Laboratorio 2: Repaso Cálculo y Técnicas de Integración

Otoño 2021

DISTRIBUCIÓN NORMAL

Dfn. Decimos que v.a. $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ syss. $f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\frac{y-\mu}{\sigma}\right]^2\right)$
donde $-\infty < y < \infty \Rightarrow y \in \mathbb{R}$
$\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma^2 > 0$

En particular si $Y \sim N(0,1)$, decimos que Y es normal estándar y en lugar de Y ocupamos Z.

Si $Z \sim N(0,1) \Rightarrow f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$. Z tiene tablas de proba.

En caso de que Y no es normal estándar ¿ $Z = \frac{Y-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$?

Vemos que $f(y)$ cumple
(1) $f(y) \geq 0$

$\frac{\partial}{\partial x} \cos(x) = -\sin(x)$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, dy =$

s.p.g Supongamos $Z \sim N(0,1)$

por simetría y función par

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma}} \underbrace{\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz}_{I}$$

$r\cos^2\theta - (-r\,sen^2\theta)$
$r\cos^2\theta + r\,sen^2\theta$
$r(\cos^2\theta + sen^2\theta)$
$= r$

$$I^2 = \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx\, dy$$

$$\begin{vmatrix} \cos\theta & -r\,sen\theta \\ sen\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

Por cambio de coordenadas
$r^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow x = r\cos\theta$, $y = r\,sen\theta$
$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix}$$
$|\text{Jacobiano}| = r$

$-e^{-\infty} + e^{-0} = 1$

Page 33

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} r e^{-\frac{1}{2}r^2} dr\, d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{\infty} r e^{-\frac{1}{2}r^2} dr = \frac{\pi}{2}\left(-e^{-\frac{1}{2}(r^2)}\Big|_0^{\infty}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$I^2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow I = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$

Así, $\frac{2}{\sqrt{2\pi\sigma}} I = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$ // $\therefore$ es función de densidad.

Teo. Si $\bar{Y} \sim N(\mu, \sigma^2)$
(1) $E(\bar{Y}) = \mu$; (2) $V(\bar{Y}) = \sigma^2$; (3) $m_{\bar{Y}}(t) = e^{t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$

Dem
(1) $E(\bar{Y}) = \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{y-\mu}{\sigma}\right]^2} dy \Rightarrow$ Vamos a normalizarla $x = \frac{y-\mu}{\sigma} \Rightarrow dx = \frac{dy}{\sigma} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sigma}$

$\Rightarrow y = \sigma x + \mu \Rightarrow dy = \sigma dx$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} y \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy = \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma x + \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{2x}{2\sigma}} dx$$

$$= \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\left(\frac{x^2}{2\sigma}\right)} dx + \sigma \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma}} dx = (*)$$

(!!) Vemos que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-n}^{n} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-x^2/2}\right]\Big|_{-n}^{n}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-n^2/2} + e^{-n^2/2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n\to\infty} [0] = \underline{\underline{0}}$$

Así

$$(*) = \mu \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} dy}_{\text{Esto es igual a 1 por } \int_{-\infty}^{\infty} f(y) = 1} + \sigma \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx}_{\text{Esto es igual a 0 por (!!)}} \Rightarrow \mu[1] + \sigma(0) = \mu$$

(2) $V(\bar{Y}) = E((\bar{Y}-\mu)^2) = E(\bar{Y}^2) - \mu^2 = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy - \mu^2$

$$E(y^2) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy$$

$= \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma x + \mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-x^2/2\sigma} dx$ Usando el mismo cambio de variable del inciso anterior y simplificaciones

$$= \mu^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx}_{\to 1} + 2\mu\sigma \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx}_{\to 0} + \sigma^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx}_{\to 1}$$

$$= \mu^2[1] + 2\mu\sigma(0) + \sigma^2[1] = \mu^2 + \sigma^2$$

$$\Rightarrow V(\bar{Y}) = \mu^2 + \sigma^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

$m_{\bar{Y}}(t) = E(e^{ty})$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{ty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(-2ty\sigma^2 + (y-\mu)^2)} dy$$

$\rightarrow$ Completamos el cuadrado

$$= e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2} \left[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{y-(\mu+t\sigma^2)}{\sigma}\right]^2} dy}_{} \right] \rightarrow (*)$$

$$= e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

Esto es una función de distribución acumulada para $\bar{Y} \sim N[(\mu + t\sigma^2), \sigma]$

$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} (*)\, dy = 1$

Page 34

DISTRIBUCIÓN GAMMA

Dfn. Una v.a. $\bar{Y}$ se distribuye como GAMMA (i.e. $\bar{Y} \sim Gamma(\alpha,\beta)$) donde $\alpha, \beta > 0$ syss

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{y^{\alpha-1} e^{-y/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} & \text{si } y \geq 0 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$$

$\Gamma(\alpha)$ → Es un número (NO variable)

donde $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy$

Primero tenemos que hacer esta integral.

