

Chương 1

MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

lvluyen@hcmus.edu.vn

▶ <http://www.math.hcmus.edu.vn/~luyen/dsb1>

FB: [fb.com/daisob1](https://www.facebook.com/daisob1)

Trường Đại Học Khoa học Tự nhiên TP Hồ Chí Minh

Ví dụ. Giải hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} 2x + y = 5; \\ 4x - y = 7. \end{cases}$

Ví dụ. Giải hệ phương trình tuyến tính $\begin{cases} -x & +y & +z & = 1; \\ 4x & -3y & +5z & = 6; \\ 2x & +y & -z & = 2. \end{cases}$

Ví dụ. Giải hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} -2x & +2y & +z & +2t & = 1; \\ 2x & -2y & +3z & -3t & = 2; \\ x & +y & +z & -2t & = 2; \\ 3x & +4y & -5z & +2t & = 7. \end{cases}$$

Hỏi. Làm cách nào để giải hệ phương trình có số ẩn và số phương trình lớn?

Chương 1. MA TRẬN VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH

1. Ma trận
2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
3. Hệ phương trình tuyến tính
4. Ma trận khả nghịch
5. Phương trình ma trận

1.1. Ma trận

- ❶ Định nghĩa và ký hiệu
- ❷ Ma trận vuông
- ❸ Các phép toán trên ma trận

Một số ký hiệu

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ là tập hợp các số tự nhiên.
- $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ tập hợp các số nguyên.
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$ tập hợp các số hữu tỉ.
- \mathbb{R} : Tập hợp các số thực.
- \mathbb{C} : Tập hợp các số phức.

1.1.1. Định nghĩa và ký hiệu

Định nghĩa. Một **ma trận** A cấp $m \times n$ trên \mathbb{R} là một bảng chữ nhật gồm m dòng n cột với $m \times n$ phần tử trong \mathbb{R} , có dạng

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ký hiệu.

- $A = (a_{ij})_{m \times n}$ hay $A = (a_{ij})$, trong đó $a_{ij} \in \mathbb{R}$.
- a_{ij} hay A_{ij} là phần tử ở vị trí dòng i cột j của A .
- $M_{m \times n}(\mathbb{R})$: Tập hợp tất cả những ma trận cấp $m \times n$ trên \mathbb{R} .

Ví dụ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & -6 & 7 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}); \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 2}(\mathbb{R}).$$

Định nghĩa. Ma trận có tất các phần tử bằng 0 được gọi là *ma trận không*, ký hiệu $\mathbf{0}_{m \times n}$ (hay $\mathbf{0}$).

Ví dụ.

$$\mathbf{0}_{3 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.1.2. Ma trận vuông

Định nghĩa. Nếu ma trận A có số dòng bằng số cột thì A được gọi là *ma trận vuông*.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

▷ $M_n(\mathbb{R})$: Tập hợp tất cả các ma trận vuông cấp n trên \mathbb{R} .

Ví dụ.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}); \quad \mathbf{0}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Định nghĩa. Nếu $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ thì đường chứa các phần tử $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ được gọi là **đường chéo chính** (hay **đường chéo**) của A .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ví dụ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -2 & -3 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Định nghĩa. Cho $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó

- Nếu các phần tử nằm **dưới** đường chéo của A đều bằng 0 (nghĩa là $a_{ij} = 0, \forall i > j$) thì A được gọi là **ma trận tam giác trên**.
- Nếu các phần tử nằm **trên** đường chéo của A đều bằng 0 (nghĩa là $a_{ij} = 0, \forall i < j$) thì A được gọi là **ma trận tam giác dưới**.
- Nếu mọi phần tử nằm **ngoài** đường chéo bằng 0 (nghĩa là $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$) thì A được gọi là **ma trận đường chéo**, ký hiệu

$$A = \text{diag}(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \dots, \mathbf{a_n}).$$

Ví dụ. $A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ 0 & \mathbf{-3} & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ \mathbf{-2} & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{-4} \end{pmatrix}.$

$$C = \text{diag}(-1, 0, 5) = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{5} \end{pmatrix}.$$

Nhận xét. Ma trận A là ma trận đường chéo khi và chỉ khi vừa là ma trận tam giác vừa là ma trận tam giác dưới.

Định nghĩa. Ma trận vuông cấp n có các phần tử trên đường chéo bằng 1, các phần tử nằm ngoài đường chéo bằng 0 được gọi là **ma trận đơn vị cấp n** , ký hiệu I_n (hoặc I).

Ví dụ.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.1.3. Các phép toán trên ma trận

a) So sánh hai ma trận

Định nghĩa. Cho $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Khi đó, nếu $a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j$ thì A và B được gọi là **hai ma trận bằng nhau**, ký hiệu $A = B$.

Ví dụ. Tìm x, y, z để $\begin{pmatrix} x+1 & 1 \\ 2x-1 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y-4 & 1 \\ y-1 & 2z+2 \end{pmatrix}$?

Giải. Ta có

$$\begin{cases} x+1 = 3y-4; \\ 2x-1 = y-1; \\ z = 2z+2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; \\ y = 2; \\ z = -2. \end{cases}$$

b) Chuyển vị ma trận

Định nghĩa. Cho $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Ta gọi **ma trận chuyển vị** của A , ký hiệu A^\top , là ma trận cấp $n \times m$, có được từ A bằng cách xếp các dòng của A thành các cột tương ứng, nghĩa là

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & \mathbf{a_{12}} & \dots & \mathbf{a_{1n}} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ thì } A^\top = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{11}} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ \mathbf{a_{12}} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a_{1n}} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ví dụ.

$$\text{Nếu } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 5 \\ \mathbf{6} & \mathbf{-8} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ 0 & 4 & -3 & 6 \end{pmatrix} \text{ thì } A^\top = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{6} & 0 \\ -1 & \mathbf{-8} & 4 \\ 4 & \mathbf{0} & -3 \\ 5 & \mathbf{1} & 6 \end{pmatrix}.$$

Tính chất. Cho $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Khi đó:

i) $(A^\top)^\top = A$;

ii) $A^\top = B^\top \Leftrightarrow A = B$.

Định nghĩa. Cho $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Nếu $A^\top = A$ thì ta nói A là **ma trận đối xứng**.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \\ -2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Hỏi A có là ma trận đối xứng không?

Giải. Ta có $A^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 5 \\ -2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Suy ra $A = A^\top$. Vậy A là ma trận đối xứng.

c) Nhân một số với ma trận

Định nghĩa. Cho ma trận $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Ta định nghĩa **tích** của α với A (ký hiệu αA) là ma trận được xác định bằng cách nhân các phần tử của A với α , nghĩa là

$$(\alpha A)_{ij} = \alpha A_{ij}, \forall i, j.$$

Nếu $\alpha = -1$, ta ký hiệu $(-1)A$ bởi $-A$ và gọi là **ma trận đối** của A .

