价值学习

DQN

deep Q-network，就是用神经网络近似 Q^*

（最优的动作价值函数，即让 Q_π 最大化的那个函数）。

Q-Function

目标：打赢游戏(最大化奖励)

问题：假设知道了 $Q^*(s,a)$ 函数，哪个是最好的动作?

- 显然，最好的动作是 $a^* = \underset{a}{argmax}\, Q^*(s,a)$ （ $Q^*(s,a)$ 可以给每个动作打分，就像一个先知，能告诉你每个动作带来的平均回报，选平均回报最高的那个动作)

挑战：我们并不知道 $Q^*(s,a)$ ，价值学习在于学习一个函数来近似 $Q^*(s,a)$

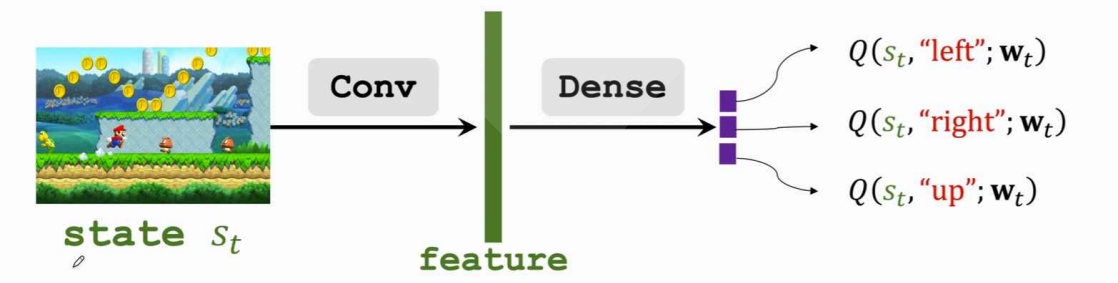
- 解决：Deep Q-network(DQN)，
- 用一个神经网络 $Q(s,a;w)$ 来近似 $Q^*(s,a)$ 函数。
- 神经网络参数是 w ，输入是状态 s，输出是对所有可能动作的打分，每一个动作对应一个分数。
- 通过奖励来学习这个神经网络，这个网络给动作的打分就会逐渐改进，越来越精准
- 玩上几百万次超级玛丽，就能训练出一个先知。

对于不同的案例，DQN的结构会不一样。

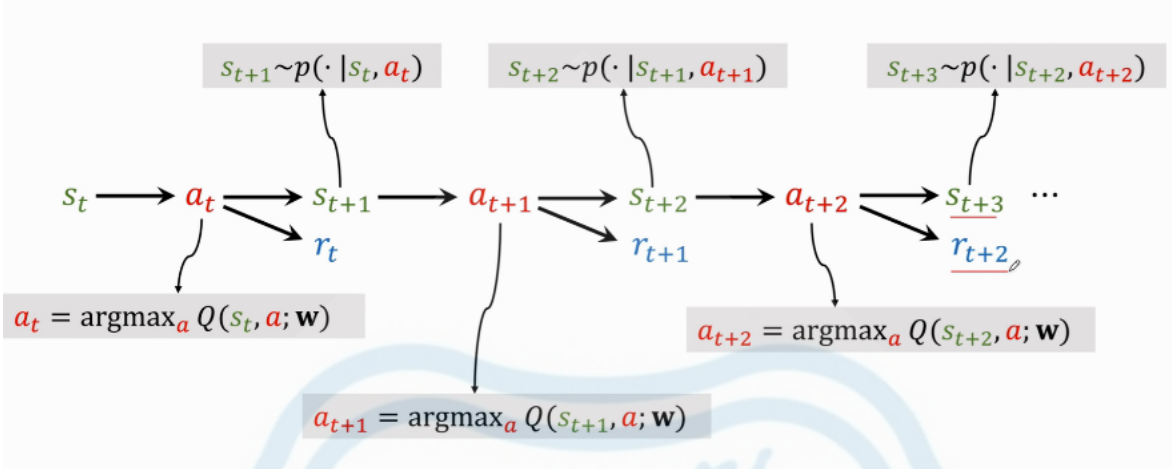
举例

如果是玩超级玛丽

- 屏幕画面作为输入
- 用一个卷积层把图片变成特征向量
- 最后用几个全连接层把特征映射到一个输出的向量
- 输出的向量就是对动作的打分，向量每一个元素对应一个动作