Integrando por partes

- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)$; en particular $\Gamma(n) = (n-1)!$ syss $n \in \mathbb{N}$.

Vemos que

(1) $f(y) \geq 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$

(2) $\int_0^\infty f(y)dy = \int_0^\infty \frac{y^{\alpha-1} e^{-y/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} dy = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y/\beta} dy$

Por partes $u = y^{\alpha-1}$, $du = \alpha-1\, y^{\alpha-2} dy$; $dv = e^{-y/\beta}$, $v = -\beta e^{-y/\beta}$

$= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \left[-\beta y^{\alpha-1} e^{-y/\beta} \right]_0^\infty + \beta(\alpha-1) \int_0^\infty y^{\alpha-2} e^{-y/\beta} dy = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \beta(\alpha-1) \int_0^\infty y^{\alpha-2} e^{-y/\beta} dy$

$\to 0$

Sea $x = y/\beta \Rightarrow dx = \frac{1}{\beta} dy$
$\Rightarrow y = x\beta$

$= \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \beta(\alpha-1) \int_0^\infty \underbrace{\beta^{\alpha-2} x^{\alpha-2}}\, e^{-x} \beta\, dx$

$= \frac{\cancel{\beta}(\alpha-1)}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \beta^{\alpha-1} \underbrace{\int_0^\infty x^{(\alpha-1)-1} e^{-x} dx}_{\Gamma(\alpha-1)}$

$= \frac{(\alpha-1)}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)} (\Gamma(\alpha-1)) = 1$ ∴ es una función de densidad de proba

$$\Rightarrow \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y/\beta} dy = \beta^\alpha \Gamma(\alpha)$$

TEO. Si $\bar{Y} \sim Gamma(\alpha,\beta)$ Entonces

(1) $E(\bar{Y}) = \alpha\beta$; (2) $V(\bar{Y}) = \alpha\beta^2$; (3) $m(t) = (1-\beta t)^{-\alpha}$

Dem

(1) $E(\bar{Y}) = \int_0^\infty \frac{y\, y^{\alpha-1} e^{-y/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} dy = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^\alpha e^{-y/\beta} = \frac{1}{\cancel{\beta^\alpha}\Gamma(\alpha)} \beta^{\alpha+1} \Gamma(\alpha+1)$

$= \frac{\beta}{\cancel{\Gamma(\alpha)}} (\alpha) \cancel{\Gamma(\alpha)} = \alpha\beta$

(3) $m(t) = \int_0^\infty \frac{e^{ty} y^{\alpha-1} e^{-y/\beta}}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} dy = \frac{1}{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y/\left(\frac{\beta}{1-\beta t}\right)} dy$

$= \frac{1}{\beta^\alpha \cancel{\Gamma(\alpha)}} \left(\frac{\beta}{1-t\beta} \right)^\alpha \cancel{\Gamma(\alpha)} = (1-t\beta)^{-\alpha}$ si $\frac{\beta}{1-t\beta} > 0$

(17) Para cualquier $y \in \mathbb{R}$, definimos y^+ por y si $y \geq 0$ y 0 si $y < 0$. Sea c una cte.

(a) Muestre que
$$E[(Z-c)^+] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-c^2/2} - c(1-\phi(c)) \quad \text{donde } Z \sim N(0,1)$$

(b) Encuentre $E[(X-c)^+]$ cuando X es una v.a. normal con media μ y varianza σ^2.

(a) Sea $Z \sim N(0,\overset{\sigma}{1})$ una v.a normal estándar. donde $y^+ = \begin{cases} y, & y \geq 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$

$$E[(Z-c)^+] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(1)} \int_{-\infty}^{\infty} (z-c)^+ e^{-z^2/2} \, dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^{\infty} (z-c) e^{-z^2/2} \, dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_c^{\infty} z e^{-z^2/2} dz - \int_c^{\infty} c e^{-z^2/2} dz \right]$$

Sea $u = z^2/2 \Rightarrow du = z\,dz$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^{\infty} e^{-u} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-e^{-u} \right] \Big|_c^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-c^2/2}$$

Luego,

$$E[(Z-c)^+] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-c^2/2} - c \int_c^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz$$