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Khi đó

❶ $2A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$

❷ $-A = \begin{pmatrix} -3 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$

Tính chất. Cho A là ma trận và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ta có

- i) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$;
- ii) $(\alpha A)^\top = \alpha A^\top$;
- iii) $0.A = \mathbf{0}$ và $1.A = A$.

d) Tổng của hai ma trận

Định nghĩa. Cho $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Khi đó **tổng** của A và B , ký hiệu $A + B$ là ma trận được xác định bởi:

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}.$$

Nhận xét. Để tính $A + B$ thì:

- ❶ A và B cùng cấp;
- ❷ Các vị trí tương ứng cộng lại.

Ký hiệu. $A - B := A + (-B)$ và gọi là **hiệu** của A và B .

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Tính $A^\top + 2B$ và $-3A + 2B^\top$?

Giải.

$$\bullet A^\top + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 8 & -6 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & -5 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet -3A + 2B^\top = \begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -6 & 0 \\ -3 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 2 & 2 \\ -9 & -5 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ.(tự làm) Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ và $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$. Tính $2A - 5I_3$ và $3A - 2B^\top$?

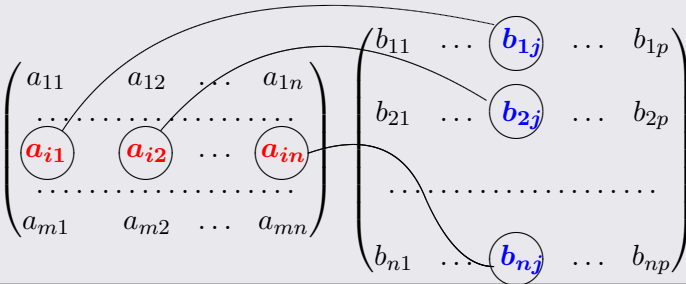
Tính chất. Cho $A, B, C \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ta có

- i) $A + B = B + A$ (tính giao hoán);
- ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (tính kết hợp);
- iii) $0_{m \times n} + A = A + 0_{m \times n} = A$;
- iv) $A + (-A) = (-A) + A = 0_{m \times n}$;
- v) $(A + B)^\top = A^\top + B^\top$;
- vi) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
- vii) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
- viii) $(-\alpha)A = \alpha(-A) = -(\alpha A)$.

e) Tích của hai ma trận

Định nghĩa. Cho hai ma trận $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$. Khi đó, **tích** của A với B (ký hiệu AB) là ma trận thuộc $M_{m \times p}(\mathbb{R})$ được xác định bởi:

$$(AB)_{ij} := A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{in}B_{nj}.$$



Nhận xét. Để tính tích AB thì:

- ❶ Số cột của A bằng số dòng của B ;
- ❷ Phần tử thứ i, j của AB bằng dòng i của A nhân cột j của B .

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ và $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Tính AB, BA, AC, CA, BC, CB ?

Giải.

$$\bullet \quad AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}.$$

$$\bullet \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- AC không tồn tại vì số cột của A không bằng số dòng của C .
- $CA = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & -1 \\ -5 & 2 & -3 \end{pmatrix}$.
- $BC = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -5 & -6 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$.
- CB không tồn tại vì số cột của A không bằng số dòng của C .

Ví dụ.(tự làm) Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.
 Tính AB^T và $A^T B$?

Đáp án. $AB^T = \begin{pmatrix} -4 & -13 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$; $A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 6 & 10 & -12 & 12 \\ 9 & 15 & -18 & 18 \\ -3 & -4 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ và $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$. Tính

- a) AI_2 , I_3A , $A\mathbf{0}_{2 \times 3}$, $\mathbf{0}_{4 \times 3}A$;
- b) $(AB)^\top$, $B^\top A^\top$;
- c) $(AB)C$, $A(BC)$;
- d) $A(B + C)$, $AB + AC$;
- e) $(B + C)A^\top$, $BA^\top + CA^\top$.

Giải.

a) $AI_2 = A$, $I_3A = A$, $A\mathbf{0}_{2 \times 3} = \mathbf{0}_{3 \times 3}$, $\mathbf{0}_{4 \times 3}A = \mathbf{0}_{4 \times 2}$.

b) $AB = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & -12 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow (\mathbf{AB})^\top = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -3 & -12 & -6 \end{pmatrix}$

$$B^{\top} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, A^{\top} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Suy ra}$$

$$\mathbf{B}^{\top} \mathbf{A}^{\top} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -3 & -12 & -6 \end{pmatrix}.$$

c) Tính $(AB)C$ và $A(BC)$?

$$\mathbf{(AB)C} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & -12 \\ 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 26 \\ -40 & 16 \\ -10 & 28 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ta có } BC = \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}. \text{ Suy ra}$$

$$\mathbf{A(BC)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 10 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 26 \\ -40 & 16 \\ -10 & 28 \end{pmatrix}.$$

d) Tính $A(B + C)$ và $AB + AC$?

$$B + C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A(B + C)} = \begin{pmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 10 \\ 11 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ta có $AB = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & -12 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}, AC = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ -1 & 22 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$. Suy ra

$$\mathbf{AB + AC} = \begin{pmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 10 \\ 11 & 0 \end{pmatrix}.$$

e) Tính $(B + C)A^\top$ và $BA^\top + CA^\top$?

$$\mathbf{(B + C)A^\top} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -3 & -12 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 1 & 26 & 8 \end{pmatrix}$$

$$BA^{\top} = \begin{pmatrix} -5 & 13 & -1 \\ 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}, CA^{\top} = \begin{pmatrix} 10 & -4 & 8 \\ -1 & 18 & 4 \end{pmatrix}. \text{ Suy ra}$$

$$\mathbf{BA^{\top} + CA^{\top}} = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 1 & 26 & 8 \end{pmatrix}.$$

Tính chất. Cho $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $B, B_1, B_2 \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{p \times q}(\mathbb{R})$, $D_1, D_2 \in M_{q \times n}(\mathbb{R})$. Khi đó

i) $I_m A = A$ và $A I_n = A$. Đặc biệt, với $A \in M_n(\mathbb{R})$, ta có

$$I_n A = A I_n = A.$$

ii) $0_{p \times m} A = 0_{p \times n}$ và $A 0_{n \times q} = 0_{m \times q}$. Đặc biệt, với $A \in M_n(\mathbb{R})$, ta có

$$0_{n \times n} A = A 0_{n \times n} = 0_{n \times n}.$$

iii) $(AB)^{\top} = B^{\top} A^{\top}$.

iv) $(AB)C = A(BC)$.

$$v) A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$$

$$(D_1 + D_2)A = D_1A + D_2A.$$

f) Lũy thừa ma trận

Định nghĩa. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Ta gọi **lũy thừa** bậc k của A là một ma trận thuộc $M_n(\mathbb{R})$, ký hiệu A^k , được xác định như sau:

$$A^0 = I_n; A^1 = A; A^2 = AA; \dots; A^k = A^{k-1}A.$$

Như vậy $A^k = \underbrace{A \dots A}_{k \text{ lần}}$.

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tính A^2, A^3, A^5 ? Từ đó suy ra A^{200} .

Giải. $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{9} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{12} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^5 = A^4 A = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{15} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Dự đoán } A^n = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{3n} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được điều này đúng. Suy ra

$$A^{200} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{3 \times 200} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{600} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ.(tự làm) Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tính A^{100} .

