

}

#Vamos a jugar con esta n
n<- 40
lim(0.121, 40, n)
```

```
## [1] 0.55
```



#Convergencia en Media

$$lim_{n\to\infty}\ \mathbb{E}\{|X_n - X|^k\} = 0$$

Vamos a lanzar una moneda 500 veces y graficar los resultados que se nos piden:

```
tiros <- 500
p.val <- 1/2 #probabilidad de que caiga un sol

#Creamos un vector para guardar los valores de p gorro
p.gorro <- rep(NA, tiros)

#Loop recorriendo cada una de las nsim simulaciones
for (i in 1:tiros){
  experimento <- sample(c("Sol","Águila"), tiros, replace = TRUE,
                        prob = c(p.val, 1 - p.val))
  soles       <- table(experimento)["Sol"]
  p.gorro[i]  <- soles/tiros
}

#Queremos ver que en promedio llegamos al valor verdadero de p (i.e p.val)
mean(p.gorro)
```

```
## [1] 0.4992
```

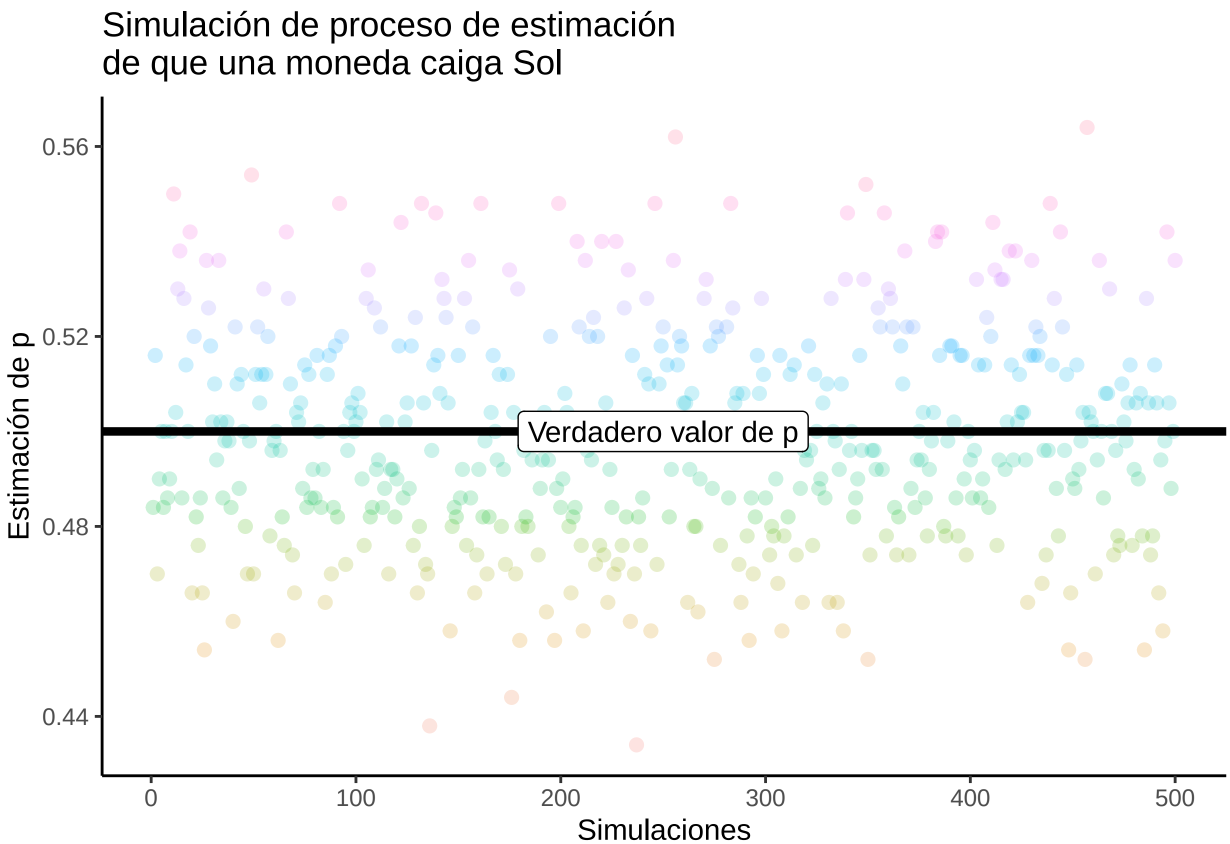
```
round(mean(p.gorro), digits = 1)
```

```
## [1] 0.5
```

(i) Esto, lo podemos ver gráficamente.