Quiero cambiar los límites de integració para obtener $\phi(c)$ y por simetría

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-c^2/2} - c \left[1 - \underbrace{\int_{-\infty}^{c} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} dz}_{\phi(c)} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-c^2/2} - c\left[1 - \phi(c)\right]$$

(b) $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

Estandarizo para poder usar (a) $\Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

Así, $E[(X-c)^+] = E[(\mu + \sigma Z - c)^+] = E\left[\sigma\left(Z - \frac{c-\mu}{\sigma}\right)^+\right]$

Por linealidad de $E(g(X))$

Factorizo σ

$= \sigma E\left[\left(Z - \frac{c-\mu}{\sigma}\right)^+\right]$ Sea $a = \frac{c-\mu}{\sigma}$

$= \sigma E[(Z-a)^+]$ Por (a)

$$= \sigma\left[\frac{1}{2\pi} e^{-a^2/2} - a\left[1 - \phi(a)\right]\right]$$

4.81 **a** Si $\alpha > 0$, $\Gamma(\alpha)$ está definida por $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-y}\,dy$, demuestre que $\Gamma(1) = 1$.

***b** Si $\alpha > 1$, integre por partes para demostrar que $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$.

(a) $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y}\, dy$, Ahora $\alpha = 1$

$$\Rightarrow \Gamma(1) = \int_0^\infty y^0 e^{-y}\, dy = \int_0^\infty e^{-y}\, dy = -e^{-y}\Big|_0^\infty = e^{-0} - \cancel{e^{-\infty}}^{\,0} = 1$$

(b)

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y}\, dy = -y^{\alpha-1}e^{-y}\Big|_0^\infty + (\alpha-1)\int_0^\infty y^{\alpha-2} e^{-y}\, dy$$

Sean $u = y^{\alpha-1}$; $dv = e^{-y}$

$du = (\alpha-1)\, y^{\alpha-2}\, dy$; $v = -e^{-y}$

$$= 0 + (\alpha-1)\int_0^\infty y^{(\alpha-1)-1} e^{-y}\, dy$$

$$= (\alpha-1)\,\Gamma(\alpha-1)$$

4. Un círculo de radio r tiene área $A = \pi r^2$. Si un círculo aleatorio tiene un radio que está uniformemente distribuido en el intervalo $(0, 1)$, ¿cuáles son la media y la varianza del área del círculo?[4]

Mi v.a. es $\underline{\underline{r}}$ $\Rightarrow r \sim \text{Unif}(0,1) \Rightarrow f(r) = \begin{cases} \frac{1}{1-0} & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{e.o.c} \end{cases}$

Sea $A = \pi r^2$

$$\Rightarrow E(A) = E(\pi r^2) = \pi E(r^2)$$

$$\Rightarrow \pi E(r^2) = \pi \int_0^1 r^2\, 1\, dr = \pi \int_0^1 r^2\, dr = \pi \underbrace{\left[\frac{r^3}{3}\Big|_0^1\right]}_{E(r^2) = \frac{1}{3}} = \frac{\pi}{3} - \frac{0}{3} = \frac{\pi}{3}$$

$$V(A) = V(\pi r^2) = \pi^2 V(r^2) = \frac{4\pi^2}{45}$$

$$V(r^2) = E[(r^2)^2] - (E[r^2])^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{9-5}{45} = \frac{4}{45}$$

$$E(r^4) = \int_0^1 r^4\,(1)\, dr = \int_0^1 r^4\, dr = \frac{r^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{5}$$

14:13 Thu 19 Aug 93%

11 / 15

$E(\bar{Y}) = 125 - \cancel{225}(0) + 135\left(\frac{1}{5}\right) - \cancel{27}(0) = 125 + 27 = 152$

(5) K denota la energía cinética asociada a una masa m que se mueve a velocidad V donde $K = \frac{mV^2}{2}$ y V tiene $f_V(v) = \frac{v^3 e^{-v/500}}{500^4 \Gamma(4)} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(v)$

(a) Calcule la función generatora de momentos indicando para que valores de t.

Page 11

$\bar{Y} \sim Gamma(4, 500)$

$m_Y(t) = (1-\beta t)^{-\alpha} = (1-500t)^{-4}$

(b) Encuentre energía cinética esperada asociada a m=2.

