Instituto Tecnológico Autónomo de México

Repaso Probabilidad

Luis Gerardo Martínez Valdés

Mail: luis.martinez@neverlandconsultants.capital

Horario Lab: Viernes 8.00 - 10.00

Horario Dudas: Lu y Mie 19.00 - 20.30 ó por cita

Otoño 2021

1. Una tarea llega a un sistema y es atendida por el procesador C_i con una probabilidad p_i, $i = 1, .., n$. El tiempo aleatorio que toma el procesador en terminar la tarea es distribuido exponencialmente con parámetro λ_i $T \rightsquigarrow$ Continuo

   (a) Muestre que la función de densidad de $T \equiv$ el tiempo que toma el sistema para el procesamiento de la tarea está dada por:

$$f_T(t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}, \quad 0 \le t$$

   (b) Muestre entonces que:

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{\lambda_i}$$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

(a) $f_T(t) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\{T=t \mid C=c_i\} \, \mathbb{P}\{C=c_i\} = \sum_{1}^{n} \frac{\mathbb{P}\{T=t \wedge C=c_i\}}{\cancel{\mathbb{P}\{C=c_i\}}} \cancel{\mathbb{P}\{C=c_i\}}$

y

Es una proba condicional p.q quiero saber el tiempo (T) que se tarda el procesador, una vez que fue atendido por $\underline{C}$

$$= \sum_{1}^{n} \mathbb{P}\{T=t \wedge C=c_i\}$$

Por indep. $\rightarrow$ $= \sum_{1}^{n} \mathbb{P}\{T=t\} \, \mathbb{P}\{C=c_i\}$ $\rightarrow p_i$

$$= \sum_{1}^{n} p_i \, \mathbb{P}\{T=t\}$$

$\rightarrow$ f.d.p de $T \sim Exp(\lambda_i)$

$$= \sum_{1}^{n} p_i \lambda_i e^{-\lambda_i t} \; ; \; 0 \le t$$

Teorema de Torre (Law of Total Expectation)

$$E[X] = E[E[X|Y]]$$

(b)

$$E[T] = E[\underbrace{E[T|C]}] = \boxed{\sum_{1}^{n} \mathbb{P}\{C=c_i\}} \boxed{\int_0^{\infty} t \lambda_i e^{-\lambda_i t} \, dt}$$

Recordar $E[X] = \begin{cases} \sum_{x \in S} x \, p(x) & \text{discreta} \\ \int_{x \in S} x \, f(x) \, dx & \text{continua} \end{cases}$

Recordar Distribución Gamma (α, β)

$$\equiv \frac{\beta^{\alpha} x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha) e^{\beta x}}$$

$\rightarrow$ $= \sum_{1}^{n} p_i \left[\lambda_i \int_0^{\infty} t e^{-\lambda_i t} \, dt \right]$

$\alpha = 2$

$\beta = 1/\lambda_i$

$$= \sum_{1}^{n} p_i \left[\cancel{\lambda_i} \, \cancel{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{\lambda_i} \right)^{\cancel{2}} \right]$$

Porque $\Gamma(2) = (2-1)! = 1$

$$= \sum_{1}^{n} \frac{p_i}{\lambda_i} \checkmark$$

$$Exp(\lambda) \equiv Gamma(1, \lambda)$$

2. Demuestra el Teorema de Cambio de variable univariado para el caso estrictamente creciente i.e. Sea X una v.a. continua y ϕ una función estrictamente creciente. Entonces:

$$f_{\phi(X)}(t) = f_X(\phi^{-1}(t))\left|\frac{d}{dt}\phi^{-1}(t)\right|$$

ϕ es est. creciente y decimos que $\phi(X) = T \leftarrow$ T es una v.a. p.q. es imagen de una v.a.

