Repaso Proba Respuestas

16:57 Tue 10 Aug

1. **2 ptos** Una tarea llega a un sistema y es atendida por el procesador C_i con una probabilidad p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. El tiempo aleatorio que toma el procesador en terminar la tarea es distribuido exponencialmente con parámetro λ_i. $\to \lambda_i e^{-\lambda_i t}$

   (a) Muestre que la función de densidad de T el tiempo que toma el sistema para el procesamiento de la tarea está dada por:

$$f_T(t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \lambda_i e^{-\lambda_i t} \qquad 0 \leq t.$$

   (b) Muestre entonces que:

$$\mathbb{E}[T] = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{\lambda_i} \longrightarrow E[E(T|C)]$$

2. **2 ptos** Dos personas ...

Desarrollo condicional → Esta ya es mi conjunta

(a)

$$f_T(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(T=t \mid C=c_i)\, \mathbb{P}(C=c_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathbb{P}(T=t \wedge C=c_i)}{\cancel{\mathbb{P}(C=c_i)}} \cancel{\mathbb{P}(C=c_i)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(T=t \wedge C=c_i) \underset{\text{indep}}{=} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(T=t)\, \underbrace{\mathbb{P}(C=c_i)}_{p_i}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \lambda_i e^{-\lambda_i t} \qquad 0 \leq t$$

(b)

$$E[T] = E[E[T|C]] = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{P}(C=c_i)}_{p_i} \int_0^\infty t \lambda_i e^{-\lambda_i t}\, dt$$

$$= \sum_{i=1}^{n} p_i \left[\lambda_i \int_0^\infty t e^{-\lambda_i t}\, dt\right] = \sum_{i=1}^{n} p_i \left[\cancel{\lambda_i}\, \Gamma(2) \left[\frac{1}{\lambda_i}\right]^2\right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{\lambda_i}$$

$\alpha = 2$, $\beta = \frac{1}{\lambda_i}$

16:57 Tue 10 Aug

Page 2

... solo uno es el ganador. Determina la probabilidad de que Alicia gane la lotería antes de que Bob lo haga.

3. **2 ptos** Demuestra el Teorema de Cambio de variable univariado para el caso estrictamente creciente.

   Sea X una variable aleatoria continua y ϕ una función estrictamente creciente ó estrictamente decreciente y diferenciable. Entonces:

$$f_{\phi(X)}(t) = f_X(\phi^{-1}(t)) \cdot \left|\frac{d}{dt}\phi^{-1}(t)\right|$$

ϕ es est. creciente. y $\phi(X) = T$

$$\Rightarrow F_T(t) = \mathbb{P}(T \leq t) = \mathbb{P}(\phi(X) \leq t) = \mathbb{P}(\phi^{-1}[\phi(X)] \leq \phi^{-1}(t))$$

$$= \mathbb{P}(X \leq \phi^{-1}(t)) = F_X(\phi^{-1}(t)) \longrightarrow \text{derivamos}$$

Por regla de la cadena

$$\frac{\partial F_X(\phi^{-1}(t))}{\partial t} = f_X(\phi^{-1}(t)) \left|\frac{\partial[\phi^{-1}(t)]}{\partial t}\right| = f_{\phi(X)}(t)$$

4. **2 ptos** Demuestra que si $X_1, X_2, \ldots X_n$ son variables aleatorias independientes con varianza finita entonces:

Uso E's y desarrollo

$$\text{Var}(\sum X_i) = \sum \text{Var}\, X_i$$

17:14 Tue 10 Aug 100%

(2) [M 3.171]

y .52.

3.171 Para cierto tipo de suelo, el número de lombrices por pie cúbico tiene una media de 100. Suponiendo una distribución de Poisson de las lombrices, proponga un intervalo que incluirá al menos 5/9 de los valores muestrales de las cantidades de lombrices obtenida de un número grande de muestras de 1 pie cúbico.