```
ggplot() +
  geom_point(aes(x = 1:tiros, y = p.gorro, color = as.character(p.gorro)),
             size = 2, alpha = 0.2) +
  geom_hline(aes(yintercept = p.val), size = 1.5, linetype = "solid") +
```

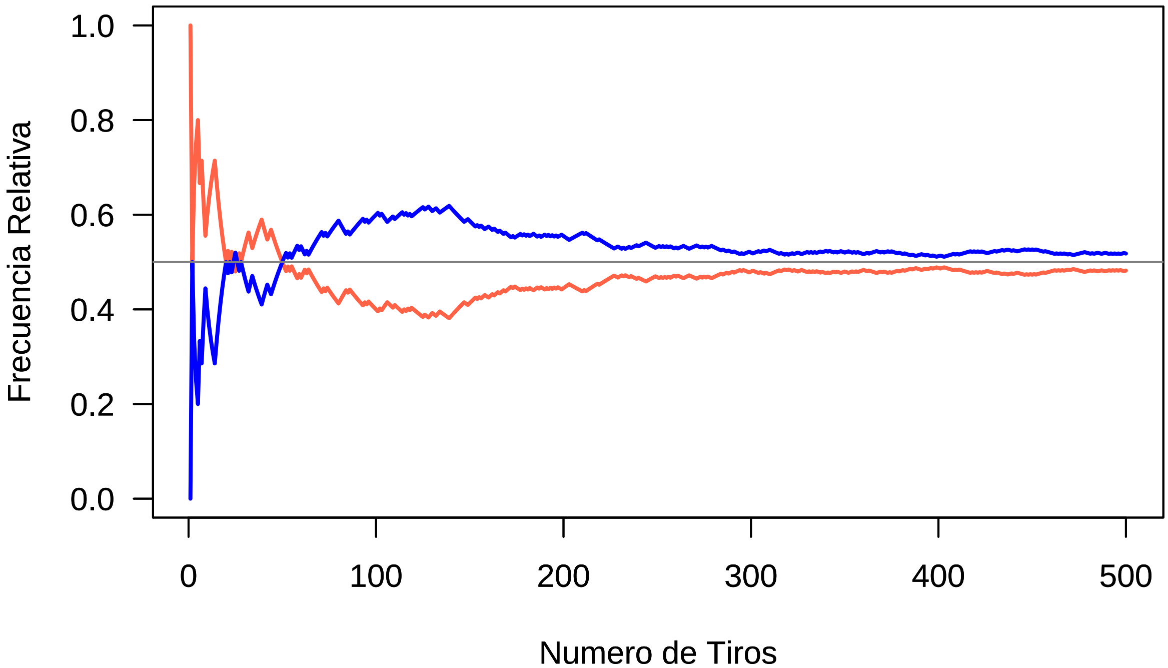
```r
  theme_classic() +
  theme(legend.position = "none") +
  labs(
    x = "Simulaciones",
    y = "Estimación de p",
    title = "Simulación de proceso de estimación\nde que una moneda caiga Sol"
  ) +
  geom_label(aes(x = tiros/2, y = p.val), label = "Verdadero valor de p")
```



(ii) Ahora, queremos graficar la diferencia entre el número de soles y águilas

```r
# generamos una nueva simulacion
num_tiros <- 500

# lanzamientos
moneda <- c('Sol', 'Águila')
lanzamientos <- sample(moneda, size = num_tiros, replace = TRUE)

# no. de Soles y Águilas
frecs <- table(lanzamientos)
frecs

lanzamientos <- sample(moneda, size = num_tiros, replace = TRUE)
frecs <- table(lanzamientos)
frecs