Ví dụ.(tự làm) Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Tính A^n với $n > 1$.

Đáp án. $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Tính chất. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ và $k, l \in \mathbb{N}$. Khi đó:

- i) $I_n^k = I_n$;
- ii) $A^{k+l} = A^k A^l$;
- iii) $A^{kl} = (A^k)^l$.

g) Đa thức ma trận

Định nghĩa. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$ và

$$f(x) = \alpha_m x^m + \alpha_{m-1} x^{m-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

là một đa thức trên \mathbb{R} (nghĩa là $\alpha_i \in \mathbb{R} \forall i \in \overline{0, m}$). Khi đó,

$$f(A) := \alpha_m A^m + \alpha_{m-1} A^{m-1} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I_n$$

được gọi là *đa thức theo ma trận* A .

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ và $f(x) = 3x^2 - 2x + 2$. Tính $f(A)$?

Giải. Ta có $f(A) = 3A^2 - 2A + 2I_2$ và $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

Suy ra

$$f(A) = 3 \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & -33 \\ -11 & 16 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. (tự làm) Cho $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ và $f(x) = -x^3 + 2x^2 - 3x + 1$. Tính $f(A)$?

Đáp án. $f(A) = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -12 & 7 \end{pmatrix}$.

Nhận xét. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó các hằng đẳng thức, nhị thức Newton vẫn đúng với A .

1.2. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

- ❶ Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng
- ❷ Ma trận bậc thang
- ❸ Hạng của ma trận

1.2.1. Các phép biến đổi sơ cấp trên dòng

Định nghĩa. Cho $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Ta gọi *phép biến đổi sơ cấp trên dòng*, viết tắt là phép **BDSCDT** trên A , là một trong ba loại biến đổi sau:

Loại 1. Hoán vị hai dòng i và j ($i \neq j$).

Ký hiệu : $d_i \leftrightarrow d_j$

Loại 2. Nhân dòng i với một số $\alpha \neq 0$.

Ký hiệu: αd_i

Loại 3. Cộng vào dòng i với β lần dòng j ($j \neq i$).

Ký hiệu: $d_i + \beta d_j$

Với φ là một phép biến đổi sơ cấp, ký hiệu $\varphi(A)$ là ma trận có được từ A thông qua φ .

Ví dụ.
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{2d_2} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{2d_2} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 6 & 12 & -2 & -6 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_1 + 2d_3} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 9 & 8 \\ 6 & 12 & -2 & -6 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận B có được từ A thông qua các phép BĐSCTD $d_1 \leftrightarrow d_3$, $d_2 + 2d_1$, $3d_3$?

Giải.

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{d_1 \leftrightarrow d_3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{d_2 + 2d_1} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 5 & 8 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{3d_3} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 5 & 8 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & -6 & 9 \end{pmatrix} = B. \end{aligned}$$

Tương đương dòng

Nhận xét.

1) Nếu $A \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_j} A'$ thì $A' \xrightarrow{d_i \leftrightarrow d_j} A$;

2) Nếu $A \xrightarrow{\alpha d_i} A'$ thì $A' \xrightarrow{\frac{1}{\alpha} d_i} A$;

3) Nếu $A \xrightarrow{d_i + \beta d_j} A'$ thì $A' \xrightarrow{d_i - \beta d_j} A$.

Định nghĩa. Cho $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Ta nói A **tương đương dòng** với B , ký hiệu $A \sim B$, nếu B có được từ A thông qua hữu hạn phép biến đổi sơ cấp trên dòng nào đó. Vậy,

$A \sim B \Leftrightarrow$ Tồn tại các phép BDSCTD $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ sao cho

$$A \xrightarrow{\varphi_1} A_1 \xrightarrow{\varphi_2} \dots \xrightarrow{\varphi_k} A_k = B.$$

Nhận xét. Quan hệ tương đương dòng là một quan hệ tương đương trên $M_{m \times n}(\mathbb{R})$, nghĩa là $\forall A, B, C \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, ta có:

- ❶ $A \sim A$ (tính phản xạ).
- ❷ $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ (tính đối xứng).
- ❸ $A \sim B$ và $B \sim C \Rightarrow A \sim C$ (tính bắc cầu).

Ví dụ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 \\ 5 & 8 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & -6 & 9 \end{pmatrix} = B.$

Vì B có được từ A qua lần lượt các phép BDSCTD sau: $d_1 \leftrightarrow d_3$, $d_2 + 2d_1$, $3d_3$.

Hỏi. Làm cách nào kiểm tra hai ma trận tương đương dòng với nhau?

1.2.2. Ma trận bậc thang

Định nghĩa. Cho $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Phần tử khác không đầu tiên của một dòng kể từ bên trái được gọi là **phần tử cơ sở** của dòng đó.

Ví dụ. Cho ma trận $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Khi đó:

- ▷ Dòng 1 có phần tử cơ sở là -1 , dòng 2 có phần tử cơ sở là 3
- ▷ Dòng 3 không có phần tử cơ sở.

Định nghĩa. Một ma trận được gọi là **ma trận bậc thang** nếu nó thỏa 2 tính chất sau:

- ❶ Dòng không có phần tử cơ sở (nếu tồn tại) thì nằm dưới cùng;
- ❷ Phần tử cơ sở của dòng dưới nằm bên phải so với phần tử cơ sở của dòng trên.

Như vậy ma trận bậc thang có dạng

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \boxed{a_{1k_1}} & \dots & \dots & a_{1k_2} & \dots & \dots & a_{1k_r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \boxed{a_{2k_2}} & \dots & \dots & a_{2k_r} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & \boxed{a_{rk_r}} & \dots & a_{rn} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Ví dụ. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Khi đó A là ma trận bậc thang, B không là ma trận bậc thang.

Ma trận bậc thang rút gọn

Định nghĩa. Ma trận A được gọi là *ma trận bậc thang rút gọn* nếu thỏa 3 điều kiện sau:

- 1 A là ma trận bậc thang.
- 2 Các phần tử cơ sở đều bằng 1.
- 3 Trên cột có chứa phần tử cơ sở, các hệ số ngoài phần tử cơ sở đều bằng 0.

Ví dụ. $C = \begin{pmatrix} \color{red}{1} & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & \color{red}{1} & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} \color{red}{1} & \color{blue}{3} & 0 & 2 & 7 \\ 0 & \color{red}{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \color{red}{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

▷ C là ma trận bậc thang rút gọn.

▷ D **không** là ma trận bậc thang rút gọn.

1.2.3. Hàng của ma trận

Dạng bậc thang

Định nghĩa. Nếu A tương đương dòng với một ma trận bậc thang B thì B được gọi là một *dạng bậc thang* của A .

Ví dụ. Cho

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 1 & -4 \\ 3 & 6 & 9 & -6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Khi đó B là một dạng bậc thang của A vì B có được từ A thông qua các phép biến đổi: $d_2 + 2d_1$, $d_3 - 3d_1$.

Hỏi. Dạng bậc thang của một ma trận có duy nhất không?