Recordemos $\Gamma(\alpha) = (\alpha-1)\Gamma(\alpha)$

$\Gamma(n) = (n-1)!$ $n \in \mathbb{N}$

$E(K) = E\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \frac{m}{2} E(V^2) = E(V^2)$

$E(V^2) = \int_0^\infty \frac{v^2\, v^3 e^{-v/500}}{500^4 \Gamma(4)} dv = \frac{1}{500^4 \Gamma(4)} \int_0^\infty v^5 e^{-v/500} dv$

$= \frac{1}{500^4 \Gamma(4)} \int_0^\infty v^{6-1} e^{-v/500} dv = \frac{(500)^6 \Gamma(6)}{500^4 \Gamma(4)} = \frac{500^2\, 5(4)\cancel{\Gamma(4)}}{\cancel{\Gamma(4)}}$

$= 500^2 (20) = 5000000$

(6) Duración de llamadas a Ana v.a. exponencial con $\beta_1 = 5$ min si viene de Beto y $\beta_2 = 2$ de Carlos. $\mathbb{P}(Beto) = \frac{1}{4}$. Determina la proba con la que Ana dure más de 3 min en su próx. llamada

Uso proba Total

$\bar{Y}_1 \sim Exp(\beta_1 = 5)$, $\bar{Y}_2 \sim Exp(\beta_2 = 2)$ $\quad \mathbb{P}(Beto) = \frac{1}{4}$ $\quad \mathbb{P}(Carlos) = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\bar{Y} > 3) = \mathbb{P}(\bar{Y} > 3 \mid Beto)\mathbb{P}(Beto) + \mathbb{P}(\bar{Y} > 3 \mid Carlos)\mathbb{P}(Carlos)$

$= \mathbb{P}(\bar{Y}_1 > 3)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(\bar{Y}_2 > 3)\mathbb{P}(C)$

$= \int_3^\infty \frac{1}{5} e^{-y/5} dy \left(\frac{1}{4}\right) + \int_3^\infty \frac{1}{2} e^{-y/2} dy \left(\frac{3}{4}\right)$

$= -e^{-y/5}\Big|_3^\infty \left(\frac{1}{4}\right) + \left(-e^{-y/2}\Big|_3^\infty\right)\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{e^{-3/5} + 3e^{-3/2}}{4} = .3045$

12. El tiempo Y necesario para completar una operación clave en la construcción de casas tiene una distribución exponencial con media de 10 horas. La fórmula $C = 100 + 40Y + 3Y^2$ relaciona el costo C de completar esta operación con el cuadrado del tiempo para completarla. Encuentre la media y la varianza de C.[11]

$\bar{Y} \sim Exp(\overset{\beta}{10})$ $\qquad C = 100 + 40\bar{Y} + 3\bar{Y}^2$

$$E(C) = E(100 + 40\bar{Y} + 3(\bar{Y}^2)) = 100 + 40\overbrace{E(\bar{Y})}^{\beta=10} + 3E(\bar{Y}^2)$$

$$E(\bar{Y}^2) = \int_0^\infty y^2 \frac{1}{10} e^{-y/10}\, dy = \frac{1}{10}\underbrace{\int_0^\infty y^{3-1} e^{-y/10}\, dy}_{\beta^\alpha \Gamma(\alpha)} = \frac{1}{10}(10)^3 \Gamma(3)$$
$$= \frac{1}{10}(10)^3 (3-1)! = 100(2) = 200$$

$$\Rightarrow E(C) = 100 + 40(10) + 3(200) = 1100$$

$$V(C) = V(100 + 40\bar{Y} + 3\bar{Y}^2) = 40^2 V(\bar{Y}) + 3^2 V(\bar{Y}^2)$$
$$= E(C^2) - E^2(C)$$

Desarrollo y aplico propiedades de linealidad de $E[g(X)]$

$$V(\bar{Y}) = \beta^2 = 10^2 = 100$$
$$E(C^2) = E[(100 + 40\bar{Y} + 3y^2)^2] = 9E(\bar{Y}^4) + 240E(\bar{Y}^3) + 2200E(\bar{Y}^2) + 8000E(\bar{Y}) + 10000$$

Así

$$E(\bar{Y}^3) = \int_0^\infty y^3 \frac{1}{10} e^{-y/10}\, dy = \frac{1}{10}\int_0^\infty y^{4-1} e^{-y/10}\, dy = \frac{1}{10}(10)^4 \cancel{\Gamma(4)} \rightarrow (4-1)!$$
$$= 10^3\ 3! = 6000$$

$$E(\bar{Y}^4) = \int_0^\infty y^4 \frac{1}{10} e^{-y/10}\, dy = \frac{1}{10}\int_0^\infty y^{5-1} e^{-y/10}\, dy = \frac{1}{10}(10)^5 \Gamma(5)$$
$$= 10^4 (4!) = 240000$$

$$E(C^2) = 9(240000) + 240(6000) + 2200(200) + 8000(10) + 10000 = 4130000$$
$$\Rightarrow V(C) = E(C^2) - E^2(C) = 4130000 - (1100)^2 = 2920000$$