ITAM
Departamento de Estadística

Inferencia Estadística– Laboratorio #12
Pruebas de Hipótesis 2

1. El cálculo de β puede ser extremadamente complicado para algunas pruebas estadísticas. Por lo que podemos usar la prueba Z para demostrar el cálculo de β como la lógica empleada para seleccionar el tamaño muestral de una prueba. Para la prueba $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_a : \theta > \theta_0$, podemos calcular probabilidades de error tipo II. Alternativamente, se propone por ejemplo, $\theta = \theta_a$, entonces:

   (a) Defina la región de rechazo en términos de $\hat{\theta}$ pra un valor crítico k.

   (b) Calcule α y β

   (c) Intuya la distribución de sus resultados.

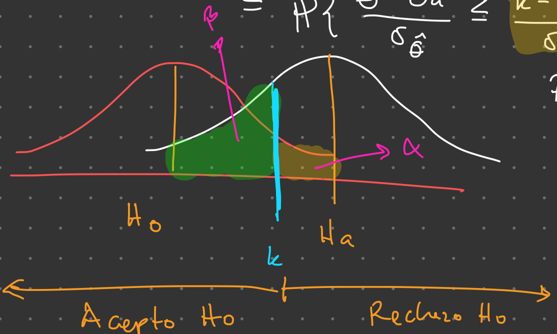
Estadístico de Prueba

(a) Si $\theta = \theta_a$ i.e. H_a es verdadera se tiene que $R = \{\hat{\theta} \mid \hat{\theta} > k\}$

(b) $\beta = \mathbb{P}\{\text{error tipo II}\} = \mathbb{P}_{H_a}\{A_{H_0}\} = \mathbb{P}\{\hat{\theta} \notin R \mid H_a\} = \mathbb{P}\{\hat{\theta} \leq k \mid \theta = \theta_a\}$

Si normalizamos $\Rightarrow \mathbb{P}\left\{\dfrac{\hat{\theta}-\theta}{\sigma_{\hat{\theta}}} \leq \dfrac{k-\theta}{\sigma_{\hat{\theta}}} \,\middle|\, \theta = \theta_a\right\}$

$$= \mathbb{P}\left\{\frac{\hat{\theta}-\theta_a}{\sigma_{\hat{\theta}}} \leq \frac{k-\theta_a}{\sigma_{\hat{\theta}}}\right\} = \mathbb{P}\{Z \leq -Z_\beta\}$$



Por otro lado,

$$\alpha = \mathbb{P}\{\text{error tipo I}\} = \mathbb{P}_{H_0}\{R_{H_0}\}$$
$$= \mathbb{P}\{\hat{\theta} \in R \mid \theta = \theta_0\}$$
$$= \mathbb{P}\{\hat{\theta} > k \mid \theta = \theta_0\}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left\{\frac{\hat{\theta}-\theta_0}{\sigma_{\hat{\theta}}} > \frac{k-\theta_0}{\sigma_{\hat{\theta}}}\right\} = \mathbb{P}\{Z > Z_\alpha\}$$

(c) Es fácil ver que $\dfrac{\hat{\theta}-\theta_i}{\sigma_{\hat{\theta}}} \sim N(0,1) \quad \forall i \in \{0, a\}$

2. Usando los resultados que obtuvo en el ejercicio anterior, suponga que Rod desea detectar una diferencia igual a una persona vacunada en el número medio de personas vacunadas por semana en su investigación de vacunación contra COVID-19. Esto es, desea probar $H_0 : \mu = 15$ vs. $H_a : \mu = 16$. Suponga que tenemos n=36, la media muestral es 17 y $S^2 = 9$. Para un nivel de pueba $\alpha = 0{,}05$. Encuentre:

(a) β

(b) Tamaño muestral para un prueba de cola superior de nivel α

Paso 1: Encontrar región de rechazo en específico el valor crítico k.

$$Z_\alpha = Z_{0.05} = 1.645 \rightarrow \overset{\text{En R}}{\text{qnorm}(.05, 0, 1, F)}$$

Por prueba Z, aceptamos Ho syss.

