

ITAM
Departamento de Estadística
Inferencia Estadística– Laboratorio #2
Repaso de Cálculo y Técnicas de Integración

1. Demuestre que la f.d.p de una v.a. Y que se distribuye Normal con parámetros μ y σ^2 es, efectivamente una f.d.p. Calcule su media, varianza y f.g.m
2. Sabemos que si $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ con $\alpha, \beta > 0$ su f.d.p se define como:

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \quad \text{si } x \geq 0 \quad (1)$$

Demuestre que cumple las propiedades de f.d.p y calcule su f.g.m.

3. Para cualquier $y \in \mathbb{R}$, definimos y^+ por y si $y \geq 0$ y 0 si $y < 0$. Sea c una constante. Muestre que

$$\mathbb{E}[(Z - c)^+] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{c^2}{2}} - c(1 - \phi(c))$$

donde $Z \sim N(0, 1)$

4. (a) Si $\alpha > 0$, $\Gamma(\alpha)$ está definida por $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x}$, demuestre que $\Gamma(1) = 1$
(b) Si $\alpha > 1$, demuestre que $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$
5. Imagine un círculo de radio r . Ahora, suponga que $r \sim \text{Unif}(0, 1)$, ¿cuáles son la media y varianza del **área** de este círculo?
6. K denota la energía cinética asociada a una masa m que se mueve a una velocidad V donde $K = \frac{mV^2}{2}$ y $f(v) = \frac{v^3 e^{-v/500}}{500^4 \Gamma^4}$ con $v \in [0, \infty)$
(a) Calcule la f.g.m. indicando valores para tiempo t .
(b) Encuentre energía cinética esperada cuando $m = 2$.

7. La duración de llamadas de Ana se distribuye exponencialmente con $\lambda_1 = 1/5$ si viene de Beto y $\lambda_2 = 1/2$ si vienen de Carlos. Sabemos que la probabilidad de que le marque Beto es de .25. Determina la proba. con la que Ana dure más de 3 minutos en su próxima llamada.
8. El tiempo Y necesario para completar una operación clave en la construcción de casas tiene una distribución exponencial con media de 10 horas. La fórmula:

$$C = 100 + 40Y + 3Y^2$$

relaciona el costo C de completar esta operación con el cuadrado del tiempo para completarla. Encuentre la media y la varianza de C .