$$\Rightarrow F_T(t) = \mathbb{P}\{T \leq t\} = \mathbb{P}\{\phi(X) \leq t\}$$
$$= \mathbb{P}\{\cancel{\phi^{-1}}[\cancel{\phi}(X)] \leq \phi^{-1}(t)\}$$
$$= \mathbb{P}\{X \leq \phi^{-1}(t)\} = F_X[\phi^{-1}(t)]$$

Derivamos (Por Regla de la Cadena)

$$\frac{d F_X[\phi^{-1}(t)]}{dt} = f_X[\phi^{-1}(t)]\left|\frac{d\,\phi^{-1}(t)}{dt}\right|$$
$$= f_{\phi(X)}(t)$$

Con valor absoluto demuestro ambos casos
{ est. creciente
{ est. decreciente.

Eg. $X \sim U(0,1)$, $Z = \underbrace{1-X}_{\phi(X)}$ Encuentra $Z \sim ?$

$$F_T(t) = \mathbb{P}\{Z \leq z\} = \mathbb{P}\{1 - X \leq z\} = \mathbb{P}\{-X \leq z-1\}$$
$$= 1 - \mathbb{P}\{X \leq z-1\}$$
$$= 1 - F_X(z-1)$$

3. Para cierto tipo de suelo, el número de lombrices por pie cúbico tiene una media de 100. Suponiendo una distribución de Poisson de las lombrices, proponga un intervalo que incluirá al menos $\frac{5}{9}$ de los valores muestrales de las cantidades de lobrices ibtenidas de un número grande de muestras de 1 pie cúbico.

Sea $Y \equiv$ # de Lombrices x pie^3 $\sim$ Poisson$(\lambda = 100)$ yo sé que

$E(Y) = \lambda$

$V(Y) = \lambda$

Podemos usar la desigualdad de Tchebysheff

$$\mathbb{P}\{|Y - \mu| < k\sigma\} \geq 1 - \frac{1}{k^2}, \quad k > 0 \longrightarrow (*)$$

$= \mu = \lambda$

Se que $E(Y) = 100$, $V(Y) = 100 \Rightarrow \sigma = 10$

$$\mathbb{P}\{|Y - 100| < k(10)\} \geq \frac{5}{9} \Rightarrow \underbrace{1 - \frac{1}{k^2}}_{\text{rhs de } (*)} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow 1 - \frac{5}{9} = \frac{1}{k^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{9} = \frac{1}{k^2} \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$$

Así,

$\Longrightarrow [\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]$

$$\mu - k\sigma = 100 - \frac{3}{2}(10) = 85$$

$$\mu + k\sigma = 100 + \frac{3}{2}(10) = 115$$

$\therefore$ El intervalo que tendrá al menos $\frac{5}{9}$ de los valores es $(85, 115)$

4. Si $X, Y \overset{v.a.i.i.d}{\sim}$ *Exponenciales* con parámetros λ_1, λ_2 respectivamente. Encuentra la f.d.p $Z = \frac{X}{Y}$ y calcule $\mathbb{P}(X < Y)$

Recordar
$X \sim exp(\lambda)$
$\Rightarrow f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$
$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$

(i) $f_{X,Y}(x,y) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \mathbb{1}_{\{0<x<\infty,\, 0<y<\infty\}}(x,y)$

Así,

$$F_Z(z) = \mathbb{P}(Z \le z) = \mathbb{P}\left\{\frac{X}{Y} \le z\right\} = \mathbb{P}\{X \le zY\} = \int_0^\infty \int_0^{zy} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}\, dx\, dy$$

$$\underset{\text{indep.}}{=} \int_0^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}\, dy \underbrace{\int_0^{zy} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\, dx}_{F_X(zy)} = \int_0^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 z y} [F_X(zy)]\, dy$$

$$= \int_0^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 y}(1 - e^{-\lambda z y})\, dy = \int_0^\infty \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} - \lambda_2 e^{-y(\lambda_1 z + \lambda_2)}\, dy$$