DQN打游戏



- $s_t \rightarrow a_t$:当前观测到状态 s_t ，用DQN $a_t = \underset{a}{argmax}\, Q^*(s,a)$ 把 s_t 作为输入，给所有动作打分，选出分数最高的动作 a_t 。
- agent 执行 a_t 这个动作后，环境会改变状态，用状态转移函数 $p(\cdot|s_t, a_t)$ 随机抽样得出一个新状态 s_{t+1} 。
- 环境还会告诉这一步的奖励 r_t ，奖励就是强化学习中的监督信号，DQN靠这些奖励来训练。
- 有了新的状态 s_{t+1} ，DQN对所有动作打分，agent选择分数最高动作 a_{t+1} 。
- 执行 a_{t+1} 后，环境会再更新一个状态 s_{t+2} ，给出一个奖励 r_{t+1} 。
- 然后不断循环往复，直到游戏结束

TD学习

如何训练DQN？最常使用Temporal Difference Learning。

案例推理

- 要开车从纽约到亚特兰大
- 有一个模型 $Q(w)$ 预测出开车出行的开销是1000分钟。
- 这个预测可能不准，需要更多的人提供数据来训练模型使得预测更准。

1. 问题：需要怎样的数据？如何更新模型。
   a. 出发之前让模型做一个预测，记作 q ，$q = Q(w)$ ，比如 $q = 1000$ 。
   b. 出发了，到了目的地，发现其实只用了860分钟，获取真实值 $y = 860$ 。
   c. 实际值 y 与预测值 q 有偏差，这就造成了 loss 损失
   d. loss 定义为实际值与预测值的平方差： $L = \frac{1}{2}(q-y)^2$
   e. 对损失 L 关于参数 w 求导： $\frac{\partial L}{\partial w} = \frac{\partial q}{\partial w} \cdot \frac{\partial L}{\partial q} = (q-y) \cdot \frac{\partial Q(w)}{\partial w}$

f. 梯度求出来了，可以用梯度下降来更新模型参数 w： $w_{t+1} = w_t - \alpha \cdot \frac{\partial L}{\partial w}|_{w=w_t}$

缺点：这种算法比较naive，因为要完成整个旅程才能完成对模型做一次更新。

2. 问题：假如不完成整个旅行，能否完成对模型的更新?
   a. 中途路过 DC 不走了，没去亚特兰大，可以用TD算法完成对模型的更新
   b. 出发前预测：NYC -> Atlanta 要花1000分钟，这是预测值。
   c. 到了 DC 时，发现用了 300 分钟，这是部分的真实观测值。
   d. 模型这时候又告知，DC -> Atlanta 要花 600 分钟，这是模型第二阶段的预测值。

- 模型原本预测： $Q(w) = 1000$
- 到 DC 的新预测：300 + 600 = 900，这个新的 900 估值就叫 TD target 。
- TD target $y = 900$ 虽然也是个估计预测值，但是比最初的 1000 分钟更可靠，因为有事实成分。
- 把 TD target y 就当作真实值： $L = \frac{1}{2}(Q(w) - y)^2$ ，其中 $Q(w) - y$ 称为TD error。
- 求导： $\frac{\partial L}{\partial w} = (1000 - 900) \cdot \frac{\partial Q(w)}{\partial w}$
- 梯度下降更新模型参数 w： $w_{t+1} = w_t - \alpha \cdot \frac{\partial L}{\partial w}|_{w=w_t}$

TD 算法道理

- 模型预测 NYC -> Atlanta = 1000, DC -> Atlanta = 600，两者差为400，也就是NYC -> DC = 400
- 但实际只花了300分钟
- 预计时间与真实时间之间的差就是TD error： $\delta = 400 - 300 = 100$
- TD 算法目标在于让 TD error 尽量接近 0 。

TD 用在 DQN

上述例子中有这样一个 $T_{NYC \to ATL} \approx T_{NYC \to DC} + T_{DC \to ATL}$ 公式：

想要用 TD 算法，就必须要用类似这样的公式，等式左边有一项，右边有两项，其中有一项是真实观测的值。

在深度强化学习中也有一个这样的公式： $Q(s_t, a_t; w) = r_t + \gamma \cdot Q(s_{t+1}, a_{t+1}; w)$ 。

- 左边是 DQN 在 t 时刻做的估计，这是未来奖励总和的期望，相当于 NYC 到 ATL 的预估总时间。
- 右边 r_t 是真实观测到的奖励，相当于 NYC 到 DC 。
- $Q(s_{t+1}, a_{t+1}; w)$ 是 DQN 在 t+1 时刻做的估计，相当于 DC 到 ATL 的预估时间。

为什么会有一个这样的公式?