Hạng của ma trận

Nhận xét. Một ma trận A thì có nhiều dạng bậc thang, tuy nhiên các dạng bậc thang của A đều có chung số dòng khác 0. Ta gọi số dòng khác 0 của một dạng bậc thang của A là **hạng** của A , ký hiệu $r(A)$.

Mệnh đề. Cho $A, B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Khi đó:

- i) $0 \leq r(A) \leq m, n$;
- ii) $r(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$;
- iii) $r(A^\top) = r(A)$;
- iv) Nếu $A \sim B$ thì $r(A) = r(B)$.

Định nghĩa. Nếu A tương đương dòng với một ma trận bậc thang rút gọn B thì B được gọi là **dạng bậc thang rút gọn của A** .

Nhận xét. Dạng bậc thang rút gọn của một ma trận A là duy nhất và được ký hiệu R_A .

Ví dụ.(tự làm) Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & -5 & 1 & -4 \\ 3 & 6 & 9 & -6 \end{pmatrix}$. Tìm ma trận B có được từ A thông qua lần lượt các phép BDSCTD $d_2 + 2d_1$, $d_3 - 3d_1$, $-d_2$ và $d_1 - 2d_2$? Sau đó, kết luận gì về ma trận B ?

Đáp án. $B = \begin{pmatrix} \textcolor{red}{1} & 0 & 17 & -18 \\ 0 & \textcolor{red}{1} & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Rõ ràng B là ma trận bậc thang rút gọn. Suy ra B là dạng bậc thang rút gọn của A (hay $R_A = B$).

Thuật toán Gauss

Tìm một dạng bậc thang của $A = (a)_{ij} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

Bước 1. Cho $i := 1, j := 1$.

Bước 2. Nếu $i > m$ hoặc $j > n$ thì kết thúc.

Bước 3. Nếu $a_{ij} = 0$ thì sang Bước 4. Nếu $a_{ij} \neq 0$ thì thực hiện các phép BÐSCTD sau:

$$d_k - \frac{a_{kj}}{a_{ij}} d_i \quad \text{với} \quad k > i.$$

Sau đó $i := i + 1, j := j + 1$ và quay về Bước 2.

Bước 4. Nếu $a_{kj} = 0$ với mọi $k > i$ thì $j := j + 1$ và quay về Bước 2. Nếu $a_{kj} \neq 0$ với một $k > i$ nào đó thì chọn một k như vậy và thực hiện phép BÐSCTD: $d_i \leftrightarrow d_k$ và quay về Bước 3.

Ví dụ. Tìm một ma trận dạng bậc thang R của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix}.$$

Từ đó xác định hạng của A .

Giải.

$$A \xrightarrow{\substack{d_2-d_1 \\ d_3-2d_1 \\ d_4-6d_1}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{d_4-\frac{3}{2}d_2} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &\xrightarrow{d_4 - \frac{3}{2}d_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix} \\
 &\xrightarrow{d_4 - \frac{5}{2}d_3} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R.
 \end{aligned}$$

Ta có A tương đương dòng với R và R có dạng bậc thang với 3 dòng khác 0 nên A có hạng là $r(A) = 3$.

Lưu ý. Trong quá trình đưa ma trận về dạng bậc thang, ta có thể sử dụng các phép BDSCTD phù hợp để tránh việc tính toán các số lẻ.

Ví dụ.(tự làm) Tìm hạng của các ma trận sau:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 9 \\ 2 & 6 & 7 & 6 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 9 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -3 & 7 & 4 \\ -1 & 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Đáp án.

a) $r(A) = 3$

b) $r(B) = 3$

c) $r(C) = 3$

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$. Tìm tất cả giá trị m để $r(A) = 3$?

Giải.

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix} &\xrightarrow[d_3 - 3d_1]{d_2 - 2d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & m - 3 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{d_3 + d_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & m - 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Để $r(A) = 3$ thì dòng $(0 \ 0 \ m - 1)$ khác không, nghĩa là

$$m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1.$$

Suy ra $r(A) = 3$ đúng với mọi $m \neq 1$.

Ví dụ.(tự làm) Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & m+1 & m \end{pmatrix}$. Tìm tất cả giá trị m để $r(A) = 2$?

Đáp án. $m = -2$.

Ví dụ.(tự làm) Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ m & 1 & 2 \\ m & 2m & 1 \end{pmatrix}$. Tìm tất cả giá trị m để $r(A) = 2$?

Đáp án. $m = \frac{1}{2}$ hay $m = 1$.

Ví dụ.(tự làm) Cho $B = \begin{pmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 & m \\ m & m & 1 \end{pmatrix}$. Tìm tất cả giá trị m để $r(B) = 2$? **Đáp án.** $m = -\frac{1}{2}$.

Thuật toán Gauss-Jordan

Tìm dạng bậc thang rút gọn của ma trận $A = (a)_{ij} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$

Chỉ khác Thuật toán Gauss ở Bước 3, ta cần thực hiện các phép biến đổi sau:

- $\frac{1}{a_{ij}}d_i.$
- $d_k - a_{kj}d_i$ với $k \neq i$;

Ví dụ. Tìm ma trận dạng bậc thang rút gọn của ma trận

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix}.$$

Giải.

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 7 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & 14 & 2 & 7 & 0 \\ 6 & 42 & 3 & 13 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\begin{smallmatrix} d_2-d_1 \\ d_3-2d_1 \\ d_4-6d_1 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} d_2-d_1 \\ d_3-2d_1 \\ d_4-6d_1 \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -5 & -3 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[\begin{smallmatrix} -\frac{1}{2}d_2 \\ d_1-d_2 \\ d_4+3d_2 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} -\frac{1}{2}d_2 \\ d_1-d_2 \\ d_4+3d_2 \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow[\begin{smallmatrix} d_1-\frac{1}{2}d_3 \\ d_2-\frac{5}{2}d_3 \\ d_4-\frac{5}{2}d_3 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} d_1-\frac{1}{2}d_3 \\ d_2-\frac{5}{2}d_3 \\ d_4-\frac{5}{2}d_3 \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = R_A.$$

Ta thấy R_A là ma trận dạng bậc thang rút gọn của A .

Ví dụ. Tìm dạng ma trận bậc thang rút gọn của các ma trận sau:

$$a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix};$$

$$b) \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix};$$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 8 & 1 \\ 1 & 3 & -9 & 7 \end{pmatrix};$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 & 13 \\ -2 & -6 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Đáp án. $a) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$ $b) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$

$$c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/2 & 1 \\ 0 & 1 & -7/2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$d) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1.3. Hệ phương trình tuyến tính

- ① Định nghĩa
- ② Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính
- ③ Giải hệ phương trình tuyến tính
- ④ Định lý Kronecker - Capelli

1.3.1. Định nghĩa hệ phương trình tuyến tính

Mở đầu

Ví dụ. Tìm nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1; \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1; \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1. \end{cases}$$

Định nghĩa. Một *hệ phương trình tuyến tính* trên \mathbb{R} gồm m phương trình, n ẩn số là một hệ có dạng

[illegible]

trong đó

- $\mathbf{a}_{ij} \in \mathbb{R}$: các hệ số;
- $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}$: các hệ số tự do;
- $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$: các ẩn số nhận giá trị trong \mathbb{R} .