$= 1 \to$ Piensen por qué

¿Qué tengo que hacer aquí?
Hint: Quiero simplificarme la integral

$$\to \quad = 1 - \int_0^\infty \lambda_2 e^{-y(\lambda_1 z + \lambda_2)}\, dy$$

$$= 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 z + \lambda_2}\left[e^{-y(\lambda_1 z + \lambda_2)}\right]\Big|_0^\infty$$

$$= 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 z + \lambda_2} = \boxed{\frac{\lambda_1 z}{\lambda_1 z + \lambda_2}} \to (*)$$

Ahora, tengo que derivar sobre z

$$f_Z(z) = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\lambda_1 z}{\lambda_1 z + \lambda_2}\right] = \frac{\lambda_1(\cancel{\lambda_1 z} + \lambda_2) - \cancel{\lambda_1 z (\lambda_1)}}{(\lambda_1 z + \lambda_2)^2} = \boxed{\frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_1 z + \lambda_2)^2}} \to (**)$$

(ii) $\mathbb{P}\{X < Y\} = \mathbb{P}\{Z < 1\} = F_Z(1) \leftarrow Z$ es continua

Usa $(*)$
(sustituyes $z = 1$)

$$\to \quad = \frac{\lambda_1(1)}{\lambda_1(1) + \lambda_2} = \boxed{\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}}$$

5. Sea $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq ... \leq X_{(n)}$ valores ordenados de n v.a.'s $Uniformes(0,1)$.
Prueba para $1 < k < n+1$ que $\mathbb{P}(X_{(k)} - X_{(k-1)} > t) = (1-t)^n$ donde $X_{(0)} = 0,\ X_{(n+1)} = t$

Recordar

$X \sim U(a,b)$

$F_X(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$

$f_X(x) = \dfrac{1}{b-a}$

$*$: $X_{(i)} \perp\!\!\!\perp X_{(j)}$

Tomemos $k=2$ con $X_0 = 0 < \underbrace{X_{(2)} - X_{(1)}}_{\text{Uniforme }(0,1)} < 1$

$\Rightarrow \mathbb{P}\{\underbrace{X_{(2)} - X_{(1)}}_{\sim U(0,1)} \leq t\} = t$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}\{X_{(2)} - X_{(1)} > t\} = 1 - t$

@ que se cuple $\forall\ n$ p.d] que se cuple para $n+1$

Significa
Suponemos

$\Rightarrow \mathbb{P}\{X_{(n+1)} - X_{(n)} > t\} = 1-t$

Luego,

$\mathbb{P}\{X_{(1)} - X_{(0)} > t,\ X_{(2)} - X_{(1)} > t, \ldots, X_{(n+1)} - X_{(n)} > t\}$

Por indep $\rightarrow = \mathbb{P}\{X_{(1)} - X_{(0)} > t\} \cdots \mathbb{P}\{X_{(n+1)} - X_{(n)} > t\}$

$= (1-t) \cdots (1-t) = (1-t)^n$

6. Si $U_1, U_2 \sim Unif(0,1)$ son independientes, encuentre la f.d.p de $|U_1 - U_2|$

Aplico el Teo. Cambio de Variable multivariado

$Z \equiv U_1 - U_2$

$$\varphi(u_1, u_2) = (\underbrace{u_1 - u_2}_{v}, \underbrace{u_2}_{w}) \Rightarrow \varphi^{-1}(v,w) = (\overbrace{v+w}^{u_1}, \overbrace{w}^{u_2})$$

NOTA: Subíndice es entrada del vector de

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1^{-1}}{\partial v} & \dfrac{\partial \varphi_1^{-1}}{\partial w} \\ \dfrac{\partial \varphi_2^{-1}}{\partial v} & \dfrac{\partial \varphi_2^{-1}}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\Rightarrow f_V(v) = \int_0^1 \underbrace{f_{U_1}(v,w)\, f_{U_2}(v,w)}_{\text{Por indep.}} \underbrace{\cancelto{1}{|1|}}_{|J|}\, dw$$