❗ 回顾 Discounted return: $U_t = R_t + \gamma R_{t+1} + \gamma^2 R_{t+2} + \gamma^3 R_{t+3} + \cdots$

提出 γ 就得到 $= R_t + \gamma(R_{t+1} + \gamma R_{t+2} + \gamma^2 R_{t+3} + \cdots)$

后面这些项就可以写成 U_{t+1} ,即 $= R_t + \gamma U_{t+1}$

这样就得到： $U_t = R_t + \gamma \cdot U_{t+1}$

📌 现在要把 TD 算法用到 DQN上

- t 时刻 DQN 输出的值 $Q(s_t, a_t; w)$ 是对 U_t 作出的估计 $\mathbb{E}[U_t]$ ，类似于 NYC 到 ATL 的预估总时间。
- 下一时刻 DQN 输出的值 $Q(s_{t+1}, a_{t+1}; w)$ 是对 U_{t+1} 作出的估计 $\mathbb{E}[U_{t+1}]$ ，类似于 DC 到 ATL 的第二段预估时间。
- 由于 $U_t = R_t + \gamma \cdot U_{t+1}$
- 所以 $\underbrace{Q(s_t, a_t; w)}_{\approx \mathbb{E}[U_t]} \approx \mathbb{E}[R_t + \gamma \cdot \underbrace{Q(s_{t+1}, a_{t+1}; w)}_{\approx \mathbb{E}[U_{t+1}]}]$
- $\underbrace{Q(s_t, a_t; w)}_{prediction} = \underbrace{r_t + \gamma \cdot Q(s_{t+1}, a_{t+1}; w)}_{TD\ target}$

有了 prediction 和 TD target ，就可以更新 DQN 的模型参数了。

- t 时刻模型做出预测 $Q(s_t, a_t; w)$
- 到了 t+1时刻，观测到了真实奖励 r_t 以及新的状态 s_{t+1} ，然后算出新的动作 a_{t+1} 。
- 这时候可以计算 TD target 记作 y_t ，其中 $y_t = r_t + \gamma \cdot Q(s_{t+1}, a_{t+1}; w)$
- t+1 时刻的动作 a_{t+1} 怎么算的？DQN 要对每个动作打分，取分最高的，所以等于Q 函数关于a 求最大化： $y_t = r_t + \gamma \cdot \max_a Q(s_{t+1}, a_t; w)$
- 我们希望预测 $Q(s_t, a_t; w)$ 尽可能接近 TD target，以此计算Loss:
  $L_t = \frac{1}{2}[Q(s_t, a_t; w) - y_t]^2$
- 做梯度下降： $w_{t+1} = w_t - \alpha \cdot \frac{\partial L}{\partial w}|_{w=w_t}$

总结

3. 用到了最优动作价值函数： s_{t+1} $Q^*(s_t, a_t) = \mathbb{E}[U_t | S_t = s_t, A_t = a_t]$,对 U_t 求期望，能对每个动作打分，反映每个动作好坏程度，用这个函数来控制agent。
4. DQN 就是用一个神经网络 $Q(s, a; w)$ 来近似 $Q^*(s, a)$

a. 神经网络参数是 w，输入是状态 s

b. 输出是对所有可能动作 $a \in A$ 的打分

5. TD 算法过程

a. 观测当前状态 $S_t = s_t$ 和已经执行的动作 $A_t = a_t$

b. 用 DQN 做一次计算，输入是状态 s_t ，输出是对动作 a_t 的打分记作 q_t ，$q_t = Q(s_t, a_t; w)$

c. 反向传播对 DQN 求导： $d_t = \frac{\partial Q(s_t, a_t; w)}{\partial w}|_{w=w_t}$

d. 由于执行了动作 a_t ，环境会更新状态为，并给出奖励 r_t 。

e. 求出TD target： $y_t = r_t + \gamma \cdot \max_a Q(s_{t+1}, a_{t+1}; w)$

f. 做一次梯度下降更新参数 w， $w_{t+1} = w_t - \alpha \cdot (q_t - y_t) \cdot d_t$