$\bar{Y} \sim \text{Poisson}(100) \Rightarrow \mu = 100 \quad V(\bar{Y}) = 100 \Rightarrow \sigma = 10$

Usamos Chebyshev $\mathbb{P}(|\bar{Y}-\mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}, \quad k>0$

Quiero $\mathbb{P}(|\bar{Y}-\mu| < k\sigma) \geq \frac{5}{9} \Rightarrow 1 - \frac{1}{k^2} = \frac{5}{9} \Rightarrow 1 - \frac{5}{9} = \frac{1}{k^2} \Rightarrow \frac{4}{9} = \frac{1}{k^2}$

$\Rightarrow k^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow k = \frac{3}{2}$

Así, $\mu - k\sigma = 100 - \frac{3}{2}(10) = 85, \quad \mu + k\sigma = 100 + \frac{3}{2}(10) = 115$

$\therefore$ El intervalo que va a tener $\frac{5}{9}$ de los valores es $(85, 115)$

17:21 Tue 10 Aug 100%

(1) [6.27] Si X, Y son v.a.i. exponenciales con parámetros λ_1, λ_2 respectivamente. Encuentra la f.d.p. $Z = \frac{X}{Y}$. Calcule $\mathbb{P}(X<Y)$

Recordamos $X \sim \exp(\lambda)$
$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

$\Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \, \mathbb{1}_{\{0<x<\infty,\, 0<y<\infty\}}(x,y)$

$\Rightarrow F_Z(z) = \mathbb{P}(Z<z) = \mathbb{P}\left(\frac{X}{Y} < z\right) = \mathbb{P}(X < zY) = \int_0^\infty \int_0^{zy} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \, dx\, dy$

$= \int_0^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dy \int_0^{zy} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} dx = \int_0^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} (F_X(zy)) dy = \int_0^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} (1 - e^{-\lambda_1 z y}) dy$

$= \int_0^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} - \lambda_2 e^{-y(\lambda_1 z + \lambda_2)} dy = \underbrace{\int_0^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} dy}_{1} - \int_0^\infty \lambda_2 e^{-y(\lambda_1 z + \lambda_2)} dy$

$= 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 z + \lambda_2} \left[e^{-y(\lambda_1 z + \lambda_2)} \right]_0^\infty = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 z + \lambda_2} = \frac{\lambda_1 z}{\lambda_1 z + \lambda_2}$

$\Rightarrow f_Z(z) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\lambda_1 z}{\lambda_1 z + \lambda_2}\right) = \frac{\lambda_1(\cancel{\lambda_1 z} + \lambda_2) - \cancel{\lambda_1 z}(\lambda_1)}{(\lambda_1 z + \lambda_2)^2} = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 z + \lambda_2)^2}$

$\mathbb{P}(X<Y) = \mathbb{P}(Z<1) = F_Z(1) = \frac{\lambda_1(1)}{\lambda_1(1) + \lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$

(2) [6.48] Si $X_1, \ldots, X_5$ son v.a.i.i.d (exponenciales) con parámetro (λ)

17:36 Tue 10 Aug

(b) $\mathbb{P}(\max\{X_1,\dots,X_5\} \le a) = F_{X_{(n)}}(a) = [F_X(a)]^n = (1-e^{-\lambda a})^5$

(3) [TE 6.31] Sea $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \dots \le X_{(n)}$ valores ordenados de n v.a. uniformes $(0,1)$. Prueba para $1<k<n+1$ que $\mathbb{P}(X_{(k)} - X_{(k-1)} > t) = (1-t)^n$ donde $X_{(0)} = 0$, $X_{(n+1)} = t$

Tomamos $k=2$ $\quad 0 < X_{(2)} - X_{(1)} < 1 \sim U(0,1)$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X_{(2)} - X_{(1)} \le t) = t \Rightarrow \mathbb{P}(X_{(2)} - X_{(1)} > t) = 1-t$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X_{(n+1)} - X_{(n)} > t) = 1-t$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X_1 - X_0 > t,\ X_2 - X_1 > t, \dots, X_{n+1} - X_n > t) \rightarrow \perp\!\!\!\perp \text{ de estadísticos de orden}$$