V: $U_1 - U_2$

$$= \int_0^1 f_{U_1}(\cancelto{1}{v+w})\, f_{U_2}(\cancelto{1}{w})\, |1|\, dw$$

Por sustición de variable

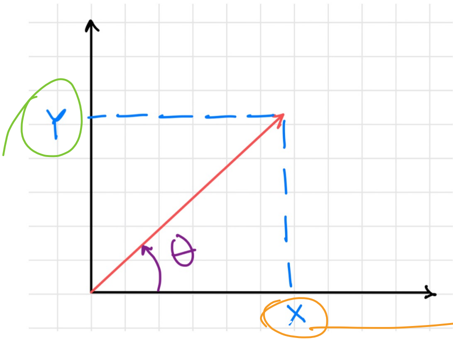
$$= \int_0^{1-v} dw = w \Big|_0^{1-v} = 1 - v \, \mathbb{1}_{(0,1)}(v)$$

Tengo que $0 < v + w \Rightarrow w < 1 - v$

$$f_{|Z|}(z) = \mathbb{P}\{|Z| \leq z\} = \mathbb{P}\{-z \leq Z \leq z\} = F_Z(z) - \underbrace{F_Z(-z)}_{\mathbb{P}\{Z \geq -z\}}$$

Derivo $\Rightarrow f_{|Z|}(z) = 1 - z + 1 - z = \boxed{2(1-z)\, \mathbb{1}_{(0,1)}(z)}$

7. Si $\theta \sim Unif(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Encuentre la distribución de Y.



Ya la observé

Quiero saber la f.d.p d $Y | X = x$

$$\tan\theta = \frac{Y}{X} \Rightarrow Y = X\tan\theta$$

$$F_Y(y) = \mathbb{P}\{Y \leq y\} = \mathbb{P}\{X\tan\theta \leq y\} = \mathbb{P}\{\tan\theta \leq \frac{y}{x}\}$$

$$= \mathbb{P}\{\theta \leq \tan^{-1}(\frac{y}{x})\} = F_\theta[\tan^{-1}(\frac{y}{x})]$$

Recordar

$$\frac{d\tan^{-1}(u)}{du} = \frac{u'}{1+u^2}$$

Derivando

$$f_Y(y) = \frac{1}{x}\left[\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\right] f_\theta[\tan^{-1}(\frac{y}{x})]$$

$1/\pi$

$$\frac{1}{\frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\pi}$$

$$= \boxed{\frac{1}{\pi x}\left[\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\right] \sim Cauchy(0, x)}$$

Recordar: Si $X \sim Cauchy(\alpha, \beta)$

$$f_X(x) = \frac{1}{\beta\pi}\left[\frac{1}{1+(\frac{x-\alpha}{\beta})^2}\right] \mathbb{1}_{x\in\mathbb{R}}(x)$$

8. Demuestra la Desigualdad de Markov.

Si X es v.a. y $g(\circ)$ es una función t.q. $g(x) \geq 0 \ \forall x$

$$\Rightarrow \forall k > 0 \quad \mathbb{P}\{g(x) \geq k\} \leq \frac{E[g(x)]}{k}$$

Dem.

Tomamos el lado derecho de la desigualdad

$$E[g(x)] = \int_{x \in S} g(x) f_X(x)\, dx = \int_{g(x) \geq k} g(x) f_X(x)\, dx + \int_{g(x) < k} g(x) f_X(x)\, dx$$

$$\Rightarrow E[g(x)] \geq \int_{g(x) \geq k} g(x) f_X(x)\, dx \geq \int_{g(x) \geq k} k\, f_X(x)\, dx = k \underbrace{\int_{g(x) \geq k} f_X(x)\, dx}_{\mathbb{P}\{g(x) \geq k\}}$$

k es el mínimo de $g(\circ)$

$$= k\, \mathbb{P}\{g(x) \geq k\}$$

9. Demuestra la Desigualdad de Tchebysheff

Queremos demostrar la sigte. versión del Teorema

$$\mathbb{P}\left\{ \left| \frac{x-\mu}{\sigma} \right|^2 \geq t^2 \right\} \leq \frac{1}{t^2}$$ donde $E[X] = \mu$ y X es v.a. $\sim f(\circ)$