Nếu (*) có các hệ số tự do bằng 0 thì ta nói (*) là *hệ phương trình tuyến tính thuần nhất* trên \mathbb{R} .

Đặt

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Ta gọi A là **ma trận hệ số**, X là cột các **ẩn**, B là cột các **hệ số tự do** của hệ $(*)$. Khi đó hệ $(*)$ được viết dưới dạng **$AX = B$** . Đặt

$$\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

\tilde{A} được gọi là **ma trận mở rộng** (hay ma trận bổ sung) của hệ $(*)$.

Ví dụ. Cho hệ phương trình

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}.$$

Khi đó:

▷ Ma trận hệ số $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

▷ Cột các ẩn $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, cột các hệ số tự do $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$

▷ Ma trận mở rộng $\tilde{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right).$

Ta có $AX = B.$

1.3.2. Nghiệm của hệ phương trình tuyến tính

Định nghĩa. Ta nói $u = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ là **nghiệm** của hệ phương trình (*) nếu ta thay thế $x_1 := \alpha_1, x_2 := \alpha_2, \dots, x_n := \alpha_n$ thì tất cả các phương trình trong (*) đều thỏa.

Định nghĩa. Hai hệ phương trình được gọi là **tương đương** nhau nếu chúng có cùng tập nghiệm.

Nhận xét. Khi giải một hệ phương trình tuyến tính, các phép biến đổi sau đây cho ta các hệ tương đương:

- Hoán đổi hai phương trình cho nhau.
- Nhân hai vế của một phương trình cho một số khác 0.
- Cộng vào một phương trình với một bội của phương trình khác.

Định lý. Nếu hai hệ phương trình tuyến tính có ma trận mở rộng tương đương dòng với nhau thì hai hệ phương trình đó tương đương nhau.

Ví dụ. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y - 2z = -3; \\ 2x - y + z = 1; \\ x + y + z = 4. \end{cases} \quad (1)$$

Giải. $\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow[d_3-d_1]{d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{array} \right)$

$$\xrightarrow[d_3-2d_2]{d_1+d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array} \right) \xrightarrow[d_2-5d_3]{\frac{-1}{7}d_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Ta có $\tilde{A} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$. Suy ra

$$\begin{aligned} (1) \quad &\Leftrightarrow \begin{cases} x + 0y + 0z = 1; \\ 0x + y + 0z = 2; \\ 0x + 0y + z = 1. \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; \\ y = 2; \\ z = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ví dụ. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 10. \end{cases} \quad (2)$$

Giải. Ma trận hóa hệ phương trình tuyến tính, ta có

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 10 \end{array} \right)$$

$$\tilde{A} \xrightarrow[d_3-5d_1]{d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -10 \end{array} \right) \xrightarrow[d_3-2d_2]{d_1-d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Như vậy,

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x & - & 9z & = & 9; \\ & y & + & 7z & = & -5. \end{cases}$$

Ta chọn z là ẩn tự do. Như vậy nghiệm của hệ (2) là

$$\begin{cases} x & = & 9 + 9t; \\ y & = & -5 - 7t; \\ z & = & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ví dụ. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 5. \end{cases} \quad (3)$$

Giải. Ma trận hóa hệ phương trình tuyến tính, ta có

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \end{array} \right)$$

$$\tilde{A} \xrightarrow[d_3-5d_1]{d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -15 \end{array} \right) \xrightarrow[d_3-2d_2]{d_1-d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9 & 9 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array} \right)$$

Hệ (3) vô nghiệm vì $0x + 0y + 0z = -5$.

► Tiếp tục Gauss-Jordan

Ví dụ. (tự làm) Giải các hệ phương trình tuyến tính sau:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y - 4z = -1; \\ 3x - 2y + 5z = 6; \\ 5x + 2y - 4z = 3. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + y + z = 4; \\ x - 3y + 5z = 3; \\ 3x - 2y + 6z = 8. \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} -x + 2y + 3z = 4; \\ 2x - y + 4z = 5; \\ 3x - 3y + z = 1. \end{cases}$$

Đáp án. a) $x = 1, y = 1, z = 1$.

b) vô nghiệm.

$$\text{c) } x = \frac{14}{3} - \frac{11}{3}t, y = \frac{13}{3} - \frac{10}{3}t, z = t.$$

Lưu ý. Đối với hệ phương trình tuyến tính thuần nhất, các hệ số tự do sẽ không thay đổi khi ta thực hiện các phép biến đổi sơ cấp trên dòng. Do đó, khi giải hệ này ta chỉ cần sử dụng ma trận hệ số.

Ví dụ. Giải hệ phương trình tuyến tính thuần nhất sau:

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0; \\ 2x - y + 7z = 0; \\ 5x - y + 16z = 0. \end{cases}$$

Giải.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \\ 5 & -1 & 16 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{d_2 - 2d_1 \\ d_3 - 5d_1}]{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -6 & 6 \end{pmatrix}} \xrightarrow[\substack{-\frac{1}{3}d_2 \\ d_1 - d_2 \\ d_3 + 6d_2}]{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}.$$

Như vậy hệ ban đầu tương đương với

$$\begin{cases} x & + & 3z & = & 0; \\ & y & - & z & = & 0. \end{cases}$$

Ta chọn z là ẩn tự do. Như vậy nghiệm của hệ là

$$\begin{cases} x & = & -3t; \\ y & = & t; \\ z & = & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ví dụ.(tự làm) Giải hệ phương trình tuyến tính sau

$$\begin{cases} x & + & 2y & - & 2z & = & 0; \\ 3x & - & 2y & + & 4z & = & 0; \\ 2x & - & 4y & + & 5z & = & 0. \end{cases}$$

Đáp án. $x = 0, y = 0, z = 0$.

1.3.3. Giải hệ phương trình tuyến tính

Có 2 phương pháp giải hệ phương trình tuyến tính

- Gauss
- Gauss - Jordan

Phương pháp Gauss

Bước 1. Lập ma trận mở rộng $\tilde{A} = (A|B)$.

Bước 2. Đưa ma trận \tilde{A} về dạng bậc thang R .

Bước 3. Tùy theo trường hợp dạng bậc thang R mà ta kết luận nghiệm. Cụ thể:

- **Trường hợp 1.** Ma trận R có một dòng là

$$(0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \mid \neq 0).$$

Khi đó hệ phương trình **vô nghiệm**.

- **Trường hợp 2.** Ma trận R có dạng

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{c_{11}} & c_{12} & \dots & c_{1n} & \alpha_1 \\ 0 & \mathbf{c_{22}} & \dots & c_{2n} & \alpha_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{c_{nn}} & \alpha_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right).$$

với $c_{ii} \neq 0, \forall i \in \overline{1, n}$. Khi đó hệ phương trình **có nghiệm duy nhất**. Việc tính nghiệm được thực hiện từ dưới lên trên.