Sol_frec <- cumsum(lanzamientos == 'Sol') / 1:num_tiros
```

```r
Aguil_frec <- cumsum(lanzamientos == 'Águila') / 1:num_tiros


plot(Sol_frec,type = 'l',lwd = 2,col = 'tomato',las = 1,ylim = c(0, 1),
     xlab = "Numero de Tiros",ylab = "Frecuencia Relativa")
par(new=TRUE)
plot(Aguil_frec,type = 'l',lwd = 2,col = 'blue',las = 1, ylim = c(0, 1),
     xlab = "Numero de Tiros",ylab = "Frecuencia Relativa")
abline(h = 0.5, col = 'gray50')
```



Convergencia en Distribución

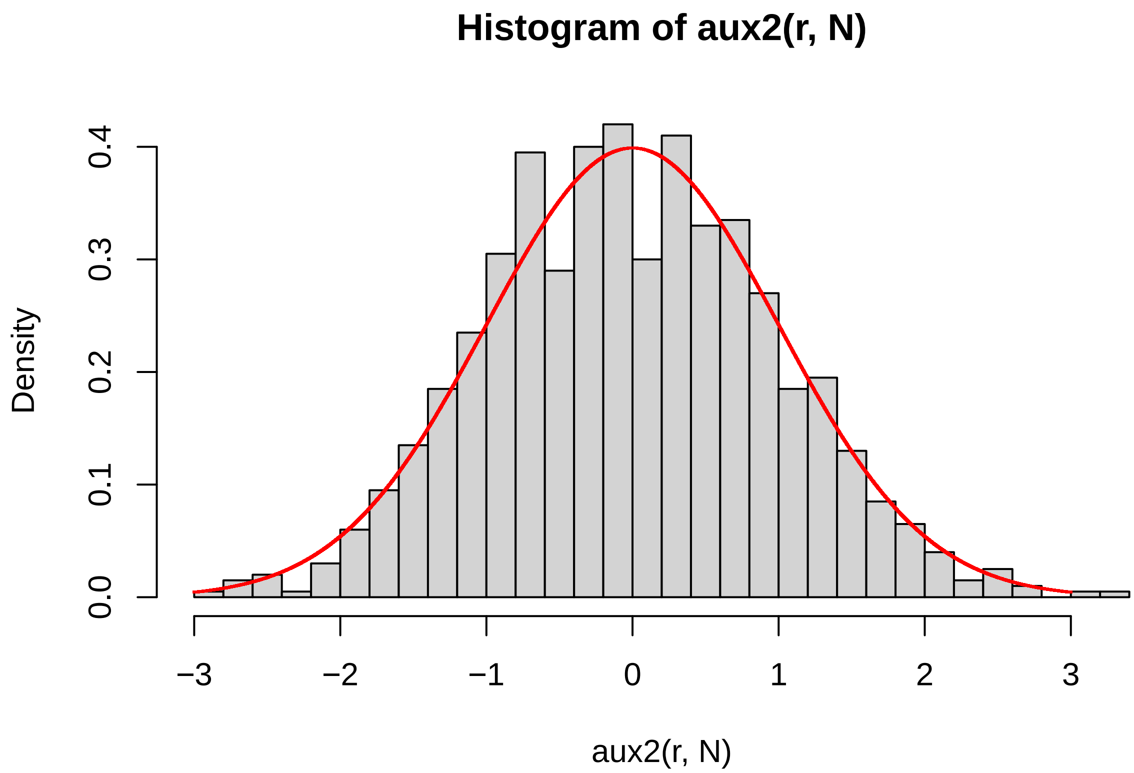
Recordar:

$$lim_{n \to \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$$

Dime qué estoy probando aquí, qué LEY estoy usando y de qué convergencia estamos hablando.

```r
muestra<- function(N,p){
  p<- runif(1,0,1)
  X <- rbinom(1,N,p)
  Y <- N*p # que es esto???
  Z <- N*p*(1-p)
  LFGN <- (sum(X)-Y)/sqrt(Z) #Que estoy aplicando aqui?
  print (LFGN)
}
muestra(10,p)