Dem. Usamos Teo. de Markov (ve la pág. anterior)

$$\mathbb{P}\{ \underbrace{\left| \frac{x-\mu}{\sigma} \right|^2}_{g(x)} \geq \underbrace{t^2}_{k} \} \leq \frac{E\left[\left| \frac{x-\mu}{\sigma} \right|^2 \right]}{t^2} = \frac{\frac{E[|x-\mu|^2]}{\sigma^2}}{t^2}$$

Recuerde def. de Varianza para $E[|x-\mu|^2]$ $\longrightarrow$ $= \frac{\frac{\sigma^2}{\sigma^2}}{t^2} = \frac{1}{t^2}$

10. Sean $X_1, ..., X_n \overset{v.a.i.i.d.}{\sim} f(\bullet)$ tal que $\mathbb{E}(X_i) = \mu$, $\mathbb{V}(X_i) = \sigma^2$. Demuestra:

(a) $\mathbb{E}(\bar{X}) = \mu$

(b) $\mathbb{V}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$

(c) $\mathbb{E}(S^2) = \sigma^2$

Recordemos: $\bar{X} = \sum_1^n \frac{X_i}{n}$, $S^2 = \sum_1^n \frac{(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$

(a) $E(\bar{X}) = E\left[\frac{1}{n}\sum_1^n X_i\right] = \frac{1}{n} E\left[\sum_1^n X_i\right] \underset{\text{indep}}{=} \frac{1}{n} n E[X_i]$

$= \frac{n\mu}{n} = \mu$ ✓

(b) $V(\bar{X}) = V\left[\frac{1}{n}\sum_1^n X_i\right] = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_1^n X_i\right) \longrightarrow = \sum_1^n V(X_i) + 2\sum\sum \cancel{\text{Cov}(X_i, X_j)}^{0}$

$= \frac{1}{n^2} \sum_1^n \underbrace{V(X_i)}_{\sigma^2}$

$= \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$ ✓

(c) $E(S^2) = E\left[\frac{1}{n-1}\sum_1^n (X_i - \bar{X})^2\right] = \frac{1}{n-1} \underbrace{E\left[\sum_1^n \left(X_i^2 - 2X_i\bar{X} + \bar{X}^2\right)\right]}_{(*)}$

(i) $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_1^n X_i \Rightarrow n\bar{X} = \sum_1^n X_i$

$(*) = \frac{1}{n-1} E\left[\sum_1^n X_i^2 - 2\bar{X}\sum_1^n X_i + \sum_1^n \bar{X}^2\right]$

$= \frac{1}{n-1} E\left[\sum_1^n X_i^2 - \underbrace{2n\bar{X}}_{\text{por (i)}} + n\bar{X}\right] = \underbrace{\frac{1}{n-1} E\left[\sum_1^n X_i^2 - n\bar{X}^2\right]}_{(**)}$

$V(X) = E(X^2) - E^2(X) \Longleftrightarrow E(X^2) = \underline{V(X) + E^2(X)}$

$\Rightarrow (**) = \frac{1}{n-1} \left[\sum_1^n E(X_i^2) - nE(\bar{X}^2)\right]$

$= \frac{1}{n-1}\left[\cancel{n}\left(\sigma^2 \cancel{+\mu^2}\right) - \cancel{n}\left(\frac{\sigma^2}{n} \cancel{+\mu^2}\right)\right] \longrightarrow n\sigma^2 - \sigma^2 = \sigma^2(n-1)$

$= \frac{\sigma^2 \cancel{(n-1)}}{\cancel{n-1}} = \underline{\underline{\sigma^2}}$