- **Trường hợp 3.** Khác hai trường hợp trên, khi đó hệ có **vô số nghiệm**, và:

- Ẩn tương ứng với các cột không có phần tử cơ sở sẽ là ẩn tự do (lấy giá trị tùy ý).
- Ẩn tương ứng với cột có phần tử cơ sở sẽ được tính theo thứ tự từ dưới lên trên và theo các ẩn tự do.

Ví dụ. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 5. \end{cases} \quad (1)$$

Giải. Ma trận hóa hệ (1), ta có

$$\begin{aligned} \tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 5 \end{array} \right) & \xrightarrow[d_3 - 5d_1]{d_2 - 2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -15 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{d_3 - 2d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-5} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Hệ (1) vô nghiệm vì $0x + 0y + 0z = -5$.

Ví dụ. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x - y - 2z = -3; \\ 2x - y + z = 1; \\ x + y + z = 4. \end{cases} \quad (2)$$

Giải.

$$\begin{aligned} \tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) & \xrightarrow[d_3-d_1]{d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{d_3-2d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Suy ra nghiệm của hệ (2) là $x = 1, y = 2, z = 1$.

Ví dụ. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y - 2z = 4; \\ 2x + 3y + 3z = 3; \\ 5x + 7y + 4z = 10. \end{cases} \quad (3)$$

Giải. Ma trận hóa hệ (3), ta có

$$\begin{aligned} \tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 10 \end{array} \right) & \xrightarrow[d_3-5d_1]{d_2-2d_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -10 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{d_3-2d_2} \left(\begin{array}{ccc|c} \textcolor{red}{1} & 1 & -2 & 4 \\ 0 & \textcolor{red}{1} & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Như vậy z là ẩn tự do. Cho $z = t \in \mathbb{R}$, ta có

- $y = -5 - 7z = -7t - 5,$
- $x = 4 - y + 2z = 4 - (-5 - 7t) + 2t = 9t + 9.$

Như vậy nghiệm của hệ (3) là

$$\begin{cases} x &= 9 + 9t; \\ y &= -5 - 7t; \\ z &= t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Ví dụ. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7; \\ x_2 + 2x_1 + 2x_3 + 3x_4 = 6; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_4 + x_3 = 7; \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 18. \end{cases}$$

Giải. Ta có

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 18 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} d_2-2d_1 \\ d_3-3d_1 \\ d_4-4d_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & -3 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & -4 & -8 & -10 & -14 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -10 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{d_2-d_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -4 & -8 & -10 & -14 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -10 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} d_3+4d_2 \\ d_4+5d_2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 8 & 10 & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 10 & 20 \end{array} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & | & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & | & 6 \\ 0 & 0 & \textcolor{blue}{8} & 10 & | & 10 \\ 0 & 0 & 10 & 10 & | & 20 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{10}d_3]{d_3 \leftrightarrow d_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & | & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & | & 6 \\ 0 & 0 & \textcolor{blue}{1} & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 10 & | & 10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{d_4 - 8d_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & | & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 5 & | & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & \textcolor{blue}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & -6 \end{pmatrix}$$

Vậy hệ đã cho tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 7; \\ \quad x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 6; \\ \quad \quad x_3 + x_4 = 2; \\ \quad \quad \quad 2x_4 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2; \\ x_2 = 1; \\ x_3 = 5; \\ x_4 = -3. \end{cases}$$

Ví dụ. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1; \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 + 22x_4 = -1; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4, \end{cases}$$

Giải. Ta có

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -13 & 22 & -1 \\ 3 & 5 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & -7 & 4 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[\begin{smallmatrix} d_2-d_1 \\ d_3-3d_1 \\ d_4-2d_1 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} d_2-d_1 \\ d_3-3d_1 \\ d_4-2d_1 \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[d_4+d_2]{d_3+d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -10 & 17 & -2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \\ 0 & -1 & 10 & -17 & 2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow[d_4+d_2]{d_3+d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & \mathbf{1} & -10 & 17 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Vậy hệ đã cho có hai ẩn tự do là x_3, x_4 . Cho $x_3 = t, x_4 = s$, ta tính được

$$\begin{cases} x_2 &= & -2 + 10x_3 - 17x_4 &= & -2 + 10t - 17s; \\ x_1 &= & 1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 &= & 5 - 17t + 29s. \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có vô số nghiệm với hai ẩn tự do

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5 - 17t + 29s, -2 + 10t - 17s, t, s)$$

với $s, t \in \mathbb{R}$ tùy ý.

Ví dụ. Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 2; \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -3; \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5; \\ 3x_1 \qquad \qquad + 3x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

Giải. Ta có

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -5 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 2 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 3 & -10 & 8 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} d_2 - 3d_1 \\ d_3 + 2d_1 \\ d_4 - 3d_1 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & 9 & -14 & 13 & -9 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 6 & -6 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l}
\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & | & 2 \\ 0 & 9 & -14 & 13 & | & -9 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & | & 9 \\ 0 & 6 & -6 & 2 & | & 2 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{c} \xrightarrow{d_2 \leftrightarrow d_3} \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & | & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & | & 9 \\ 0 & 9 & -14 & 13 & | & -9 \\ 0 & 6 & -6 & 2 & | & 2 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{c} \xrightarrow[d_4 + 2d_2]{d_3 + 3d_2} \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & | & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & | & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & | & 18 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & | & 20 \end{pmatrix} \\
\begin{array}{c} \xrightarrow{d_4 - d_3} \end{array} \\
\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & | & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & | & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & | & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 2 \end{pmatrix} .
\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 2 \\ 0 & -3 & 8 & -11 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

Vậy hệ đã cho tương đương với hệ sau:

$$\left\{ \begin{array}{rclclcl} x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & 2; \\ & & - & 3x_2 & + & 8x_3 & - & 11x_4 & = & 9; \\ & & & & 10x_3 & - & 20x_4 & = & 18; \\ & & & & & & 0 & = & 2. \end{array} \right.$$

Hệ này vô nghiệm. Do đó hệ đã cho cũng vô nghiệm.

Tiếp theo,

Phương pháp Gauss - Jordan

Phương pháp Gauss - Jordan

Bước 1. Lập ma trận mở rộng $\tilde{A} = (A|B)$.

Bước 2. Đưa ma trận \tilde{A} về dạng bậc thang rút gọn R_A .

Bước 3. Tùy theo trường hợp dạng bậc thang rút gọn R_A mà ta kết luận nghiệm. Cụ thể:

- **Trường hợp 1.** Ma trận R_A có một dòng $(0 \ 0 \ 0 \ 0 \dots 0 \ 0 \mid \neq 0)$.
Kết luận hệ phương trình **vô nghiệm**.
- **Trường hợp 2.** Ma trận R_A có dạng

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \textcolor{red}{1} & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \textcolor{red}{1} & \cdots & 0 & \alpha_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \textcolor{red}{1} & \alpha_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Khi đó hệ phương trình **có nghiệm duy nhất** là

$$x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n.$$

• **Trường hợp 3.** Khác hai trường hợp trên, khi đó hệ có **vô số nghiệm**, và:

- Ảnh tương ứng với các cột không có phần tử cơ sở 1 sẽ là ẩn tự do (lấy giá trị tùy ý).
- Ảnh tương ứng với cột có phần tử cơ sở 1 sẽ được tính theo các ẩn tự do.