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > 1.645 = Z_\alpha$$

$$\iff \bar{X} > \mu_0 + Z_\alpha\left(\sigma/\sqrt{n}\right) \iff \bar{X} > 15 + 1.645\left(\frac{3}{\sqrt{36}}\right) \approx \overbrace{15.8225}^{k}$$

(a) $$\beta = \mathbb{P}\{\bar{X} \le k \mid \mu = \mu_a\} = \mathbb{P}\left\{\frac{\bar{X} - 16}{3/\sqrt{36}} \le \frac{15.8225 - 16}{3/\sqrt{36}}\right\}$$

$$= \mathbb{P}\{Z \le -.36\} \approx \underbrace{.36}_{\text{pnorm}(-.36, 0, 1, T)}$$

(b) $$\alpha = \mathbb{P}\left\{\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} > \frac{k - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right\} = \mathbb{P}\{Z > Z_\alpha\} \rightarrow (1)$$

$$\beta = \mathbb{P}\left\{\frac{\bar{X} - \mu_a}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{k - \mu_a}{\sigma/\sqrt{n}}\right\} = \mathbb{P}\{Z \le -Z_\beta\} \rightarrow (2)$$

De (1), (2) tenemos que:

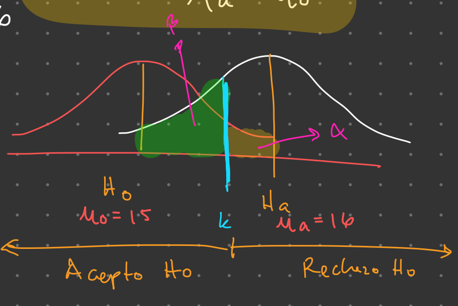
$$\frac{k - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = Z_\alpha \quad ; \quad \frac{k - \mu_a}{\sigma/\sqrt{n}} = -Z_\beta$$

$$\Rightarrow k = \mu_0 + Z_\alpha\left(\sigma/\sqrt{n}\right) = \mu_a - Z_\beta\left(\sigma/\sqrt{n}\right)$$

$$\iff (Z_\alpha + Z_\beta)\left(\sigma/\sqrt{n}\right) = \mu_a - \mu_0 \iff \sqrt{n} = \frac{(Z_\alpha + Z_\beta)\sigma}{\mu_a - \mu_0}$$

$$Z_\alpha = Z_{.05} = 1.645 \;, \quad Z_\beta = Z_{.36} \approx .36$$

$$\Rightarrow n = \frac{(1.645 + .36)^2\, 9}{(\underbrace{16-15}_{1})^2} \approx 36.18$$



3. Una muestra aleatoria de 37 estudiantes de segundo grado que practicaban deportes obtuvieron califi- caciones de habilidad manual con una media de 32.19 y una desviación estándar de 4.34. Una muestra independiente de 37 estudiantes del mismo grado que no los practicaban tuvo calificaciones de destreza manual con media de 31.68 y desviación estándar de 4.56.

   (a) Aplique una prueba para ver si existe suficiente evidencia que indique que los estudiantes de segundo grado que practican deportes tienen una calificación más alta en destreza manual. Use $\alpha = ,05$.

   (b) Para la región de rechazo empleada en el inciso a, calcule β cuando $\mu_1 - \mu_2 = 3$.

$n_1 = n_2 = 37$

$\bar{X}_1 = 32.19$, $\sigma_1 = 4.34$

$\bar{X}_2 = 31.68$, $\sigma_2 = 4.56$

(a) $\mu_1 \equiv$ media en destreza manual para deportistas

$\mu_2 \equiv$ " " " " " no deportistas

$H_0: \mu_1 = \mu_2$ vs. $H_1: \mu_1 > \mu_2$

Recordar distribución en diferencia de medias $\dfrac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n}} + \sqrt{\frac{s_2^2}{n}}} \sim N(0,1)$

$z_\alpha = z_{0.05} = 1.645 \rightarrow$

$$\therefore\ Z = \frac{32.19 - 31.68}{\sqrt{\frac{4.34^2}{37}} + \sqrt{\frac{4.56^2}{37}}} \approx .4927 < 1.645 = z_\alpha \ \therefore \text{ Aceptar } H_0$$

($\because$ estamos en el caso de test de cola superior $R = \{ Z > z_\alpha \}$)

i.e. $\nexists$ evidencia suf. para decir que los deportistas tienen más destreza manual.