Page 2

$$= \mathbb{P}(X_1 - X_0 > t)\,\mathbb{P}(X_2 - X_1 > t)\cdots\mathbb{P}(X_{n+1} - X_n > t) = (1-t)^n$$

(4) [6.55] Sea $f(x,y) = \frac{1}{x^2y^2}$ $\quad x \ge 1,\ y \ge 1$

Encuentra la fdp conjunta de $U = XY$ y $V = X/Y$

Sea $\varphi(x,y) = \{xy,\ x/y\} \Rightarrow \varphi^{-1}(u,v) = \{\sqrt{uv},\ \sqrt{\frac{u}{v}}\}$

17:39 Tue 10 Aug

$$= [1-t^2]^{-1/2}$$

3. Si X_1, X_2 son como en el ejercicio anterior, encuentre la función generadora de momentos de su producto: X_1

4. Si $U_1, U_2 \sim \text{Unif}(0,1)$ son independientes, encuentre la función de ~~masa~~ densidad de probabilidad de $|U_1 - U_2|$

5. Considere $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de una distribución exponencial recorrida con fun masa de probabilidad dada por:

$Z = U_1 - U_2$

$$\varphi(u_1, u_2) = (\underbrace{u_1 - u_2}_{v}, \underbrace{u_2}_{w}) \Rightarrow \varphi^{-1}(v,w) = (v+w,\ w) \quad J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow f_V(v) = \int_0^1 f_{U_1}(v+w)\, f_{U_2}(w)\, |1|\, dw = \int_0^{1-v} dw = w\Big|_0^{1-v} = 1-v \quad \mathbb{1}_{(0,1)}(v)$$

$f_{U_1}(v+w) \to 1$, $f_{U_2}(w) \to 1$

$$0 < v+w \Rightarrow w < 1-v$$

$$f_{|Z|}(z) = \mathbb{P}(|Z| \le z) = \mathbb{P}(-z \le Z \le z) = F_Z(z) - F_Z(-z)$$

$$\Rightarrow f_{|Z|}(z) = 1-z+1-z = 2(1-z) \quad \mathbb{1}_{(0,1)}(z)$$

5. Considere $X_1, \dots, X_n$ una muestra aleatoria de tamaño n de una distribución exponencial recorrida con función de densidad masa de probabilidad dada por:

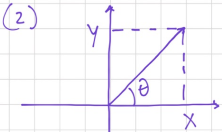
Page 3

6

$$f(x) = \frac{1}{\theta} e^{-(x-A)/\theta} \mathbb{I}_{(A,\infty)}(x)$$

$$= \text{Gamma}\left(\frac{n-1}{2}, \frac{n-1}{2\sigma^2}\right)$$

(2)



¿Si $\theta \sim U(-\pi/2, \pi/2) \Rightarrow \bar{Y} \sim ?$

$$f_\theta(m) = \frac{1}{\pi/2 - (-\pi/2)} = \frac{1}{\pi}$$

$$F_\theta(m) = \frac{m + \pi/2}{\pi}$$

Quiero saber la fdp de $\bar{Y} \mid \bar{X} = x$ ∴ x ya está observada

Sé que

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow y = x\tan\theta$$

$$\Rightarrow F_{\bar{Y}}(y) = P(\bar{Y} \le y) = P(x\tan\theta \le y) = P(\theta \le \tan^{-1}(y/x))$$
$$= F_\theta(\tan^{-1}(y/x))$$

Sé que

$$\frac{d}{du}\tan^{-1}(u) = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$\Rightarrow f_{\bar{Y}}(y) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right) \cancelto{1/\pi}{f_\theta(\tan^{-1}(y/x))}$$

$$= \frac{1}{\pi x}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\right] \sim \text{Cauchy}(0, x)$$