Số ẩn tự do được gọi là **bậc tự do** của hệ phương trình.

Xem lại các ví dụ trang 57 [▶ Xem lại](#)

1.3.4. Định lý Kronecker- Capelli

Định lý. Cho $\tilde{A} = (A|B)$ là ma trận mở rộng của hệ phương trình gồm n ẩn dạng $AX = B$. Khi đó

$$r(\tilde{A}) = r(A) \text{ hoặc } r(\tilde{A}) = r(A) + 1.$$

Hơn nữa,

- nếu $r(\tilde{A}) = r(A) + 1$ thì hệ vô nghiệm;
- nếu $r(\tilde{A}) = r(A) = n$ thì hệ có nghiệm duy nhất;
- $r(\tilde{A}) = r(A) < n$ thì hệ có vô số nghiệm với bậc tự do là $n - r(A)$.

Ví dụ. Giải và biện luận hệ phương trình sau theo tham số m

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ 5x_1 + 9x_2 + 6x_3 - 15x_4 = 2; \\ 13x_1 + 22x_2 + 13x_3 - 22x_4 = 2m. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{A} = (A|B) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 6 & -15 & 2 \\ 13 & 22 & 13 & -22 & 2m \end{array} \right) \\
&\xrightarrow{d_1-d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 9 & 6 & -15 & 2 \\ 13 & 22 & 13 & -22 & 2m \end{array} \right) \\
&\xrightarrow{\begin{array}{l} d_2-2d_1 \\ d_3-5d_1 \\ d_4-13d_1 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 11 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & 10 & -3 \\ 0 & -4 & -13 & 43 & 2m-13 \end{array} \right) \\
&\xrightarrow{\begin{array}{l} d_3-d_2 \\ d_4-4d_2 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2m-5 \end{array} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \xrightarrow[d_4-4d_2]{d_3-d_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2m-5 \end{array} \right) \\ \\ \xrightarrow{d_4-d_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & -5 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2m-4 \end{array} \right) \end{array}$$

Biện luận.

- Với $2m - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 2$: Khi đó hệ vô nghiệm.
- Với $m = 2$: Hệ tương đương với hệ sau:

$$\left\{ \begin{array}{rclclcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & 5x_4 & = & 1; \\ & & -x_2 & - & 3x_3 & + & 11x_4 & = & -2; \\ & & & & -x_3 & - & x_4 & = & -1. \end{array} \right.$$

Ta có x_4 là ẩn tự do. Cho $x_4 = t \in R$ ta tính được

$$\begin{cases} x_3 = 1 - x_4 = 1 - t; \\ x_2 = 2 - 3x_3 + 11x_4 = -1 + 14t; \\ x_1 = 1 - 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 1 - 21t. \end{cases}$$

Như vậy khi $m = 2$, hệ đã cho có vô số nghiệm với một ẩn tự do

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1 - 21t, -1 + 14t, 1 - t, t)$$

với $t \in \mathbb{R}$ tùy ý.

Ví dụ. Giải và biện luận hệ phương trình tuyến tính sau theo tham số m

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2; \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = m; \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + mx_4 = m^2 - 6m + 4, \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{A} = (A|B) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & -1 & m \\ 4 & 3 & -1 & m & m^2 - 6m + 4 \end{array} \right) \\
\begin{array}{l} \xrightarrow{d_2-d_1} \\ \xrightarrow{d_3-d_1} \\ \xrightarrow{d_4-4d_1} \end{array} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 & -3 & m-1 \\ 0 & -1 & 3 & m-8 & m^2-6m \end{array} \right) \\
\begin{array}{l} \xrightarrow{d_3+2d_2} \\ \xrightarrow{d_4+d_2} \end{array} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & 1 & m-6 & m^2-6m+1 \end{array} \right) \\
\xrightarrow{d_4-d_3} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & \textcolor{red}{m-7} & m^2-7m \end{array} \right).
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & m-7 & m^2-7m \end{array} \right)$$

Biện luận.

- Với $m-7 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 7$, hệ có nghiệm

$$\begin{cases} x_4 = m; \\ x_3 = m+1-x_4 = 1; \\ x_2 = 1+2x_3-2x_4 = 3-2m; \\ x_1 = 1-x_2+x_3-2x_4 = -1. \end{cases}$$

Vậy, khi $m \neq 7$ hệ đã cho có duy nhất một nghiệm là:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-1, 3-2m, 1, m).$$

- Với $m = 7$, hệ tương đương với hệ sau:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_3 + x_4 = 8. \end{cases}$$

Ta có x_4 là ẩn tự do, Cho $x_4 = t \in \mathbb{R}$ ta tính được

$$\begin{cases} x_3 = 8 - x_4 = 8 - t; \\ x_2 = 1 + 2x_3 - 2x_4 = 17 - 4t; \\ x_1 = 1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -8 + t. \end{cases}$$

Vậy, khi $m = 7$ hệ đã cho có vô số nghiệm với một ẩn tự do

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-8 + t, 17 - 4t, 8 - t, t).$$

với $t \in \mathbb{R}$ tùy ý.

Ví dụ.(tự làm) Cho hệ phương trình với ma trận mở rộng

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & m & m+1 \end{array} \right).$$

Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm?

Ví dụ.(tự làm) Cho hệ phương trình với ma trận mở rộng

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 0 & 6 \\ -2 & -1 & 0 & m & m-1 \end{array} \right)$$

Tìm tất cả các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm duy nhất?

1.4. Ma trận khả nghịch

- ① Định nghĩa
- ② Nhận diện và tìm ma trận khả nghịch

1.4.1 Định nghĩa

Mở đầu

Cho $x \in \mathbb{R}$, hỏi tồn tại hay không y sao cho $xy = 1$.

Hỏi. Trên tập hợp ma trận thì sao?

Định nghĩa. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Ta nói A **khả nghịch** nếu tồn tại ma trận B sao cho

$$AB = BA = I_n.$$

Nếu B thỏa điều kiện trên được gọi là **ma trận nghịch đảo** của A .

Nhận xét. Ma trận nghịch đảo của một ma trận khả nghịch là duy nhất. Ta ký hiệu ma trận nghịch đảo của A là A^{-1} .

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Khi đó $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Mệnh đề. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Giả sử A khả nghịch và có nghịch đảo là A^{-1} . Khi đó

- (i) A^{-1} khả nghịch và $(A^{-1})^{-1} = A$.
- (ii) A^{\top} khả nghịch và $(A^{\top})^{-1} = (A^{-1})^{\top}$.
- (iii) $\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, αA khả nghịch và $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$.