# Definimos funcion auxiliar para llenar nuestro vector aleatorio
aux2<- function(r,N){
  aux.b2<- rep(0,r)
```

```
  for(i in 1:r){
    aux.b2[i]<- c(muestra(N,p))
  }
  return(t(aux.b2))
}
#Por ultimo, graficamos
r<- 1000; N<- 1000
hist(aux2(r,N), breaks= 30, freq = F)
par(new=TRUE)
points(seq(-3,3,0.001), dnorm(seq(-3,3,0.001),0,1),pch='.', col='red')
```



Ejercicio Moral:

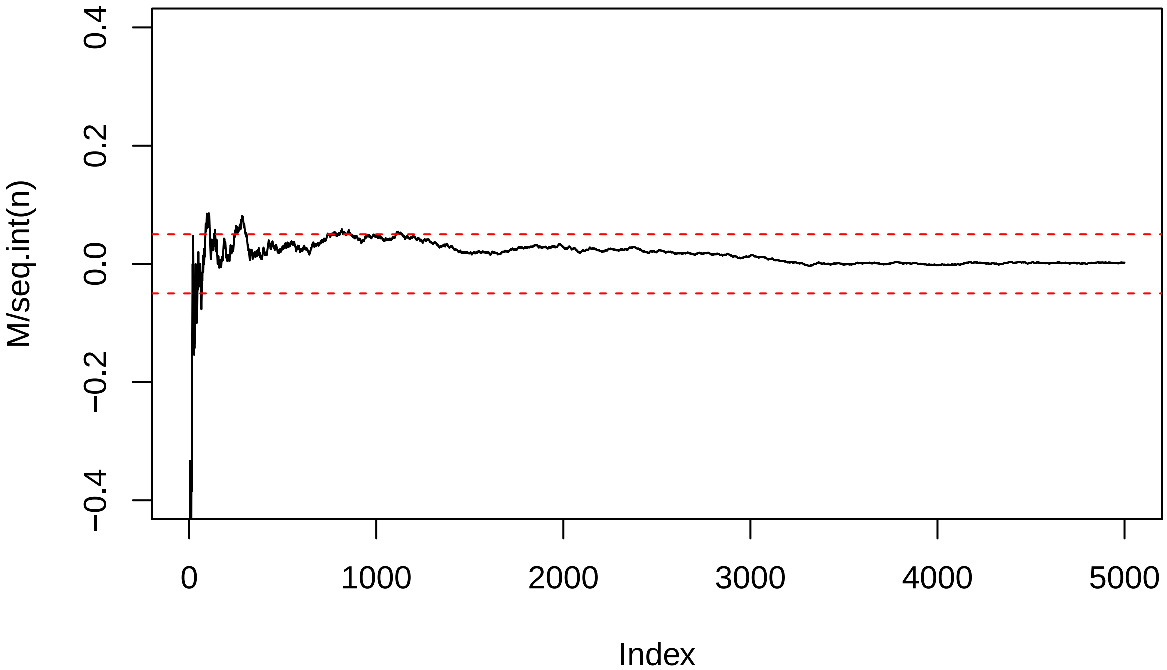
Demuestra que la distribución Binomial converge en distribución a la Poisson. Construye un código para demostrarlo.

Convergencia Casi Segura

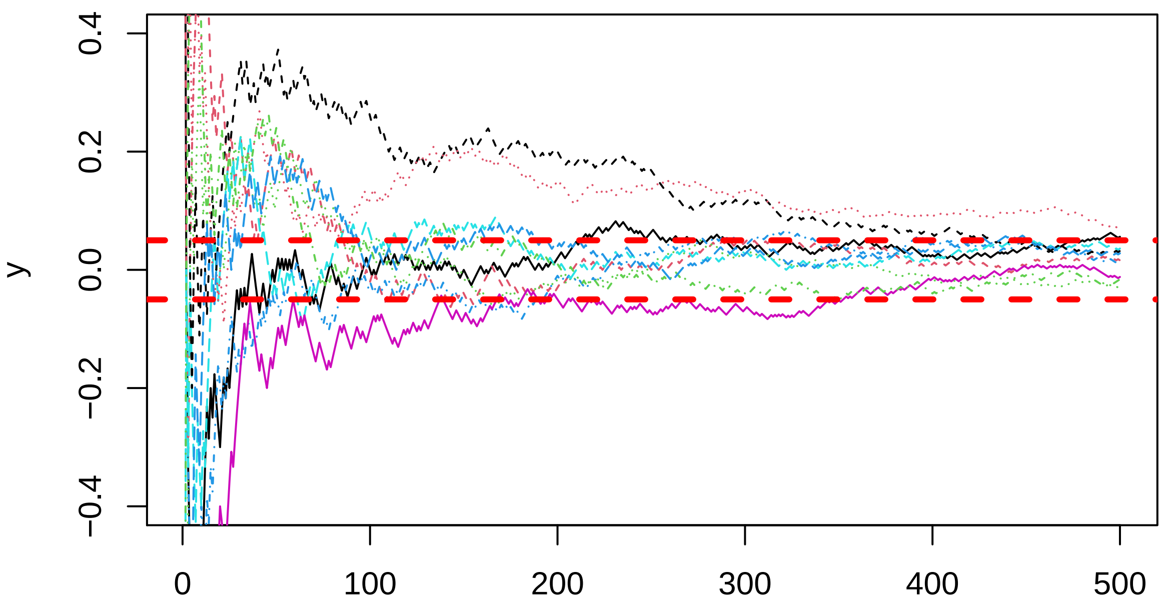
Recordar:

$$\mathbb{P}\{lim_{n\to\infty} X_n = X\} = 1$$

```
n<- 5000; m<- 50; error<- 0.05
M<- cumsum(2*(rbinom(n, size=1, prob = 0.5)- 0.5))

plot(M/seq.int(n), type='l', ylim=c(-.4,.4))
par(new=TRUE)
abline(h=c(-error,error), lty=2, col='red')
```




```r
x<- matrix(2*(rbinom(n, size=1, prob = 0.5)- 0.5), ncol=10)
aux3<- function(C){
  cumsum(C)/seq_along(C)
}
y<- apply(x, 2, aux3)

matplot(y, type='l', ylim=c(-.4,.4))
par(new=TRUE)
abline(h=c(-error,error), lty=2, col='red', lwd=3)
```



La probabilidad de que la suseción de v.a.'s será igual al valor deseado asintóticamente, pero no podemos predecir cuándo va a pasar. Esto es una condición más fuerte, sino la más fuerte, porque nos dice que algo definitivamente va a suceder.