Recordar Si $X \sim \text{Cauchy}(\alpha, \beta)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta\pi}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)^2}\right] \mathbb{1}_{x \in \mathbb{R}}(x)$$

Recordamos

(1) Si $\bar{Y}$ es una v.a. $E(\bar{Y}) \; \exists \iff E(|\bar{Y}|) < \infty$

~ Cauchy

MARKOV'S INEQUALITY

If X is r.v. and $g(\cdot)$ is a function s.t $g(x) \ge 0 \; \forall u$

$$\Rightarrow \forall k > 0 \quad P(g(X) \ge k) \le \frac{E(g(X))}{k}$$

Dem

rhs

$$E(g(X)) = \int g(x) f_X(x)\,dx = \int_{g(x) \ge k} g(x) f_X(x)\,dx + \overbrace{\int_{g(x) < k} g(x) f(x)\,dx}^{>0 \; \because \; g(x) \ge 0 \,\wedge\, f(x) \ge 0}$$

$$\Rightarrow E(g(x)) \ge \int_{g(x) \ge k} g(x) f_X(x)\,dx \ge \int_{g(x) \ge k} k\, f_X(x)\,dx = k\, P(g(x) \ge k)$$

este es el mínimo de $g(\cdot)$

$$\therefore \; P(g(x) \ge k) \le \frac{E(g(x))}{k}$$

Chebyshev's Inequality

$$\longrightarrow P(|X - \mu| \ge k\sigma) \le \frac{1}{k^2}$$

$$P(|X - \mu|^2 \ge t^2) \le \frac{1}{\ldots}$$

$\therefore \; \mathbb{P}(g(X) \geq k) \leq \frac{E(g(X))}{k}$

Chebyshev's Inequality $\longrightarrow \mathbb{P}(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right|^2 \geq t^2\right) \leq \frac{1}{t^2}$$

Dem. Por Markov

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right|^2 \geq t^2\right) \leq \frac{E\left(\left|\frac{X-\mu}{\sigma}\right|^2\right)}{t^2} = \frac{\frac{E(|X-\mu|^2)}{\sigma^2}}{t^2} = \frac{\frac{\sigma^2}{\sigma^2}}{t^2} = \frac{1}{t^2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(|X-\mu| < t\sigma) \geq 1 - \frac{1}{t^2}$$

Ex.

(1) $X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} f(\cdot)$

$\mu = E(X_i)$; $\sigma^2 = V(X_i)$, Show that $E(\bar{X}) = \mu$, $V(\bar{X}) = \sigma^2/n$, $E(S^2) = \sigma^2$

We remember that $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

$$\Rightarrow E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum E(X_i) = \frac{n\mu}{n} = \mu$$

$$\Rightarrow V(\bar{X}) = V\left(\frac{1}{n}\sum X_i\right) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{i.i.d} \\ Cov(X_i,X_j)=0}}{=} \frac{1}{n^2}\sum V(X_i) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\Rightarrow E(S^2) = E\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\right) = \frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2)\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2\bar{X}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}X_i} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\bar{X}^2}_{n\bar{X}^2}\right] = \frac{1}{n-1}E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - 2n\bar{X}^2 + n\bar{X}^2\right)$$

$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \Rightarrow n\bar{X} = \sum_{i=1}^{n}X_i$

$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$\Rightarrow E(X^2) = V(X) + [E(X)]^2$

$$= \frac{1}{n-1}E\left[\sum_{i=1}^{n}X_i^2 - n\bar{X}^2\right] = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2) - nE(\bar{X}^2)\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\Big[\underbrace{\cancel{n}(\sigma^2 + \cancel{\mu^2}) - \cancel{n}\left(\frac{\sigma^2}{n} + \cancel{\mu^2}\right)}_{n\sigma^2 - \sigma^2 = \sigma^2(n-1)}\Big]$$

$$= \frac{1}{n-1}(n-1)\sigma^2 = \sigma^2$$