Mệnh đề. Cho $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Nếu A và B khả nghịch thì AB cũng khả nghịch, hơn nữa

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

1.4.2. Nhận diện và tìm ma trận khả nghịch

Định lý. Cho $A \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó các khẳng định sau tương đương:

- (i) A khả nghịch.
- (ii) $r(A) = n$.
- (iii) $A \sim I_n$.
- (iv) Tồn tại các phép BDSCTD $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ biến ma trận A thành ma trận đơn vị I_n :

$$A \xrightarrow{\varphi_1} A_1 \longrightarrow \dots \xrightarrow{\varphi_k} A_k = I_n.$$

Hơn nữa, khi đó qua chính các phép BDSCTD $\varphi_1, \dots, \varphi_k$, ma trận đơn vị I_n sẽ biến thành ma trận nghịch đảo A^{-1} :

$$I_n \xrightarrow{\varphi_1} B_1 \longrightarrow \dots \xrightarrow{\varphi_k} B_k = A^{-1}.$$

Phương pháp tìm ma trận nghịch đảo

Lập $(A|I_n)$ và dùng các phép BDSCTD đưa A về dạng ma trận bậc thang rút gọn:

$$(A|I_n) \xrightarrow{\varphi_1} (A_1|B_1) \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\varphi_p} (A_p|B_p) \longrightarrow \cdots.$$

Trong quá trình biến đổi có thể xảy ra hai trường hợp sau:

- **Trường hợp 1:** Tồn tại p sao cho trong dãy biến đổi trên, ma trận A_p có ít nhất một dòng hay một cột bằng 0. Khi đó A không khả nghịch.
- **Trường hợp 2:** Mọi ma trận A_i trong dãy biến đổi trên đều không có dòng hay cột bằng 0. Khi đó ma trận cuối cùng của dãy trên có dạng $(I_n|B)$. Ta có A khả nghịch và $A^{-1} = B$.

Lưu ý. Nếu bài toán chỉ yêu cầu kiểm tra ma trận A có khả nghịch hay không, ta chỉ cần tính hạng của ma trận (dùng Gauss).

Ví dụ. Cho $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Xét tính khả nghịch của A và tìm A^{-1} (nếu có)?

Giải.

$$\begin{aligned}
 (A|I_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[d_3-d_1]{d_2-d_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow[d_3-d_2]{d_1-d_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{d_2-d_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \\
 &\qquad\qquad\qquad (I_3|A^{-1})
 \end{aligned}$$

Suy ra A khả nghịch và $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ví dụ. Cho $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -5 & 3 \\ 2 & 3 & 15 \end{pmatrix}$. Xét tính khả nghịch của B và tìm B^{-1} (nếu có)?

Giải.

$$\begin{aligned} (B|I_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -5 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 15 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[d_3-2d_1]{d_2+2d_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[-d_2]{d_1+2d_2, d_3-d_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 21 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -9 & -2 & -1 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -4 & -1 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Suy ra $r(B) = 2 < 3$. Như vậy B không khả nghịch.

Ví dụ. Tìm tất cả các giá trị m để ma trận sau khả nghịch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & m \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Giải. Tìm hạng của A

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & m \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[d_3-3d_1]{d_2-2d_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & m-4 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{d_3-d_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & m-4 \\ 0 & 0 & -m-1 \end{pmatrix}$$

Ta có A khả nghịch $\Leftrightarrow r(A) = 3$. Do đó để A khả nghịch thì

$$-m - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1.$$

Ví dụ. Xét tính khả nghịch của A và tìm A^{-1} (nếu có)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 8 & 12 \\ 4 & 8 & 14 & 19 \end{pmatrix}$$

Giải.

$$(A|I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 7 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 8 & 12 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 14 & 19 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} d_2 - 2d_1 \\ d_3 - 3d_1 \\ d_4 - 4d_1 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
& \xrightarrow[\begin{smallmatrix} d_1-2d_2 \\ d_3-d_2 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} d_1-2d_2 \\ d_3-d_2 \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 7 & 6 & 5 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
& \xrightarrow[\begin{smallmatrix} d_1-7d_3 \\ d_2+2d_3 \\ d_4-2d_3 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} d_1-7d_3 \\ d_2+2d_3 \\ d_4-2d_3 \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 12 & 5 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -4 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{array} \right) \\
& \xrightarrow[\begin{smallmatrix} d_1+d_4 \\ d_2-d_4 \\ d_3-d_4 \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} d_1+d_4 \\ d_2-d_4 \\ d_3-d_4 \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 10 & 7 & -9 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 2 & -2 & 1 \end{array} \right) = (I_4 | A^{-1}).
\end{aligned}$$

Như vậy, A khả nghịch và

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 10 & 7 & -9 & 1 \\ -2 & -3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Xét tính khả nghịch của A và tìm A^{-1} (nếu có)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Giải.

$$(A|I_4) = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l}
\begin{array}{l} d_2-2d_1 \\ d_3-3d_1 \\ d_4-4d_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -7 & -11 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -9 & -12 & -19 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
\\
\begin{array}{l} d_3-2d_2 \\ d_4-3d_2 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 2 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
\\
\begin{array}{l} d_4-d_3 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -8 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{0} & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)
\end{array}$$

Ta có $r(A) < 4$. Suy ra A không khả nghịch.

1.5. Phương trình ma trận

Định lý. Cho các ma trận $A, A' \in M_n(\mathbb{R})$ khả nghịch và $B \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$, $C \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $D \in M_n(\mathbb{R})$. Khi đó

- (i) $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$;
- (ii) $XA = C \Leftrightarrow X = CA^{-1}$;
- (iii) $AXA' = D \Leftrightarrow X = A^{-1}DA'^{-1}$.

Ví dụ. Giải phương trình $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Giải. Phương trình có dạng $AX = B$. Ta có A khả nghịch và

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}. \text{ Suy ra } X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 16 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Giải phương trình $X \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Giải. Phương trình có dạng $XA = B$. Ta có A khả nghịch và

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$X = BA^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 & 11 \\ -21 & 13 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ. Tìm ma trận X thỏa

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Giải. Phương trình có dạng $AXB = C$. Ta có A, B khả nghịch và

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Suy ra

$$\begin{aligned} X = A^{-1}CB^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 3 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 17 & -13 \\ -11 & 9 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ví dụ. Tìm ma trận X thỏa $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Giải. Đặt $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \\ x_5 & x_6 \end{pmatrix}$. Ta có

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 - x_5 & x_2 + 2x_4 - x_6 \\ -2x_1 - 3x_3 + x_5 & -2x_2 - 3x_4 + x_6 \end{pmatrix}.$$

Suy ra hệ phương trình
$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_5 = 1; \\ x_2 + 2x_4 - x_6 = -2; \\ -2x_1 - 3x_3 + x_5 = -1 \\ -2x_2 - 3x_4 + x_6 = 1. \end{cases}$$

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right)$$

Suy ra

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = -1 - t; \\ x_2 = 4 - s; \\ x_3 = 1 + t; \\ x_4 = -3 + s; \\ x_5 = t; \\ x_6 = s. \end{array} \right. \quad t, s \in \mathbb{R}$$

$$\text{Vậy } X = \begin{pmatrix} -1 - t & 4 - s \\ 1 + t & -3 + s \\ t & s \end{pmatrix} \text{ với } t, s \text{ tự do.}$$