(b) Ya sabemos que $R = \{ Z > z_\alpha \}$

$$\underbrace{\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n}} + \sqrt{\frac{s_2^2}{n}}}}_{\to\ T(X)} > 1.645 = z_\alpha \iff \bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 1.645 \left(\overbrace{\sqrt{\frac{s_1^2}{n}} + \sqrt{\frac{s_2^2}{n}}}^{\sqrt{\frac{4.34^2}{37}} + \sqrt{\frac{4.56^2}{37}}} \right) \approx \overbrace{1.702}^{k}$$

$$\Rightarrow \beta = \mathbb{P}\{ A_{H_0} \mid H_1 \} = \mathbb{P}\{ A_{H_0} \mid \mu_1 - \mu_2 = 3 \} = \mathbb{P}\{ T(X) \leq k \mid \mu_1 - \mu_2 = 3 \}$$

$$= \mathbb{P}\left\{ \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n}} + \sqrt{\frac{s_2^2}{n}}} \leq \frac{k - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n}} + \sqrt{\frac{s_2^2}{n}}} \right\} = \mathbb{P}\left\{ Z \leq \frac{1.702 - 3}{\sqrt{\frac{4.34^2}{37}} + \sqrt{\frac{4.56^2}{37}}} \right\}$$

$$= \mathbb{P}\{ Z \leq -1.25 \} = 0.1056$$

4. Una prubea de hipótesis de nivel α y para muestras grandes en el caso de $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta > \theta_0$ rechaza H_0 si

$$\frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\sigma_{\hat{\theta}}} > Z_\alpha$$

Demuestre que esto es equivalente a rechazar H_0 si θ_0 es menor que el límite inferior del IC al $(1 - \alpha)\,\%$ de una muestra grande para θ.

$$R = \left\{ \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\sigma_{\hat{\theta}}} > Z_\alpha \right\} \equiv \left\{ \frac{\theta_0 - \hat{\theta}}{\sigma_{\hat{\theta}}} < -Z_\alpha \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\theta_0 - \hat{\theta}}{\sigma_{\hat{\theta}}} < -Z_\alpha \iff \theta_0 < \underbrace{\hat{\theta} - Z_\alpha \sigma_{\hat{\theta}}}_{LB}$$

Como $\hat{\theta} - Z_\alpha \sigma_{\hat{\theta}}$ es el L.I para un IC al $(1-\alpha)\,\%$ para θ

$\therefore$ Rechazamos H_0 si θ_0 es menor a este L.I. $\blacksquare$

5. Una prubea de hipótesis de nivel α y para muestras grandes en el caso de $H_0 : \theta = \theta_0$ vs. $H_1 : \theta < \theta_0$ rechaza H_0 si

$$\frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\sigma_{\hat{\theta}}} < -Z_\alpha$$

Demuestre que esto es equivalente a rechazar H_0 si θ_0 es ~~menor~~ mayor que el límite superior del IC al $(1 - \alpha)\,\%$ de una muestra grande para θ.

$$R = \left\{ \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\sigma_{\hat{\theta}}} < -Z_\alpha \right\} \equiv \left\{ \frac{\theta_0 - \hat{\theta}}{\sigma_{\hat{\theta}}} > Z_\alpha \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{\theta_0 - \hat{\theta}}{\sigma_{\hat{\theta}}} > Z_\alpha \iff \theta_0 > \underbrace{\hat{\theta} + Z_\alpha \sigma_{\hat{\theta}}}_{UB}$$

$\therefore$ Rechazamos H_0 si θ_0 es mayor al LS. del IC al $(1-\alpha)\,\%$ para θ.

6. **Definición 1** *Si $T(x)$ es un estadísico de prueba, el* ***valor p****, o nivel de significancia alcanzado, es el nivel más pequeño de significancia α para el cual la información obervada indica que la hipótesis nula debe ser rechazada.*

Los altos porcentajes de ocupación en vuelos regulares de líneas aéreas son esenciales para tener rentabi- lidad. Suponga que un vuelo regular debe promediar al menos 60 % de ocupación para ser rentable y que un examen de los porcentajes de ocupación para 120 vuelos de las 10:00 de la mañana de Atlanta a Dallas mostraron un porcentaje medio de ocupación por vuelo de 58 % y desviación estándar de 11 %. Verifique si existe suficiente evidencia para apoyar la afirmación de que el vuelo no es rentable. Encuentre el valor p relacionado con la prueba. ¿Qué concluiría si desea poner en práctica la prueba en el nivel $\alpha = .10$?

Aquí queremos probar $H_0: \mu \geq 60$ vs. $H_1: \mu_1 < 60$
dado $\bar{x} = 58$ $\sigma = 11$, $n = 120$, $\alpha = .1$

Proponemos estadístico de prueba $T(x) = z = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$

$$\Rightarrow z = \frac{58 - 60}{11/\sqrt{120}} \approx -1.992$$

Por definición valor-p $= \underbrace{\mathbb{P}\{z \leq -1.992\}}_{\text{pnorm}(-1.992,0,1,T)} \approx 0.0231 < .1 = \alpha$

$\therefore$ Rechazamos H_0 i.e. $\nexists$ evidencia suf. para sostener que el vuelo <u>no</u> es rentable.

