ITAM
Departamento de Estadística

Inferencia Estadística– Examen de Prueba 2
Parte Abierta

---

1. Suponga que $X_1, ..., X_n$ es una m.a. con $f_{X_i}(x_i|\theta) = \theta x_i^{\theta-1}\mathbb{I}_{(0,1)}(x_i)$, $\theta > 0$. Se desea probar $H_0 : \theta = \theta_0$ vs $H_1 : \theta = \theta_1$ con $\theta_1 > \theta_0$
   (a) Mediante el lema de Neyman-Pearson, demuestre que la región de rechazo correspondiente la prueba uniformemente más potente es de la forma $RR = \left\{ -\sum_i^n ln(X_i) \leq \lambda \right\}$.
   (b) Demuestre que para una prueba de tamaño α, el valor crítico de la región de rechazo del inciso anterior es $\lambda = \frac{\chi^2_{2n,(1-\alpha)}}{2\theta_0}$. $\Big[$Hint: Demuestra que $-ln(X_i) \sim Exp(\frac{1}{\theta})$ y recuerda $T \sim Gamma(\alpha, \beta)$ entonces $\frac{2T}{\beta} \sim \chi^2_{2n}$ $\Big]$

2. Suponga que $X_1, ..., X_n$ es una m.a. de una población cuya densidad es una $Bernoulli(\theta)$ i.e $p(x|\theta) = \theta^x(1-\theta)^{1-x}$.
   (a) Verifique que el EMV para θ es $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}$
   (b) Demuestre que el EMV $\hat{\theta}$ del inciso anterior es un estimador eficiente de θ.[Hint: Use la Cota Inferior de Crao Ramer= $\frac{[g'(\theta)]^2}{I_{\tilde{X}}}$ donde $I_{\tilde{X}}$ es la información de Fisher]
   (c) Con base en las propiedades de los EMV's para muestras grandes, encuentre un IC$(1-\alpha)x100\,\%$ para la varianza de la distribución Bernoulli.

3. Suponga que $X_1, ..., X_n$ es una m.a. de una $Exp(\theta)$.
   (a) Encuentre un IC de $90\,\%$ para θ, cuando $n = 9$
   (b) Sea $\hat{\theta}$ el EMV de θ. Encuentre una función $g()$ tal que $\sqrt{n}[g(\hat{\theta}) - g(\theta)]$ siga una distribución $N(0, 1)$. Usando este hecho, encuentre un IC al $90\,\%$ para θ, cuando $n \to \infty$

4. Sean $X_1, ..., X_n$ es una m.a. de una $N(\mu, 1)$ y queremos probar $H_0 : \mu = \mu_0$ vs $H_1 : \mu < \mu_0$. Si $\alpha = P(errortipoI)$ y la región de rechazo está dada por

$$RR = \left\{ x | \bar{x} < \mu_0 + \frac{\Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{n}} \right\}$$

   (a) Encuentre la función potencia.

   (b) Demuestre que la función potencia es decreciente en μ

5. Sean $X_1, ..., X_{25}$ es una m.a. de una $U(1, \theta)$ con $\theta > 1$. Encuentre la prueba uniformemente más poderosa para $\alpha = 0{,}05$ para probar $H_0 : 1 < \theta \leq 3$ vs $H_1 : \theta > 3$

6. Sea $X_1, ..., X_n$ es una m.a. con $f(x;\theta)\frac{1}{2\theta}e^{|x|/\theta}$ donde $x \in \mathbb{R}$; $\theta > 0$. Encuentre un IC $(1-\alpha)x100\,\%$ para θ.