7. A dos grupos de niños de escuela primaria se les enseñó a leer con el uso de métodos diferentes, 50 por cada método. Al término del periodo de instrucción, un examen de lectura arrojó los siguientes resultados $\bar{y}_1 = 74, \bar{y}_2 = 71, s_1 = 9, s_2 = 10$.

(a) ¿Cuál es el nivel de significancia alcanzado si se desea verificar si la evidencia indica que hay una diferencia entre las dos medias poblacionales?

(b) ¿Qué se concluiría si desea un valor de α de .05?

$\rightsquigarrow n_1, n_2 = 50$

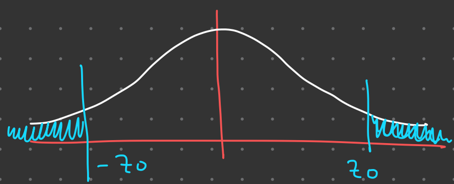
(a) Queremos probar $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ vs. $H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Sea $DM = \mu_1 - \mu_2$ entonces usamos $T(Y_1, Y_2) = \dfrac{(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) - DM}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}} + \sqrt{\frac{s_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$

Test Cola $\begin{cases} \text{Superior: } \mathbb{P}\{Z \geq Z_\alpha\} \\ \text{Inferior: } \mathbb{P}\{Z \leq -Z_\alpha\} \end{cases}$

En $DM_0 = \mu_1 - \mu_2 = 0$

$\therefore \; Z_0 = \dfrac{(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) - \cancel{DM_0}^{\,0}}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}} + \sqrt{\frac{s_2^2}{n_2}}} = \dfrac{74 - 71}{\frac{9}{\sqrt{50}} + \frac{10}{\sqrt{50}}} \approx 1.17$



Para calcular valor-p voy a tomar

$\mathbb{P}\{Z \geq z_0\} + \underbrace{\mathbb{P}\{Z \leq -z_0\}}_{1 - \mathbb{P}\{Z \leq z_0\}}$

$\therefore$ valor-p $= \mathbb{P}\{Z \geq z_0\} + \underbrace{\mathbb{P}\{Z \leq -z_0\}}_{= \mathbb{P}\{Z \geq z_0\}} = 2\,\mathbb{P}\{Z \geq z_0\}$

$= 2\,[1 - \mathbb{P}\{Z \leq z_0\}]$ $\phi(z_0)$

$= 2\,[1 - .879]$ pnorm[1.17, 0, 1, T]

$\approx .242$

(b) $\alpha = .05$

Tenemos que el valor-p $= .242 > .05 = \alpha$ $\therefore$ Aceptamos H_0

$\therefore$ Podemos asegurar que $\nexists$ DM > 0

8. ¿Piensa usted que un porcentaje excepcionalmente alto de los ejecutivos de empresas grandes son diestros? Aun cuando 85 % del público en general es diestro, un estudio a 300 principales ejecutivos de grandes empresas demostró que 96 % eran diestros.

   (a) ¿La diferencia en porcentajes es estadísticamente significativa? Pruebe usando $\alpha = .01$.

   (b) Encuentre el valor p para la prueba y explique lo que significa.

Datos: $n = 300$, $\hat{p} = .96 \equiv$ proba CEO's diestros

(a) Queremos probar $H_0: p = .85$ vs. $H_1: p > .85$

Nuestra $R = \{ \underbrace{|Z| > Z_\alpha}_{\text{2 tail Test}} \}$ con $Z_\alpha = Z_{.01} = 2.33$

qnorm(.01, 0, 1, F)

Proponemos $Z = \dfrac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\dfrac{p_0(1-p_0)}{n}}} = \dfrac{.96 - .85}{\sqrt{\dfrac{.85(.15)}{300}}} \approx 5.336 > 2.33 = Z_\alpha$

$\therefore$ Rechazamos H_0 al nivel α y concluimos que la diferencia sí es significativa.

(b) Probar con el resultado de cola superior

i.e. $p\text{-value} = \mathbb{P}\{Z > z_0\} = 1 - \mathbb{P}\{Z \leq z_0\}$

$= 1 - \mathbb{P}\{Z \leq 5.336\}$ → 1

$\approx 1 - 1 \approx 0 < .01 = \alpha$

$\therefore$ Rechazamos H_0